CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DE MINAS GERAIS
Campus V - Divinópolis - Engenharia Mecatrônica

Dinâmica de Robôs
Erick Nathan Martins Alves

Modelagem Dinâmica para Manipuladores com 2 GDL's

1 Método de Euler-Lagrange

1.1 Extrair o MCD do robô desejado:

$\rightarrow$ Denavit Hartenberg, matrizes homogêneas (A_i), (R_i^0) e (o_i).

1.2 Encontrar as Matrizes Jacobianas de Velocidades:

Para um robô com dois graus de liberdade e em relação aos CG's dos *links*, encontrar as jacobianas de velocidade linear, para $(i = 1, 2)$:

$$Jv_{c,i} = \begin{bmatrix} \frac{\partial o_{c,i}}{\partial q_1} & \frac{\partial o_{c,i}}{\partial q_2} \end{bmatrix}_{3X2} \tag{1}$$

onde, a partir dos o_i, substitui-se o comprimento integral do i-ésimo *link* (l_i) pela distância do início do *link* até o CG (lc_i), obtendo-se $o_{c,i}$.

Para as velocidades angulares dos *links*, em juntas rotacionais:

$$\omega_i = \left[\sum_{j=1}^{i-1} \omega_j + z_{i-1}\dot{q}_i \right]_{3X1} \tag{2}$$

E para juntas prismáticas:

$$\omega_i = \left[\sum_{j=1}^{i-1} \omega_j \right]_{3X1} \tag{3}$$

Obtem-se, então, as jacobianas de velocidade angular, para $(i = 1, 2)$:

$$J\omega_{c,i} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \omega_i}{\partial \dot{q_1}} & \frac{\partial \omega_i}{\partial \dot{q_2}} \end{bmatrix}_{3X2} \tag{4}$$

1.3 Cálculo da Matriz de Inércia:

Calcular a Energia Cinética Translacional, para $(i = 1, 2)$:

$$k_{t,i} = \left[m_i \left[Jv_{c,i}\right]^T \left[Jv_{c,i}\right]\right]_{2X2} \tag{5}$$

Calcular a Energia Cinética Angular, para $(i = 1, 2)$:

$$k_{a,i} = \left[\left[J\omega_{c,i}\right]^T \left[R_i\right] I_i \left[R_i\right]^T \left[J\omega_{c,i}\right]\right]_{2X2} \tag{6}$$

Assim, a matriz de inércia será, portanto:

$$D(q) \quad = \quad \left[\sum_{i=1}^{2} k_{t,i} + \sum_{i=1}^{2} k_{a,i}\right]_{2X2} \quad = \quad \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix} \tag{7}$$

1.4 Cálculo dos Símbolos de Christoffel (Coriolis):

As interações de Coriolis serão representadas por termos de uma matriz dependente das posições e velocidades angulares $(C(q, \dot{q}))$.

Primeiramente, a partir dos termos d da matriz de inercia, encontra-se os símbolos de Christoffel, para $(i = 1, 2)$ | $(j = 1, 2)$ | $(k = 1, 2)$ como sendo:

$$c_{ijk} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial d_{kj}}{\partial q_i} + \frac{\partial d_{ki}}{\partial q_j} - \frac{\partial d_{ij}}{\partial q_k}\right) \tag{8}$$

Reduz-se o número de termos, para 2 GDL's, a partir de:

$$c_{kj} \;=\; \begin{bmatrix} c_{1jk} & c_{2jk} \end{bmatrix} [\dot{q}] \;=\; (c_{1jk}\dot{q}_1 + c_{2jk}\dot{q}_2) \tag{9}$$

Assim, a matriz final ficará:

$$C(q,\dot{q}) \;=\; \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \;=\; \begin{bmatrix} (c_{111} + c_{211}) & (c_{121} + c_{221}) \\ (c_{112} + c_{212}) & (c_{122} + c_{222}) \end{bmatrix} \tag{10}$$

1.5 Cálculos de Energia Potencial:

Calcular cada termo da energia potencial gravitacional que atua em cada CG:

$$p_i = -m_i \, (g_0)^T \, o_{c,i} \tag{11}$$

onde g_0 é um vetor coluna 3X1 que projeta o módulo da gravidade na origem. Ex.: $g_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{bmatrix}$, para $\vec{g}$ no sentido oposto ao eixo z_0.

Assim, a energia potencial total do sistema será:

$$P = \sum_{i=1}^{n} p_i \tag{12}$$

Cada termo da matriz final será:

$$g_i = \frac{\partial P}{\partial q_i} \tag{13}$$

Portanto, a matriz que representa o efeito da gravidade, para 2 GDL's, torna-se:

$$G(q) = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} \tag{14}$$

1.6 Modelo Dinâmico Final:

Por fim, deve-se dispor o sistema no formato matricial:

$$D(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q})\dot{q} + G(q) = \tau \tag{15}$$

$$\begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} \tag{16}$$

E finalmente, extrair as expressões para o torque das juntas:

$$\tau_1 = d_{11}\ddot{q}_1 + d_{12}\ddot{q}_2 + c_{11}\dot{q}_1 + c_{12}\dot{q}_2 + g_1 \tag{17}$$

$$\tau_2 = d_{21}\ddot{q}_1 + d_{22}\ddot{q}_2 + c_{21}\dot{q}_1 + c_{22}\dot{q}_2 + g_2 \tag{18}$$

