PUC Minas

Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica

Dissertação de Mestrado

DESENVOLVIMENTO MATEMÁTICO E IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA DE UM MODELO TRIDIMENSIONAL PARA A DETERMINAÇÃO DAS RESPOSTAS DINÂMICAS DE UM VEÍCULO AUTOMOTOR

Lúcio Flávio Santos Patrício

Dissertação apresentada ao Departamento de Engenharia Mecânica da PUC Minas como parte dos requisitos para obtenção do título de MESTRE EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA MECÂNICA.

ORIENTADOR: Prof. Marcelo Becker, Dr.
CO-ORIENTADOR: Prof. Jánes Landre Jr., Dr.

Banca Examinadora:

Prof. Jánes Landre Jr., Dr. - PUC Minas, Presidente, Co-Orientador.
Eng. Ruimark Creazzola Silveira, Dr. - PSA Peugeot Citroën do Brasil, Examinador Externo.
Prof. Clovis Sperb de Barcellos, PhD. - PUC Minas, Examinador Interno.

Belo Horizonte, 19 de novembro de 2005.

Agradecimentos

- A Deus, fonte de inspiração e consolo nos momentos difíceis;
- À PUC-Minas, responsável pela minha formação nos últimos 08 anos, e à CAPES, pelo fomento em minha pesquisa;
- Ao prof. Marcelo Becker, pelos conselhos, amizade e orientações dadas nestes últimos anos de convivência;
- Ao prof. Clovis Barcellos, intelectualidade modelo para todos os que com ele convivem;
- Ao prof. Jánes Landre, mestre e amigo, com quem aprendi que “a Engenharia é a arte de executar o simples”;
- A meus pais, irmãos e familiares, incentivo e confiança constante. Vocês ainda me fazem acreditar que é a Educação o instrumento pelo qual seremos cidadãos de fato;
- À Cris, luz e energia sem a qual este trabalho não teria sido nem um fractal do que é, minha eterna gratidão;
- À amiga Ana Paula Lamounier, que trilhou antes de mim o caminho do mestrado e quem muito me ajudou na fase de pesquisa de Referências Bibliográficas;
- Aos colegas de mestrado, pelo saudável convívio. Em especial a Leonardo Saturnino, que desenvolveu o alicerce da obra sobre a qual hoje entrego mais uma etapa e a André Fioravante, que tanto me ajudou, pacientemente, a trilhar caminhos menos árduos na implementação numérica deste trabalho;
- À Valéria, amiga, ombro e ouvidos, meu carinho e agradecimento;
- Aos meus fiéis amigos, que por mim torceram sempre, sintam-se co-autores desta dissertação.

Resumo

Este trabalho disserta sobre o desenvolvimento de um modelo veicular tridimensional de 7 graus de liberdade e, através da sua implementação numérica, a criação de uma ferramenta computacional capaz de auxiliar o projetista na tomada de decisões diversas numa etapa de pré-projeto. Sua principal característica dinâmica é permitir os deslocamentos de corpo rígido da carroceria, nos modos de *bounce*, *roll* e *pitch*, além do movimento das rodas, conectadas entre si por barras estabilizadoras. Criou-se uma interface de entrada de dados geométricos, estruturais e de inércia para facilitar a etapa de simulação. Foi escolhido como *software* de aplicação o MATLAB®, por suas diversas funcionalidades, não tendo sido fonte de interesse o maior tempo de processamento da informação. Uma vez obtidas as respostas do modelo partiu-se para a sua análise e validação, com testes em condições específicas. O modelo respondeu bem ao propósito para o qual foi desenvolvido, tendo se tornado interessante fonte para o desenvolvimento de trabalhos futuros visando ao seu aprimoramento.

Abstract

The present work dissertates about the development of a 7-degree-of-freedom three-dimensional vehicular model and, through numerical implementation, the implementation of a computational tool able to help the designer at an initial stage of a project. The main dynamic characteristic is to allow the displacement of the chassis rigid body in bounce, roll and pitch modes, besides the movement of the sway-bar-connected wheels. An input interface was created for geometrical, structural and inertial data, in such away as to facilitate the simulation stage. The MathWorks MATLAB® software was chosen based on its functionalities and the simulation time wasn't taken into account for this application. Once dynamical responses were obtained in simulation, analysis and model validation were started, with tests in specific conditions. This model provided good answers to the applications and purposes developed. Since it is an open platform, it can be used in future works as an improvement source.

SUMÁRIO

Lista de figuras.....iv

Lista de tabelas.....viii

Nomenclatura.....ix

Capítulo 1 – INTRODUÇÃO.....1

1.1 – Objetivo geral.....2

1.2 – Objetivos específicos.....2

1.3 – Escopo da dissertação.....3

Capítulo 2 – REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....4

2.1 – Dinâmica veicular – ambientação.....4

2.2 – *Ride*.....6

2.2.1– Fontes de excitação.....7

2.2.1.1 – Vibrações relacionadas às irregularidades de pista.....7

2.2.1.2 – Vibrações relacionadas às fontes embarcadas.....10

2.2.1.3 – Conjunto pneu/roda.....11

2.2.1.4 – Conjunto de direção.....11

2.2.1.5 – Motor.....14

2.2.2 – Obtenção dos parâmetros de *ride*.....15

2.3 – *Handling*.....18

2.3.1 – *Handling* em estado permanente.....19

2.3.1.1 – Parâmetros.....20

2.3.1.2 – Gráficos de *Handling*.....21

2.4 – Suspensão.....43

2.4.1 – Suspensões de eixo rígido.....48

2.4.2 – Suspensões independentes.....**50**

2.4.2.1 – Suspensão independente tipo braços oscilantes.....**51**

2.4.2.2 – Suspensão independente tipo *Semi-Trailing Arm*.....**53**

2.4.2.3 – Suspensão independente tipo SLA *ou Double Wishbone*.....**54**

2.4.2.4 – Suspensão independente tipo MacPherson.....**55**

2.4.2.5 – Suspensão independente tipo *Multi-Link*.....**57**

2.4.2.6 – Suspensão semi-independente com barra de torção...**57**

2.4.3 – Algumas considerações sobre características da suspensão.....**60**

2.5 – Considerações sobre modelos veiculares.....**62**

Capítulo 3 – METODOLOGIA NUMÉRICA.....**66**

3.1 – Modelo veicular tridimensional.....**66**

3.2 – Justificativa e descrição do modelo utilizado.....**68**

3.2.1 – Desenvolvimento matemático do modelo.....**69**

3.2.2 – Implementação numérica.....**79**

3.2.3 – Validação do modelo.....**80**

Capítulo 4 – APRESENTAÇÃO E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS.....**86**

4.1 – Algumas considerações matemáticas do modelo.....**86**

4.2 – Análise da resposta dinâmica calculada pela ferramenta computacional.....**87**

4.2.1 – Análise do problema de auto-valores e auto-vetores.....**87**

4.2.2 – Caracterização da pista.....**91**

4.2.3 – Resposta dinâmica do veículo para diferentes condições de pista.....**95**

4.2.4 – Resposta dinâmica do veículo para diferentes velocidades de pista.....**108**

4.2.5 – Resposta dinâmica do veículo para diferentes amortecimentos.....**112**

4.2.6 – Análise do comportamento das barras de torção para diferentes condições de rigidez.....**116**

4.2.7 – Análise do comportamento do veículo para diferentes condições de rigidez das barras de torção.....**118**

Capítulo 5 – CONCLUSÕES.....**124**

5.1 - Sugestões para trabalhos futuros.....**125**

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....**127**

APÊNDICE A - DETALHAMENTO DO MODELO VEICULAR TRIDIMENSIONAL.....**130**

Lista de figuras

Figura 1 – Triciclo de Cugnot..... 01

Figura 2 – Sistema de eixos – SAE..... 04

Figura 3 – Sistema de eixos – ISO 4130 e DIN 70000..... 05

Figura 4 – O fenômeno de *ride*..... 06

Figura 5 – Função PSD (*Power Spectral Density*) para dois tipos de pavimento..... 08

Figura 6 – PSD`s de irregularidade de pista para elevação, deslocamento vertical e aceleração..... 10

Figura 7 – Principais componentes embarcados que são fonte de vibrações de *ride*..... 11

Figura 8 – Reações de torque em virtude de momentos secundários..... 12

Figura 9 – Mapa espectral das vibrações embarcadas em um veículo..... 13

Figura 10 – Movimentos possíveis do motor..... 15

Figura 11 – Freqüência natural não amortecida de ride X deflexão estática da roda..... 16

Figura 12 – *Bicycle vehicle model*..... 22

Figura 13 – Características de *handling* – pneu e veículo..... 23

Figura 14 – Os ângulos α e δ..... 24

Figura 15 – Gráfico característico de um teste de *handling*..... 25

Figura 16 – Variação linear do *handling* em relação a δ..... 26

Figura 17 – Ângulo de sub-esterço como função de V e A..... 29

Figura 18 – Teste para o Método dos Momentos..... 33

Figura 19 – Equipamento de testes – Método dos Momentos..... 34

Figura 20 – Diagrama C_N-C_Y..... 36

Figura 21 – Condições de teste para obtenção do diagrama do Método dos Momentos..... 37

Figura 22 – Diagrama do Método dos Momentos em quatro quadrantes..... 41

Figura 23 – *Obéissante* (Obediente) de Amedée Bollée..... 44

Figura 24 – Sistema de suspensão esquemático..... 47

Figura 25 – Isolamento da aceleração gerada por um perfil em um modelo *quarter-car*..... 48

Figura 26 – Sistema de suspensão traseira *Four Link*..... 49

Figura 27 – Sistema de suspensão traseira *Hotchkiss*..... 50

Figura 28 – Sistema de suspensão traseira De Dion..... 50

Figura 29 – Variação do centro de rolagem (RC) e do centro instantâneo de rotação (IC), sem movimento do chassi (em (a)) e com movimento deste (em (b))..... 51

Figura 30 – Sistema de suspensão independente do tipo braços oscilantes..... 52

Figura 31 – Sistema de suspensão independente do tipo braços oscilantes – vista superior..... 52

Figura 32 – Sistema de suspensão independente do tipo *Semi-Trailing-Arm* – vista superior..... 53

Figura 33 – Suspensão independente do tipo *Double Wishbone*, dianteiro (esquerda) e traseiro (direita)..... 54

Figura 34 – Controle do centro de rolagem pela variação de posição dos braços na suspensão *Double Wishbone*..... 55

Figura 35 – Suspensão independente do tipo MacPherson..... 56

Figura 36 – Suspensão independente do tipo *Multi-link*..... 57

Figura 37 – Atuação da barra estabilizadora ou barra de torção..... 58

Figura 38-a – Sistema de suspensão dianteira semi-independente MacPherson com barra estabilizadora..... 59

Figura 38-b – Sistema de suspensão traseira semi-independente com perfil de torção..... 59

Figura 39 – Dinâmica da plataforma de um veículo de carga – modelo 3D.. 63

Figura 40 – Estrutura de um modelo veicular..... 63

Figura 41 – Modelo tridimensional de um veículo..... 65

Figura 42 – Direções e grandezas adotadas..... 67

Figura 43 – Sistemas locais de coordenadas..... 67

Figura 44 – Metodologia do presente trabalho..... 69

Figura 45 – Detalhamento da Metodologia proposta..... 69

Figura 46 – Representação esquemática do modelo tridimensional do veículo a ser implementado no MDV..... 70

Figura 47 – Modelo de pista (sem defasagem)..... 78

Figura 48 – Modelo de pista (com defasagem)..... 78

Figura 49 – Janela de entrada de dados - Pneus/Rodas..... 81

Figura 50 – Janela de entrada de dados - Suspensão..... 82

Figura 51 – Janela de entrada de dados - Chassis..... 83

Figura 52 – Janela de entrada de dados - Pista..... 84

Figura 53 – Modelo de pista e respectiva FFT (sem defasagem)..... 92

Figura 54 – Modelo de pista e respectiva FFT (com defasagem)..... 93

Figura 55 – Deslocamento do cubo da roda e FFT (piso *pavé* sem defasagem)..... 95

Figura 56 – Deslocamento do cubo da roda e FFT (piso *pavé* com defasagem)..... 96

Figura 57 – Deslocamento do ataque da suspensão (piso *pavé* sem defasagem)..... 97

Figura 58 – Deslocamento do ataque da suspensão e sua FFT (piso *pavé* com defasagem)..... 98

Figura 59 – Influência da excitação da pista sobre a suspensão..... 99

Figura 60 – Influência da excitação da pista sobre a roda, suspensão e *bounce* (simulação completa e detalhe) - sem defasagem..... 100

Figura 61 – Influência da excitação da pista sobre a roda, suspensão e *bounce* (simulação completa e detalhe) - com defasagem..... 101

Figura 62 – Influência da excitação da pista sobre a roda, suspensão e *roll* - sem defasagem..... 102

Figura 63 – Influência da excitação da pista sobre a roda, suspensão e *roll* - com defasagem..... 103

Figura 64 – Influência da excitação da pista sobre a roda, suspensão e *pitch* - sem defasagem..... 104

Figura 65 – Influência da excitação da pista sobre a roda, suspensão e *pitch* - sem defasagem (detalhe do deslocamento da roda)..... 105

Figura 66 – Detalhe do deslocamento do ataque da suspensão na medida de sua influência sobre o *pitch*, *roll* e *bounce* - sem defasagem..... 106

Figura 67 – Detalhe do deslocamento do ataque da suspensão na medida de sua influência sobre o *pitch*, *roll* e *bounce* - com defasagem..... 107

Figura 68 – Influência do deslocamento da roda sobre a suspensão (simulação completa, detalhe e FFT) - com defasagem..... 108

Figura 69 – Deslocamento do ataque da suspensão para diferentes velocidades e sua influência sobre o *bounce*..... 111

Figura 70 – *Pitch*, *roll* e *bounce* para diferentes amortecimentos..... 112

Figura 71 – Pista, roda e suspensão para diferentes amortecimentos..... 113

Figura 72 – Roda e suspensão para amortecimento c = 0Kg/s..... 114

Figura 73 – Roda, suspensão e braço da barra estabilizadora para $c = 0{,}8.c_{cr}$..... 115

Figura 74 – Roda, suspensão e braço da barra estabilizadora para $c = c_{cr}$... 115

Figura 75 – Ângulo do braço da barra de torção para diferentes amortecimentos..... 116

Figura 76 – Ângulo da barra de torção dianteira e traseira..... 117

Figura 77 – Influência da excitação da pista sobre a roda e suspensão sobre variação da rigidez da barra estabilizadora..... 118

Figura 78 – Comparação entre o sinal da pista, roda e suspensão para variação de rigidez da barra estabilizadora..... 120

Figura 79 – Comparação entre *pitch*, *roll* e *bounce* para variação de rigidez da barra estabilizadora..... 122

Lista de tabelas

Tabela 1 – Grandezas de influência em N_U..... 32

Tabela 2 – Dados do modelo para $\beta = 0$, $\delta \neq 0$..... 38

Tabela 3 – Dados do modelo para $\delta = 0$, $\beta \neq 0$..... 38

Tabela 4 – Dados do modelo para $\alpha = 0$, $\beta \neq 0$..... 39

Tabela 5 – Principais freqüências e modos associados..... 90

Nomenclatura

a	Aceleração longitudinal (m/s^2)
a	Distância do CG à roda dianteira (m)
A	Aceleração lateral ou longitudinal (m/s^2)
A_f	Aceleração lateral da roda dianteira (m/s^2)
A_r	Aceleração lateral da roda traseira (m/s^2)
b	Distância do CG à roda traseira (m)
c	Coeficiente de amortecimento (kg/s)
C	Constante de proporcionalidade ($graus/m.s^{-2}$)
[C]	Matriz amortecimento (kg/s)
C_1	Constante de proporcionalidade (rad)
C_2	Constante de proporcionalidade (graus/g)
C_α	Coeficiente de rigidez lateral do pneu (adimensional)
$C_{\alpha f} = C_F$	Coeficiente de rigidez do pneu dianteiro (adimensional)
$C_{\alpha r} = C_R$	Coeficiente de rigidez do pneu traseiro (adimensional)
C_N	Coeficiente do momento de *yaw* (em torno do eixo **z**) (adimensional)
c_{cr}	Coeficiente de amortecimento crítico (kg/s)
C_{sdd}	Coeficiente de amortecimento da suspensão dianteira direita (kg/s)
C_{sde}	Coeficiente de amortecimento da suspensão dianteira esquerda (kg/s)
C_{std}	Coeficiente de amortecimento da suspensão traseira direita (kg/s)
C_{ste}	Coeficiente de amortecimento da suspensão traseira esquerda (kg/s)

C_Y	Coeficiente da força lateral (adimensional)
e_v	Fator de transferência de carga (adimensional)
e_{Vr}	Parcela do fator de transferência de carga referente ao eixo traseiro (adimensional)
F	Força resultante (N)
{F} = {f}	Vetor força (N)
$[f_o]$	Matriz das freqüências naturais ordenadas (Hz)
F_T	Força transferida (N)
F_{V0}	Força vertical inicial (N)
F_y	Força lateral (N)
F_V	Força vertical (N)
F_{yf}	Força lateral no eixo dianteiro (N)
F_{yr}	Força lateral no eixo traseiro (N)
F_z	Força normal do pneu (N)
g	Aceleração da gravidade (m/s^2)
G	Módulo de rigidez ao cisalhamento (N/m^2)
G_A	Ganho de aceleração lateral (s^{-2}/rad)
G_0	Parâmetro da magnitude da irregularidade (ciclo x m)
$G_Z(\upsilon)$	Amplitude da PSD (m^2/ciclo/m)
G_ρ	Ganho de curvatura (m^{-1})
G_ω	Ganho de velocidade de *yaw* (s^{-1})

I	Momento de inércia de área (m^4)
$\mathcal{I}$	Corrente de *feedback* (A)
J	Momento de inércia de massa (kg x m^2)
J_p	Momento de inércia polar (m^4)
J_ϕ	Inércia em relação ao eixo de rolagem da carroceria (kg x m^2)
J_θ	Inércia em relação ao eixo de mergulho da carroceria (kg x m^2)
k_K	Gradiente do ângulo de esterçamento cinemático (rad/m.s^{-2})
k_U	Gradiente (coeficiente) de sub-esterço (rad/m.s^{-2})
K	Rigidez (N/m)
$[K]$	Matriz rigidez (N/m)
$\overline{K}_{btd}$	Rigidez à torção da barra estabilizadora dianteira (Nm^2/rad)
$\overline{K}_{btt}$	Rigidez à torção da barra estabilizadora traseira (Nm^2/rad)
K_{pdd}	Rigidez do pneu dianteiro direito (N/m)
K_{pde}	Rigidez do pneu dianteiro esquerdo (N/m)
K_{ptd}	Rigidez do pneu traseiro direito (N/m)
K_{pte}	Rigidez do pneu traseiro esquerdo (N/m)
K_{sdd}	Rigidez da suspensão dianteira direita (N/m)
K_{sde}	Rigidez da suspensão dianteira esquerda (N/m)
K_{std}	Rigidez da suspensão traseira direita (N/m)
K_{ste}	Rigidez da suspensão traseira esquerda (N/m)
l_a	Distância do CG à face anterior da carroceria (m)

l_b	Distância do CG à face posterior da carroceria (m)
l_c	Distância do ponto de interseção da linha de ação do CG à lateral esquerda da carroceria - face anterior (m)
l_d	Distância do ponto de interseção da linha de ação do CG à lateral direita da carroceria - face anterior (m)
l_e	Distância do ponto de interseção da linha de ação do CG à lateral esquerda da carroceria - face posterior (m)
l_f	Distância do ponto de interseção da linha de ação do CG à lateral direita da carroceria - face posterior (m)
l_g	Distância do ponto de interseção da linha de ação do CG à lateral esquerda da carroceria (m)
l_h	Distância do ponto de interseção da linha de ação do CG à lateral direita da carroceria (m)
l_i	Comprimento do braço de torção da barra estabilizadora dianteira (m)
l_j	Comprimento do braço de torção da barra estabilizadora traseira (m)
l_k	Distância da roda ao ponto de fixação da porção esquerda da barra estabilizadora dianteira (m)
l_m	Distância da roda ao ponto de fixação da porção esquerda da barra estabilizadora traseira (m)
l_n	Distância do ponto de fixação da porção esquerda da barra estabilizadora dianteira ao seu centro geométrico (m)
l_o	Distância do ponto de fixação da porção direita da barra estabilizadora dianteira ao seu centro geométrico (m)
l_p	Distância do ponto de fixação da porção esquerda da barra estabilizadora traseira ao seu centro geométrico (m)

l_q	Distância do ponto de fixação da porção direita da barra estabilizadora traseira ao seu centro geométrico (m)
l_r	Distância da roda ao ponto de fixação da porção direita da barra estabilizadora dianteira (m)
l_s	Distância da roda ao ponto de fixação da porção direita da barra estabilizadora traseira (m)
$L = l$	Distância entre eixos (m)
$L_{travessa}$	Comprimento da travessa, medido longitudinalmente (m)
m_f	Massa projetada sobre o eixo dianteiro (kg)
m_r	Massa projetada sobre o eixo traseiro (kg)
m_{rdd}	Massa da roda dianteira direita (kg)
m_{rde}	Massa da roda dianteira esquerda (kg)
m_{rtd}	Massa da roda traseira direita (kg)
m_{rte}	Massa da roda traseira esquerda (kg)
M	Momento resultante (N x m)
[M]	Matriz massa (kg)
p	Variação de *Roll* (*Roll rate*) (graus/ms^{-2})
P	Valor típico (adimensional)
r	Variação de *Yaw* (*Yaw rate*) (graus/ms^{-2})
r	Distância entre o eixo de fixação da barra estabilizadora e a roda (m)
R	Raio da curva (m)
T	Período de oscilação (s)

u	Velocidade longitudinal (m/s)
V	Velocidade da pista ou do veículo (m/s)
$[V]$	Matriz dos auto-vetores
$[V_o]$	Matriz dos auto-vetores ordenados
y_{pd}	Deslocamento vertical da pista em relação ao ponto de contato do pneu dianteiro com o solo (m)
y_{pt}	Deslocamento vertical da pista em relação ao ponto de contato do pneu traseiro com o solo (m)
y_{rd}	Deslocamento vertical da roda dianteira em relação à suspensão (m)
y_{rt}	Deslocamento vertical da roda traseira em relação à suspensão (m)
y_{sd}	Deslocamento vertical do ataque da suspensão dianteira em relação ao seu ponto de fixação à carroceria (m)
y_{st}	Deslocamento vertical do ataque da suspensão traseira em relação ao seu ponto de fixação à carroceria (m)
y_v	Deslocamento vertical da carroceria (m)
$\{y\}$	Vetor deslocamento (m)
$\{\dot{y}\}$	Vetor velocidade (m/s)
$\{\ddot{y}\}$	Vetor aceleração (m/s^2)
W	Força peso (N)
$\{Z\}$	Vetor deslocamento (m)
$\{\dot{Z}\}$	Vetor velocidade (m/s)
$\{\ddot{Z}\}$	Vetor aceleração (m/s^2)

Z_{btd}	Deslocamento vertical da barra de torção (ou barra estabilizadora) dianteira (m)
Z_{btt}	Deslocamento vertical da barra de torção (ou barra estabilizadora) traseira (m)
Z_{rdd}	Deslocamento vertical da roda dianteira direita (m)
Z_{rde}	Deslocamento vertical da roda dianteira esquerda (m)
Z_{rtd}	Deslocamento vertical da roda traseira direita (m)
Z_{rte}	Deslocamento vertical da roda traseira esquerda (m)
Z_{sdd}	Deslocamento vertical do ataque da suspensão dianteira direita (m)
Z_{sde}	Deslocamento vertical do ataque da suspensão dianteira esquerda (m)
Z_{std}	Deslocamento vertical do ataque da suspensão traseira direita (m)
Z_{ste}	Deslocamento vertical do ataque da suspensão traseira esquerda (m)
Z_v	Deslocamento vertical do CG (m)
α_f	Ângulo de escorregamento do pneu dianteiro (rad)
α_r	Ângulo de escorregamento do pneu traseiro (rad)
α_F	Ângulo de esterçamento da roda dianteira (rad)
α_R	Ângulo de esterçamento da roda traseira (rad)
$\beta = s$	Ângulo de escorregamento lateral ou desvio do veículo (*slip-angle*) (rad)
$\delta = \delta_{ref}$	Ângulo de esterçamento ou de Ackerman (rad)
δ_0	Ângulo de esterçamento da roda interna.
$\delta_f = \delta_F$	Ângulo de esterçamento da roda dianteira.
δ_i	Ângulo de esterçamento da roda externa.

δ_K	Ângulo de esterçamento cinemático.
δ_{Kf}	Parcela do ângulo de esterçamento cinemático relativa ao eixo dianteiro.
δ_{Kr}	Parcela do ângulo de esterçamento cinemático relativa ao eixo traseiro.
$\delta_r = \delta_R$	Ângulo de esterçamento da roda traseira.
δ_U	Ângulo de esterçamento dinâmico ou de sub-esterço.
Δt	Incremento ou intervalo de tempo (s)
$\Delta\alpha_r$	Variação no ângulo de escorregamento lateral do pneu traseiro (rad)
$\Delta\beta$	Variação no ângulo de escorregamento lateral do veículo (rad)
ε	Sinal de *set-point* para os atuadores elétricos (adimensional)
ϕ	Ângulo de *roll* (rad)
$[\lambda^2]$	Matriz dos auto-valores
$[\lambda_o^2]$	Matriz dos auto-valores ordenados
υ_0	Freqüência espacial (ciclo/m)
υ	Freqüência espacial (ciclo/m)
ρ	Raio de curvatura (1/m)
θ	Ângulo de *pitch* (rad)
θ	Posição do pedal de acelerador (graus)
θ_{dd}	Ângulo de *pitch* do braço direito da barra de torção dianteira (rad)
θ_{de}	Ângulo de *pitch* do braço esquerdo da barra de torção dianteira (rad)
$\theta_{resultd}$	Ângulo de *pitch* resultante da barra de torção dianteira (rad)

$\theta_{resultt}$	Ângulo de *pitch* resultante da barra de torção traseira (rad)
θ_{td}	Ângulo de *pitch* do braço direito da barra de torção traseira (rad)
θ_{te}	Ângulo de *pitch* do braço esquerdo da barra de torção traseira (rad)
ω	Freqüência angular (rad/s)
$[\omega]$	Matriz das freqüências naturais ordenadas (rad/s)
SAE	*Society of Automotive Engineering*
ISO	*International Organization for Standardization*
DIN	*Deutsches Institut für Normung*
CG	Centro de Gravidade
gdl	Grau de liberdade
PSD	*Power Spectral Density*
PCC	*Portland Cement Concrete*

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

Desde o surgimento dos veículos a motor, com o triciclo de Nicholas Joseph Cugnot em 1769, houve a necessidade do entendimento não apenas do funcionamento da máquina térmica e mecânica em si, mas também das suas características construtivas e de desempenho, a fim de estabelecer quais os parâmetros norteariam a pesquisa do seu aprimoramento. À medida deste, houveram também novos parâmetros a serem levados em conta, principalmente aqueles relativos aos esforços e acelerações, pois o aumento de potência disponível aumentou a ordem de grandeza das velocidades atingidas por estes veículos. A Figura 1 mostra o triciclo de Cugnot, marco histórico da indústria automotiva mundial.

Figura 1 – Triciclo de Cugnot [Gillespie, T. D., 1992, *Fundamentals of Vehicle Dynamics*, pág.02].

A primeira tentativa no estudo da dinâmica veicular é sempre de se fazer uso de um equacionamento que forneça soluções analíticas para o comportamento do veículo, pois uma vez de posse de uma equação que descreva o movimento, o projetista é capaz de prever o comportamento dinâmico do objeto de estudo em outras situações, reduzindo a quantidade de testes. Não é propósito deste trabalho a discussão da necessidade ou não de testes, pois mesmo com o avanço da indústria automotiva e dos *softwares* de simulação numérica ainda não foi possível implementar modelos que possam reproduzir com total fidelidade o desempenho de um veículo.

1.1- Objetivo geral

O presente trabalho tem como objetivo principal o desenvolvimento de um modelo veicular tridimensional desacoplado de 7 graus de liberdade e sua aplicação na verificação da influência de um sistema de suspensão semi-rígido no comportamento dinâmico de um veículo automotor.

1.2- Objetivos Específicos

- Apresentar o desenvolvimento de uma ferramenta computacional capaz de fornecer a resposta dinâmica de um veículo, conhecidos os seus parâmetros construtivos, com a finalidade de reduzir a fase de testes experimentais bem como se apresentar como uma ferramenta de projeto e otimização de componentes veiculares, principalmente os relacionados ao sistema de suspensão, como forma de aprimorar os estudos desenvolvidos por Saturnino (2004);
- Analisar a influência da interação entre o sistema de suspensão com a atuação das barras estabilizadoras (ou barras de torção) dianteira e traseira. Além de inserir os graus de liberdades inerentes a este componente, criar a partir daí a possibilidade de verificar a influência da variação da rigidez das barras no comportamento dinâmico do veículo;
- Obter um modelo que seja capaz de informar ao projetista, mesmo que em caráter qualitativo, sobre o comportamento de um veículo em *ride comfort* e *handling* uma vez alteradas suas características geométricas, de inércia e estruturais;

- Uma vez tendo sido desenvolvida uma ferramenta computacional, esta permite a avaliação de um modelo de veículo em sua fase de concepção, ou seja, esta ferramenta pode se tornar um elemento complementar na etapa de pré-projeto, fornecendo respostas dinâmicas em ordem de grandeza coerente, a fim de diminuir, ou pelo menos orientar, uma posterior jornada de testes práticos.

