

FIGURA 3.13: Identificação em malha fechada de um processo real

Respostas em malha fechada a uma mudança em degrau no sinal de referência (*set point*), (a) medido (mf643 @), (b) resposta do modelo (3.36).

seção parte do princípio de que não há dinâmica apreciável no ramo de realimentação, o que pode não ter sido o caso na prática. Entretanto, a resposta em malha fechada a um degrau na referência do modelo $H_1(s)$ em (3.36) parece reproduzir algumas das características básicas da resposta medida, sugerindo, assim, que as considerações feitas pelo método aplicam-se de forma relativamente satisfatória no caso em estudo. \square

3.5 Identificação Usando Convolução

Os métodos descritos até o presente momento pressupõem que o processo a ser identificado tenha sido excitado por entradas específicas tais como o degrau. Apesar dessas entradas serem produzidas com relativa facilidade e encontrarem aplicação em diversos processos, o uso exclusivo de tais sinais é um tanto quanto restritivo. Nesta seção, descreve-se um procedimento no qual a entrada não precisa ser necessariamente nenhum dos sinais mencionados acima.

Uma vez que se deseja obter a resposta ao impulso $h(k)$ a partir de medições dos sinais de entrada e saída, $u(k)$ e $y(k)$, respectivamente, pode-se considerar o *somatório de convolução* (ver Exercício 3.9)

$$y(k) = \sum_{j=0}^{\infty} h(j)u(k-j). \quad (3.37)$$

Portanto, tomando-se as medições $u(k)$ e $y(k)$ e usando o somatório de convolução, pode-se escrever o seguinte conjunto de equações:

$$\begin{aligned} y(0) &= h(0)u(0) + h(1)u(-1) + h(2)u(-2) \dots \\ y(1) &= h(0)u(1) + h(1)u(0) + h(2)u(-1) \dots \\ y(2) &= h(0)u(2) + h(1)u(1) + h(2)u(0) \dots \\ &\vdots \quad \vdots \quad \vdots \end{aligned}$$

que pode ser expresso em forma matricial como se segue:

$$\begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ y(2) \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u(0) & u(-1) & u(-2) & \dots \\ u(1) & u(0) & u(-1) & \dots \\ u(2) & u(1) & u(0) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h(0) \\ h(1) \\ h(2) \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad (3.38)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{U} \mathbf{h}.$$

Se a resposta ao impulso $h(k)$ for longa e se o sinal de entrada $u(k)$ for muito "suave", então \mathbf{U} será de grande dimensão e mal condicionada. Entretanto, se $u(k)$ for um sinal "suficientemente ativo" e se o número de parâmetros a estimar não for excessivo, o procedimento acima pode, em princípio, ser usado. Nesse caso, truncando-se \mathbf{U} de maneira a ser quadrada, da Eq. 3.38 pode-se obter a seguinte solução $\mathbf{h} = \mathbf{U}^{-1} \mathbf{y}$. Como essa solução fornece a resposta ao impulso a partir dos sinais de entrada e saída, ela pode ser interpretada como a operação inversa da convolução, ou seja, a *deconvolução*. No próximo capítulo será introduzido o conceito de um sinal *persistentemente excitante* (ver Seção 4.5 e Complemento 4.1), o que permitirá caracterizar de forma mais rigorosa a expressão "suficientemente ativo".

A solução por deconvolução não limita $u(k)$ a entradas padronizadas. Entretanto, para fins de análise, será instrutivo considerar o caso em que a entrada é o impulso unitário. Assim, se $u(k) = 0, \forall k \neq 0$, é possível simplificar a Eq. 3.38, pois nesse caso \mathbf{U} torna-se diagonal com todos os elementos idênticos, e a Eq. 3.38 pode ser escrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{y} &= u(0) \mathbf{I} \mathbf{h}, \\ \mathbf{h} &= \mathbf{y}/u(0). \end{aligned} \quad (3.39)$$

Para o caso em que $u(0) = 1$, ou seja, se a entrada for um pulso de amplitude unitária e duração igual a um período de amostragem, a Eq. 3.39 resulta em $\mathbf{h} = \mathbf{y}$. Esse resultado não é nenhuma surpresa, uma vez que uma entrada de amplitude unitária e duração igual a um período de amostragem é vista pelo sistema praticamente como um impulso e, assim, \mathbf{h} pode ser determinada como a resposta do sistema a tal pulso de área unitária e de curta duração.