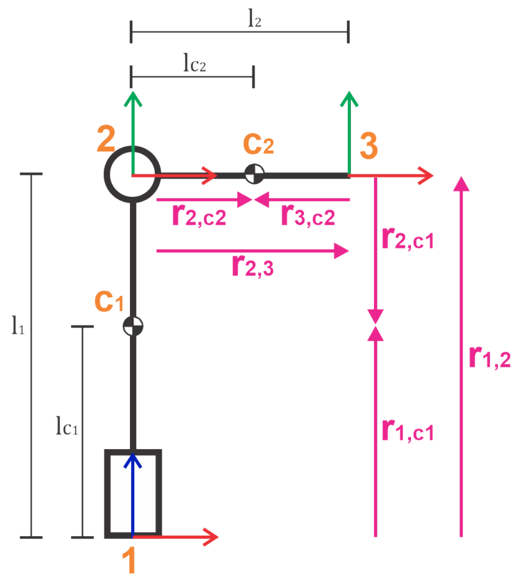
2 Método de Newton-Euler

2.1 Extrair o MCD do robô desejado:

$\rightarrow$ Denavit Hartenberg, matrizes homogêneas, matrizes de rotação e vetores $\vec{r}$.

- Obter as matrizes: R_1^0, R_2^1 e R_2^0.
- Obter os vetores: $r_{1,c1}$, $r_{2,c2}$, $r_{1,2}$, $r_{2,3}$, $r_{2,c1}$ e $r_{3,c2}$.

Para os vetores $\vec{r}$, deve-se supor pontos numerados nas extremidades dos *links*, sendo que o i-ésimo *link* parta do ponto i até o ponto $i+1$. Supõe-se também, pontos c_i nos CG's de cada *link*. Assim, é possível obter os vetores desejados, como no exemplo a seguir:



Esses vetores devem ser localizados no interior de cada link respectivo, porém, para fins didáticos, foram deslocados no esboço.

Os módulos dos vetores serão dados pelas distâncias entre os pontos de interesse em cada caso, enquanto que os sinais de cada vetor, serão dados em relação ao i-ésimo eixo colinear ao *link*, ou seja, o vetor $\vec{r}$ é expresso sempre no *frame* i.

Exemplos do esboço adotado:

- $r_{1,c1} = (lc_1)\hat{j}$
- $r_{2,c2} = (lc_2)\hat{i}$
- $r_{1,2} = (l_1)\hat{j}$
- $r_{2,3} = (l_2)\hat{i}$
- $r_{2,c1} = -(l_1 - lc_1)\hat{j}$
- $r_{3,c2} = -(l_2 - lc_2)\hat{i}$

2.2 Iteração Progressiva:

$\rightarrow$ Considerar as condições iniciais:

- $\omega_0 = 0$ (velocidade angular)
- $\alpha_0 = 0$ (aceleração angular)
- $a_{c,0} = 0$ (aceleração linear no CG)
- $a_{e,0} = 0$ (aceleração linear na extremidade do *link*)
- Definir $\vec{g_0}$ como em Euler-Lagrange.

$\rightarrow$ Para cada iteração $(i = 1, 2)$, calcular:

$$b_i = \left[\left(R_i^0\right)^T z_{i-1}\right]_{3X1} \tag{19}$$

$$\omega_i = \left[\left(R_i^{i-1}\right)^T \omega_{i-1} + b_i\dot{q}_i\right]_{3X1} \tag{20}$$

$$\alpha_i = \left[\left(R_i^{i-1}\right)^T \alpha_{i-1} + b_i\ddot{q}_i + \omega_i \times b_i\dot{q}_i\right]_{3X1} \tag{21}$$

$$a_{c,i} = \left[\left(R_i^{i-1}\right)^T a_{e,i} + \dot{\omega}_i \times r_{i,ci} + \omega_i \times (\omega_i \times r_{i,ci})\right]_{3X1} \tag{22}$$

$$a_{e,i} = \left[\left(R_i^{i-1} \right)^T a_{e,i} + \dot{\omega}_i \times r_{i,i+1} + \omega_i \times \left(\omega_i \times r_{i,i+1} \right) \right]_{3X1} \tag{23}$$

$$g_i = \left[\left(R_i^{i-1} \right)^T g_{i-1} \right]_{3X1} \tag{24}$$

2.3 Iteração Regressiva:

$\rightarrow$ Considerar as condições de contorno:

- $f_{n+1} = 0$ (força no *link*)
- $\tau_{n+1} = 0$ (torque no *link*)

em que $n = 2$ para 2 GDL's.

$\rightarrow$ Para cada iteração $(i = 2, 1)$, calcular:

$$f_i = \left[R_{i+1}^i f_{i+1} + m_i a_{c,i} - m_i g_i \right]_{3X1} \tag{25}$$

$$\tau_i = \left[R_{i+1}^i \tau_{i+1} - f_i \times r_{i,ci} + R_{i+1}^i f_{i+1} \times r_{i+1,ci} + I_i \dot{\omega}_i + \omega_i \times I_i \omega_i \right]_{3X1} \tag{26}$$

Os torques e forças encontrados aqui são matriciais, para fins de cálculo vetorial, porém o resultado final empregado, será apenas a componente z das expressões.

2.4 Modelo Dinâmico Final:

Por fim, deve-se dispor o sistema no formato matricial, escrevendo as expressões para τ em coluna e decompondo nas matrizes de inércia, coriolis e gravidade:

$$D(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = \tau \tag{27}$$