

Trabalho Final de Análise de Sistemas Lineares: Sistema Fan-Plate

(Modelagem, Análise no Domínio da Frequência e Implementação de Controladores)

Erick Nathan Martins Alves * Robson Resende Teixeira Júnior *

* Departamento de Engenharia Mecatrônica
CEFET-MG, Campus Divinópolis
(e-mail: erick.alves@aluno.cefetmg.br,
robsonresende55@yahoo.com.br).

Resumo: O trabalho aborda a modelagem via resposta ao degrau em caixa preta do sistema *Fan-Plate*, a análise no domínio da frequência e o projeto de controladores utilizando o método de Lugar Geométrico das Raízes (LGR). O objetivo principal é conduzir uma análise abrangente do comportamento dos sistemas propostos, destacando a avaliação de desempenho na malha fechada do sistema via simulação e implementação prática. Serão ainda avaliadas possíveis não linearidades e conflitos encontrados durante o desenvolvimento do trabalho, buscando suas causas, efeitos e possíveis soluções e implementações futuras.

Palavras-chave: Fan-Plate, Modelagem Caixa Preta, Controlador Proporcional, Controlador Proporcional-Integral, Malha Fechada.

1. INTRODUÇÃO

Nesta seção faz-se uma introdução ao tema abordado, bem como a apresentação das características do sistema em estudo e dos aspectos construtivos e operacionais da planta.

1.1 Planta: *Fan-Plate*

O sistema *Fan-Plate* é uma abordagem didática para a criação de uma plataforma dinâmica controlada. Sua configuração envolve uma ventoinha que gera um fluxo de ar, induzindo torque e a consequente rotação de uma placa ancorada por dois mancais. O objetivo principal desse sistema é o controle da posição angular da placa, atuando o sinal de *PWM* enviado ao *cooler* e monitorando o ângulo formado entre a placa e a vertical. A planta construída constitui-se de sistemas mecânicos, eletrônicos e por algoritmos de programação, sendo apresentada na Figura 1.

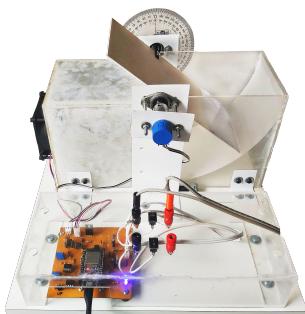


Figura 1. Planta construída baseada no sistema *Fan-Plate*.

A Interface Homem-Máquina (IHM) do projeto é composta por um *front-end* desenvolvido em HTML, Java Script e CSS, que proporciona uma interface visual intuitiva para interação com a planta. Destaca-se pela programação para uma alta taxa de amostragem de $1kHz$ ($t_s = 1 ms$), visando emular um sistema contínuo, garantindo uma representação precisa e em “tempo real” da amostragem e envio do sinal de controle ao sistema. A IHM contribui significativamente para a praticidade e responsividade na monitoração e controle do sistema, possuindo ainda um sistema de gravação e salvamento dos dados coletados. A IHM pode ser visualizada na Figura 2.



Figura 2. Interface Homem Máquina: *front-end* desenvolvido em HTML, Java Script e CSS.

A filtragem do sinal é essencial para minimizar interferências causadas por ruídos no projeto. Filtros desempenham um papel crucial na obtenção de medições precisas, garan-

tindo que os dados refletem com fidelidade o comportamento do sistema. No projeto, foram utilizados um filtro analógico de primeira ordem com $fc = 30Hz$ para atenuar componentes de alta frequência e um filtro digital de média móvel de 10 amostras para uma maior seletividade e suavização da resposta. Essa combinação estratégica de filtros contribui para a estabilidade e precisão do sistema em ambientes discretos, melhorando a qualidade geral do sinal. Diante disso, na Figura 3 é notável a interferência do ruído no sinal.

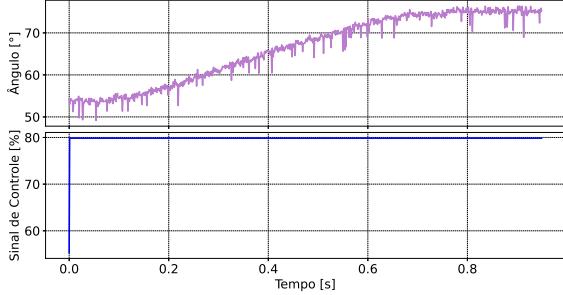


Figura 3. Sinal sem filtragem.

1.2 Não Linearidades Mecânicas

A parte mecânica do sistema *Fan-Plate*, apesar de ter sido cuidadosamente projetada, apresentou problemas significativos durante a implementação dos controladores. Dentro as complexidades observadas, destacam-se a presença de não linearidades, como atrito e torção, que exercem impacto direto na dinâmica da placa. O atrito estático, em particular, compromete a suavidade do movimento, oferecendo obstáculos à eficiência do sistema, tornando-o menos suave que o previsto. A Figura 4 evidencia o problema mencionado.