Agora, considere o caso em que o sinal de saída está contaminado com ruído de medição, ou seja, $y(k) = y^i(k) + e(k)$, sendo que $y^i(k)$ é o sinal ideal e $e(k)$ é ruído de medição. Substituição direta em (3.39) resulta em

$$\mathbf{h} = \frac{\mathbf{y}^i + \mathbf{e}}{u(0)} = \frac{\mathbf{y}^i}{u(0)} + \frac{\mathbf{e}}{u(0)}. \quad (3.40)$$

A equação acima revela que o valor calculado para $h(k)$ é composto de duas parcelas, a saber: uma parcela ideal, que é a desejada, e uma parcela que surge em função do ruído. Claramente, a parcela de interesse é a primeira, sendo que a segunda delas é uma *polarização*. Portanto, pode-se dizer que o estimador da resposta ao impulso dado por (3.39) é polarizado na presença de ruído de medição, conforme visto em (3.40). Há basicamente duas situações em que o efeito da segunda parcela na Eq. 3.40 é eliminado: i) quando a amplitude do pulso do sinal de entrada é infinita ($u(0) \rightarrow \infty$) ou ii) quando o ruído não existe ($e(k) = 0$). Essas duas situações são claramente irreais. No próximo capítulo serão usadas funções de correlação em vez de usar diretamente as medições $u(k)$ e $y(k)$ para estimar $h(k)$ e, nesse caso, a condição $e(k) = 0$ poderá ser relaxada.

Exemplo 3.5.1. Estimação determinística da resposta ao impulso

Seja a função de transferência

$$H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{z + 0,5}{z^2 - 1,5z + 0,7}.$$

A fim de ilustrar o uso da Eq. 3.38, $H(z)$, foi simulada para uma entrada pseudo-aleatória (ver Seção 4.3). A justificativa para o uso de tais sinais e a sua geração serão discutidos detalhadamente no próximo capítulo.

A partir dos sinais de entrada e de saída do modelo $H(z)$, mostrados na Figura 3.14, montou-se a matriz $U \in \mathbb{R}^{40 \times 40}$. O vetor \mathbf{y} é o próprio sinal de saída mostrado na Figura 3.14. Como U é quadrada e não singular, \mathbf{h} pode ser determinado usando-se a Eq. 3.38.

m pulso de
a Eq. 3.39
ez que uma
mostragem
h pode ser
itária e de

inado com
) é o sinal
esulta em

(3.40)

e composto
da, e uma
interesse é
to, pode-se
polarizado
asicamente
eliminado:
 $u(0) \rightarrow \infty$
uações são
correlação
ar $h(k)$ e,

iso

na entrada
ais sinais e
ulo.