1.3- Escopo da dissertação

Esta proposta de dissertação está distribuída, em relação aos seus Capítulos, da seguinte forma:

- Capítulo 2: Revisão Bibliográfica, contendo o embasamento teórico dos assuntos referentes à dinâmica veicular, *ride*, *cornering*, *handling*, suspensão e considerações sobre modelos veiculares;
- Capítulo 3: Metodologia Numérica, onde é apresentada a descrição do modelo proposto, a apresentação dos resultados a serem obtidos e os testes a serem efetuados para a validação do mesmo;
- Capítulo 4: Discussão dos Resultados, com a análise de alguns pontos importantes percebidos no desenvolvimento matemático e nas respostas obtidas computacionalmente pelo modelo proposto neste trabalho;
- Capítulo 5: Conclusões e sugestões para trabalhos futuros;
- Referências Bibliográficas;
- Apêndice A - Detalhamento do modelo veicular tridimensional;

Capítulo 2

REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

2.1- Dinâmica veicular – ambientação

O comportamento dinâmico do veículo é determinado pelas forças de contato do pneu com o solo, bem como pela influência de sua inércia e aerodinâmica. É importante saber separar qual é a fonte do esforço para se identificar a correta resposta dinâmica à solicitação, bem como o correto ponto de sua aplicação. Se a mesma ocorre na parte superior (habitáculo, chassis), diz-se que a ocorrência foi na massa suspensa do automóvel. Caso sejam esforços provenientes ou aplicados no conjunto pneu/roda, suspensão, caixa de marchas, diferencial, significa que estes aconteceram na massa não-suspensa do veículo. Dependendo da aplicação, pode-se considerar o veículo e seus movimentos como os de uma massa concentrada, com os devidos momentos de inércia transladados para o Centro de Gravidade (CG), desde que ele seja considerado um corpo rígido. O sistema de eixos utilizado pela SAE para a identificação do CG, bem como dos principais ângulos está mostrado na Figura 2 abaixo:

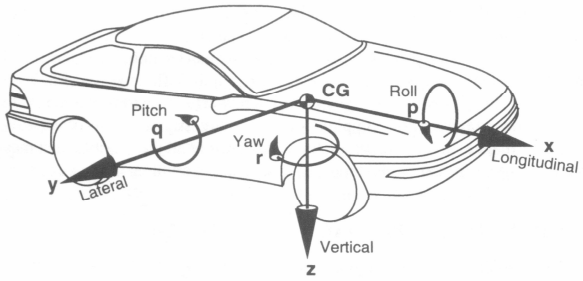


Figura 2 – Sistema de eixos – SAE [Gillespie, T. D.,1992, *Fundamentals of Vehicle Dynamics*, pág.08]

Existe outro sistema coordenado, utilizado pelas normas ISO 4130 e DIN 70000 e tomado como referência na realização deste trabalho, conforme ilustrado na Figura 3:

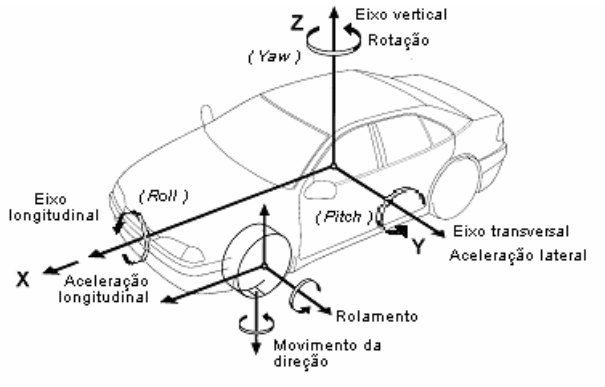


Figura 3 – Sistema de eixos – ISO 4130 e DIN 70000 [Máximo, Luiz F. B., *Estudo do comportamento dinâmico de um veículo de passageiros em manobras de handling*, Dissertação de Mestrado, pág.02]

Nas Figuras 2 e 3 são mostrados os principais sistemas coordenados utilizados em dinâmica veicular, bem como os seus principais graus de liberdade e ângulos, a saber:

- ângulo de *yaw* (ou direção): ângulo rotacionado em torno do eixo **z**;
- ângulo de *pitch* (ou guinada): ângulo rotacionado em torno do eixo **y**;
- ângulo de *roll* (ou rolagem): ângulo rotacionado em torno do eixo **x**.

A resposta dinâmica de um veículo está em muito condicionada a dois aspectos: *ride* e *handling*. O *ride* está relacionado à percepção do veículo a diversas fontes de excitação as quais ele está exposto, sob o aspecto vibracional. *Handling* é o comportamento de um sistema veicular quando em manobras, ou seja, é a sua resposta a uma ação de controle. Percebe-se que o estudo das variáveis que compõem estes aspectos fica sob o critério do projetista, tanto na percepção do *ride* quanto nas ações do *handling*, o que deve ser levado em consideração quando da realização dos respectivos testes e será fruto de maior detalhamento no Capítulo 2, referente à Revisão Bibliográfica.

2.2 - *Ride*

De acordo com Gillespie (1992), o termo *ride* refere-se a vibrações ocorridas em um espectro de freqüências provenientes do próprio tráfego do veículo. Tomando-se como critério de avaliação este espectro e dividindo-o em dois intervalos, respectivamente 0-25Hz e 25Hz-20KHz, pode-se classificar a segunda faixa como ruído e a primeira como *ride* propriamente dito. O limite de 25Hz é adotado por ser este um valor típico, próximo ao limiar inferior da audição humana (~20Hz) bem como um limite superior das freqüências que caracterizam vibrações comumente encontradas em veículos nas condições de baixas e médias rotações. Deve-se ressaltar que uma separação rígida dos tipos de vibração em função da freqüência é um processo complexo, uma vez que componentes de freqüência de um dos tipos podem aparecer como múltiplos nos outros componentes, relacionados a outro tipo de vibração.

A justificativa da relevância do estudo dos fenômenos relacionados ao *ride* está no fato de que hoje em dia os usuários utilizam o conforto vibroacústico como critério de escolha na aquisição do seu veículo, o que eleva este fenômeno à categoria de parâmetro de desempenho do mesmo. Para seu correto entendimento, deve-se enxergar o veículo como um sistema dinâmico, que receberá excitação de várias fontes, terá uma resposta dinâmica à esta excitação e gerará um padrão de vibrações, o *ride*, a ser percebido pelo usuário. A Figura 4 mostra esquematicamente este sistema:

Figura 4 – O fenômeno de *ride*

Vários aspectos influenciam a detecção e percepção do fenômeno de *ride*, dentre os quais pode-se destacar:

- Fontes geradoras de *ride*;
- Resposta vibracional do veículo a esta excitação;
- Percepção e tolerância humana a vibrações.

2.2.1- Fontes de excitação

Embora existam várias fontes que podem excitar as vibrações de *ride* de um veículo, elas podem ser agrupadas em dois grandes grupos: o relativo às irregularidades de pista e o relativo a fontes embarcadas.

2.2.1.1- Vibrações relacionadas às irregularidades de pista.

Entende-se por irregularidades de pista todas as alterações em sua superfície, desde falhas provenientes do desgaste pelo uso da pavimentação até os desvios aleatórios naturais desta. Esses últimos estão sempre presentes, uma vez que os processos de construção e manutenção de pavimentos não seguem um rígido controle no que diz respeito a estabelecer limites para as imperfeições de pista.

Irregularidade é definida pelo perfil de elevação pelo qual a roda passa quando o veículo trafega sobre ele. Em geral este perfil caracteriza-se como tendo componentes em um amplo espectro de freqüências e, por isto, pode ser descrito tanto pelo próprio perfil como por uma distribuição estatística. Dentre outras, uma função utilizada com boa representatividade para esta aplicação é a *Power Spectral Density function* - (PSD), ou função Densidade Espectral de Potência.

Considera-se que a irregularidade de pista medida sobre um comprimento de pavimento pode ser decomposta pela Transformada de Fourier em um somatório de senóides, com suas respectivas amplitudes e fases. Fazendo-se um gráfico destas amplitudes pela freqüência espacial têm-se a PSD.

Deve-se citar que a freqüência espacial é similar a um número de onda, ou seja, ela é o inverso do comprimento de onda da senóide que gera a freqüência em questão. É medida em ciclos/metro, ciclos/pé ou outra unidade semelhante.

Os dados a serem utilizados para a obtenção da PSD de um determinado pavimento podem ser adquiridos pela análise de amplitude e extensão em testes ou através de perfilômetros de alta velocidade.

Uma vez obtidos os dados sobre o perfil, um gráfico como o da Figura 5 pode ser gerado. Neste caso, foram obtidos dados para uma pista construída em asfalto e outra em cimento (PCC – *Portland Cement Concrete*).

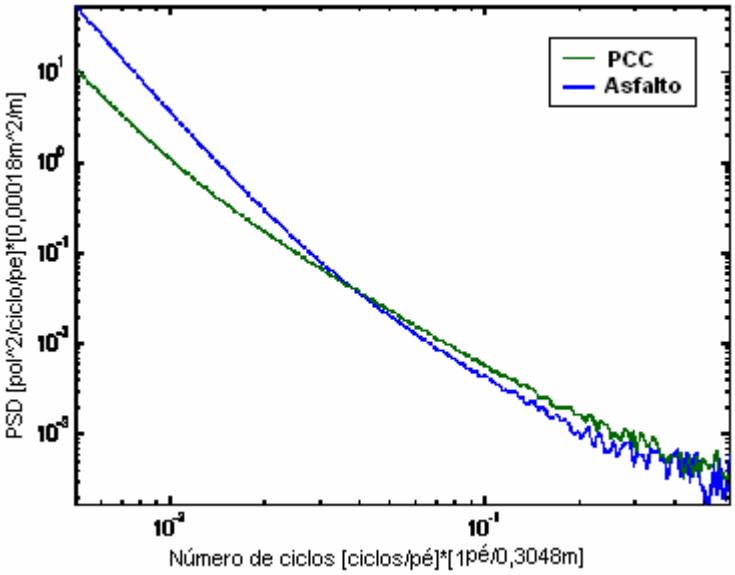


Figura 5 – Função PSD (*Power Spectral Density*) para dois tipos de pavimento [Gillespie, T. D.,1992, *Fundamentals of Vehicle Dynamics*, pág.127, com adaptações]

Percebe-se que, embora para cada trecho de pista exista uma PSD específica, de forma geral o comportamento dos pavimentos é semelhante, existindo uma queda na amplitude da função com o aumento da freqüência espacial (ou seja, com a diminuição do comprimento de onda). Conclui-se que a PSD de uma pista revela a sua qualidade, pois quanto maior a sua amplitude, maior é o comprimento de onda (conseqüentemente menor o “número de onda”), ou seja, maior será a amplitude da elevação da pista e pior sua qualidade.

Unidimensionalmente, uma função que pode descrever a PSD é a do tipo:

$$G_Z(\upsilon) = G_0 \left[\frac{1 + \left(\upsilon_0 / \upsilon \right)^2}{(2\pi\upsilon)^2} \right] \qquad (01)$$

onde:

- $G_Z(\upsilon)$: Amplitude da PSD – [ft^2/(ciclo/ft)] ou [m^2/(ciclo/m)] (SI);
- υ: freqüência espacial – ciclo/ft ou ciclo/m (SI);
- G_0: parâmetro da magnitude da irregularidade (nível de irregularidade)
    - $G_0 = 1{,}25X10^5$, para superfícies irregulares;
    - $G_0 = 1{,}25X10^6$, para superfícies lisas.
- υ_0: freqüência espacial de *cut-off* ou de corte.
    - $\upsilon_0 = 0{,}05$ ciclo/ft = 0,16 ciclo/m para superfícies asfálticas;
    - $\upsilon_0 = 0{,}02$ ciclo/ft = 0,07 ciclo/m para superfícies de PCC.

As irregularidades de pista devem ser vistas como desvios verticais impostos pelo pavimento, transmitidos pelas rodas, excitando vibrações de *ride*. Uma das principais formas de se medir estas vibrações é através da aceleração. Do ponto de vista do *ride*, a irregularidade de pista deve ser vista como uma aceleração de entrada na roda (*input acceleration*). Neste caso uma diferente forma de PSD aparece, pois o perfil de elevação da pista deve ser transformado em deslocamento em função do tempo.

Depois esta função é diferenciada uma vez para obtenção da velocidade de entrada e outra vez para a aceleração. Deve-se tomar a precaução de converter a freqüência espacial para freqüência temporal (ciclos/ft ou ciclos/m → ciclos/s (Hz)), multiplicando-se a freqüência espacial pela velocidade do veículo (ft/s ou m/s). A Figura 6 ilustra esta outra PSD para um veículo trafegando a 50 mph (~80 km/h).

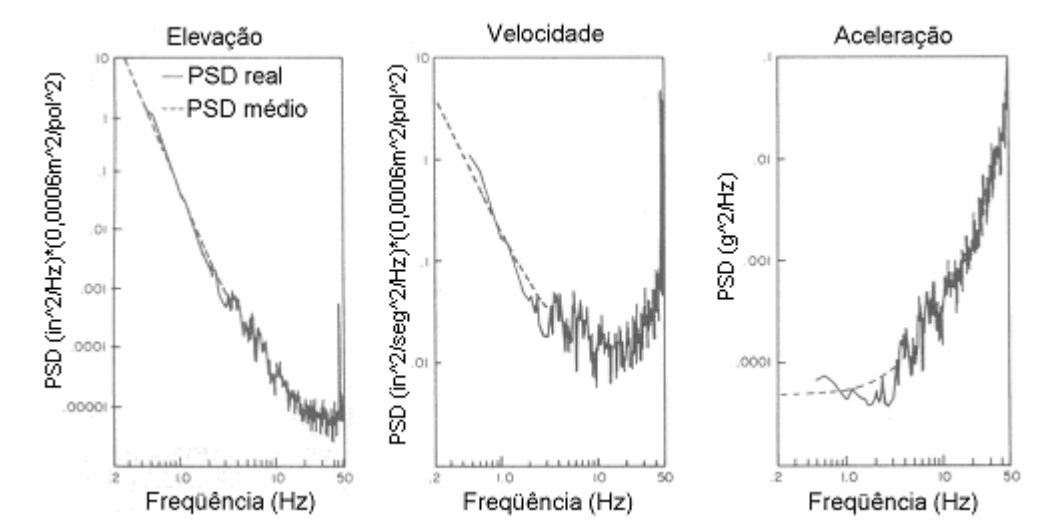


Figura 6 – PSD`s de irregularidade de pista para elevação, deslocamento vertical e aceleração. [Gillespie, T. D.,1992, *Fundamentals of Vehicle Dynamics*, pág.130]

Observa-se que até freqüências da ordem de 1Hz o perfil de aceleração é aproximadamente constante, apresentando, para valores acima de 1Hz uma elevação brusca. Considerando a aceleração como *input* do sistema, a irregularidade de pista manifesta-se de forma mais influente a altas freqüências, excitando então as vibrações de *ride* relacionadas a elas.

2.2.1.2 - Vibrações relacionadas às fontes embarcadas

As vibrações provenientes de fontes embarcadas surgem do movimento de corpos rotativos, dentre outros o conjunto pneu/roda, o conjunto de direção e o motor (Gillespie (1992)). A Figura 7 ilustra os principais componentes embarcados.

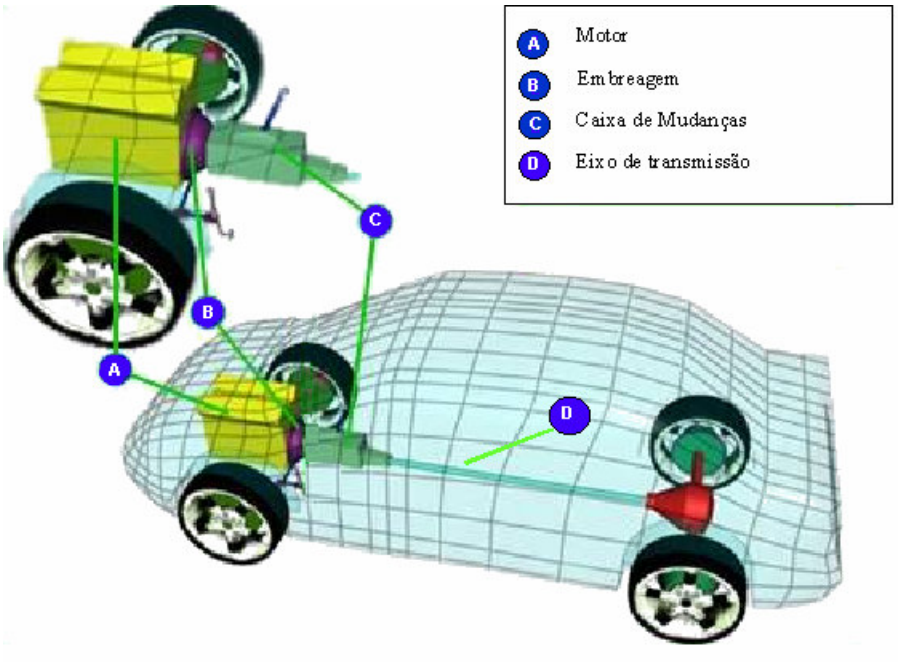


Figura 7 – Principais componentes embarcados que são fonte de vibrações de *ride* (Retirado do CD-ROM How *stuff works* – seção *How engines work*? - com adaptações)

2.2.1.3 - Conjunto pneu/roda

De forma ideal, este conjunto é flexível o suficiente para absorver as vibrações de *ride*, não excitando o veículo nestas freqüências. O que torna o sistema não ideal é fruto das imperfeições na fabricação dos pneus, rodas, cubos de roda, freios e outras partes rotativas, o que caracteriza não-uniformidades do tipo:

- Massa desbalanceada;
- Variações dimensionais;
- Variações de rigidez.

Essas não-uniformidades geram forças e momentos nas direções vertical (radial), longitudinal (trativa) e/ou lateral, sendo transmitidas aos eixos do veículo e tornando-se assim fontes excitadoras de vibrações de *ride*.

2.2.1.4- Conjunto de direção

Entende-se por conjunto de direção a união do eixo de transmissão, que é o responsável pela transferência de torque motriz para as rodas, a caixa de

marchas, responsável pela transferência do torque de acordo com a exigência do tráfego e da caixa diferencial. Esta, por sua vez, faz o trabalho de compensação dos diferentes raios os quais o veículo está sujeito quando de manobras em curvas.

Dentre todos os componentes, o que mais influencia o *ride* é o eixo de transmissão. Os outros componentes também têm a sua participação, mas em freqüências acima das consideradas para o *ride*. As maiores influências estão relacionadas a efeitos de:

- massas desbalanceadas estática e dinamicamente (assimetria de partes móveis, excentricidades, deformações dinâmicas fruto da elasticidade do eixo, etc...);
- momentos torsionais impostos ao eixo devido ao ângulo existente nas juntas universais das extremidades do eixo (angulação de eixo cardã). (Figura 8).

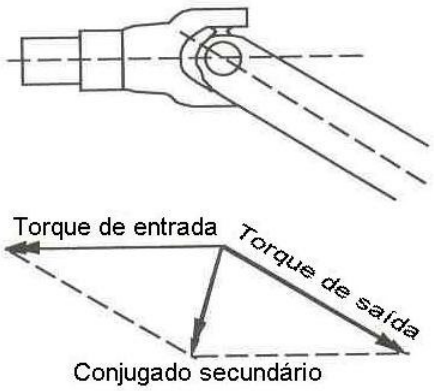


Figura 8 – Reações de torque em virtude de momentos secundários.
[Gillespie, T. D.,1992, *Fundamentals of Vehicle Dynamics*, pág.140]

A Figura 9 ilustra um mapa espectral da natureza das vibrações oriundas das duas fontes de natureza embarcada descritas acima: conjunto pneu/roda e sistema de direção.

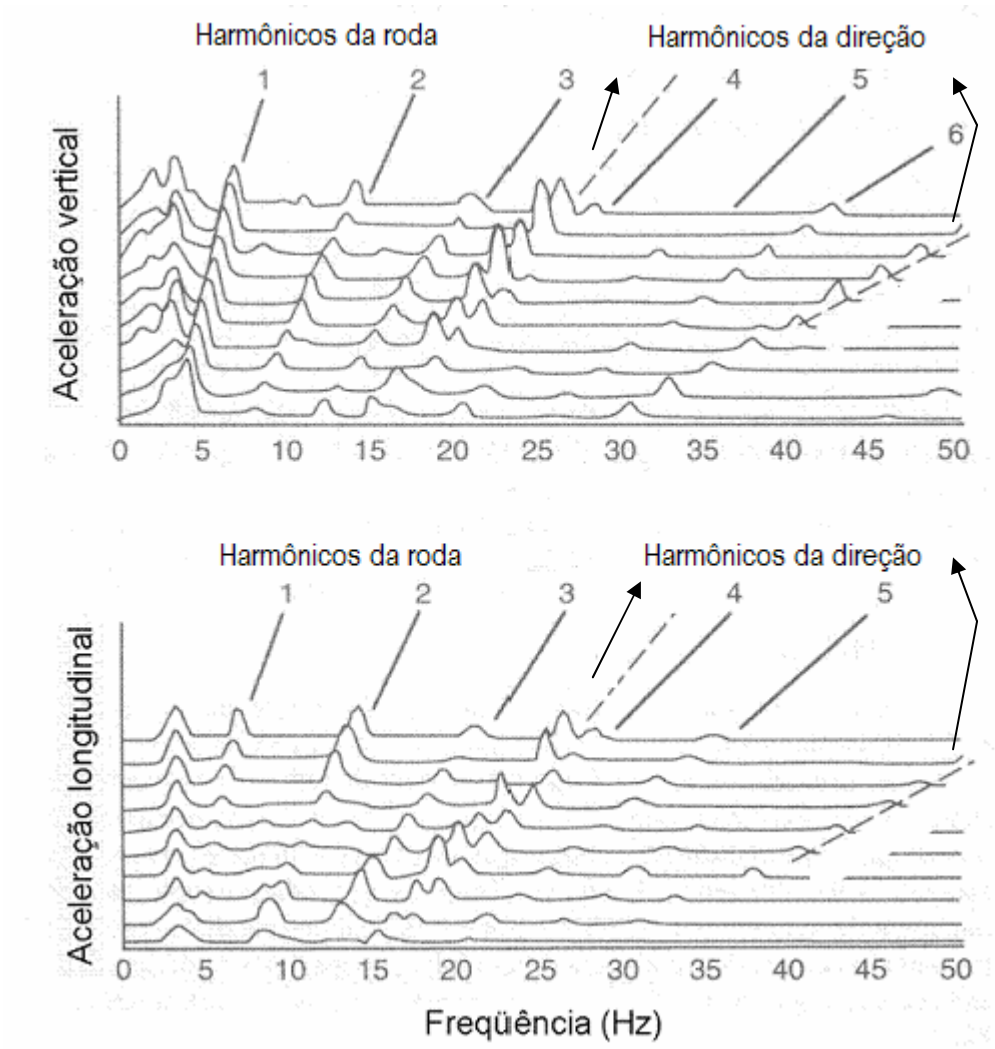


Figura 9 – Mapa espectral das vibrações embarcadas em um veículo.
[Gillespie, T. D.,1992, *Fundamentals of Vehicle Dynamics*, pág.142]

Estes gráficos de aceleração foram obtidos para um veículo fora de estrada em uma superfície controladamente lisa, a fim de suprimir efeitos de pista sem, no entanto, mascarar o efeito do conjunto pneu/roda. Percebe-se que a excitação gerada pelo conjunto pneu/roda aparece como irregularidades em maiores freqüências de acordo com o aumento da velocidade, o que pode ser visto pelo deslocamento das curvas para a direita.

Vê-se os seis harmônicos correspondentes ao conjunto pneu/roda. A aproximadamente 3,7 vezes do primeiro harmônico do conjunto pneu/roda percebe-se o primeiro harmônico do sistema de direção, proveniente do efeito das massas desbalanceadas do eixo de transmissão e outros componentes rotativos.

Este comportamento repete-se a duas vezes o primeiro valor, ou seja, a 7,4 vezes o primeiro harmônico do conjunto pneu/roda. Este segundo harmônico é reflexo do torque surgido no eixo de transmissão em virtude dos ângulos das juntas universais.

2.2.1.5- Motor

Em uma primeira análise, o motor, por ter seu funcionamento relacionado com elementos rotativos, é facilmente associado a uma fonte de excitação. Mas, em virtude de sua massa, ele também pode ser visto como um absorvedor de vibrações, principalmente das verticais, provenientes das rodas. Detalhando-se esta análise é possível chegar às observações sobre este componente do veículo que são apresentadas a seguir.

Como o motor fornece potência em um processo cíclico, o eixo virabrequim sofre esforços pulsantes ao longo de um ciclo de explosão, ou seja, o torque fornecido não é puramente constante. A existência do volante do motor, que age como uma inércia a fim de “acumular” energia mecânica, faz com que a forma de onda do torque seja composta por uma componente constante, somada com outra pulsante, que é a correspondente às explosões que o volante não conseguiu uniformizar.

Essas variações de torque, agindo ao longo do sistema de transmissão, tornam-se fontes de excitação vibracional, de forma similar aos momentos das juntas universais descritos anteriormente.

Em virtude da sua flexibilidade de fixação, o motor vibra com seis grus de liberdade, três translacionais e três rotacionais, em torno daqueles eixos. Esses movimentos são mostrados na Figura 10:

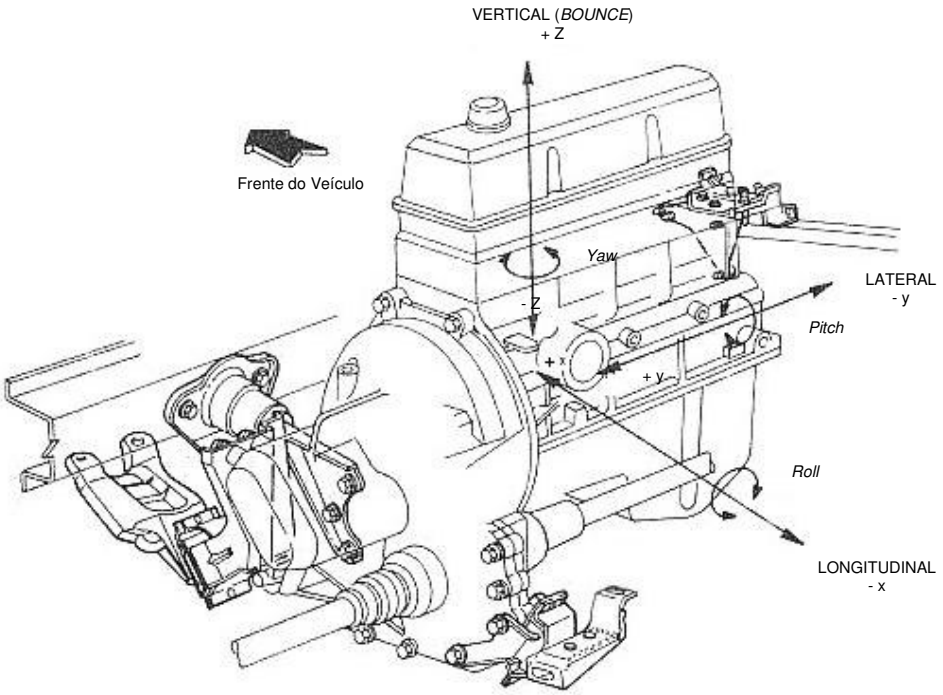


Figura 10 – Movimentos possíveis do motor. [Gillespie, T. D.,1992, *Fundamentals of Vehicle Dynamics*, pág.144]

Destes, o mais influente em termos de vibração é o de *roll*, que ocorre em um eixo perpendicular ao virabrequim (considerando um motor transversal), cujos modos são excitados pelas variações de torque provenientes do motor.

2.2.2 - Obtenção dos parâmetros de *ride*

Milliken (1995) apresenta um método iterativo para uma aproximação das freqüências de *ride*. Parte-se de uma certa freqüência desejada (valor inicial), ou de uma velocidade máxima da roda / máxima carga. Pretende-se com isto determinar qual tipo de comportamento o veículo apresentará em *ride*. A freqüência não amortecida de *ride* para uma dada configuração (apenas o veículo apoiado sobre as molas da suspensão) pode ser determinada pelo ábaco apresentado na Figura 11, após medida a deflexão vertical do veículo na configuração desejada.

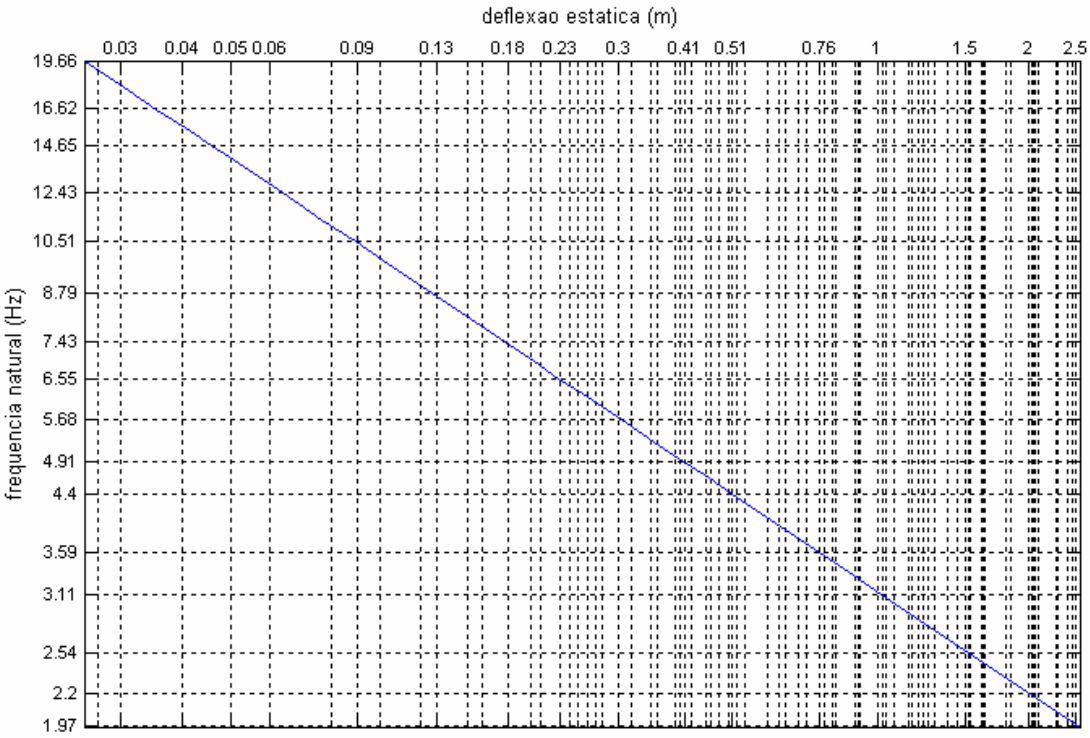


Figura 11 – Freqüência natural não amortecida de *ride* X deflexão estática da roda [Milliken, W. F., Milliken D. L., 1995, *Race Car Vehicle Dynamics*, pág.583, com adaptações].

O problema encontrado por projetistas em geral é a correta determinação do carregamento ao qual está sujeito o conjunto roda/pneu. Isto é feito para cada tipo de conjunto e para um tipo de trecho de pista específico. A iteratividade ocorre da seguinte forma: primeiramente alguns dados são supostos para o veículo. Obtém-se a partir deles uma primeira taxa de *ride*. De posse de uma série de considerações, desde aerodinâmicas até fatores de frenagem, compara-se este primeiro resultado obtido "analiticamente" com a resposta real do veículo. Da diferença extrai-se dados suficientes para o ajuste das considerações, o que leva à repetição do processo até a convergência para um valor ou intervalo fechado.

Alguns valores típicos (Milliken (1995)):

- Carros de passageiros: 0,5 – 0,83 Hz;
- Carros esportivos: 1,17 – 1,5 Hz;
- Carros de corrida - Indy: 1,58 – 2 Hz (sem efeito solo) e acima deste valor quando se considera o efeito solo.

Para os deslocamentos verticais:

- Carros de passeio: ± 100mm;
- Carros esportivos: ± 50 a ± 100mm;
- Carros de corrida: ± 12mm.

Define-se taxa de *ride* como sendo a relação entre a variação na força normal do pneu no solo e a variação de posição do veículo, puramente vertical, imposta por esta força. Esta taxa é medida em termos de libras (ou Newtons) da força normal (carga do pneu) no solo por polegada (ou metro) de deslocamento vertical do veículo, medida como sendo a variação do centro da roda em decorrência da variação vertical do pneu, ou seja, para um pneu infinitamente rígido, esta taxa de *ride* e a variação do centro da roda devem ser iguais. Para um pneu real, com rigidez vertical finita, a taxa de *ride* é sempre menor que a variação de posição do centro da roda.