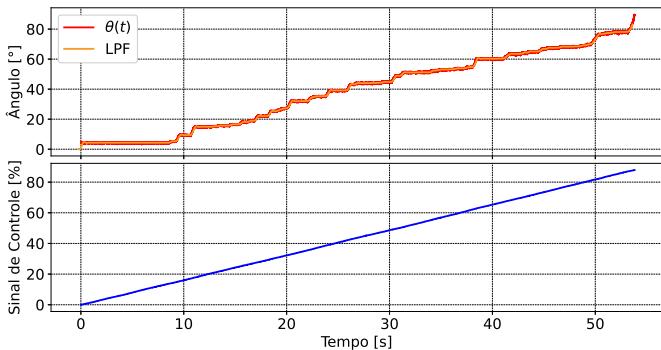


Figura 4. Interferência do atrito estático.

Ainda em decorrência do atrito, mas potencializado pela baixa massa da placa, a resposta descendente da planta é inferior à ascendente. A inércia do *cooler* dificulta a descida, visto que a leveza da placa, combinada à retenção de ar na câmara vedada do sistema, impede uma descida instantânea, que fica a cargo da ação gravitacional e ainda amortecida pelos fatores supracitados. Esse fenômeno resulta em uma descida escalonada, pois o ar é liberado gradualmente, indicando que o mesmo atua como um amortecedor no movimento de descida da placa. Além disso, durante esse processo, a placa não consegue atingir

posição angular nula. Os comportamentos mencionados são comprovados pela resposta da planta em malha aberta, conforme a Figura 5 em que é evidente a dificuldade de descida da placa.

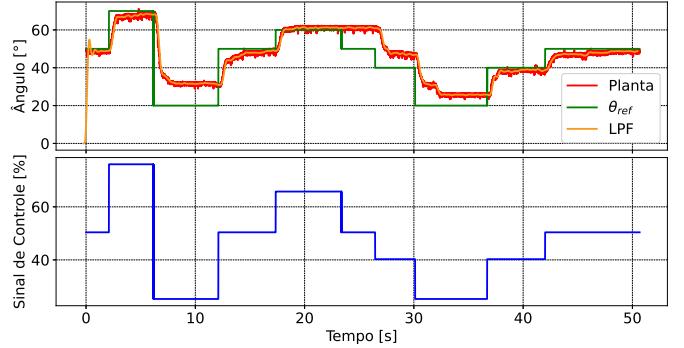


Figura 5. Defasagens em malha aberta devido ao atrito.

Diante dessas dificuldades, uma solução provisória foi implementada, consistindo na adição de uma “bolsa” na extremidade da placa, permitindo a inserção de pesos na tentativa de facilitar a descida e atenuar os efeitos do atrito estático. No entanto, mesmo com essa medida, não foi possível garantir que a placa retornasse ao ângulo nulo. Assim, esses desafios identificados durante a implementação afetam negativamente o funcionamento do sistema, evidenciando a necessidade de ajustes e melhorias futuras na construção mecânica.

2. METODOLOGIA

Os métodos e conceitos utilizados neste trabalho foram baseados nas referências, portanto, visando uma melhor otimização do espaço e abordagem de todo o conteúdo previsto, não será realizada uma revisão detalhada e individual de cada uma das técnicas, que serão apresentadas e utilizadas brevemente ao decorrer das subseções seguintes.

2.1 Modelagem do Sistema

A priori, define-se o ponto de operação desejado, a fim de obter um modelo linear em torno deste valor. Optou-se então por $\theta_{eq} = 50^\circ$. Para a modelagem em caixa preta, submete-se o sistema a um degrau com amplitude de 20° , conforme Figura 6.

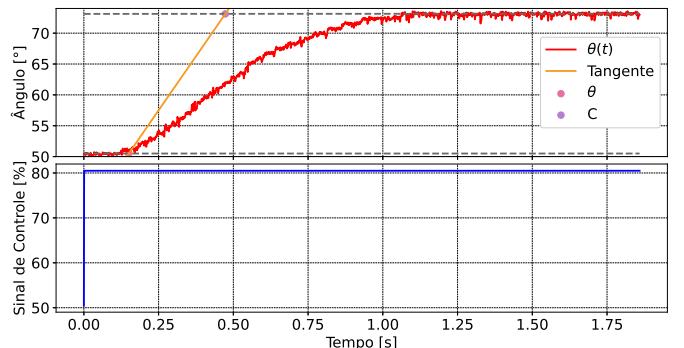


Figura 6. Resposta ao degrau.

Inicialmente, esperava-se conseguir uma boa aproximação de primeira ordem para o sistema, entretanto, após observar a curva de resposta a cima, notou-se que um modelo de primeira ordem não seria adequado, optando-se então, pela aproximação de segunda ordem, conforme forma canônica:

$$G(s) = \frac{k\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} . \quad (1)$$

O princípio para modelagem de processos de segunda ordem se dá por meio da resposta ao degrau, analisando parâmetros como o tempo de acomodação, tempo de pico e máximo sobressinal, a fim de obter os parâmetros característicos do sistema: o coeficiente de amortecimento ζ , a frequência natural ω_n e o ganho estático k (Aguirre, 2007) (Garcia, 2017).

O ganho estático do sistema é obtido pela razão das variações da saída do sistema e do sinal de controle obtidos da planta, enquanto que o tempo morto do sistema, ou atraso de transporte é extraído graficamente da resposta ao degrau: diferença entre o instante que o sistema responde e o instante em que o sinal é enviado.