strados na
óprio sinal
angular, h

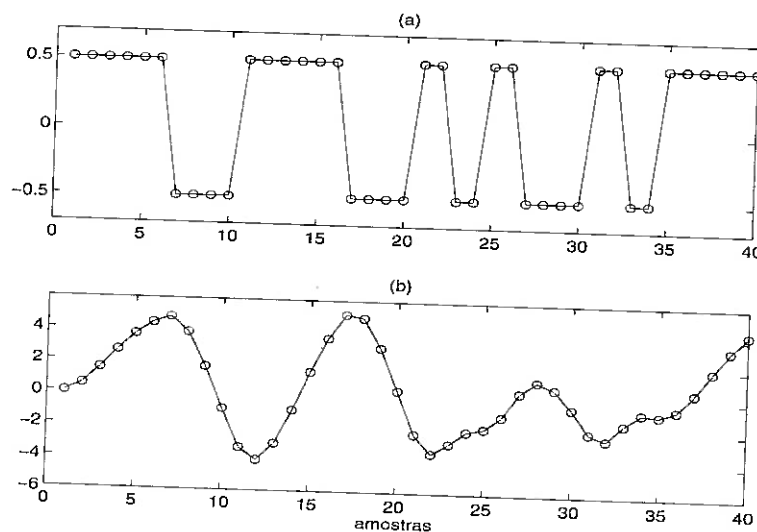


FIGURA 3.14: Sinais de entrada e de saída para identificação

Sinais de (a) entrada e (b) saída de $H(z)$. O traço contínuo foi adicionado a fim de facilitar a visualização.

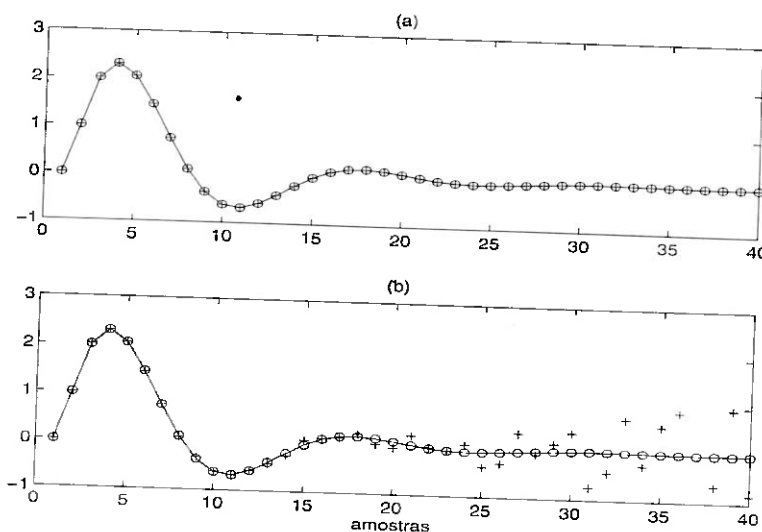


FIGURA 3.15: Resposta ao impulso "real" e identificada

Resposta ao impulso de $H(z)$ (o) junto com as respostas ao impulso obtidas calculando-se $\mathbf{h} = U^{-1}\mathbf{y}$ (+), para o caso (a) sem ruído, e (b) com ruído de variância $\sigma_e^2 = 1 \times 10^{-5}$. O traço contínuo foi adicionado a fim de facilitar a visualização (ex351 @).

A Figura 3.15a mostra o resultado obtido e a simulação de $H(z)$. Ao se adicionar ruído ao sinal de saída mostrado na Figura 3.14b, e repetindo o procedimento detalhado acima, chega-se à resposta mostrada na Figura 3.15b.

A variância do ruído adicionado foi muito baixa ($\sigma_e^2 = 1 \times 10^{-5}$) e, no entanto, nota-se que a resposta determinada começa a divergir da resposta "real" a partir de $h(21)$. A razão da sensibilidade ao ruído adicionado é que \mathbf{h} é obtida de forma *determinística* ao se calcular $\mathbf{h} = \mathbf{U}^{-1}\mathbf{y}$. Essa observação serve de motivação para desenvolver métodos estocásticos de modelagem, que serão apresentados a partir do próximo capítulo. \square

3.6 Identificação no Domínio da Frequência

Na Seção 2.4 foi verificada uma propriedade importante de sistemas lineares, que pode ser representada matematicamente pela Eq. 2.27 e ser enunciada da seguinte forma: a resposta em regime permanente de um sistema linear assintoticamente estável, excitado por um sinal senoidal de frequência ω , também será senoidal com frequência ω . No entanto, a amplitude e a fase da resposta do sistema linear podem ser alteradas com respeito à entrada. Em particular, a amplitude do sinal de entrada será multiplicada por $|H(j\omega)|$ e a sua fase será defasada de ϕ radianos, sendo que $H(j\omega) = |H(j\omega)| e^{j\phi}$ é a resposta em frequência do sistema linear e $h(t)$ é sua resposta ao impulso. Essa propriedade se deve ao fato que, em sistemas lineares, as frequências do sinal de entrada passam pelo sistema independentemente umas das outras.