O comportamento vibracional do veículo também é influência na manobrabilidade do veículo e será discutido no próximo tópico desta Revisão, que trata do estudo do *Handling*.

2.3 - *Handling*

Segundo Dixon (1996), três conceitos devem ser entendidos para a correta avaliação do comportamento dinâmico de um veículo durante a execução de manobras. O controle deve ser interpretado como a ação realizada pelo motorista de forma a intervir no movimento do carro. Esta intervenção é vista como qualquer alteração no vetor velocidade, também na trajetória a qual o veículo trafega. Desse modo, define-se a estabilidade como a tendência de o veículo não alterar esta trajetória, mesmo quando excitado por uma fonte externa que queira fazê-lo. *Handling* é a habilidade de o veículo realizar manobras, o estudo de como ele faz isto e a percepção do motorista em relação ao comportamento do veículo.

De forma geral, as forças que atuam sobre um veículo podem ser agrupadas da seguinte forma: as que surgem em decorrência do efeito da estrada sobre os pneus, aquelas relacionadas à sua inércia e à aerodinâmica. Isto faz com que a teoria envolvida no estudo das forças características que surgem do comportamento em curva sobre os pneus, bem como do mecanismo das forças aerodinâmicas é primordial para o estudo do *handling*. Na maioria dos casos práticos, a força dominante para o comportamento do veículo em manobras é a decorrente da reação nos pneus, sendo fatores de influência as suas dimensões, estrutura, materiais, ângulo em relação ao solo, a relação deste com o sistema de suspensão, dentre outros.

Em um conceito mais amplo, *handling* e *cornering* se confundem como a forma de o veículo realizar manobras em curva. De forma mais específica, o *cornering* está relacionado com a habilidade de o veículo realizar uma manobra, considerando um motorista perfeito (sem a sua influência). *Handling* é a interação veículo/motorista, sendo a maior ou menor dificuldade de se realizar esta manobra por parte de um motorista real, ou seja, a influência do comportamento dele pode refletir nos resultados de prováveis testes a serem realizados. Refere-se também a distúrbios ocorridos em virtude de irregularidades de pista, mesmo em trechos retos, pois a percepção do motorista influi na sua tomada de decisões.

2.3.1 - *Handling* em estado permanente

O objetivo inicial do estudo da teoria de *handling* é a melhoria do projeto do veículo a partir da detecção da existência e posterior otimização de parâmetros de performance. O limite último deste estudo visa a predição do comportamento dinâmico do veículo em resposta a manobras do motorista ou a distúrbios do ambiente (Dixon, 1996).

Antes de se discorrer em tipos de distúrbios e manobras, deve-se conceituar regime permanente. A definição da SAE é:

"Regime permanente existe quando a resposta do veículo a um estímulo de controle, do tipo periódico (ou constante) e/ou de distúrbio, não varia durante um tempo considerável. O movimento associado a esta resposta é chamado de resposta em estado permanente".

Por esta definição, uma manobra de *slalom* realizada continuamente, por exemplo, é considerada como regime permanente. De forma ambígua, o regime transiente é definido como sendo:

"Regime transiente existe quando a resposta em movimento às forças externas relativas ao veículo ou as posições das ações de controle variam com o tempo".

Pela comparação entre as duas definições, pode-se concluir que o estado permanente é todo aquele em que não há variação nas condições de excitação do sistema. Não se deve confundir regime permanente com condição de equilíbrio do veículo. Na maioria dos casos envolvendo a dinâmica de um veículo, este em movimento não se encontra em condição de equilíbrio (existem quase sempre acelerações laterais em manobras).

Dois exemplos deste tipo de distúrbio são as forças surgidas pela ação de ventos laterais e uma manobra em curva com curvatura constante, ou seja, em regime permanente, as condições são sempre do tipo: ausência de distúrbios aleatórios, magnitude de aceleração lateral constante. A velocidade e a aceleração relativas ao solo não precisam ser constantes.

2.3.1.1 - Parâmetros

As características de *handling* são função das propriedades dos chassis, da suspensão, pneus, da geometria do veículo e do ambiente, dentre outras. Os parâmetros representativos para seu estudo são a velocidade e a trajetória da curva (raio de curvatura descrito pelo centro de massa), sendo ambos constantes para o estudo em regime permanente. Estas variáveis dependem principalmente do nível de aceleração (longitudinal e, conseqüentemente, lateral) e da posição da roda no esterçamento.

Para um veículo trafegando com uma velocidade V, numa curva de raio de curvatura definido como $\rho = 1/R$, tem-se:

$$\text{Velocidade angular (}\textit{yaw}\text{): } \omega = \rho V = \frac{V}{R} \tag{02}$$

$$\text{Aceleração lateral: } A = \rho V^2 = \frac{V^2}{R} \tag{03}$$

Percebe-se que com duas variáveis pode-se calcular qualquer outra. Normalmente tem-se a velocidade e, com o auxílio de mais uma, obtém-se as outras. Para uma situação particular de estado permanente, a sensibilidade de qualquer um destes parâmetros de resposta em relação a um ângulo de esterçamento imposto é chamada de ganho, G, e definida como sendo:

$$G_\rho = \frac{\partial \rho}{\partial \delta}; \quad [G_\rho] = m^{-1} \tag{04}$$

$$G_\omega = \frac{\partial \omega}{\partial \delta} = V \frac{\partial \rho}{\partial \delta} = V\, G_\rho; \quad [G_\omega] = s^{-1} \tag{05}$$

$$G_A = \frac{\partial A}{\partial \delta} = V^2 \frac{\partial \rho}{\partial \delta} = V^2\, G_\rho; \quad [G_A] = s^{-2}/\text{rad} \tag{06}$$

Por definição, estas derivadas são tomadas a velocidade constante. O ângulo de esterçamento a ser usado pode ser o da roda, δ, o de referência,

$\delta_{ref} = \delta/G$ (G é o ganho do ângulo de esterçamento), um ângulo médio entre as rodas dianteiras ou outro definido por quem realiza o teste. Em princípio também devem ser realizadas derivadas parciais em relação à velocidade, mantendo δ constante, o que não apresenta uma extensa aplicação prática, uma vez que no *handling* importa é a relação do esterçamento imposto ao veículo pelo motorista e sua resposta, independente da velocidade, que aqui inclusive foi considerada constante.

2.3.1.2 - Gráficos de *Handling*

Um gráfico de *handling* fundamental é o que cruza dados do ângulo de esterçamento, δ, e aceleração lateral, A, em uma curva de raio R definido. Sob a luz deste estudo, este ângulo pode ser entendido como a soma de dois componentes, a saber:

$$\delta = \delta_K + \delta_U \tag{07}$$

Onde:

- δ_K: ângulo de esterçamento cinemático, necessário para a condição de aceleração lateral nominalmente zero;
- δ_U: ângulo de esterçamento dinâmico ou de sub-esterço, que é requerido quando da presença de aceleração lateral.

Um modelo muito utilizado para a compreensão dos fenômenos relativos a estas manobras é o *bicycle model vehicle*, que recebe este nome por ter as propriedades concentradas no CG de um sistema de duas rodas, embora não represente uma bicicleta real, pois, por exemplo, não leva em consideração a inclinação da mesma em manobras de curva. Neste modelo, forças trativas e aerodinâmicas são desconsideradas. A Figura 12 o ilustra em duas condições: (a) apenas sob o efeito de δ; (b) apenas sob o efeito da rotação de *yaw*.

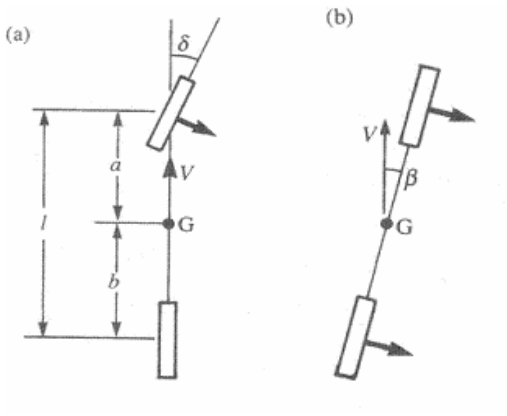


Figura 12 – *Bicycle vehicle model.*[Dixon, J. C., 1996, *Tires, Suspension and Handling*, pág. 336]

Onde:

- δ: ângulo de esterçamento (rad);
- l = L: distância entre-eixos;
- a: distância do CG à roda dianteira;
- b: distância do CG à roda traseira;
- V: velocidade do veículo;
- β = ângulo de escorregamento lateral do veículo no CG (*slip-angle*) (rad);

Esta figura mostra duas condições de não-equilíbrio do veículo. Na parte (a), existe apenas esterçamento, resultando em força e momentos laterais. Em (b) surgem também forças e momentos laterais, agindo no CG. O momento gerado pelo *yaw* pode ser balanceado por um momento de esterçamento para pequenos δ. Outra forma de visualizar este efeito é imaginar que β gera um ângulo de escorregamento na roda traseira e δ é utilizado para compensar este efeito no eixo dianteiro, através de um ângulo de escorregamento que gere um momento para zerar o de *yaw*, mantendo esta velocidade constante, ou seja, garantindo o regime permanente. O *handling* depende do balanço destes momentos entre os eixos dianteiro e traseiro.

Métodos para obtenção de diagramas de *handling*

Essencialmente existem duas formas de representar o *handling* em estado permanente de um veículo: método cinemático e método dos momentos. O primeiro, desenvolvido anteriormente ao segundo e mais comumente usado, recebe este nome porque fornece a resposta cinemática do veículo em relação a um ou mais parâmetros de entrada. Ou seja, o raio de curvatura (ρ), a velocidade de *yaw* (r) e a aceleração lateral (A), parâmetros cinemáticos, são produzidos como função do ângulo de esterçamento (δ) e da velocidade do veículo (V).

- **Método Cinemático**

Em relação ao modelo *Bicycle vehicle*, considerando pequenos ângulos δ, as características de *handling* podem ser obtidas a partir do gráfico dos coeficientes de força lateral nos pneus versus características de deslizamento (*slip*). Um exemplo deste gráfico é mostrado na Figura 13:

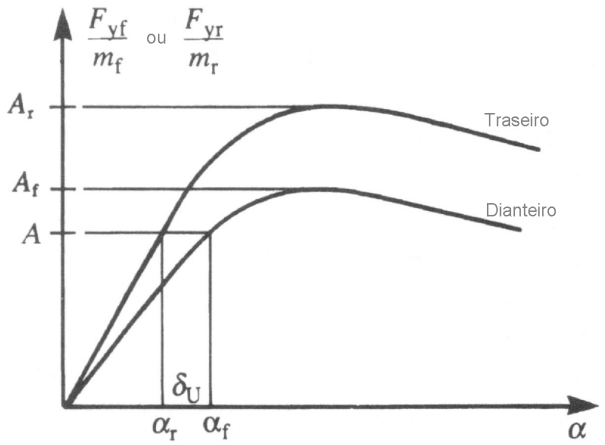


Figura 13 – Características de *handling* – pneu e veículo.[Dixon, J. C., 1996, *Tires, Suspension and Handling*, pág 338]

Onde:

- F_{yf} : força lateral (sentido radial – eixo **y**) no eixo dianteiro;
- F_{yr} : força lateral (sentido radial – eixo **y**) no eixo traseiro;
- m_f : parcela da massa do carro sobre o eixo dianteiro;
- m_r : parcela da massa do carro sobre o eixo traseiro;

- A_r: aceleração lateral da roda traseira (imposta pelo contato do pneu - solo);
- A_f: aceleração lateral da roda dianteira (imposta pelo contato do pneu - solo);
- A: aceleração lateral do veículo;
- δ_U: ângulo de esterçamento dinâmico ou de sub-esterço;
- α_f: ângulo de escorregamento do pneu dianteiro;
- α_r: ângulo de escorregamento do pneu traseiro;

Uma dada aceleração lateral requer o mesmo fator F_y/m tanto no eixo dianteiro quanto no traseiro embora os ângulos de esterçamento requeridos, α_r e α_f, sejam diferentes. Se o veículo está descrevendo uma trajetória curva, então o ângulo de *yaw* varia ao longo do comprimento do veículo, sendo α_r no eixo traseiro e α_r – b/R no centro de massa. Como $\alpha_r \neq \alpha_f$, o motorista tem de fornecer um $\delta_U = \alpha_f - \alpha_r$, que é o ângulo de sub-esterço.

O ângulo total, $\delta = \delta_K + \delta_U$, requerido para realizar a curva, pode ser visualizado na Figura 14, da qual também pode-se concluir que:

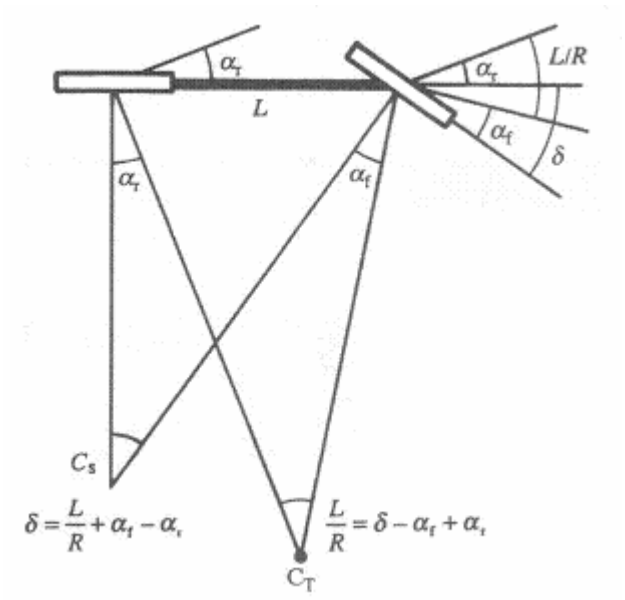


Figura 14 – Os ângulos α e δ.[Dixon, J. C., 1996, *Tires, Suspension and Handling*, pág 339]

- Em baixas velocidades, pode-se desconsiderar o efeito da aceleração lateral, ou seja, o ângulo de escorregamento tende a zero. Com isto apenas a parcela cinemática do esterçamento está presente, $\delta_K = \tan^{-1}(L/R)$;
- O ângulo de esterçamento será $\delta = L/R + \delta_U$, o que após um rearranjo pode-se obter $R = L / (\delta - \delta_U)$, o que permite ver que na presença de um ângulo de sub-esterço positivo o raio da curva que o veículo percorrerá diminui;
- É conveniente às vezes dividir o ângulo de esterçamento cinemático na sua porção relativa ao eixo dianteiro e traseiro, a saber: $\delta_K = \delta_{Kf} + \delta_{Kr} = a/R + b/R$, o que é comprovado por $\delta_K = L/R = a/R + b/R$, uma vez que $a + b = L$.

Nos testes envolvendo *handling*, é comum o veículo percorrer a mesma curva a várias velocidades diferentes. Resultados típicos são apresentados na Figura 15:

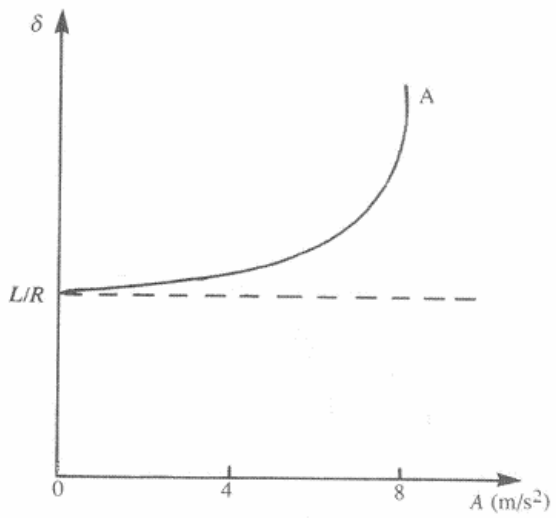


Figura 15 – Gráfico característico de um teste de *handling*.[Dixon, J. C., 1996, *Tires, Suspension and Handling*, pág 341]

A curva é dividida em três trechos: entre valores de aceleração até 3 m/s^2 (0,3g), ela é aproximadamente linear. Esta região é a que normalmente o veículo, em condições normais, está sujeito em termos de acelerações laterais, sendo chamada de *handling* primário.

A segunda região, que está compreendida entre 3 e 6 m/s^2, constitui um trecho não linear, é chamado de *handling* secundário. O terceiro trecho, acima de 6 m/s^2 de aceleração lateral, é chamado de *handling* final e também apresenta comportamento não-linear. Este trecho é o que define as condições limite de teste, bem como é nele que estão concentradas as atenções das pesquisas relacionadas a acidentes em altas velocidades.

***Handling* primário**

No primeiro trecho do gráfico apresentado na Figura 16, pelo fato de δ variar linearmente com a aceleração lateral (A) para um dado raio (R), pode-se escrever:

$$\delta_U = k_U A \qquad (07)$$

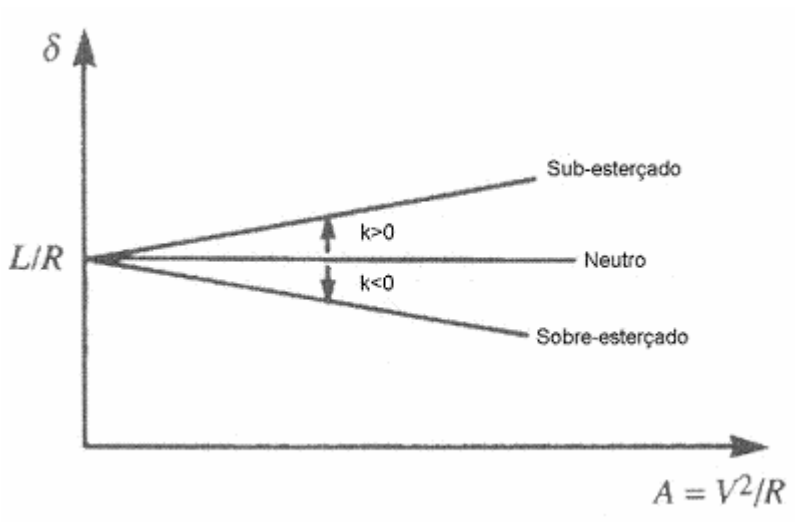


Figura 16 – Variação linear do *handling* em relação a δ. [Dixon, J. C., 1996, *Tires, Suspension and Handling*, pág. 346]

Como $\delta = \delta_K + \delta_U$,

$\delta = \frac{L}{R} + k_U A$, com k_U: coef. de sub-esterço (rad/m.s^{-2} ou graus/g)

- Valor típico de k_U: 5 mrad / m.s^{-2} = 3 graus/g (1,0 grau/g = 1,78 mrad/m.s^{-2}).

Matematicamente:

$$k_U = \frac{\partial \delta_U}{\partial A} = \left(\frac{\partial \delta}{\partial A}\right)_{R=cte} \tag{08}$$

Se R não é constante, o ângulo de esterçamento cinemático (δ_K) também varia com A:

$$\delta_K = \frac{L}{R} = \frac{L}{V^2/A} = \frac{LA}{V^2} \tag{09}$$

De onde define-se:

$$k_K = \frac{\partial \delta_K}{\partial A} = \frac{L}{V^2} \tag{10}$$

Com k_K: gradiente do ângulo de esterçamento cinemático (rad/m.s^{-2} ou graus/g).

Das equações (07) e (09), pode-se escrever, para velocidade constante:

$$\frac{\partial \delta}{\partial A} = \frac{\partial \delta_K}{\partial A} + \frac{\partial \delta_U}{\partial A} = \frac{L}{V^2} + k_U = k_K + k_U \tag{11}$$

Sendo k_U positivo, δ aumenta com o aumento da aceleração lateral em uma curva de raio constante e o veículo se comporta como sub-esterçado. Se k_U = 0, o veículo se comporta como neutro e, para o caso real de um comportamento não linear, o veículo apresentará um comportamento para cada situação específica de aceleração lateral, como será visto adiante.

Deve-se ressaltar que a forma utilizada pela SAE para distinção destes três tipos de comportamento é um pouco diferente, em virtude da diferença de abordagem entre uma definição teórica (SAE) e prática. Pela abordagem teórica, quando k_U é positivo também o veículo é sub-esterçado, para k_U=0 o veículo é neutro e a para k_U < 0, o veículo é sobre-esterçado. Isto pode ser

verificado na Figura 16. Segundo Dixon (1996), é possível ter $k_U < 0$ e um ângulo de sub-esterço positivo e vice-versa, ou seja, o gradiente é a variável decisiva e não propriamente o ângulo.

Handling secundário

Estado permanente não-linear

A maior parte dos fenômenos relacionados à dinâmica veicular é não linear. Neste caso, o que na maioria das vezes se faz é a aproximação para pequenos ângulos, deslocamentos e curvaturas, de tal forma que um trecho não linear é linearizado, diminuindo a ordem das equações diferenciais obtidas.

No caso não linear, como as equações são de difícil solução, o que normalmente se faz são testes com coleta de dados, o que fornece uma representação gráfica das relações entre a ação de controle (ou comando) do motorista e a resposta do veículo, interpretadas aqui como uma função de malha aberta (comando-resposta). Este procedimento forma uma boa base para o sentimento físico do regime permanente real.

Em geral são consideradas duas variáveis de controle (entradas da função de transferência): lateral, representada pelo ângulo de esterçamento (δ) e longitudinal, representada por parâmetros de aceleração e frenagem. Ou seja, os parâmetros de resposta do veículo (saídas da função de transferência) devem ser função destas variáveis de entrada e serão representadas como uma superfície em um sistema tridimensional. São exemplos deste tipo de variável o raio de curvatura, velocidade de *yaw*, aceleração lateral, dentre outras. Como são muitas, as possibilidades de obtenção de gráficos diferentes também o são, o que aumenta o escopo de possibilidades de inter-relações entre elas. A Figura 17 mostra a relação entre a aceleração lateral e velocidade longitudinal, mostrando os ângulos de sub-esterço necessários para realizar um teste de handling sob várias condições.

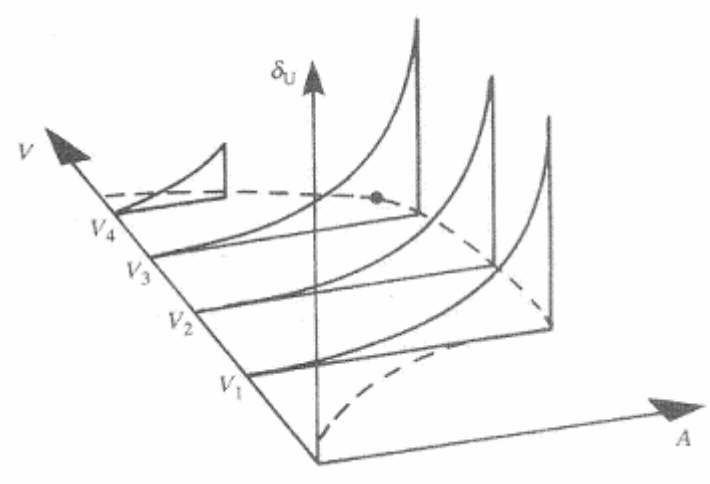


Figura 17 – Ângulo de sub-esterço como função de V e A. [Dixon, J. C., 1996, *Tires, Suspension and Handling*, pág 359]

Percebe-se que existe, no plano V-A, uma valor de V mínimo, para um dado A, que torna δ_U mínimo. Existe também um máximo valor de A, para um dado V, que diminui com o aumento desta velocidade em virtude de forças aerodinâmicas e da sensibilidade à fricção por parte dos pneus (à baixa velocidade) e à limitação própria do motor em produzir aumento de velocidade (em alta velocidade).

Para cada valor de V existe uma curva δ_U versus A, o que, no limite, gera uma superfície deste parâmetro no espaço.

Características do *handling* secundário

Conforme citado anteriormente, este regime de *handling* é caracterizado por ser não linear, situar-se em um trecho de acelerações laterais entre 0,3g e 0,6g e por ainda não ter alcançado o estágio limite de teste, onde predomina a fricção dos pneus com o solo. A solução das equações se dá, normalmente, de forma numérica, uma vez que equações relacionadas a esta fase do movimento são mais complexas. O procedimento adotado para a obtenção do comportamento do veículo se dá através da coleta de dados em regime de teste, o que gera gráficos tridimensionais como o ilustrado na Figura 17.

O fator primordial para a presença de não-linearidades, principalmente nas equações dos ângulos principais, é o comportamento dos pneus, que agora

trabalham na faixa de não-linearidade na relação entre a força lateral e o escorregamento (*slip-curve*). O fator secundário é a transferência de carga lateral de um eixo a outro do veículo quando da manobra em curva (rotação de *yaw*). Existem ainda outros fatores, ligados a efeitos de forças trativas, influências de geometria, rigidez dos pneus, elevação de carroceria, etc...

A influência da não linearidade imposta pelos pneus no ângulo de escorregamento lateral é calculada por:

$$\Delta\beta = \Delta\alpha_r = C\left(\frac{F_y}{F_V}\right)^P \tag{12}$$

Onde:

- $\Delta\beta$: variação no ângulo de escorregamento lateral do veículo;
- $\Delta\alpha_r$: variação no ângulo de escorregamento lateral do pneu traseiro;
- F_y: força lateral;
- F_V: força vertical;

Desprezando-se o efeito aerodinâmico, a equação acima toma a forma simplificada:

$$\Delta\beta = C\,A^P \tag{13}$$

Onde:

- C: constante de proporcionalidade = 0,0065 graus/(m.s^{-2}) = 6,5 graus/g, com incremento de 1,4º em β a cada 0,6g;
- P: valor típico = 3,0.

Já a influência da transferência de carga lateral depende do fator de transferência de carga, $e_V = F_T/F_{V0}$, calculado por roda e para cada tipo de pneu característico. F_T é a força transferida e F_{V0} é a força vertical inicial, que é a que um pneu fica sujeito em condição estática. Neste caso, o ângulo de

escorregamento lateral sofre a seguinte influência e é pela seguinte equação modelado:

$$\Delta\beta = C_1 \left(e_{Vr}\right)^P = C_2 \, A^P \tag{14}$$

Onde:

- C_1: constante de proporcionalidade, tipicamente 25º;
- P: valor típico = 3,0;
- C_2: constante de proporcionalidade = 7 graus/g, com incremento de 1,5º em β a cada 0,6g;
- A: aceleração lateral.
- e_{Vr}: parcela do fator de transferência de carga referente ao eixo traseiro. É a razão entre a força transferida ao eixo traseiro pela carga suportada por aquele eixo.

***Handling* final**

O regime final de *handling*, que é mostrado como os últimos 25% do gráfico da Figura 15, caracterizado por níveis de aceleração lateral da ordem de 0,6g (6m/s^2), chegando a limites de 0,8g. Para carros comerciais, este valor cai para aproximadamente 0,5g, devido à geometria das suspensões, materiais dos pneus, etc. Em carros esportivos, chega-se perto de 1,0g em virtude do melhor *grip* dos pneus, e em 3,0g para carros de corrida, onde além do *grip* também colabora o efeito de *downforce* em altas velocidades.

O comportamento do veículo neste regime pode ser descrito satisfatoriamente em função de duas variáveis: as acelerações laterais máximas nos eixos dianteiro e traseiro, respectivamente, A_f e A_r. Usa-se reescrevê-las sob a forma de outros dois parâmetros mais abrangentes, que são a aceleração lateral máxima, A_M, que é a menor entre A_f e A_r, e um parâmetro de equilíbrio do *handling* final, chamado de número de sub-esterço final, N_U.

$$N_U = \frac{A_r}{A_f} - 1 \tag{15}$$

Daí, veículos que apresentam $N_U > 0$ possuem esterçamento final típico de sub-esterçado. Para aqueles para os quais $N_U < 0$, o comportamento final é de sobre-esterço e $N_U = 0$ indica comportamento final neutro. Veículos de passeio possuem este valor próximo de 0,2, um pouco menor para veículos de tração traseira e um pouco maior para os de tração dianteira.

A Tabela 1 ilustra as principais grandezas e suas influências no número de sub-esterço final em um automóvel de passeio cuja tração seja dianteira, onde vê-se que os principais fatores de influência são a posição do centro de massa, o coeficiente de sensibilidade de fricção do pneu à F_V, a transferência de carga lateral, bem como a transversal e as grandezas relacionadas às forças trativas.

Tabela 1 – Grandezas de influência em N_U. [Dixon, J. C., 1996, *Tires, Suspension and Handling*, pág 380]

Fator	$\Delta A_f/A_0$	$\Delta A_r/A_0$	ΔN_U
CG a 45% (a=0,45.L)	-0,100	+0,100	+0,200
N_f correspondente,N_r	+0,100	-0,100	-0,200
Sensibilidade à fricção em relação à posição do CG	-0,015	+0,015	+0,030
Trasferência de carga lateral (70%/30%)	-0,059	-0,011	+0,048
Transferência de carga longitudinal	-0,029	+0,029	+0,058
Tração (direção dianteira)	-0,040	0	+0,040
Ângulo de esterçamento (6º)	-0,044	0	+0,044
Resistência ao rolamento em relação à transferência de carga	-0,008	+0,006	+0,014
Totais (tração dianteira)	-0,195	+0,039	+0,234

- **Método dos Momentos**

O método dos momentos, complexo porém mais visual, considera a força lateral total no veículo e o momento de *yaw* como funções do ângulo de *yaw* (β) e do esterçamento (δ). Ele fornece um retrato de como o *handling* se comporta quando se faz um gráfico do coeficiente de momento total versus coeficiente de força lateral (Dixon, 1996).

Milliken (1995), afirma que o método dos momentos também está na categoria dos procedimentos cujo contexto é o de aproximação simplificada da realidade, mas a sua validade está no fato de seus parâmetros serem obtidos via testes experimentais, o que é uma vantagem sob o ponto de vista do comportamento real do veículo.

Parte-se do pressuposto que os parâmetros de estabilidade e conforto podem ser obtidos através de forças e momentos que atuam no veículo estando este em regime permanente.

Estes não estão em condição de equilíbrio (equilíbrio estático), mas sim em condição de não-equilíbrio (equilíbrio dinâmico), sendo os parâmetros de controle para os testes a aceleração lateral e longitudinal do veículo. Um dos testes realizados está esquematicamente ilustrado na Figura 18, onde pode-se ver que o efeito aerodinâmico não é considerado, bem como os efeitos de frenagem e aceleração são impostos pela via, e não pelo veículo. O modelo real de um equipamento de testes está mostrado na Figura 19.