Por meio da Figura 6 observa-se que o tempo de acomodação do sistema é de aproximadamente 950 milissegundos. A resposta ao degrau evidencia ainda que o sistema não possui *overshoot*, portanto, trata-se de um sistema superamortecido, criticamente amortecido, ou com um amortecimento elevado. Mantendo fixo o tempo de acomodação ST , inicia-se um processo de ajuste do coeficiente de amortecimento, iniciando no valor crítico $\zeta = 1$.

Após alguns reajustes e iterações, obtém-se os parâmetros do sistema:

$$k = \frac{\Delta Y}{\Delta U} = \frac{73,12 - 50,5}{80,46 - 50,51} = 0,7553$$

$$ST = 0,95 \text{ s} \text{ (obtido graficamente)} \quad . \quad (2)$$

$$\zeta = 0,91 \text{ (ajustado manualmente)}$$

$$\omega_n = \frac{4}{\zeta ST} = 4,627 \text{ rad/s}$$

Assim, substituindo (2) em (1), tem-se:

$$G(s) = \frac{16,17}{s^2 + 8,421s + 21,41} . \quad (3)$$

A função de transferência a cima, entretanto, ainda não representa o sistema, uma vez que não contempla o atraso de transporte. Dessa forma, para fins de simulação, é utilizada a aproximação por *padé* de primeira ordem e valor igual a **118 milissegundos**. A função de transferência do atraso se trata de um zero e um polo, obtidos por meio da biblioteca *Python Control*:

$$G_d(s) = \frac{-s + 16,95}{s + 16,95} . \quad (4)$$

Espera-se então, que a planta tenha dinâmica descrita por:

$$G_p(s) = \frac{-16.17s + 274.1}{s^3 + 25,37s^2 + 164,1s + 362,9} . \quad (5)$$

A Figura 7 compara o modelo de segunda ordem obtido e um de primeira ordem. Evidencia-se assim a superioridade

da fidelidade do modelo adotado em detrimento de uma simples representação de primeira ordem.

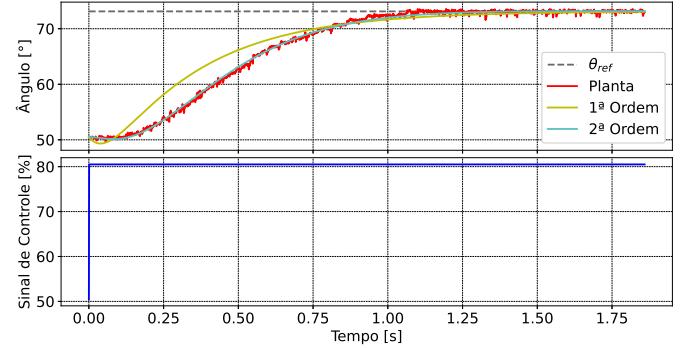


Figura 7. Comparaçao dos modelos obtidos em caixa preta.

A fim de validar o modelo obtido, a planta real foi submetida a uma série de degraus, em malha aberta. O sinal de controle enviado ao *cooler* foi também utilizado na função *forced_response()* da biblioteca *Python Control*. As respostas obtidas podem ser comparadas na Figura 8.

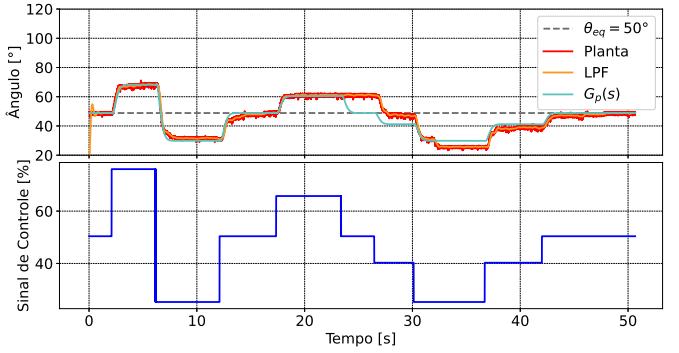


Figura 8. Sequênciade degraus para validação do modelo em malha aberta.

Percebe-se que o modelo obtido atende satisfatoriamente, seguindo a resposta da planta para amplitudes maiores, enquanto que, para degraus negativos de menor amplitude, houve divergência entre as curvas. Este fato deve-se ao problema de atrito nos rolamentos e amortecimento da placa pelo bolsão de ar acumulado na câmara vedada da *Fan-Plate*, o que impede, em alguns momentos, a variação da placa para pequenas alterações no fluxo de ar, por este motivo, a modelagem, que geralmente é realizada através de degrau positivo e negativo, foi desenvolvida apenas com o degrau positivo.

Ressalta-se ainda que o modelo obtido, bem como os controladores a serem desenvolvidos posteriormente abrangem o intervalo limite de $30^\circ \leq \theta \leq 70^\circ$, devido a linearizações e aproximações para pequenos ângulos implícitas na modelagem do sistema, ou seja, a função de transferência representa sistemas lineares em torno de um ponto de operação (Ogata, 2010).

