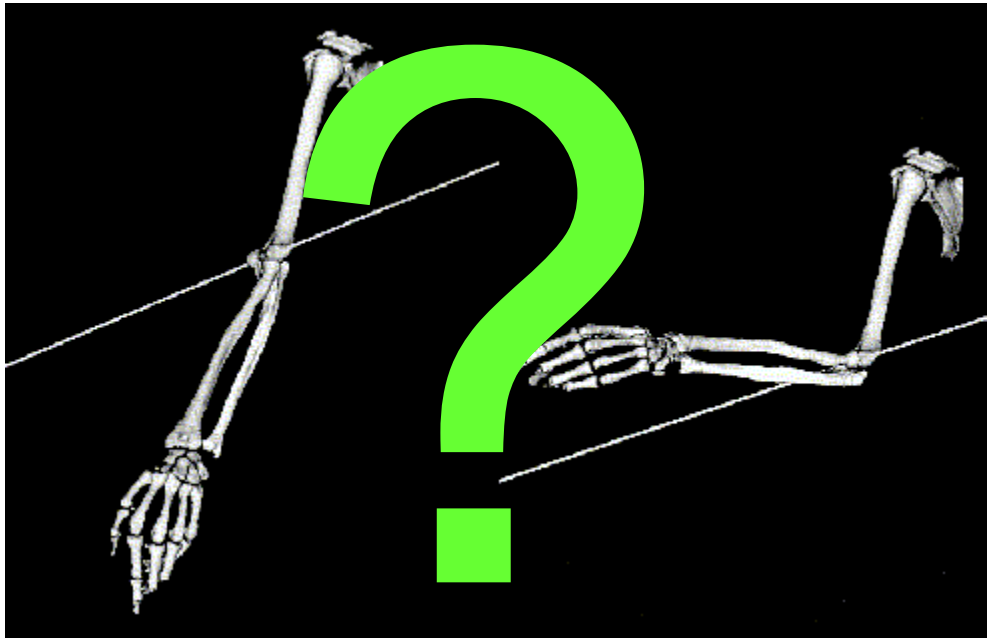
Curso de Graduação em Engenharia Mecânica
Cinemática dos Mecanismos

Aula 3

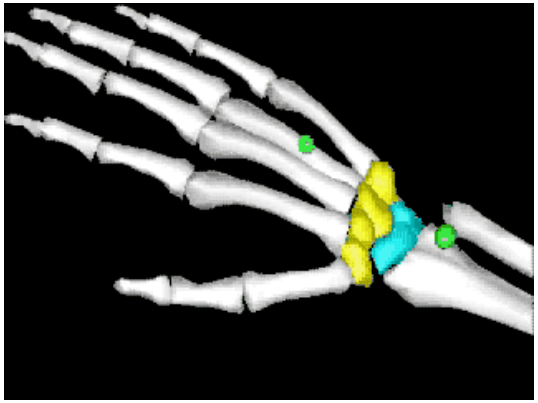
Tipos de Mecanismos: Simples e Complexos

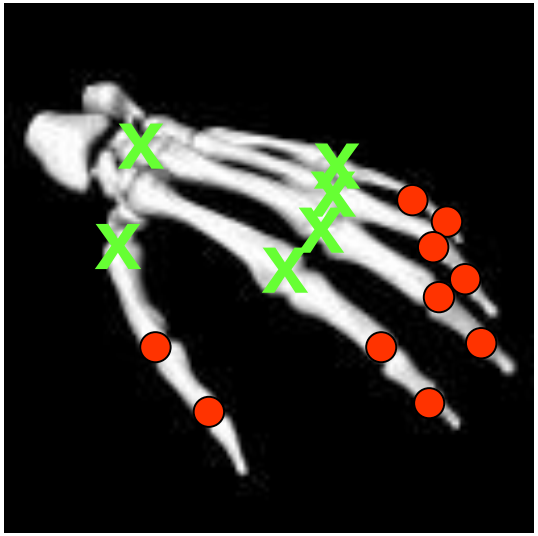
Pergunta da Aula Passada

Quantos GDLs possui o conjunto mão, ante-braço e braço?



Pergunta da Aula Passada

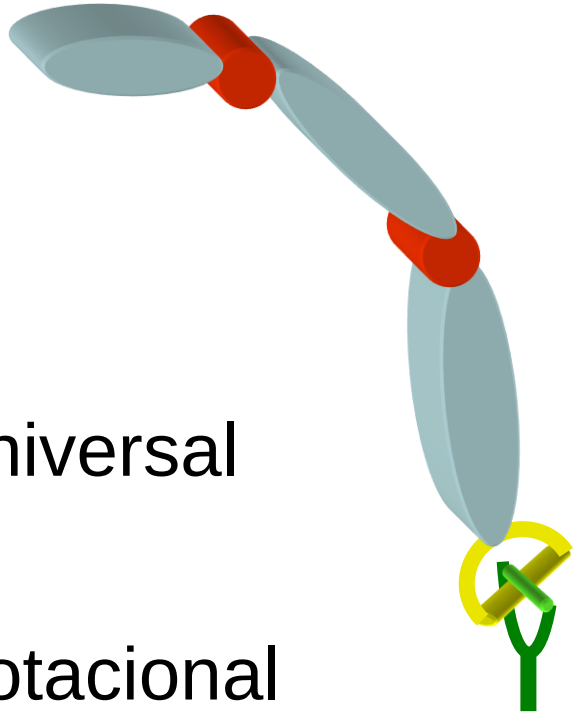




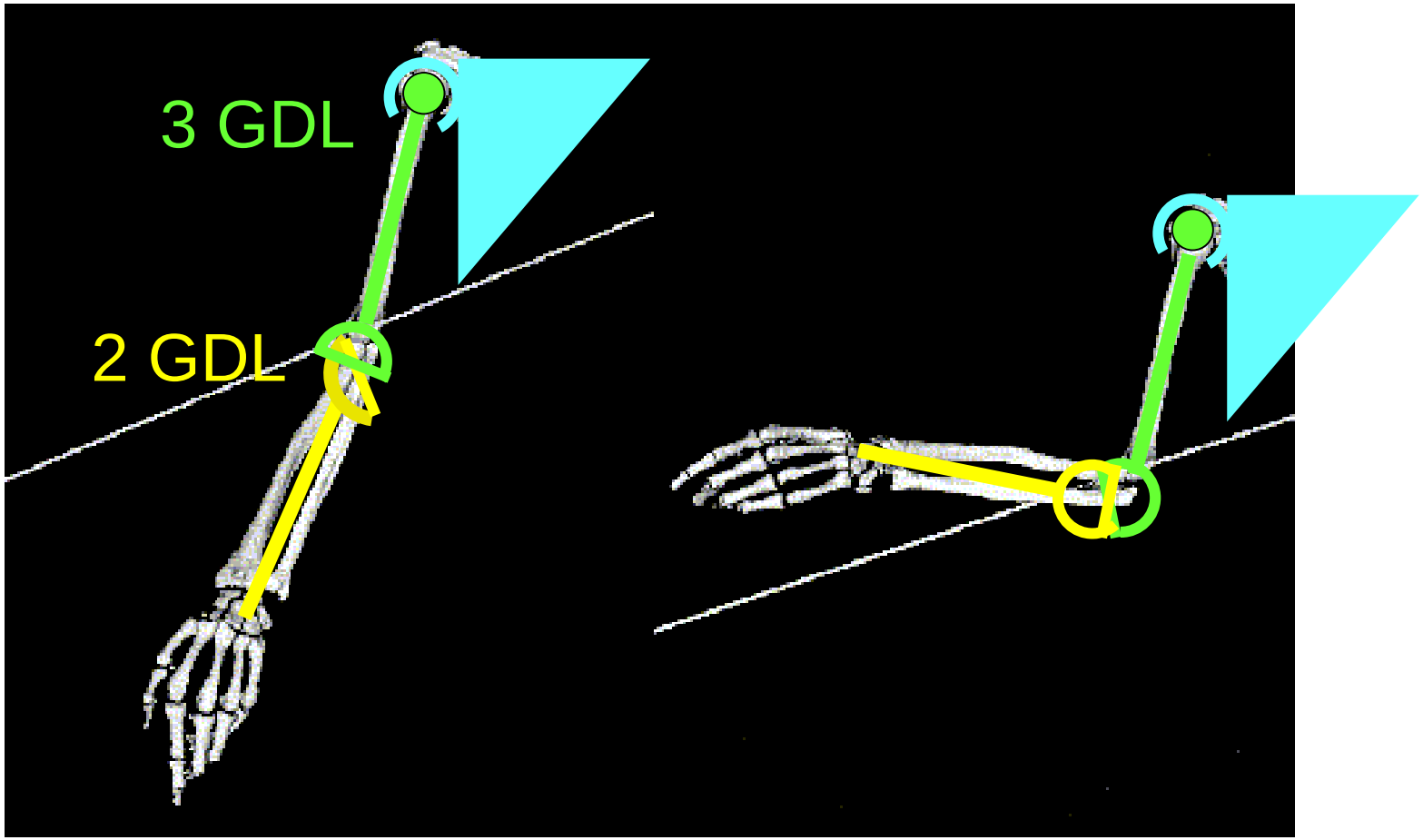
22 DOFs

X Junta Universal

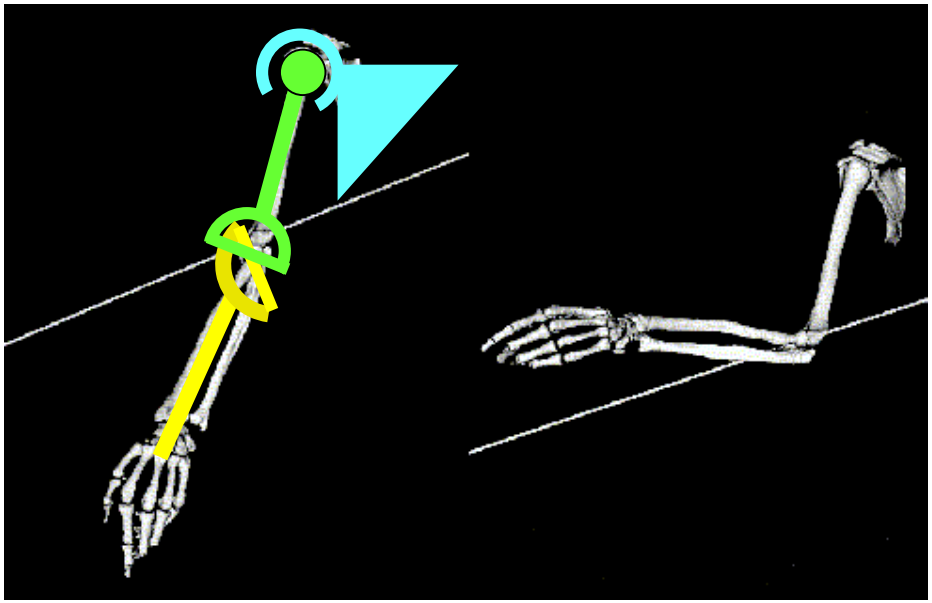
Junta Rotacional



Pergunta da Aula Passada



Pergunta da Aula Passada



No Total:

22 DOFs da mão
3 DOFs do braço
2 DOFs do ante-braço

---

27 DOFs

Sumário da Aula

- Classificação de Mecanismos
- Lei de Grashof
- Lei de Reuleaux
- Mecanismos Simples
  - 4 Barras
  - Biela Manivela
- Mecanismos Complexos

Classificação de Mecanismos

L. E. Torfason

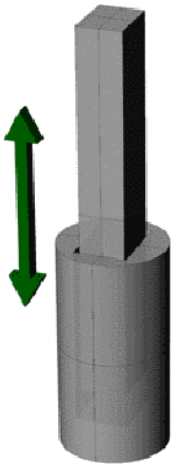
- Feita pelo tipo de transformação de movimento (262 Classes)
- 12 Classes Principais:

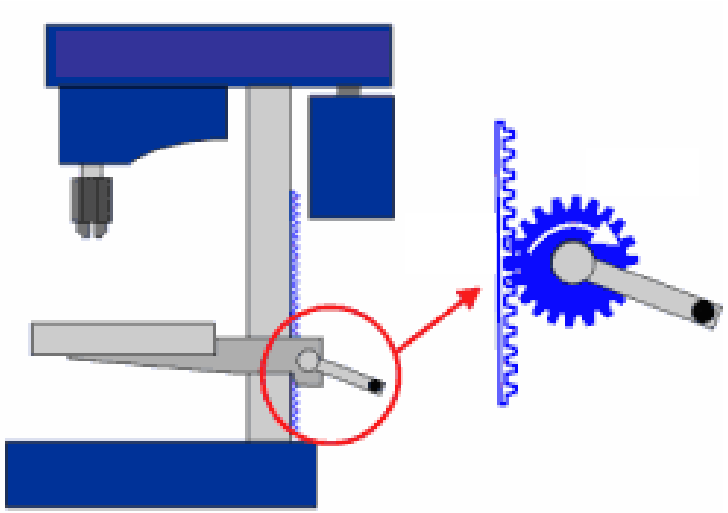
  - Atuadores Lineares
  - Ajuste Fino
  - Hesitação, Pausa e Parada
  - Posicionamento
  - Catraca
  - Contadores
  - Osciladores
  - Retorno Rápido
  - Reversíveis
  - Acoplamento
  - Geradores de Curvas
  - Geradores de Retas

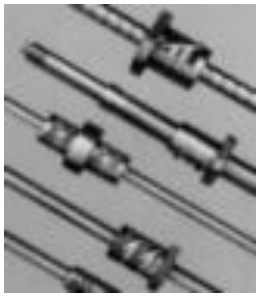
Classificação de Mecanismos

L. E. Torfason – Atuadores Lineares

- Parafuso Fixo, Porca Fixa
- Cilindro Pneumático ou Hidráulico
- Pinhão - Cremalheira







Classificação de Mecanismos

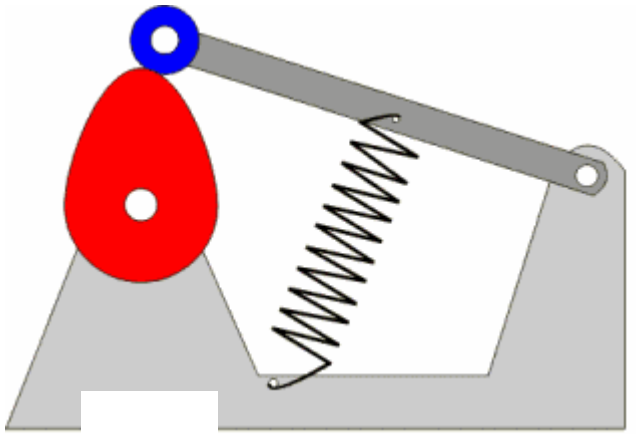
L. E. Torfason – Ajuste Fino

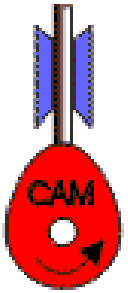
- Parafuso e Porca
- Engrenagens

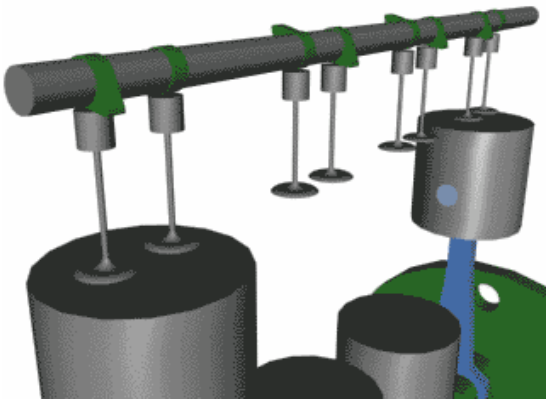
Classificação de Mecanismos

L. E. Torfason – Hesitação, Pausa e Parada

- Came-Seguidor



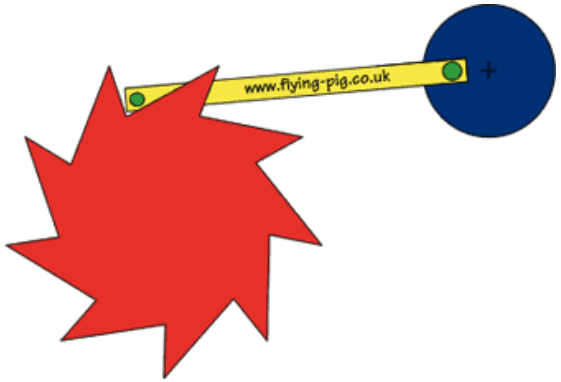


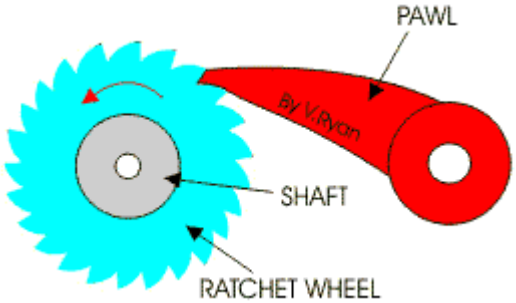


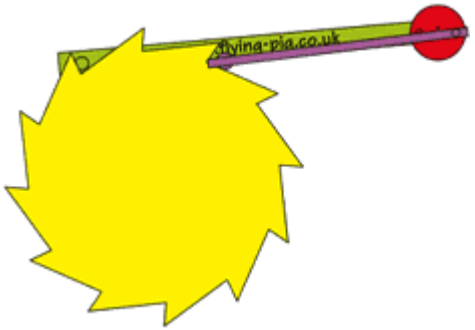
Classificação de Mecanismos

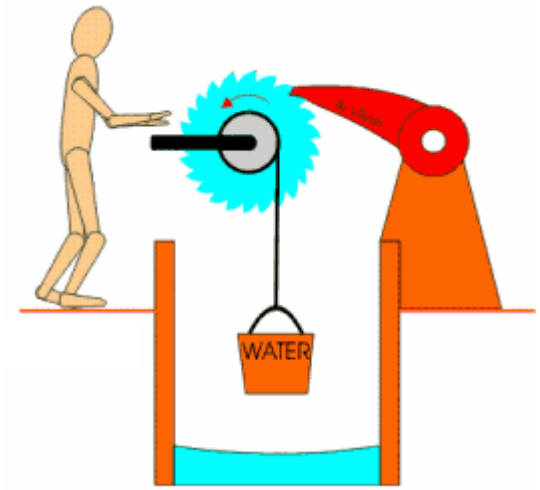
L. E. Torfason – Catraca

- Ratchet





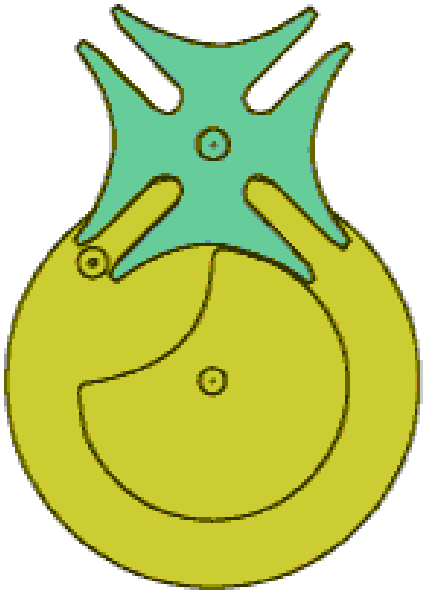




Classificação de Mecanismos

L. E. Torfason – Contadores

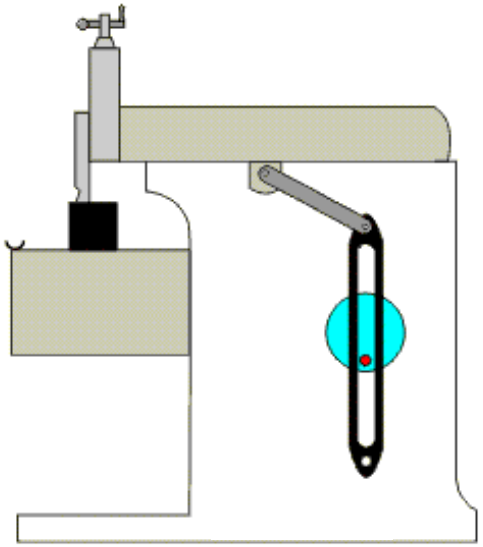
- Roda de Genebra
- Ratchet

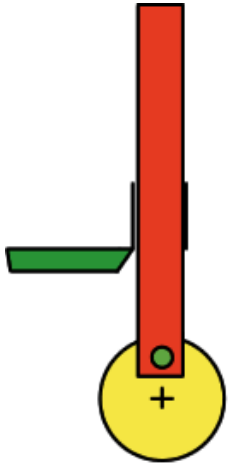


Classificação de Mecanismos

L. E. Torfason – Osciladores

- Biela-Manivela

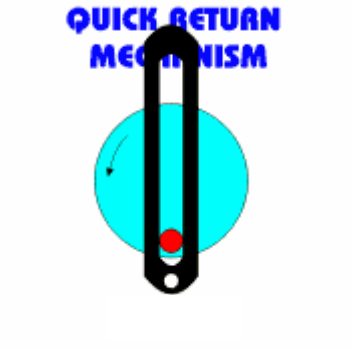




Classificação de Mecanismos

L. E. Torfason – Retorno Rápido

- Mecanismo de Retorno Rápido
  - Caracterizam-se por possuírem 2 fases de movimento para uma dada velocidade angular constante
  - Relação de tempo “ida-retorno”
  - Podem ser constituídos apenas por uma biela manivela ou por mecanismos mais complexos.



Classificação de Mecanismos

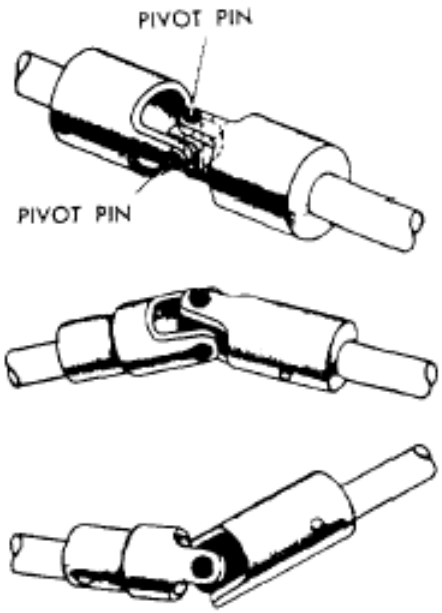
L. E. Torfason – Reversíveis

- Permitem que a direção de rotação possa ser alterada
  - Engrenagens
  - 4 Barras
  - Etc.

