

# Guia Prática 05 – Modelagem Aproximada de Processos Industriais Subamortecidos

Prof. Lucas S. Oliveira \*

\* Departamento de Engenharia Mecatrônica, CEFET-MG, Campus  
Divinópolis, (lqsoliveira@cefetmg.br)

**Resumo:** Há na indústria muitos sistemas que apresentam dinâmica subamortecida. Essa característica resulta em uma curva de resposta oscilatória. A fim de identificar tais característica, o método da resposta ao degrau pode ser adaptado de modo a possibilitar que o projetista consiga extrair da curva de resposta do transitório, tais parâmetros característicos e informações sobre o sistema. Nesse guia de prática, tal abordagem será utilizada para identificação do modelo subamortecido para o sistema *fan plate*. Ao final da atividade espera-se obter uma função de transferência caracterizada pela resposta temporal de um sistema subamortecido.

**Keywords:** Análise transitório, análise regime permanente, resposta ao degrau, modelos baixa ordem.

## 1. INTRODUÇÃO

Em muitos processos industriais, não é viável o uso da modelagem caixa branca durante o processo de modelagem do sistema, visto a alta complexidade e não linearidade envolvidas nessas dinâmicas. Diante dessas situações, busca-se aproximar a dinâmica do processo por um modelo linear de baixa ordem. Normalmente, adota-se o uso e análise da curva de reação do sistema a uma entrada degrau, uma vez que tal método é uma forma simples para obtenção dos parâmetros do modelo. Essa abordagem é comumente denominada por modelagem caixa preta.

A curva de resposta ao degrau é obtida ao aplicar uma variação abrupta no sinal de excitação do processo. Neste caso, deve-se observar que a amplitude do degrau aplicado não é crítica. Contudo, o degrau deve ser grande o suficiente para produzir os dados necessários, mas não grande demais para perturbar a operação do processo ou levar o processo para fora dos limites normais de operação, ou ainda sair da região de linearidade em torno do ponto de operação (Garcia, 2017). Em geral, a estimulação do processo via a entrada degrau de um processo em malha aberta, que se encontra em regime estacionário, podem ocorrer, basicamente duas situações:

- (1) a saída do processo passará por um regime transitório e estabilizará em um novo valor, ou
- (2) a saída do processo não estabilizará, mas crescerá ou decrescerá indefinidamente.

Sistemas com comportamento apresentado pela descrição do item (1) são chamados por autoregulados, o que significa que são estáveis em malha aberta. E podem ser descritos por uma ou mais constantes de tempo, incluindo ou não o tempo morto. Já os sistemas descritos pelo item (2) são denominados não autoreguláveis. Isso traduz que esses sistemas são instáveis em malha aberta. Em geral essa dinâmica será composta por pelo menos um termo

integral e possivelmente uma ou mais constantes de tempo, incluindo ou não o tempo morto.

Note que a disciplina de Laboratório de Análise de Sistemas Lineares é dedicada ao estudo de processos do tipo (1), ou seja, processos autoregulados. Nesse caso, o objetivo ao se aplicar a modelagem caixa preta via curva de reação a uma entrada degrau é aproximar a dinâmica do sistema por um modelo de primeira,

$$G(s) = \frac{Ke^{-\theta s}}{\tau s + 1}, \quad (1)$$

ou segunda ordem superamortecido,

$$G(s) = \frac{Ke^{-\theta s}}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}, \quad (2)$$

ou ainda, segunda ordem subamortecido:

$$G(s) = \frac{Ke^{-\theta s}}{\tau^2 s^2 + 2\tau\xi s + 1}. \quad (3)$$

Em que:  $K$  é o ganho estático do sistema,  $\theta$  é o atraso ou tempo morto,  $\tau$  é a constante de tempo do sistema e  $\xi$  é o coeficiente de amortecimento.

Por fim, é importante ressaltar que tentar ajustar modelos de ordem superior a dois a partir da curva de resposta ao degrau é buscar extrair mais informações sobre o processo que a curva pode oferecer. Uma vez que  $\theta$  presente nas equações anteriores, inclui os efeitos de todas as constantes de tempo não dominantes desconsideradas na redução de ordem do modelo (Aguirre, 2007).