Conforme Dorf and Bishop (2001), um sistema pode ser representado matricialmente, em espaço de estados, no formato:

$$\begin{aligned} \dot{X} &= AX + BU \\ Y &= CX + DU \end{aligned} \quad (6)$$

Assim, com o auxílio da biblioteca *Python Control*, obtém-se a representação do modelo em espaço de estados:

$$A = \begin{bmatrix} -8,42 & -21,4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} . \quad (7)$$

$$C = [0 \ 16, 2]$$

$$D = [0]$$

2.2 Projeto dos Controladores

Busca-se projetar os controladores dos tipos P e PI que atendam as especificações: redução de 25% no tempo de acomodação do sistema e máximo sobressinal de 10%. Para alguns casos, como sistemas de primeira ordem, existem tabelas para sintonia dos controladores, como em Astrom and Hagglund (1995) e Garcia (2017). Entretanto, como este trata-se de um sistema de segunda ordem, optou-se pelo projeto via LGR (Lugar Geométrico das Raízes), visando analisar a localização dos polos e reposicioná-los conforme desejado.

Inicialmente, a localização dos polos do sistema com atraso em malha aberta, também chamados de polos não compensados são: $p_{nc1,2,3} = [(-16.9492), (-4.2105 + 1.9184j), (-4.2105 - 1.9184j)]$, em que dois deles formam um par complexo conjugado, oriundo do modelo de segunda ordem, e o outro foi adicionado pelo atraso de *padé*.

Através das especificações de projeto, define-se a localização dos polos dominantes compensados (desejados), no formato $p = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{1 + \zeta^2}$:

$$ST = 0,95 \cdot 0,75 \approx 0,7 \text{ s}$$

$$\zeta > \frac{\ln(0,1)}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2(0,1)}} \rightarrow \zeta > 0,5912$$

$$\rightarrow \zeta = 0,6 \text{ (escolhido)} . \quad (8)$$

$$\omega_n = \frac{4}{\zeta ST} \approx 9,52 \text{ rad/s}$$

$$\therefore p_{d1,2} = -5,72 \pm 7,62j$$

Controlador Proporcional

A topologia do controlador proporcional trata-se apenas da inserção de um ganho no ramo direto, portanto, ele somente consegue deslocar as raízes em malha fechada, porém não altera o LGR.

Na Figura 9 é possível observar o LGR do sistema não compensado. Têm-se que, em malha fechada: o zero adicionado por *padé*, no semiplano direito, atrairá o lugar das raízes para a instabilidade, em termos dos polos complexos conjugados; enquanto que, o polo em -16.9492 tenderá a deslocar-se no sentido negativo do eixo real.

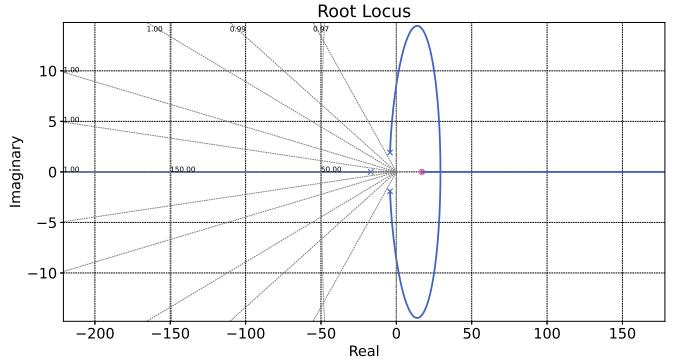


Figura 9. LGR do sistema modelado com atraso.

Logo percebe-se que, ao aumentar o ganho, os polos terão parte real menor e parte imaginária maior, ou seja, o sistema se tornará mais lento e oscilatório, comportamentos estes que são indesejáveis ao projeto. Além disso, há um valor limite para o ganho, neste caso. Tem-se que, para manter a estabilidade (polos no semiplano esquerdo): $k < 5,556$ (obtido com o auxílio computacional).

Assim sendo, não é possível atender as especificações de projeto com o controlador proporcional, uma vez que não é possível alocar os polos dominantes na posição desejada. Para efeito de comparação, foi escolhido um ganho (com auxílio computacional) que deixasse o sistema com o amortecimento desejado ($\zeta \approx 0,6$): $k = 0,68$.

Portanto, a função de transferência deste controlador será apenas um ganho $k_p = k = 0,68$. A malha fechada resultará nos polos: $[(-18.7702), (-3.3 + 4.286j), (-3.3 - 4.286j)]$. A resposta ao degrau unitário é mostrado na Figura 10, em comparação com a malha aberta.

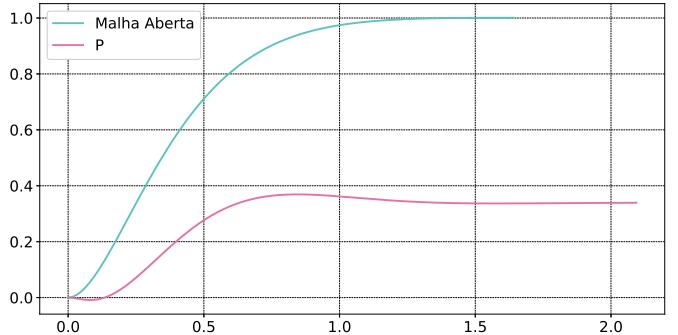


Figura 10. Resposta ao degrau unitário para controlador do tipo P.

Percebe-se que o tempo de acomodação do sistema quase não se alterou, uma vez que os polos dominantes deslocaram-se pouco para a direita. O *overshoot* manteve-se dentro do esperado em projeto e o erro em regime permanente não é nulo, como esperado para entrada em degrau em um controlador do tipo proporcional.