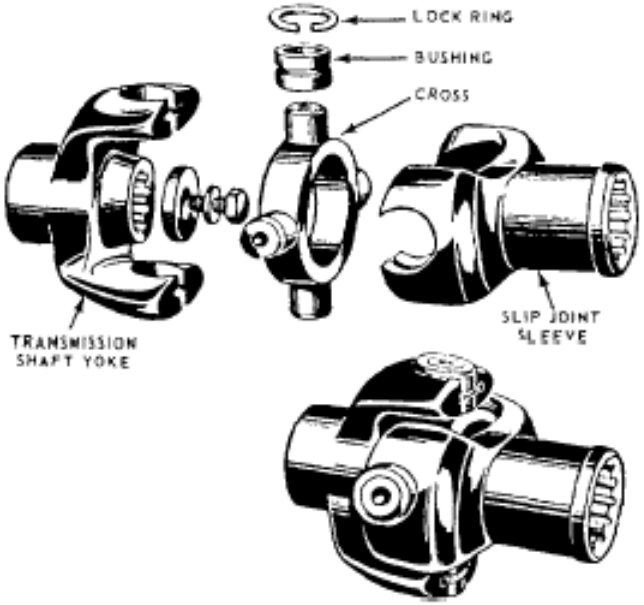
Classificação de Mecanismos

L. E. Torfason – Acoplamento

- Junta Universal
- Correia
- Corrente



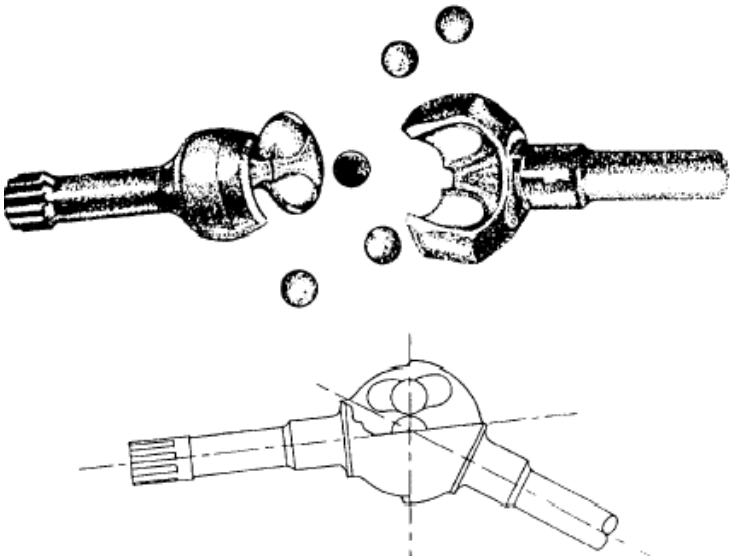
Hooke



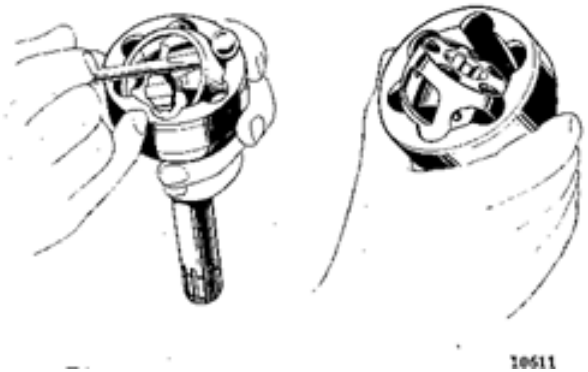
Ring and Trunnion

Classificação de Mecanismos

L. E. Torfason – Acoplamento



Bendix-Zeiss

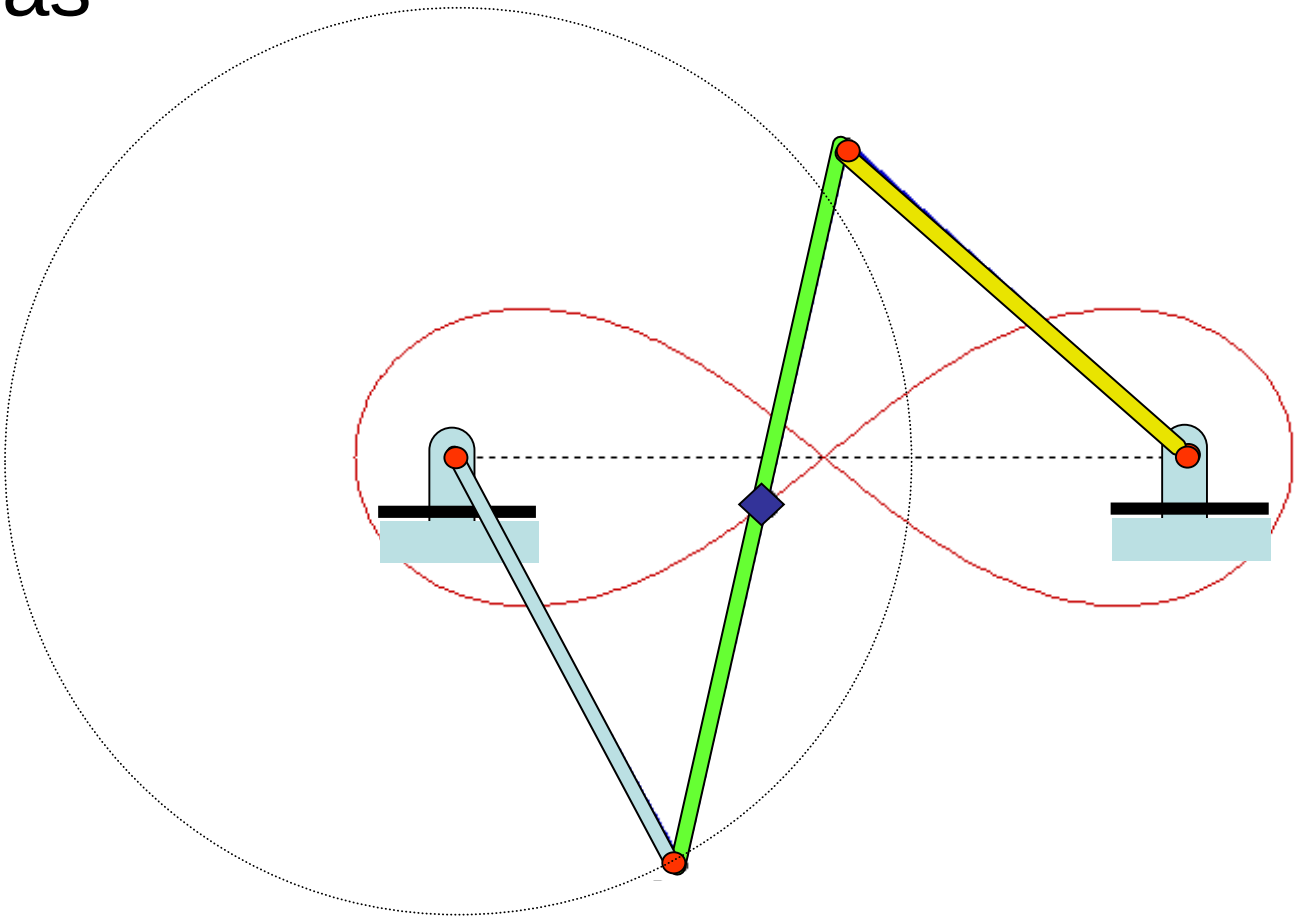


Rzeppa

Classificação de Mecanismos

L. E. Torfason – Geradores de Curvas

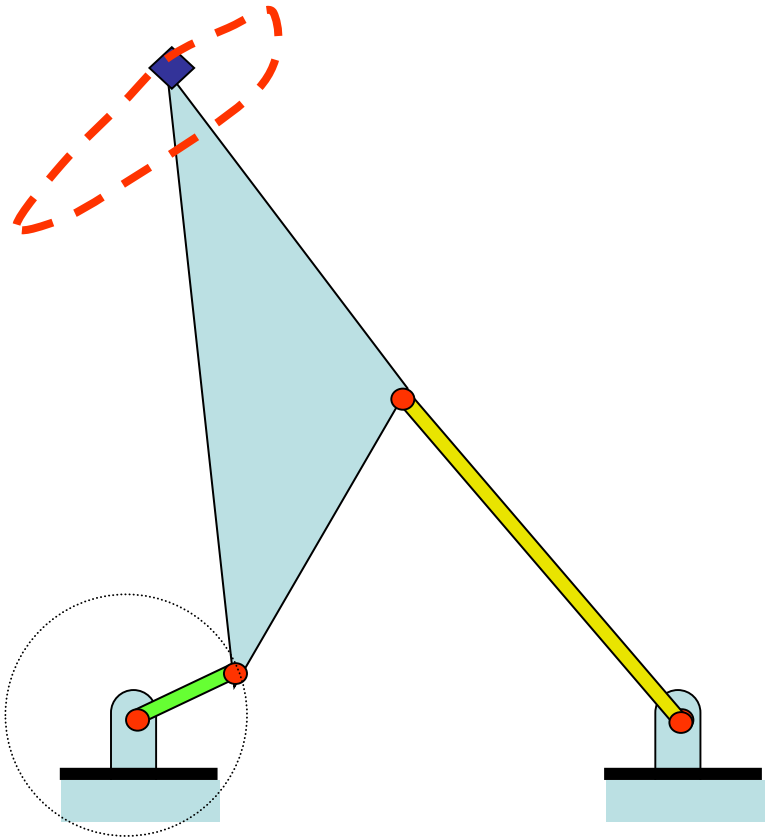
- 4 Barras

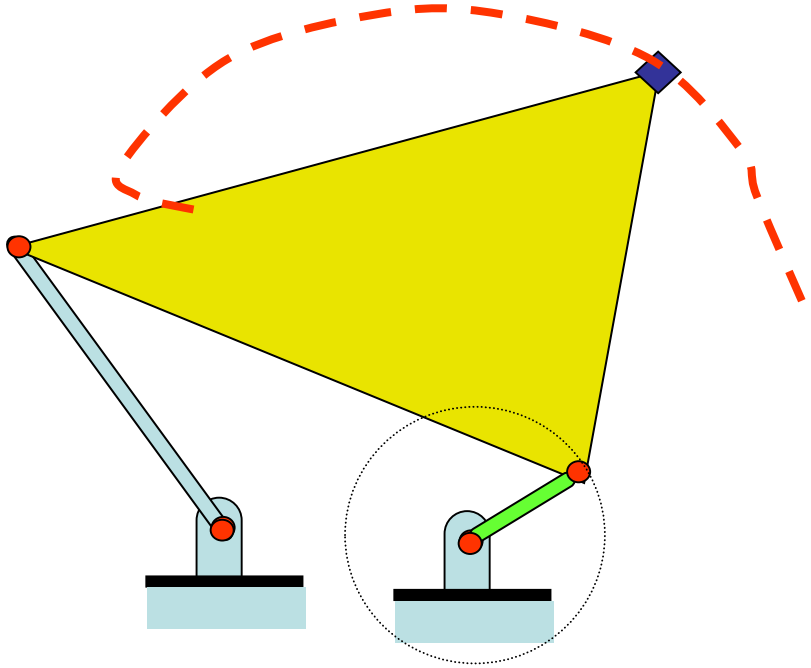


Classificação de Mecanismos

L. E. Torfason – Geradores de Curvas

- 4 Barras

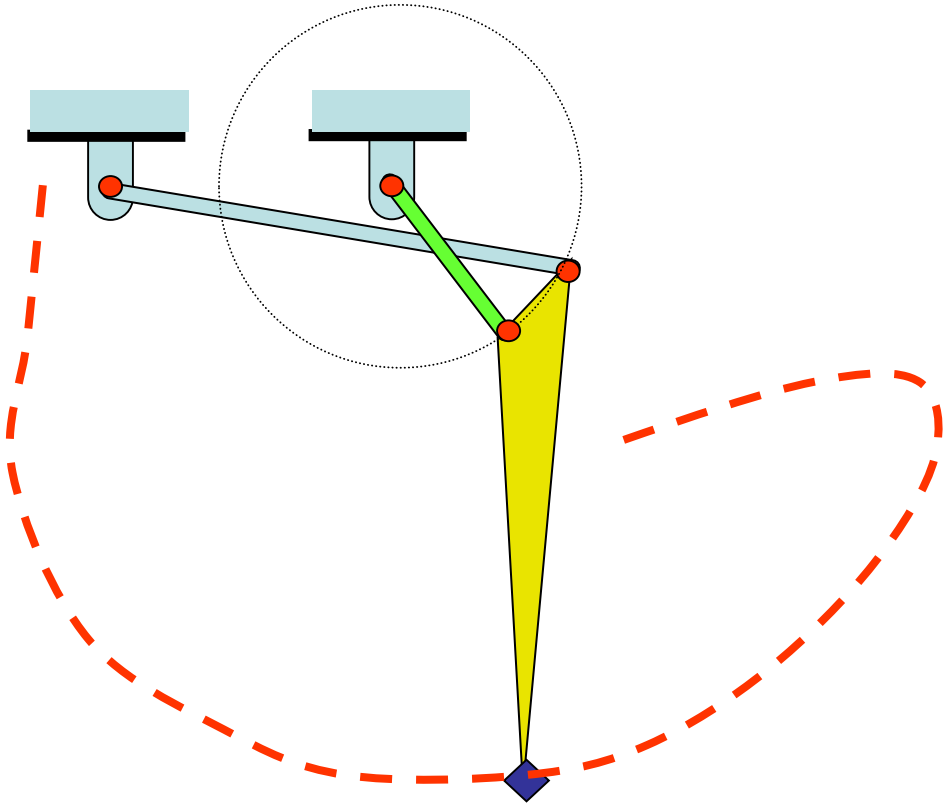


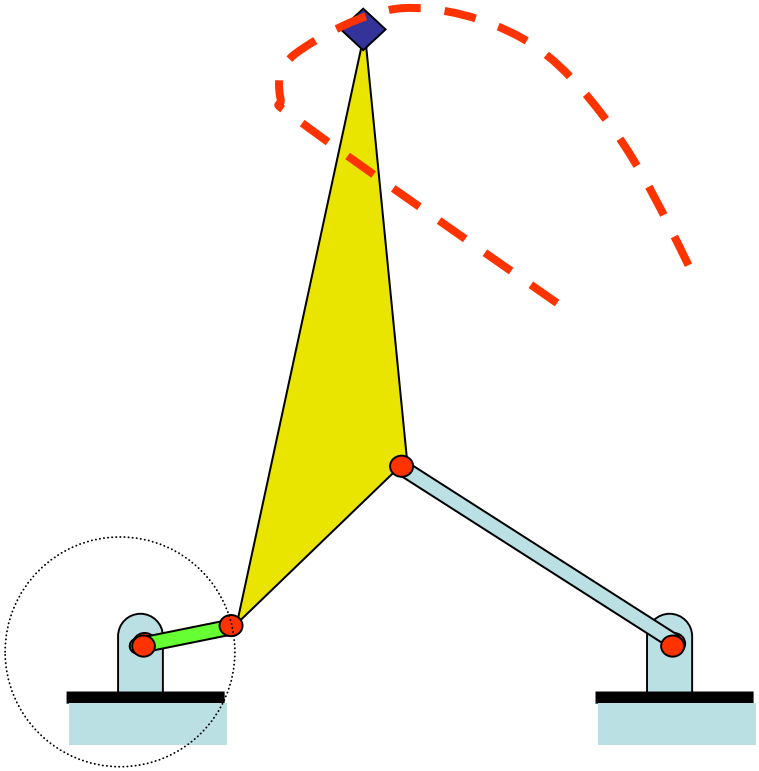


Classificação de Mecanismos

L. E. Torfason – Geradores de Curvas

- 4 Barras

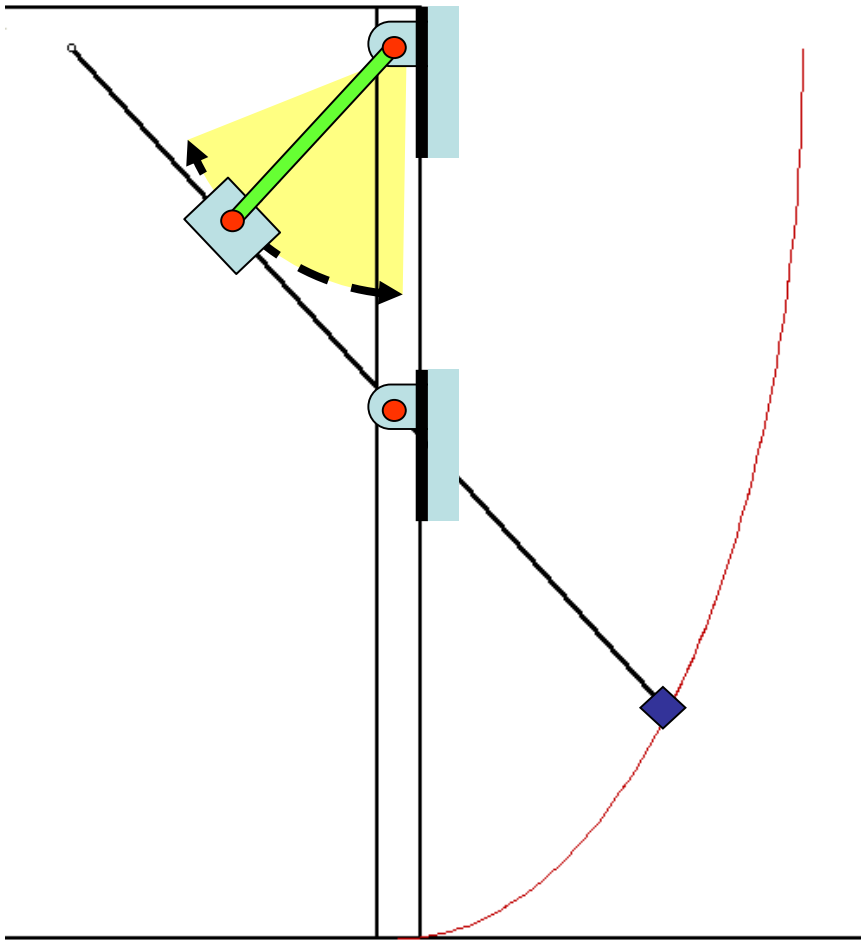




Classificação de Mecanismos

L. E. Torfason – Geradores de Curvas

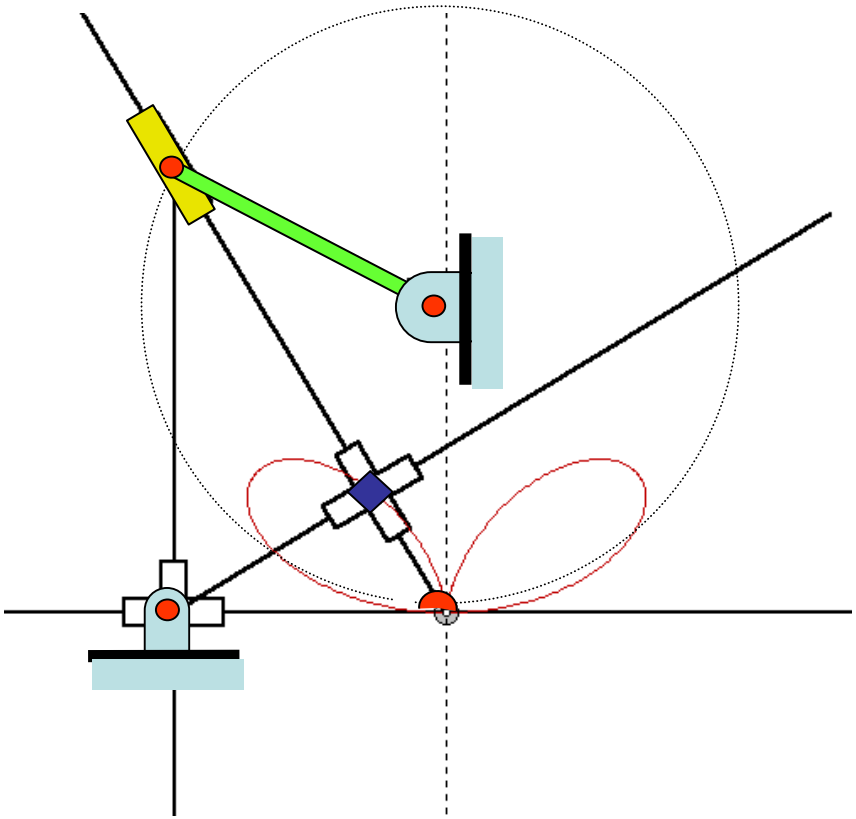
- Biela-Manivela



Classificação de Mecanismos

L. E. Torfason – Geradores de Curvas

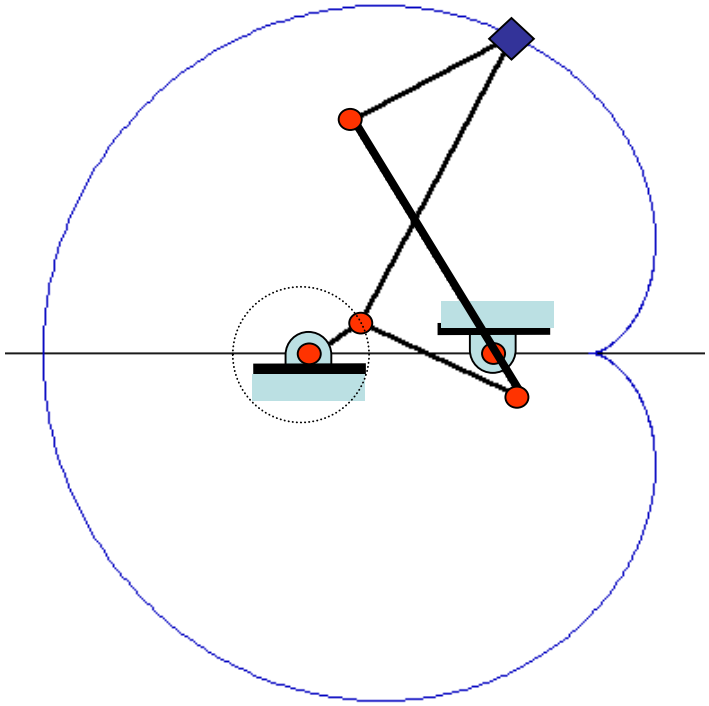
- Biela-Manivela

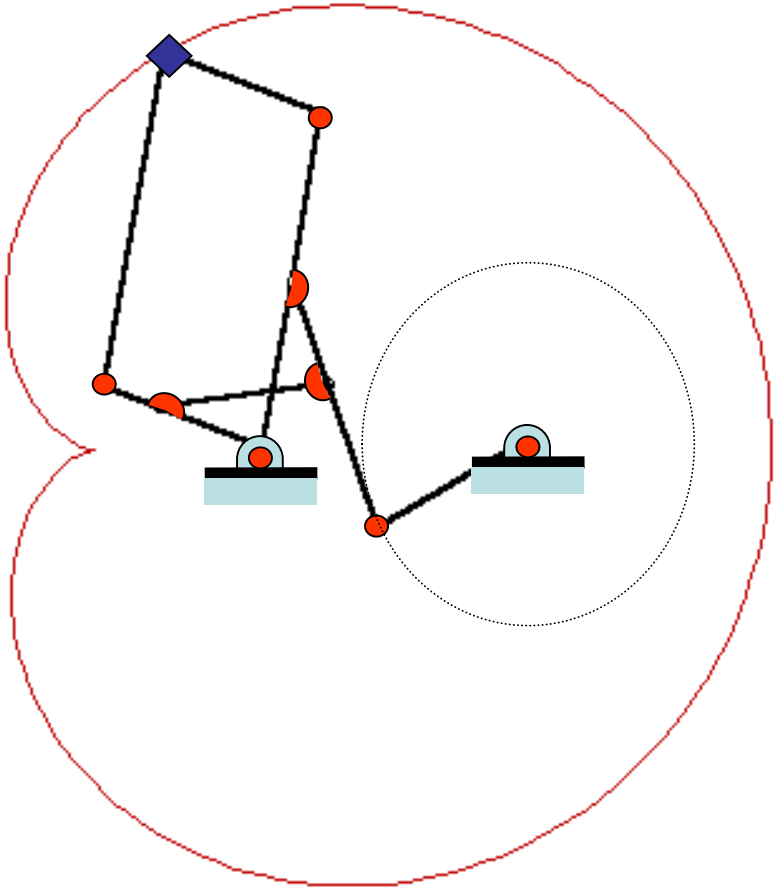


Classificação de Mecanismos

L. E. Torfason – Geradores de Curvas

- 6 Barras
- 8 Barras

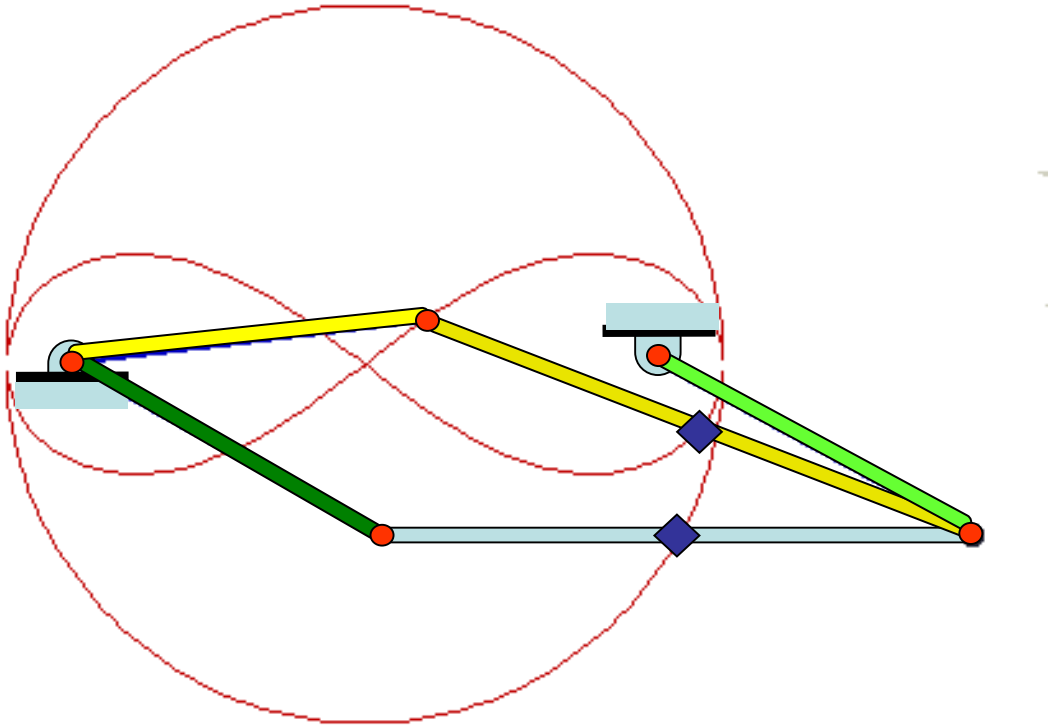




Classificação de Mecanismos

L. E. Torfason – Geradores de Curvas

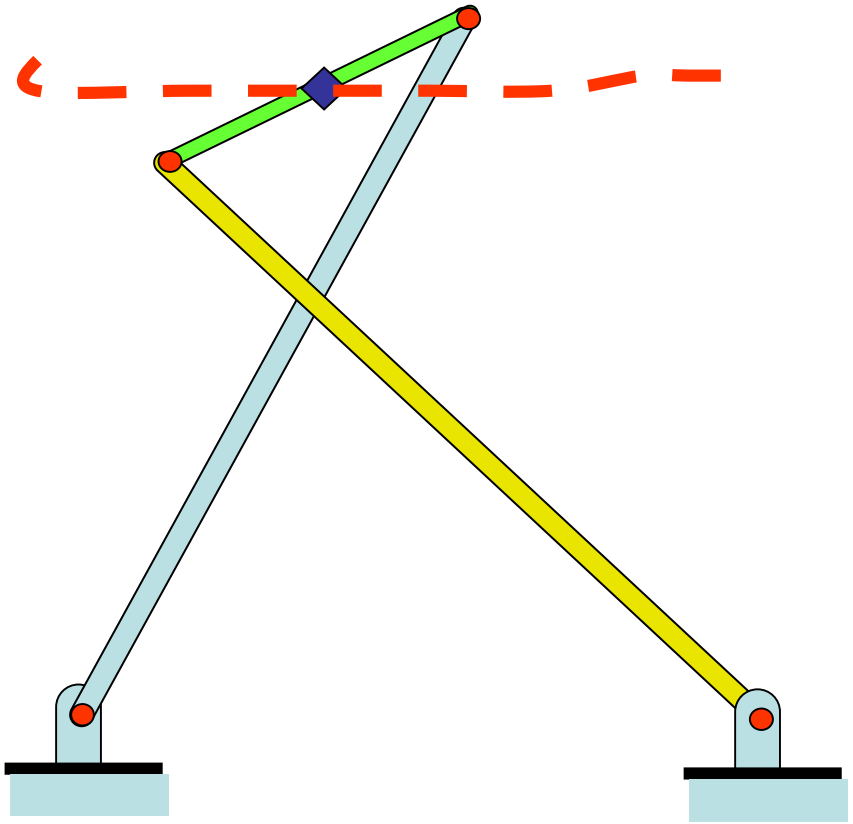
- 6 Barras



Classificação de Mecanismos

L. E. Torfason – Geradores de Retas

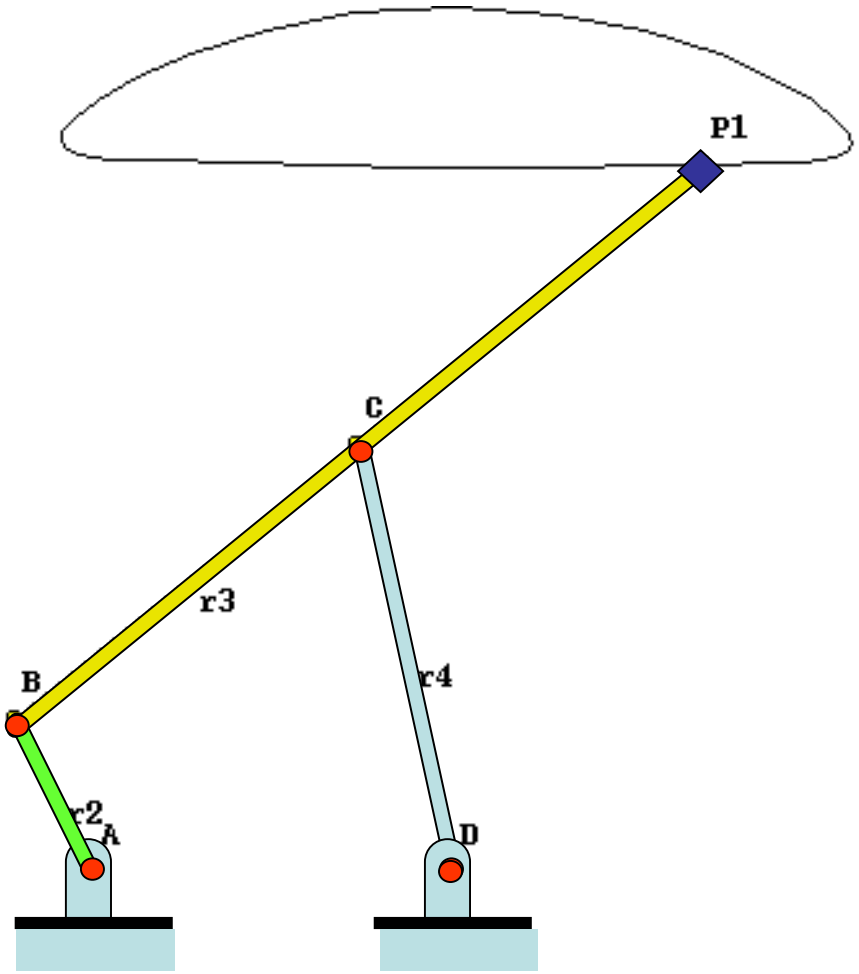
- Chebyshev



Classificação de Mecanismos

L. E. Torfason – Geradores de Retas

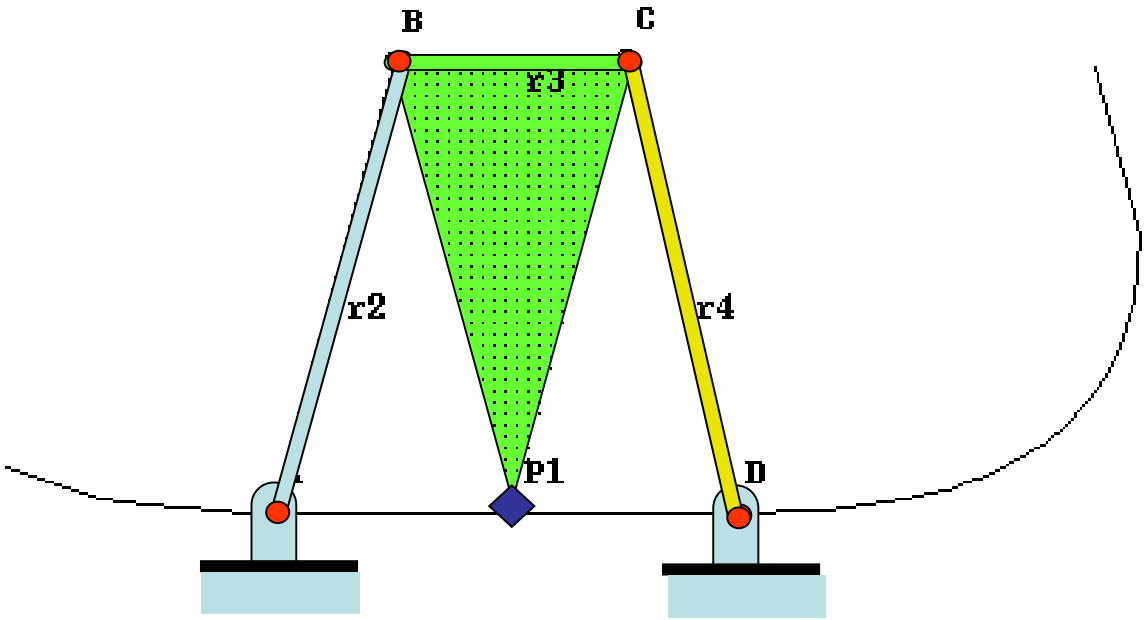
- Hoeckens



Classificação de Mecanismos

L. E. Torfason – Geradores de Retas

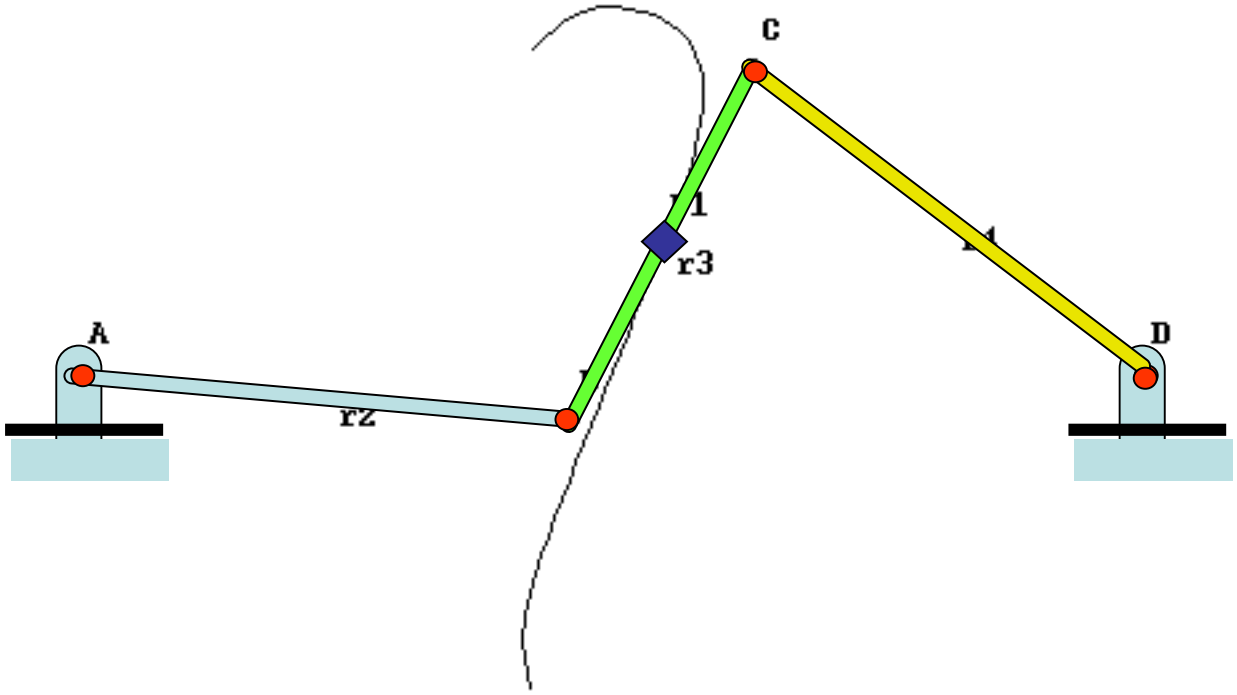
- Roberts



Classificação de Mecanismos

L. E. Torfason – Geradores de Retas

- Watt



Sumário da Aula

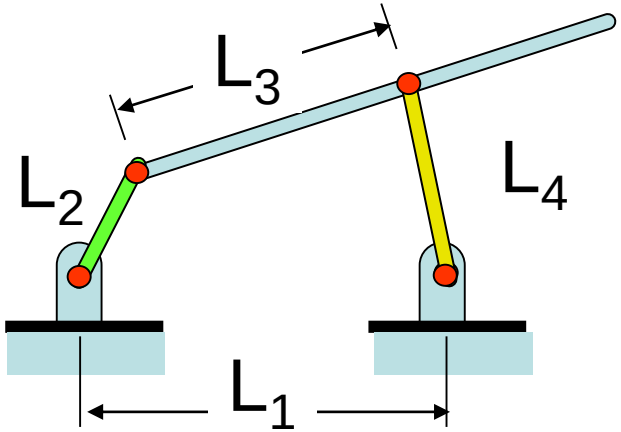
- Classificação de Mecanismos
- Lei de Grashof
- Lei de Reuleaux
- Mecanismos Simples
  - 4 Barras
  - Biela Manivela
- Mecanismos Complexos