A propriedade mencionada acima sugere um procedimento simples para a estimação da resposta em frequência $H(j\omega)$. Para isso basta excitar o sistema a ser identificado com sinais senoidais de frequências $\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{N_f-1}$. Para cada frequência, após atingir o regime permanente, o ganho do sistema é dado pela razão entre a amplitude da saída e a amplitude do sinal de entrada. A fase pode ser determinada pelo deslocamento temporal entre os sinais de entrada e saída.

O procedimento acima tem, obviamente, diversas dificuldades de ordem prática. Uma delas é que nem sempre é possível aplicar sinais senoidais ao processo a ser identificado. Outra dificuldade é a longa duração do teste que seria requerido. Deve ser notado que para cada frequência é necessário esperar que o sistema atinja o regime permanente. Portanto, o procedimento acima requer a execução de N_f testes a fim de conhecer $H(j\omega)$ em N_f frequências diferentes.

Uma solução para o segundo problema mencionado é o uso da Transformada de Fourier (TF) dos sinais de entrada e saída. Assim, aplicando-se a

sendo que $\mathbf{x}(k) \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estado n -dimensional no instante k , $\mathbf{u}(k) \in \mathbb{R}^r$ é o vetor de entradas no instante k formado por r funções temporais; $\mathbf{y}(k) \in \mathbb{R}^m$ é o vetor m -dimensional de saídas no instante k e Φ , Γ e H são matrizes constantes de dimensões adequadas. Por simplicidade considerou-se que não existem conexões diretas entre a entrada e a saída (portanto, $D = 0$).

Aplicando-se a definição de transformada Z , tem-se

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{x}(k)z^{-k} \\ Z\{\mathbf{x}(k+1)\} &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{x}(k+1)z^{-k} \\ &= \mathbf{x}(1) + \mathbf{x}(2)z^{-1} + \mathbf{x}(3)z^{-2} + \dots \\ &= z \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{x}(k)z^{-k} - z\mathbf{x}(0) \\ &= zX(z) - z\mathbf{x}(0). \end{aligned}$$

Portanto, pode-se escrever

$$Y(z) = H(zI - \Phi)^{-1}\Gamma U(z) + Hz(zI - \Phi)^{-1}\mathbf{x}(0).$$

Como a função de transferência é calculada para condições iniciais nulas, tem-se, finalmente,

$$H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = H(zI - \Phi)^{-1}\Gamma, \quad (2.38)$$

que é o análogo discreto de (2.33).

No Complemento 2.1 discutem-se formas de passar da representação de tempo contínuo para a de tempo discreto e vice-versa.

2.6 Representações em Tempo Discreto

Nas seções anteriores do presente capítulo foram apresentadas algumas representações tais como funções de transferência e modelos em espaço de estados. Como ficará claro em capítulos posteriores, existem algumas representações matemáticas que são especialmente adequadas à identificação de sistemas usando-se algoritmos conhecidos para a estimação de parâmetros. O objetivo da presente seção é apresentar, de forma generalizada,

algumas representações que serão bastante úteis ao longo do livro. Obviamente, algumas de tais representações estão fortemente relacionadas às representações já vistas.