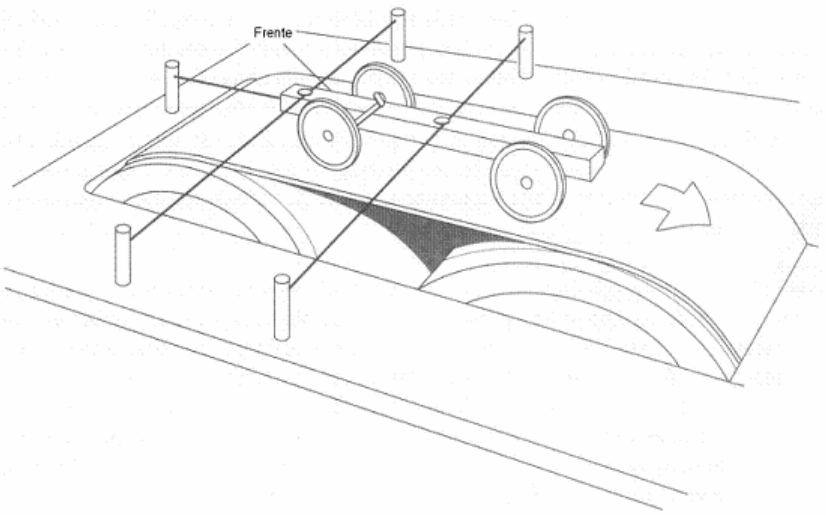


Figura 18 – Teste para o método dos momentos. [Milliken, W. F., Milliken D. L.,1995, *Race Car Vehicle Dynamics*, pág. 295]

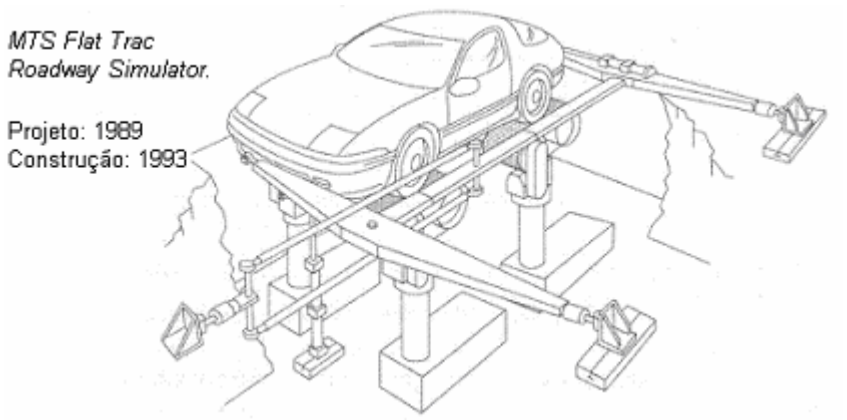


Figura 19 – Equipamento de testes – Método dos Momentos. [Milliken, W. F., Milliken D. L.,1995, *Race Car Vehicle Dynamics*, pág. 295]

Neste modelo, chamado de modelo de restrição, vê-se que estas são aplicadas em três locais (na frente, em duas posições, e no CG), com as seguintes finalidades: restringir o veículo longitudinalmente, a fim de se medir a reação às forças trativas e de frenagem e, das fixações laterais, obtém-se a força lateral total que atua no veículo. Esta força, multiplicada pela distância do ponto de aplicação dela ao CG fornece o momento de *yaw* do veículo. Da 2ª Lei de Newton:

$$F = m\,a = \left(\frac{W}{g}\right)a \Leftrightarrow \frac{F}{W} = \frac{a}{g}\text{, para a aceleração longitudinal} \tag{16}$$

E

$$M = I\alpha \Leftrightarrow \frac{M}{I} = \alpha\text{, para a aceleração angular} \tag{17}$$

Pelo Princípio de D'Alembert, no qual estabelece-se a condição de equilíbrio dinâmico pela ação de forças ou momentos virtuais que compensam as que agem no veículo, tem-se:

$$\frac{a}{g} - \frac{F}{W} = 0 \tag{18}$$

E

$$\alpha - \frac{M}{I} = 0 \tag{19}$$

Em condição de equilíbrio estático, o quociente F/W pode ser interpretado como uma aceleração longitudinal permanente, medida em g's. Raciocínio análogo é aplicado para o quociente entre a força lateral e o peso do veículo, neste caso sendo interpretado como uma aceleração lateral permanente. Dividindo-se o momento de *yaw* pelo momento de inércia obtém-se a uma aceleração de *yaw* permanente.

Neste teste, o veículo tem liberdade de movimento vertical, *pitch* e *roll* assim como um veículo real. Este procedimento tem a finalidade de garantir a correta distribuição de cargas nos pneus, conseqüentemente a transmissão de valores certos para a massa não suspensa. As variáveis relacionadas a estas forças verticais são:

- peso do veículo;
- transferência de carga longitudinal (frenagem / aceleração);
- transferência de carga lateral (manobras em curva);

Duas variáveis são importantes no estudo deste método: momento de *yaw*, N (ou seu coeficiente $C_N = N/(W.l)$), com o qual consegue-se correlacionar o esterçamento, estabilidade direcional e amortecimento, e a força lateral, Y (ou seu coeficiente $C_Y = Y/W$), de igual importância por dele obterem-se parâmetros de trajetória do veículo. Em testes de regime permanente, C_N e C_Y são funções dos ângulos de atitude, β, e de esterçamento, δ.

Testando-se o veículo em uma longa faixa de β's e δ's, suas características de manobrabilidade podem ser representadas em diagramas C_N versus C_Y, como o mostrado na Figura 20:

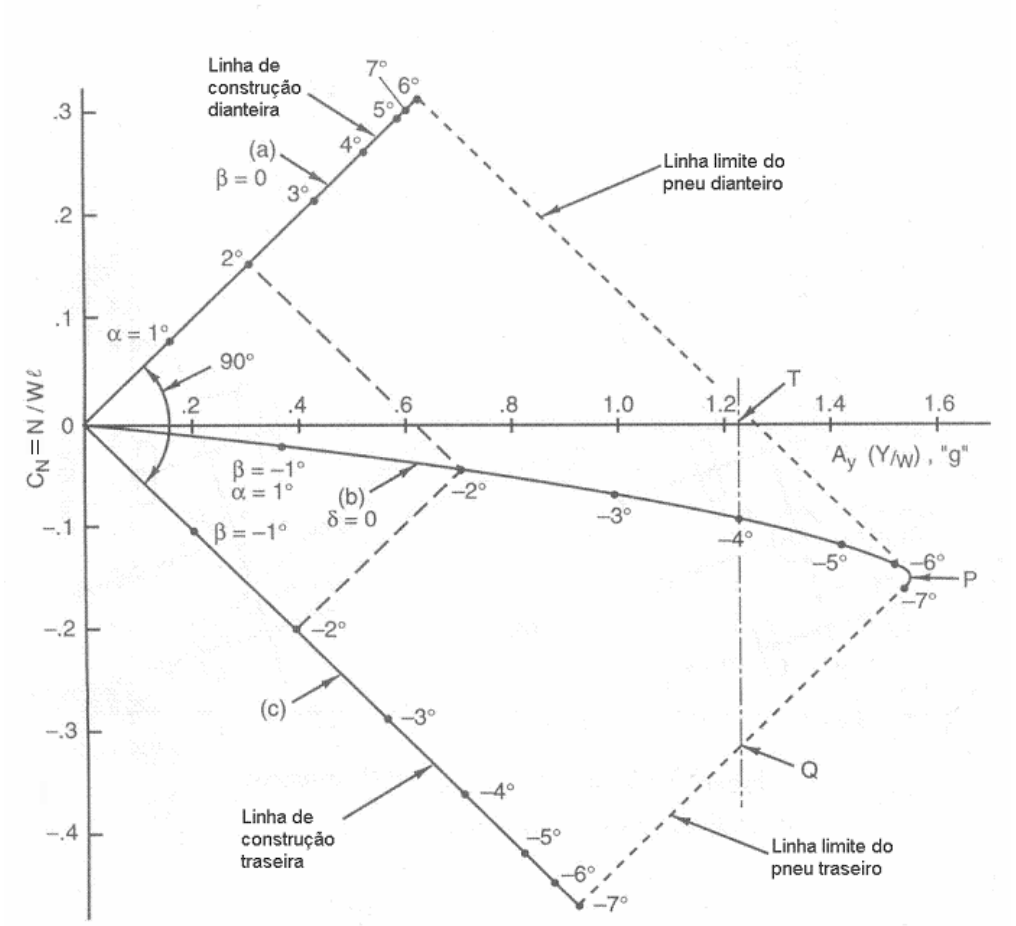


Figura 20 – Diagrama C_N-C_Y. [Milliken, W. F., Milliken D. L.,1995, *Race Car Vehicle Dynamics*, pág. 304]

Este gráfico, que é uma versão simplificada de uma diagrama do método dos momentos, será aqui apresentado com finalidade didática em relação à sua obtenção e manuseio. Tomou-se um protótipo com as seguintes características:

- distância entre-eixos: 8 pol. = 203,2 mm;
- localização do CG: a = b = 4 pol. = 101,6 mm;
- massa: 1,66 lb = 0,75 kg.

Uma simplificação é feita, considerando-se que toda a força lateral gerada pelo contato dos pneus com o solo é usada para equilibrar a força centrífuga na curva, ou seja, $C_Y = Y/W = A_Y = V^2/g.R$. Outras considerações deste diagrama são que o esterçamento é para a direita e com velocidade constante durante o teste.

Na construção deste diagrama, três situações devem ser levadas em conta (Figura 21):

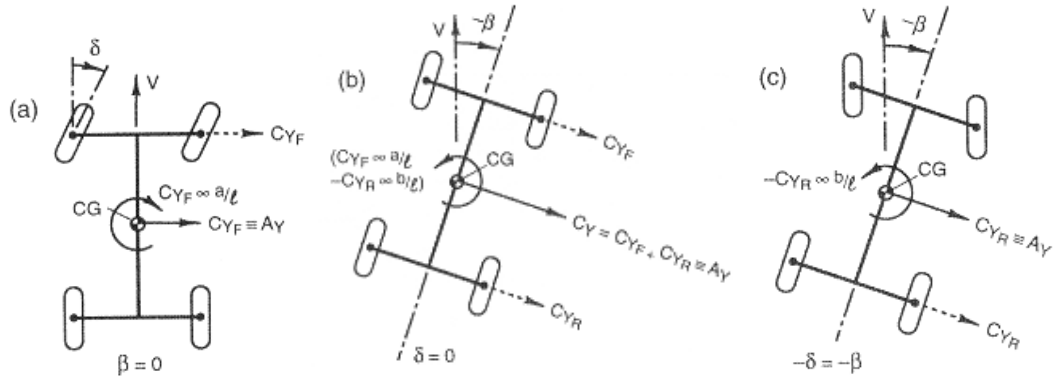


Figura 21 – Condições de teste para obtenção do diagrama do método dos momentos. [Milliken, W. F., Milliken D. L.,1995, *Race Car Vehicle Dynamics*, pág. 303]

- β é mantido zero enquanto as rodas dianteiras são progressivamente estercadas para a direita (Figura (21-a));
- δ é mantido zero enquanto β varia progressivamente (decremento em β), rotacionando todo o veículo para a direita (Figura (21-b));
- o veículo é rotacionado em β sendo que, em cada incremento neste ângulo, as rodas dianteiras são estercadas de tal forma a traze-lo à sua posição de origem (Figura (21-c)).

Analisando a primeira situação, a força lateral nas rodas dianteiras, C_{Y_F} pode ser transferida para o CG, com o respectivo conjugado, $C_{Y_F}\left(a/l\right)$. Os dados obtidos para este veículo são apresentados na Tabela 2.

Tabela 2 – Dados do modelo para $\beta = 0$, $\delta \neq 0$. [Milliken, W. F., Milliken D. L.,1995, *Race Car Vehicle Dynamics*, pág. 304]

$\alpha_F° \equiv \delta°$	$C_{Y_F} \equiv A_Y$	$C_N = C_{Y_F}(a/\ell)$
1	0.160	0.080
2	0.308	0.154
3	0.427	0.214
4	0.525	0.263
5	0.595	0.298
6	0.627	0.314
7	0.614	0.307

Esses dados geram a linha (a) da Figura 19, donde quanto maior se torna o ângulo de esterçamento do pneu, α, maior se torna a força lateral nele, atingindo um valor limite para α. Esta linha representa o momento (*control moment*) disponível em várias acelerações laterais para $\beta = 0$.

Para $\delta = 0$ e $\beta \neq 0$, o mesmo veículo apresenta dados conforme Tabela 3:

Tabela 3 – Dados do modelo para $\delta = 0$, $\beta \neq 0$. [Milliken, W. F., Milliken D. L.,1995, *Race Car Vehicle Dynamics*, pág. 305]

$\alpha_{F,R}° \equiv -\beta°$	C_{Y_F}	C_{Y_R}	$C_Y = C_{Y_F} + C_{Y_R}$	$C_{N_F} = C_{Y_F}(a/\ell)$	$C_{N_R} = C_{Y_R}(b/\ell)$	$C_N = C_{N_F} + C_{N_R}$
1	0.160	0.207	0.367	0.080	–0.104	–0.024
2	0.308	0.395	0.703	0.154	–0.198	–0.044
3	0.427	0.569	0.996	0.214	–0.285	–0.071
4	0.525	0.713	1.238	0.263	–0.357	–0.094
5	0.595	0.827	1.422	0.298	–0.414	–0.116
6	0.627	0.900	1.527	0.314	–0.450	–0.136
7	0.614	0.928	1.542	0.307	–0.464	–0.157

No diagrama da Figura 19 esses dados representam a linha (b). Quanto mais β torna-se negativo, a força lateral nos pneus dianteiro e traseiro aumenta, chegando ao limite para $\beta \approx -6º$ para o pneu dianteiro e $\beta \approx -7º$ para o traseiro. Como esta saturação ocorre primeiro para o pneu dianteiro em relação ao traseiro, o limite, no gráfico, do primeiro tende a acompanhar o segundo, o que pode ser visto pela inclinação da curva (b) e, mais acentuadamente, no ponto P assinalado no gráfico da Figura 19.

Na terceira situação, mostrada na Figura 21-c, toda a força lateral e o momento de *yaw* virão dos pneus traseiros. Os dados obtidos para o veículo de teste

estão na Tabela 4 e representam a curva (c) da Figura 19, na qual se vê que o limite inferior para os pneus traseiros ocorre para $\alpha = \beta = -7º$.

Tabela 4 – Dados do modelo para $\alpha = 0$, $\beta \neq 0$. [Milliken, W. F., Milliken D. L.,1995, *Race Car Vehicle Dynamics*, pág. 306]

$\alpha_R° \equiv -\beta°$	$C_{Y_R} \equiv A_Y$	$C_{N_R} = C_{Y_R}(b/\ell)$
1	0.207	–0.104
2	0.395	–0.198
3	0.569	–0.285
4	0.173	–0.357
5	0.827	–0.414
6	0.900	–0.450
7	0.928	–0.464

Uma vez obtido o gráfico, podem-se fazer umas considerações:

- as linhas (a) e (c), chamadas respectivamente de linhas de construção dianteira e traseira, possuem inclinação: $C_{N_F}/C_{Y_F} = C_{Y_F}\left(a/l\right)/C_{Y_F} = a/l$ para a curva (a)
- e
- $C_{N_R}/C_{Y_R} = C_{Y_R}\left(b/l\right)/C_{Y_R} = b/l$ para a curva (c). Como a relação a/l = b/l neste veículo de teste, o ângulo entre as linhas é de 90º. Se o veículo opera na linha (a), todas as forças e momentos vêm das rodas dianteiras. Raciocínio análogo ocorre para a linha (c), onde os esforços virão das rodas traseiras.
- A linha (b) tem componentes de força e momento vindos das rodas dianteiras e traseiras. Por exemplo, um ponto referente ao ângulo de –2º sobre a curva é obtido por uma soma vetorial de componentes referentes às duas curvas. Um ângulo de 2º da parte dianteira (curva (a)) e –2º da traseira (curva (c)), somados vetorialmente, fornecem este ponto na curva (b). As linhas tracejadas mostram as componentes vetoriais que resultarão no vetor soma.
- Para um veículo estar em equilíbrio permanente o momento de *yaw*, C_N, deve ser zero. Embora o ponto P ocorra a uma aceleração de

1,54g, este não pode ser alcançado sob condição de equilíbrio, mas apenas em um transitório dinamicamente obtido, por exemplo, em alguma manobra;

- O máximo valor de aceleração lateral em condição de velocidade constante está assinalada pelo ponto T, com valor de aproximadamente 1,23g. Neste ponto, os pneus dianteiros já se encontram no limite da sua força lateral, mas ainda existe um grande momento de yaw devido a ação da parte traseira, C_N = 0,31, como mostra o ponto Q. Neste limite o veículo tende ao sub-esterçamento (*plow*);
- Atualmente, uma boa medida do comportamento do veículo em termos de sub/sobre-esterçamento final pode ser obtido deste gráfico, através da posição do ponto P em relação ao eixo A_Y. Se o ponto P está abaixo do eixo A_Y, o veículo terá comportamento final sub-esterçado (*plow*); se o ponto P estiver sobre o eixo, o comportamento será neutro (*drift*) e, se acima, será sobre-esterçado (*spin*).

Realizando o teste neste mesmo veículo para esterçamento nas duas direções, obtém-se um diagrama completo, em quatro quadrantes, chamado de Diagrama do Método dos Momentos, conforme Figura 22:

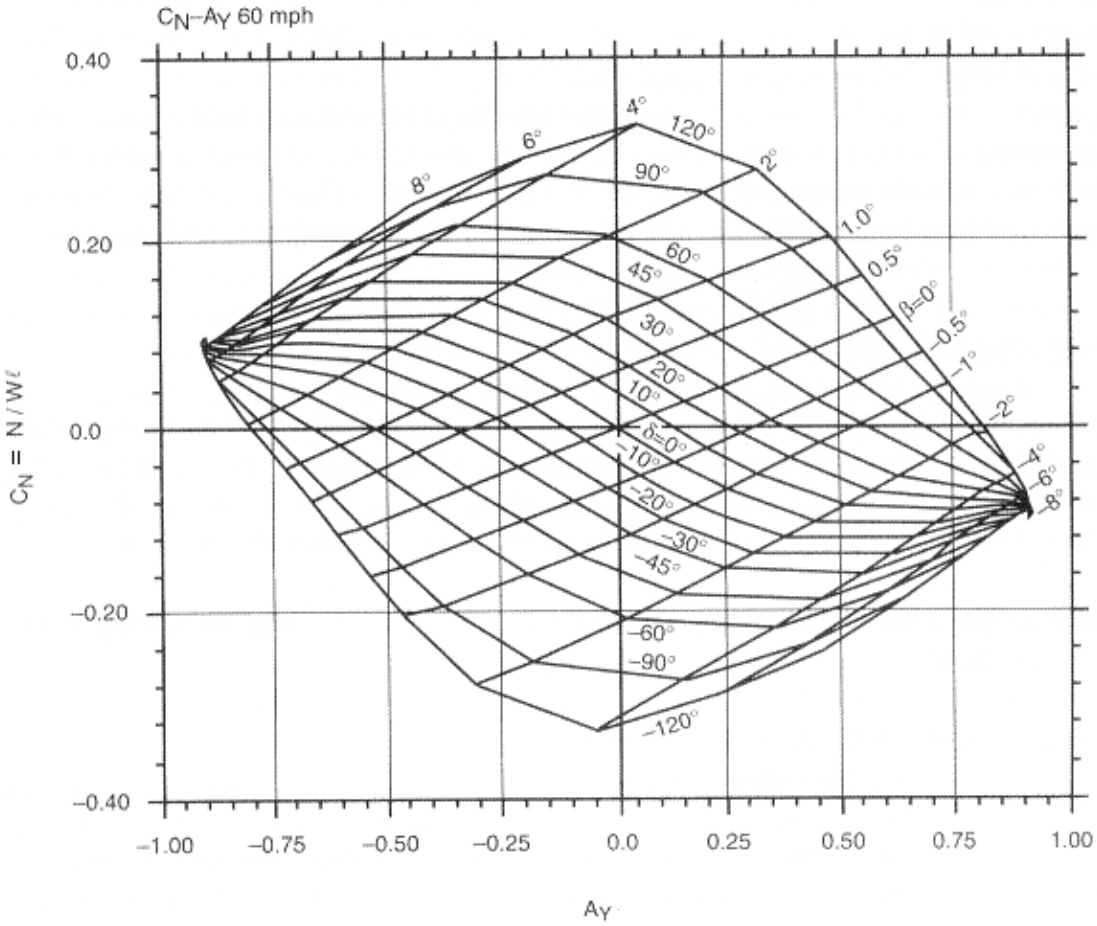


Figura 22 – Diagrama do Método dos Momentos em quatro quadrantes. [Milliken, W. F., Milliken D. L.,1995, *Race Car Vehicle Dynamics*, pág. 307]

Este diagrama cobre o comportamento do veículo em todas as manobras em velocidade constante e em raios diferentes, fornecendo valores a serem usados no cálculo de parâmetros tais como índice de estabilidade, sensibilidade ao esterçamento, ao rolamento, dentre outros. O diagrama que representa o comportamento de um veículo em uma situação de raio constante e em várias velocidades é o diagrama C_N-C_Y., mostrado na Figura 19.

As linhas δ, de inclinação negativa, são construídas com base no ângulo de esterçamento das rodas traseiras (linhas de construção traseiras) e apresentam as forças e momentos advindos da interação delas com a resposta do veículo. As linhas β, de inclinação positiva, são as respostas do veículo, em termos de forças e momentos, relacionados à parte dianteira do veículo, ou seja, são as linhas de construção dianteiras. Para obter-se o valor total da força (ou do momento atuante) em virtude da atuação de *slip angles* nos pneus

dianteiros e traseiros, adiciona-se seus componentes (de força ou de momento) referentes à parte traseira e dianteira, separadamente, para cada *slip angle*, tirando os dados das respectivas linhas de construção dianteira e traseira.

No uso do diagrama, prefere-se o uso de β e δ a α_R e α_F. Lembra-se que a correlação entre estas variáveis é:

$$\alpha_F = \beta + a/R \tag{20}$$

E

$$\alpha_R = \beta - b/R \tag{21}$$

Também não se deve esquecer que C_N é proporcional à aceleração angular, α, pois:

$$N = I\alpha \tag{22}$$

E

$$C_N = {I\alpha}/{Wl}, \text{ com } I, W \text{ e } l \text{ constantes.} \tag{23}$$

Esta abordagem permite ver o diagrama como um gráfico de aceleração angular versus aceleração lateral. Fora no eixo horizontal, N é responsável por criar esta aceleração angular. Por exemplo, supõe-se que é imposto ao veículo um esterçamento de 90º, tão rapidamente aplicado que não há rotação do veículo e β permanece constante por alguns instantes. Neste caso, o veículo passa a ter um momento de *yaw* (em condição de não-equilíbrio) e suas acelerações angular e lateral associadas. Após alguns instantes, o veículo passa a ter $\beta \neq 0$ e rotaciona, passando a se mover em uma trajetória diferente. Levando-se em conta a mudança na curvatura no processo de integração, o comportamento dele, em busca de uma nova condição de equilíbrio, poderá ser obtido através do diagrama. Essa é uma das várias aplicações deste diagrama, por conseguinte, do Método dos Momentos. O método cinemático é essencialmente para regime permanente, enquanto o de momentos é mais utilizado em regimes transientes (Dixon,1996).

2.4 - Suspensão

Os sistemas de suspensão surgiram, na indústria automotiva, em decorrência da necessidade de se reduzir a amplitude dos movimentos impostos pelo piso no chassi, bem como do aumento da capacidade do veículo de se manter estável em manobras que, com o passar do tempo, são realizadas em velocidades cada vez maiores.

Okabe (2003) mostra que a história oficial das suspensões veiculares começa próxima ao início do século VIII numa tentativa, hesitante e ruidosa, de implementação de uma suspensão com correntes de ferro numa carruagem real. Kenneth (2000) narra que um cesto de vime era preso às quatro pontas de uma plataforma com rodas através das correntes. Os viajantes tinham de ser imunes a enjôos neste tipo de estrutura, pois ela balançava de forma ininterrupta produzindo um ruído terrível. No entanto, este sistema primitivo seria o princípio básico de todas as suspensões por quase mil anos.

No século 15, o coche, originado nos reinos da Bavária e Hungria, teve seu uso popularizado. As correntes foram substituídas por quatro tiras de couro que mais tarde foram colocadas embaixo da carroceria das carruagens. Finalmente, no século 17, a mola de metal surgiu, mas as tiras agora eram fixadas às pontas das molas de lâmina em forma de C; as outras pontas eram fixadas ao chassi da carruagem. Por atrito entre as lâminas, estas molas reduziam o balanço, mas o sistema tinha de ser robusto já que muitas carruagens pesavam mais de dez toneladas.

Um século depois, com o desenvolvimento de novas tecnologias e o aperfeiçoamento das técnicas de forjamento e têmpera em aços, foi possível desenvolver veículos mais leves e resistentes. Em 1804, Obadiah Elliot construiu o primeiro veículo de tração animal realmente leve, rápido e seguro: a carroça de oito molas, com duas molas de lâmina, opostas, em cada uma das quatro rodas. Isto eliminou os chassis pesados. Deste modo, as carrocerias podiam ser fixadas aos eixos por meio das molas. Desde 1873, a *Obéissante* de Amédée Bollée era suspensa nas quatro rodas, independente, molas duplas elípticas na frente e planas na traseira, também opostas, como ilustrado na Figura 23.

Figura 23 – *Obéissante* (Obediente) de Amédée Bollée. [Okabe, E. P., 2003, *Metodologia de projeto para desenvolvimento de suspensão veicular*, pág. 22].

Em 1898, o Decauville foi o primeiro veículo a utilizar suspensão dianteira independente, na competição Paris-Madrid. Este sistema só foi popularizado em 1931, no Peugeot 201c e em 1932 por outros fabricantes. Entre 1902 e 1903 registra-se a primeira utilização de amortecedores hidráulicos. Esta solução foi quase que imediatamente adotada por todos os fabricantes de carros, que utilizaram variações deste sistema combinando amortecedores hidráulicos com amortecedores de inércia e fricção. Em 1933 a *Auto Union* lançou o modelo Gran Prix tipo A, que utilizava barras de torção. Esta solução foi adotada pela Mathis em 1933 e pela Citroën em seu modelo Traction Avant, em 1934. A partir de 1945 teve seu uso popularizado através do VW Sedan e do Citroën 2CV. Com o desenvolvimento de motores maiores e mais potentes (o recorde de velocidade já chegava a 430 km/h) obrigava-se o desenvolvimento de suspensões mais robustas e eficientes.

Em 1940, Earle MacPherson, projetista da Ford, idealizou e construiu a suspensão independente que leva seu nome, hoje largamente utilizada, tendo sido inicialmente implementada em 1950 num pequeno Ford Inglês. Em 1955, a Citroën lançou o modelo hidropneumático DS que automaticamente ajustava sua altura e podia se adaptar aos mais diferentes terrenos. A partir dos anos 60, os modelos de competição começaram a utilizar sistemas de suspensão *Multi-link*, em que os braços de suspensão foram substituídos por pequenos

tubos de ligação com juntas esféricas nas pontas, em conjunto com chassi monobloco. Este tipo de suspensão bastante sofisticado ainda é utilizado pelos carros da Fórmula 1.

Em 1972, a *Automotive Products* projetou e construiu protótipo de um sistema de suspensão ativo altamente sensível, com rápida ação de auto-nivelamento e sistema anti-rolagem, constituído de uma bomba com pressão de 200 bar e um sistema hidráulico que acionava os atuadores de cada roda através de válvulas, que por sua vez eram acionadas por um sistema de pêndulos que detectava as acelerações do veículo. Cerca de quinze anos depois, com o avanço da eletrônica, a Lotus adotou um sistema com o mesmo princípio mas comandado agora por acelerômetros e um microcomputador, no modelo Lotus 99T. Este sistema de suspensão ativo foi denominado *Active Ride*.

Em 1996, a Ford lançou um Cadillac com um sistema chamado CVRSS (*continuous variable road-sensing suspension*), composto por uma série de sensores que acionam os amortecedores hidráulicos das quatro rodas, melhorando comportamento dinâmico da suspensão. O sistema se ajusta em centésimos de segundo, o equivalente para o carro percorrer 30 cm estando a 100km/h.

A Land Rover desde 1999 oferece no Land Rover Discovery Series II o sistema ACE (*active cornering enhancement*), que utiliza um sistema hidráulico que substitui as barras estabilizadoras da suspensão dianteira e traseira, aplicando um torque ao chassi utilizando uma configuração de dois pistões com alavanca. O sistema tem a capacidade de reagir a até 1.0 g de aceleração lateral em 250 milisegundos. A Mercedes-Benz, desde 2000, oferece em seu modelo CL500 um sistema de suspensão totalmente ativo (ABC - *Active Body Control*), usando 13 sensores que alimentam quatro atuadores servo-hidráulicos, posicionados no topo de cada mola. Um sistema microcontrolado ajusta os parâmetros da suspensão a cada 10 milisegundos.

Atualmente os veículos vêm equipados com diversos tipos de conjuntos de suspensão, cada um atendendo a um leque de características (de projeto, custo, desempenho, etc). De acordo com Gillespie (1992) e Dixon (1996), as principais características comuns em relação às funções do sistema de suspensão são:

- Isolar o chassi das irregularidades da pista, através da atuação de seus elementos elásticos e de amortecimento, quando do movimento vertical das rodas;
- Permitir que as rodas, uma vez determinados os seus ângulos em uma manobra, mantenham-nos o mais fielmente possível;
- Suportar as reações impostas pelos pneus, transmitir acelerações e suportar frenagens, bem como forças laterais e momentos decorrentes desses esforços;
- Reagir à tendência de *roll* da carroceria;
- Manter os pneus em contato com o solo, mesmo sob pequenas variações de carregamento.

Ou seja, três características básicas devem ser atendidas para que o projeto da suspensão tenha sido bem executado:

- Permitir isolamento individual de uma excitação por parte da roda excitada, sem sua transmissão para as demais;
- Permitir o controle do *roll* da carroceria, que não deve ser excessivo pois representa grande deslocamento do centro de massa do veículo, o que pode prejudicar sua manobrabilidade, nem muito pequeno pois isto seria conseqüência de um enrijecimento do sistema e, por conseguinte, afetaria o conforto. Além do mais, o *roll* é um indicador de *cornering* para o projetista;
- Ter uma geometria tal que o câmber seja minimamente alterado quando o veículo passa por manobras de aceleração, frenagem, curva e pela excitação da pista.

Na Figura 24 é ilustrado um sistema de suspensão esquemático, a fim de se entender suas funcionalidades acima citadas:

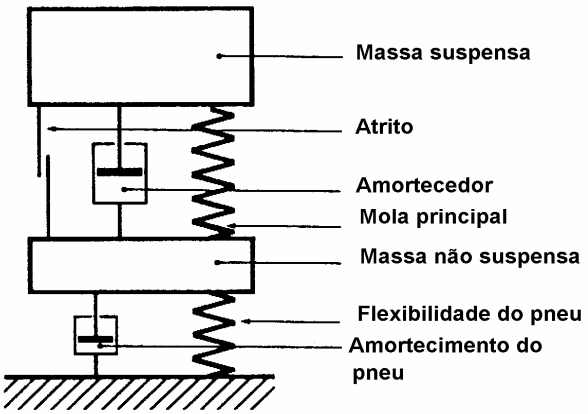


Figura 24 – Sistema de suspensão esquemático. [Máximo, Luiz F. B., 2002, *Estudo do comportamento dinâmico de um veículo de passageiros em manobras de handling*, pág. 07].