Lei de Grashof

- Franz Grashof

Condição para rotação completa da barra motriz de mecanismo 4-barras

"A soma da menor e da maior barra de um mecanismo 4-barras **<u>não</u>** pode ser maior que a soma das 2 outras barras"

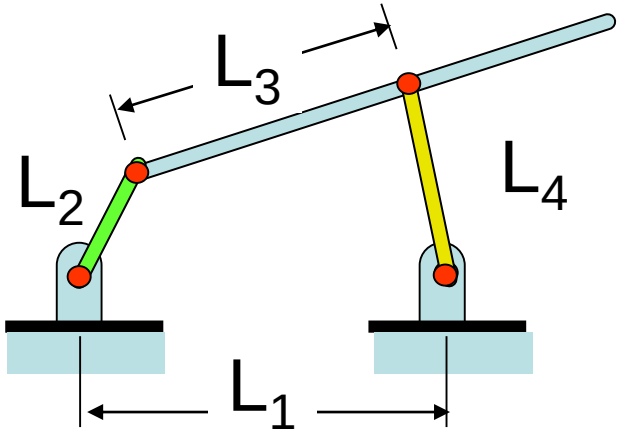


$Me = L_2$ $\quad$ $Ma = L_1$

$b_1 = L_3$ $\quad$ $b_2 = L_4$

Lei de Grashof

Equação



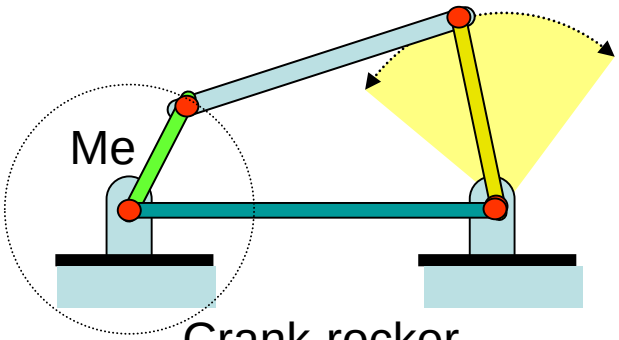
$$Me + Ma \leqslant b_1 + b_2$$

$Me = L_2$ $\quad$ $Ma = L_1$

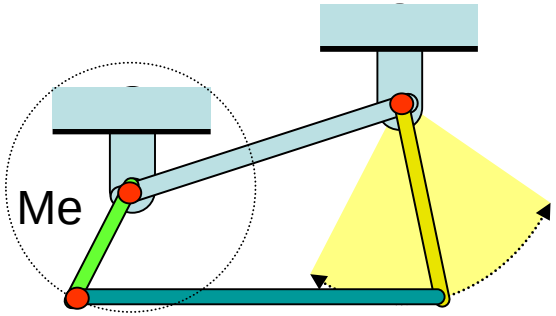
$b_1 = L_3$ $\quad$ $b_2 = L_4$

Lei de Grashof

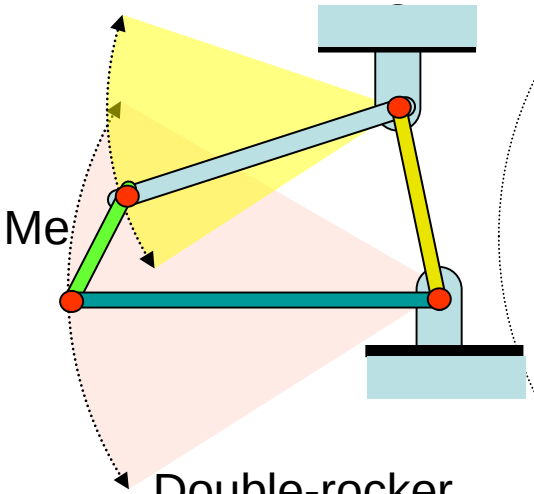
Inversões do Mecanismo 4-Barras



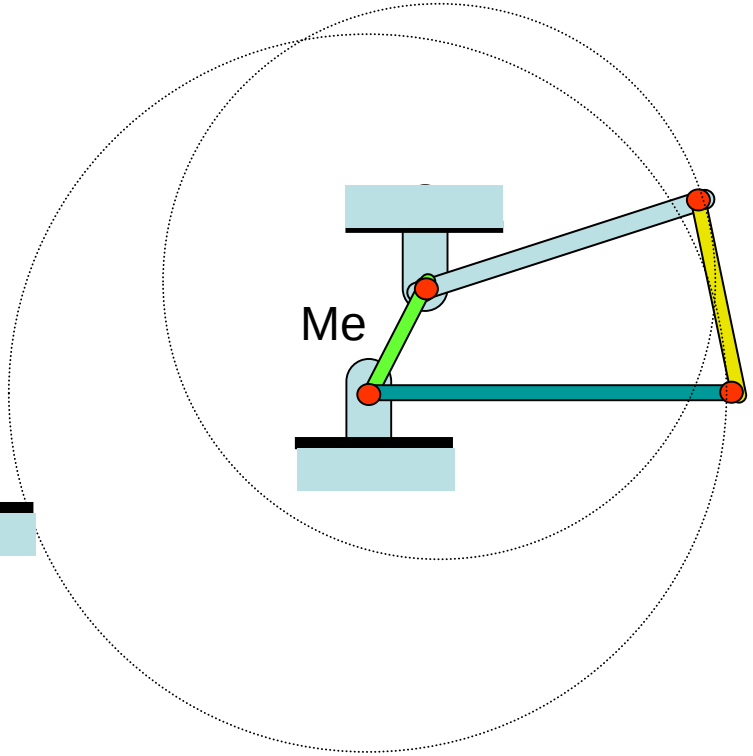
Crank-rocker
Manivela-balancim



Crank-rocker
Manivela-balancim



Double-rocker
Duplo balancim

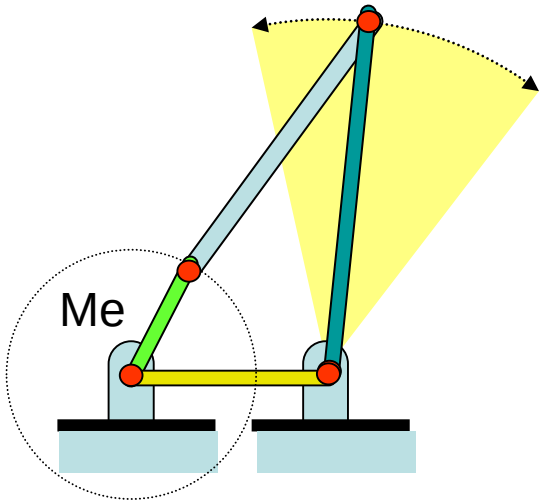


Double-crank
Dupla manivela

Me adjacente a Ma

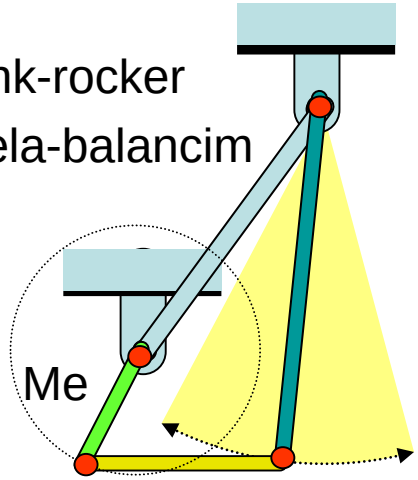
Lei de Grashof

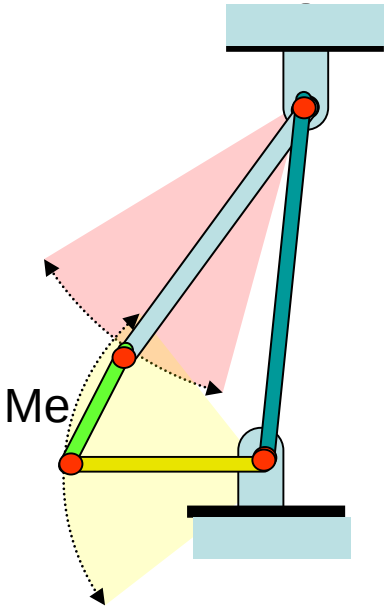
Inversões do Mecanismo 4-Barras



Crank-rocker

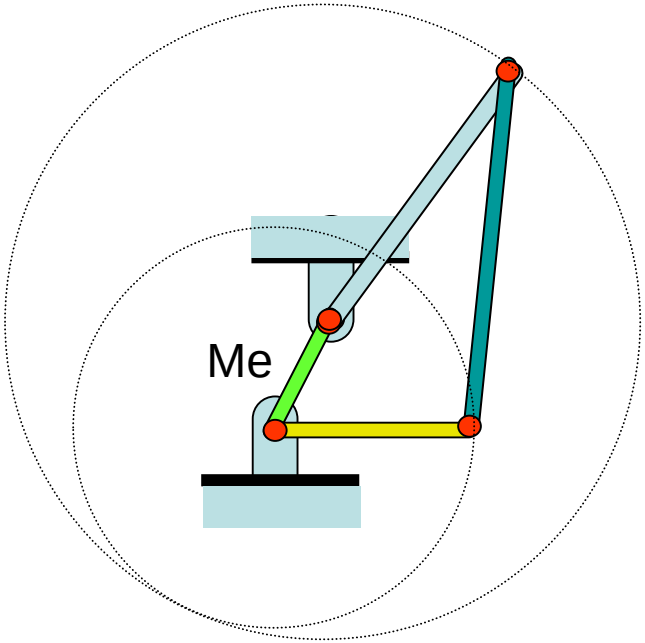
Manivela-balancim





Double-rocker

Duplo balancim



Double-crank

Dupla manivela

Me oposto a Ma

Sumário da Aula

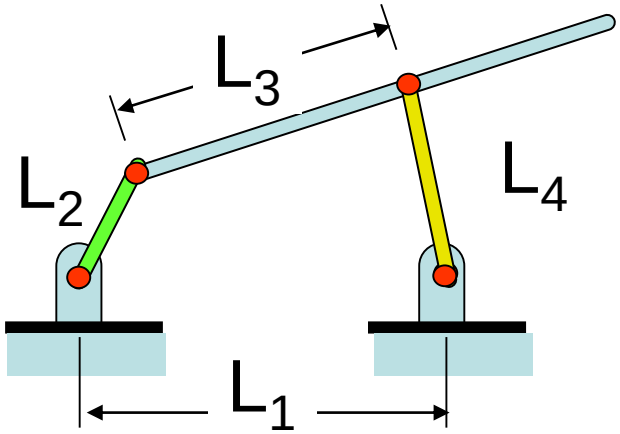
- Classificação de Mecanismos
- Lei de Grashof
- Lei de Reuleaux
- Mecanismos Simples
  - 4 Barras
  - Biela Manivela
- Mecanismos Complexos

Lei de Reuleaux

Montagem do Mecanismo 4-Barras

- Franz Reuleaux

Condição para a montagem de mecanismos 4-barras



L_2: link motor

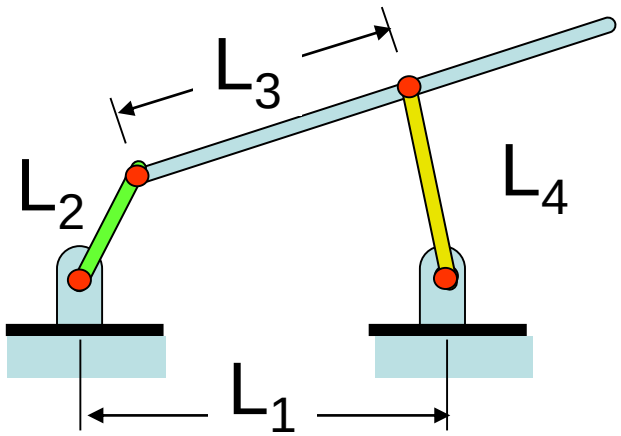
L_1: solo

L_3: link acoplador

L_4: link seguidor

Lei de Reuleaux

Montagem do Mecanismo 4-Barras



$$L_2 + L_3 + L_4 \geqslant L_1$$

$$L_2 + L_3 - L_4 \leqslant L_1$$

$$L_2 + L_1 + L_4 \geqslant L_3$$

$$L_2 + L_1 - L_4 \leqslant L_3$$

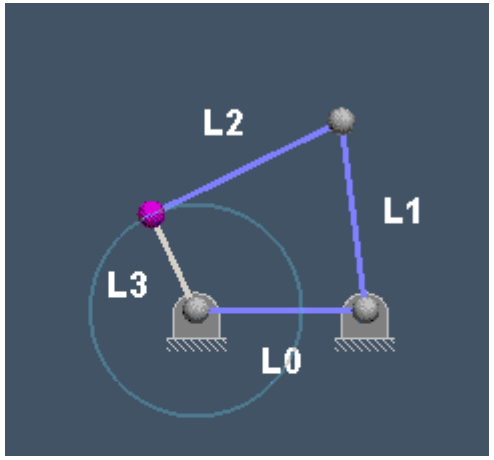
Sumário da Aula

- Classificação de Mecanismos
- Lei de Grashof
- Lei de Reuleaux
- Mecanismos Simples
  - 4 Barras
  - Biela Manivela
- Mecanismos Complexos

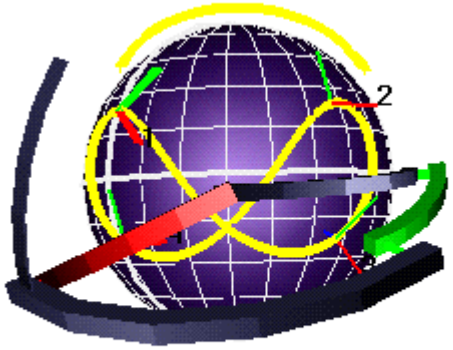
Mecanismos Simples

4 Barras

- Mecanismo Simples
- Movimento Oscilatório do link seguidor



- 4 Barras Plano
- 4 Barras Espacial



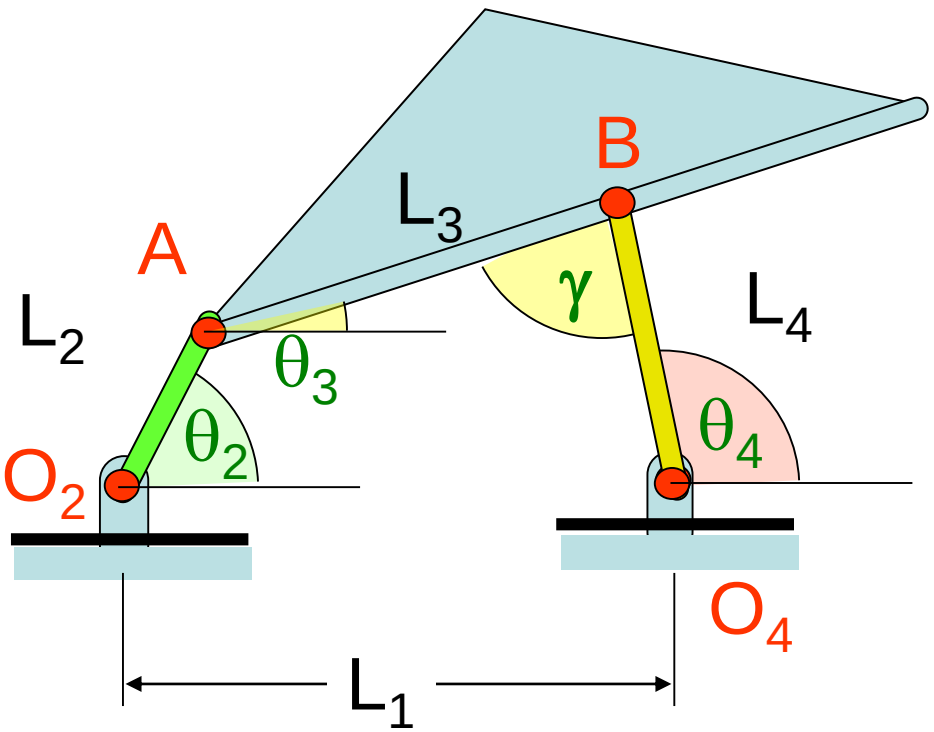
Mecanismos Simples

4 Barras – Exemplo de Aplicação

- Porta malas de veículos de passeio

Mecanismos Simples

4 Barras - Equacionamento



L_2: link motor

L_1: solo

L_3: link acoplador

L_4: link seguidor

θ_2: âng. da barra motriz

θ_4: âng. da barra seguidora

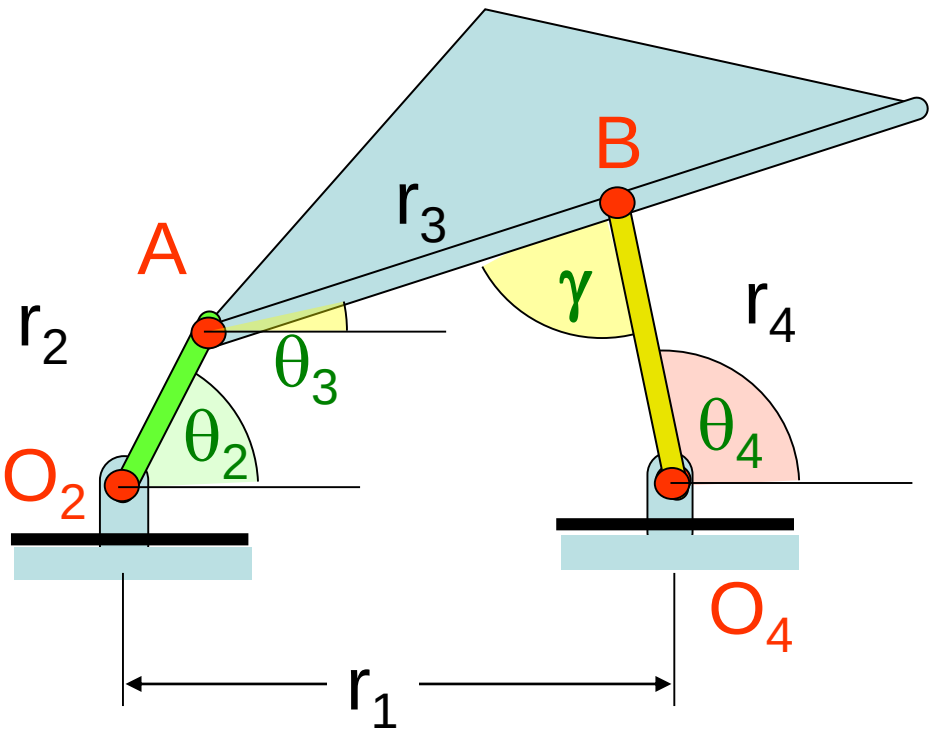
θ_3: âng. da barra acopladora

γ: âng. de transmissão

Mecanismos Simples

4 Barras - Equacionamento

- Adotando a mesma nomenclatura do Mabie



r_2: link motor

r_1: solo

r_3: link acoplador

r_4: link seguidor

θ_2: âng. da barra motriz

θ_4: âng. da barra seguidora

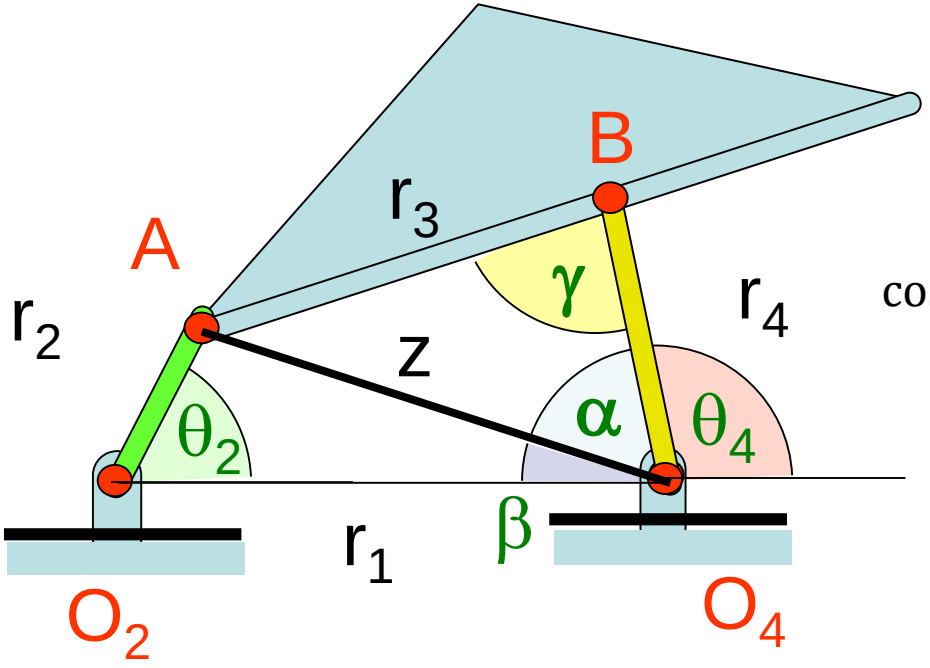
θ_3: âng. da barra acopladora

γ: âng. de transmissão

Mecanismos Simples

4 Barras - Equacionamento

- Aplicando-se a Lei dos cossenos nos triângulos Δ AO_2O_4 e Δ ABO_4



$$z^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos(\theta_2)$$

$$z^2 = r_3^2 + r_4^2 - 2r_3r_4\cos(\gamma)$$

Igualando z^2, temos:

$$\cos(\gamma) = \frac{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos(\theta_2) - r_3^2 - r_4^2}{-2r_3r_4}$$

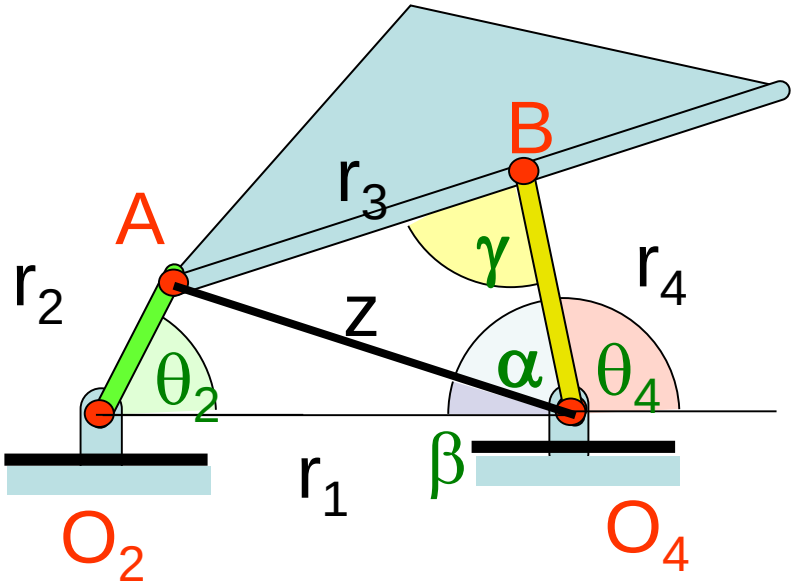
$$\gamma = \cos^{-1}\left(\frac{z^2 - r_3^2 - r_4^2}{-2r_3r_4}\right)$$

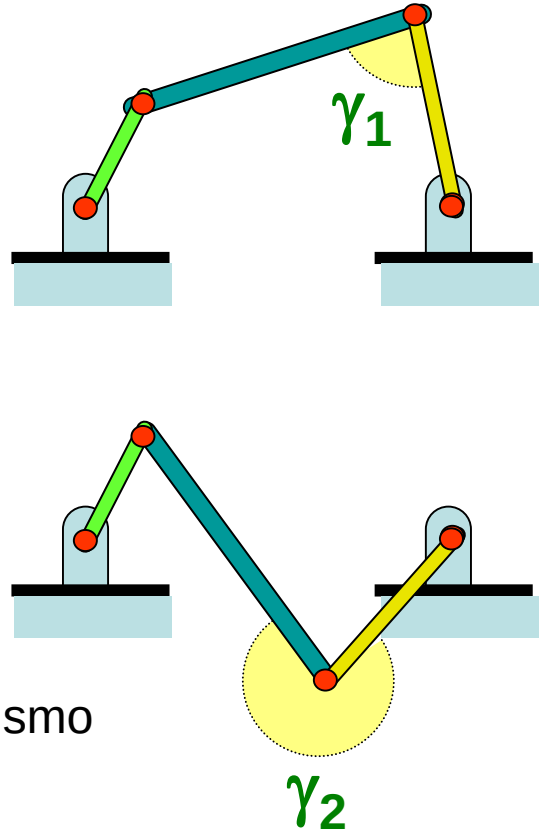
Ou seja, conhecendo-se os valores dos links (r_i's), o ângulo de transmissão será função apenas do ângulo de entrada θ_2.

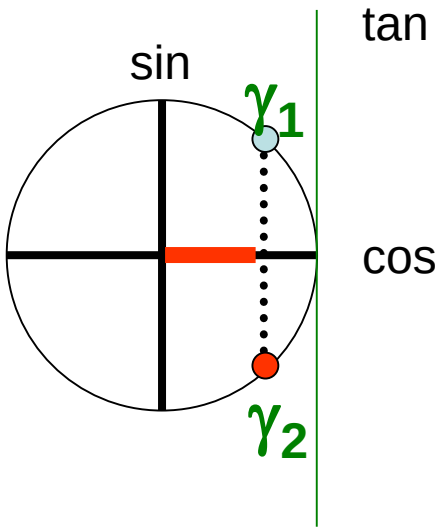
Mecanismos Simples

4 Barras - Equacionamento

- A solução para γ pode apresentar dois valores, cujo significado físico é mostrado abaixo:





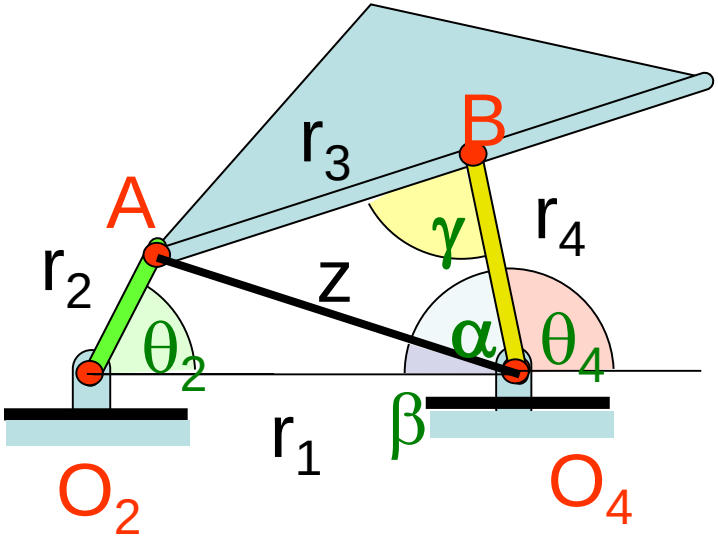


Ou seja, para um mesmo θ_2 o mecanismo pode apresentar duas configurações possíveis.