Considere o seguinte modelo geral:

$$\begin{aligned} A(q)y(k) &= \frac{B(q)}{F(q)}u(k) + \frac{C(q)}{D(q)}\nu(k), \\ y(k) &= \frac{B(q)}{F(q)A(q)}u(k) + \frac{C(q)}{D(q)A(q)}\nu(k), \\ y(k) &= H(q)u(k) + G(q)\nu(k), \end{aligned} \tag{2.39}$$

sendo q^{-1} o operador de atraso, de forma que $y(k)q^{-1} = y(k-1)$, $\nu(k)$ ruído branco e $A(q)$, $B(q)$, $C(q)$, $D(q)$ e $F(q)$ os polinômios definidos a seguir:

$$\begin{aligned} A(q) &= 1 - a_1q^{-1} - \dots - a_{n_y}q^{-n_y}; \\ B(q) &= b_1q^{-1} + \dots + b_{n_u}q^{-n_u}; \\ C(q) &= 1 + c_1q^{-1} + \dots + c_{n_v}q^{-n_v}; \\ D(q) &= 1 + d_1q^{-1} + \dots + d_{n_d}q^{-n_d}; \\ F(q) &= 1 + f_1q^{-1} + \dots + f_{n_f}q^{-n_f}. \end{aligned} \tag{2.40}$$

As funções $H(q)$ e $G(q)$ normalmente são referidas com as funções de transferência do processo e do ruído, respectivamente. Ou seja, $H(q)$ é o resultado de substituir $q = z^{-1}$ na transformada unilateral Z da resposta ao impulso do processo, $h(k)$. Alguns autores preferem representar a resposta ao impulso do processo por $g(k)$ e, nesse caso, as funções de transferência do processo e ruído são $G(q)$ e $H(q)$, respectivamente.

2.6.1 Modelo de resposta ao impulso finita

O somatório de convolução entre a resposta ao impulso, $h(k)$, de um sistema e um sinal de entrada $u(k)$ resulta na saída do sistema com ruído $e(k)$, conforme vê-se a seguir:

$$y(k) = \sum_{j=0}^{\infty} h(j)u(k-j) + e(k). \tag{2.41}$$

³Essa substituição se faz necessário uma vez que, a rigor, $H(z)$ é uma representação no domínio da frequência, ao passo que $H(q)$ é uma representação no domínio do tempo. Assim, todas as entidades em (2.39) estão no domínio do tempo. Além disso, q^{-1} é o operador de atraso, ao passo que z^{-1} , a rigor, não é um operador, mas é o inverso de uma variável complexa.

A Eq. 2.41 é também conhecida como o modelo de resposta ao impulso infinita (IIR do inglês *infinite impulse response*). O modelo FIR (do inglês *finite impulse response*) pode ser obtido a partir de (2.39), tomando-se $C(q) = D(q) = F(q) = A(q) = 1$ e $B(q) \neq 1$.

Uma característica de modelos FIR é que são de natureza não-recursiva, ao passo que os modelos IIR são de natureza recursiva. Portanto, em geral, equações de diferenças com variáveis $y(k-i)$ e $u(k-j)$ do lado direito da igualdade são modelos IIR. Pensando em termos de função de transferência, pode-se dizer que sistemas cujos modelos são do tipo IIR têm funções de transferência racionais, ao passo que para sistemas cujos modelos são FIR, as respectivas funções de transferência são polinomiais.

Um processo MA, $y(k) = C(q)\nu(k)$, é um exemplo de modelo FIR, bem como um sistema que só tenha zeros: $y(k) = B(q)u(k)$ (note a relação polinomial entre $y(k)$ e as demais variáveis). Por outro lado, um modelo ARX, $A(q)y(k) = B(q)u(k)$, é do tipo IIR, pois a presença de $A(q)$ implicará recursividade, como pode ser constatado pelo fato da respectiva função de transferência, $Z\{B(q)\}/Z\{A(q)\}$, ser racional.