A mola principal atua na sustentação da massa suspensa em conjunto com o amortecedor, que dissipa esta energia. Este conjunto também trabalha na atenuação do movimento da roda que tende a passar para a carroceria. A função do atrito seco é a implementação mais realista do fenômeno de amortecimento por dissipação de energia na modelagem. No caso dos pneus, normalmente os modelos são feitos levando-se em conta apenas a sua flexibilidade, sendo, em casos onde uma maior precisão é requerida, utilizado também um componente para fazer referência à parcela de amortecimento.

A suspensão filtra a vibração absorvendo parte da energia elástica, energia cinética da massa não-suspensa e energia térmica, o que é verificado pelo fato de a freqüência relacionada ao sistema de suspensão ser de ordem superior à primeira freqüência de corpo rígido da carroceria. Com isto pode-se concluir que a resposta do veículo é função da relação entre a excitação e a transmissibilidade da suspensão. No caso ilustrado pela Figura 25, relativa a uma excitação randômica, o espectro de aceleração revela um trecho de maior amplitude, referente à freqüência natural da massa suspensa, seguida de atenuação e outro pico, referente à massa não suspensa. Percebe-se que o espectro da resposta é qualitativamente similar à transmissibilidade do veículo, o que confirma a afirmativa a respeito da característica da resposta ser influenciada pelos componentes do sistema de suspensão.

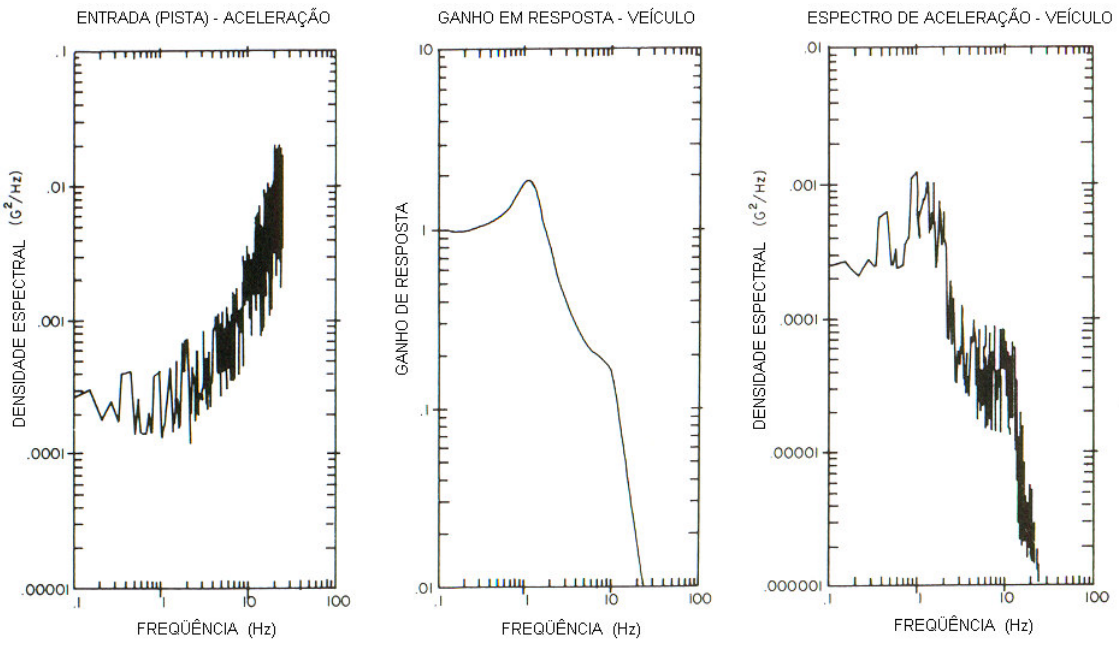


Figura 25 – Isolamento da aceleração gerada por um perfil em um modelo *quarter-car* [Gillespie, T. D., 1992, *Fundamentals of Vehicle Dynamics*, pág.153].

Os sistemas de suspensão usualmente são divididos em dois grupos, de acordo com a interdependência entre o movimento das rodas: suspensões de eixo rígido ou independentes. Usualmente possuem características diferentes entre a parte anterior e posterior, sendo responsável direta pelo *handling* do veículo. Algumas destas são: rigidez das molas, coeficiente de amortecimento dos amortecedores, câmber em linha reta, alterações do câmber quando da mudança de direção das rodas, posição do centro de rolagem da suspensão, freqüência e modos vibracionais dos seus elementos.

2.4.1 – Suspensões de eixo rígido

Caracterizam-se por possuir algum tipo de vínculo entre uma roda e sua correspondente do outro lado do veículo, de tal forma a transmitir parte de seu movimento à outra. A relação de dependência é essencialmente estabelecida geometricamente, ou seja, uma barra estabilizadora em um sistema independente não torna o sistema como sendo de eixo rígido. Costuma-se dar a este o nome de sistema de semi-independente.

Uma vantagem dos sistemas de eixo rígido é a não influência do movimento de *roll* da carroceria no ângulo de câmber a terra (medido com a referência no ponto de contato do pneu com o piso, num eixo paralelo ao eixo **z** – plano **zy**), o que leva a pequenas variações em manobras de curva. Também o próprio eixo colabora na manutenção do alinhamento, reduzindo o desgaste dos pneus. A maior desvantagem apresentada por este sistema é justamente pelo fato de existir o elemento rígido de ligação entre as rodas, o que, principalmente em manobras de esterçamento, aumenta o nível de desconforto vibracional para o motorista, baixando a qualidade do *ride* do veículo. Além disto, em excitações do tipo lombada (*bump*), os sistemas rígidos alteram o câmber das duas rodas ao mesmo tempo.

São mostrados, nas Figuras 26, 27 e 28 abaixo, exemplos das suspensões de eixo rígido mais utilizadas: Quatro Links (*Four Link*), *Hotchkiss* e De Dion:

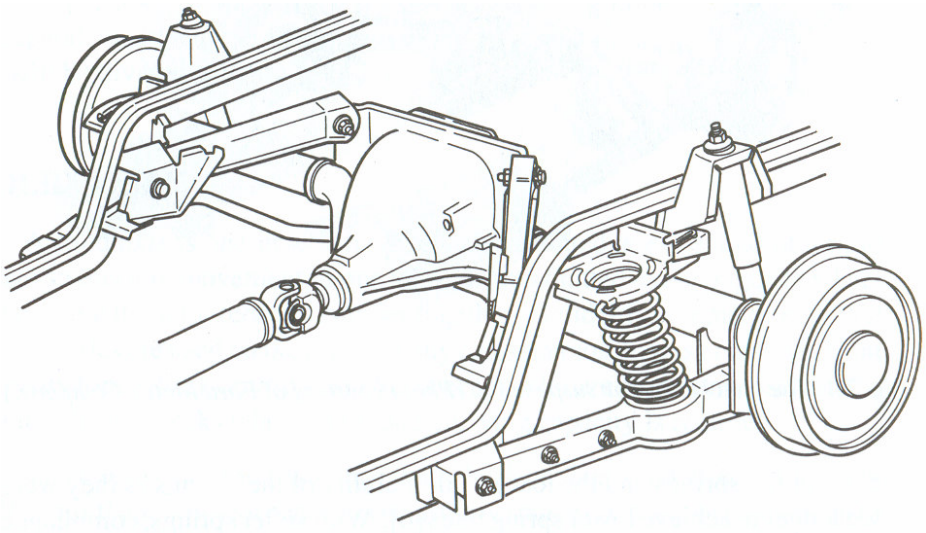


Figura 26 – Sistema de suspensão traseira *Four Link* [Gillespie, T. D., 1992, *Fundamentals of Vehicle Dynamics*, pág. 240].

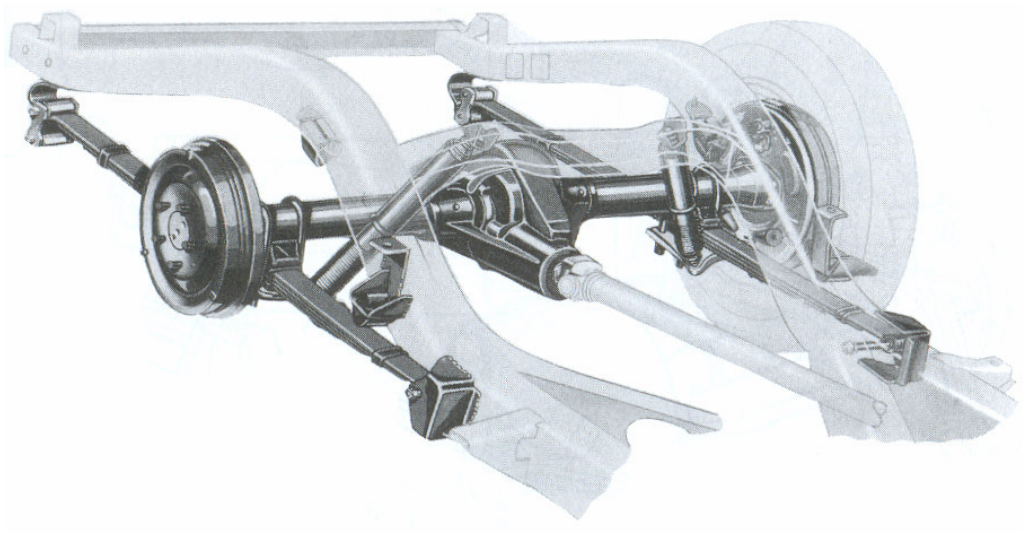


Figura 27 – Sistema de suspensão traseira *Hotchkiss* [Gillespie, T. D., 1992, *Fundamentals of Vehicle Dynamics*, pág. 239].

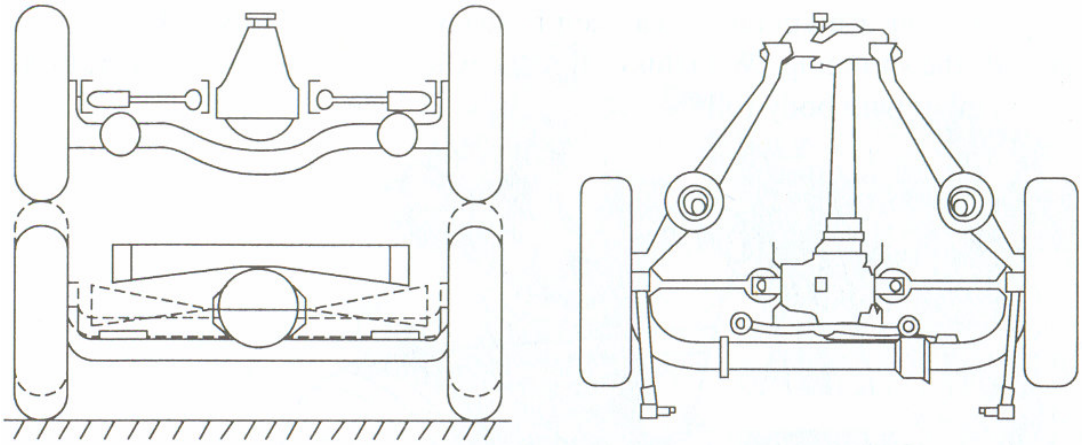


Figura 28 – Sistema de suspensão traseira De Dion [Gillespie, T. D., 1992, *Fundamentals of Vehicle Dynamics*, pág. 241].

2.4.2 – Suspensões independentes

São aquelas que permitem o deslocamento de cada roda, sem transferir seu movimento à correspondente do mesmo eixo. Geralmente são adotadas nas suspensões dianteiras por requererem menor espaço para montagem e por não apresentarem o elemento de ligação entre rodas, o que aumenta o vão para colocação do motor, caixa de marchas e outros elementos referentes ao conjunto motopropulsor.

Além da vantagem de maior espaço útil no compartimento do motor, estes sistemas de suspensão permitem um maior controle do centro de rolagem (RC) pela alteração da geometria da suspensão, bem como pela relação entre movimentos desta e da carroceria, o que é ilustrado na Figura 29.

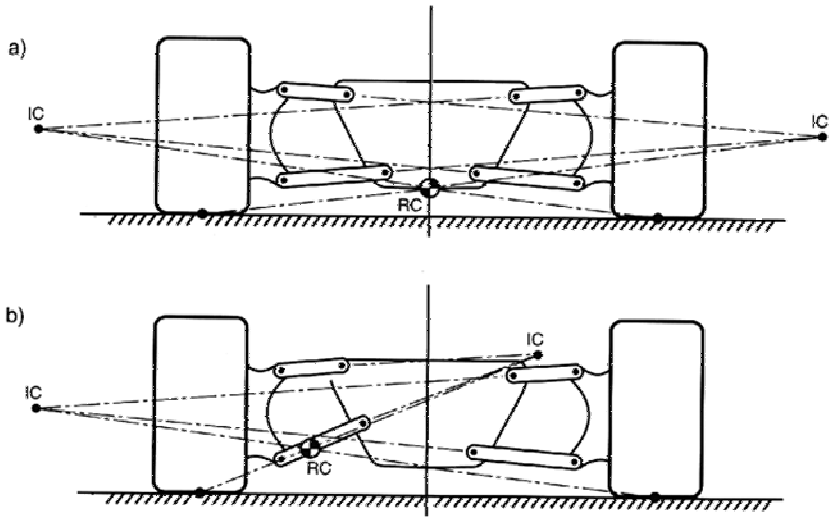


Figura 29 – Variação do centro de rolagem (RC) e do centro instantâneo de rotação (IC), sem movimento do chassi (em (a)) e com movimento deste (em (b)) [Milliken, W. F., Milliken D. L., 1995, *Race Car Vehicle Dynamics*, com adaptações].

É desejável que o centro de rolagem esteja o mais próximo possível do centro de gravidade do veículo, para minimizar o efeito do momento de rolagem, quando ele é indesejado no projeto da suspensão.

Os tipos de suspensão independente mais adotados na indústria automotiva são: braços oscilantes (*Trailing-Arm*), SLA (S*hort-Long Arm* ou *Double Wishbone*), MacPherson (comumente escrito como McPherson), *Multi-Link*, dentre outros.

2.4.2.1 – Suspensão independente tipo braços oscilantes

Data da Segunda Guerra mundial, sendo desenvolvida pela Volkswagen e Porsche e é uma das mais simples e econômicas configurações de suspensão independente. Sua estrutura é ilustrada no detalhe A da Figura 30.

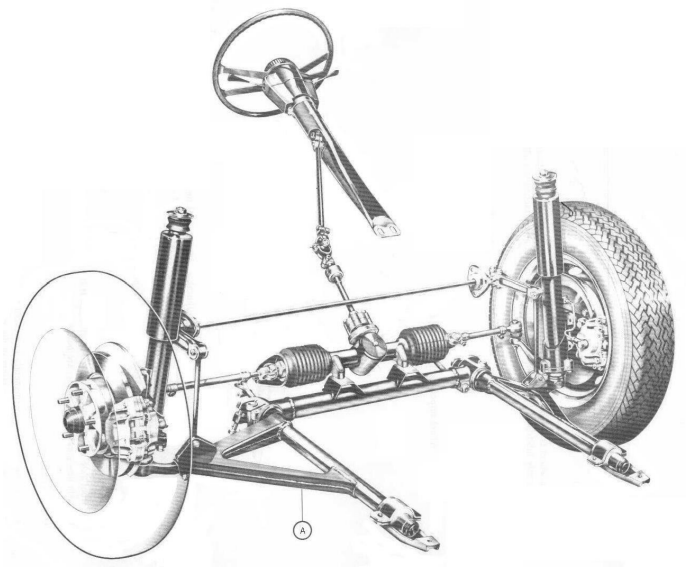


Figura 30 – Sistema de suspensão independente do tipo braços oscilantes [Frog, Kermit D., 2004, *http://www.strongshock.com/kermy.htm*].

Este sistema possui dois braços oscilantes que se prendem em suas extremidades ao chassi e de forma rígida às rodas. São mais robustos que os outros elementos da suspensão por suportarem as molas e amortecedores. Vê-se que a mola helicoidal é substituída por uma barra de torção. Este sistema permite total movimento vertical das rodas, mas restringe movimentos laterais e alterações de câmber (em relação ao pavimento), o que pode ser visto na Figura 31 abaixo.

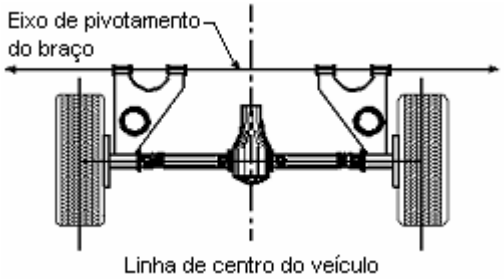


Figura 31 – Sistema de suspensão independente do tipo braços oscilantes – vista superior [Riley, Robert Q., *http://www.rqriley.com/images/fig-18.gif*].

Quando o veículo descreve uma curva, há a tendência à rolagem da carroceria e os braços oscilantes inclinam-se do mesmo ângulo, o que acaba por provocar uma alteração no ângulo de câmber da direção. Em conseqüência, as rodas tendem a se posicionar para fora da curva, o que pode levar o veículo a uma

condição de sub-esterço. Por causa disto, alguns fabricantes passaram a usar o sistema *Semi-Trailing-Arm*.

2.4.2.2 – Suspensão independente tipo *Semi-Trailing-Arm*

Possui seus braços oscilantes inclinados de 50 a 70 graus, considerando como referência a linha de centro do veículo (eixo **x**), conforme visto na Figura 32.

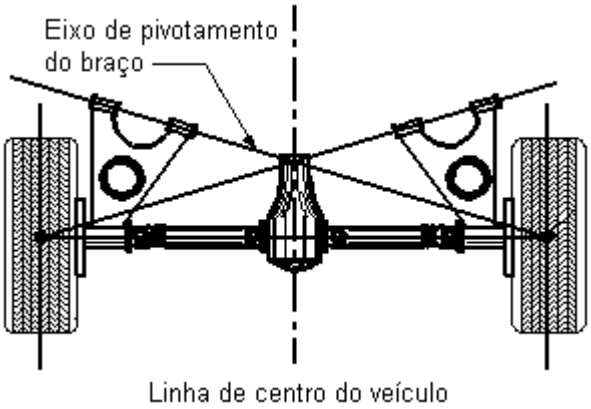


Figura 32 – Sistema de suspensão independente do tipo *Semi-Trailing-Arm* – vista superior [Riley, Robert Q., *http://www.rqriley.com/images/fig-18.gif*].

Aparentemente, pode-se considerar este sistema como a conjunção de uma parcela referente aos braços oscilantes (ângulo de inclinação do braço igual a 90º) com outra, transversal. A primeira leva o sistema ao sub-esterçamento, enquanto a outra leva o veículo ao sobre-esterçamento. O conjunto, então, tende ao comportamento neutro.

Da mesma forma que o sistema por braços oscilantes, o sistema *Semi-Trailing-Arm* também altera o ângulo de câmber quando há o movimento vertical das rodas.

Os dois sistemas acima apresentados, por terem vínculo rígido com as rodas, transmitem ruído e vibrações para o habitáculo do veículo, principalmente em manobras de curvas de pequenos raios ou em grandes velocidades, quando de passagem por pistas do tipo *pavé*. O fato de os braços oscilantes possuírem muita massa contribui para que a massa do conjunto não suspenso aumente, o que desfavorece o comportamento de *ride* do veículo por uma maior excitação pelas forças de inércia geradas por estas massas no conjunto suspenso.

2.4.2.3 – Suspensão independente tipo SLA ou *Double Wishbone*

Recebe o nome *Short-Long Arm* (EUA) ou *Double Wishbone* (Grã-Bretanha) por ser composto por dois braços (do inglês *arms* ou *wishbones*) de tamanhos diferentes, um superior e outro inferior, fixados em dois pontos no chassi e por um ponto à roda, conforme ilustrado na Figura 33.

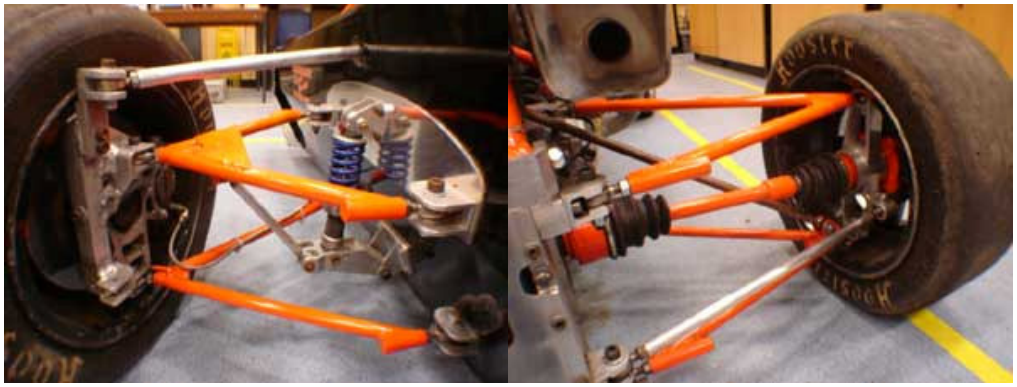


Figura 33 – Suspensão independente do tipo *Double Wishbone*, dianteiro (esquerda) e traseiro (direita) [University of Ulster Jordanstown, 2004, *http://www.uujracing.com/car_list04.html*].

É uma configuração comum de ser encontrada em carros de alto desempenho, uma vez que permite ao projetista um controle refinado do câmber, por conseguinte, de outras propriedades dinâmicas do veículo pelo posicionamento dos braços, de acordo com a Figura 34.

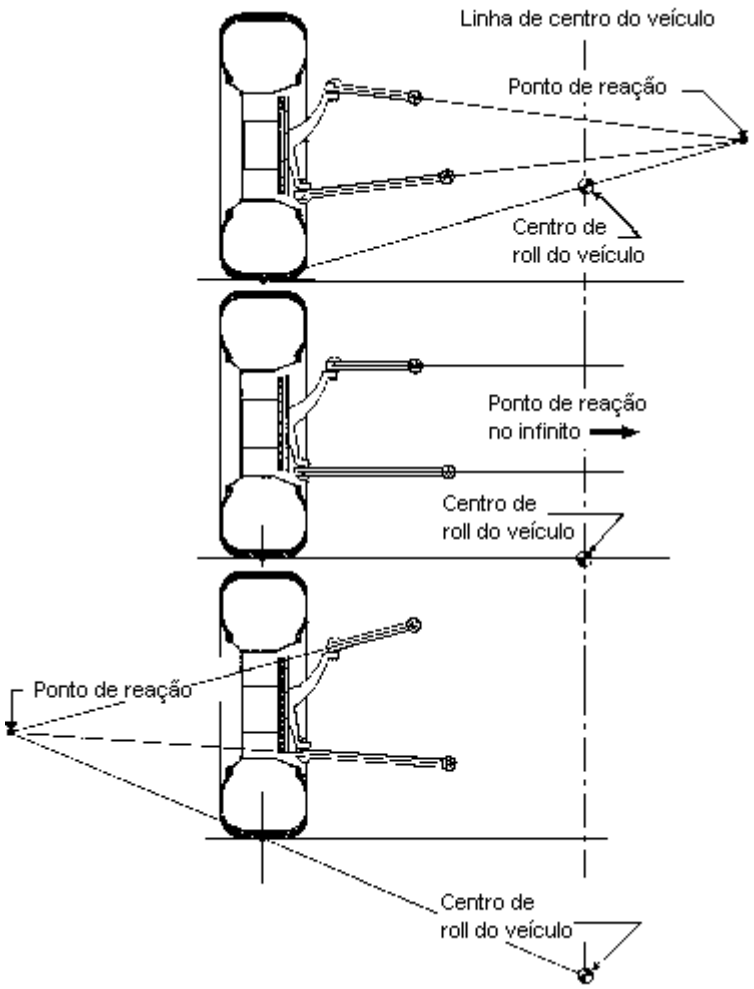


Figura 34 – Controle do centro de rolagem pela variação de posição dos braços na suspensão *Double Wishbone* [Riley, Robert Q., *http://www.rqriley.com/images/fig-12.gif*].

Para resistir aos movimentos gerados durante frenagens, por exemplo, usam-se, nas fixações, buchas ou juntas esféricas. Sua colocação em ângulos determinados pode levar a configuração deste tipo de suspensão para ter um comportamento antimergulho ou antilevantamento. Ao mesmo tempo, pode-se ver que sua montagem é um pouco mais complexa, o que favorece o uso de sistemas mais simples, tais como o MacPherson.

2.4.2.4 – Suspensão independente tipo MacPherson

Este sistema incorpora o conceito de fixação de um braço à roda, o que torna sua configuração mais simples que o *double wishbone* por substituir o braço superior por uma estrutura telescópica pivotada num braço tipo A ou num

conjunto de *links* inferior, também responsável por abrigar o amortecedor e suportar a fixação da mola. Esta montagem aumenta o espaço disponível , o que pode ser positivo para a colocação de outros elementos do conjunto motopropulsor, por exemplo. É esta estrutura telescópica que possibilita a manutenção do câmber. Um exemplo deste tipo de suspensão é ilustrado na Figura 35.

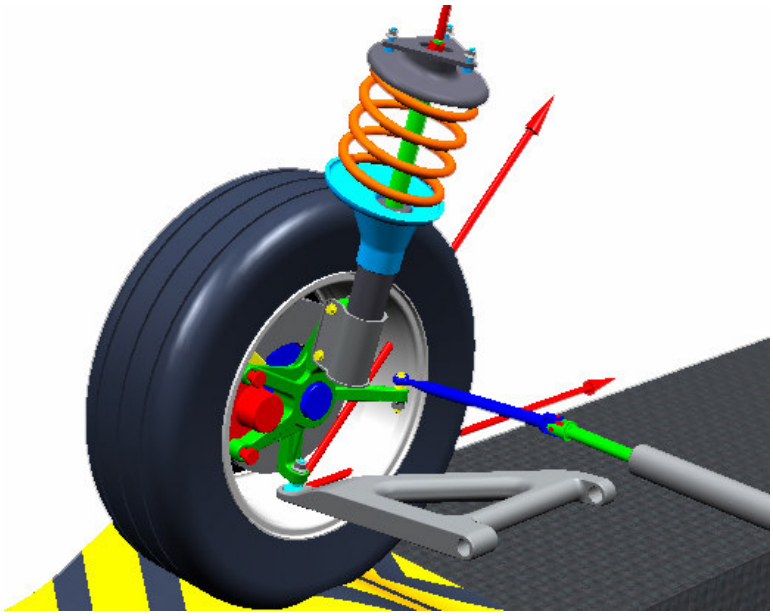


Figura 35 – Suspensão independente do tipo MacPherson, [MSC Software,2004,*http://www.mscsoftware.com/assets/2479_ADAMS_Suspension_D.jpg*].

Em contrapartida, esta configuração não favorece o *handling,* pois na presença de rolagem da carroceria e movimentação das rodas, há o surgimento de esforços laterais no ataque da suspensão, esforços estes que tendem a alterar o câmber e até provocar deslocamentos laterais. Comparada com o sistema SLA, a suspensão MacPherson transmite vibração em maior intensidade para o habitáculo, o que requer constante estudo no que se refere ao sistema amortecedor, bem como permite menor controle do centro de rolagem e do ângulo de câmber.

Da mesma forma que o sistema *Double Wishbone*, a configuração MacPherson pode ser aplicada tanto na suspensão anterior quanto na posterior, mas nesta, por apresentar resultados insatisfatórios em manobras de *handling*, passou-se a usar mais freqüentemente a suspensão do tipo *Multi-link*.

2.4.2.5 – Suspensão independente tipo *Multi-link*

É uma tarefa árdua descrever de forma única os sistemas do tipo *Multi-link* uma vez estes podem admitir diversas configurações de acordo com o critério de projeto a ser atendido pelo conjunto de *links* que o constitui, conforme é ilustrado na Figura 36.

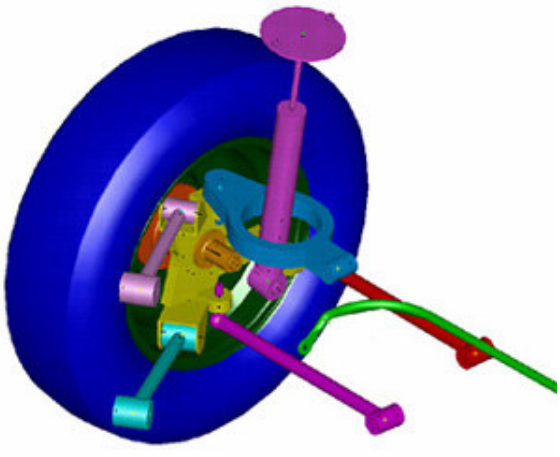


Figura 36 – Suspensão independente do tipo *Multi-link.*

Esta gama de variações é que dá ao projeto a possibilidade de controlar, quase que individualmente, os diversos parâmetros da suspensão para beneficiar as características dinâmicas do veículo. Por exemplo, um par de braços paralelos ao plano do piso é responsável pelo controle do esterçamento e da flexibilidade lateral. Braços instalados num plano frontal controlam o câmber e os instalados no plano lateral do veículo, além de atuarem no controle do caster, colaboram na compensação do torque de frenagem.

Esta maior flexibilidade de aplicação requer uma atenção especial no projeto dos braços, uma vez que na maioria das vezes eles são fixados à carroceria ou às rodas através de juntas esféricas. Desta forma os esforços de tração e compressão são transmitidos ao longo do comprimento do braço, enquanto a flexão, por não apresentar este comportamento quando a restrição é esférica, se torna um fator crítico de projeto.

2.4.2.6 – Suspensão semi-independente com barra de torção

Considera-se este sistema como semi-independente pois existe um elemento de ligação entre as rodas, a barra estabilizadora, também chamada de barra de

torção, que limita os graus de liberdade relacionados ao deslocamento vertical das rodas às quais ela está conectada.

A barra de torção funciona sob o princípio da mola de torção, ou seja, atua aumentando a rigidez do sistema de suspensão quando há defasagem entre a altura das rodas, conforme ilustrado na Figura 37. Sua principal função é auxiliar no controle da rolagem da carroceria e, por conseguinte, alterar as condições de sub e sobre-esterçamento do veículo através da modificação da geometria da suspensão. Segundo Reimpell e Stoll (1996), observa-se uma maior tendência ao sub-esterço em veículos cuja barra esteja instalada na suspensão dianteira. Quando instalada na suspensão traseira a tendência é de comportamento neutro para veículos de tração dianteira e de sobre-esterço para os de tração traseira.

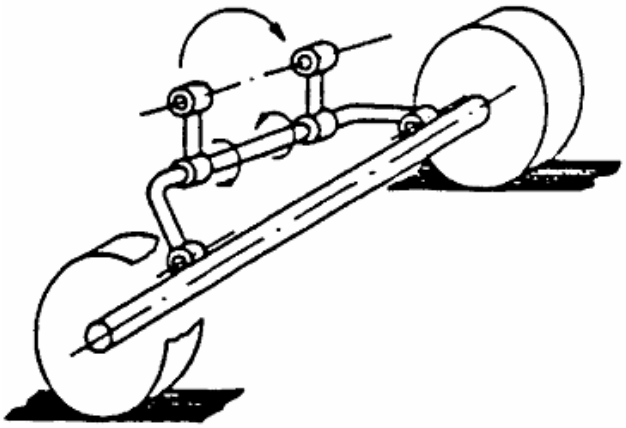


Figura 37 – Atuação da barra estabilizadora ou barra de torção [Biasizzo, Mauro Bruno, 2001, *Estudo da influência da barra estabilizadora dianteira no conforto vibracional de um automóvel*].