## 2. OBJETIVOS

São objetivos desse experimento:

- Obter uma função de transferência para o sistema subamortecido.
- Programar a resposta temporal dos modelos e sistema de equações diferenciais.

### 3. CARACTERIZAÇÃO DE SISTEMAS DE SEGUNDA ORDEM SUBAMORTECIDOS

O sistema de segunda ordem subamortecido apresentado em (3) pode ser reescrito para um sistema sem atraso como:

$$G(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}, \quad (4)$$

em que  $\omega_n$  é a frequência natural do sistema. Esse modelo é descrito no domínio do tempo pela equação diferencial ordinária linear:

$$\ddot{y}(t) + 2\xi\omega_n\dot{y}(t) + \omega_n^2 y(t) = K\omega_n^2 u(t). \quad (5)$$

O valor do coeficiente de amortecimento,  $\xi$ , determina o modo como o sistema responde a uma entrada degrau com amplitude,  $A$ , tal que: se  $0 < \xi < 1$  a resposta corresponde a saída de um sistema subamortecido, uma vez que as raízes da equação característica do sistema são complexas conjugadas, o que resulta na resposta temporal definida por:

$$y(t) = KA \left[ 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\sigma t} \sin(\omega_d t + \beta) \right] \forall t \geq 0, \quad (6)$$

em que  $\omega_d$  é a frequência natural amortecida,  $\sigma$  é o coeficiente de atenuação da resposta,  $\beta$  é o ângulo no plano complexo, ambos parâmetros computados respectivamente por:

$$\begin{aligned} \omega_d &= \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\tau} = \omega_n \sqrt{1-\xi^2}, \\ \sigma &= \frac{\xi}{\tau} = \xi\omega_n, \\ \beta &= \arccos(\xi). \end{aligned} \quad (7)$$

Para se obter um modelo aproximado de segunda ordem de um sistema subamortecido, é necessário analisar a resposta temporal definida em (6) e estimar graficamente os valores dos parâmetros  $\xi$ ,  $\omega_n$  e  $K$ . Segundo Smith (1972) essas constantes podem ser obtidas a partir da análise da resposta transitória, conforme ilustrado na Figura 1.

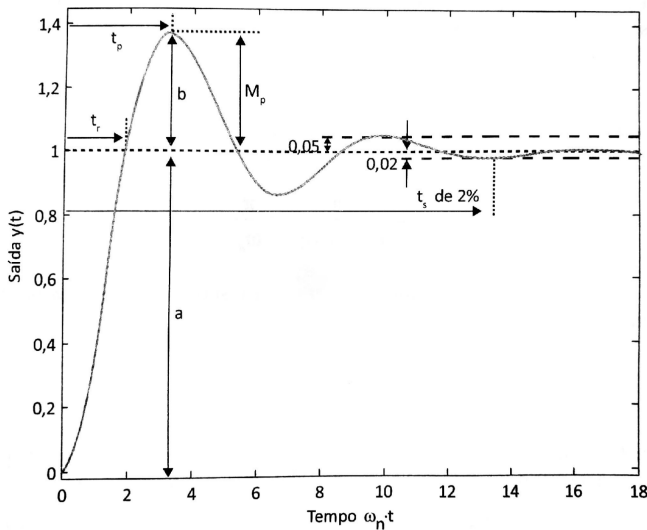


Figura 1. Resposta transitória característica para um sistema subamortecido.

A partir da análise da Figura 1 é possível estabelecer os principais parâmetros que caracterizam a resposta transitória, sendo esses:

- Tempo de subida (*rise time*,  $t_r$ ). É definido como o tempo para a resposta do sistema ir de 0% a 100% do seu valor final, e é definido pela expressão:

$$t_r = \frac{\pi - \arccos(\xi)}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}} = \frac{\pi - \beta}{\omega_d}. \quad (8)$$

Note que:  $\xi = \cos(\beta)$ . Além disso, para sistemas superamortecidos ou com amortecimento crítico, normalmente o tempo de subida é definido como o intervalo para a resposta do sistema variar entre 10% a 90% do valor final.