Se $H(q)$ for assintoticamente estável, então existe $M < \infty$, de forma que $h(k) = 0, \forall k > M$ (ver Exercício 3.9). Portanto, truncando a equação (2.41) resulta no modelo de resposta ao impulso finita (FIR)

$$y(k) = \sum_{j=0}^M h(j)u(k-j) + e(k). \quad (2.42)$$

O modelo FIR pode ser obtido a partir de (2.39), tomando-se $A(q) = C(q) = D(q) = F(q) = 1$ e $B(q)$ um polinômio arbitrário de ordem M , ou seja, $n_u = M$. Nesse caso, o modelo FIR (2.42) pode ser reescrito como

$$y(k) = B(q)u(k) + \nu(k) \quad (2.43)$$

e pode ser representado esquematicamente conforme visto na Figura 2.13. Deve ser notado que, como $C(q)/D(q) = 1$, então o ruído acrescentado na saída $y(k)$, $e(k)$, é branco. Portanto, no presente caso $e(k) = \nu(k)$.

2.6.2 Modelo ARX

O modelo auto-regressivo com entradas externas (ARX do inglês *autoregressive with exogenous inputs*) pode ser obtido a partir do modelo geral (2.39), tomando-se $C(q) = D(q) = F(q) = 1$ sendo $A(q)$ e $B(q)$ polinômios arbitrários, resultando em

$$A(q)y(k) = B(q)u(k) + \nu(k). \quad (2.44)$$

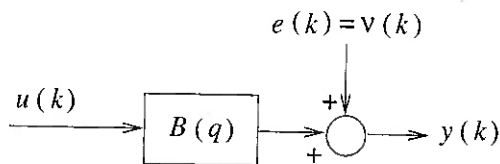


FIGURA 2.13: Representação esquemática de modelo FIR

O ruído é acrescido diretamente à saída, nesse sentido trata-se de um modelo do tipo erro na saída. Por outro lado, tanto a função de transferência do processo $B(q)$ quanto a do ruído têm o polinômio $A(q) = 1$ por fator comum. Nesse sentido o modelo FIR também é do tipo erro na equação.

Uma vez que o ruído $\nu(k)$ aparece diretamente na equação, o modelo ARX é normalmente classificado como pertencendo à classe de modelos de erro na equação. O modelo (2.44) pode ser reescrito da seguinte forma:

$$y(k) = \frac{B(q)}{A(q)}u(k) + \frac{1}{A(q)}\nu(k), \quad (2.45)$$

o que coloca em evidência as funções de transferência do sistema $H(q) = B(q)/A(q)$ e de ruído $C(q)/[D(q)A(q)] = 1/A(q)$, conforme pode ser apreciado na Figura 2.14.

Ao contrário do modelo FIR, o ruído que aparece adicionado à saída, $e(k) = \nu(k)/A(q)$, não é branco. Ou seja, nesta representação o ruído é modelado como um processo branco filtrado por um filtro auto-regressivo, com pólos idênticos aos do processo, que são as raízes do polinômio $A(q)$.

Exemplo 2.6.1. Modelo AR para um sistema fisiológico ⁴

Se uma pessoa normal esticar o braço, a sua mão não ficará perfeitamente estática. Pelo contrário, haverá um movimento oscilatório conhecido como *tremor*, que pode ser representado por um modelo AR, excitado por ruído branco.

Foi observado que o braço humano esticado comporta-se como um oscilador amortecido, excitado por atividade muscular não correlacionada (conceito que será estudado no Capítulo 4). Além disso, o espectro do sinal de tremor não revela harmônicas de mais alta ordem, o que indica que o sistema é basicamente linear.⁵ O tremor de mão pode ser modelado por

⁴TIMMER, 1998.