Controlador Proporcional-Integral

O arranjo Proporcional-Integral, por sua vez, é capaz de alterar o LGR, além de adicionar um integrador ao ramo direto, o que garante erro de regime estacionário nulo para entrada em degrau. Assim, segundo Nise (2013), é possível manipular a função de transferência de um controlador do

tipo PI para reorganizá-la em uma topologia composta por um ganho k_{PI} , um zero em $-a$ e um integrador (polo na origem do plano complexo):

$$G_{PI}(s) = k_p + \frac{k_i}{s} = \frac{k_p s + k_i}{s} = k_{PI} \frac{(s + a)}{s} , \quad (9)$$

em que: $k_p = k_{PI}$ e $k_i = ak_{PI}$.

O projeto do controlador PI por LGR em Nise (2013) visa calcular a posição do zero ($-a$) para que os polos desejados façam parte do LGR, para isso, utiliza-se da condição angular do lugar das raízes: $\sum \theta_{z_i} - \sum \theta_{p_i} = n \cdot 180$, em que θ_{z_i} é cada ângulo formado por um zero e o polo desejado em relação à horizontal, θ_{p_i} é cada ângulo formado por um polo existente e o polo desejado em relação à horizontal e n é um número natural ímpar. Analisa-se o LGR contendo o zero obtido e o integrador e encontra-se o ganho que leva os polos dominantes às posições desejadas.

Contudo, a disposição dos polos e zeros obtidos não foi favorável: surge um polo partindo da origem na malha fechada e que é atraído pelo zero do controlador. A princípio, este polo residual próximo à origem é dominante e o ideal é que este fosse deslocado significativamente para a esquerda, assim como o par complexo conjugado, buscando deixar os últimos nas posições desejadas e manter os polos restantes a uma distância mínima de 10 unidades à esquerda, no eixo real, fazendo com que a dinâmica dos polos desejados seja dominante.

Após análise computacional, deparou-se com quatro possíveis situações indesejadas:

- $a \approx 0$: O efeito do polo na origem é praticamente anulado, gerando situação similar à do controlador proporcional.
- $0,5 < a < 1$: Surge, em malha fechada, um polo próximo à origem, tornando o sistema lento.
- $a >> 1$: Não oferece muita possibilidade de ajuste, uma vez que: um ganho baixo torna o sistema lento e um ganho alto instabiliza o sistema.
- $a < 0$: Qualquer ganho aloca um polo no semiplano direito, em malha fechada, instabilizando o sistema.

Assim, buscou-se encontrar uma relação entre os valores de a e k_{PI} de forma a otimizar o LGR: um valor de ganho alto atrai o polo da origem para a posição $-a$, entretanto, desloca o par complexo conjugado para a direita. Obteve-se assim, com auxílio computacional, a localização para o zero $a = 5$. O LGR do sistema incluindo o zero e o integrador segue conforme Figura 11.

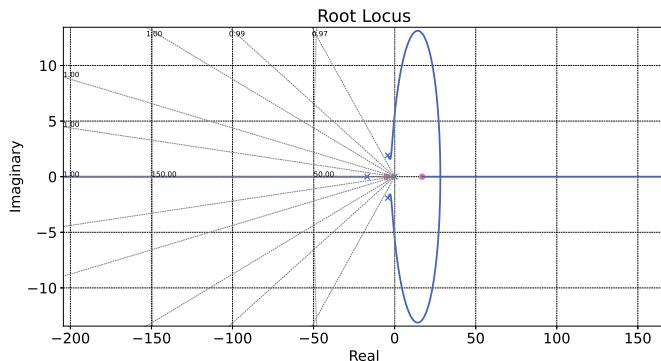


Figura 11. LGR do sistema mais um zero e um integrador.

O valor complementar para o ganho, de forma a “minimizar” o tempo de resposta do sistema é $K_{PI} = 0,3$, obtido com auxílio computacional. Tem-se, portanto: $k_p = 0,3$ e $k_i = 1,5$ e a função de transferência do controlador será:

$$G_c(s) = \frac{0,3s + 1,5}{s} . \quad (10)$$

As novas localizações dos polos em malha fechada com controlador do tipo PI serão: $[(-17.6046), (-2.6692 + 1.5798j), (-2.6692 - 1.5798j), (-2.4273)]$. Percebe-se então, que a parte real dos polos dominantes $[(-2.6692 \pm 1.5798j)$ e $(-2.4273)]$ é próxima, fato conferido pela relação entre os valores de a e k_{PI} , uma vez que, para outras combinações, sempre haverá um polo mais lento. Quanto ao sobressinal, o mesmo foi observado na escolha do ganho k_{PI} e encontra-se dentro do especificado.

A Figura 12 mostra a resposta ao degrau unitário, em comparação com a malha aberta.

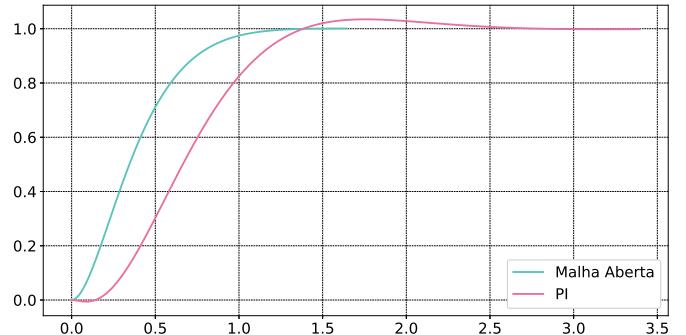


Figura 12. Resposta ao degrau unitário para controlador do tipo PI.

