

Calibração Estática

Erick Nathan Martins Alves

31/08/2023

1 Obtenção dos dados de calibração

O sistema trata-se de uma planta que simula o movimento de um helicóptero, com uma haste móvel fixada por um mancal, um motor *brushless* na extremidade e um potenciômetro como transdutor. A conexão do potenciômetro é realizada como um divisor de tensão na entrada analógica de um Arduino UNO. Algumas posições angulares foram registradas para fins de calibração: a tensão pôde ser documentada via serial do microcontrolador e o ângulo foi medido com o auxílio de um instrumento que será considerado como **referência**, ou seja, qualidade ouro, com precisão e exatidão “perfeitas”, em teoria. As leituras obtidas podem ser visualizados na Tabela 1.

Tabela 1: Dados adquiridos da planta.

Ângulo [°]	Tensão [V]
90	4.11
84	4.01
78	3.88
72	3.78
66	3.69
60	3.60
54	3.47
48	3.36
42	3.25
36	3.14
30	3.02
24	2.90
18	2.78
12	2.65
6	2.52
0	2.41

2 Ajuste da curva de calibração

Deve-se então, fazer o ajuste dos dados para uma curva, expressa no formato da função afim:

$$\hat{y} = \hat{f}_e[x] = \hat{p} + \hat{\alpha}x. \quad (1)$$

O método a ser utilizado é o dos **Mínimos Quadrados**, que visa buscar os coeficientes angular e linear por meio da minimização dos quadrados dos erros médios. O método pode ser implementado via biblioteca *numpy*, em *Python* ou através das relações:

$$\hat{\alpha} = \frac{N \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{N \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \quad e \quad (2)$$

$$\hat{\beta} = \frac{\sum y_i \sum x_i^2 - \sum x_i y_i \sum x_i}{N \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}.$$

Os coeficientes calculados foram: $\hat{\alpha} = 0,01886$ e $\hat{\beta} = 2,437$. Ao substituir na Equação 1 e plotar o gráfico, é possível observar os pontos reais, da Tabela 1, e a **reta de ajuste** encontrada, bem como analisar a correlação linear entre os mensurandos e os valores linearizados estimados, na Figura 1.

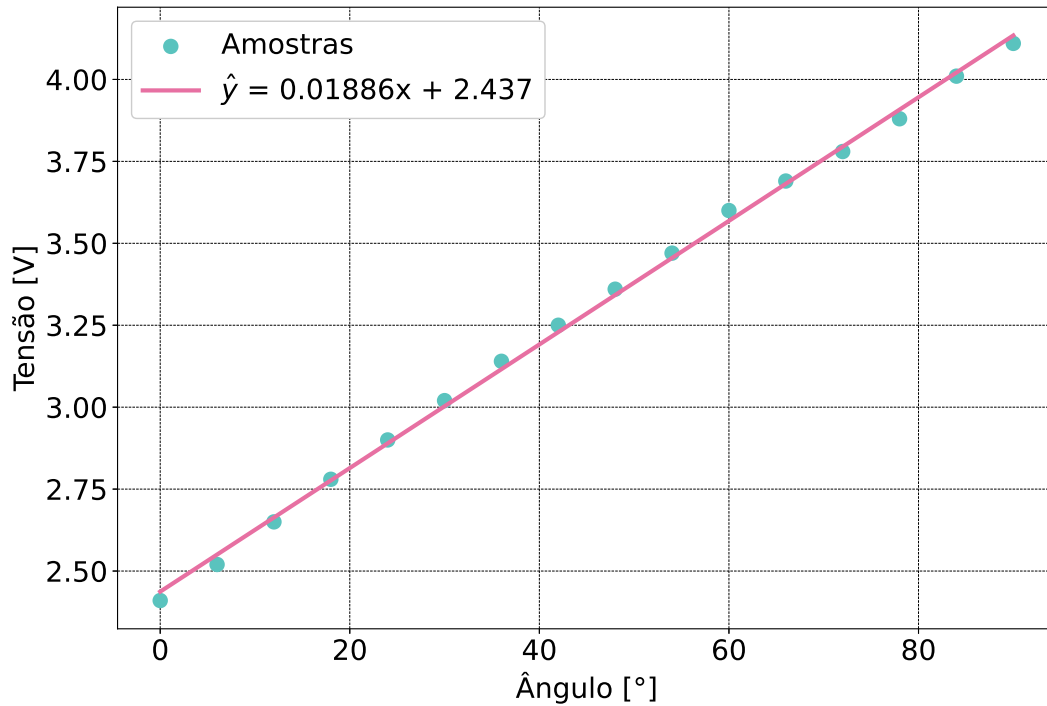


Figura 1: Função de ajuste obtida a partir da amostra.