Mecanismos Simples

4 Barras - Equacionamento

- E os ângulos α, β e θ_4 serão:



$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{z^2 + r_4^2 - r_3^2}{2zr_4}\right)$$

$$\beta = \cos^{-1}\left(\frac{z^2 + r_1^2 - r_2^2}{2zr_1}\right)$$

$$\theta_4 = 180^\circ - (\alpha + \beta)$$

Se o ângulo de transmissão, γ, for menor que 40°, a tendência é, no mecanismo real, de travamento por atrito.

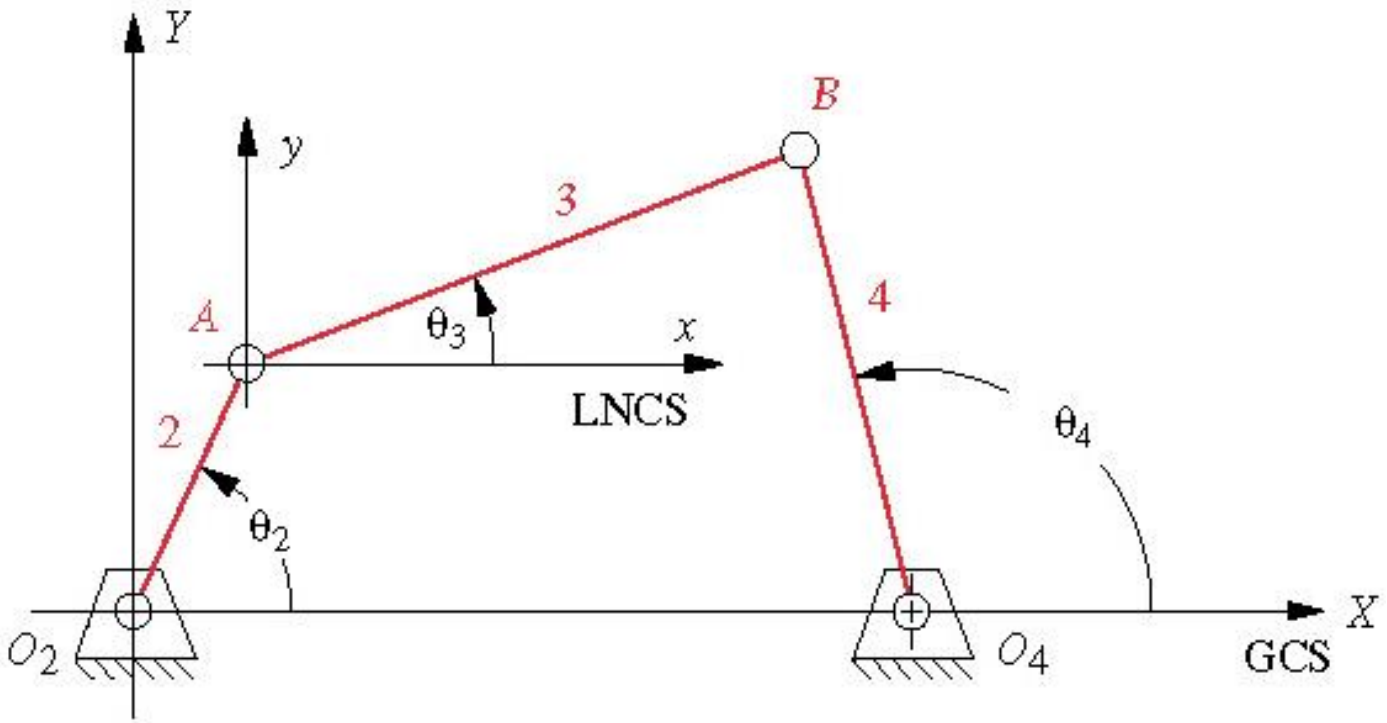
O intervalo entre a máxima e mínima força ocorrem para γ entre 40° e 140°

4 Barras – Equacionamento – Método Gráfico

- Régua – compasso – transferidor
- Resolve para uma posição do mecanismo
- Interação entre sistema global e local de coord.
- Referenciar os ângulos da mesma forma ao longo do processo.
- Usar fatores de escala compatíveis com o espaço de trabalho (referência – maior medida de barra deve ser o ponto de partida para a escolha da escala)

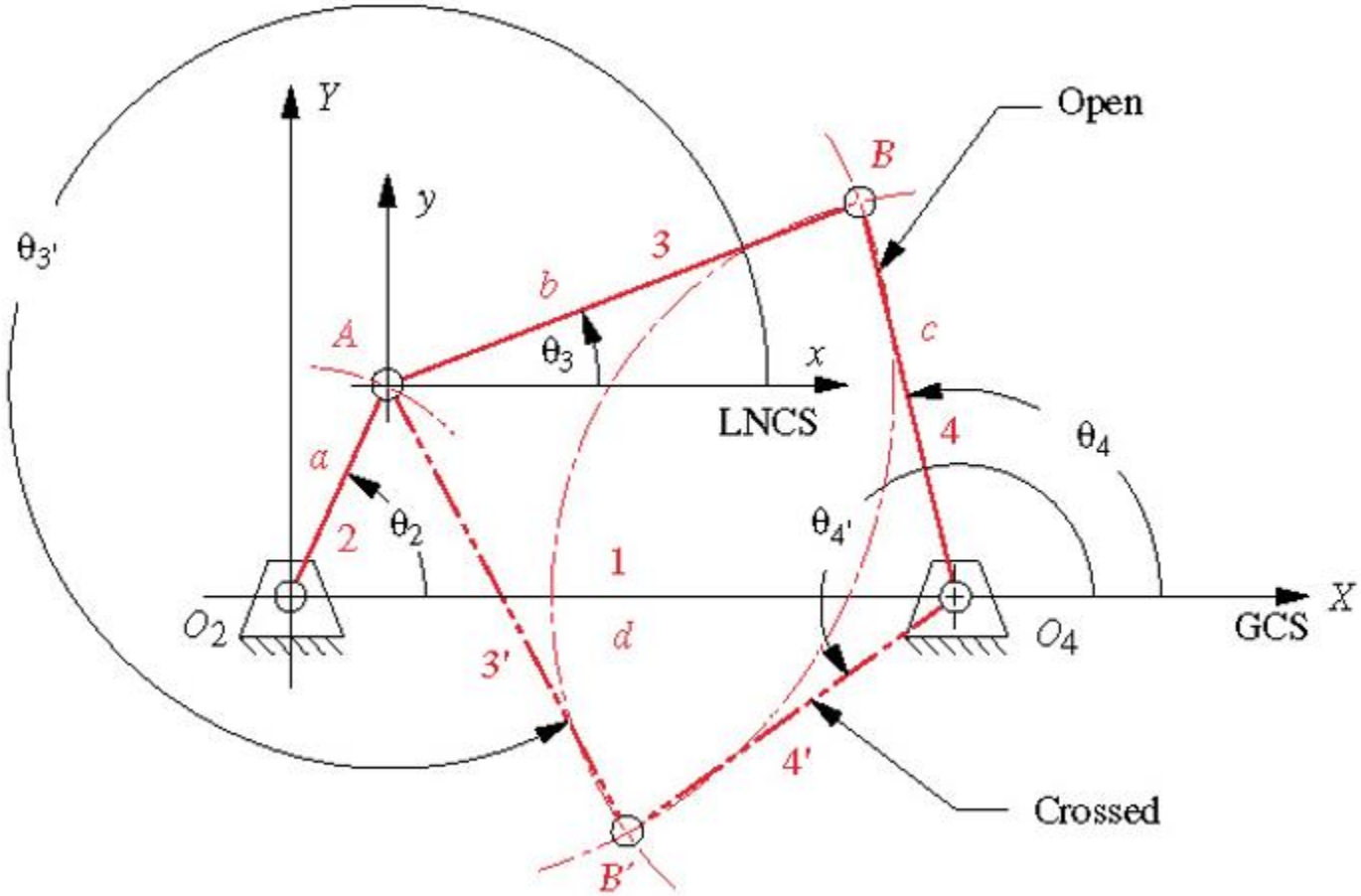
4 Barras – Equacionamento – Método Gráfico

- LNCS: sistema local / GCS: sistema global.
- Ref. Angular: anti-horário, a partir do eixo *X* ou *x*.



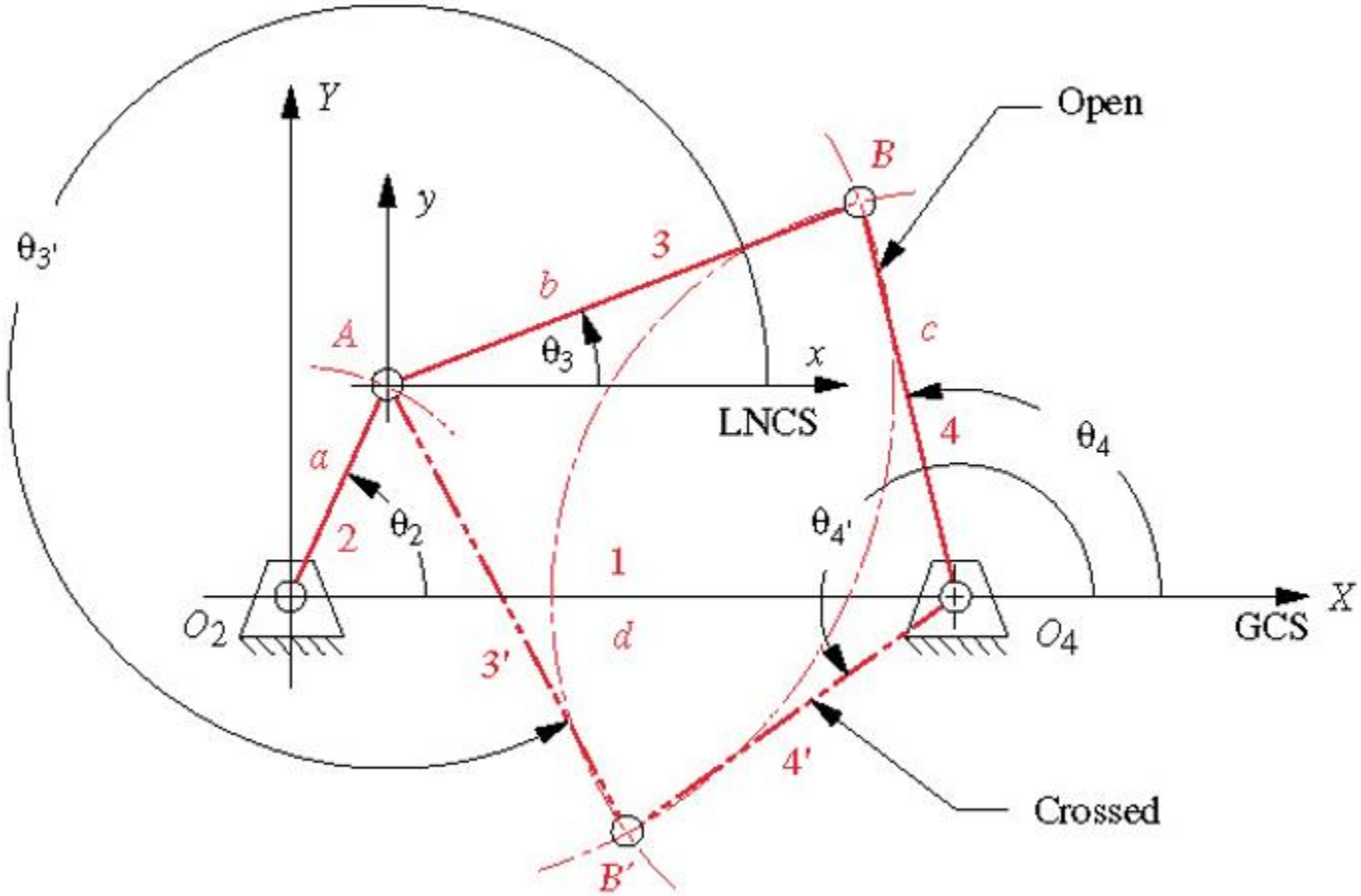
4 Barras – Equacionamento – Método Gráfico

1- Definir sistema global (GCS), marcando O_2 e O_4 (barra 1).



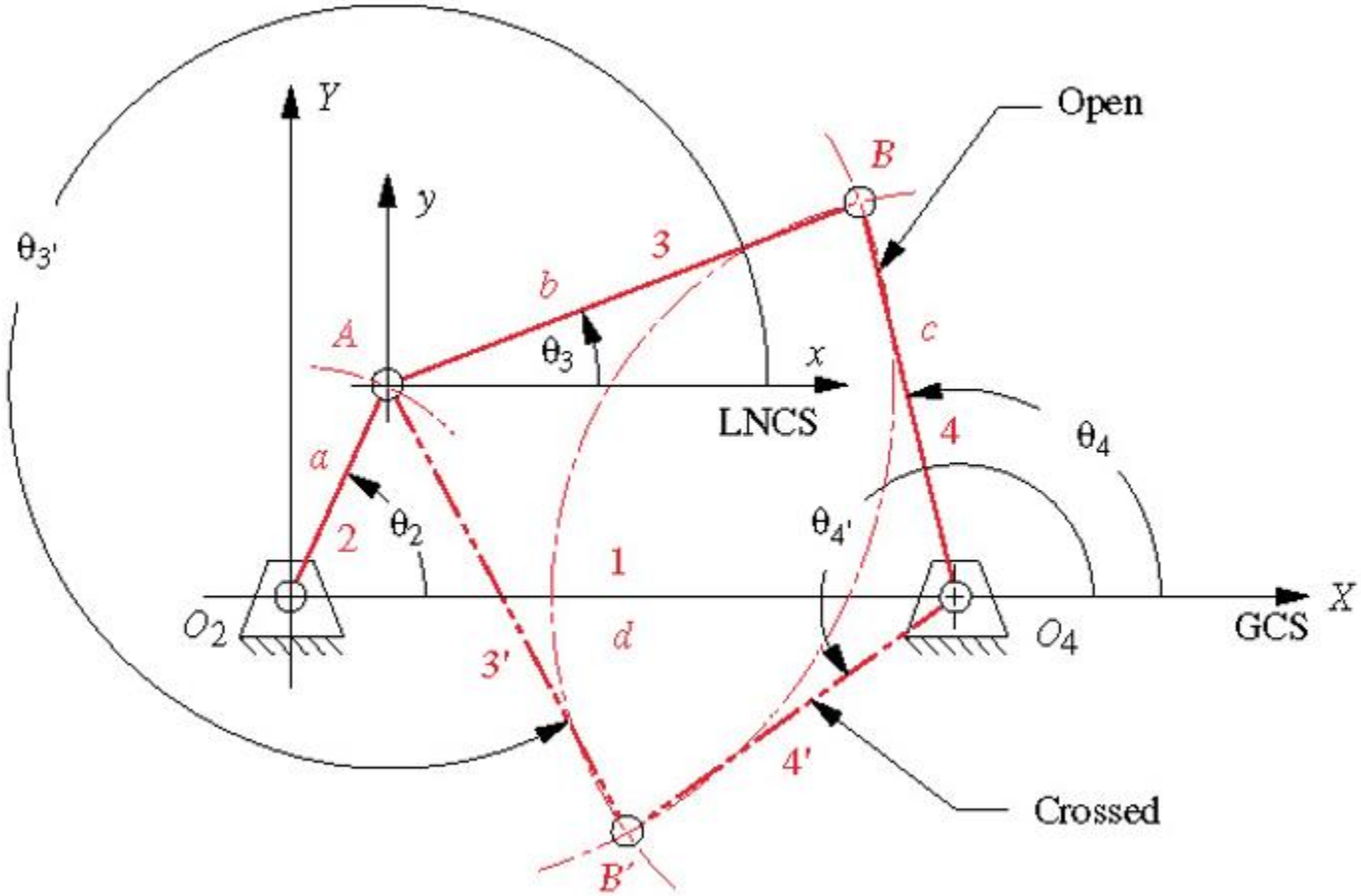
4 Barras – Equacionamento – Método Gráfico

2- Com raio '*a*', trace um arco O_2A. Com o transferidor em O_2, marque θ_2 e trace a barra 2 (linha O_2A).



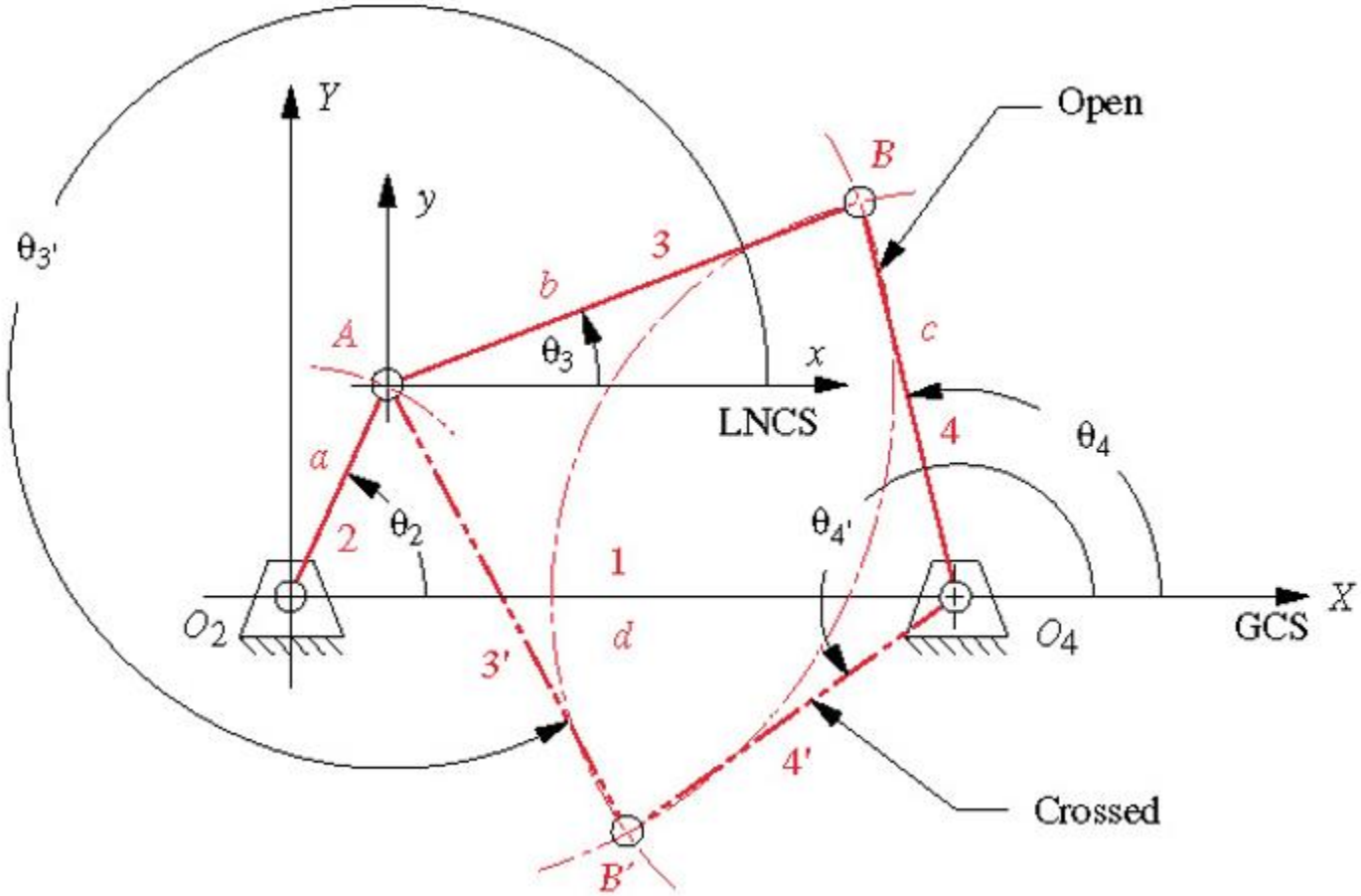
4 Barras – Equacionamento – Método Gráfico

3- Traçar sistema local (*x*-*y*) em '*A*'. Ponta seca em '*A*', abertura de raio '*b*', trace um arco longo *BB'*.



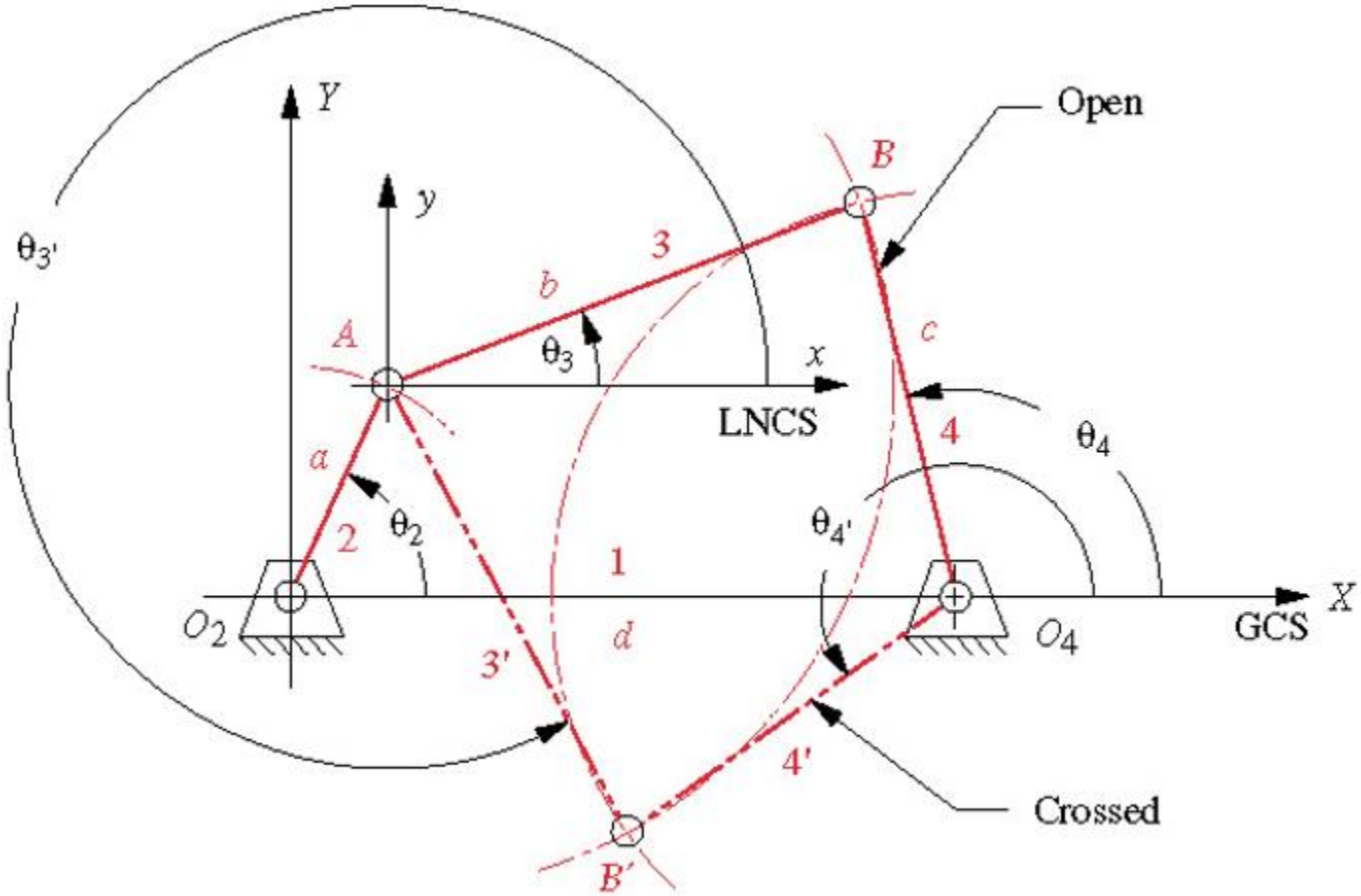
4 Barras – Equacionamento – Método Gráfico

4- Ponta seca em 'O_4', abertura de raio '*c*', trace um arco longo *BB'*.



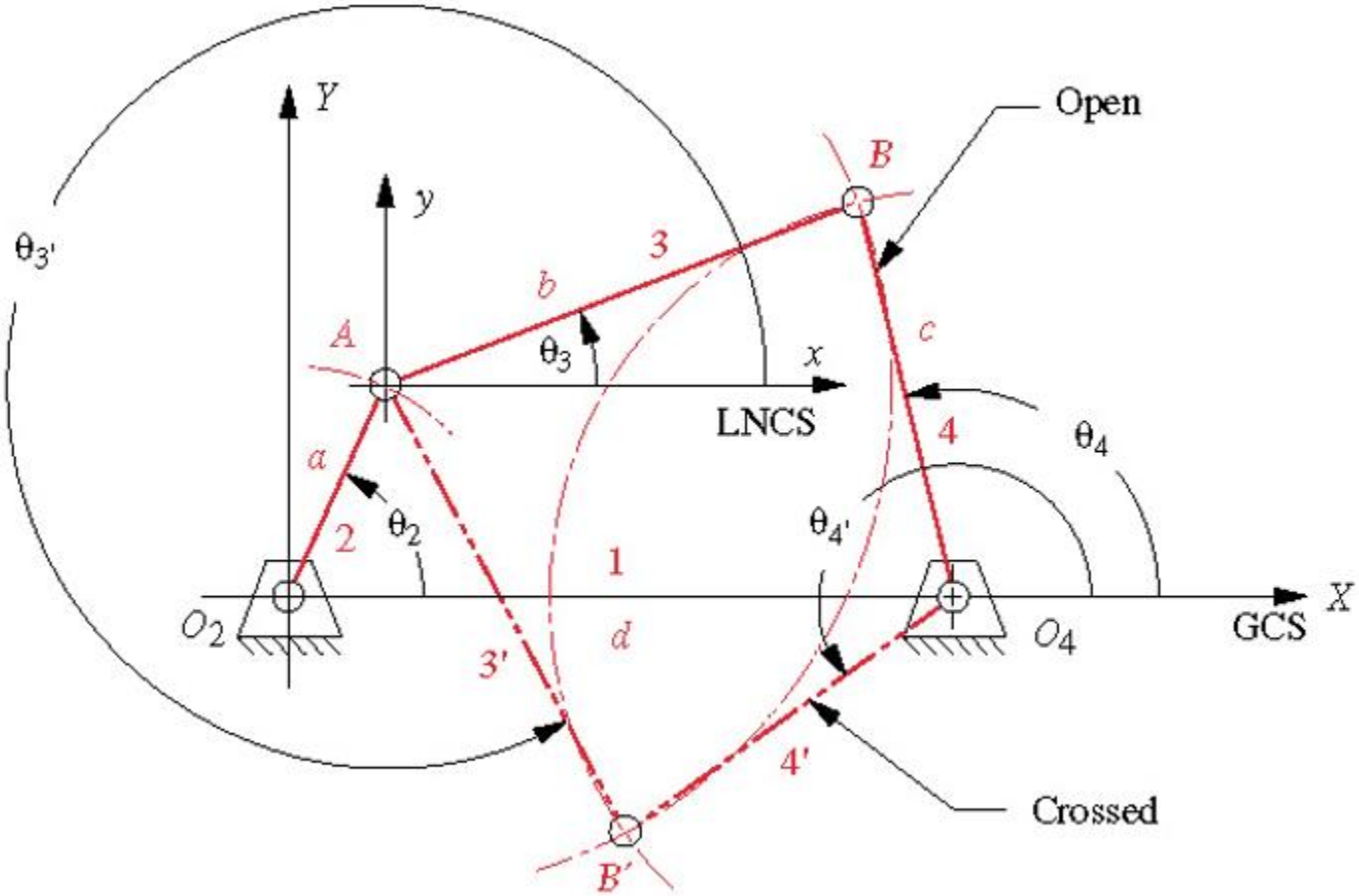
4 Barras – Equacionamento – Método Gráfico

5- Traçar barra 3 (*AB*) e a barra 4 (*O_4B)*, para configuração aberta, e barra 3' (*AB'*) e a barra 4' (*O_4B')*, para configuração fechada.