Pode-se observar características positivas: o máximo sobressinal encontra-se na faixa desejada e o erro em regime permanente é nulo. Contudo, o tempo de acomodação quase dobrou em relação à malha aberta, o que é um ponto negativo a se considerar.

2.3 Robustez da Malha Fechada

É essencial assegurar que o sistema mantenha o desempenho desejado mesmo diante de desafios e incertezas, consolidando sua confiabilidade em aplicações práticas e variadas. O cuidado na análise e ajuste da malha fechada contribui significativamente para a eficácia e adaptabilidade do sistema em ambientes dinâmicos e variáveis. Assim, a Figura 13 evidencia o diagrama de blocos da malha fechada no domínio da frequência.

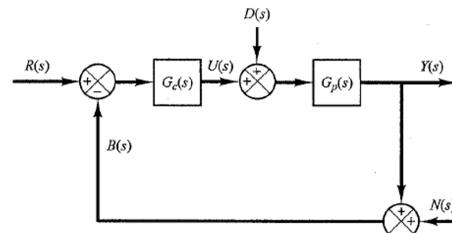


Figura 13. Diagrama de blocos da malha fechada no domínio da frequência.

Ao manipular o diagrama de blocos a cima, é possível obter a função de transferência em malha fechada $T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)}$, sendo expressa por:

$$T(s) = \frac{-4.851s^2 + 57.96s + 411.1}{s^4 + 25.37s^3 + 159.3s^2 + 420.8s + 411.1} . \quad (11)$$

Sendo o ganho de malha $L(s) = G_c(s)G_p(s)$, tem-se que o erro de rastreamento é:

$$E(s) = S(s)R(s) - S(s)G_p(s)D(s) + C(s)N(s) , \quad (12)$$

em que $S(s)$ é função de sensitividade e $C(s)$ a função de sensitividade complementar, representadas por:

$$S(s) = \frac{1}{1+L(s)} = \frac{s^4 + 25.37s^3 + 164.1s^2 + 362.9s}{s^4 + 25.37s^3 + 159.3s^2 + 420.8s + 411.1} \quad (13)$$

e

$$C(s) = \frac{L(s)}{1+L(s)} = \frac{-4.851s^2 + 57.96s + 411.1}{s^4 + 25.37s^3 + 159.3s^2 + 420.8s + 411.1} \quad (14)$$

O projeto do controlador interfere tanto em $S(s)$ quanto em $C(s)$ e desta maneira influencia diretamente no desempenho do sistema (Dorf and Bishop, 2001).

O erro em regime permanente trata-se da diferença entre o sinal de saída e o sinal de referência, após efeito do transitório, restando apenas a parcela em estado estacionário. O teorema do valor final oferece um modo conveniente de determinar o desempenho em regime permanente de um sistema estável (Ogata, 2010), assim tem-se:

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) \quad (15)$$

Seguimento de Referência

Para uma entrada de referência em degrau, com amplitude A ($R(s) = \frac{A}{s}$), adotando-se (12) e fazendo $D(s) = 0$ e $N(s) = 0$, tem-se o erro de rastreamento:

$$E(s) = S(s)R(s) = S(s)\frac{A}{s}$$

e o erro em regime permanente será:

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s \left(S(s) \frac{A}{s} \right) = 0 .$$

Portanto, para uma entrada de referência em degrau, a malha fechada consegue anular o erro em regime estacionário.

Rejeição de Distúrbio

A rejeição ao distúrbio refere-se à capacidade de um sistema ou controlador minimizar ou neutralizar os efeitos indesejados de distúrbios externos, mantendo a estabilidade e o desempenho desejado do sistema. Essa característica é essencial em sistemas dinâmicos para garantir uma resposta robusta mesmo diante de influências externas não planejadas. A eficácia na rejeição ao distúrbio é frequentemente avaliada pela capacidade do sistema em atenuar ou anular os efeitos adversos dessas perturbações, contribuindo para a estabilidade e confiabilidade operacional do sistema.

Para uma entrada de distúrbio em degrau, com amplitude A ($D(s) = \frac{A}{s}$), adotando-se (12) e fazendo $R(s) = 0$ e $N(s) = 0$, tem-se o erro de rastreamento:

$$E(s) = -S(s)G_p(s)D(s) = -S(s)G_p(s)\frac{A}{s}$$

e o erro em regime permanente será:

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s \left(-S(s)G_p(s) \frac{A}{s} \right) = 0 .$$

Portanto, a malha fechada é capaz de rejeitar entradas de perturbação em degrau.

Influência do Ruído de Medição

A influência do ruído na medição é um fator crítico que pode distorcer e comprometer a precisão dos dados obtidos em sistemas de medição e instrumentação. Estratégias como filtragem e calibração adequada são essenciais para mitigar os efeitos adversos do ruído, assegurando a confiabilidade das medições. Para análise da influência do ruído na malha fechada, adota-se ainda a Equação (12), considerando $R(s) = 0$ e $D(s) = 0$.