Comparativamente à configuração *Double Wishbone* e *Multi-link*, a suspensão semi-independente com barra estabilizadora, além de ser mais barata, proporciona o uso de amortecedores menores. Comparando-se com o sistema MacPherson, estes podem ser montados numa posição mais verticalizada, ocupando menor espaço. Dinamicamente o sistema semi-independente não apresenta a mesma qualidade de *ride* e *handling* que o *Double Wishbone* e o *Multi-link*, mas é superior ao seu concorrente direto, o sistema MacPherson.

Normalmente usa-se, nas suspensões dianteiras, uma configuração mista de MacPherson com barra estabilizadora e, nas traseiras acrescenta-se à barra

um perfil de torção a fim de aumentar a rigidez à torção do conjunto. Este perfil normalmente é formado por uma viga "U" e atua também no comportamento em curva do veículo, conforme descrito anteriormente. Nas figuras 38-a e 38-b são ilustradas estas configurações numa suspensão dianteira e traseira, respectivamente.

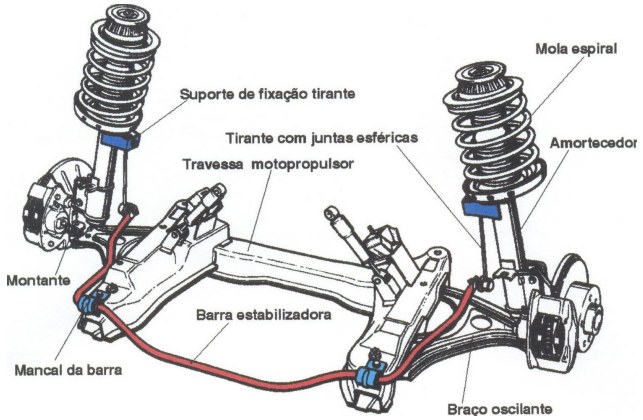


Figura 38-a – Sistema de suspensão dianteira semi-independente MacPherson com barra estabilizadora [Bastow *et al*, 1997, *Car Suspension and Handling*, pág. 85, com adaptações].

Figura 38-b – Sistema de suspensão traseira semi-independente com perfil de torção [Wan, Mark, 2005, AutoZine, *http://www.autozine.org/technical_school/suspension/tech_suspension21.htm*].

Não se pode deixar de ressaltar que as características da dinâmica de um veículo estão intimamente ligadas aos pneus, uma vez que eles são a entrada dos esforços provenientes da pista (sinal de entrada para a modelagem), bem como são também os agentes que transferem a reação do piloto quando este realiza uma manobra. Seu projeto é gerenciado pela característica da suspensão (dimensionamento de molas, amortecedores, etc) pois é a partir dos

esforços transmitidos pela suspensão, através das rodas, que os pneus devem atuar.

2.4.3 – Algumas considerações sobre características da suspensão

Um veículo que esteja trafegando em linha reta e venha a realizar uma curva tem parte do seu peso transferido para as rodas do lado externo à curva, por inércia. Este comportamento, embora temporário e compensado pelo sistema de suspensão, pode ser responsável pela alteração do seu esterçamento. A transferência é influenciada pela altura do centro de massa do veículo em relação à pista.

Este efeito também se faz presente em situações de aceleração, frenagem e curvas. Por exemplo, em uma frenagem a relação de transferência é calculada como sendo a desaceleração multiplicada pela razão entre a altura do centro de massa pela distância entre eixos. Insere-se um elemento dificultador na análise pois, no limite da adesão dos pneus com o solo, para a mesma força de frenagem entre rodas dianteiras e traseiras, o carro sub-esterçará em pista lisa e poderá sobre-esterçar em uma freada brusca em piso de maior rugosidade. Para atenuar esse efeito adota-se, nos carros atuais, um sistema de freios que fornece uma força de frenagem diferente para as rodas, o que se torna crítico principalmente em veículos cujo centro de massa é alto e nos esportivos, onde este centro é baixo mas a ordem de grandeza da velocidade (por conseguinte de acelerações e desacelerações) é maior.

Outro efeito que gera este fenômeno de transferência é o relacionado ao comportamento das inércias de *yaw*, *pitch* e *roll*. As inércias de *yaw* e *pitch*, a menos que o veículo tenha suas dimensões muito reduzidas, possuem a mesma ordem de grandeza. A inércia de *yaw* está relacionada à manutenção do veículo em uma manobra de curva, trazendo-o mais lentamente para dentro dela ou demorando mais para retorná-lo à linha reta depois de realizar a manobra. A inércia de *pitch* tenta manter os pneus dianteiros e traseiros sobre a mesma condição de carga mesmo em superfícies desiguais. A inércia de *roll* tem a ver com a tendência do veículo de seguir o esterçamento, lateralmente. Normalmente o veículo tende para o lado de fora da curva e, dependendo da rigidez de *roll* da carroceria, maior será o tempo para que esta retorne para a

posição desejada na manobra. Valores baixos para rigidez dos pneus também colaboram para uma maior rolagem da carroceria. Vale ressaltar que a influência das inércias angulares pode ser significativa na alteração da transferência de peso e, conseqüentemente, no comportamento dinâmico do veículo.

O controle deste movimento pode ser feito de diversas formas. Čech (2000) propõe um sistema integrado que fornece, a partir de um modelo matemático para controle de ganho em atuadores, fazer a suspensão trabalhar tanto como tendo um comportamento *anti-roll* tanto como uma suspensão ativa. Em ambas configurações há melhora do desempenho em curvas, desde que o ângulo de *roll* do sistema passivo não seja grande. Há também uma melhor distribuição do peso sobre os ataques das suspensões, o que torna o comportamento dinâmico do veículo, em geral, melhor.

Naudé *et al* (2003, partes 1 e 2) propõem a implementação de um modelo veicular de 6 graus de liberdade bidimensional no qual o sistema de suspensão é do tipo *Trailing Arm*, modelado como um massa-mola-amortecedor e cujo objetivo é a otimização de uma função-objetivo relacionada às características dos amortecedores. Conseguiu-se a melhoria de 28,5% no *ride comfort* do veículo sobre pista específica de seu uso (fora-de-estrada) e, de forma geral (várias velocidades e terrenos), o uso de valores otimizados de amortecimento levaram à melhoria na resposta dinâmica de todo conjunto de suspensão.

A aplicação deses modelos bem como sua evolução, serão melhor detalhadas no tópico 2.5 deste texto, referente a considerações sobre modelos veiculares.

2.5 - Considerações sobre modelos veiculares

Rauh (2003) chama a atenção para o fato de que, em uma primeira implementação de um modelo 3-D, deve-se levar em consideração o habitáculo do veículo ser visto como um corpo rígido, ou seja, a deformação elástica da estrutura suspensa ser muito menor que os deslocamentos da parte não-suspensa.

Neste estudo o autor apresenta um modelo funcional de 06 graus de liberdade, baseado no *bicycle-model* e estendido para um veículo de passeio. São estes graus os de deslocamento de corpo rígido: três translações e suas respectivas rotações em torno dos eixos de translação. A cinemática espacial e a flexibilidade da suspensão são substituídas, no modelo, pelas suas descrições funcionais, ou seja, por suas características gerais, sem maiores aprofundamentos matemáticos, o que torna o seu equacionamento não tão robusto.

Chu *et al* (2002) apresentam um modelo não-linear composto de 08 graus de liberdade: longitudinal, lateral, *yaw* e *roll* para a massa suspensa e as velocidades das rodas, incluindo a influência, não-linear, da deflexão lateral do pneu. Criou-se também um modelo de projeto, baseado numa simplificação do modelo acima citado, apresentando 03 graus de liberdade: lateral, *yaw* e *roll*, além de características de pneu linearizadas. A finalidade deste era a de explorar as características dinâmicas em sistemas tipo malha aberta e malha fechada, uma vez que sua aplicação está ligada a área de Controle. O modelo não-linear era utilizado para obter, principalmente, características em regime transiente.

Mills *et al* (2002) apresentam um modelo de 03 graus de liberdade translacionais para um veículo de carga. A peculiaridade deste modelo é a presença da força de arrasto aerodinâmica na modelagem, bem como a análise do veículo a partir de uma plataforma indeformável (graus de liberdade de corpo rígido), o que pode ser visto na Figura 39:

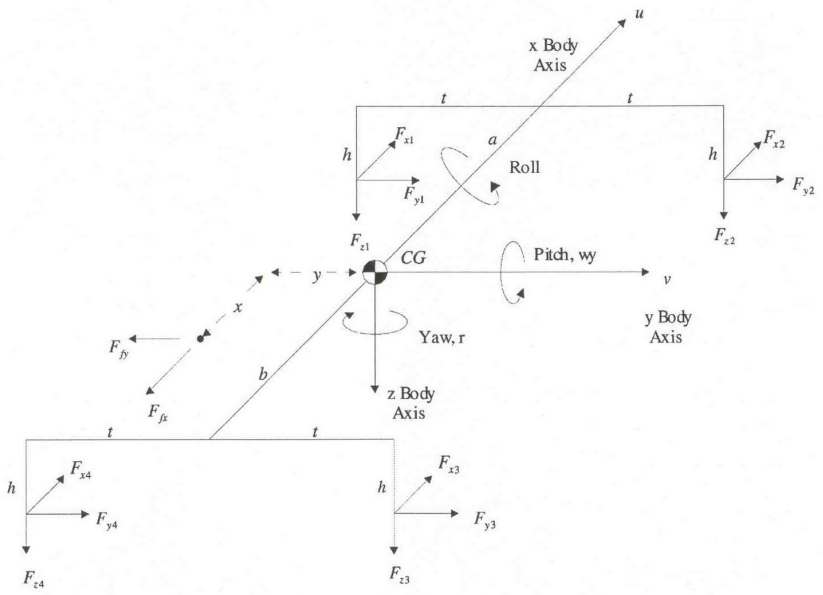


Figura 39 – Dinâmica da plataforma de um veículo de carga – modelo 3D (Mills *et al*, "Modeling and Analysis of Automotive Antilock Brake Systems Subject to Vehicle Payload Shifting". Vehicle System Dynamics, v.37, n.4, pág 283-310).

Esmailzadeh *et al* (2001) apresentam uma estrutura tipo entrada/saída para a descrição de um modelo de 08 graus de liberdade, conforme mostrado na Figura 40:

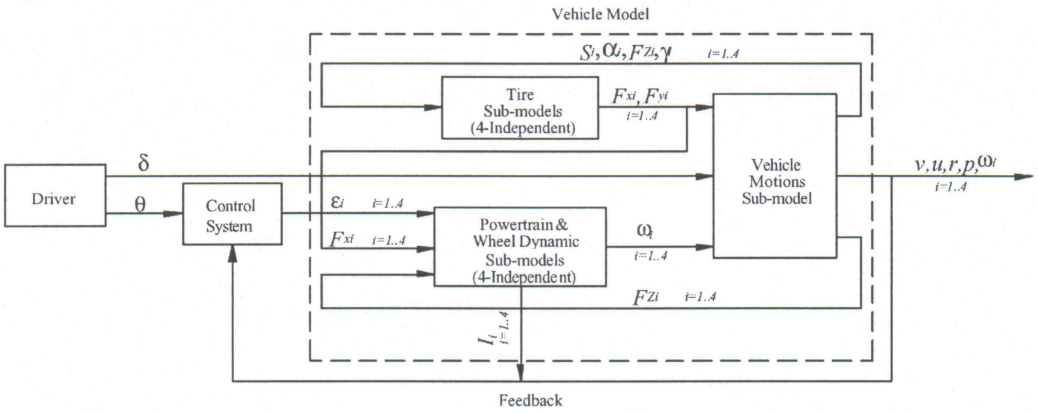


Figura 40 – Estrutura de um modelo veicular (Esmailzadeh, E., Vossoughi, G. R., Goodarzi, A., 2001, "Dynamic Modeling and Analysis of a Four Motorized Wheels Eletric Vehicle". Vehicle System Dynamics, v.35, n.3, pág 163-194.)

Nela, as variáveis de entrada são:

- δ = ângulo de esterçamento;
- θ = posição do pedal de acelerador;

As variáveis de tratamento dos dados são:

- s = ângulo de escorregamento lateral do veículo (*slip-angle*);
- α = ângulo de escorregamento lateral do pneu;
- Fz = força normal no pneu;
- γ = ângulo de câmber;
- Fx = força longitudinal no pneu;
- Fy = força lateral no pneu;
- ε = sinal de *set-point* para os atuadores elétricos;
- ω = velocidade angular da roda;
- ν = velocidade lateral;
- u = velocidade longitudinal;
- r = taxa de Yaw (*Yaw rate*);
- p = taxa de Roll (*Roll rate*);
- I = corrente de *feedback*;

Na modelagem matemática, o autor destaca a sub-divisão do modelo por suas influências no comportamento dinâmico do veículo: movimento, pneus, rodas e motor. Procedimento semelhante é adotado na implementação do atual modelo.

Bouazara *et al* (2001), apresenta um modelo de 08 graus de liberdade (deslocamento vertical, *roll* e *pitch* para a carroceria, os quatro deslocamentos impostos na suspensão pelas rodas e o deslocamento vertical do banco do motorista), ilustrado na Figura 41:

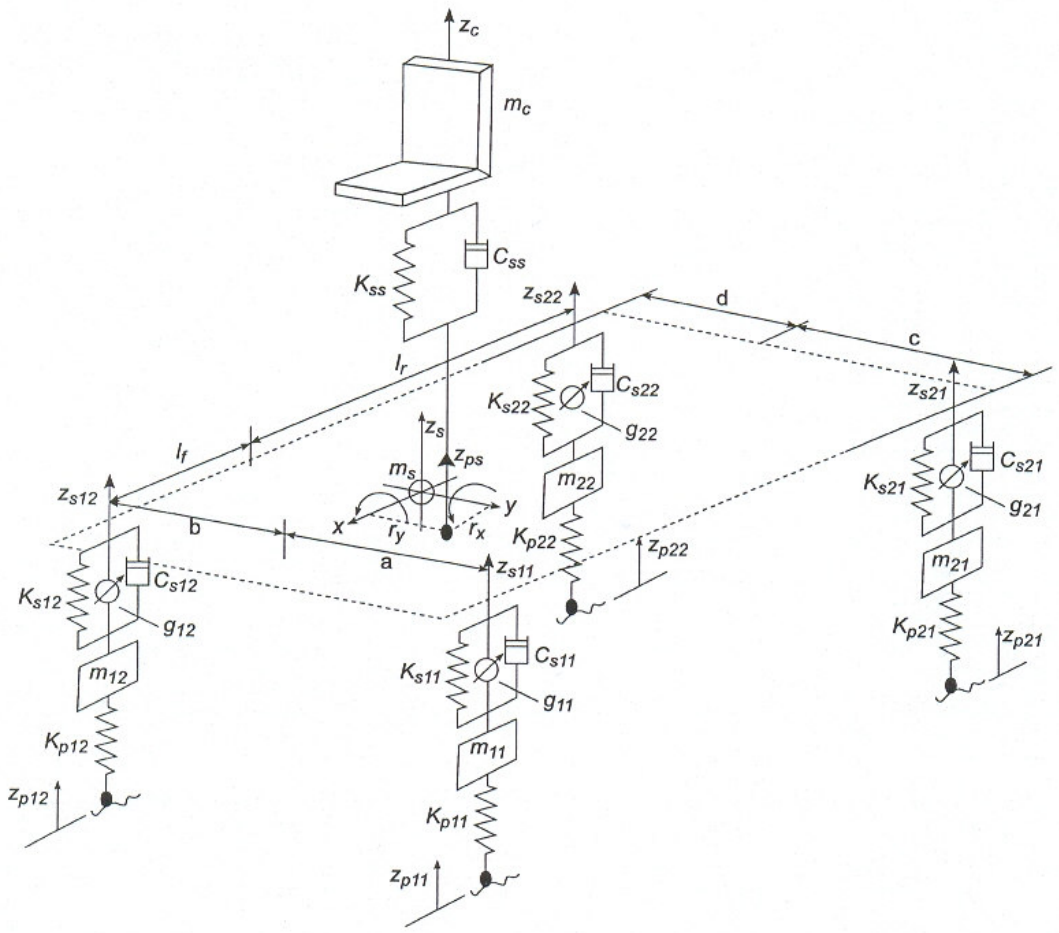


Figura 41 – Modelo tridimensional do veículo (Bouazara *et al*, “An optimization method designed to improve 3-D vehicle comfort and road holding capability through the use of active and semi-active suspensions”. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, v.20, n.3, pág 509-520.).

É sobre este modelo que o presente trabalho foi desenvolvido, inclusive pela ferramenta matemática adotada, o equilíbrio de d’Alembert. O procedimento para sua obtenção, bem como a descrição das etapas necessárias para tal é feita no Capítulo 3 – Metodologia.

Capítulo 3

METODOLOGIA NUMÉRICA

3.1 - Modelo veicular tridimensional

Originalmente, no trabalho desenvolvido por Saturnino (2004) e em cima do qual a presente implementação é realizada, a modelagem dinâmica foi desenvolvida em 2-D, a fim de se obter as seguintes respostas:

- Estado permanente do veículo, como resposta a uma excitação gerada por um perfil de pista pré-definido por uma PSD;
- Resposta em freqüência para uma entrada senoidal de amplitude unitária, aplicada simultaneamente a cada eixo do veículo;
- Animação da resposta em estado permanente;
- Animação dos modos de vibração do veículo.

No desenvolvimento do modelo veicular 2D, foram adotadas as direções e grandezas apresentadas nas Figuras 42 e 43.

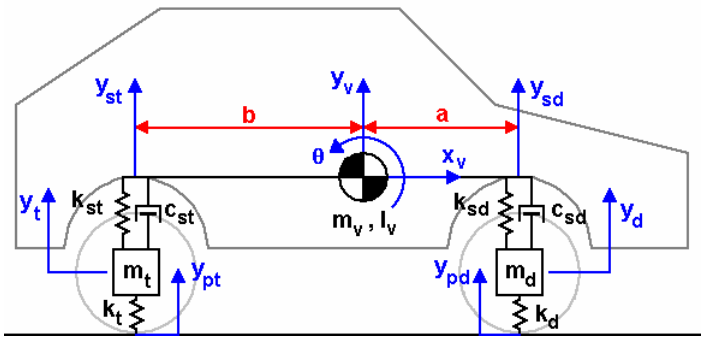


Figura 42 – Direções e grandezas adotadas.

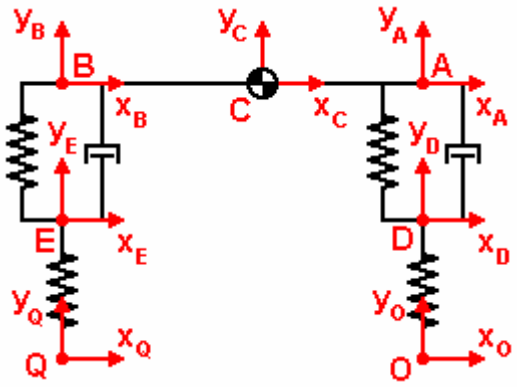


Figura 43 – Sistemas locais de coordenadas.

Onde:

- a: distância horizontal do C.G. ao eixo dianteiro;
- b: distância horizontal do C.G. ao eixo traseiro;
- y_{pd}, y_{pt}: deslocamentos verticais da pista em relação aos pontos *O* e *Q*, respectivamente;
- y_{rd}, y_{rt}: deslocamentos verticais das rodas em relação aos pontos *D* e *E*, respectivamente;
- y_{sd}, y_{st}: deslocamentos verticais do topo da suspensão em relação aos pontos *A* e *B*, respectivamente;
- y_v: deslocamento vertical do veículo em relação ao ponto *C*;
- θ: rotação do veículo (*pitch*) em torno do ponto *C*;

As excitações aplicadas ao modelo se devem aos deslocamentos y_{pd} e y_{pt}, impostos pela pista. No modelo considerado, o veículo trafega em linha reta, portanto, estes deslocamentos estão relacionados, uma vez que a roda traseira percorre o mesmo trajeto que a roda dianteira, porém com certo atraso Δt:

$$y_{pt}(t) = y_{pd}(t - \Delta t) \tag{56}$$

O atraso depende da velocidade do veículo e da distância entre eixos (*a*+*b*):

$$\Delta t = \frac{a+b}{\dot{x}_v} \tag{57}$$

Com estas correlações e com as equações de equilíbrio dinâmico escritas na forma $[M]\{\ddot{Y}\} + [C]\{\dot{Y}\} + [K]\{Y\} = \{F\}$, obtém-se as matrizes massa, amortecimento e rigidez, além do vetor força.

De posse desses dados, fez-se a implementação do modelo 2-D em MATLAB, usando para isto os conceitos de Análise Modal, a fim de se estabelecer as freqüências naturais e os modos de vibração do veículo, bem como obter os dados referentes aos graus de liberdade, usados tanto para a análise dinâmica bem como, futuramente, para o Módulo de Elementos Finitos desenvolvido por Saturnino (2004).

Embora o trabalho tenha alcançado total êxito dentro do que ele se propôs, observou-se a necessidade da implementação de um modelo veicular tridimensional, o que permitiria uma melhor visualização das respostas dinâmicas, bem como servir de alicerce para posteriores enriquecimentos do modelo, tais como o efeito das não-linearidades presentes no sistema de suspensão e pneus, da presença de graus de liberdade relacionados ao motorista e passageiros, da flexibilidade da carroceria, dentre outros.

3.2 – Justificativa e descrição do modelo utilizado

A principal justificativa para a opção pelo uso deste modelo é a possibilidade do estudo da influência do comportamento do sistema de suspensão perante a presença da barra estabilizadora na resposta do veículo. Sabe-se da existência de *softwares* comerciais aplicados ao estudo da dinâmica veicular mas o presente trabalho justifica-se pela possibilidade de se estabelecer como uma ferramenta didática para tal, além do total controle sobre sua formulação matemática e manipulação dos parâmetros do veículo e da pista.

A metodologia do presente trabalho é baseada nas seguintes etapas (Figura 44):

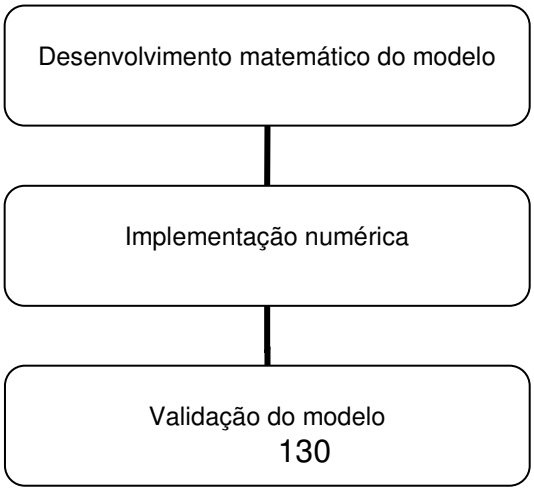


Figura 44 – Metodologia do presente trabalho.

Detalhadamente,

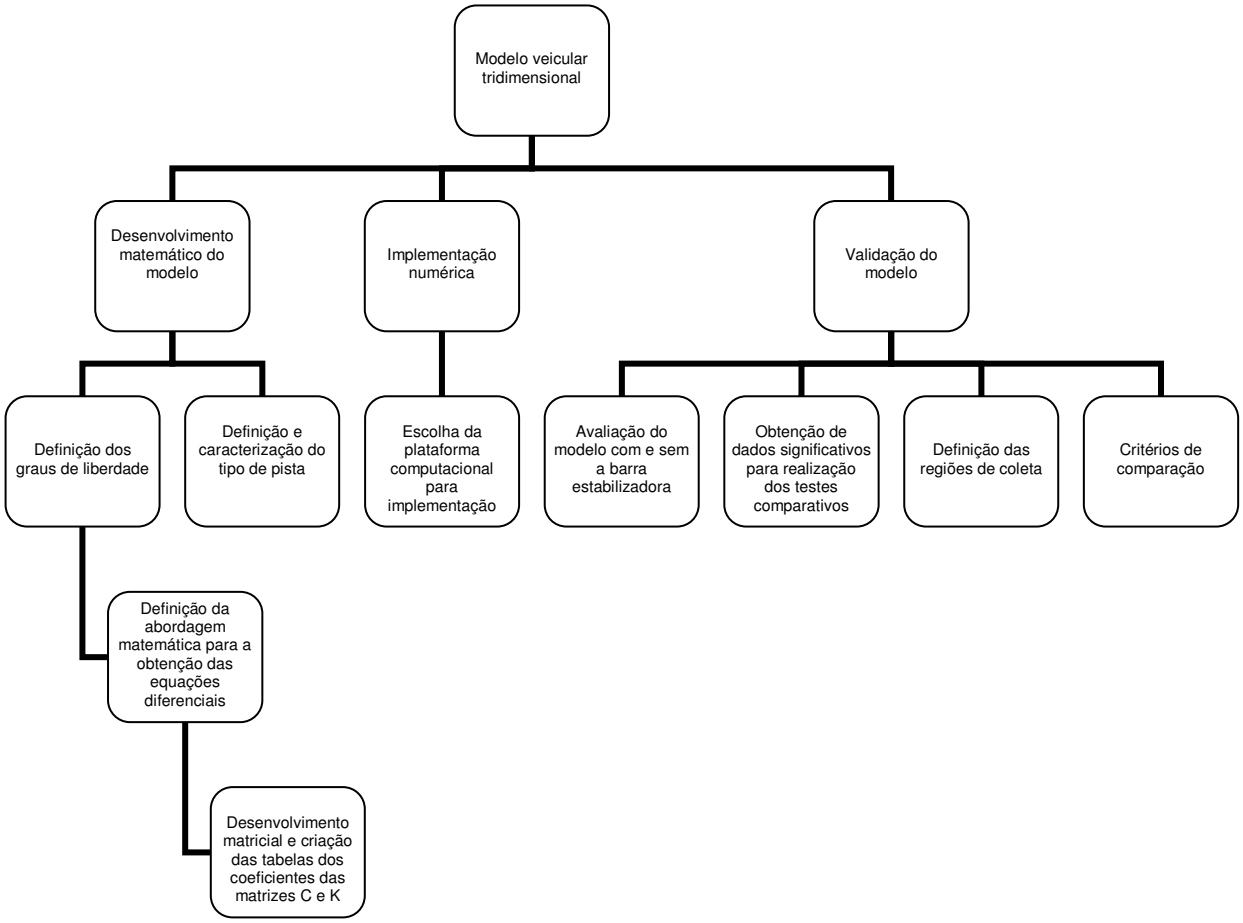


Figura 45 – Detalhamento da Metodologia proposta

3.2.1 – Desenvolvimento matemático do modelo

A primeira etapa desenvolvida foi a definição dos graus de liberdade a serem usados no presente modelo. Nesta aplicação foi considerado que o modelo, por ter sido definido para se apresentar como uma ferramenta de pré-projeto, deveria contemplar graus de liberdade relevantes para descrever suas principais características dinâmicas. Este raciocínio conduziu aos gdl's a seguir apresentados: o modelo a ser implementado no Módulo de Dinâmica Veicular (MDV) é inspirado no apresentado por Bouazara *et al* (2001); apresenta 07 graus de liberdade (deslocamento vertical, *roll* e *pitch* para o Centro de Gravidade da carroceria e os quatro deslocamentos verticais impostos pelas rodas à suspensão). Sua representação esquemática é mostrada na Figura 46:

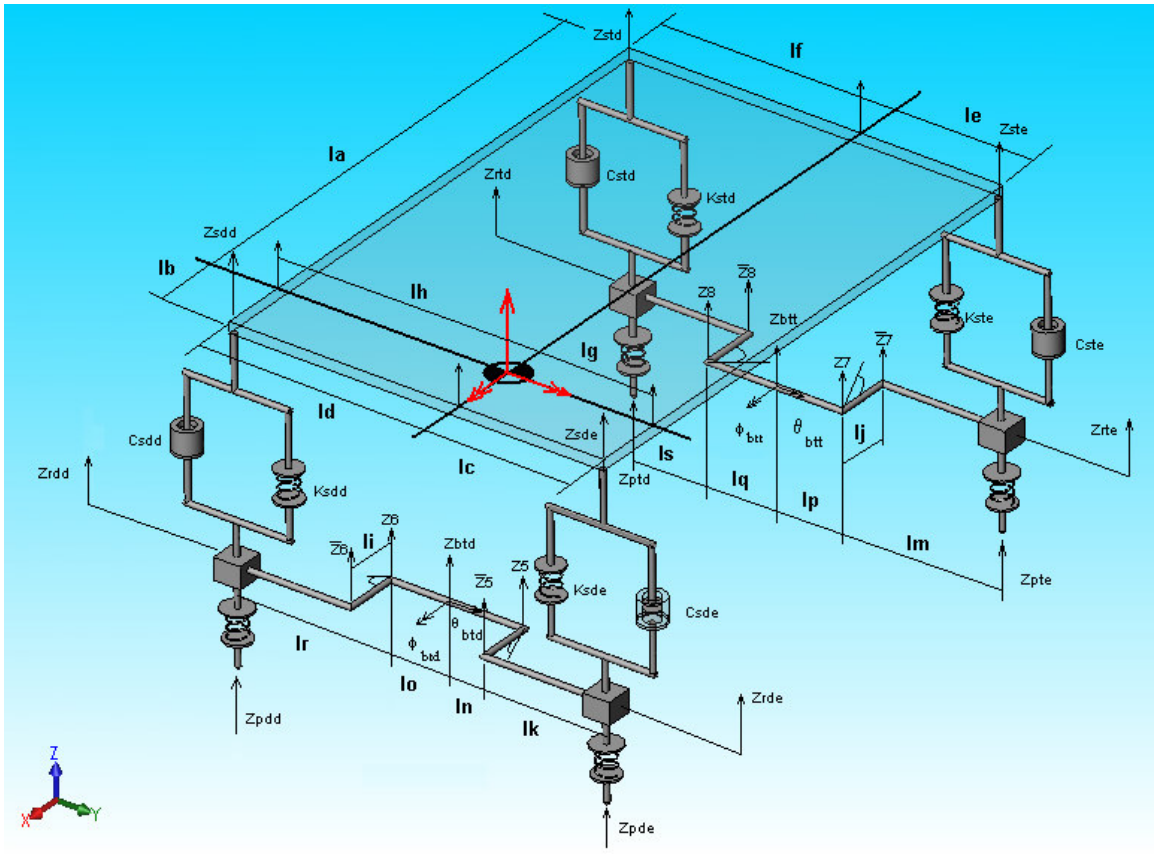


Figura 46 – Representação esquemática do modelo tridimensional do veículo a ser implementado no MDV

Os graus de liberdade governantes são:

- Z_v = deslocamento vertical do CG (*bounce*);
- ϕ_v= ângulo de *roll* do CG;

- θ_v = ângulo de *pitch* do CG;
- Z_{rde} = deslocamento vertical da roda dianteira esquerda;
- Z_{rdd} = deslocamento vertical da roda dianteira direita;
- Z_{rte} = deslocamento vertical da roda traseira esquerda;
- Z_{rtd} = deslocamento vertical da roda traseira direita.

