ANÁLISE MODAL

Análise Modal

- **Teórica**
  - ↓ mudança de domínio c/ desacoplamento de eq's
  - ↓ Freq. nat. + modos de vibração
- **Experimental**
  - ↓ Aplicação de técnicas de mínima rigidez
  - ↓ Freq. naturais. Para modos de vibração utiliza-se a técnica de ODS.

- Pode ser aplicada para sistemas de 'n' gdl's:
  - com e sem amortecimento
  - com e sem excitação externa

- Princípio básico: após obtida a dinâmica do sistema, por Newton ou Lagrange, aplicam-se transformações nos tensores $\underline{\underline{M}}$, $\underline{\underline{C}}$ e $\underline{\underline{K}}$, de tal forma a realizar uma mudança de domínio ($x_{(t)}$ p/ $r_{(t)}$) onde as equações se tornam desacopladas. Resolve-se o problema no novo domínio e aplica-se a transformação inversa, retornando p/ o domínio $x_{(t)}$.

Análise Modal em sistemas de 'n' gdl's, livres e sem amortecimento.

Partindo da dinâmica matricial

$$\boxed{\underline{\underline{M}}\,\ddot{\underline{x}} + \underline{\underline{K}}\,\underline{x} = \underline{0}} \quad (01)$$

, onde

$\underline{\underline{M}}$ é uma matriz simétrica e positiva definida, é sempre possível achar uma transformação de coordenadas que a transforme numa matriz identidade. Neste caso a transformação é

$$\boxed{\underline{\underline{M}}^{-1/2} \cdot \underline{\underline{M}} \cdot \underline{\underline{M}}^{-1/2} = \underline{\underline{I}}} \quad (02)$$

, onde $M^{1/2} = \begin{bmatrix} \sqrt{m_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{m_i} \end{bmatrix}$

$M^{-1/2} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{m_1}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{\sqrt{m_i}} \end{bmatrix}$

Aplicar esta transformação na eq. da dinâmica do sistema c/ o intuito de obter a $\underline{\underline{I}}$ no termo $\ddot{x}$ é o mesmo que dividir a eq. por $\underline{\underline{M}}$. Ao se aplicar esta transformação, o vetor $\underline{x}$ fica reescrito como

$$\boxed{\underline{x} = \underline{\underline{M}}^{-1/2} \cdot \underline{q}} \quad (03)$$

, sendo $M^{-1/2}$ a matriz transformação.

E a eq. dinâmica se torna:

$$\underline{x} = \underline{\underline{M}}^{-1/2}\,\underline{q} \Rightarrow \dot{\underline{x}} = \underline{\underline{M}}^{-1/2}\,\dot{\underline{q}} \Rightarrow \ddot{\underline{x}} = \underline{\underline{M}}^{-1/2}\,\ddot{\underline{q}} \quad \text{subst.}$$

$$\underline{\underline{M}}\left(\underline{\underline{M}}^{-1/2}\,\ddot{\underline{q}}\right) + \underline{\underline{K}}\left(\underline{\underline{M}}^{-1/2}\,\underline{q}\right) = \underline{0}$$

$$\underline{\underline{M}}^{-1/2}\,\underline{\underline{M}}\,\ddot{\underline{q}} + \underline{\underline{K}}\,\underline{\underline{M}}^{-1/2}\,\underline{q} = \underline{0}$$

Multiplicando-se os dois termos por $M^{-1/2}$:

$$\underline{\underline{M}}^{-1/2}\,\underline{\underline{M}}\,\underline{\underline{M}}^{-1/2}\,\ddot{\underline{q}} + \underline{\underline{M}}^{-1/2}\,\underline{\underline{K}}\,\underline{\underline{M}}^{-1/2}\,\underline{q} = \underline{0}$$

Pela transformação, $M^{-1/2} M M^{-1/2} = I$, e

$$\boxed{\underline{\underline{I}}\,\ddot{\underline{q}}_{(t)} + \underline{\underline{\tilde{K}}}\,\underline{q}_{(t)} = \underline{0}} \quad (04), \quad \text{com} \quad \boxed{\underline{\underline{\tilde{K}}} = \underline{\underline{M}}^{-1/2} \cdot \underline{\underline{K}} \cdot \underline{\underline{M}}^{-1/2}} \quad (05)$$

↳ $\underline{\underline{\tilde{K}}}$ simétrica.

Esta equação possui um conjunto de soluções, que podem estar na forma

$$\boxed{\underline{\tilde{q}}_{(t)} = \underline{\tilde{v}} \cdot e^{j\omega t} = \underline{\tilde{v}}\,(\cos(\omega t) + j\,\mathrm{sen}(\omega t))} \quad (06), \quad \text{onde}$$

$\underline{v}$ é um vetor que guarda as constantes que dependem das condições iniciais.

$$\underline{q}_{(t)} = \underline{v}\,e^{j\omega t} \Rightarrow \dot{\underline{q}}_{(t)} = j\omega\,\underline{v}\,e^{j\omega t} \Rightarrow \ddot{\underline{q}}_{(t)} = j^2\omega^2\,\underline{\tilde{v}}\,e^{j\omega t}$$