O erro de rastreamento será:

$$E(s) = C(s)N(s) .$$

Como o sinal do ruído é imprevisível, não considera-se uma entrada em degrau, mas é perceptível a influência da sensitividade complementar $C(s)$ que associa o ruído ao erro de rastreamento. É notório que, conforme (14), para baixas frequências, ou mesmo em regime permanente, $C(s) \approx 1$, ou seja, o ruído pode ser integralmente transferido à saída, erro de rastreamento e de regime permanente, sendo portanto, um fator crítico e que deve ser tratado através de filtros analógicos e/ou digitais.

2.4 Implementação da Malha Fechada à Planta

Para implementação da malha fechada no microcontrolador, foi adotado o diagrama no domínio do tempo mostrado na Figura 14.

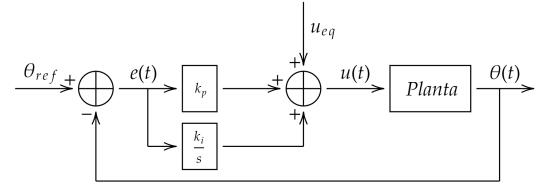


Figura 14. Diagrama de blocos para implementação da malha fechada, no domínio do tempo.

É necessário entretanto, discretizar a implementação, de forma que cada variável seja calculada a cada tempo de amostragem:

$$\begin{aligned} e_k &= \theta_{ref_k} - \theta_k \\ ie_k &= \sum_{n=0}^k (e_k t_s) , \\ u_k &= u_{eq} + k_p e_k + k_i ie_k \end{aligned} \quad (16)$$

em que: θ_{ref_k} é a referência angular na k-ésima iteração, θ_k é a posição angular da placa na k-ésima iteração, e_k é o erro na k-ésima iteração, ie_k é a integral do erro na k-ésima iteração, t_s é o tempo de amostragem, u_{eq} é o sinal que leva o sistema ao ponto de equilíbrio, u_k é o sinal de controle na k-ésima iteração, k_p e k_i são as constantes do controlador.

As lógicas a cima são implementadas dentro de uma função de *callback* que é chamada por interrupção de um *timer* dedicado do ESP 32 a cada 1 ms (tempo de amostragem).

3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Ao implementar o controlador na planta, observou-se que o comportamento foi oscilatório, diferentemente do que foi visto na simulação. Duas hipóteses foram levantadas: uma constante de integração muito elevada ou uma constante proporcional muito baixa. A primeira hipótese foi descartada, pois após alguns testes, notou-se que a diminuição de k_i fazia com que o sistema não atingisse o erro de regime permanente nulo ou demorasse demasiadamente para atingi-lo. A segunda hipótese foi mais aceita, uma vez que, os problemas mecânicos supracitados fazem com que a placa não alcance seu objetivo final e nem chegue perto disso durante a ação proporcional e, a ação integral não tem peso suficiente para corrigir o erro em um tempo aceitável, além de acumular este erro e causar *overshoots* e oscilações na resposta do sistema.

A fim de amenizar os efeitos comentados, o valor de k_p foi sendo incrementado, mantendo-se $k_i = 1,5$. As respostas das malhas fechadas para cada uma das situações podem ser comparadas na Figura 15.

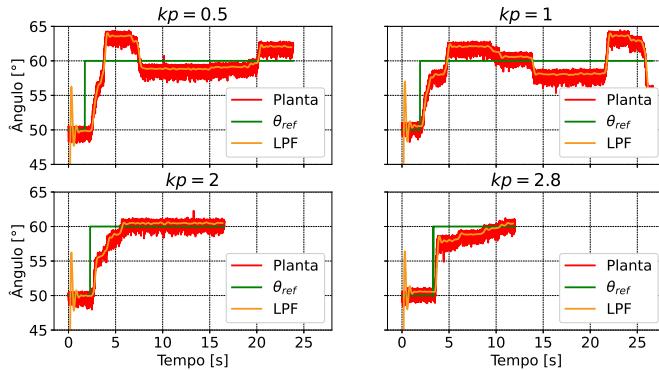


Figura 15. Avaliação de k_p para contorno das não linearidades causadas pelo atrito.

Após os testes, definiu-se que $k_p = 2,8$ forneceu uma melhor resposta em malha fechada. A justificativa se dá pelo fato de que, a ação proporcional ocorre na porção inicial do degrau, gerando um impulso maior na placa. O aumento deste efeito propicia o desvencilhamento do atrito estático e permite a consequente acomodação do sistema pela ação integral.

A Figura 16 mostra a resposta da malha fechada à aplicação de uma série de degraus, estes, comparados ainda com a simulação do controlador PI projetado.

Os comportamentos foram similares e satisfatórios, de certa forma. Fica evidente o problema mecânico à medida que, em casos críticos, a acomodação ocorre em etapas e não em um único movimento.

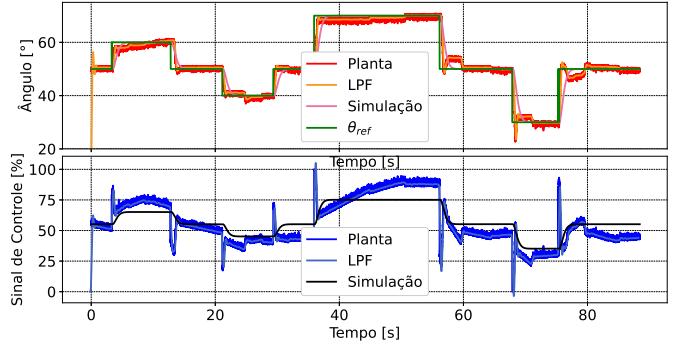


Figura 16. Validação do controlador em malha fechada.