- Instante de pico (*peak time*,  $t_p$ ). É definido como o tempo necessário para a resposta alcançar o primeiro pico de sobressinal, dado por:

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}} \quad (9)$$

Note que os extremos locais (máximos e mínimos) ocorreram nos instantes:

$$t_i = i \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}} \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

- Sobressinal máximo (*maximum overshoot*,  $M_p$ ). É o máximo valor de pico da curva de resposta medido a partir do valor final, sendo dado por:

$$\begin{aligned} M_p &= \frac{y(t_p) - y(\infty)}{y(\infty)} \\ &= \frac{b}{a}. \end{aligned} \quad (10)$$

O sobressinal relaciona-se com os parâmetros do sistema, através da expressão:

$$M_p = \exp\left(\frac{-\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right). \quad (11)$$

- Tempo de acomodação (*settling time*,  $t_s$ ). É definido como o tempo requerido para a curva de resposta alcançar e permanecer dentro de uma faixa em torno do valor final, faixa essa de magnitude especificada por uma porcentagem absoluta do valor final. Normalmente definido como 2% ou 5% conforme expressões apresentadas a seguir:

$$t_s = \frac{4}{\xi\omega_n} \quad \forall \quad (0 < \xi < 0,9) \quad (\text{critério 2\%}) \quad (12)$$

$$t_s = \frac{3}{\xi\omega_n} \quad \forall \quad (0 < \xi < 0,9) \quad (\text{critério 5\%}) \quad (13)$$

Além disso, a partir do período das oscilações,  $T$ , pode-se estimar a frequência natural amortecida e não amortecida, tal que:

$$\omega_d = \frac{2\pi}{T}, \quad (14)$$

$$\omega_n = \frac{2\pi}{T\sqrt{1-\xi^2}}. \quad (15)$$

### 4. SISTEMA FAN-PLATE

O sistema em estudo é formado por um ventilador e uma placa, conforme apresentado na Figura 2. Na literatura esse sistema é conhecido como *fan plate system*, e têm sido

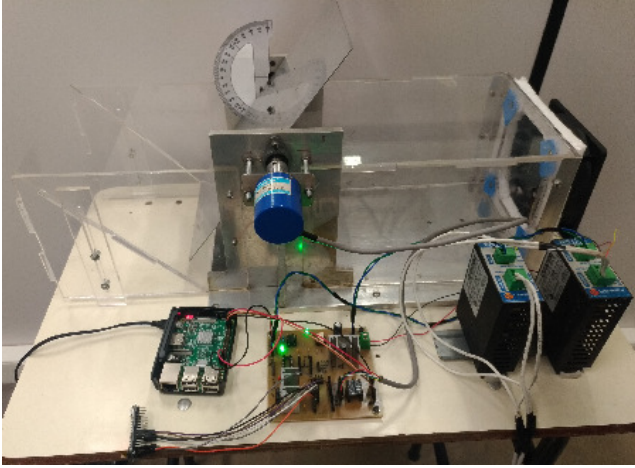


Figura 2. *Fan plate system* presente no laboratório 315.

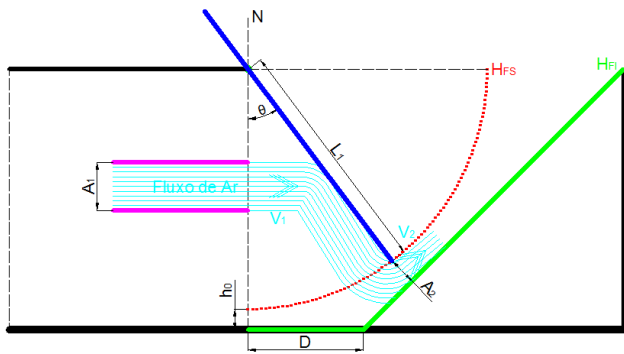


Figura 3. Diagrama esquemático do sistema *Fan plate*.

utilizado pela comunidade científica como um *benchmark* para avaliação das mais diversas técnicas de controle (Mendes et al., 1995; Kungwalrut et al., 2011; Dincel et al., 2014; Bento et al., 2020).