Subst. na eq $\underline{\underline{I}}\,\ddot{\underline{q}} + \underline{\underline{\tilde{K}}}\,\underline{q} = \underline{0}$:

$$\underline{\underline{I}}\,(j^2\omega^2\,\underline{v}\,e^{j\omega t}) + \underline{\underline{\tilde{K}}}\,(\underline{v}\,e^{j\omega t}) = \underline{0} \quad : \text{como } j^2 = -1$$

$$\underline{\underline{\tilde{K}}}\,\underline{v}\,e^{j\omega t} - \omega^2\,\underline{v}\,\underline{\underline{I}}\,e^{j\omega t} = \underline{0}$$

$$e^{j\omega t}(\underline{\underline{\tilde{K}}}\,\underline{v} - \omega^2\,\underline{v}\,\underline{\underline{I}}) = \underline{0}. \quad \text{Como } e^{j\omega t} \neq 0$$

$$\underline{\underline{\tilde{K}}}\,\underline{v} - \omega^2\,\underline{v}\,\underline{\underline{I}} = \underline{0}$$

$$\boxed{(\underline{\underline{\tilde{K}}} - \omega^2\,\underline{\underline{I}})\,\underline{v} = \underline{0}} \quad (07)$$

Similar ao problema de autovalor $(\underline{\underline{K}} - \omega^2\,\underline{\underline{M}}) = \underline{0}$

Chamando $\omega^2 = \lambda$ o problema se torna

$$\boxed{(\underline{\underline{\tilde{K}}} - \lambda \underline{\underline{I}})\underline{v} = \underline{0}} \quad (08)$$

, com λ sendo o autovalor que satisfaz a equação para um vetor $\underline{v}$ não-nulo.

Da Geom. Anal., dois vetores, $\underline{v}_1$ e $\underline{v}_2$, para serem ortogonais, necessitam satisfazer a equação

$$\boxed{\underline{v}_1 \cdot \underline{v}_2 = 0} \quad (09)$$

Sendo os mesmos ($\underline{v}_1$ e $\underline{v}_2$) autovetores do problema da eq. (08), pode-se normalizá-los, na condição de unitários:

$$\boxed{\|\underline{v}\| = \sqrt{v^T \cdot v} = \left[\sum_1^n v_i^2\right]^{1/2} = 1} \quad (10)$$

Um conjunto de vetores que satisfazem as equações (09) e (10) é chamado ortonormal.

Usa-se este artifício matemático para o desacoplamento das equações do movimento de sistemas não amortecidos de qualquer ordem, construindo-se para isto a matriz $\underline{\underline{P}}$, chamada matriz modal, composta dos autovetores:

$$\boxed{\underline{\underline{P}} = [\hat{\underline{v}}_1 \ \hat{\underline{v}}_2 \ \hat{\underline{v}}_3 \ \cdots \ \hat{\underline{v}}_m]} \quad (11)$$

, com m: nº de dof's e lembrando que $\hat{\underline{v}}_i = \dfrac{v_i}{\|v_i\|}$ são os unitários dos autovetores da eq. (08).

A matriz modal tem a propriedade ortogonal, ou seja

$$\boxed{P \cdot P^T = I} \quad (12)$$

Usa-se também a matriz modal ($\underline{\underline{P}}$) para a determinação da matriz espectral de $\underline{\underline{\tilde{K}}}$, identificada como $\underline{\underline{\Lambda}}$ e definida como

$$\boxed{\underline{\underline{\Lambda}} = \underline{\underline{P}}^T \underline{\underline{\tilde{K}}}\, \underline{\underline{P}} = \mathrm{diag}(\lambda_i)} \quad (13)$$

Vê-se que $\underline{\underline{\Lambda}}$ guarda, na sua diagonal, os autovalores de $\underline{\underline{\tilde{K}}} = \underline{\underline{M}}^{-1/2}\,\underline{\underline{K}}\,\underline{\underline{M}}^{-1/2}$, calculados pelo determinante de $(\underline{\underline{\tilde{K}}} - \lambda \underline{\underline{I}})$ da eq. (08).

A Análise Modal é o conjunto de procedimentos que visa aplicar uma transformação de coordenadas ($x(t)$ p/ $r(t)$), com o objetivo de desacoplar as equações p/ facilitar a solução de problemas de múltiplos gdl's.

Partindo da equação $\underline{\underline{M}}\,\underline{\ddot{x}} + \underline{\underline{K}}\,\underline{x} = \underline{0}$, sujeita às condições

$$X(0) = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ \vdots \\ x_n(0) \end{bmatrix} \quad e \quad \dot{X}(0) = V(0) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(0) \\ \dot{x}_2(0) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(0) \end{bmatrix},$$

aplica-se a transformação dada pela eq (03): $\underline{x} = \underline{\underline{M}}^{-1/2}\,\underline{q} \Rightarrow \underline{\ddot{x}} = \underline{\underline{M}}^{-1/2}\,\underline{\ddot{q}}$ na eq. dinâmica e:

$$\underline{\underline{M}}\,(\underline{\underline{M}}^{-1/2}\,\underline{\ddot{q}}) + \underline{\underline{K}}\,(\underline{\underline{M}}^{-1/2}\,\underline{q}) = \underline{0}.$$