Para teste de rejeição de distúrbio, após o equilíbrio do sistema, foram dados dois impulsos manuais na placa, gerando a resposta mostrada na Figura 17.

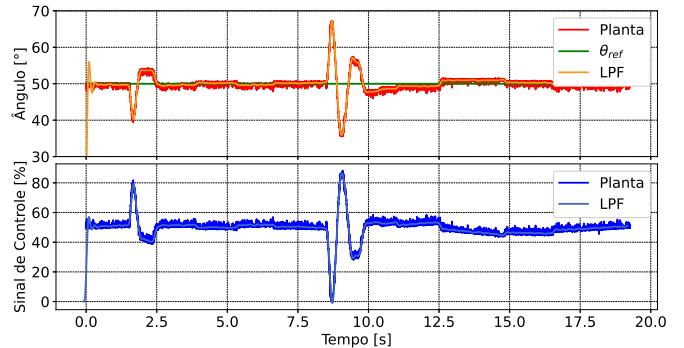


Figura 17. Capacidade de rejeição do distúrbio da malha fechada.

Como pôde ser observado, o sistema desenvolvido é capaz de rejeitar a perturbação, retornando ao estado de regime permanente com erro nulo.

A fim de aferir quantitativamente o desempenho da malha fechada, foram calculados alguns índices de desempenho, mostrados na Tabela 3.

Tabela 1. Índices de desempenho da malha fechada.

\	Simulação	Planta
RMSE	3,7472	2,9728
IAE	$1,0583 \times 10^4$	$1,2404 \times 10^4$
ITAE	$4,7959 \times 10^6$	$5,5779 \times 10^6$

É evidente que, no geral, a simulação possuiria melhores índices de desempenho, uma vez que ela trabalha com condições ideais, sem ruído e com o sistema perfeitamente linear dentro da faixa de operação.

4. CONCLUSÃO

A relevância do trabalho desenvolvido ultrapassa os limites acadêmicos, a medida que possibilita o trabalho com situações reais: sistemas ruidosos, com não linearidades e atraso. Assim, o desafio de executar um projeto como esse engloba várias esferas da mecatrônica, como a mecânica, eletrônica, programação e controle. A simulação dos sistemas com a utilização da *Python Control* é de suma importância na parte de projeto e análise do comportamento dos

sistemas, entretanto, as condições de simulação devem ser idêntica às reais ou, em caso contrário, a simulação pode tornar-se utópica e inatingível em um sistema real.

Os resultados e conclusões aqui desenvolvidos baseiam-se nos problemas encontrados: atrito, atraso e ruído. O ruído não se mostrou um grande problema, em virtude da filtragem do sinal, entretanto, o atraso razoavelmente alto e a não linearidade inserida pelo atrito prejudicaram o desempenho da malha fechada. Contudo, após um reajuste em uma das constantes, obteve-se um resultado razoável, mas ainda aquém da própria malha aberta, no quesito tempo de acomodação. Apesar deste ponto, o controlador obtido mantém-se dentro do máximo sobressinal desejado e é capaz de rejeitar a perturbação e anular o erro de regime permanente para entradas em degrau.

As especificações desejadas não foram alcançadas e, com a planta e configurações atuais, baseado em pesquisas, não é possível atender o projeto proposto. Para cumprimento dos requisitos a topologia dos controladores P e PI não são suficientes, sendo necessário, provavelmente, um controlador PID. Há a possibilidade ainda de que nem mesmo o acréscimo da ação derivativa solucione o problema, além de amplificar o ruído de medição, redirecionando-o ao sinal de controle de forma escalonada.

Portanto, os resultados e aprendizados aqui foram valiosos do ponto de vista do controle e da engenharia mecatrônica como um todo, permitindo o contato com um sistema real e possibilitando a comparação entre sistemas ideais e reais. Para trabalhos futuros, pretende-se melhorar a parte mecânica, visando atenuar o atrito e também a implementação de técnicas de controle mais avançadas: outras topologias de controladores, como o polinomial, por exemplo; o preditor de Smith, visando mitigar os efeitos do atraso do sistema; implementar a ação *anti-windup* para evitar saturações no sinal de controle; e até mesmo substituir o filtro de primeira ordem por uma configuração ativa, como a *Sallen-Key* de segunda ordem, para aprimorar a filtragem do sinal amostrado.

REFERÊNCIAS

- Aguirre, L.A. (2007). *Introdução à Identificação de Sistemas: Técnicas Lineares e Não-Lineares Aplicadas a Sistemas Reais*. Editora UFMG, 3 edition.
- Astrom, K. and Hagglund, T. (1995). *PID Controllers: Theory, Design and Tuning*. ISA, 2 edition.
- Dorf, R.C. and Bishop, H.H. (2001). *Sistemas de Controle Modernos*. LTC Editora, 8 edition.
- Garcia, C. (2017). *Controle de Processos Industriais - Estratégias Convencionais*. Blucher, 1 edition.
- Nise, N.S. (2013). *Engenharia de Sistemas de Controle*. LTC Editora, 6 edition.
- Ogata, K. (2010). *Engenharia de Controle Moderno*. Pearson Education, 5 edition.