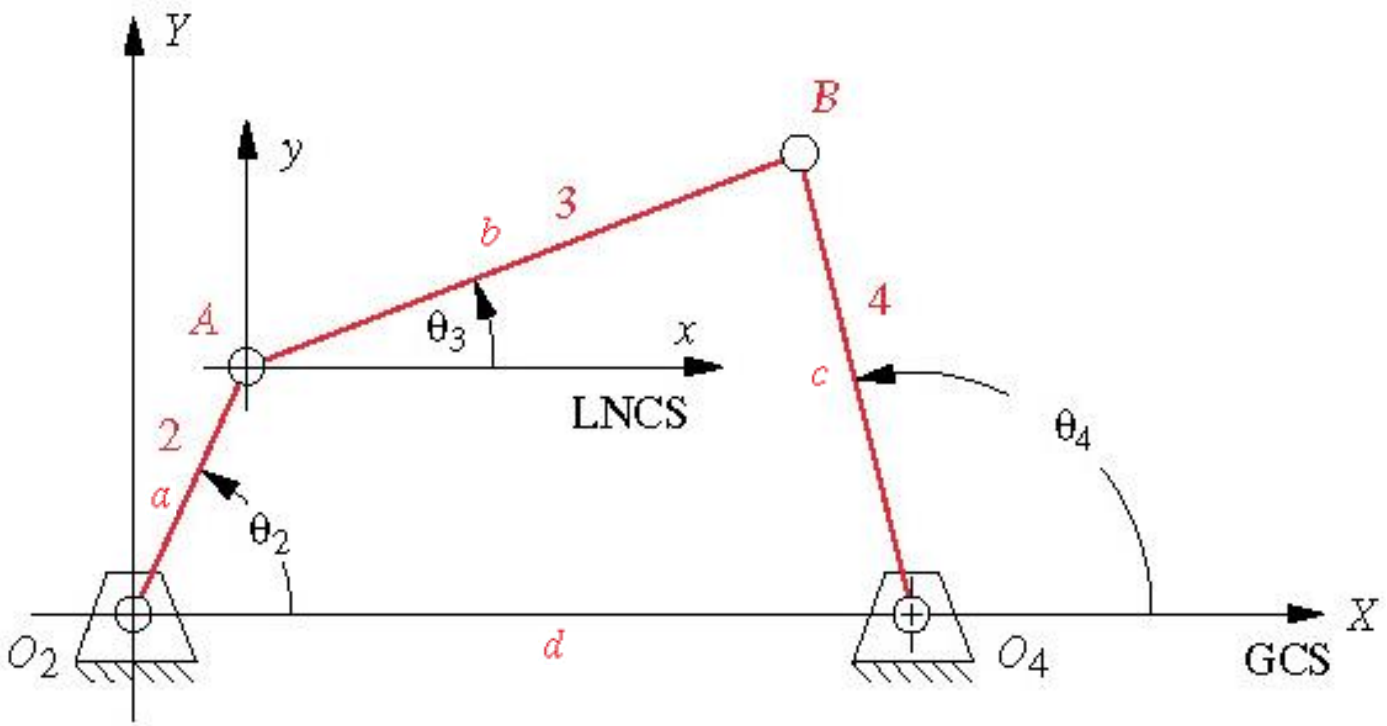
4 Barras – Equacionamento – Método Gráfico

6- Meça os ângulos θ_3 e θ_4 para config. aberta e $\theta_{3'}$ e $\theta_{4'}$ para configuração fechada.

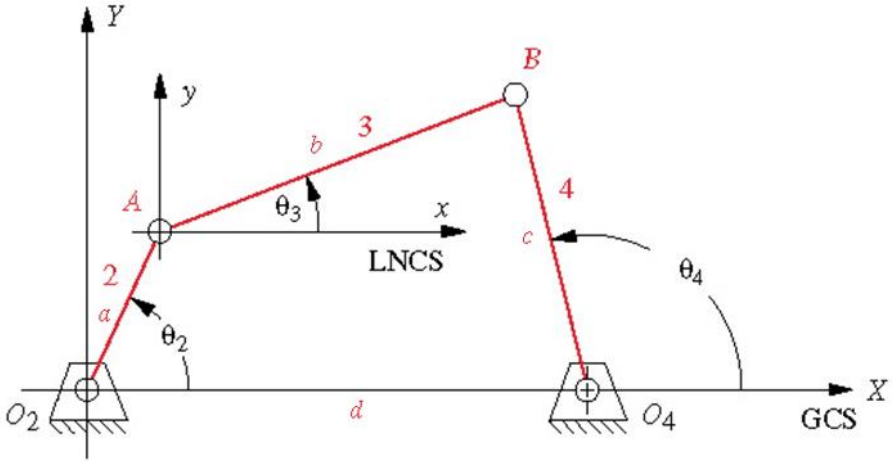


4 Barras – Equacionamento – Método Algébrico

. Parte da configuração geométrica para escrever equações algébricas, a fim de calcular os parâmetros desejados. Bom para escrever códigos numéricos.



4 Barras – Equacionamento – Método Algébrico (Norton)



As coordenadas do ponto A são obtidas de:

$$A_x = a\cos\theta_2$$
$$A_y = a\,\mathrm{sen}\,\theta_2 \qquad (4.2a)$$

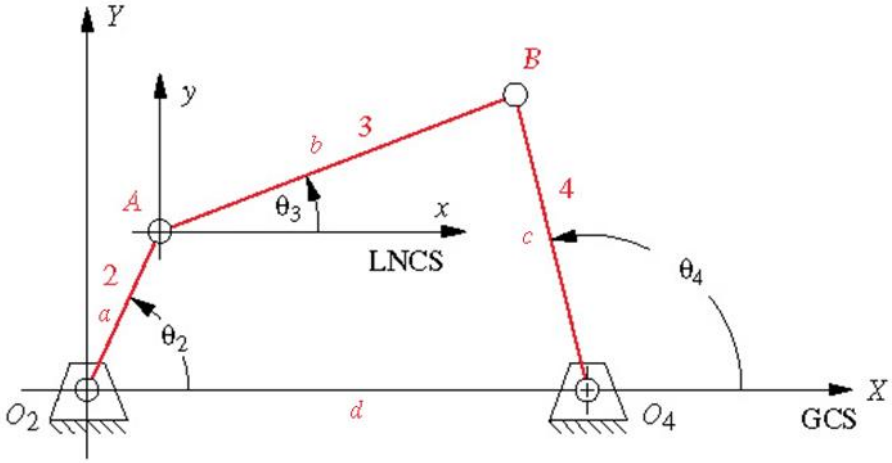
As coordenadas do ponto B são obtidas usando as equações dos círculos sobre A e O_4:

$$b^2 = \left(B_x - A_x\right)^2 + \left(B_y - A_y\right)^2 \qquad (4.2b)$$

$$c^2 = \left(B_x - d\right)^2 + B_y^2 \qquad (4.2c)$$

que fornecem um par de equações simultâneas em B_x e B_y.

4 Barras – Equacionamento – Método Algébrico (Norton)



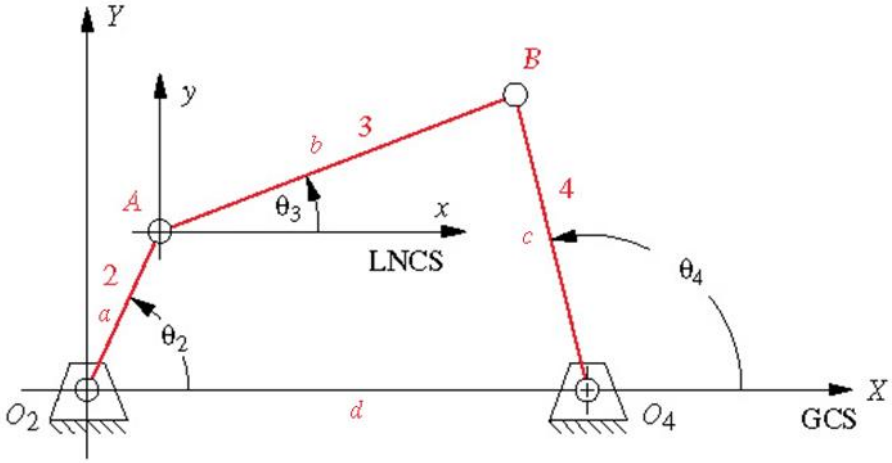
Subtraindo a Equação 4.2c da 4.2b, temos a expressão para B_x:

$$B_x = \frac{a^2 - b^2 + c^2 - d^2}{2(A_x - d)} - \frac{2A_yB_y}{2(A_x - d)} = S - \frac{2A_yB_y}{2(A_x - d)} \qquad (4.2d)$$

Substituindo a Equação 4.2d na 4.2c, temos a equação quadrática de B_y, que tem duas soluções correspondentes, na Figura 4-5.

$$B_y^2 + \left(S - \frac{A_yB_y}{A_x - d} - d\right)^2 - c^2 = 0 \qquad (4.2e)$$

4 Barras – Equacionamento – Método Algébrico (Norton)



Isso pode ser resolvido com uma expressão familiar para as raízes da equação quadrática

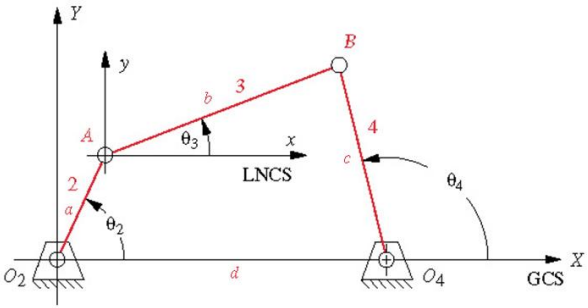
$$B_y = \frac{-Q \pm \sqrt{Q^2 - 4PR}}{2P} \tag{4.2f}$$

em que

$$P = \frac{A_y^2}{\left(A_x - d\right)^2} + 1 \qquad Q = \frac{2A_y\left(d - S\right)}{A_x - d}$$

$$R = (d - S)^2 - c^2 \qquad S = \frac{a^2 - b^2 + c^2 - d^2}{2\left(A_x - d\right)}$$

4 Barras – Equacionamento – Método Algébrico (Norton)



$$B_x = \frac{a^2 - b^2 + c^2 - d^2}{2(A_x - d)} - \frac{2A_yB_y}{2(A_x - d)} = S - \frac{2A_yB_y}{2(A_x - d)} \quad (4.2d)$$

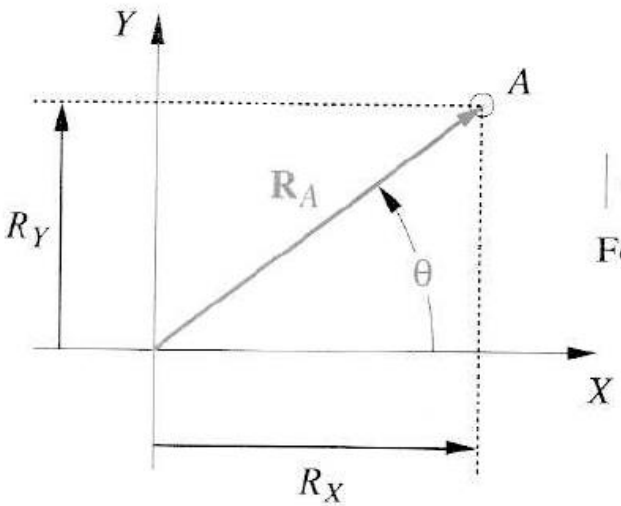
Note que as soluções para essa equação podem ser reais ou imaginárias. No último caso, indicará que os elos não se conectam com o dado ângulo de entrada ou com nenhum outro ângulo. Quando os dois valores de B_y forem encontrados (se reais), eles podem ser substituídos na Equação 4.2d para obter os componentes x correspondentes. Os ângulos dos elos para essa posição podem então ser obtidos de:

$$\theta_3 = \tan^{-1}\left(\frac{B_y - A_y}{B_x - A_x}\right) \quad \theta_4 = \tan^{-1}\left(\frac{B_y}{B_x - d}\right) \quad (4.2g)$$

Uma função arco tangente com dois argumentos deve ser usada para resolver as Equações 4.2g, uma vez que os ângulos podem estar em qualquer quadrante. Equações 4.2 podem ser transcritas para qualquer linguagem de computador ou software que solucione equações, e variando o valor de θ_2, dentro do alcance do mecanismo, encontram-se todos os valores correspondentes aos ângulos dos outros dois elos.

4 Barras – Equacionamento – Laço de vetores

. Algumas considerações (pré-requisitos):



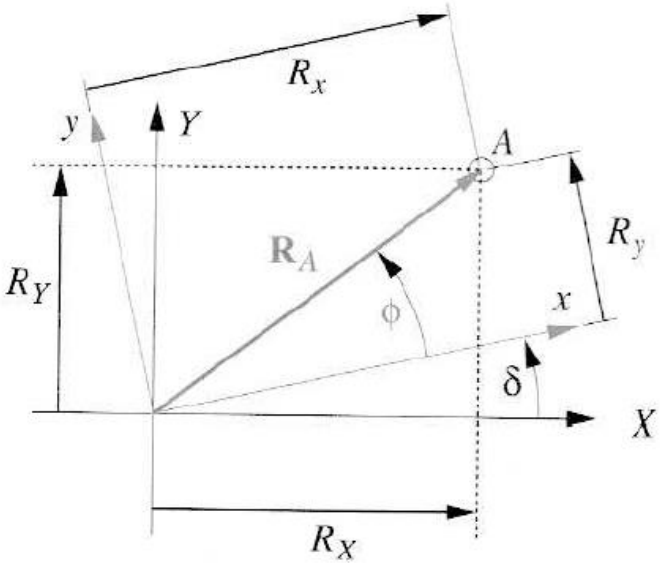
Forma polar:

$|R_A| \; @ \angle \theta$

Forma cartesiana:

$R_X \, , \, R_Y$

(a) Sistema de coordenada global *XY*



Forma polar:

$|R_A| \; @ \angle \phi$

Forma cartesiana:

$R_x \, , \, R_y$

(b) Sistema de coordenada local *xy*

o teorema de Pitágoras:

$$R_A = \sqrt{R_X^2 + R_Y^2} \tag{4.0a}$$

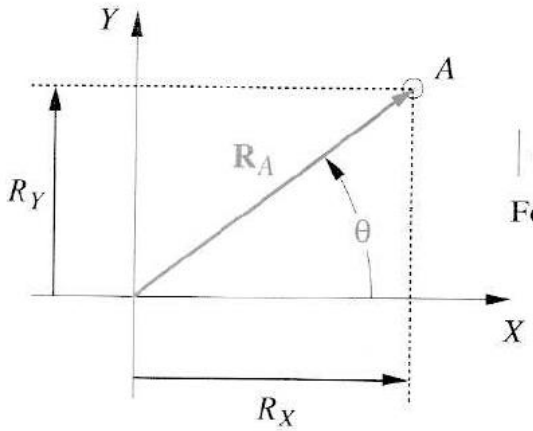
e trigonometricamente:

$$\theta = \arctan\left(\frac{R_Y}{R_X}\right)$$

A Equação 4.0a é mostrada em coordenadas globais, mas poderia também ser expressa em coordenadas locais.

4 Barras – Equacionamento – Laço de vetores

. Algumas considerações (pré-requisitos):



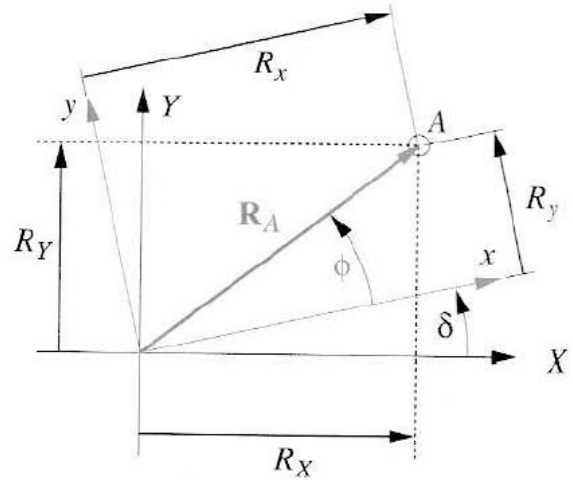
Forma polar:

$|R_A| \; @ \angle \theta$

Forma cartesiana:

R_X , R_Y

(a) Sistema de coordenada global XY



Forma polar:

$|R_A| \; @ \angle \phi$

Forma cartesiana:

R_x , R_y

(b) Sistema de coordenada local xy

Se a posição do ponto A na Figura 4-1b for expressa no sistema local como R_x, R_y, e deseja-se transformar as coordenadas para R_X, R_Y no sistema global XY, as equações serão:

$$R_X = R_x \cos\delta - R_y \operatorname{sen}\delta$$
$$R_Y = R_x \operatorname{sen}\delta + R_y \cos\delta \qquad (4.0b)$$

$$\begin{Bmatrix} R_X \\ R_Y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\delta) & -\sin(\delta) \\ \sin(\delta) & \cos(\delta) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R_x \\ R_y \end{Bmatrix}$$

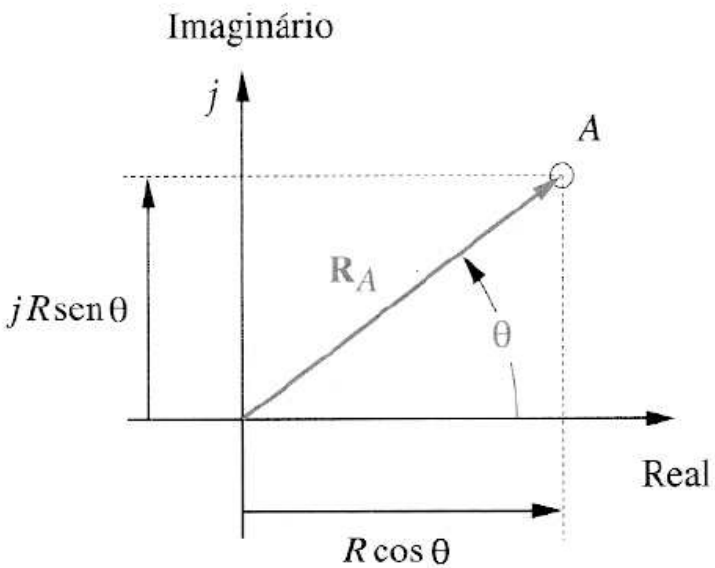
4 Barras – Equacionamento – Laço de vetores

. Algumas considerações (pré-requisitos):

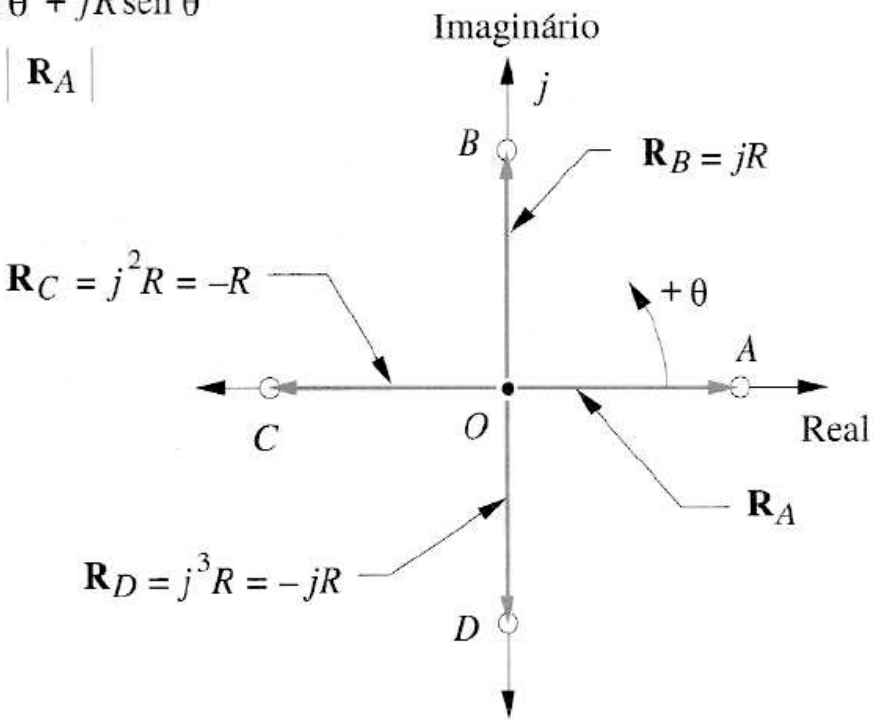
Forma polar: $R\,e^{j\theta}$

Forma cartesiana: $R\cos\theta + jR\,\text{sen}\,\theta$

$R = |\mathbf{R}_A|$



(a) Representação em número complexo do vetor de posição



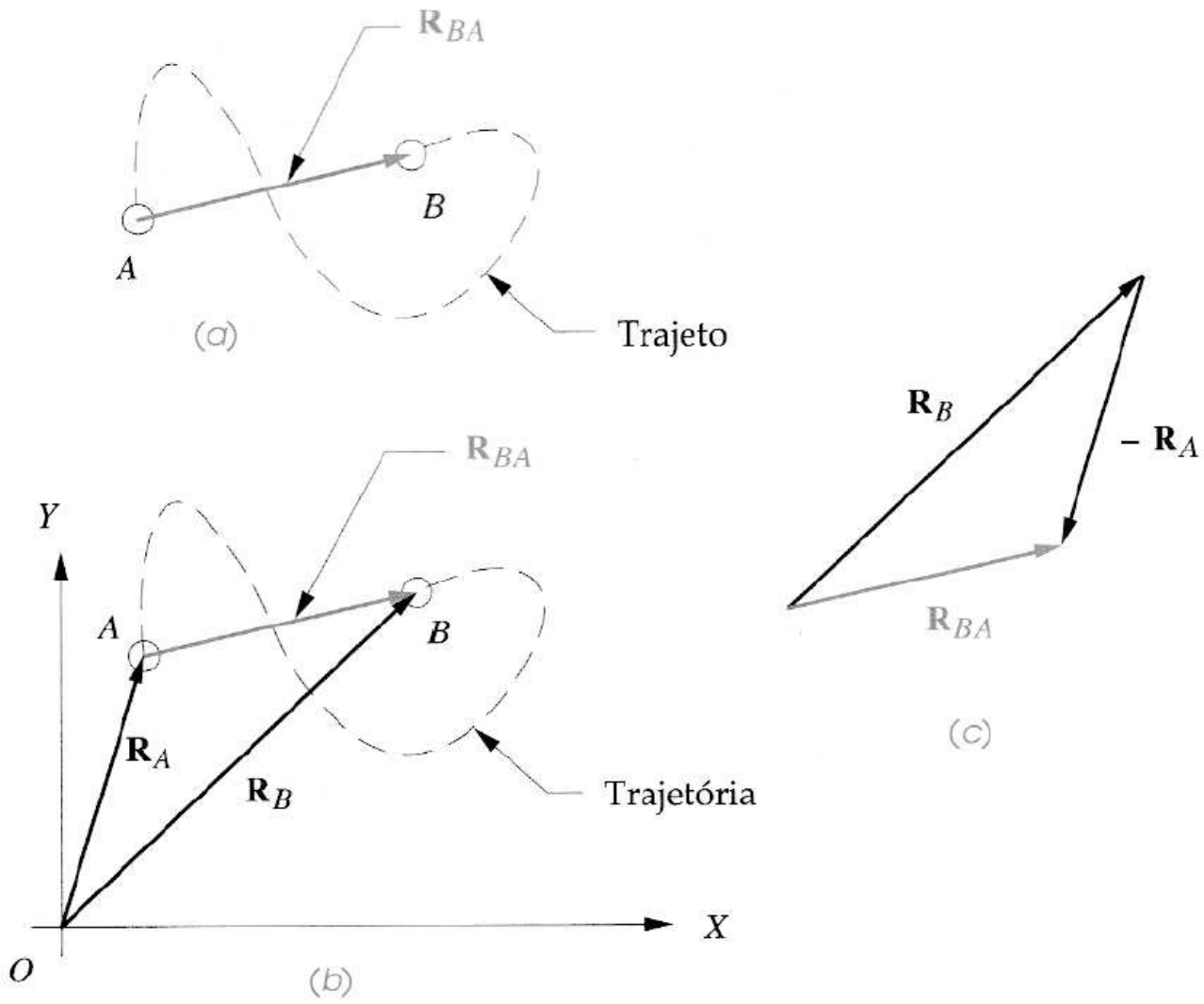
(b) Vetores rotacionados no plano complexo

Identidade de Euler: $e^{\pm j\theta} = \cos\theta \pm j\,\text{sen}\,\theta$

$$\frac{de^{j\theta}}{d\theta} = je^{j\theta}$$

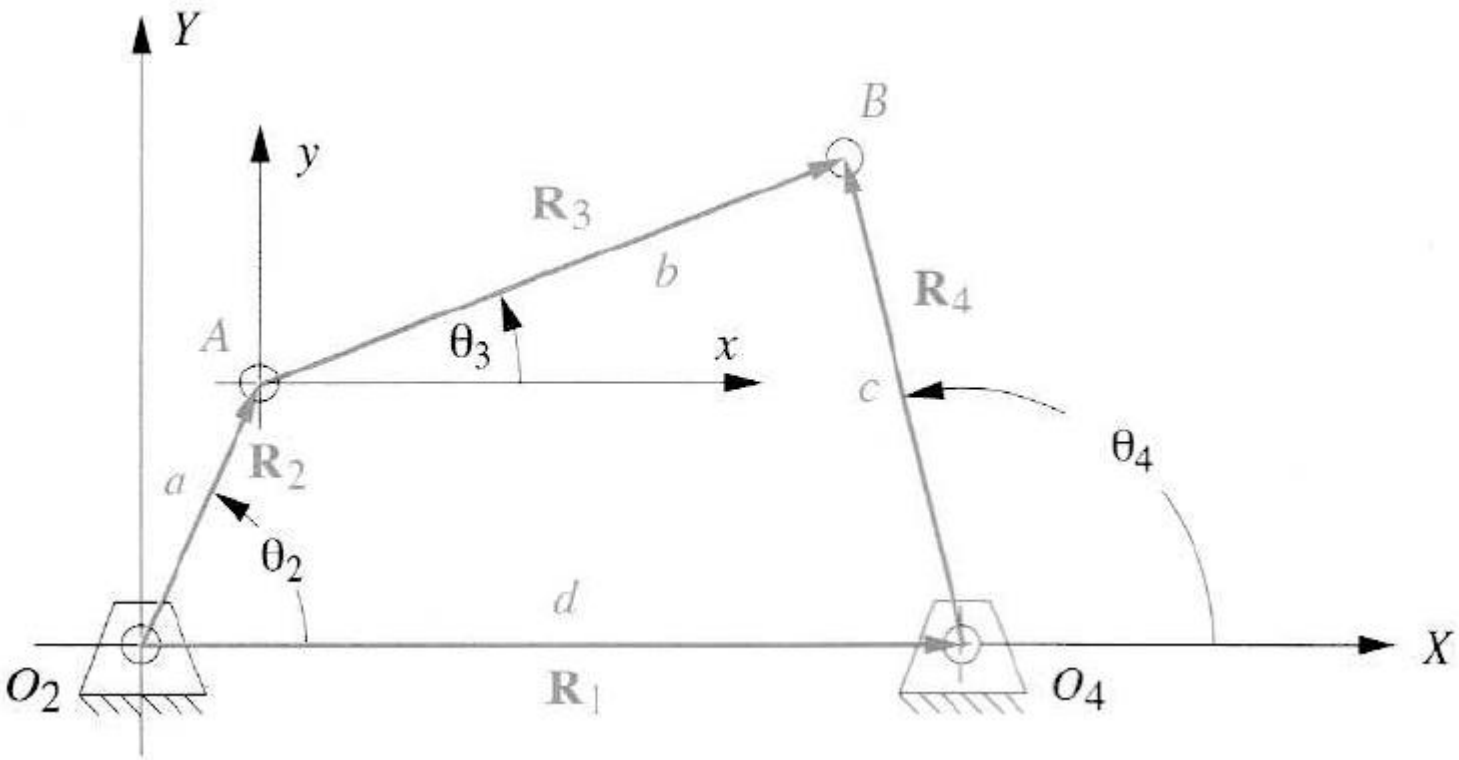
4 Barras – Equacionamento – Laço de vetores

. Algumas considerações (pré-requisitos):



4 Barras – Equacionamento – Laço de vetores

. Laço de vetor: laço (equação) que forma uma soma (malha) fechada.