Pré multiplicando por $M^{-1/2}$,

$$\underline{\underline{M}}^{-1/2}\,\underline{\underline{M}}\,\underline{\underline{M}}^{-1/2}\,\underline{\ddot{q}} + \underline{\underline{M}}^{-1/2}\,\underline{\underline{K}}\,\underline{\underline{M}}^{-1/2}\,\underline{q} = \underline{0}.$$

Como $\underline{\underline{M}}^{-1/2}\,\underline{\underline{M}}\,\underline{\underline{M}}^{-1/2} = \underline{\underline{I}}$ e $\underline{\underline{M}}^{-1/2}\,\underline{\underline{K}}\,\underline{\underline{M}}^{-1/2} = \underline{\underline{\tilde{K}}}$, a eq. se torna

$$\underline{\underline{I}}\,\underline{\ddot{q}} + \underline{\underline{\tilde{K}}}\,\underline{q} = \underline{0}$$

(já denominada eq (04)), sujeita

às condições $\boxed{\underline{q}_0 = \underline{\underline{M}}^{+1/2}\,\underline{x}_0}$ e $\boxed{\dot{\underline{q}}_0 = \underline{\underline{M}}^{+1/2}\,\dot{\underline{x}}_{(0)}}$ (pois $x = M^{-1/2} q \Leftrightarrow q = M^{+1/2} x$) (6)

eq (14) eq (15)

Para o desacoplamento, utiliza-se a matriz modal ($\underline{\underline{P}}$), na seguinte transformação:

$$\boxed{\underline{q}_{(t)} = \underline{\underline{P}} \cdot \underline{r}_{(t)}} \quad \text{eq (16)}, \quad \text{com } r_{(t)} = \begin{bmatrix} r_1(t) \\ r_2(t) \\ \vdots \\ r_m(t) \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \boxed{\underline{r}_{(t)} = \underline{\underline{P}}^T \underline{q}_{(t)}} \quad \text{eq (17)}$$

Subst. (16) em (04):

$$\underline{\underline{I}}\,\ddot{\underline{q}} + \underline{\underline{\tilde{K}}}\,\underline{q} = 0$$

$$\underline{\underline{I}}(\underline{\underline{P}}\,\ddot{\underline{r}}_{(t)}) + \underline{\underline{\tilde{K}}}(\underline{\underline{P}}\,\underline{r}_{(t)}) = \underline{0}$$ Pré multipl. por P^T,

$$\underline{\underline{P}}^T \underline{\underline{I}}\,\underline{\underline{P}}\,\ddot{\underline{r}}_{(t)} + \underline{\underline{P}}^T \underline{\underline{\tilde{K}}}\,\underline{\underline{P}}\,\underline{r}_{(t)} = \underline{0}$$

Como

$$\underline{\underline{P}}^T \cdot \underline{\underline{P}} = \underline{\underline{I}}$$ (vem da eq 12)

$$\underline{\underline{P}}^T \cdot \underline{\underline{\tilde{K}}} \cdot \underline{\underline{P}} = \Lambda$$ (da eq 13)

A equação acima se torna

$$\boxed{\underline{\underline{I}}\,\ddot{\underline{r}}_{(t)} + \underline{\underline{\Lambda}}\,\underline{r}_{(t)} = \underline{0}} \quad \text{eq (18)}$$, sujeita às condições

$$\boxed{\underline{r}_0 = \underline{\underline{P}}^T \underline{q}_0} \quad \text{(eq (19))} \quad \text{e} \quad \boxed{\dot{\underline{r}}_{(0)} = \underline{\underline{P}}^T \dot{\underline{q}}_{(0)}} \quad \text{(eq (20))}.$$

Lembrando que $\underline{\underline{\Lambda}} = \mathrm{diag}(\lambda_i)$ e que $\lambda_i = \omega_i^2$, pode-se reescrever a eq. (18) na forma matricial, e ela se tornará

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{r}_1(t) \\ \ddot{r}_2(t) \\ \vdots \\ \ddot{r}_m(t) \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \omega_2^2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & & \omega_m^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} r_1(t) \\ r_2(t) \\ \vdots \\ r_m(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

, o que nos dá as equações desacopladas:

$$\begin{cases} \ddot{r}_1(t) + \omega_1^2 r_1(t) = 0 \\ \ddot{r}_2(t) + \omega_2^2 r_2(t) = 0 \\ \vdots \\ \ddot{r}_m(t) + \omega_m^2 r_m(t) = 0 \end{cases}$$

, chamadas Equações Modais

cujas soluções são:

$$\begin{cases} r_1(t) = A_1 \operatorname{sen}(\omega_1 t + \phi_1) \\ r_2(t) = A_2 \operatorname{sen}(\omega_2 t + \phi_2) \\ \vdots \\ r_m(t) = A_m \operatorname{sen}(\omega_m t + \phi_m) \end{cases}$$

, sujeitas à aplicação das condições iniciais $\underline{r}_0$ e $\dot{\underline{r}}_0$ p/ det. de A_i e ϕ_i.