⁵Essa conclusão pode ser tirada, lembrando que o efeito de não-linearidades sobre

$$y(k) = a_1 y(k-1) + a_2 y(k-2) + \nu(k),$$

sendo

$$a_1 = 2 \cos\left(\frac{2\pi}{T}\right)$$

$$\exp\left(\frac{-1}{\tau}\right) a_2 = \exp\left(\frac{-2}{\tau}\right),$$

e $\nu(k)$ é ruído gaussiano com média zero e variância unitária. $T = 40$ é o período característico e $\tau = 91$ é o tempo de relaxação. A unidade em ambos os casos é *intervalos de amostragem*, que é igual a $T_s = 1/300$ s, ou seja, $\tau \approx 0,3$ s e $T \approx 13$ s. \square

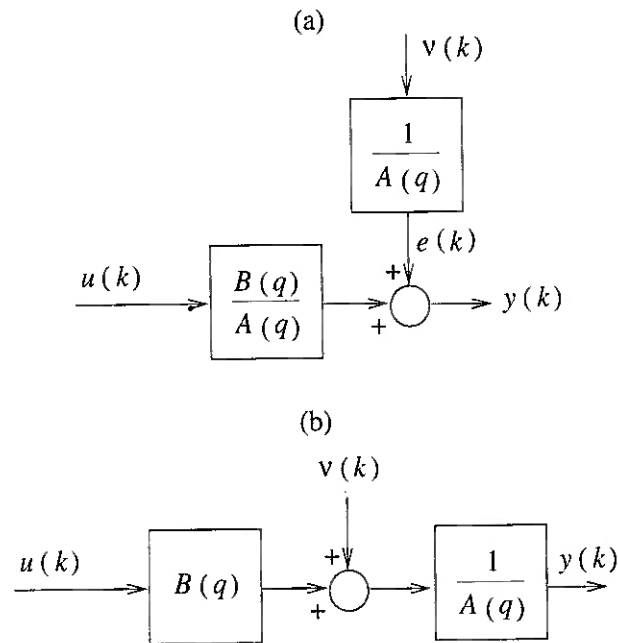


FIGURA 2.14: Representação esquemática de modelo ARX

A representação em (a) é equivalente à Eq. 2.45, que, após algumas manipulações, pode ser representada na forma indicada em (b). Do esquema em (b) fica claro que o erro não aparece na saída. As funções de transferência do processo e de ruído têm o polinômio $A(q)$ como fator comum, ver esquema em (a).

componentes de frequência é, muitas vezes, o de somá-las ou mesmo multiplicá-las, como no caso da modulação em amplitude.

A Eq. 5.45 pode ser implementada de forma mais fácil do que a Eq. 5.43, uma vez que não requer a formação da matriz de regressores $\Psi \in \mathbb{R}^{N \times n_\theta}$,³ sendo que N é o comprimento da sequência dos dados e n_θ é o número de regressores que coincide com o número de parâmetros a estimar, ou seja, $n_\theta = \dim[\theta]$. Chama-se a atenção do leitor para o fato de que, na prática, evita-se o uso direto tanto de (5.43) quanto de (5.45), uma vez que ambas são sensíveis a problemas numéricos. No Anexo B são apresentados diversos algoritmos com boas propriedades numéricas para a solução de problemas que envolvem inversão de matrizes.

Antes de considerar alguns exemplos, é importante notar que as únicas restrições feitas sobre os regressores que compõem o vetor $\psi(k-1)$ em (5.40) são: i) essas variáveis são tomadas até o instante $k-1$; e ii) tais variáveis são lineares nos parâmetros que compõem o vetor a estimar θ . Isso significa que $\psi(k-1)$ pode (ou não) conter termos de saída e/ou de entrada do tipo $y(k-i)$ e $u(k-j)$, respectivamente. Além disso, pode haver mais de uma variável de entrada (exógena) em $\psi(k-1)$. Veja os modelos (16.27), (16.28), (16.29)–(16.31) e (16.34), como alguns exemplos de modelos multivariáveis cujos parâmetros poderiam ser estimados utilizando-se o estimador MQ. Finalmente, deve ser notado que no caso de modelos com mais de uma saída, o que normalmente se faz é construir um modelo MISO para cada saída, como foi feito em (16.34).