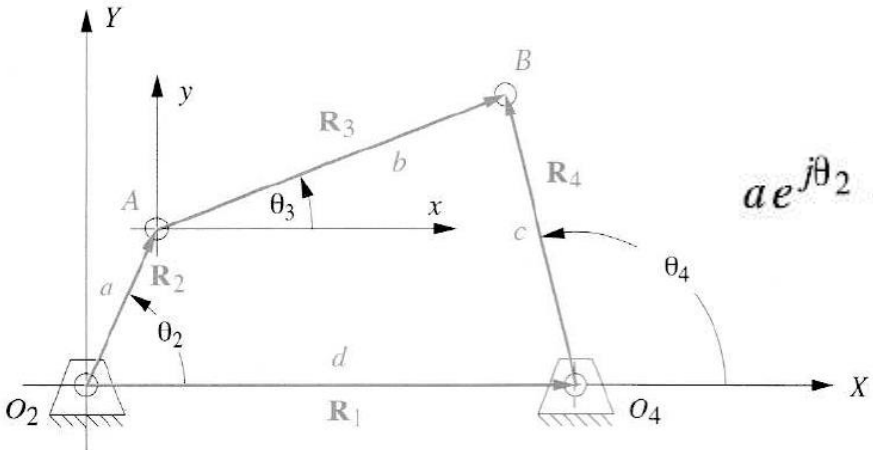
$$\mathbf{R}_2 + \mathbf{R}_3 - \mathbf{R}_4 - \mathbf{R}_1 = 0 \qquad (4.5a)$$

$$a e^{j\theta_2} + b e^{j\theta_3} - c e^{j\theta_4} - d e^{j\theta_1} = 0 \qquad (4.5c)$$

A serem resolvidas para θ_3 e θ_4. Desenvolvendo pela Id. de Euler...

4 Barras – Equacionamento – Laço de vetores

. Laço de vetor: laço (equação) que forma uma soma (malha) fechada.



$$\mathbf{R}_2 + \mathbf{R}_3 - \mathbf{R}_4 - \mathbf{R}_1 = 0 \qquad (4.5a)$$

$$a e^{j\theta_2} + b e^{j\theta_3} - c e^{j\theta_4} - d e^{j\theta_1} = 0 \qquad (4.5c)$$

$$a(\cos\theta_2 + j\,\mathrm{sen}\,\theta_2) + b(\cos\theta_3 + j\,\mathrm{sen}\,\theta_3) - c(\cos\theta_4 + j\,\mathrm{sen}\,\theta_4) - d(\cos\theta_1 + j\,\mathrm{sen}\,\theta_1) = 0 \qquad (4.5e)$$

Esta equação pode agora ser separada em partes real e imaginária e cada uma igualada a zero.

parte real (componente x): $a\cos\theta_2 + b\cos\theta_3 - c\cos\theta_4 - d\cos\theta_1 = 0$

mas $\theta_1 = 0$, então $a\cos\theta_2 + b\cos\theta_3 - c\cos\theta_4 - d = 0$ (4.6a)

parte imaginária (componente y): $ja\,\mathrm{sen}\,\theta_2 + jb\,\mathrm{sen}\,\theta_3 - jc\,\mathrm{sen}\,\theta_4 - jd\,\mathrm{sen}\,\theta_1 = 0$

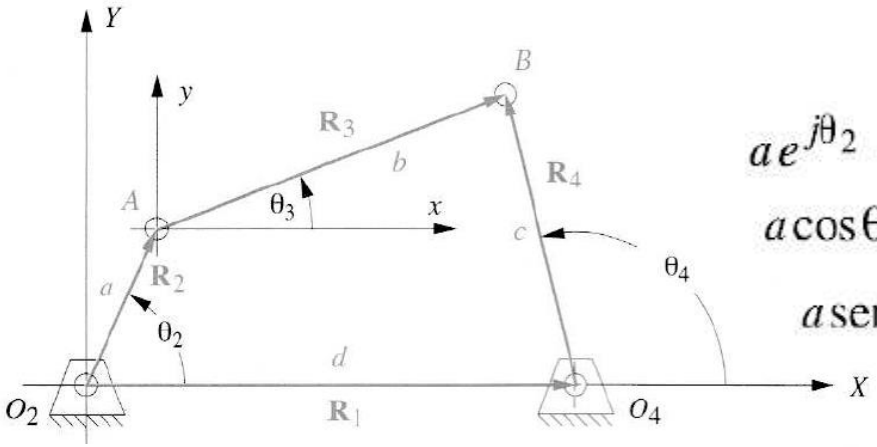
mas $\theta_1 = 0$, e se os operadores j são simplificados, então

$$a\,\mathrm{sen}\,\theta_2 + b\,\mathrm{sen}\,\theta_3 - c\,\mathrm{sen}\,\theta_4 = 0 \qquad (4.6b)$$

A serem resolvidas para θ_3 e θ_4. Aplicando algumas (simples) transformações...

4 Barras – Equacionamento – Laço de vetores

. Laço de vetor: laço (equação) que forma uma soma (malha) fechada.



$$\mathbf{R}_2 + \mathbf{R}_3 - \mathbf{R}_4 - \mathbf{R}_1 = 0 \quad (4.5a)$$

$$a e^{j\theta_2} + b e^{j\theta_3} - c e^{j\theta_4} - d e^{j\theta_1} = 0 \quad (4.5c)$$

$$a\cos\theta_2 + b\cos\theta_3 - c\cos\theta_4 - d = 0 \quad (4.6a)$$

$$a\,\mathrm{sen}\,\theta_2 + b\,\mathrm{sen}\,\theta_3 - c\,\mathrm{sen}\,\theta_4 = 0 \quad (4.6b)$$

As equações escalares 4.6a e 4.6b podem agora ser resolvidas simultaneamente para θ_3 e θ_4. A solução para esse sistema de duas equações trigonométricas simultâneas é direta, mas tediosa. Algumas substituições de identidades trigonométricas simplificarão as expressões.

O primeiro passo é reescrever as equações 4.6a e 4.6b para assim isolar uma das duas variáveis desconhecidas no lado esquerdo. Isolaremos θ_3 e resolveremos θ_4 nesse exemplo.

$$b\cos\theta_3 = -a\cos\theta_2 + c\cos\theta_4 + d \quad (4.6c)$$

$$b\,\mathrm{sen}\,\theta_3 = -a\,\mathrm{sen}\,\theta_2 + c\,\mathrm{sen}\,\theta_4 \quad (4.6d)$$

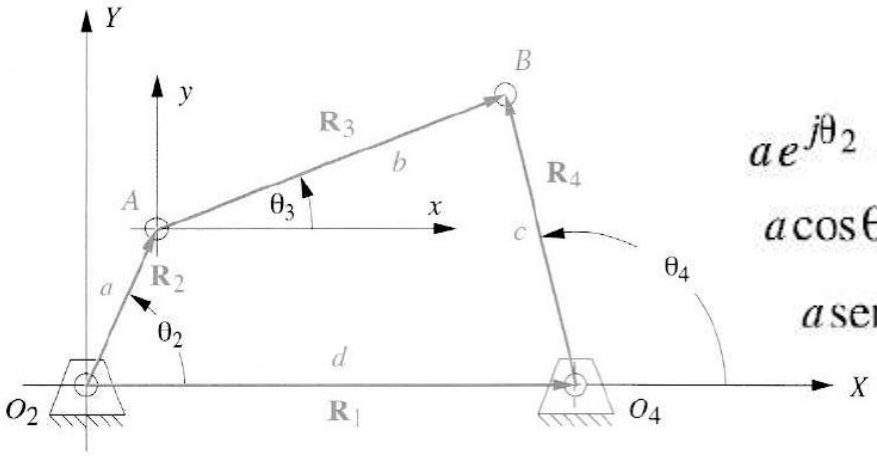
Agora, eleve os dois lados das equações 4.6c e 4.6d ao quadrado e some-os:

$$b^2\left(\mathrm{sen}^2\,\theta_3 + \cos^2\theta_3\right) = \left(-a\ \mathrm{sen}\,\theta_2 + c\,\mathrm{sen}\,\theta_4\right)^2 + \left(-a\ \cos\theta_2 + c\ \cos\theta_4 + d\right)^2 \quad (4.7a)$$

A serem resolvidas para θ_3 e θ_4. Aplicando algumas (simples) transformações...

4 Barras – Equacionamento – Laço de vetores

. Laço de vetor: laço (equação) que forma uma soma (malha) fechada.



$$\mathbf{R}_2 + \mathbf{R}_3 - \mathbf{R}_4 - \mathbf{R}_1 = 0 \quad (4.5a)$$

$$a e^{j\theta_2} + b e^{j\theta_3} - c e^{j\theta_4} - d e^{j\theta_1} = 0 \quad (4.5c)$$

$$a\cos\theta_2 + b\cos\theta_3 - c\cos\theta_4 - d = 0 \quad (4.6a)$$

$$a\,\mathrm{sen}\,\theta_2 + b\,\mathrm{sen}\,\theta_3 - c\,\mathrm{sen}\,\theta_4 = 0 \quad (4.6b)$$

Note que o valor entre parênteses no lado esquerdo é igual a 1, eliminando θ_3 da equação, deixando somente θ_4 que pode agora ser resolvido por:

$$b^2 = \left(-a\,\mathrm{sen}\,\theta_2 + c\,\mathrm{sen}\,\theta_4\right)^2 + \left(-a\cos\theta_2 + c\cos\theta_4 + d\right)^2 \quad (4.7b)$$

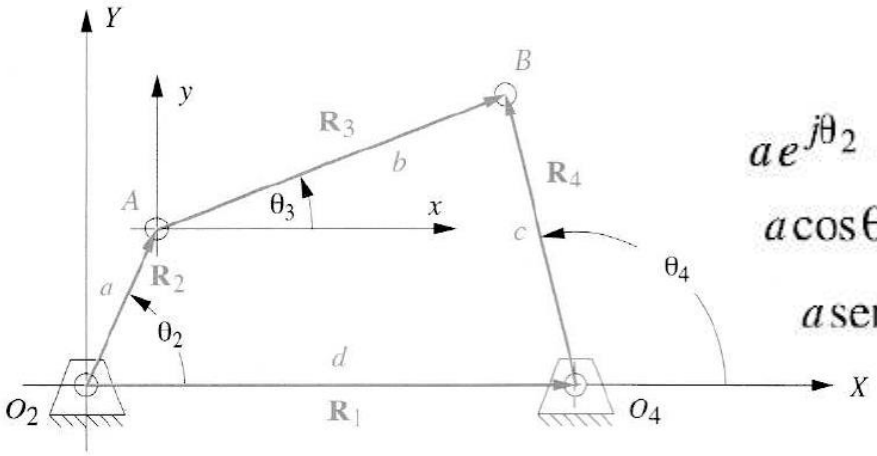
O lado direito dessa expressão deve agora expandir os termos coletados.

$$b^2 = a^2 + c^2 + d^2 - 2ad\cos\theta_2 + 2cd\cos\theta_4 - 2ac\left(\mathrm{sen}\,\theta_2\,\mathrm{sen}\,\theta_4 + \cos\theta_2\cos\theta_4\right) \quad (4.7c)$$

Serão inseridas constantes para facilitar a implementação da solução...

4 Barras – Equacionamento – Laço de vetores

. Laço de vetor: laço (equação) que forma uma soma (malha) fechada.



$$\mathbf{R}_2 + \mathbf{R}_3 - \mathbf{R}_4 - \mathbf{R}_1 = 0 \quad (4.5a)$$

$$a e^{j\theta_2} + b e^{j\theta_3} - c e^{j\theta_4} - d e^{j\theta_1} = 0 \quad (4.5c)$$

$$a\cos\theta_2 + b\cos\theta_3 - c\cos\theta_4 - d = 0 \quad (4.6a)$$

$$a\,\mathrm{sen}\,\theta_2 + b\,\mathrm{sen}\,\theta_3 - c\,\mathrm{sen}\,\theta_4 = 0 \quad (4.6b)$$

Para futuramente simplificar essa expressão, as constantes K_1, K_2 e K_3 foram definidas em termos do comprimento constante dos elos na Equação 4.7c:

$$K_1 = \frac{d}{a} \qquad K_2 = \frac{d}{c} \qquad K_3 = \frac{a^2 - b^2 + c^2 + d^2}{2ac} \quad (4.8a)$$

e

$$K_1 \cos\theta_4 - K_2 \cos\theta_2 + K_3 = \cos\theta_2 \cos\theta_4 + \mathrm{sen}\,\theta_2\,\mathrm{sen}\,\theta_4 \quad (4.8b)$$

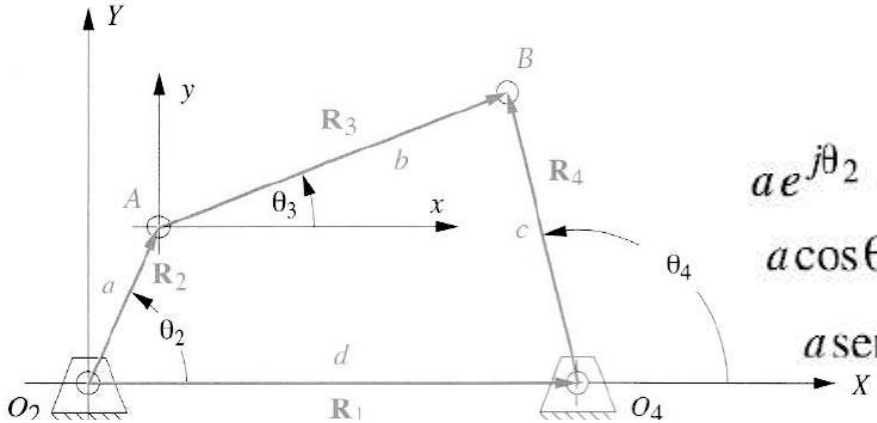
Se substituirmos a identidade $\cos(\theta_2 - \theta_4) = \cos\theta_2 \cos\theta_4 + \mathrm{sen}\,\theta_2\,\mathrm{sen}\,\theta_4$, teremos a forma conhecida como equação de Freudenstein:

$$K_1 \cos\theta_4 - K_2 \cos\theta_2 + K_3 = \cos(\theta_2 - \theta_4) \quad (4.8c)$$

Só mais algumas transformações (meio ângulo, por exemplo)...

4 Barras – Equacionamento – Laço de vetores

. Laço de vetor: laço (equação) que forma uma soma (malha) fechada.



$$\mathbf{R}_2 + \mathbf{R}_3 - \mathbf{R}_4 - \mathbf{R}_1 = 0 \qquad (4.5a)$$

$$a e^{j\theta_2} + b e^{j\theta_3} - c e^{j\theta_4} - d e^{j\theta_1} = 0 \qquad (4.5c)$$

$$a\cos\theta_2 + b\cos\theta_3 - c\cos\theta_4 - d = 0 \qquad (4.6a)$$

$$a\,\mathrm{sen}\,\theta_2 + b\,\mathrm{sen}\,\theta_3 - c\,\mathrm{sen}\,\theta_4 = 0 \qquad (4.6b)$$

Para reduzir a Equação 4.8b a uma solução de forma mais amigável, será útil substituir a *meia identidade dos ângulos* que serão convertidos em termos de sen θ_4 e cos θ_4 para termos de tan θ_4:

$$\mathrm{sen}\,\theta_4 = \frac{2\tan\left(\frac{\theta_4}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{\theta_4}{2}\right)}; \qquad \cos\theta_4 = \frac{1-\tan^2\left(\frac{\theta_4}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{\theta_4}{2}\right)} \qquad (4.9)$$

Isso resulta, na próxima forma simplificada, em que os comprimentos dos elos e a entrada conhecida (θ_2) foram agrupadas como as constantes A, B e C.

$$A\tan^2\left(\frac{\theta_4}{2}\right) + B\tan\left(\frac{\theta_4}{2}\right) + C = 0 \qquad (4.10a)$$

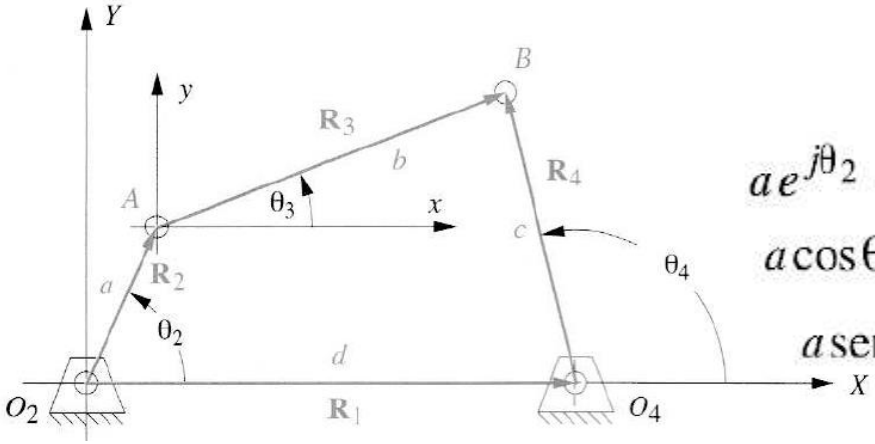
em que

$$A = \cos\theta_2 - K_1 - K_2\cos\theta_2 + K_3 \;\Big|\; B = -2\,\mathrm{sen}\,\theta_2 \;\Big|\; C = K_1 - (K_2+1)\cos\theta_2 + K_3$$

Quase...

4 Barras – Equacionamento – Laço de vetores

. Laço de vetor: laço (equação) que forma uma soma (malha) fechada.



$$\mathbf{R}_2 + \mathbf{R}_3 - \mathbf{R}_4 - \mathbf{R}_1 = 0 \qquad (4.5a)$$

$$a e^{j\theta_2} + b e^{j\theta_3} - c e^{j\theta_4} - d e^{j\theta_1} = 0 \qquad (4.5c)$$

$$a\cos\theta_2 + b\cos\theta_3 - c\cos\theta_4 - d = 0 \qquad (4.6a)$$

$$a\,\mathrm{sen}\,\theta_2 + b\,\mathrm{sen}\,\theta_3 - c\,\mathrm{sen}\,\theta_4 = 0 \qquad (4.6b)$$

$$A\tan^2\left(\frac{\theta_4}{2}\right) + B\tan\left(\frac{\theta_4}{2}\right) + C = 0 \qquad (4.10a)$$

em que

$$A = \cos\theta_2 - K_1 - K_2\cos\theta_2 + K_3 \;\Big|\; B = -2\,\mathrm{sen}\,\theta_2 \;\Big|\; C = K_1 - (K_2 + 1)\cos\theta_2 + K_3$$

Note que a Equação 4.10a é quadrática, e a solução é:

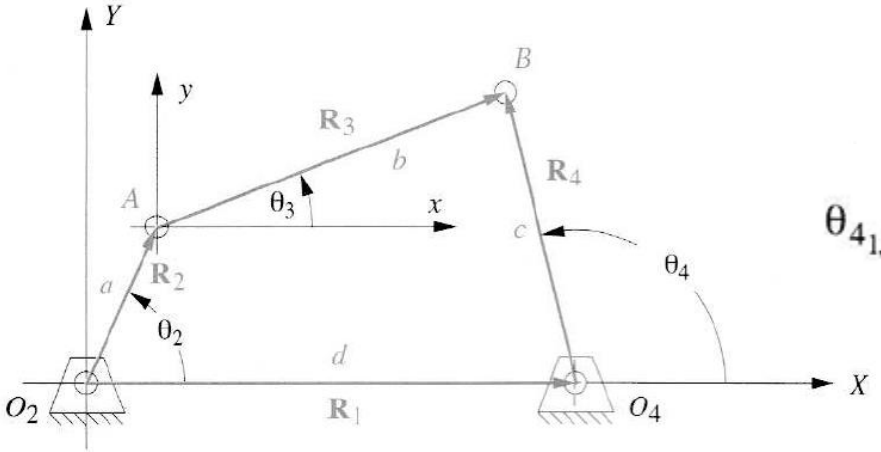
$$\tan\left(\frac{\theta_4}{2}\right) = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \qquad (4.10b)$$

$$\theta_{4_{1,2}} = 2\arctan\left(\frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}\right)$$

Cujas raízes fornecem os ângulos θ_4. As eq's 4.6ª e 4.6b fornecerão θ_3. Por fim...

4 Barras – Equacionamento – Laço de vetores

. Laço de vetor: laço (equação) que forma uma soma (malha) fechada.



$$\theta_{4_{1,2}} = 2\arctan\left(\frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}\right) \quad (4.10b)$$

A Equação 4.10b tem duas soluções, obtidas por meio das soluções positiva e negativa da raiz quadrada. Essas duas soluções, assim como as soluções de qualquer equação quadrática, podem ser de três tipos: *reais e iguais, reais e diferentes, complexas e conjugadas*. Se o discriminante da equação (for negativo, então as soluções serão números complexos conjugados, o que significa simplesmente que o comprimento escolhido para os elos não possibilita uma conexão de forma a respeitar o valor escolhido para o ângulo de entrada θ_2. Isso pode acontecer quando os comprimentos dos elos são completamente incapazes de se conectarem em qualquer posição ou, em um mecanismo não Grashof, quando o ângulo de entrada está localizado abaixo da posição limite das singularidades. Não existe, portanto, nenhuma solução real para este valor de ângulo de entrada θ_2. Com exceção dessa situação, as soluções geralmente serão reais e diferentes, o que significa que existem dois valores de θ_4 correspondentes a cada valor de θ_2. Eles se referem às configurações **cruzada** e **aberta** do mecanismo e também aos seus dois **circuitos**. No mecanismo de quatro barras, a solução negativa fornece θ_4 para a configuração aberta, enquanto a solução positiva fornece θ_4 para a configuração cruzada.

4 Barras – Equacionamento – Newton-Raphson

. Até então: métodos matemáticos lidam com sistemas *“closed-form”*, ou seja, a solução é obtida de maneira direta, não-interativa e determinística.

. Em alguns casos (principalmente sistemas com múltiplos laços, ou laços mais complexos), a solução direta não é facilmente dedutível. Uma alternativa a isto é a adoção de um método interativo. Dentre os disponíveis, um dos mais utilizados é o de Newton-Raphson.

. Processo requer sistema de equações (que pode ser não linear), com valores iniciais para as variáveis, e o sistema se retroalimenta (calculando-se parâmetros e uma função-erro), testando esta função até que se chegue em um cálculo de resíduo menor que um valor estimado (ou a solução “exata”).

. Atenção deve ser dada aos valores iniciais estimados para as variáveis a serem calculadas. “Chutes” iniciais muito fora dos valores verdadeiros podem levar o método à divergência.

4 Barras – Equacionamento – Newton-Raphson

- A ideia do método é atualizar a função-objetivo e a função-erro, iterativamente

O algoritmo de Newton, pode ser expresso algebricamente (em pseudocódigo), como mostrado na Equação 4.35. A função para a qual as raízes são procuradas é $f(x)$ e sua derivada é $f'(x)$. A inclinação m da linha tangente é igual a $f'(x)$ no ponto atual x_i, y_i.

Para sistemas unidimensionais (uma equação, com aproximação pela tangente)

$$
\begin{array}{ll}
\text{Passo 1} & y_i = f(x_i) \\
\text{Passo 2} & \text{SE } y_i \leq \textit{tolerância} \text{ ENTÃO PARAR} \\
\text{Passo 3} & m = f'(x_i) \\
\text{Passo 4} & x_{i+1} = x_i - \dfrac{y_i}{m} \\
\text{Passo 5} & y_{i+1} = f(x_{i+1}) \\
\text{Passo 6} & \text{SE } y_{i+1} \leq \textit{tolerância} \text{ ENTÃO PARAR} \\
 & \quad \text{SE NÃO } x_i = x_{i+1} \ : \ y_i = y_{i+1} \ : \ \text{IR PARA Passo 1}
\end{array}
\tag{4.35}
$$

Para sistemas multidimensionais (mais de uma função-objetivo):

4 Barras – Equacionamento – Newton-Raphson

. A ideia do método é atualizar a função-objetivo e a função-erro, iterativamente

O método de Newton unidimensional é facilmente estendível para sistemas de equações múltiplas, simultâneas, não lineares. Ele é chamado de método de Newton-Raphson. Primeiro, generalizemos a expressão desenvolvida para o caso unidimensional no passo 4 da Equação 4.35 .

$$x_{i+1} = x_i - \frac{y_i}{m} \qquad \text{ou} \qquad m(x_{i+1} - x_i) = -y_i$$

mas $\quad y_i = f(x_i) \qquad m = f'(x_i) \qquad x_{i+1} - x_i = \Delta x$

substituindo $\quad f'(x_i) \cdot \Delta x = -f(x_i) \quad (4.36)$

Aqui, um termo Δx é introduzido, o qual chegará a zero quando a solução convergir. Neste caso, o termo de Δx será testado no lugar de y_i em relação à tolerância estabelecida. Note que essa forma de equação evita a operação de divisão, que é possível em uma equação escalar, mas impossível em equação matricial.

. Para sistemas multidimensionais (mais de uma função-objetivo), a eq. se torna:

$$\begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ f_n(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) \end{bmatrix} = \mathbf{B} \qquad (4.37)$$

4 Barras – Equacionamento – Newton-Raphson

São necessárias derivadas parciais para obter os coeficientes angulares

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} = \mathbf{A} \qquad (4.38)$$

que formam a *matriz jacobiana* do sistema, denominada aqui de **A**.

Os erros absolutos também formam um vetor, aqui denominado de **X**.

$$\begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \vdots \\ \Delta x_n \end{bmatrix} = \mathbf{X} \qquad (4.39)$$

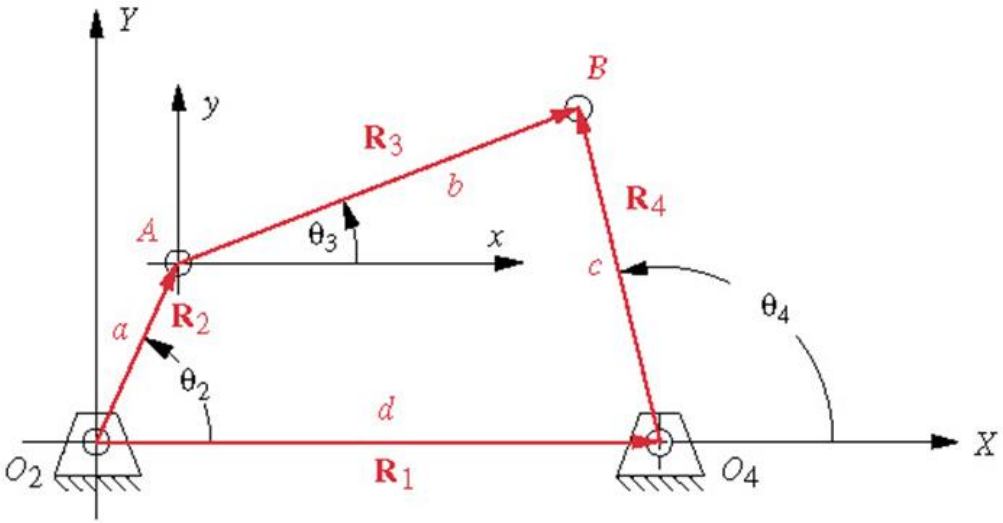
Então, a Equação 4.36 se torna uma equação matricial para o caso multidimensional.

$$\mathbf{A}\,\mathbf{X} = -\mathbf{B} \qquad (4.40)$$

A Equação 4.40 pode ser resolvida para **X** por meio de uma inversão de matriz ou por eliminação gaussiana. Os valores dos elementos de **A** e **B** são calculáveis para qualquer valor assumido (suposição) das variáveis. Pode ser considerado como critério de convergência a soma do vetor erro **X** a cada iteração, na qual a soma se aproxima a zero em uma raiz.