Expandindo, as eq. de A_i e ϕ_i ficam:

$$\boxed{A_i = \frac{\sqrt{\omega_i^2 r_{0_i}^2 + \dot{r}_{0_i}^2}}{\omega_i}} \quad (21) \quad ; \quad \boxed{\phi_i = \tan^{-1}\left(\frac{\omega_i r_{0_i}}{\dot{r}_{0_i}}\right)} \quad (22)$$

Conhecendo-se as soluções modais, aplicam-se as transformações inversas, trazendo-se novamente o problema p/ as coordenadas físicas. Ou seja,

se $\underline{x}(t) = \underline{\underline{M}}^{-1/2} \underline{q}(t)$ e $\underline{q}(t) = \underline{\underline{P}}\, \underline{r}(t) \Rightarrow \underline{X}(t) = \underline{\underline{M}}^{-1/2} \underline{\underline{P}}\, \underline{r}(t)$, sendo o produto $\underline{\underline{M}}^{-1/2} \underline{\underline{P}} = \underline{\underline{S}}$. Daí

$$\boxed{\underline{X}(t) = \underline{\underline{S}}\, \underline{r}(t)} \quad (23) \quad , \text{ c/ } \underline{\underline{S}} = \underline{\underline{M}}^{-1/2} \underline{\underline{P}}$$

Ou seja, p/ solução de um sistema não amortecido de 'm' graus de liberdade deve-se:

1- Calcular $M^{-1/2}$

2- Calcular $\underline{\underline{\tilde{K}}} = \underline{\underline{M}}^{-1/2} \underline{\underline{K}} \, \underline{\underline{M}}^{-1/2}$

3- De $(\underline{\underline{\tilde{K}}} - \lambda \underline{\underline{I}}) \underline{V} = \underline{0}$, obter os autovalores ($\omega_i^2 = \lambda_i$) e autovetores $\underline{V}$. Normalizar os autovetores, transformando-os em $\underline{\tilde{V}} = \dfrac{\underline{V}}{\|\underline{V}\|}$.

4- Calcular a matriz $\underline{\underline{S}} = \underline{\underline{M}}^{-1/2} \underline{\underline{P}}$, com $\underline{\underline{P}} = [\tilde{V}_1 \; \tilde{V}_2 \dots \tilde{V}_m]$. Calcular também $\underline{\underline{S}}^{-1} = \underline{\underline{P}}^T \underline{\underline{M}}^{1/2}$.

5- Calcular as condições iniciais modais

$\cdot \cancel{\underline{r}_0 = \underline{\underline{P}}^T \underline{q}_0} = \underline{\underline{P}}^T \underline{\underline{M}}^{1/2} \underline{x}_0 \Rightarrow \underline{r}_0 = \underline{\underline{S}}^{-1} \underline{x}_0$

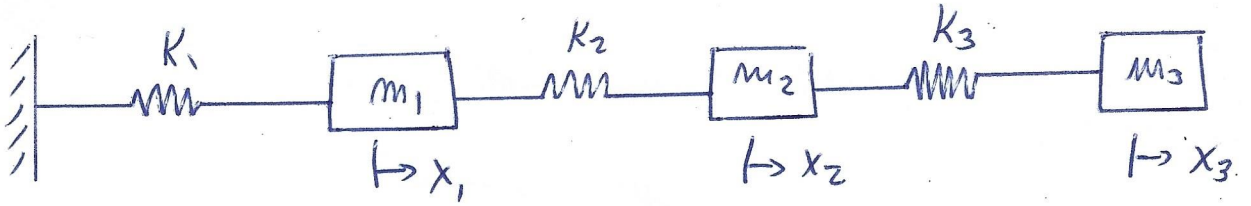
$\cdot \dot{\underline{r}}_0 = \underline{\underline{P}}^T \dot{\underline{q}}_0 = \underline{\underline{P}}^T \underline{\underline{M}}^{1/2} \dot{\underline{x}}_0 \Rightarrow \dot{\underline{r}}_0 = \underline{\underline{S}}^{-1} \dot{\underline{x}}_0$

6- Obter as soluções desacopladas, r_i, de acordo com as equações modais e as eq's (21) e (22), p/ A_i e Φ_i.

7- Retornar p/ o domínio físico, usando a transformação

$\underline{x}_{(t)} = \underline{\underline{S}} \, \underline{r}_{(t)}$.

Ex: Seja o sistema de 3 gdl's:



Sendo
- $m_1 = m_2 = m_3 = 4\,kg$
- $K_1 = K_2 = K_3 = 4\,N/m$
- $x_0 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$; $v_0 = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

, use a análise modal p/ encontrar a solução temporal do sistema.