3 Incerteza do ajuste

Graças à dispersão das leituras, há incerteza no valor da variável y_i , que é a saída do instrumento, o que também se reflete como incerteza no ajuste. (Aguirre, 2014)

Sendo $\hat{\beta}$ e $\hat{\alpha}$ variáveis aleatórias, há a necessidade de calcular suas variâncias, conforme Equações:

$$\begin{aligned}
s(y, x)^2 &= \frac{1}{\nu} \sum (y_i - \hat{p} - \hat{\alpha}x_i)^2, \\
s(\hat{\alpha})^2 &= \frac{Ns(y, x)^2}{N \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \\
s(\hat{p})^2 &= \frac{s(y, x)^2 \sum x_i^2}{N \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2},
\end{aligned} \tag{3}$$

onde $\nu = N - m - 1$ é o número de graus de liberdade, sendo N o número de amostras e m o grau da função ajustada.

Após os devidos cálculos, obteve-se os seguintes valores para o grau de liberdade e desvios-padrão:

$$\begin{aligned}
\nu &= 14 \\
s(y, x) &= 0,02164 \\
s(\hat{p}) &= 0,01033 \\
s(\hat{\alpha}) &= 0,0001956
\end{aligned}$$

Assim, pode-se calcular a incerteza do ajuste com o auxílio da Tabela 2 e da Equação (4).

Tabela 2: Distribuição t de Student.

$\alpha \backslash \nu$	0,50	0,25	0,10	0,05	0,025	0,01	0,005
1	1,00000	2,4142	6,3138	12,706	25,542	63,657	127,32
2	0,81650	1,6036	2,9200	4,3127	6,2053	9,9248	14,089
3	0,76489	1,4226	2,3534	3,1825	4,1765	5,8409	7,4533
4	0,74070	1,3444	2,1318	2,7764	3,4954	4,6041	5,5976
5	0,72669	1,3009	2,0150	2,5706	3,1634	4,0321	4,7733
6	0,71756	1,2733	1,9432	2,4469	2,9687	3,7074	4,3168
7	0,71114	1,2543	1,8946	2,3646	2,8412	3,4995	4,0293
8	0,70639	1,2403	1,8595	2,3060	2,7515	3,3554	3,8325
9	0,70272	1,2297	1,8331	2,2622	2,6850	3,2498	3,6897
10	0,69981	1,2213	1,8125	2,2281	2,6338	3,1693	3,5814
11	0,69745	1,2145	1,7959	2,2010	2,5931	3,1058	3,4966
12	0,69548	1,2089	1,7823	2,1788	2,5600	3,0545	3,4284
13	0,69384	1,2041	1,7709	2,1604	2,5326	3,0123	3,3725
14	0,692	1,2001	1,7613	2,1448	2,5096	2,9768	3,3257
15	0,69120	1,1967	1,7530	2,1315	2,4899	2,9467	3,2860
16	0,69013	1,1937	1,7459	2,1199	2,4729	2,9208	3,2520
17	0,68919	1,1910	1,7396	2,1098	2,4581	2,8982	3,2225
18	0,68837	1,1887	1,7341	2,1009	2,4450	2,8784	3,1966
19	0,68763	1,1866	1,7291	2,0930	2,4334	2,8609	3,1737
20	0,68696	1,1848	1,7247	2,0860	2,4231	2,8453	3,1534
21	0,68635	1,1831	1,7207	2,0796	2,4138	2,8314	3,1352
22	0,68580	1,1816	1,7171	2,0739	2,4055	2,8188	3,1188
23	0,68531	1,1802	1,7139	2,0687	2,3979	2,8073	3,1040
24	0,68485	1,1789	1,7109	2,0639	2,3910	2,7969	3,0905
25	0,68443	1,1777	1,7081	2,0595	2,3846	2,7874	3,0782
26	0,68405	1,1766	1,7056	2,0555	2,3788	2,7787	3,0669
27	0,68370	1,1757	1,7033	2,0518	2,3734	2,7707	3,0565
28	0,68335	1,1748	1,7011	2,0484	2,3685	2,7633	3,0469
29	0,68304	1,1739	1,6991	2,0452	2,3638	2,7564	3,0380
30	0,68276	1,1731	1,6973	2,0423	2,3596	2,7500	3,0298
40	0,68066	1,1673	1,6839	2,0211	2,3289	2,7045	2,9712
60	0,67862	1,1616	1,6707	2,0003	2,2991	2,6603	2,9146
120	0,67656	1,1559	1,6577	1,9799	2,2699	2,6174	2,8599
∞	0,67449	1,1503	1,6449	1,9600	2,2414	2,5758	2,8070