4 Barras – Equacionamento – Newton-Raphson

A equação vetorial de malha fechada de um mecanismo de quatro barras, separada em parte real e parte imaginária (equações 4.6a e 4.6b), provê um grupo de funções que define dois ângulos de elos desconhecidos, θ_3 e θ_4. O comprimento dos elos a, b, c, d e o ângulo de entrada θ_2 são dados.



$$\mathbf{R}_2 + \mathbf{R}_3 - \mathbf{R}_4 - \mathbf{R}_1 = 0 \quad (4.5a)$$

$$a\cos\theta_2 + b\cos\theta_3 - c\cos\theta_4 - d = 0 \quad (4.6a)$$

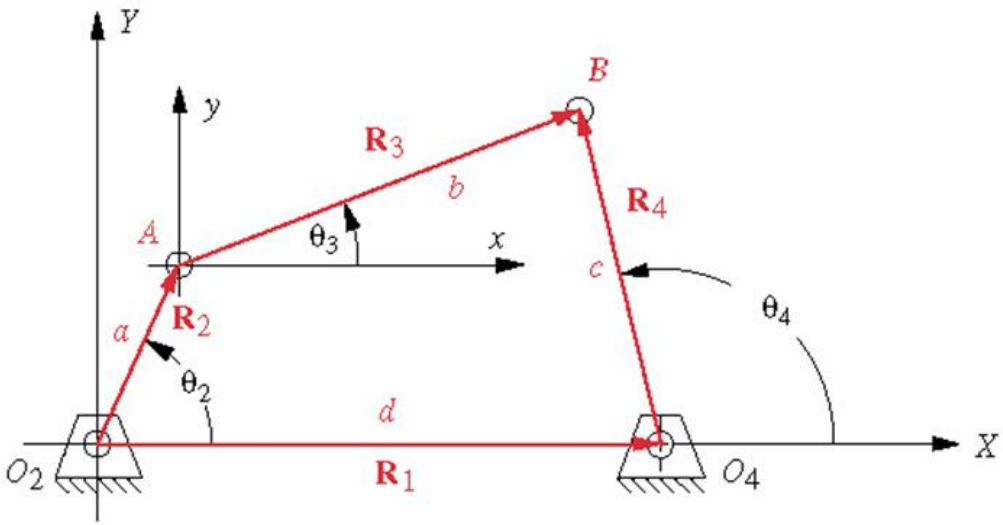
$$a\,\mathrm{sen}\,\theta_2 + b\,\mathrm{sen}\,\theta_3 - c\,\mathrm{sen}\,\theta_4 = 0 \quad (4.6b)$$

$$\begin{aligned} f_1 &= a\cos\theta_2 + b\cos\theta_3 - c\cos\theta_4 - d = 0 \\ f_2 &= a\,\mathrm{sen}\,\theta_2 + b\,\mathrm{sen}\,\theta_3 - c\,\mathrm{sen}\,\theta_4 = 0 \end{aligned} \quad (4.41a)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} a\cos\theta_2 + b\cos\theta_3 - c\cos\theta_4 - d \\ a\,\mathrm{sen}\theta_2 + b\,\mathrm{sen}\theta_3 - c\,\mathrm{sen}\theta_4 \end{bmatrix} \quad (4.41b)$$

. No quatro barras, Newton-Raphson fica:

4 Barras – Equacionamento – Newton-Raphson



$$\mathbf{R}_2 + \mathbf{R}_3 - \mathbf{R}_4 - \mathbf{R}_1 = 0 \quad (4.5a)$$

$$a\cos\theta_2 + b\cos\theta_3 - c\cos\theta_4 - d = 0 \quad (4.6a)$$

$$a\,\mathrm{sen}\,\theta_2 + b\,\mathrm{sen}\,\theta_3 - c\,\mathrm{sen}\,\theta_4 = 0 \quad (4.6b)$$

$$\begin{aligned} f_1 &= a\cos\theta_2 + b\cos\theta_3 - c\cos\theta_4 - d = 0 \\ f_2 &= a\,\mathrm{sen}\,\theta_2 + b\,\mathrm{sen}\,\theta_3 - c\,\mathrm{sen}\,\theta_4 = 0 \end{aligned} \quad (4.41a)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} a\cos\theta_2 + b\cos\theta_3 - c\cos\theta_4 - d \\ a\,\mathrm{sen}\theta_2 + b\,\mathrm{sen}\theta_3 - c\,\mathrm{sen}\theta_4 \end{bmatrix} \quad (4.41b)$$

O vetor erro é

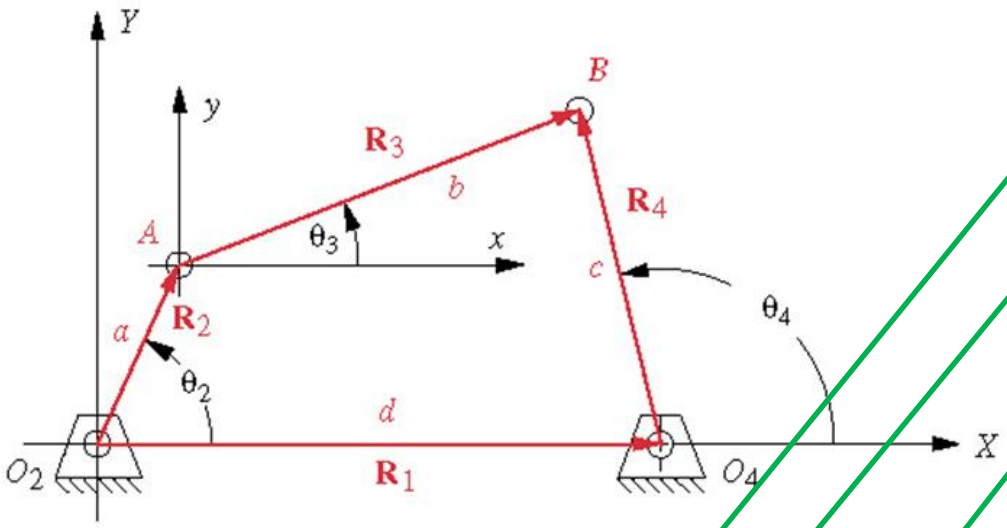
$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \Delta\theta_3 \\ \Delta\theta_4 \end{bmatrix} \quad (4.42)$$

As derivadas parciais são

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial \theta_3} & \dfrac{\partial f_1}{\partial \theta_4} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial \theta_3} & \dfrac{\partial f_2}{\partial \theta_4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -b\,\mathrm{sen}\,\theta_3 & c\,\mathrm{sen}\,\theta_4 \\ b\cos\theta_3 & -c\cos\theta_4 \end{bmatrix} \quad (4.43)$$

Essa matriz é conhecida como o **jacobiano** do sistema, e, além de sua utilidade nesse método de solução, também está relacionada à solução do sistema. O sistema de equações para posição, velocidade e aceleração (nos quais aparece o jacobiano) pode ser resolvido se a determinante da matriz jacobiana for diferente de zero.

4 Barras – Equacionamento – Newton-Raphson



$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} a\cos\theta_2 + b\cos\theta_3 - c\cos\theta_4 - d \\ a\,\mathrm{sen}\,\theta_2 + b\,\mathrm{sen}\,\theta_3 - c\,\mathrm{sen}\,\theta_4 \end{bmatrix} \quad (4.41b)$$

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \Delta\theta_3 \\ \Delta\theta_4 \end{bmatrix} \quad (4.42)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial \theta_3} & \dfrac{\partial f_1}{\partial \theta_4} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial \theta_3} & \dfrac{\partial f_2}{\partial \theta_4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -b\,\mathrm{sen}\,\theta_3 & c\,\mathrm{sen}\,\theta_4 \\ b\cos\theta_3 & -c\cos\theta_4 \end{bmatrix} \quad (4.43)$$

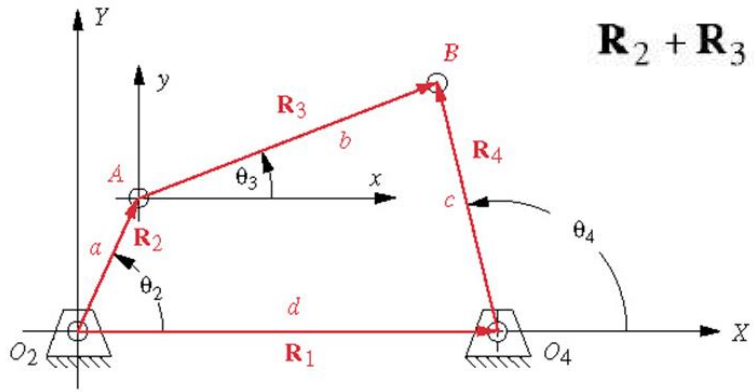
$$\mathbf{A}\,\mathbf{X} = -\mathbf{B} \quad (4.40)$$

Substituindo as equações 4.41b, 4.42, e 4.43 na Equação 4.40, temos

$$\begin{bmatrix} -b\,\mathrm{sen}\,\theta_3 & c\,\mathrm{sen}\,\theta_4 \\ b\cos\theta_3 & -c\cos\theta_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\theta_3 \\ \Delta\theta_4 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} a\cos\theta_2 + b\cos\theta_3 - c\cos\theta_4 - d \\ a\,\mathrm{sen}\,\theta_2 + b\,\mathrm{sen}\,\theta_3 - c\,\mathrm{sen}\,\theta_4 \end{bmatrix} \quad (4.44)$$

Para resolver essa equação matricial, assuma valores para calcular θ_3 e θ_4 e as duas equações são resolvidas simultaneamente para $\Delta\theta_3$ e $\Delta\theta_4$. Para resolver grandes sistemas de equações, será necessário o uso do algoritmo de redução matricial. Para esse simples sistema com duas incógnitas, as duas equações podem ser resolvidas por combinação e simplificação. O teste descrito anteriormente, que compara a soma de $\Delta\theta_3$ e $\Delta\theta_4$ a uma tolerância estabelecida, deve ser aplicado a cada iteração para determinar se a raiz foi encontrada.

4 Barras – Equacionamento – Newton-Raphson



$$\mathbf{R}_2 + \mathbf{R}_3 - \mathbf{R}_4 - \mathbf{R}_1 = 0 \quad (4.5a)$$

Componentes em x:

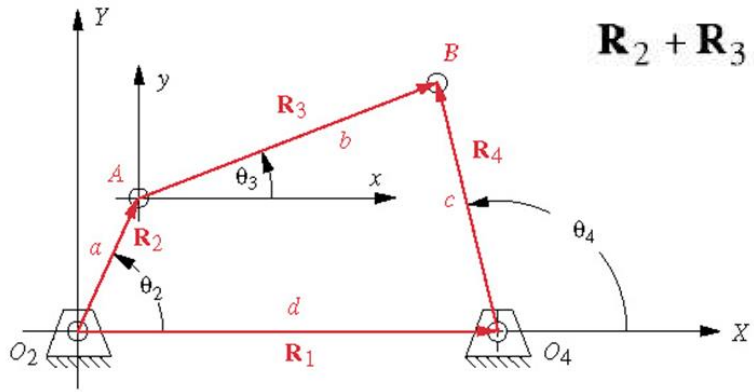
$$r_1 + r_4 \cos\theta_4 - r_3 \cos\theta_3 - r_2 \cos\theta_2 = 0 \quad (A)$$

Componentes em y:

$$r_4 \operatorname{sen}\theta_4 - r_3 \operatorname{sen}\theta_3 - r_2 \operatorname{sen}\theta_2 = 0 \quad (B)$$

As equações (A) e (B) são satisfeitas para valores de θ_3 e θ_4 que fecham a cadeia cinemática

4 Barras – Equacionamento – Newton-Raphson



$$\mathbf{R}_2 + \mathbf{R}_3 - \mathbf{R}_4 - \mathbf{R}_1 = 0 \quad (4.5a)$$

Define-se as funções:

$$f_1(\theta) = f_1(\theta_3, \theta_4) = r_1 + r_4 \cos\theta_4 - r_3 \cos\theta_3 - r_2 \cos\theta_2$$

$$f_2(\theta) = f_2(\theta_3, \theta_4) = r_4 \operatorname{sen}\theta_4 - r_3 \operatorname{sen}\theta_3 - r_2 \operatorname{sen}\theta_2$$

$$\theta = (\theta_3, \theta_4)$$

A determinação das raízes das eq. (A) e (B) equivale à determinar os valores de θ_3 e θ_4 que façam $f_1(\theta)$ e $f_2(\theta)$ se tornarem nulas:

4 Barras – Equacionamento – Newton-Raphson

1º Passo: Chuta-se θ_3 e θ_4

2º Passo: Verifica-se a solução

Det. $f_1(\theta)$ e $f_2(\theta) = 0$

3º Passo: Atualizar o Chute

$$\theta_3^1 = \theta_3^0 + \Delta\theta_3$$
$$\theta_4^1 = \theta_4^0 + \Delta\theta_4$$

4º Passo: Verificar se a nova solução satisfaz

$$f_1(\theta_3 + \Delta\theta_3, \theta_4 + \Delta\theta_4) = f_1(\theta + \Delta\theta) = 0$$
$$f_2(\theta_3 + \Delta\theta_3, \theta_4 + \Delta\theta_4) = f_2(\theta + \Delta\theta) = 0$$

4 Barras – Equacionamento – Newton-Raphson

Efetua-se a expansão em série de TAYLOR em torno do ponto $\theta = (\theta_3, \theta_4)$, retornando-se apenas os 2 primeiros termos (aproximação)

$$\text{TAYLOR}: \quad f(\theta+\Delta) = \underbrace{f(\theta) + \frac{\partial f}{\partial \theta} \cdot \Delta}_{} + \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} \Delta^2 + \ldots$$

Para Solução $f_1 = 0$ e $f_2 = 0$

$$\begin{cases} f_1 + \dfrac{\partial f_1}{\partial \theta_3} \Delta\theta_3 + \dfrac{\partial f_1}{\partial \theta_4} \Delta\theta_4 = 0 \\[2ex] f_2 + \dfrac{\partial f_2}{\partial \theta_3} \Delta\theta_3 + \dfrac{\partial f_2}{\partial \theta_4} \Delta\theta_4 = 0 \end{cases}$$

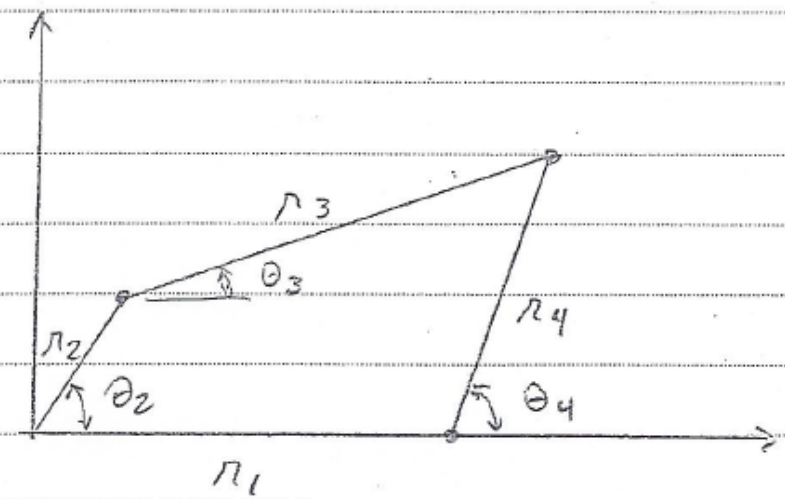
4 Barras – Equacionamento – Newton-Raphson

Para o Calculo de $\Delta\theta_3$ e $\Delta\theta_4$, determina-se as derivadas parciais de f_1 e f_2 p/ θ_3 e θ_4

$$\frac{\partial f_1}{\partial \theta_3} = r_3 \operatorname{sen}\theta_3 \qquad \frac{\partial f_2}{\partial \theta_3} = -r_3 \cos\theta_3$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial \theta_4} = -r_4 \operatorname{sen}\theta_4 \qquad \frac{\partial f_2}{\partial \theta_4} = r_4 \cos\theta_4$$

Det. θ_3 e θ_4 usando NEWTON-RAPHSON



$\theta_2 = 60°$

$r_1 = 18$ cm

$r_2 = 8$ cm

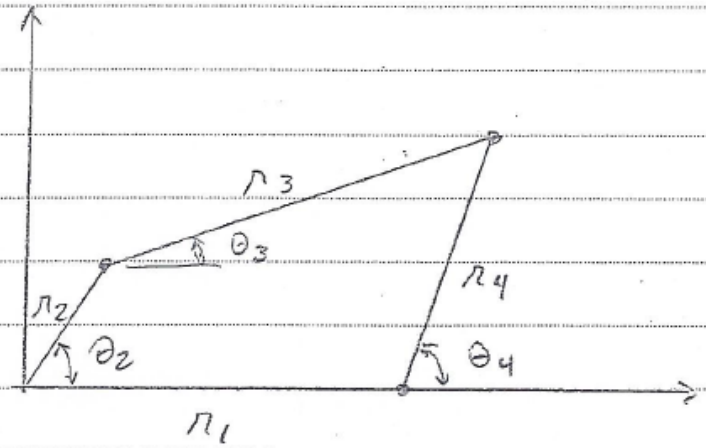
$r_3 = 20$ cm

$r_4 = 15$ cm

θ_3 e θ_4 = ?

4 Barras – Equacionamento – Newton-Raphson

Det. θ_3 e θ_4 usando NEWTON - RAPHSON



$\theta_2 = 60°$

$r_1 = 18$ cm

$r_2 = 8$ cm

$r_3 = 20$ cm

$r_4 = 15$ cm

θ_3 e $\theta_4 = ?$

$$f_1 = r_1 + r_4 \cos\theta_4 - r_2 \cos\theta_2 - r_3 \cos\theta_3$$

$$f_2 = r_4 \operatorname{sen}\theta_4 - r_2 \operatorname{sen}\theta_2 - r_3 \operatorname{sen}\theta_3$$

1º) Chute inicial: $\theta_3 = 15°$ e $\theta_4 = 80°$

$$f_1 = 18 + 15 \cos 80 - 8 \cos 60 - 20 \cos 15 = -2{,}714$$

$$f_2 = 15 \operatorname{sen} 80 - 8 \operatorname{sen} 60 - 20 \operatorname{sen} 15 = 2{,}668$$

4 Barras – Equacionamento – Newton-Raphson

$$f_1 = r_1 + r_4 \cos\theta_4 - r_2 \cos\theta_2 - r_3 \cos\theta_3$$
$$f_2 = r_4 \operatorname{sen}\theta_4 - r_2 \operatorname{sen}\theta_2 - r_3 \operatorname{sen}\theta_3$$

2º) Efetuar uma primeira estimativa de $\Delta\theta_3$ e $\Delta\theta_4$

$$f_1 = 0 \quad e \quad f_2 = 0$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial \theta_3} = r_3 \operatorname{sen}\theta_3 = 20 \operatorname{sen} 15° = 5{,}1764$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial \theta_4} = -r_4 \operatorname{sen}\theta_4 = -15 \operatorname{sen} 80 = -14{,}7721$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial \theta_3} = -r_3 \cos\theta_3 = -20 \cos 15° = -19{,}3185$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial \theta_4} = r_4 \cos\theta_4 = 15 \cos 80° = 2{,}6047$$

Substituindo os valores das derivadas na expansão de Taylor, fica:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f_1}{\partial \theta_3}\Delta\theta_3 + \dfrac{\partial f_1}{\partial \theta_4}\Delta\theta_4 = f_1 \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial \theta_3}\Delta\theta_3 + \dfrac{\partial f_2}{\partial \theta_4}\Delta\theta_4 = f_2 \end{cases}$$

que numericamente fica:

4 Barras – Equacionamento – Newton-Raphson

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f_1}{\partial \theta_3}\Delta\theta_3 + \dfrac{\partial f_1}{\partial \theta_4}\Delta\theta_4 = f_1 \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial \theta_3}\Delta\theta_3 + \dfrac{\partial f_2}{\partial \theta_4}\Delta\theta_4 = f_2 \end{cases}$$

que numericamente fica:

$$(5,1764)\,\Delta\theta_3 - (14,7721)\,\Delta\theta_4 = 2,714$$

$$(-19,3185)\,\Delta\theta_3 + (2,6047)\cdot\Delta\theta_4 = -2,668$$

$$\underline{\Delta\theta_4} = -0,1420 \text{ rad} = -8,14^\circ$$

$$\underline{\Delta\theta_3} = 0,1191 \text{ rad} = 6,82^\circ$$

3º) Atualizar o Chute: $\theta_3' = 15^\circ + 6,82^\circ = 21,82^\circ$

$\theta_4' = 80 - 8,14^\circ = 71,86^\circ$

4 Barras – Equacionamento – Newton-Raphson

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f_1}{\partial \theta_3}\Delta\theta_3 + \dfrac{\partial f_1}{\partial \theta_4}\Delta\theta_4 = f_1 \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial \theta_3}\Delta\theta_3 + \dfrac{\partial f_2}{\partial \theta_4}\Delta\theta_4 = f_2 \end{cases}$$

que numericamente fica:

$$(5,1764)\,\Delta\theta_3 - (14,7721)\,\Delta\theta_4 = 2,714$$

$$(-19,3185)\,\Delta\theta_3 + (2,6047)\cdot\Delta\theta_4 = -2,668$$

$$\underline{\Delta\theta_4} = -0,1420 \text{ rad} = -8,14^\circ$$

$$\underline{\Delta\theta_3} = 0,1191 \text{ rad} = 6,82^\circ$$

3º) Atualizar o Chute: $\theta_3' = 15^\circ + 6,82^\circ = 21,82^\circ$

$\theta_4' = 80 - 8,14^\circ = 71,86^\circ$

4º) Segunda Interação:

$$f_1 = 18 + 15 \cos 71,86 - 8 \cos 60 - 20 \cos 21,82 = 0,1030$$
$$f_2 = 15 \operatorname{sen} 71,86 - 8 \operatorname{sen} 60 - 20 \operatorname{sen} 21,82 = -0,1076$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial \theta_3} = 7,4338 \qquad \frac{\partial f_2}{\partial \theta_3} = -18,5671$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial \theta_4} = -14,2545 \qquad \frac{\partial f_2}{\partial \theta_4} = 4,6701$$

$$(7,4338)\,\Delta\theta_3 + (-14,2545)\,\Delta\theta_4 = -0,1030$$

$$(-18,5671)\,\Delta\theta_3 + (4,6701)\,\Delta\theta_4 = 0,1076$$

$$\Delta\theta_3 = -0,0047 \text{ rad} = -0,27^\circ$$
$$\Delta\theta_4 = 0,0048 \text{ rad} = 0,28^\circ$$

$$\theta_3'' = 21,82 + (-0,27) = 21,55^\circ$$

$$\theta_4'' = 71,86 + 0,28 = 72,14^\circ$$

4 Barras – Equacionamento – Newton-Raphson

Verificando:

$$f_1 = 18 + 15 \cos 72{,}14^\circ - 8 \cos 60 - 20 \cos 21{,}55 = -0{,}0015$$

$$f_2 = 15 \operatorname{sen} 72{,}14 - 8 \operatorname{sen} 60 - 20 \operatorname{sen} 21{,}55 = 0{,}00267$$

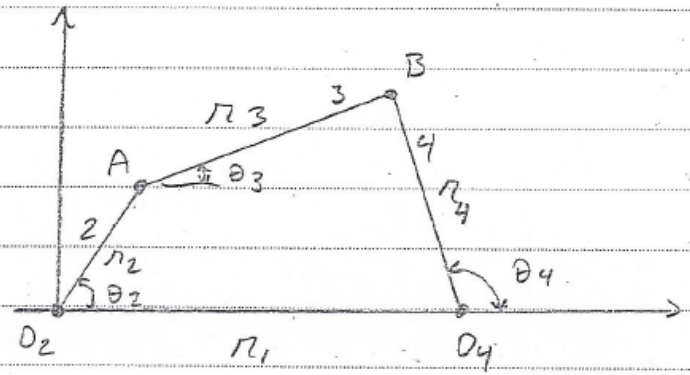
Para 3ª Interação: $\theta_3''' = 21{,}558^\circ$, $\theta_4''' = 72{,}138^\circ$ $\Rightarrow$ $f_1 = -4{,}03 \times 10^{-5}$, $f_2 = -9{,}05 \times 10^{-5}$

f_1 e f_2 já atingiram valores pequenos.

Solução satisfatória dependendo da precisão desejada

—— // ——

Exercício: Escrever a rotina em um program (Ex: MATLAB), para análise de posição do mecanismo abaixo.



$r_1 = 300$ mm

$r_2 = 100$ mm

$r_3 = 250$ mm

$r_4 = 200$ mm

Usar: $\theta_2 = 60°$

Estimar: $\theta_3 = 30°$

$\theta_4 = 100°$

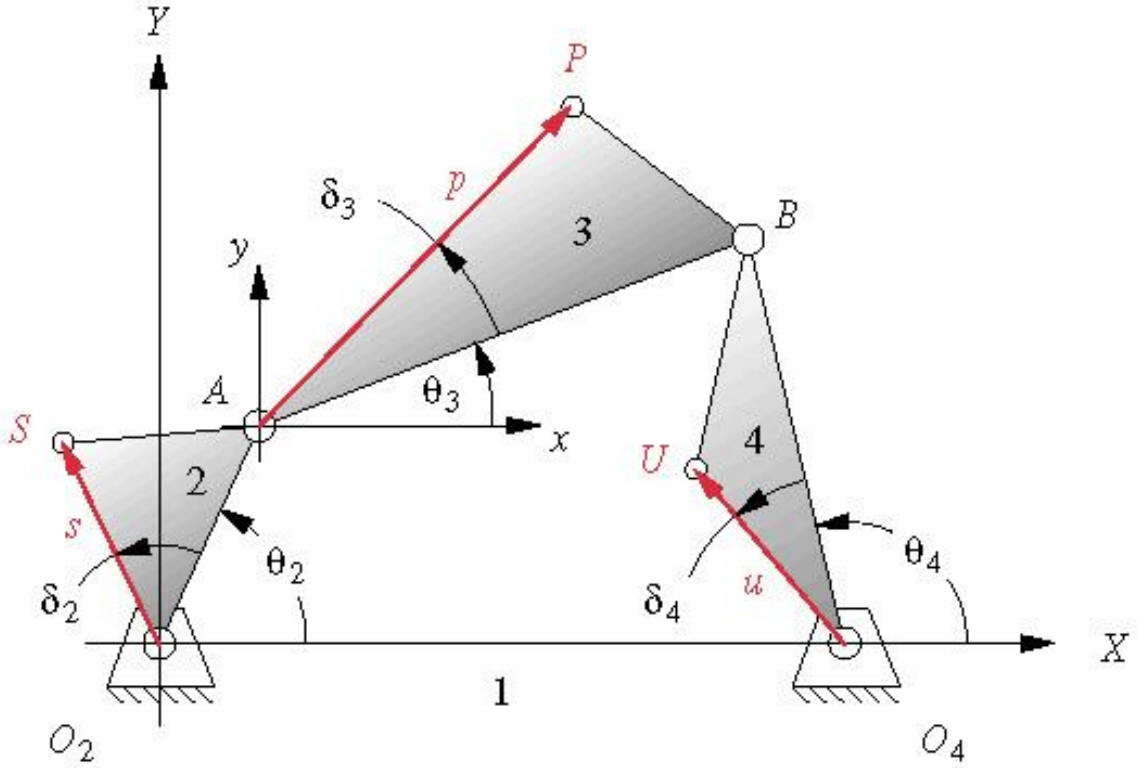
Parâmetros de entrada para a rotina:

θ_2, θ_3, θ_4, r_1, r_2, r_3 e r_4

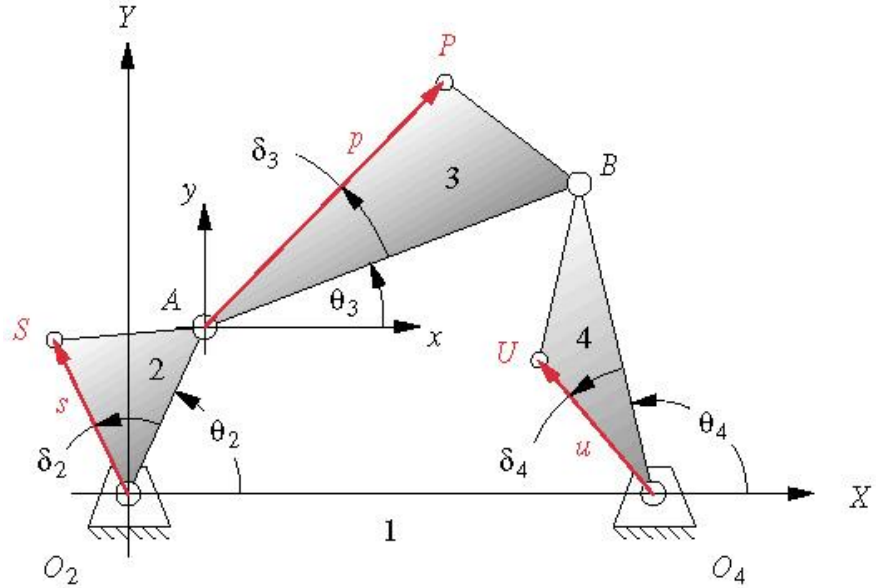
Escrever um programa genérico, testando Grashof e Reuleaux, para comprimentos de barras genéricos. Usar estes dados para aferir. Dar, também, como retorno, o tipo de movimento, bem como plotar o resultado final e as tabelas com os resultados de Newton-Raphson.

Posição em qualquer ponto do mecanismo

Uma vez encontrados os ângulos de todos os elos, a determinação e o cálculo da posição de qualquer ponto, em qualquer elo, para qualquer posição de entrada do mecanismo, são simples e diretos. A Figura 4-14 mostra um mecanismo de quatro barras cujo acoplador, o elo 3, foi ampliado de forma a conter o ponto *P*. A manivela e o seguidor também foram alargados com o objetivo de mostrar os pontos *S* e *U*, os quais podem representar o centro de gravidade desses elos. O intuito é desenvolver expressões algébricas para a posição destes (ou de quaisquer) pontos pertencentes aos elos.