<u>Solução</u>

De Lagrange $\Rightarrow$ $M = \begin{bmatrix}4&0&0\\0&4&0\\0&0&4\end{bmatrix} kg = 4\underline{\underline{I}}$; $K = \begin{bmatrix}8&-4&0\\-4&8&-4\\0&-4&4\end{bmatrix} N/m$

- $\underline{\underline{M}}^{-1/2} = \begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt4}&0&0\\0&\frac{1}{\sqrt4}&0\\0&0&\frac{1}{\sqrt4}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac12&0&0\\0&\frac12&0\\0&0&\frac12\end{bmatrix} = \frac12\underline{\underline{I}}$

- $\underline{\underline{\tilde K}} = \underline{\underline{M}}^{-1/2}\,\underline{\underline{K}}\,\underline{\underline{M}}^{-1/2} = \begin{bmatrix}\frac12&0&0\\0&\frac12&0\\0&0&\frac12\end{bmatrix}\begin{bmatrix}8&-4&0\\-4&8&-4\\0&-4&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac12&0&0\\0&\frac12&0\\0&0&\frac12\end{bmatrix} =$

$$= \frac12\underline{\underline{I}}\cdot\underline{\underline{K}}\cdot\frac12\underline{\underline{I}} = \frac14\underline{\underline{I}}\cdot\underline{\underline{K}} = \frac14\begin{bmatrix}8&-4&0\\-4&8&-4\\0&-4&4\end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{\tilde K}} = \begin{bmatrix}2&-1&0\\-1&2&-1\\0&-1&1\end{bmatrix}$$

- $(\underline{\underline{K}} - \lambda\underline{\underline{I}})\underline{v} = \underline{0}$

<u>Autoval</u>

$$\det\begin{pmatrix}2-\lambda&-1&0\\-1&2-\lambda&-1\\0&-1&1-\lambda\end{pmatrix} = 0 \Rightarrow (2-\lambda)(2-\lambda)(1-\lambda) - (2-\lambda) - (1-\lambda) = 0$$

$$-\lambda^3 + 5\lambda^2 - 6\lambda + 1 = 0$$

$\lambda_1 = 0{,}1981 \Rightarrow \omega_1 = \sqrt{\lambda_1} \Rightarrow$ $\boxed{\omega_1 = 0{,}4450\ rad/s}$

$\lambda_2 = 1{,}5550 \Rightarrow \omega_2 = \sqrt{\lambda_2} \Rightarrow$ $\boxed{\omega_2 = 1{,}2470\ rad/s}$

$\lambda_3 = 3{,}2470 \Rightarrow \omega_3 = \sqrt{\lambda_3} \Rightarrow$ $\boxed{\omega_3 = 1{,}8019\ rad/s}$

- Mantendo a ordem estabelecida em $\tilde{\underset{\approx}{K}}$ ao aplicar-se $EGV(\tilde{K})$:

$$\tilde{\underset{\approx}{K}} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow EGV(\tilde{K}) \Rightarrow \lambda = [1{,}5550 \quad 3{,}2470 \quad 0{,}1981]$$

$$\omega = [1{,}2470 \quad 1{,}8019 \quad 0{,}4450] \text{ rad/s}$$

$$V = \begin{bmatrix} 1 & -0{,}8019 & 0{,}4450 \\ 0{,}4450 & 1 & 0{,}8019 \\ -0{,}8019 & -0{,}4450 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \underset{\sim}{v_1} & \underset{\sim}{v_2} & \underset{\sim}{v_3} \end{array}$$

- Normalizando $\underset{\sim}{v_1}$, $\underset{\sim}{v_2}$ e $\underset{\sim}{v_3}$ em unitários, e remontando a matriz $\underset{\approx}{V}$, transformando-a em $\underset{\approx}{P}$, temos:

$$P = \begin{bmatrix} 0{,}7370 & -0{,}5910 & 0{,}3280 \\ 0{,}3280 & 0{,}7370 & 0{,}5910 \\ -0{,}5910 & -0{,}3280 & 0{,}7370 \end{bmatrix}.$$

- A matriz $S = M^{-1/2} \cdot P$ fica $\Rightarrow S = \begin{bmatrix} 0{,}3685 & -0{,}2955 & 0{,}1640 \\ 0{,}1640 & 0{,}3685 & 0{,}2955 \\ -0{,}2955 & 0{,}1640 & 0{,}3685 \end{bmatrix}$

- A matriz S^{-1} fica $\Rightarrow S^{-1} = \begin{bmatrix} 1{,}4740 & 0{,}6560 & -1{,}1820 \\ -1{,}1820 & 1{,}4740 & -0{,}6560 \\ 0{,}6560 & 1{,}1820 & 1{,}4740 \end{bmatrix}$

  ↳ $S^{-1} = P^T \cdot M^{1/2}$ ou a inversa da S

- Aplicando-se as transformações nas condições iniciais:

$$\underset{\sim}{r_0} = S^{-1} \cdot \underset{\sim}{x_0} = S^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \underset{\sim}{r_0} = \begin{pmatrix} 1{,}4740 \\ -1{,}1820 \\ 0{,}6560 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\sim}{\dot{r}_0} = S^{-1} \cdot \underset{\sim}{\dot{x}_0} = S^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \underset{\sim}{\dot{r}_0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- As soluções modais desacopladas ficam:

$$r_1(t) = A_1 \operatorname{sen}(\omega_1 t + \phi_1)$$

$$r_2(t) = A_2 \operatorname{sen}(\omega_2 t + \phi_2), \text{ com } A_i = \frac{\sqrt{\omega_i^2 r_{0i}^2 + \dot{r}_{0i}^2}}{\omega_i}; \quad \phi_i = \tan^{-1}\left(\frac{\omega_i r_{0i}}{\dot{r}_{0i}}\right)$$

$$r_3(t) = A_3 \operatorname{sen}(\omega_3 t + \phi_3)$$

Como $\dot{r}_{0i} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, quando se substitui em A_i, tem-se:

$$A_i = \frac{\sqrt{\omega_i^2 r_{0i}^2 + 0^2}}{\omega_i} = \frac{|\omega_i r_{0i}|}{\omega_i} = |r_{0i}| \cdot \text{ logo: } \begin{array}{l} A_1 = 1{,}4740 \\ A_2 = 1{,}1820 \\ A_3 = 0{,}6560 \end{array}$$