Nesse processo o objetivo é controlar a posição angular da placa a partir do controle do fluxo de ar gerado pelo ventilador. O sistema mecânico é composto por uma placa de alumínio cuja posição angular é mensurada por um encoder, um cooler de alta velocidade, um raspberry pi para programação e controle do sistema.

O sistema apresentado na Figura 2, pode ser representado pelo diagrama esquemático da Figura 3. Conforme pode-se verificar na Figura 3, todo o fluxo de ar é produzido pelo cooler de alta velocidade, esse ao se deparar com a placa exerce sobre a mesma uma força de arrasto, fazendo com que essa rotacione-se. Além disso, pode-se observar que a área de saída do fluxo de ar,  $A_2$ , é dependente da posição angular da placa,  $\theta$ . Contudo, para a atividade proposta pode desconsiderar a presença da chapa inclinada (reta  $H_{Fi}$ ). Desse modo, o desenho esquemático pode ser simplificado e reduzido a imagem apresentada na Figura 4.

Considere que o sistema em estudo, *fan-plate*, possua dinâmica determinado por:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= K_1 \cos^2 x_1 u - (K_2 \sin x_1 + K_3 x_2), \\ y &= x_1, \end{aligned} \quad (16)$$

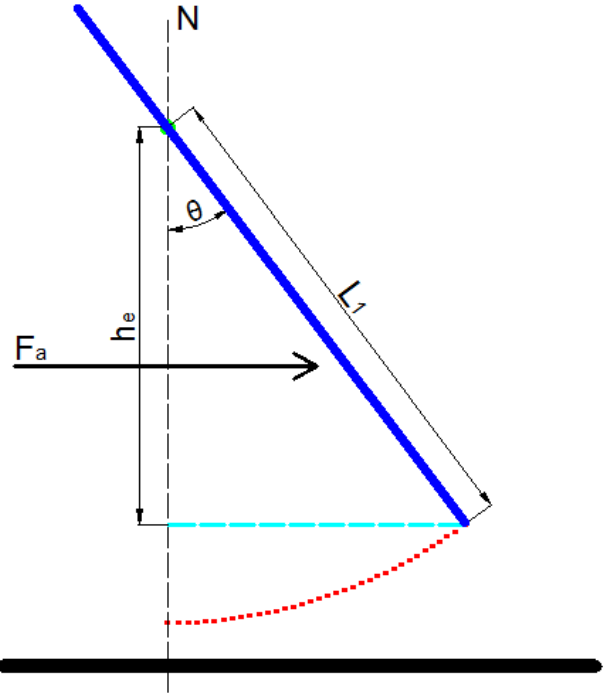


Figura 4. Diagrama esquemático simplificado do sistema *Fan plate*.

em que  $x_1$  é a posição angular da placa,  $x_2$  é a velocidade angular da placa,  $y$  é a saída do sistema,  $K_i$  com  $i = 1, \dots, 3$  são constantes definidas por:

$$K_1 = \frac{d_{cm} \rho_{ar} C_a L_a L_1}{2m_t \left( \frac{L_t^2}{12} + d_{cm}^2 \right)} \quad (17)$$

$$K_2 = \frac{g d_{cm}}{\frac{L_t^2}{12} + d_{cm}^2}$$

$$K_3 = \frac{\mu d_{cm}^2}{m_t \left( \frac{L_t^2}{12} + d_{cm}^2 \right)}$$

e  $u$  é a entrada do sistema.