Posição em qualquer ponto do mecanismo



Para achar a posição do ponto S, desenhe um vetor de posição do polo O_2 ao ponto S. Esse vetor $\mathbf{R}_{SO_2}$ forma um ângulo δ_2 com o vetor $\mathbf{R}_{AO_2}$. Esse ângulo δ_2 é definido pela geometria do elo 2 e é constante. O vetor de posição para o ponto S é, então:

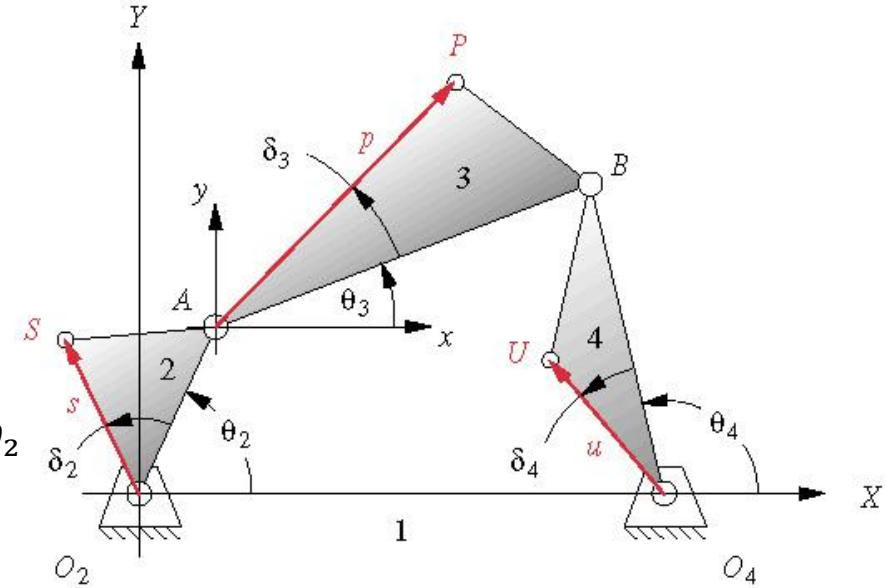
$$\mathbf{R}_{SO_2} = \mathbf{R}_S = se^{j(\theta_2+\delta_2)} = s\left[\cos(\theta_2+\delta_2) + j\,\mathrm{sen}(\theta_2+\delta_2)\right] \tag{4.25}$$

A posição do ponto U no elo 4 é encontrada da mesma forma, usando o ângulo δ_4 que possui uma distância angular constante dentro do elo. A expressão é:

$$\mathbf{R}_{UO_4} = ue^{j(\theta_4+\delta_4)} = u\left[\cos(\theta_4+\delta_4) + j\,\mathrm{sen}(\theta_4+\delta_4)\right] \tag{4.26}$$

Posição em qualquer ponto do mecanismo

$$R_A = \overline{O_2A}\ e^{j\theta_2} = \ ae^{j\theta_2}$$



A posição do ponto P no elo 3 pode ser encontrada por meio da soma de dois vetores de posição: $\mathbf{R}_A$ e $\mathbf{R}_{PA}$. O vetor $\mathbf{R}_A$ foi anteriormente definido após análise dos ângulos dos elos na Equação 4.5. $\mathbf{R}_{PA}$ é a posição relativa do ponto P em relação ao ponto A. O vetor $\mathbf{R}_{PA}$ é definido do mesmo modo que $\mathbf{R}_S$ ou $\mathbf{R}_U$, utilizando o ângulo deslocado interno do elo δ_3 e o ângulo posição do elo 3, θ_3.

$$\mathbf{R}_{PA} = pe^{j(\theta_3+\delta_3)} = p\left[\cos(\theta_3+\delta_3) + j\,\mathrm{sen}(\theta_3+\delta_3)\right] \quad (4.27a)$$

$$\mathbf{R}_P = \mathbf{R}_A + \mathbf{R}_{PA} \quad (4.27b)$$

Mecanismos Simples

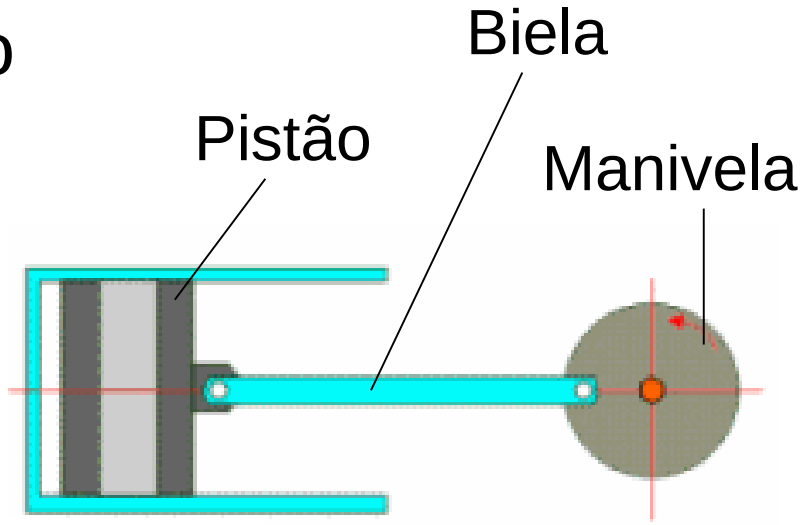
Biela-Manivela

- Exemplos de Aplicação: Motores de Combustão Interna, Máquinas Ferramenta, Compressores, etc.

- Deslocamento do Pistão

- Velocidades

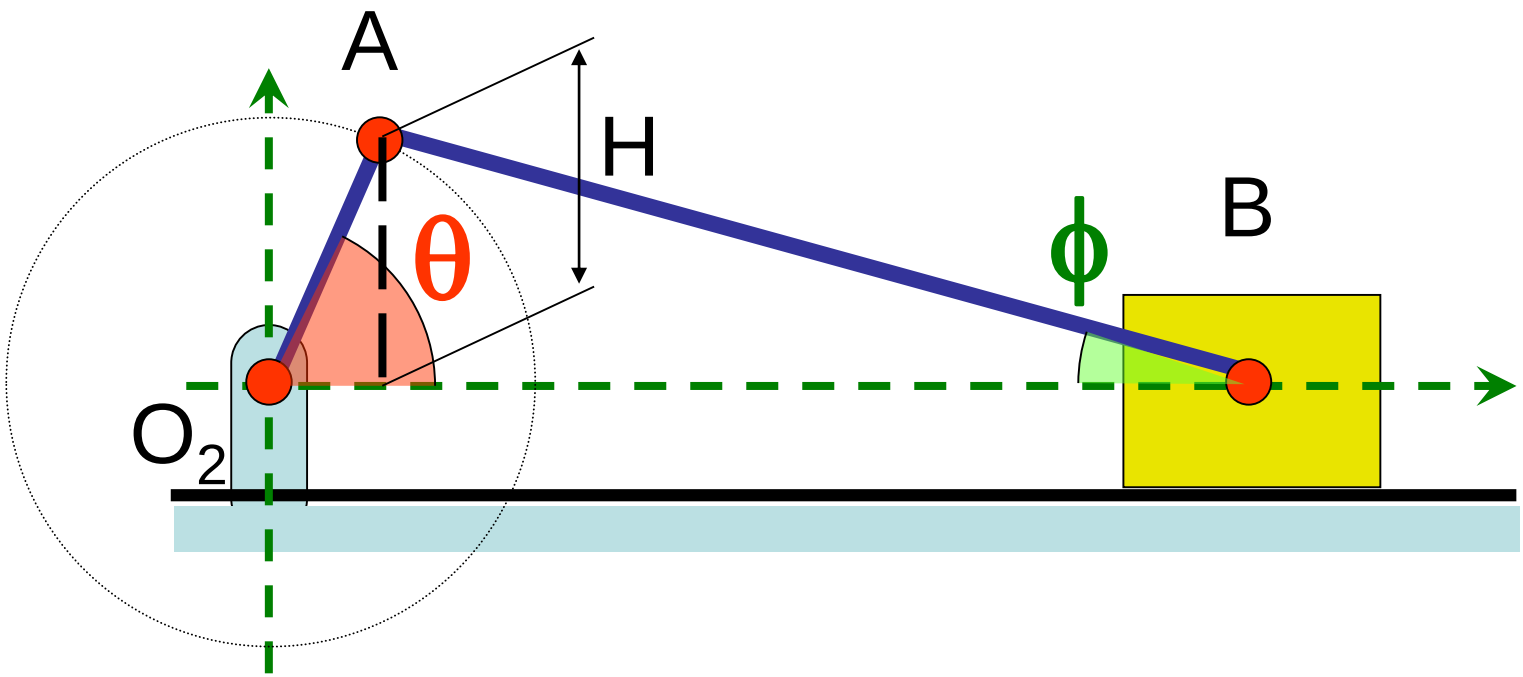
- Aceleração



Mecanismos Simples

Biela-Manivela

- Diagrama de Corpo Livre e Equacionamento

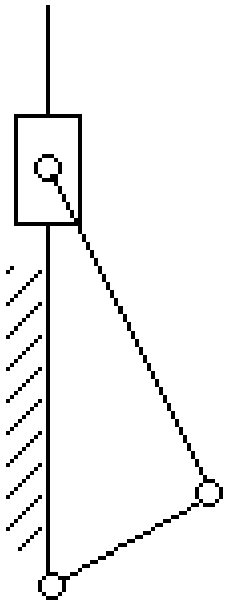


Dedução - link

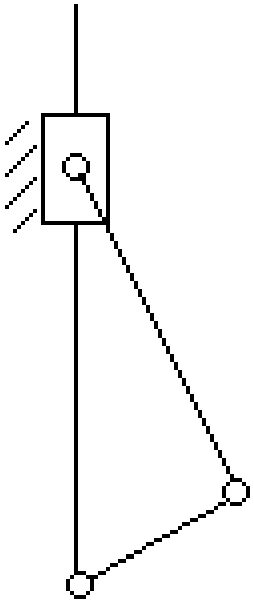
Mecanismos Simples

Biela-Manivela

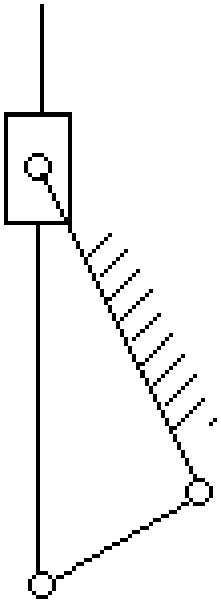
- Outras Configurações para o Biela-Manivela



Compressores
Motores



Bomba de
água Manual



Motores de Avião
Mecanismo de
Whitworth

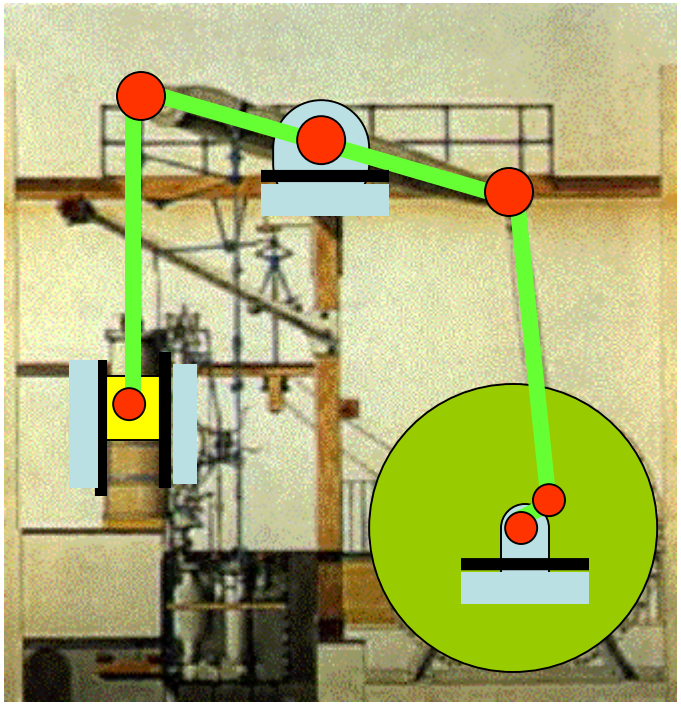
Sumário da Aula

- Classificação de Mecanismos
- Lei de Grashof
- Lei de Reuleaux
- Mecanismos Simples
  - 4 Barras
  - Biela Manivela
- Mecanismos Complexos

Mecanismos Complexos

- União de 2 ou mais mecanismos simples

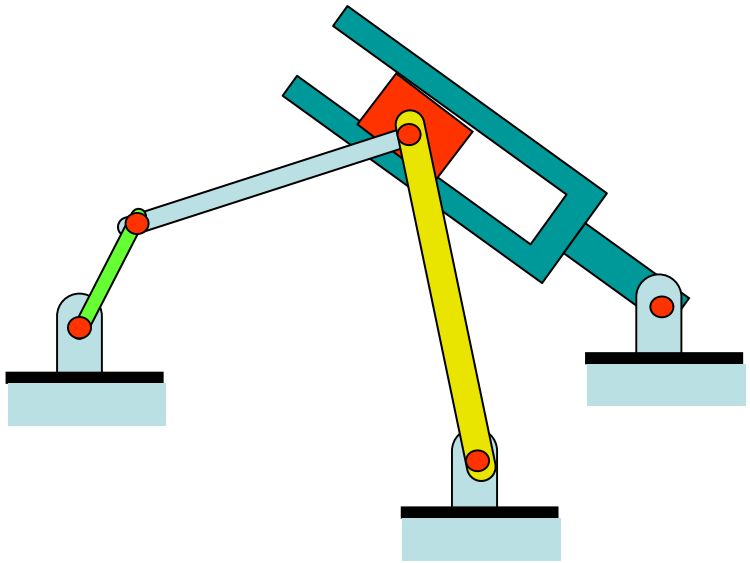
  4 Barras + Biela-Manivela

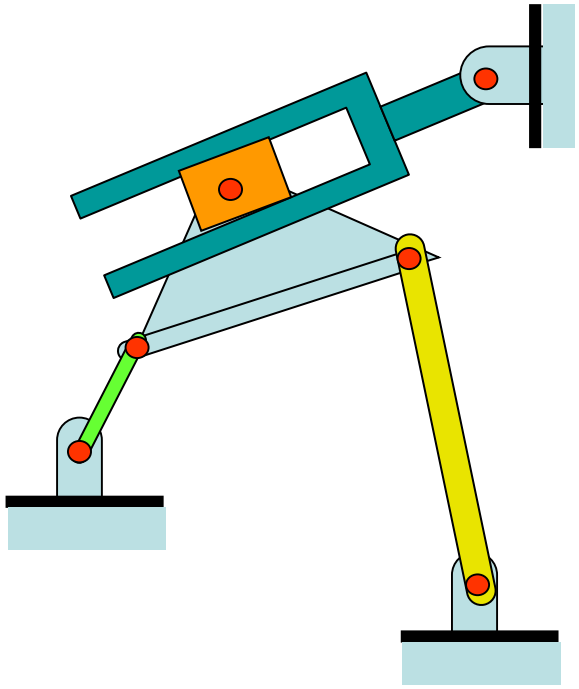


Mecanismos Complexos

- União de 2 ou mais mecanismos simples

  4 Barras + Biela-Manivela

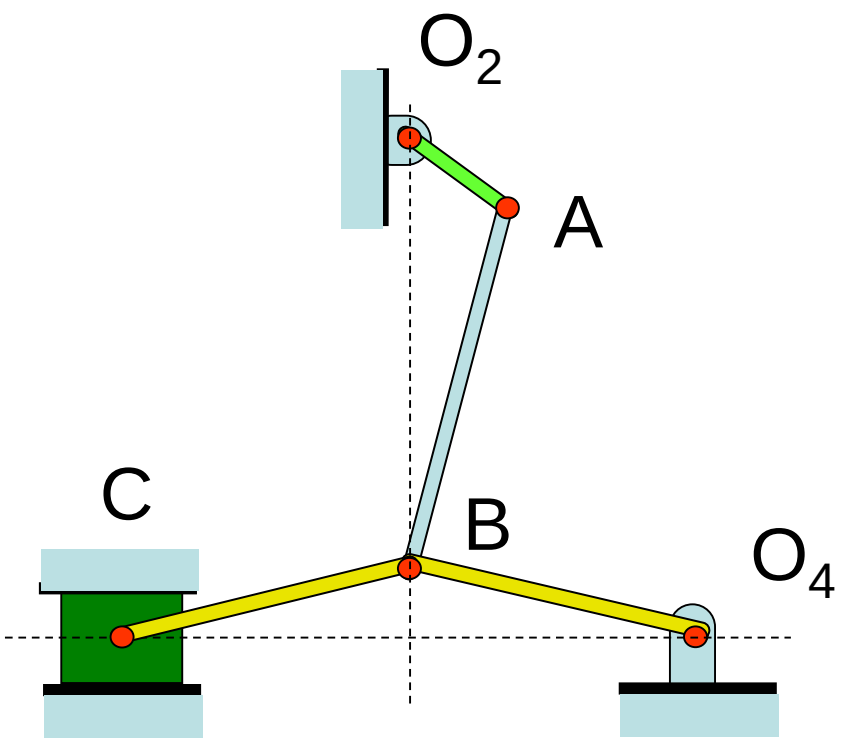




Mecanismos Complexos

Mecanismo Toggle

- Sobrepujar grandes resistências com a aplicação de pequenas forças
- Aplicações:
  - Prensas
  - Travas de Portas
  - Etc.
- Barras CB e BO_4 com Mesmo comprimento



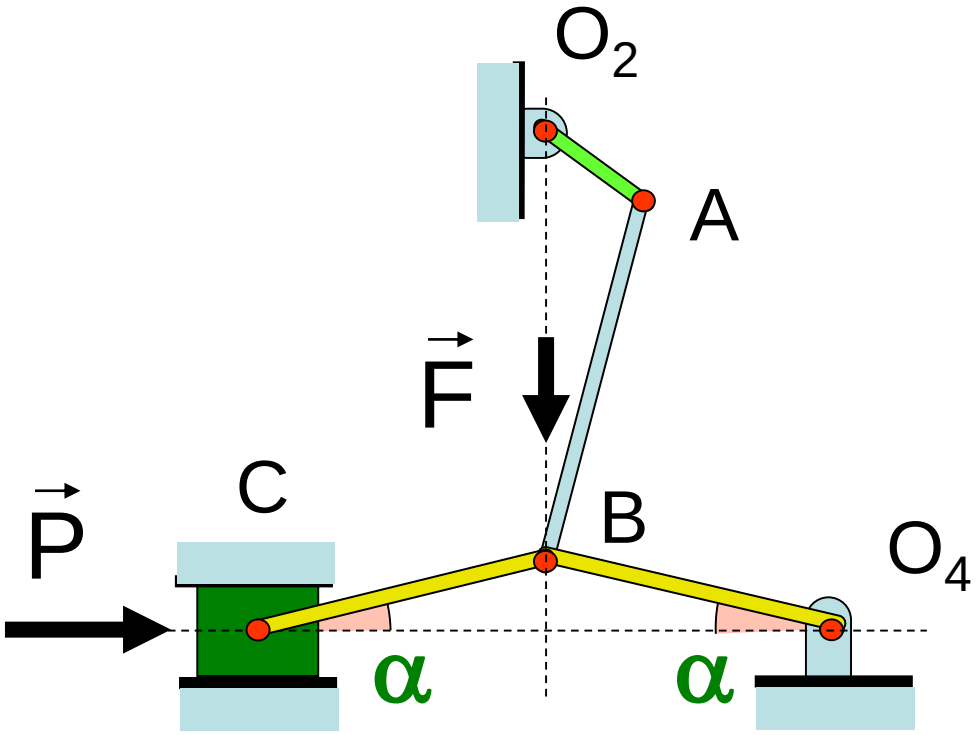
Mecanismos Complexos

Mecanismo Toggle

- Equacionamento

$$\frac{F}{P} = 2 \tan \alpha$$

$$\alpha \rightarrow 0 \qquad P \rightarrow \infty$$

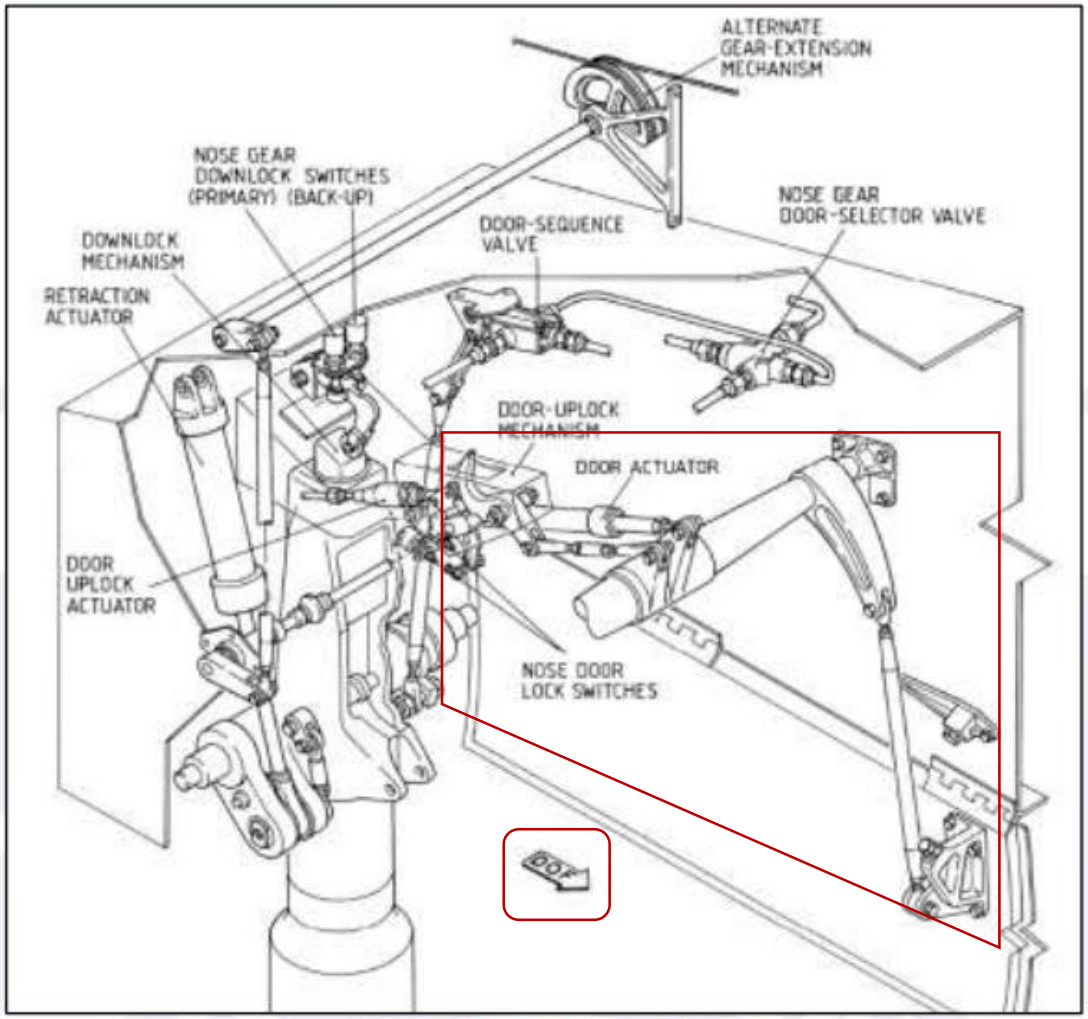


Mecanismos Complexos - Mecanismo Toggle

Acidente com a aeronave PR-OAF, modelo F28MK0100, ocorrido em 28MAR2014, classificado como "[SCF-NP] Falha ou mau funcionamento de sistema/componente | Com trem de pouso"

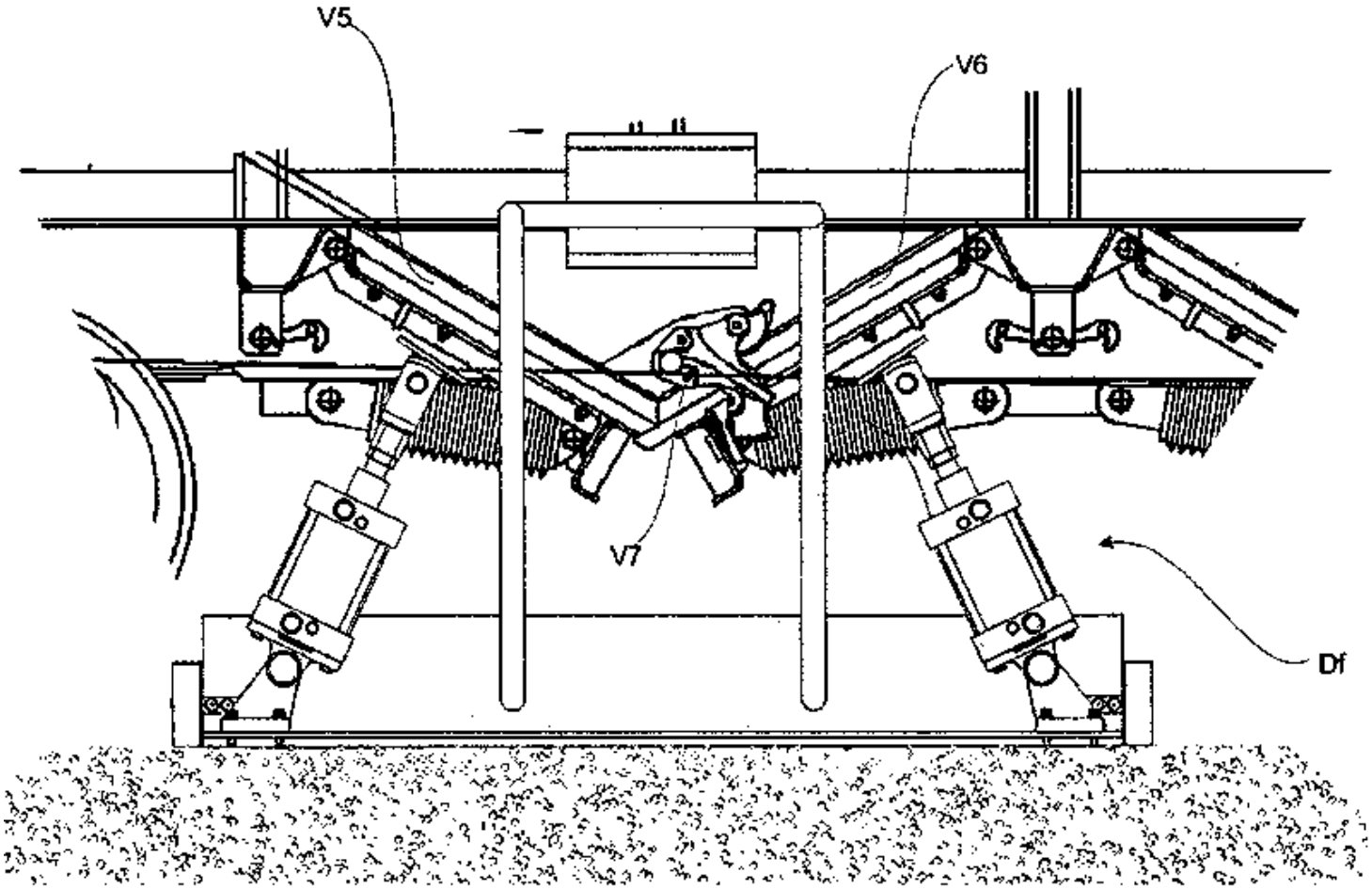
A-066/CENIPA/2014

PR-OAF 28MAR2014

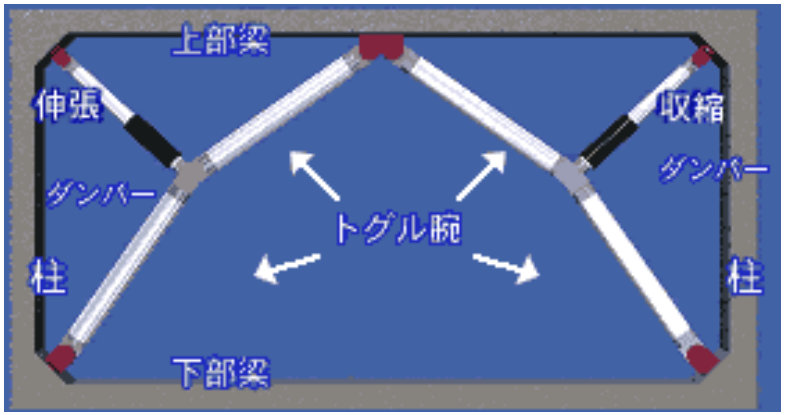
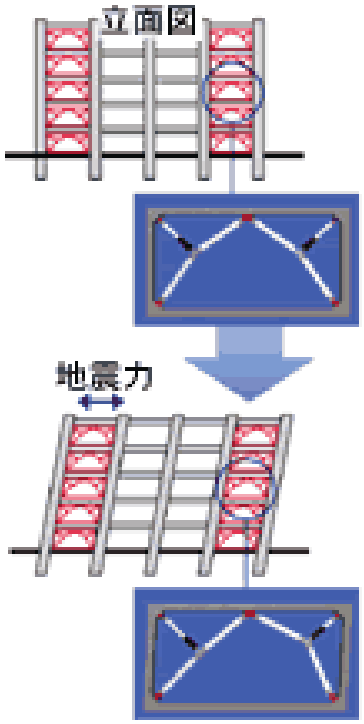


Mecanismos do trem de nariz e das portas.

Mecanismos Complexos - Mecanismo Toggle



Dispositivo para fechamento de portas do sistema de tremonhas em segundo e terceiro estágio de vagões ferroviários de transporte de cargas

Mecanismos Complexos - Mecanismo Toggle

- Exemplos de Aplicação