Os graus de liberdade auxiliares, utilizados para a obtenção das correlações entre as variáveis geométricas, características intrínsecas do modelo e os principais são:

- Z_{sde} = deslocamento vertical da suspensão dianteira esquerda;
- Z_{sdd} = deslocamento vertical da suspensão dianteira direita;
- Z_{ste} = deslocamento vertical da suspensão traseira esquerda;
- Z_{std} = deslocamento vertical da suspensão traseira direita.
- Z_{btd} = deslocamento vertical da barra de torção (ou barra estabilizadora) dianteira;
- Z_{btt} = deslocamento vertical da barra de torção (ou barra estabilizadora) traseira;
- θ_{de} = ângulo de *pitch* do braço esquerdo da barra de torção dianteira;
- θ_{dd} = ângulo de *pitch* do braço direito da barra de torção dianteira;
- $\theta_{resultd} = \theta_{de} - \theta_{dd}$ = ângulo de *pitch* resultante da barra de torção dianteira;
- θ_{te} = ângulo de *pitch* do braço esquerdo da barra de torção traseira;
- θ_{td} = ângulo de *pitch* do braço direito da barra de torção traseira;
- $\theta_{resultt} = \theta_{te} - \theta_{td}$ = ângulo de *pitch* resultante da barra de torção traseira;

Vale ressaltar que um ponto forte deste modelo é a existência de correlações entre os graus de liberdade da barra de torção dianteira e traseira no deslocamento das rodas (e, por conseguinte, na suspensão e nos principais). No Apêndice A o desenvolvimento por extenso destas correlações é mostrado.

Uma vez definido o conjunto de gdl's a ser usado, partiu-se para a escolha da abordagem matemática para a obtenção das equações diferenciais do movimento. Neste trabalho foi feita a opção pelo equilíbrio dinâmico ou de d'Alembert (Jean-le-Rond d'Alembert (1717-1790)). Este princípio da cinética, elaborado em torno de 1714 e publicado por ele em seu *Traité de Dynamique* em 1743, enuncia que as ações e reações internas em um sistema de corpos rígidos em movimento estão em equilíbrio.

A escolha desta abordagem baseou-se na necessidade de se ter um sentimento físico maior do modelo, suas forças, momentos e reações nos pontos a serem estudados, uma vez que a análise qualitativa pede este entendimento. A alternativa a este método seria o uso das equações de Lagrange (Joseph Louis Lagrange (1736-1813)), apresentadas em 1788 na obra *Mécanique Analytique* e descritas por Sir William Rowan Hamilton, que nelas se baseou para seus estudos sobre as equações que conhecemos com o nome de equações de Hamilton, como "um poema científico". As equações de Lagrange, que descrevem o movimento geral de um sistema dinâmico, fornecem de forma matematicamente mais elegante as equações diferenciais de um sistema face às obtidas pelo método de equilíbrio, mas por ser um processo de diferenciação sucessiva perde-se o caráter físico do entendimento do problema, principalmente para quem não tem extensa habilidade no seu uso. Como um dos objetivos específicos deste trabalho é a validação do método usado, fez-se a opção por d'Alembert.

As considerações e hipóteses simplificadoras consideradas neste modelo são:

- Carroceria vista como uma estrutura perfeitamente rígida (indeformável), ou seja, ela apresenta apenas movimento de corpo rígido;
- É considerada a aproximação para pequenos deslocamentos no equacionamento cinemático do modelo;
- Os ângulos de ataque da suspensão são negligenciados, ou seja, os esforços laterais decorrentes da existência desses ângulos não são considerados;

- A barra estabilizadora dianteira é representada por uma mola de torção, de rigidez $\bar{K}_{btd} = GJ_p / l$, $[\bar{K}]$ = Nm^2/rad, onde G = módulo de rigidez ao cisalhamento – $[N/m^2]$, J_p = momento de inércia polar – $[m^4]$ e l = comprimento submetido ao esforço de torção – [l] = m;
- O conjunto torsor traseiro é composto de barra e perfil de torção. A barra é semelhante à dianteira (modelada por uma mola de torção) e o perfil, que fisicamente é uma viga "C" na qual a barra corre no seu interior, passa pela linha de ação de seu CG. No modelo, o perfil sofrerá apenas esforços de torção, sendo negligenciado o efeito de flexão que este componente sofre. A rigidez do conjunto é a soma da rigidez da barra com a do perfil.
- Mesmo pequeno, a barra estabilizadora apresenta efeito de inércia por se apresentar fixada à carroceria e se deslocar junto a ela. Este efeito é representado por uma massa equivalente, a ser acrescentada a cada roda, obtida pela relação $J = mr^2$, com o momento de inércia J sendo obtido pela análise em Elementos Finitos e r = distância entre o eixo de fixação da barra e a roda. Isto gera uma fonte de erro, pois a barra atua quando há o deslocamento diferencial entre os seus braços, o que para efeito de inércia não é significativo. A forma mais precisa de atuação deste incremento de massa seria a detecção de movimento de corpo rígido da barra, na qual a massa seria acrescentada e, quando da atuação deste deslocamento diferencial, essa massa seria decrescida. Este modelo não prevê este tipo de diferenciação;
- Também será somada a cada roda a parcela equivalente à massa da bandeja da suspensão e 1/3 da massa da mola, que dinamicamente fica apoiada sobre ela;
- As forças atuantes nas barras de torção são consideradas como agindo na linha de ação dos graus de liberdade $\overline{Z_5\bar{Z}_5}$, $\overline{Z_6\bar{Z}_6}$, $\overline{Z_7\bar{Z}_7}$ e $\overline{Z_8\bar{Z}_8}$. Como este modelo se baseia nos esforços atuantes na linha de ação da suspensão, para efeito da análise das equações de

equilíbrio dinâmico da carroceria as forças são transladadas para esta linha de ação, através do princípio da conservação dos momentos. (Vide Apêndice A);

- Considerando que o projeto de um veículo é executado de tal forma a manter o eixo de *roll* o mais próximo possível de passar por uma linha em torno do ponto médio da carroceria (eixo coordenado y), tomou-se esta simetria como premissa básica da caracterização geométrica do modelo;
- As posição inicial do eixo de *pitch* não é dado de entrada do modelo, bem como a de *roll*, que é obtida pelos parâmetros geométricos da carroceria. Elas são obtidas pela solução da equação diferencial advinda do equilíbrio dinâmico do veículo.
- Considera-se que os eixos de *roll* e *pitch* são sempre perpendiculares, condição esta que só não é respeitada quando há a deformação da carroceria, o que não é considerado neste modelo;
- As coordenadas do centro de massa estão desvinculadas dos eixos de *roll* e *pitch* e são, portanto, dados de entrada. Para a modelagem, considera-se a carroceria rotacionando-se com ângulos ϕ_v e θ_v em torno do centro de massa, ou seja, o esquema apresentado acima na Figura 46 é uma representação instantânea do comportamento da carroceria;
- Em relação à massa suspensa o motor é um dos componentes que mais agregam inércia ao veículo. Neste modelo a massa do motor é somada às demais referentes ao conjunto suspenso. Como não há graus de liberdade referentes a ele, ocorre a geração uma fonte de erro na resposta dinâmica, uma vez que a posição do motor não coincide com a do CG da carroceria;

São dados de entrada do modelo:

- Rigidez de mola dos pneus (K_{pde}, K_{pdd}, K_{pte}, K_{ptd});
- Rigidez e coeficiente de amortecimento da suspensão (K_{sde}, K_{sdd}, K_{ste}, K_{std}, C_{sde}, C_{sdd}, C_{ste}, C_{std});

- Massa das rodas (m_{rde}, m_{rdd}, m_{rte}, m_{rtd});
- Traços geométricos (l_a, l_b, l_c, l_d, etc...);
- Perfil de pista;
- Velocidade de marcha;

O modelo do veículo pode ser visto como:

$$[M]\{\ddot{Z}\} + [C]\{\dot{Z}\} + [K]\{Z\} = \{f\} \tag{58}$$

Onde:

- [M] = matriz massa;
- $\{\ddot{Z}\}$ = vetor aceleração;
- [C] = matriz amortecimento;
- $\{\dot{Z}\}$ = vetor velocidade;
- [K] = matriz rigidez;
- {Z} = vetor posição;
- {f} = vetor força externa ou excitação;

Neste modelo, o vetor deslocamento tem a forma:

$$\{Z\} = \begin{pmatrix} Z_v(t) \\ \phi_v(t) \\ \theta_v(t) \\ Z_{rde} \\ Z_{rdd} \\ Z_{rte} \\ Z_{rtd} \end{pmatrix} ; \ \{\dot{Z}\} = \frac{d(Z(t))}{dt} \ ; \ \{\ddot{Z}\} = \frac{d^2(Z(t))}{dt^2} \tag{59}$$

O vetor força, {f}, fica como sendo:

$$\{f\} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ K_{pde}\, Z_{pde} \\ K_{pdd}\, Z_{pdd} \\ K_{pte}\, Z_{pte} \\ K_{ptd}\, Z_{ptd} \end{pmatrix} \tag{60}$$

Por ser muito extenso, o desenvolvimento matemático deste modelo é apresentado no Apêndice A.

Concomitantemente com o estudo analítico do modelo, definiu-se o tipo de pista a ser usado como sinal de excitação do sistema veicular. A premissa básica é de não-descolamento do pneu da superfície da pista, o que muda o comportamento do veículo em termos de sua excitação, pois em movimentos crescentes há verdadeiramente a excitação da parte não-suspensa sobre a suspensa, enquanto nos trechos decrescentes a massa suspensa acompanha o movimento da parte não-suspensa e essa, por sua vez, acompanha a pista, em movimento de corpo rígido.

A princípio o modelo a ser adotado era o de uma PSD (*Power Spectral Density function*, ou função densidade espectral de potência) do tipo:

$$G_Z(\upsilon) = G_0 \left[\frac{1 + \left(\upsilon_0 / \upsilon \right)^2}{(2\pi\upsilon)^2} \right] \tag{61}$$

onde:

- $G_Z(\upsilon)$: Amplitude da PSD – [m2/(ciclo/m)] (SI);
- υ: freqüência espacial – ciclo/m (SI);
- G_0: parâmetro da magnitude da irregularidade (nível de irregularidade)
    - $G_0 = 1{,}25 \times 10^5$, para superfícies irregulares;
    - $G_0 = 1{,}25 \times 10^6$, para superfícies lisas.

- υ_0: freqüência especial de cut-off ou de corte.
  - $\upsilon_0 = 0{,}16$ ciclo/m para superfícies asfálticas;
  - $\upsilon_0 = 0{,}07$ ciclo/m para superfícies de PCC (*Portland Cement Concrete*).
- Esta opção foi abandonada devido à falta de controle sobre os parâmetros da pista. Partiu-se então para uma pista de perfil senoidal, com a defasagem entre os eixos controlada por um atraso de transporte. Matematicamente:
- excitação do pneu dianteiro esquerdo = Z_{pde} = sen(ωt);
- excitação do pneu traseiro esquerdo = $Z_{pte} = e^{(-j\omega T)}$ sen(ωt), onde

  t = tempo de defasagem = distância entre rodas/velocidade do carro;

O atraso de transporte, por depender de uma função exponencial, gera uma atenuação na excitação, o que pode ser corrigido com a normalização dos sinais através da multiplicação da excitação defasada por um ganho, que nada mais é que a razão da amplitude do sinal sem defasagem pelo defasado. Mas este procedimento se torna inconveniente quando tem-se uma simulação numérica, pois se tratam de mais manipulações algébricas, o que pode se tornar um fator a mais para inserir erro nos resultados.

Partiu-se então para o controle da defasagem pelo atraso de fase entre as ondas referentes ao eixo dianteiro em relação ao traseiro. Este procedimento é possível de ser realizado pelo fato que a onda, senoidal, é periódica. O atraso vem da relação:

$$\begin{aligned} T &\rightarrow 2\pi \\ \Delta t &\rightarrow \text{fase} \end{aligned} \tag{62}$$

Mas $\Delta t = \frac{L}{V}$, onde L é a distância entre eixos e V a velocidade do veículo (neste caso, da pista). Daí,

$$\text{fase} = \frac{L.2\pi}{V.T} \tag{63}$$

Esta fase garante a aplicação do mesmo sinal do eixo dianteiro no traseiro, na ausência de defasagem lateral entre rodas do mesmo eixo. Neste caso, cria-se uma nova defasagem, para simular o efeito de travessa, nos mesmos moldes da fase.

$$\text{travessa} = \frac{L_{travessa}.2\pi}{V.T} \tag{64}$$

Onde $L_{travessa}$ é o comprimento da travessa, medido no sentido longitudinal do veículo. Exemplificando:

Se não há a presença da travessa (Figura 47):

- $Z_{pde} = A.sen(\omega t)$; (65)
- $Z_{pdd} = A.sen(\omega t)$; (66)
- $Z_{pte} = A.sen(\omega t - fase)$; (67)
- $Z_{ptd} = A.sen(\omega t - fase)$; (68)

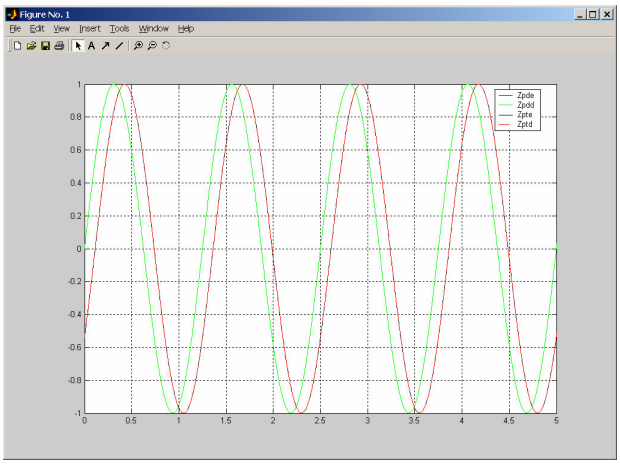


Figura 47 – Modelo de pista (sem defasagem)

Se há a presença da travessa (Figura 48):

- $Z_{pde} = A.sen(\omega t)$; (69)
- $Z_{pdd} = A.sen(\omega t - travessa)$; (70)
- $Z_{pte} = A.sen(\omega t - fase)$; (71)
- $Z_{ptd} = A.sen(\omega t - fase - travessa)$; (72)

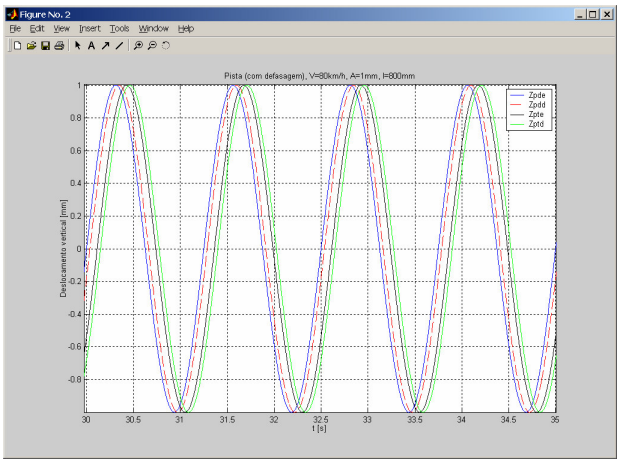


Figura 48 – Modelo de pista (com defasagem)

3.2.2 – Implementação numérica

A escolha pela ferramenta computacional para a manipulação das equações matriciais, nesta aplicação, se baseou em 2 critérios:

- Pelo objetivo do trabalho ser a apresentação da metodologia de equilíbrio de d'Alembert, foge do escopo deste a implementação das funções em linguagens de mais baixo nível para se ter um ganho em tempo de processamento;
- Como o presente trabalho pretende, futuramente, compor o Módulo de Dinâmica Veicular do trabalho de Saturnino (2004) e este foi desenvolvido em MATLAB, a manipulação numérica foi desenvolvida nesta linguagem.

A interface de entrada de dados foi desenvolvida em Visual C, pela facilidade que esta linguagem fornece na geração de arquivos de texto face a uma entrada de dados em janelas gráficas. Estes são passados para funções de leitura do MATLAB, onde os dados são convertidos para o formato padrão deste programa, a fim de serem tratados para obter a solução das equações matriciais.

Para a resolução das equações, fez-se a opção pela função ode45, baseada na fórmula explícita (calcula o valor de uma função f(t,y), com t e y determinados anteriormente no algoritmo de solução) de Runge-Kutta de 4ª e 5ª ordem, também chamada de par Dormand-Prince, em substituição à fórmula de Fehlberg utilizada em versões anteriores do programa. Implementada por Shampine e Reichelt (1995) tem, assim como todas as outras opções dadas

pelo programa, o objetivo resolver um sistema de equações na forma $y' = f(t, y)$, onde t é uma variável escalar independente e y=y(t) é o vetor que contém as soluções dadas para a equação, ou seja, são as variáveis dependentes.

Por ser baseada em Runge-Kutta, esta função usa um algoritmo denominado *one-step*, denominada desta forma pois para o cálculo da solução no instante (t) necessita-se apenas de seu valor no instante (t-1). Como as variáveis dinâmicas podem apresentar grandes variações num intervalo de tempo muito reduzido, o algoritmo usado nesta implementação possui um interpolador que calcula até 04 valores para cada incremento real de tempo. Isto, apesar de demandar um certo tempo de processamento, garante a geração de curvas mais suaves. Vale ressaltar que esta função pode ser desabilitada pelo usuário no momento da chamada à função ode45. Outra observação que se faz necessária é que o vetor tempo possui passo variável, de acordo com a suavidade da solução encontrada.

É quase consenso entre os programadores que a função ode45 deve ser a primeira tentativa para a solução de problemas dinâmicos cujas equações sejam de segunda ordem, redutíveis à primeira e que podem apresentar mudanças nas constantes de tempo, o que justifica a sua aplicação na implementação numérica do presente trabalho.

3.2.3 – Validação do modelo

A metodologia usada para a validação do modelo é baseada nos seguintes objetivos:

- Avaliação da resposta do modelo com e sem a atuação da barra estabilizadora;
- Realização de testes com dados significativos da indústria automotiva, para futura comparação com dados experimentais;
- Definição das regiões de observação dos dados de tal forma a abranger um espectro significativo da resposta;

- Estabelecimento de critérios de comparação entre variáveis a serem observadas de acordo com alguma aplicação prática ou de projeto que o modelo possa vir a ter.

O primeiro item a ser observado é a comparação do comportamento do modelo frente à presença das barras estabilizadoras dianteira e traseira. Dentro das referências pesquisadas, não foi encontrado nenhum modelo correlato, o que inclusive serviu de motivação à realização deste trabalho. Conseqüentemente há a necessidade desta comparação para que seja medida a influência da atuação do sistema estabilizador frente a um modelo que representaria um sistema de suspensão independente.

Para atender ao objetivo de ser uma ferramenta de pré-projeto, é imperativo que os testes devem ser realizados em condições as mais próximas possíveis da realidade industrial no que diz respeito aos dados de simulação. Se é garantida esta condição, quaisquer desvios numéricos decorrentes da simulação, quando comparados com valores típicos de ensaios cujos resultados são comprovadamente confiáveis, podem servir como base de análise das reais características intrínsecas do modelo, tais como aproximações de pequenos deslocamentos, número de graus de liberdade, dentre outras premissas simplificadoras.

Nesta etapa foram coletados, na indústria automotiva e na literatura, dados utilizados nos veículos de linha, a saber:

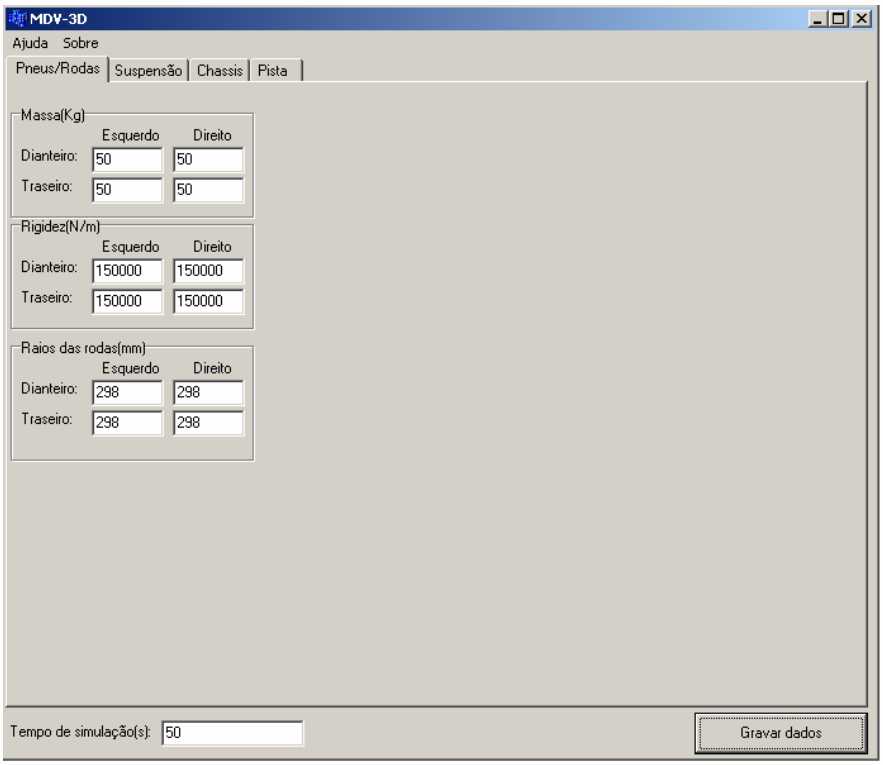


Figura 49 - Janela de entrada de dados - Pneus/Rodas

- A massa de cada roda contempla, além dela propriamente dita, a massa equivalente aos elementos não suspensos e 1/3 da massa da mola (que dinamicamente ficam apoiadas sobre a suspensão);
- A rigidez dos pneus é definida como sendo dez vezes maior que a rigidez da suspensão, para dar àqueles uma configuração de corpo rígido (Margolis *et al* (2001));
- O raio da roda leva em consideração tanto a roda propriamente dita como a altura do pneu em relação ao solo.

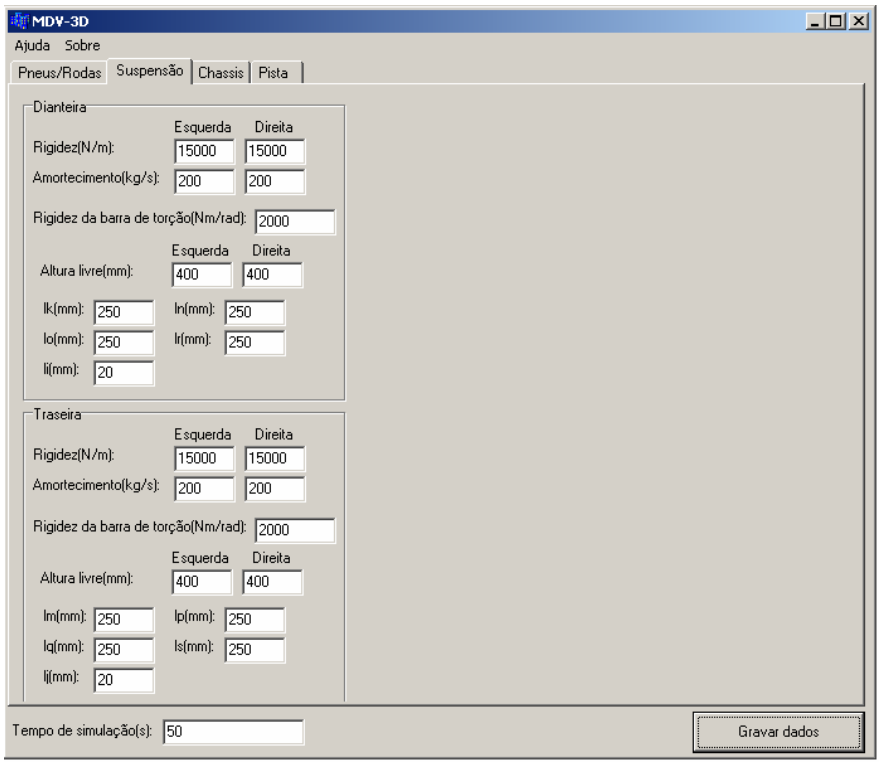


Figura 50 - Janela de entrada de dados - Suspensão

- Os valores de rigidez da suspensão são baseados no artigo de Margolis *et al* (2001);
- O coeficiente de amortecimento viscoso da suspensão foi retirado do trabalho de Saturnino (2004), em composição com o valor fornecido por um fabricante de componentes automotivos;
- A rigidez da barra de torção, para efeito de não haver contribuição de uma provável alteração da rigidez do conjunto dianteiro face ao traseiro, foi considerada igual a 2000N/m para os dois conjuntos. Este valor é uma combinação entre o teórico, calculado pela expressão $K = \frac{GJ_p}{L}$, com dados fornecidos por um fabricante deste componente;
- As distâncias da linha do centro de massa às extremidades da carroceria foram tomadas de um veículo de passeio, a partir das coordenadas sobre o centro de massa;

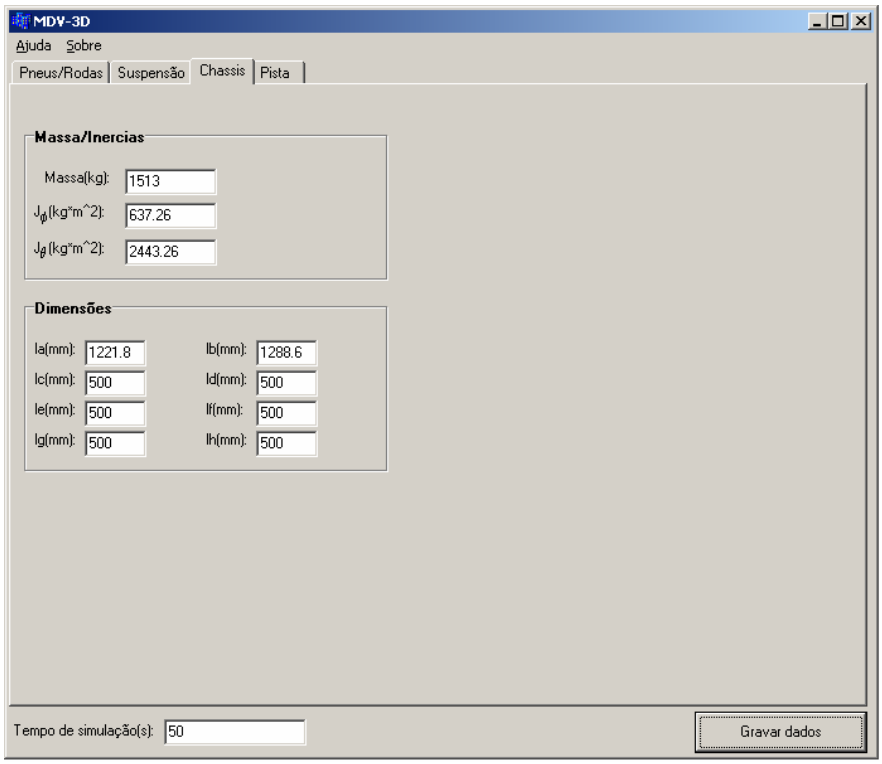


Figura 51 - Janela de entrada de dados – Chassis

- Os valores de massa e inércias rotacionais de *roll* (J_ϕ) e *pitch* (J_θ) foram extraídos do trabalho de Margolis *et al* (2001);

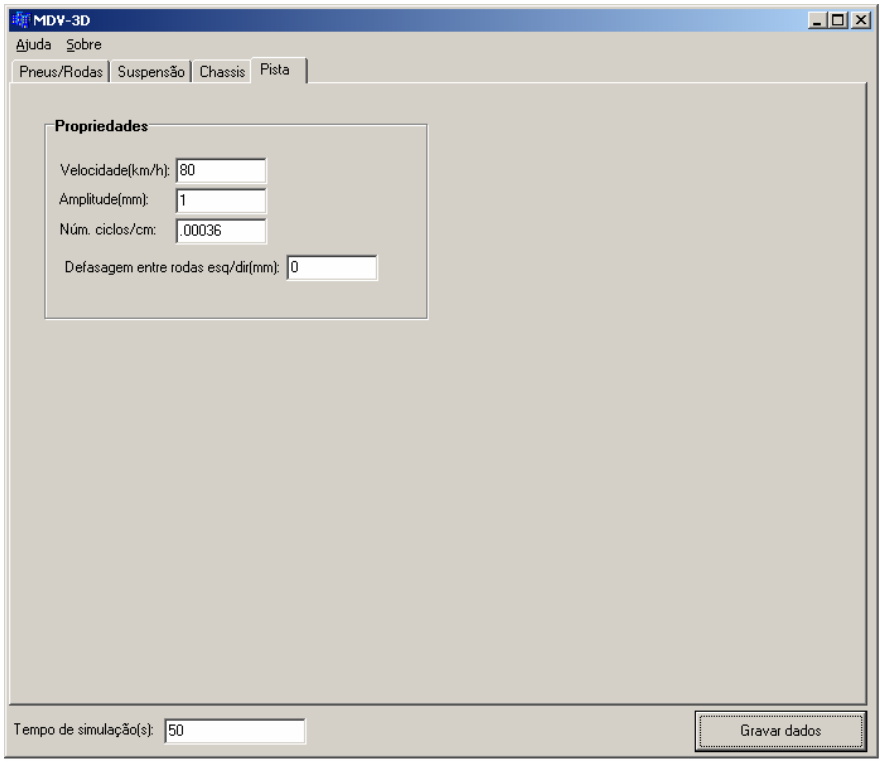


Figura 52 - Janela de entrada de dados - Pista

- Os parâmetros de pista adotados, salvo condição de teste explícita, são: velocidade de pista = 80Km/h e amplitude da excitação da pista senoidal = 1,0mm. Em termos de excitação de pista, pensou-se em ter 40 picos dentro do intervalo de simulação. O número 40 foi considerado suficiente para excitar a estrutura e leva-la à ao regime permanente por volta de 20 segundos. Com isto, o número de ciclos é calculado por

$$N^{o}\text{ciclos} = V(m/s).t(s).\text{fator de excitação}(\text{ciclos}/\text{cm}).10^{2}(\text{cm}/\text{m}) \qquad (73)$$

Aplicando-se esta expressão para os dados acima, obtém-se o parâmetro de excitação igual a 0,00036ciclos/cm (0,036ciclos/m);

Capítulo 4

APRESENTAÇÃO E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

4.1 - Algumas considerações matemáticas do modelo

- Sendo a rigidez da barra homogênea e sua geometria simétrica, $l_n = l_o$, $l_k = l_r$ e $l_p = l_q$, $l_m = l_s$. Observa-se que no somatório de forças verticais da carroceria, a barra apresenta deslocamento de corpo rígido ou os dois braços apresentam o mesmo deslocamento, o que pode ser visto na simplificação que ocorrerá dos termos que envolvem os esforços de torção. O mesmo efeito é observado, com a mesma justificativa, no somatório dos momentos em relação ao eixo de *pitch* (vide Apêndice A);
- Quando da transformação das equações de movimento para as coordenadas do CG da carroceria, descritas no Apêndice A, percebe-se que, para a condição $\phi_v = 0; (Z_{rde} - Z_{rdd}) \neq 0$,

$$\theta_{de} - \theta_{dd} = -\frac{(Z_{rde} - Z_{rdd})}{l_i} \tag{74}$$

e

$$\theta_{te} - \theta_{td} = \frac{(Z_{rte} - Z_{rtd})}{l_j} \tag{75}$$

Isto significa que a barra de torção atuará mesmo que não haja rotação da carroceria em *roll*. Este efeito é percebido quando há um desnivelamento na pista, absorvido pelo sistema de suspensão.