#### 4.1 Parâmetros e Constantes Físicas do Sistema

Para implementação e simulação do sistema considere os seguintes parâmetros:

- $L_a = 154 \text{ (mm)} \Rightarrow$  Largura da placa móvel de alumínio.
- $L_1 = 155 \text{ (mm)} \Rightarrow$  Comprimento da placa abaixo do eixo de rotação.
- $L_t = 270 \text{ (mm)} \Rightarrow$  Comprimento da placa abaixo do eixo de rotação.
- $d_{cm} = 20 \text{ (mm)} \Rightarrow$  Distância do centro de massa da placa.
- $m_t = 0.100 \text{ (Kg)} \Rightarrow$  Massa total da placa.
- $\rho_{ar} = 1.23 \text{ (Kg/m}^3\text{)} \Rightarrow$  Densidade do ar.
- $C_a = 2.05 \Rightarrow$  Coeficiente de arrasto.
- $\mu = 5 \Rightarrow$  Coeficiente de atrito viscoso.

## 5. ATIVIDADES

Considere que deseja-se controlar o sistema (16) na posição angular de  $\theta = 50^\circ$ . Portanto faça o que se pede:

- (1) Defina o sinal de controle necessário para manter o sistema no ponto de operação desejado.
- (2) Considere que o sistema encontra-se na posição angular,  $\theta = 50^\circ$ . Programe e simule uma entrada ao degrau definida por:

$$u_d = u^* + 0.20u^*, \quad (18)$$

em que  $u^*$  é o sinal de entrada do sistema no ponto de operação.

- (3) Apresente a resposta temporal do sistema obtido no item (2).
- (4) Plot as curvas envoltórias para a curva de resposta ao degrau unitário. Mais informações sobre o cálculo da curva envoltória, verifique (Ogata, 2010).
- (5) A partir da análise gráfica da curva da resposta, identifique os parâmetros do transitório do sistema, conforme apresentado na Seção 3.
- (6) Obtenha a função de transferência do sistema.
- (7) Valide a resposta do modelo obtido na questão (5) comparando-a com a resposta do sistema (16). Lembrem-se: a validação é realizada em uma sequência de degraus diferente (isso inclui a amplitude) daquela utilizada na obtenção do modelo. Discuta o resultado obtido.
- (8) Avalie o tempo de acomodação do sistema diante os critérios de 2% e 5%. Lembre-se de plotar esses limites no gráfico.
- (9) Calcule as raízes do polinômio característico do modelo. E avalie se as raízes são de um sistema subamortecido. Justifique.
- (10) Comente cada linha de comando do código para entrega do mesmo junto ao relatório.

## REFERÊNCIAS

- Aguirre, L.A. (2007). *Introdução à Identificação de Sistemas: Técnica Lineares e Não Lineares Aplicadas a Sistemas Reais*. Editora UFMG, 3 edition. 730 p.
- Bento, A., Oliveira, L., Rubio Scola, I., Leite, V.J.S., and Gomide, F. (2020). Evolving granular control with high-gain observers for feedback linearizable nonlinear systems. *Evolving Systems*. doi:10.1007/s12530-020-09349-y.
- Dincel, E., Yalçın, Y., and Kurtulan, S. (2014). A new approach on angular position control of fan and plate system. In *2014 International Conference on Control, Decision and Information Technologies (CoDIT)*, 545–550. doi:10.1109/CoDIT.2014.6996953.
- Garcia, C. (2017). *Controle de Processos Industriais - Estratégias Convencionais*. Blucher, 1 edition. 599 p.
- Kungwalrut, P., Thumma, M., Tipsuwanporn, V., Numsomran, A., and Boonsrimuang, P. (2011). Design mrac pid control for fan and plate process. In *SICE Annual Conference 2011*, 2944–2948.
- Mendes, R., Ferreira, P., Reis Filho, C., and Oliveira, J. (1995). A microprocessor-based laboratory for control systems analysis and design1. *IFAC Proceedings Volumes*, 28(18), 107 – 112. doi:10.1016/S1474-6670(17)45135-4. IFAC Workshop on Control Education and technology Transfer Issues, Curitiba, Brazil, 11-12 September.
- Ogata, K. (2010). *Engenharia de Controle Moderno*. Pearson Education, 5 edition. 809p.