Da mesma forma, quando se substitui $\dot{r}_{0i}$ em ϕ_i, tem-se:

$$\phi_i = \tan^{-1}\left(\frac{\omega_i r_{0i}}{0}\right) \Rightarrow \phi_1 = \phi_2 = \phi_3 = \frac{\pi}{2}$$

Então $r_1 = 1{,}4740 \operatorname{sen}(1{,}2470t + \frac{\pi}{2}) \Rightarrow r_1 = 1{,}4740 \cos(1{,}2470t)$

$r_2 = 1{,}1820 \operatorname{sen}(1{,}8019t + \frac{\pi}{2}) \Rightarrow r_2 = 1{,}1820 \cos(1{,}8019t)$

$r_3 = 0{,}6560 \operatorname{sen}(0{,}4450t + \frac{\pi}{2}) \Rightarrow r_3 = 0{,}6560 \cos(0{,}4450t)$

Retornando ao domínio físico:

$$\underset{\sim}{x}(t) = \underset{\approx}{S}\, \underset{\sim}{r}(t) = \begin{bmatrix} 0{,}3685 & -0{,}2955 & 0{,}1640 \\ 0{,}1640 & 0{,}3685 & 0{,}2955 \\ -0{,}2955 & 0{,}1640 & 0{,}3685 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1{,}4740 \cos(1{,}2470t) \\ 1{,}1820 \cos(1{,}8019t) \\ 0{,}6560 \cos(0{,}4450t) \end{pmatrix}$$

$$\underset{\sim}{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}5431 \cos(1{,}2470t) - 0{,}3493 \cos(1{,}8019t) + 0{,}1076 \cos(0{,}4450t) \\ 0{,}2417 \cos(1{,}2470t) + 0{,}4356 \cos(1{,}8019t) + 0{,}1938 \cos(0{,}4450t) \\ -0{,}4356 \cos(1{,}2470t) + 0{,}1938 \cos(1{,}8019t) + 0{,}2417 \cos(0{,}4450t) \end{pmatrix}$$

Separando as eq's dos gdl's, e ordenando as frequências nat., temos:

$$\boxed{x_1(t) = 0{,}1076 \cos(0{,}4450t) + 0{,}5431 \cos(1{,}2470t) - 0{,}3493 \cos(1{,}8019t)}$$

$$\boxed{x_2(t) = 0{,}1938 \cos(0{,}4450t) + 0{,}2417 \cos(1{,}2470t) + 0{,}4356 \cos(1{,}8019t)}$$

$$\boxed{x_3(t) = 0{,}2417 \cos(0{,}4450t) - 0{,}4356 \cos(1{,}2470t) + 0{,}1938 \cos(1{,}8019t)}$$

Análise Modal em sistemas de 'n' gdl's, livres e com amortecimento viscoso.

Partindo do sistema amortecido de 1 gdl, cuja equação geral é $m\ddot{x}_{(t)} + c\dot{x}_{(t)} + k x_{(t)} = 0$, e com as transformações

$$\ddot{x}_{(t)} + \frac{c}{m}\dot{x}_{(t)} + \frac{k}{m}x_{(t)} = 0 \;;\; \frac{k}{m} = \omega^2 \;;\; \xi = \frac{c}{c_{cr}} = \frac{c}{2\sqrt{km}} = \frac{c}{2m\omega} \Rightarrow \frac{c}{m} = 2\xi\omega,$$

a equação se torna: $\ddot{x}_{(t)} + 2\xi\omega\dot{x}_{(t)} + \omega^2 x_{(t)} = 0$.

A Análise Modal trabalha o amortecimento viscoso de duas maneiras:

a) Para valores de ξ compreendidos entre 0 e 1 (experimentalmente $0 < \xi \leq 0{,}05$)

Considera-se o termo de dissipação de energia, por analogia com sistemas de 1 gdl, como $\boxed{2\xi_i\omega_i\dot{r}_{i(t)}}$ (eq. 01).