$$\mu(y) = t_{\nu, P} \frac{s(y, x)}{\sqrt{N}} \tag{4}$$

O coeficiente de Student é retirado da Tabela 2, considerando $\varphi = \nu = 14$ e, para uma **confiança de 95%**, ou seja, $\alpha = 0,05$, tem-se $t_{\nu, P} = 2,145$. Portanto, a incerteza de ajuste será: $\mu(y) = 0,01161$.

Por fim, a faixa em que se enquadra uma leitura do sensor se dará por:

$$\hat{y} \pm \mu(y) \quad (5)$$

Logo, considerando uma leitura de 3,19V, por exemplo, pode-se afirmar, que há uma possibilidade de 95% de que a verdadeira indicação do sensor se econtre na faixa: $y = 3,190 \pm 0,012 \text{ V}$.

4 Incerteza do resultado da medida

Para obter o valor angular correspondente à leitura do sensor, aplica-se a função inversa da de ajuste:

$$\hat{x} = \hat{f}_e^{-1}[\hat{y}] = \frac{\hat{y} - \hat{p}}{\hat{\alpha}}. \quad (6)$$

Haverá também, a incerteza associada ao resultado da medida, a chamada **incerteza combinada**, expressa por:

$$\mu_c(x) = \sqrt{\left[\frac{\partial \hat{f}_e^{-1}}{\partial \hat{y}} \mu(y) \right]^2 + \left[\frac{\partial \hat{f}_e^{-1}}{\partial \hat{p}} s(p) \right]^2 + \left[\frac{\partial \hat{f}_e^{-1}}{\partial \hat{\alpha}} s(\alpha) \right]^2},$$

onde :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{f}_e^{-1}}{\partial \hat{y}} &= \frac{1}{\hat{\alpha}} \\ \frac{\partial \hat{f}_e^{-1}}{\partial \hat{p}} &= -\frac{1}{\hat{\alpha}} \\ \frac{\partial \hat{f}_e^{-1}}{\partial \hat{\alpha}} &= \frac{\hat{p} - \hat{y}}{\hat{\alpha}^2}. \end{aligned} \quad (7)$$

Assim, retomando as Equações (6) e (7), obtêm-se: $\hat{x} = 39,929$ e $u_c = 0,9224$. Contudo, este não é o resultado final, pois ainda há a necessidade de considerar o fator de abrangência, obtendo a **incerteza expandida**:

$$U = \mu_c k. \quad (8)$$

O fator de abrangência pode ser dado pela Tabela 3, na maioria dos casos, para uma população maior.

Tabela 3: Nível de confiança p e fator de abrangência k para distribuição normal.

p	k
68,27%	1,000
90,00%	1,645
95,00%	1,960
95,45%	2,000
99,00%	2,576
99,73%	3,000

Entretanto, para este caso, com um número reduzido de dados, adota-se: $k = t_{\nu,P}$, retomando-se a Tabela 2. Logo, o valor encontrado será: $\underline{U = 1,979}$. Por fim, a faixa de resultado da medição do sensor será:

$$\hat{x} \pm U. \quad (9)$$

Em síntese, pode-se afirmar que há uma probabilidade de 95% de que o verdadeiro valor do mensurando se encontre na faixa: $\underline{x = 39.929 \pm 1,979}^\circ$.

5 Sensibilidade

Considerando que a sensibilidade seja constante e que o instrumento é linear com respeito à entrada desejada, define-se:

$$K = \frac{\Delta y}{\Delta x}. \quad (10)$$

Para o sensor em questão, a sensibilidade calculada é de $\underline{K = 0,019} \text{ V}/^\circ$.

6 Linearidade estática

A linearidade é um adimensional percentual que indica a dispersão máxima dos dados calculados via ajuste em relação à variação total dos valores mensurados (quanto MAIOR o valor encontrado, MENOR será a linearidade do sensor: trata-se do percentual do erro total que diz respeito a não-linearidades), ou seja:

$$\%e_l = \frac{e_l}{y_{max} - y_{min}} \times 100. \quad (11)$$

A linearidade estática do sensor analisado é de $\underline{1,856\%}$.

Referências

Aguirre, L. A. (2014). *Fundamentos de Instrumentação*. Pearson Education.