Exemplo 5.5.1. Estimação de parâmetros de um modelo ARX

Considere o modelo do Exemplo 1.2.12. Aqui será ilustrada a estimação dos parâmetros de tal modelo a partir de um conjunto muito restrito de dados. Sejam eles

$$\begin{aligned} y(k) &= [12,2 \ 11,8 \ 11,6 \ 11,6 \ 11,8 \ 12,2 \ 13,0 \ 14,4 \ 16,2 \ 15,8] \\ u(k) &= [2,50 \ 2,50 \ 2,50 \ 2,50 \ 2,50 \ 2,23 \ 2,20 \ 2,20 \ 2,21 \ 2,20]. \end{aligned}$$

O vetor de regressores é

$$\psi(k-1) = [y(k-1) \ y(k-2) \ u(k-3) \ u(k-1) \ u(k-2)]^T, \quad (5.47)$$

e gera o seguinte conjunto de restrições ao longo dos dados acima:

³Pelo fato de o modelo ser dinâmico, o número de linhas de Ψ é $N - \max[n_y, n_u]$, sendo n_y e n_u os máximos atrasos nas variáveis saída e entrada, respectivamente.

$$\begin{bmatrix} 11,6 \\ 11,8 \\ 12,2 \\ 13,0 \\ 14,4 \\ 16,2 \\ 15,8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11,6 & 11,8 & 2,50 & 2,50 & 2,50 \\ 11,6 & 11,6 & 2,50 & 2,50 & 2,50 \\ 11,8 & 11,6 & 2,50 & 2,50 & 2,50 \\ 12,2 & 11,8 & 2,50 & 2,23 & 2,50 \\ 13,0 & 12,2 & 2,50 & 2,20 & 2,23 \\ 14,4 & 13,0 & 2,23 & 2,20 & 2,20 \\ 16,2 & 14,4 & 2,20 & 2,21 & 2,20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \\ \theta_5 \end{bmatrix}.$$

Aplicando-se (5.43), obtém-se

$$\begin{bmatrix} \hat{\theta}_1 \\ \hat{\theta}_2 \\ \hat{\theta}_3 \\ \hat{\theta}_4 \\ \hat{\theta}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3,4167 \\ -3,4799 \\ 4,7104 \\ 1,0410 \\ -0,6832 \end{bmatrix}.$$

Para se obter estimativas próximas às do Exemplo 1.2.12 seria necessário usar um grande número de observações e não apenas dez, como neste exemplo. Para finalizar, o vetor de resíduos e o produto interno de cada regressor com o vetor de resíduos são, respectivamente:

$$\begin{aligned} \xi &= \mathbf{y} - \Psi \hat{\boldsymbol{\theta}} \\ &= [0,3584 \quad -0,1376 \quad -0,4209 \quad -0,0106 \quad -0,1052 \quad 0,9467 \quad -0,6006]^T \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \Psi^T \xi &= [\psi_1^T \xi \quad \psi_2^T \xi \quad \psi_3^T \xi \quad \psi_4^T \xi \quad \psi_5^T \xi]^T \\ &= [0,1661 \quad 0,1574 \quad 0,0306 \quad 0,0296 \quad 0,0301]^T \times 10^{-8}. \end{aligned}$$

O produto interno entre os vetores gerados pelos regressores, ψ_i , e os resíduos é suficientemente pequeno, confirmando a característica da ortogonalidade do estimador MQ. Erros numéricos na inversão da matriz $\Psi^T \Psi$ previnem $\Psi^T \xi$ de ser exatamente zero. \square

(5.47)

Exemplo 5.5.2. *Estimação de parâmetros de um modelo contínuo no tempo*⁴

O presente exemplo é análogo ao de número 5.5.1. A diferença está em que o modelo usado neste exemplo é contínuo no tempo. Em particular,

⁴Ver ex552 @.