Daí, as equações modais desacopladas se tornam:

$$\boxed{\ddot{r}_{i(t)} + 2\xi_i\omega_i\dot{r}_{i(t)} + \omega_i^2 r_{i(t)} = 0} \quad \text{(eq. 02)}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Ainda pela mesma analogia, a solução terá a forma:

$$\boxed{r_{i(t)} = A_i e^{-\xi_i\omega_i t}\,\text{sen}(\omega_{d_i} t + \phi_i)} \quad \text{(eq. 03)}, \quad \boxed{\omega_{d_i} = \omega_i\sqrt{1-\xi_i^2}}$$

com

$$\boxed{A_i = \sqrt{\frac{(r_{0_i}\omega_{d_i})^2 + (\dot{r}_{0_i} + \xi_i\omega_i r_{0_i})^2}{\omega_{d_i}^2}}} \quad \text{(eq. 04)}; \quad \boxed{\phi_i = \tan^{-1}\left(\frac{r_{0_i}\omega_{d_i}}{\dot{r}_{0_i} + \xi_i\omega_i r_{0_i}}\right)} \quad \text{(eq. 05)}$$

5) Para quaisquer valores de ζ, desde que a matriz de amortecimento possa ser composta como uma combinação linear das matrizes massa e rigidez.

Ou seja, quando $\boxed{\underset{\approx}{C} = \alpha \underset{\approx}{M} + \beta \underset{\approx}{K}}$ (eq. 06) modela-se, → Amortecimento Proporcional.

diretamente de $\underset{\approx}{M}\,\ddot{\underset{\sim}{x}}_{(t)} + \underset{\approx}{C}\,\dot{x}_{(t)} + \underset{\approx}{K}\,x_{(t)} = \underset{\sim}{0}$.

Substituindo na eq. dinâmica:

$$\underset{\approx}{M}\,\ddot{\underset{\sim}{x}}_{(t)} + (\alpha \underset{\approx}{M} + \beta \underset{\approx}{K})\,\dot{x}_{(t)} + \underset{\approx}{K}\,\underset{\sim}{x}_{(t)} = \underset{\sim}{0}$$

Utilizando-se a transformação $\underset{\sim}{x} = \underset{\approx}{M}^{-1/2}\,\underset{\sim}{q}$, associada à multiplicação à esquerda por $\underset{\approx}{M}^{-1/2}$ nos leva a:

$$\boxed{\ddot{\underset{\sim}{q}}_{(t)} + (\alpha \underset{\approx}{I} + \beta \underset{\approx}{\tilde{K}})\,\dot{\underset{\sim}{q}}_{(t)} + \underset{\approx}{\tilde{K}}\,\underset{\sim}{q}_{(t)} = \underset{\sim}{0}}$$ (eq. 07), com

$$\underset{\approx}{\tilde{K}} = \underset{\approx}{M}^{-1/2}\,\underset{\approx}{K}\,\underset{\approx}{M}^{-1/2}.$$

Lembrando que $\underset{\sim}{q}_{(t)} = \underset{\approx}{P}\,\underset{\sim}{r}_{(t)}$ e multiplicando-se à esquerda por P^T, a eq. se torna:

$$\boxed{\ddot{\underset{\sim}{r}}_{(t)} + (\alpha \underset{\approx}{I} + \beta \underset{\approx}{\Lambda})\,\dot{\underset{\sim}{r}}_{(t)} + \underset{\approx}{\Lambda}\,\underset{\sim}{r}_{(t)} = \underset{\sim}{0}}$$ (eq. 08), com

$$\underset{\approx}{P} = [\hat{\underset{\sim}{v}}_1 \;\; \hat{\underset{\sim}{v}}_2 \cdots \hat{\underset{\sim}{v}}_n] \;;\; \underset{\approx}{\Lambda} = \underset{\approx}{P}^T\,\underset{\approx}{\hat{K}}\,\underset{\approx}{P} = \mathrm{diag}(\lambda_i)$$

Esta equação apresenta, por analogia, a mesma forma das 'n' equações desacopladas:

$$\boxed{\ddot{r}_{(t)} + 2\zeta_i \omega_i \dot{r}_{i(t)} + \omega_i^2 r_{i(t)} = 0}$$

Pela comparação do termo de amortecimento:

$$2\zeta_i \omega_i = \alpha \cdot \overset{I=1}{I} + \beta \lambda_i \quad \text{. Como } I=1 \text{ e } \lambda_i = \omega_i^2 :$$

$$\boxed{2\zeta_i \omega_i = \alpha + \beta \omega_i^2}$$

$$\Downarrow \qquad \text{(eq. 09)}$$

$$\boxed{\frac{\alpha}{2\omega_i} + \frac{\beta \omega_i}{2} = \zeta_i}$$

Neste caso, estima-se α e β de tal forma, pela eq. 09, a se chegar no valor de ζ_i. Daí, de acordo com a condição de amortecimento dado por ζ_i, obtém-se a solução para as equações modais desacopladas.

Para o caso sub-amortecido ($0 < \zeta < 1$), a solução da eq. modal tem a forma:

$$\boxed{r_{i(t)} = A_i \, e^{-\zeta_i \omega_i t} \, sen(\omega_{d_i} t + \phi_i)} \quad \text{(eq. 10)}$$

Desta solução, retorna-se, para ambos casos ((a) ou (b)), para o domínio físico usando-se a transformação

$$\boxed{\underset{\sim}{X}_{(t)} = \underset{\approx}{S} \, \underset{\sim}{r}_{(t)}} \quad , \text{ com } \boxed{\underset{\approx}{S} = \underset{\approx}{M}^{-1/2} \underset{\approx}{P}} .$$

Análise Modal da Resposta Forçada

Da equação do movimento $\underset{\approx}{M}\,\ddot{\underset{\sim}{x}}_{(t)} + \underset{\approx}{C}\,\dot{\underset{\sim}{x}}_{(t)} + \underset{\approx}{K}\,\underset{\sim}{x}_{(t)} = \underset{\sim}{F}_{(t)}$, com

$\underset{\sim}{F}_{(t)} = \begin{pmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \\ \vdots \\ F_m(t) \end{pmatrix}$, far-se-á a tentativa de encontrar uma transformação de coordenadas capaz de se transformar as equações físicas, acopladas, em 'n' equações desacopladas.

Para o caso forçado, existirá solução modal se o amortecimento for proporcional. Daí, aplicando a transformação $\underset{\sim}{x}_{(t)} = \underset{\approx}{M}^{-1/2}\,\underset{\sim}{q}_{(t)}$, com a multiplicação à esquerda de $M^{-1/2}$, a eq. da dinâmica se torna

$$\boxed{\underset{\approx}{I}\,\ddot{\underset{\sim}{q}}_{(t)} + \tilde{\underset{\approx}{C}}\,\dot{\underset{\sim}{q}}_{(t)} + \tilde{\underset{\approx}{K}}\,\underset{\sim}{q}_{(t)} = \underset{\approx}{M}^{-1/2}\,\underset{\sim}{F}_{(t)}} \quad \text{(eq. 01)}, \text{ com}$$

$$\boxed{\tilde{\underset{\approx}{C}} = \underset{\approx}{M}^{-1/2}\,\underset{\approx}{C}\,\underset{\approx}{M}^{-1/2}} \quad \text{(eq. 02)} \quad ; \quad \tilde{\underset{\approx}{K}} = \underset{\approx}{M}^{-1/2}\,\tilde{\underset{\approx}{K}}\,\underset{\approx}{M}^{-1/2}$$

Daí calculam-se os autovalores/autovetores do problema $(\tilde{\underset{\approx}{K}} - \lambda \underset{\approx}{I})\underset{\sim}{V} = \underset{\sim}{0}$, obtendo-se deles as matrizes $\underset{\approx}{P} = [\hat{\underset{\sim}{V}}_1\ \hat{\underset{\sim}{V}}_2 \cdots \hat{\underset{\sim}{V}}_n]$, $\underset{\approx}{S} = \underset{\approx}{M}^{-1/2}\,\underset{\approx}{P}$ e $\underset{\approx}{\Lambda} = \underset{\approx}{P}^T\,\tilde{\underset{\approx}{K}}\,\underset{\approx}{P}$. Existe a matriz $\underset{\approx}{P}^T\,\tilde{\underset{\approx}{C}}\,\underset{\approx}{P} = \mathrm{diag}[2\zeta_i\,\omega_i]$

Aplicando-se a transformação $\underset{\sim}{q}_{(t)} = \underset{\approx}{P}\,\underset{\sim}{r}_{(t)}$ e multiplicando-se à esquerda por P^T a eq. se transforma em:

$$\boxed{\ddot{\underset{\sim}{r}}_{(t)} + \mathrm{diag}[2\zeta_i\,\omega_i]\,\dot{\underset{\sim}{r}}_{(t)} + \underset{\approx}{\Lambda}\,\underset{\sim}{r}_{(t)} = \underset{\approx}{P}^T\,\underset{\approx}{M}^{-1/2}\,\underset{\sim}{F}_{(t)}} \quad \text{(eq. 03)}$$

$\hookrightarrow \mathrm{diag}[\lambda_i]$

$$\ddot{\underset{\sim}{r}} + \underset{\sim}{P}^T\,\tilde{\underset{\sim}{C}}\,\underset{\sim}{P}\,\dot{\underset{\sim}{r}} + \underset{\sim}{P}^T\,\tilde{\underset{\sim}{K}}\,\underset{\sim}{P}\,\underset{\sim}{r} = P^T M^{-1/2} F$$

O vetor $\underline{\underline{P}}^T \underline{\underline{M}}^{-1/2} \underset{\sim}{F}_{(t)} = \underset{\sim}{f}_{i(t)}$ possui, como significado, a combinação da aplicação de cada força externa, F_i, em cada elemento de massa.

Após aplicadas as transformações, as equações modais desacopladas se tornam:

$$\boxed{\ddot{r}_{i(t)} + 2\xi_i \omega_i \dot{r}_{i(t)} + \omega_i^2 r_{i(t)} = f_{i(t)}} \quad \text{(eq. 04)}$$

, cuja solução, para o caso sub-amortecido, tem a forma:

$$\boxed{r_{i(t)} = d_i e^{-\xi_i \omega_i t} \operatorname{sen}(\omega d_i t + \phi_i) + \frac{1}{\omega d_i} e^{-\xi_i \omega_i t} \int_0^t f_i(\tau) e^{\xi_i \omega_i \tau} \operatorname{sen}(\omega d_i (t-\tau)) d\tau}$$

(eq. 05)

com d_i e ϕ_i obtidos das condições iniciais.