- Para a condição $\phi_v \neq 0;(Z_{rde} - Z_{rdd}) = 0$, as mesmas equações se tornam:

$$\theta_{de} - \theta_{dd} = \frac{(l_n + l_k + l_o + l_r)}{l_i}\phi_v \tag{76}$$

e

$$\theta_{te} - \theta_{td} = -\frac{(l_p + l_m + l_q + l_s)}{l_j}\phi_v \tag{77}$$

ou seja, a barra de torção atua quando o veículo gira em *roll*, mesmo sem nenhum desnivelamento da pista, em virtude de sua fixação à carroceria.

4.2 - Análise da resposta dinâmica calculada pela ferramenta computacional

4.2.1 – Análise do problema de auto-valores e auto-vetores

Dadas as matrizes massa e rigidez do modelo, apresentam-se as seguintes matrizes:

Matriz dos autovalores

1.0e+005 *

$$[\lambda^2] = \begin{pmatrix} 1.1096 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0021 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0004 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0003 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0330 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0330 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0330 \end{pmatrix} \tag{78}$$

Matriz dos autovetores (normalizados em +1 ou -1)

$$[V] = \begin{pmatrix} -0.0000 & 0.0000 & 1.0000 & 0.6466 & -0.0258 & -0.0411 & 0.0000 \\ 0.5451 & -1.0000 & -0.0108 & -0.0069 & -0.0000 & -0.0000 & -0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.6466 & -1.0000 & 0.0399 & -0.0265 & -0.0000 \\ -1.0000 & -0.1363 & 0.0049 & 0.0259 & 1.0000 & 0.2285 & 1.0000 \\ 1.0000 & 0.1363 & 0.0078 & 0.0278 & 1.0000 & 0.2285 & -1.0000 \\ -1.0000 & -0.1363 & 0.0262 & -0.0071 & -0.2285 & 1.0000 & -1.0000 \\ 1.0000 & 0.1363 & 0.0291 & -0.0052 & -0.2285 & 1.0000 & 1.0000 \end{pmatrix} \quad (79)$$

Matriz dos autovalores ordenados

$$\lfloor \lambda_o^2 \rfloor = 1.0e{+}005 * \begin{pmatrix} 0.0003 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0004 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0021 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0330 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0330 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0330 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.1096 \end{pmatrix} \quad (80)$$

Matriz dos autovetores correspondentes

$$[V_o] = \begin{pmatrix} 0.6466 & 1.0000 & 0.0000 & -0.0258 & -0.0411 & 0.0000 & -0.0000 \\ -0.0069 & -0.0108 & -1.0000 & -0.0000 & -0.0000 & -0.0000 & 0.5451 \\ -1.0000 & 0.6466 & 0.0000 & 0.0399 & -0.0265 & -0.0000 & 0.0000 \\ 0.0259 & 0.0049 & -0.1363 & 1.0000 & 0.2285 & 1.0000 & -1.0000 \\ 0.0278 & 0.0078 & 0.1363 & 1.0000 & 0.2285 & -1.0000 & 1.0000 \\ -0.0071 & 0.0262 & -0.1363 & -0.2285 & 1.0000 & -1.0000 & -1.0000 \\ -0.0052 & 0.0291 & 0.1363 & -0.2285 & 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 \end{pmatrix} \quad (81)$$

Matriz das freqüências naturais ordenadas [rad/s]

$$[\omega] = \begin{pmatrix} 5.8778 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6.0517 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 14.5868 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 57.4760 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 57.4779 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 321.4032 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 333.1019 \end{pmatrix} \quad (82)$$

Matriz das freqüências naturais ordenadas [Hz]

$$[f_o] = \begin{pmatrix} 0.9355 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.9632 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2.3216 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9.1476 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9.1479 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 51.1529 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 53.0148 \end{pmatrix} \quad (83)$$

Matriz dos autovetores (modos) ordenados

$$[V_o] = \begin{pmatrix} 0.6466 & 1.0000 & 0.0000 & -0.0258 & -0.0411 & 0.0000 & -0.0000 \\ -0.0069 & -0.0108 & -1.0000 & -0.0000 & -0.0000 & -0.0000 & 0.5451 \\ -1.0000 & 0.6466 & 0.0000 & 0.0399 & -0.0265 & -0.0000 & 0.0000 \\ 0.0259 & 0.0049 & -0.1363 & 1.0000 & 0.2285 & 1.0000 & -1.0000 \\ 0.0278 & 0.0078 & 0.1363 & 1.0000 & 0.2285 & -1.0000 & 1.0000 \\ -0.0071 & 0.0262 & -0.1363 & -0.2285 & 1.0000 & -1.0000 & -1.0000 \\ -0.0052 & 0.0291 & 0.1363 & -0.2285 & 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 \end{pmatrix}$$

A análise das matrizes de autovalores e autovetores ordenados leva às seguintes conclusões (Tabela 5):

Tabela 5 – Principais freqüências e modos associados

	Freqüência (Hz)						
	0,9355	0,9632	2,3216	9,1476	9,1479	51,1529	53,0148
Modo	*Pitch*	*Bounce*	*Roll*	1º modo de deslocamento vertical da suspensão (eixo dianteiro) $Z_{rde}=Z_{rdd}$	2º modo de deslocamento vertical da suspensão (eixo traseiro) $Z_{rte}=Z_{rtd}$	1º modo de rolagem dos eixos $Z_{rde}=Z_{rtd}$ $Z_{rdd}=Z_{rte}$	2º modo de rolagem dos eixos $Z_{rde}=Z_{rtd}$ $Z_{rdd}=Z_{rte}$

- Na freqüência de 0,9355Hz o modo predominante é o de *Pitch*, na forma de um acoplamento com o modo de *Bounce* (64,66%), o que é percebido pela tendência ao levantamento da parte anterior e abaixamento da posterior. Percebe-se também que o percentual relativo às rodas é coerente com o modo apresentado pois há à tendência de levantamento das rodas anteriores (auto-vetores positivos) e abaixamento das posteriores (auto-vetores negativos) ;
- Na freqüência de 0,9632Hz predomina o *Bounce* (levantamento da carroceria em deslocamento de corpo rígido) com um acoplamento de *Pitch* (abaixamento da anterior e levantamento da posterior), o que é condizente com o sistema físico pelo deslocamento do centro de massa para a anterior na condição estática. Raciocínio similar é aplicado em relação às rodas, ou seja, para o levantamento da carroceria a tendência de deslocamento das rodas é ser positiva, o que se confirma pelos seus auto-vetores maiores que zero;
- O modo de *Roll* é representado na freqüência de 2,3216Hz, sem influência de *Bounce* e *Pitch* (auto-vetores correspondentes iguais a zero). Ao mesmo tempo nota-se a presença de movimento das

rodas: tendência ao abaixamento no lado esquerdo (auto-valores negativos) e ao levantamento no lado direito (auto-valores positivos);

- A quarta freqüência (9,1476Hz) corresponde ao modo de deslocamento vertical da massa não-suspensa: levantamento do eixo anterior (auto-vetores iguais a 1,0000) e pequeno abaixamento do eixo posterior (auto-vetores iguais a –0,2285).
- A quinta freqüência (9,1479Hz) corresponde ao mesmo modo gerado pela quarta freqüência, só que agora com tendência ao levantamento dos eixos anterior (auto-vetores iguais a 0,2285) e posterior (auto-vetores iguais a 1,0000). Há também a presença de um modo acoplado de *Pitch* e *Bounce* da carroceria, com auto-vetores de valores –0,0265 e –0,0258, respectivamente.;
- A freqüência de 51,1529Hz representa o primeiro modo relativo à tendência de giro dos eixos das rodas, em *Roll*: eixo anterior apresenta auto-vetores de valores Z_{rde} = 1,0000 e Z_{rdd} = -1,0000 e o posterior Z_{rte} = -1,0000 e Z_{rtd} = 1,0000. Não se verifica o reflexo deste movimento da parte não-suspensa na parte suspensa (auto-vetores referentes à carroceria são iguais a 0,0000);
- A freqüência de 53,0148Hz apresenta o mesmo modo de rolagem dos eixos das rodas, agora com auto-vetores de valores invertidos (sentido de giro invertido) Z_{rde} = Z_{rte} = -1,0000 e Z_{rdd} = Z_{rtd} = 1,0000. Mais uma vez a carroceria não acompanha o movimento da parte não-suspensa pois esta apresenta modo de *Roll* (auto-vetor igual a 0,5451).

4.2.2 – Caracterização da pista

A freqüência de excitação da pista é obtida pela expressão:

$$f = V(km/h) \,.\, \text{número de onda (ciclos/cm)} \,.\, 10^5(cm/km) \,.\, 1/3600(h/s)$$

Com isto, as freqüências associadas às velocidades mais usadas são:

V = 40km/h ⇒ f = 0,4Hz

V = 60km/h ⇒ f = 0,6Hz

V = 80km/h ⇒ f = 0,8Hz

Ou seja, na análise dos gráficos, ocorrendo este evento numa destas freqüências ou em seus sub e super-harmônicos, sabe-se que se trata da influência da excitação da pista. (Figuras 53 e 54)

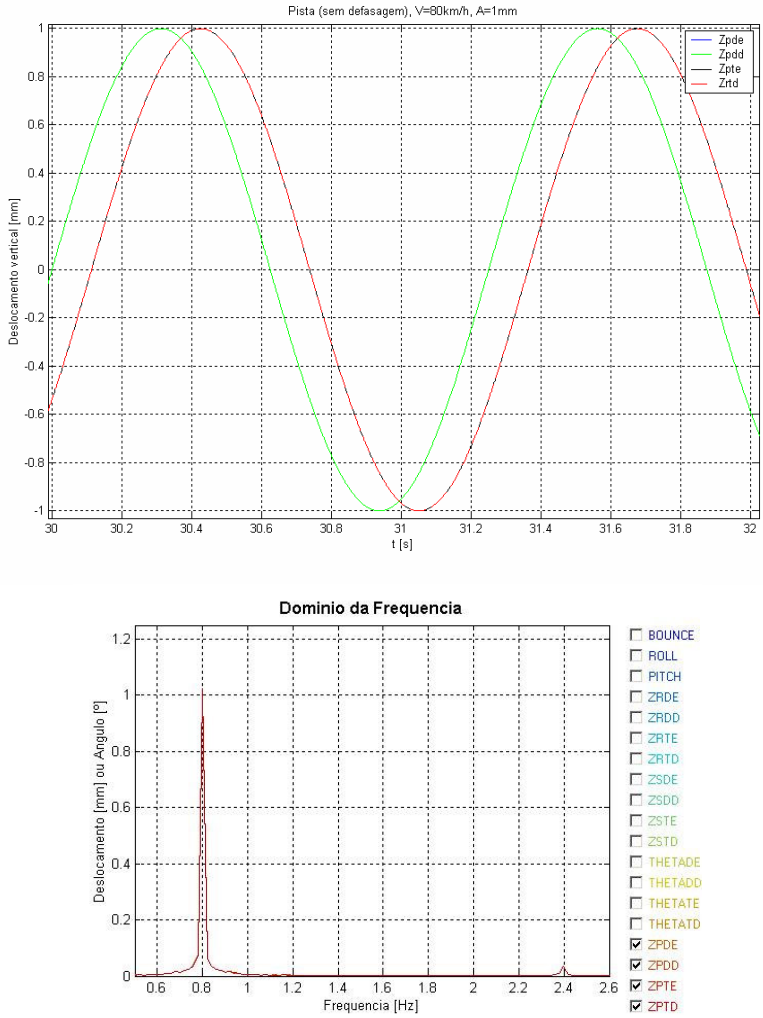


Figura 53 – Modelo de pista e respectiva FFT (sem defasagem)

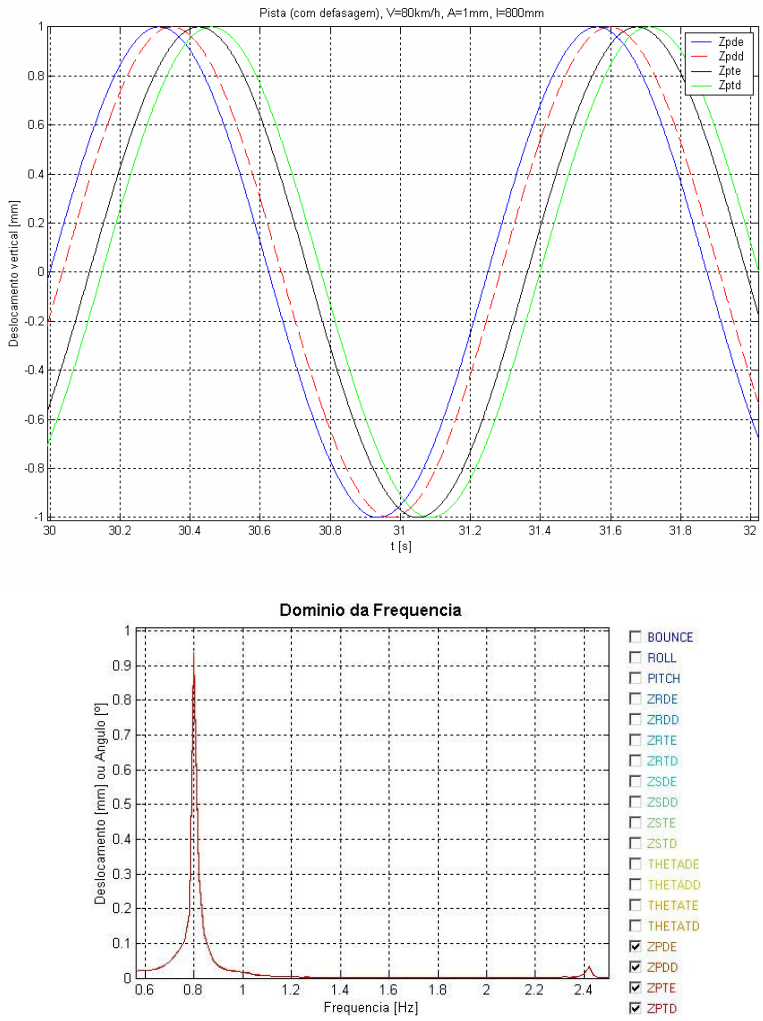


Figura 54 – Modelo de pista e respectiva FFT (com defasagem)

- Na figura 53, percebe-se que o excitamento traseiro (em preto e verde) está defasado em relação ao dianteiro (azul e vermelho), mas as ondas correspondentes às rodas dianteiras estão sobrepostas, o mesmo efeito acontecendo com as ondas referentes às rodas traseiras. A defasagem existente entre as ondas do eixo dianteiro em relação às do eixo traseiro se deve, unicamente, à distância entre eixos do veículo (L = 2510,4mm);

- Esta pista possui como características a velocidade (V) = 80km/h, Amplitude (A) = 1,0mm e fator de pista (número de onda) = 0,0036 ciclos/cm. A FFT dos sinais de entrada indica a freqüência de 0,8Hz (período T = 1/0,8 = 1,25s), ou seja, na análise em freqüência dos outros sinais, uma componente nesta freqüência é indicativo de

influência da pista. A defasagem inerente à distância entre-eixos não é indicada numa análise em freqüência;

- Existe uma manifestação da pista nas componentes ímpares da freqüência fundamental (2,4Hz, 4,0Hz, 5,6Hz e assim por diante), presente também em todas as variáveis que estão diretamente ligadas à pista (rodas e suspensão). Elas se referem à premissa do modelo na qual o pneu está em permanente contato com o solo, ou seja, nos movimentos crescentes da senóide de excitação (no 1º pico e em seus n-ésimos múltiplos ímpares) há a excitação do sistema enquanto nos movimentos de descida (nos respectivos vales) o sistema se movimenta como um corpo rígido, em função da sua inércia. Nas partes subseqüentes do texto, far-se-á menção apenas à componente fundamental da excitação, salvo alguma condição na qual algum destes harmônicos contribua de alguma forma na dinâmica de algum dos graus de liberdade;
- Na Figura 54 referente à pista, de características V = 80km/h, A = 1,0mm, fator de pista = 0,0036ciclos/cm e travessa (defasagem entre rodas de um mesmo eixo) de comprimento 800mm, percebe-se o atraso gerado pela presença da travessa. Fisicamente o sistema é excitado pelo menos quatro vezes por ciclo no lugar das duas vezes quando não existe a presença da travessa. Diz-se pelo menos quatro vezes pois, dependendo da velocidade da pista e do comprimento da travessa, pode-se excitar o sistema mais de quatro vezes por passagem do veículo em um ciclo de pista;

4.2.3 – Resposta dinâmica do veículo para diferentes condições de pista

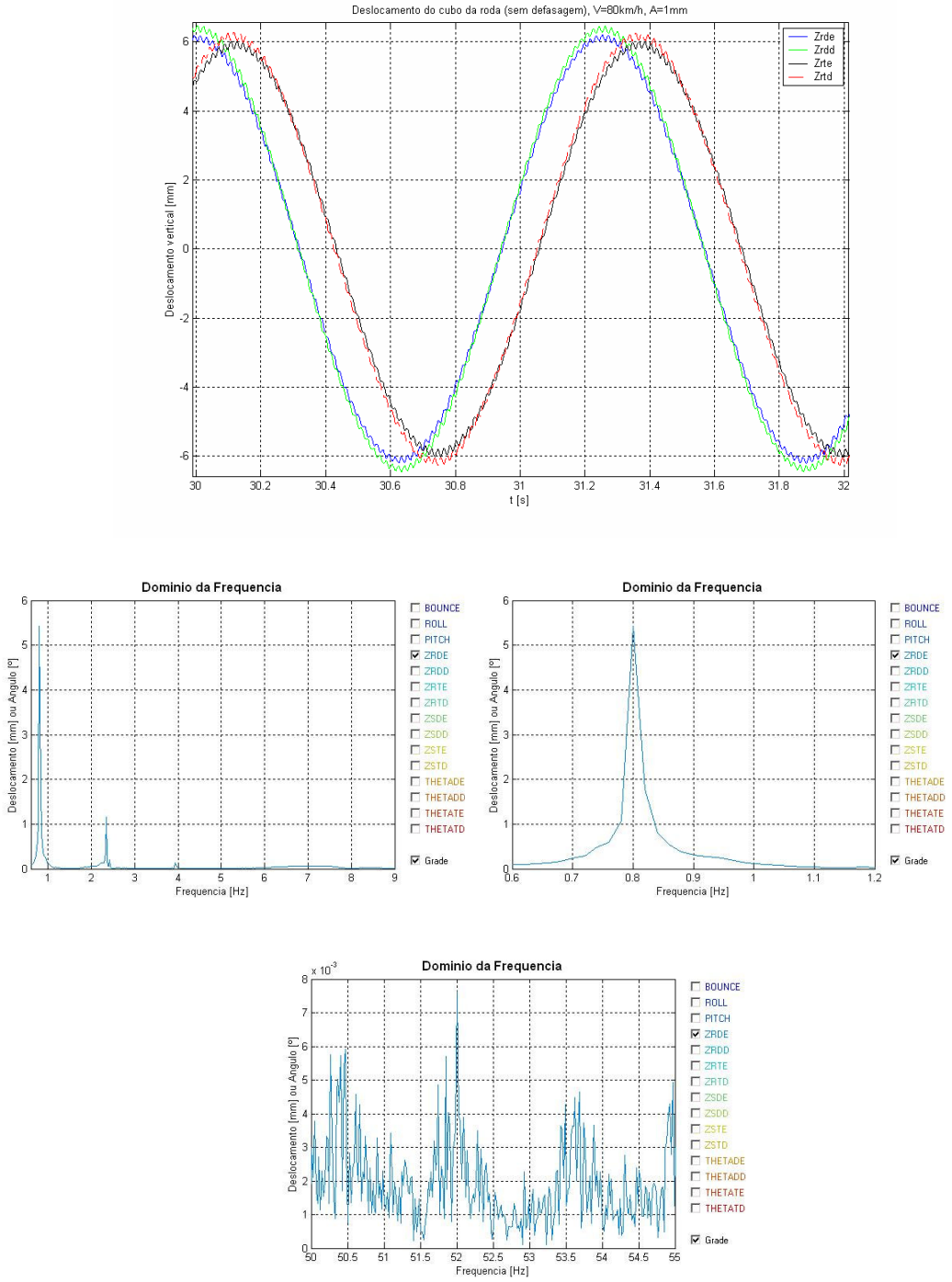


Figura 55 – Deslocamento do cubo da roda e FFT (piso *pavé* sem defasagem)

- Observa-se, na Figura 55, uma senóide de alta freqüência (52Hz), envelopada por uma de baixa freqüência (0,8Hz). A de baixa se refere à presença de cargas excitadoras provenientes da pista, enquanto a de alta é referente ao deslocamento do cubo da roda

efetivamente, considerando inclusive a contribuição da barra de torção e dos outros componentes do sistema de suspensão.

- O fato de a amplitude da roda dianteira esquerda ser maior que a roda dianteira direita (e respectivamente o mesmo efeito no eixo traseiro) pode estar correlacionado à não restrição, por parte do modelo, da posição do centro de *roll* e *pitch* estar vinculados à posição do CG do chassi. Isto pode gerar braços de momento suficientes para levar a contribuição de um lado para outro no deslocamento das rodas, bem como da suspensão;

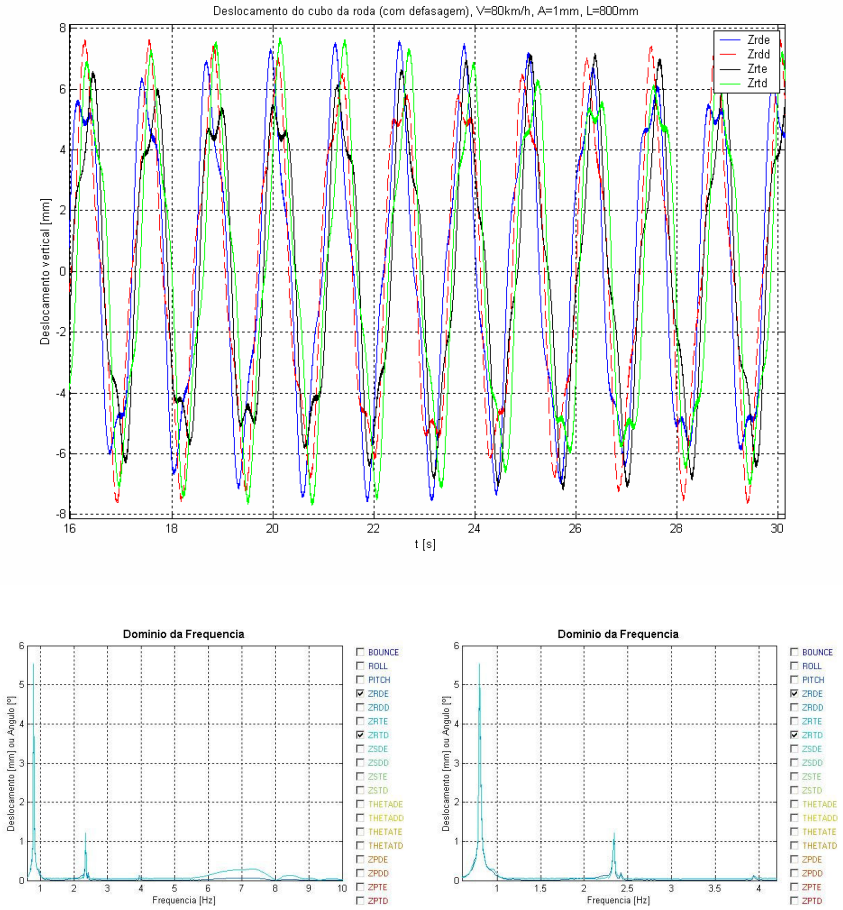


Figura 56 – Deslocamento do cubo da roda e FFT (piso *pavé* com defasagem)

- Vê-se que há uma “deformação” na onda referente a todas as rodas, excursionando sobre a senóide. Ela está relacionada à forma como a travessa ataca os pneus em diferentes tempos e de forma não coordenada. Por exemplo: a travessa atinge a roda dianteira esquerda, posteriormente à direita, a traseira esquerda e a respectiva direita. Dependendo da distância dada pelo fator de defasagem (no

caso L = 800 mm), não há garantia que a próxima travessa atinja a roda dianteira esquerda sem que antes a roda traseira direita tenha passado pela travessa da passagem anterior, ou seja, há mais de um input dentro de um ciclo da pista;

- A freqüência de 0,8Hz é característica dos esforços dinâmicos impostos pela pista à estrutura. Seu terceiro super-harmônico é a componente da pista proveniente do permanente contato do o pneu com o solo;

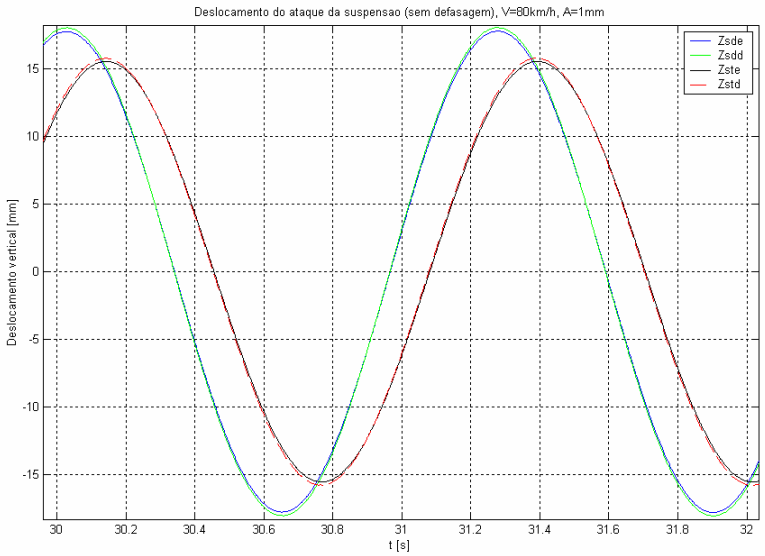


Figura 57 – Deslocamento do ataque da suspensão (piso *pavé* sem defasagem)

- A menor amplitude do eixo traseiro é esperada pelo amortecimento do sistema de suspensão e a diferença de amplitude entre as rodas de um mesmo eixo é a devida ao fato de o centro de *pitch* não ser alinhado com o CG do chassis;

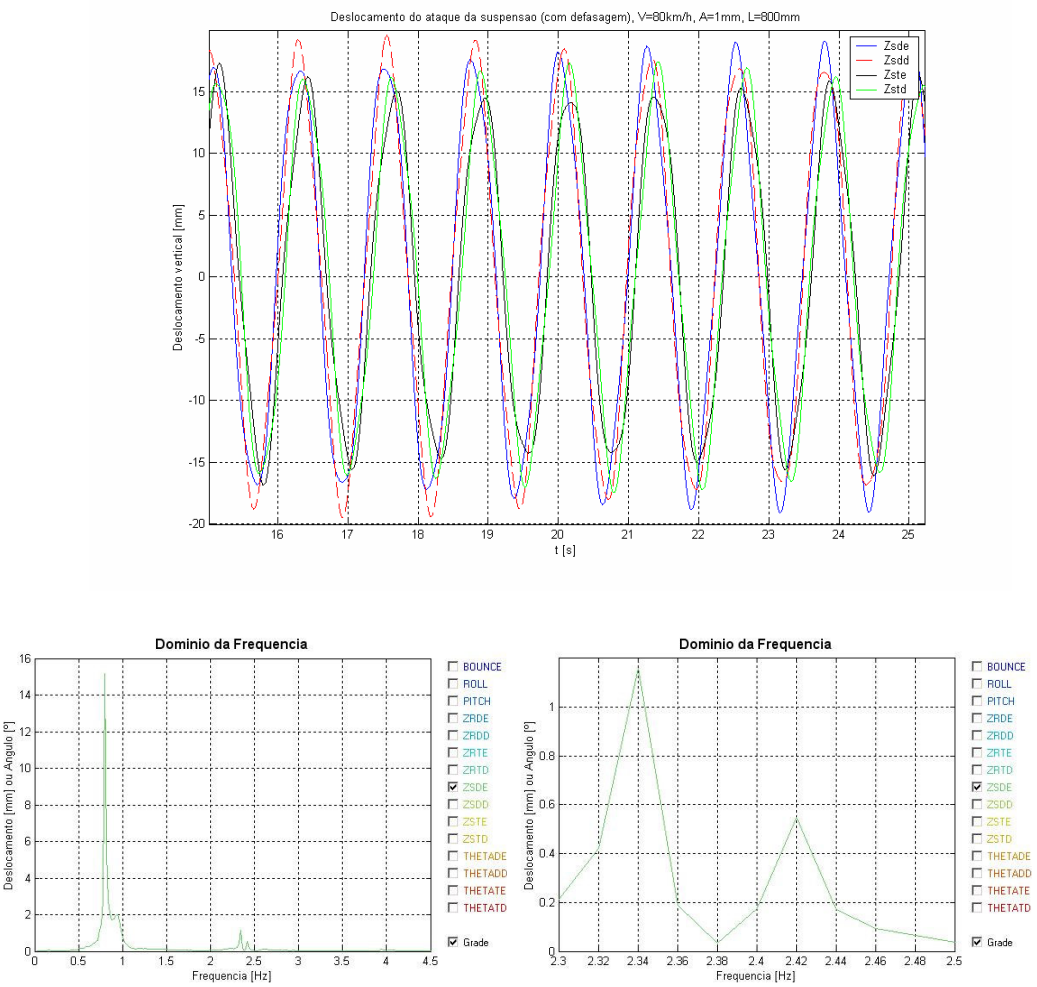


Figura 58 – Deslocamento do ataque da suspensão e sua FFT (piso *pavé* com defasagem)

- Observa-se que há a presença de rolagem com tendência à torção do chassi, uma vez que ora a amplitude do lado dianteiro direito (Z_{sdd}) é maior, ora a amplitude do lado dianteiro esquerdo (Z_{sde}) é maior, o mesmo acontecendo com o eixo traseiro. A torção se manifesta pela inversão no sentido de giro do eixo dianteiro em relação ao traseiro. Esta alternância ocorre numa freqüência característica (2,34Hz), muito próxima aos 2,3216Hz calculados como sendo a freqüência de *roll* da carroceria;

- O movimento resultante é um acoplamento do movimento da massa não-suspensa com a pista (0,8Hz) e do *Roll*, em 2,34Hz.

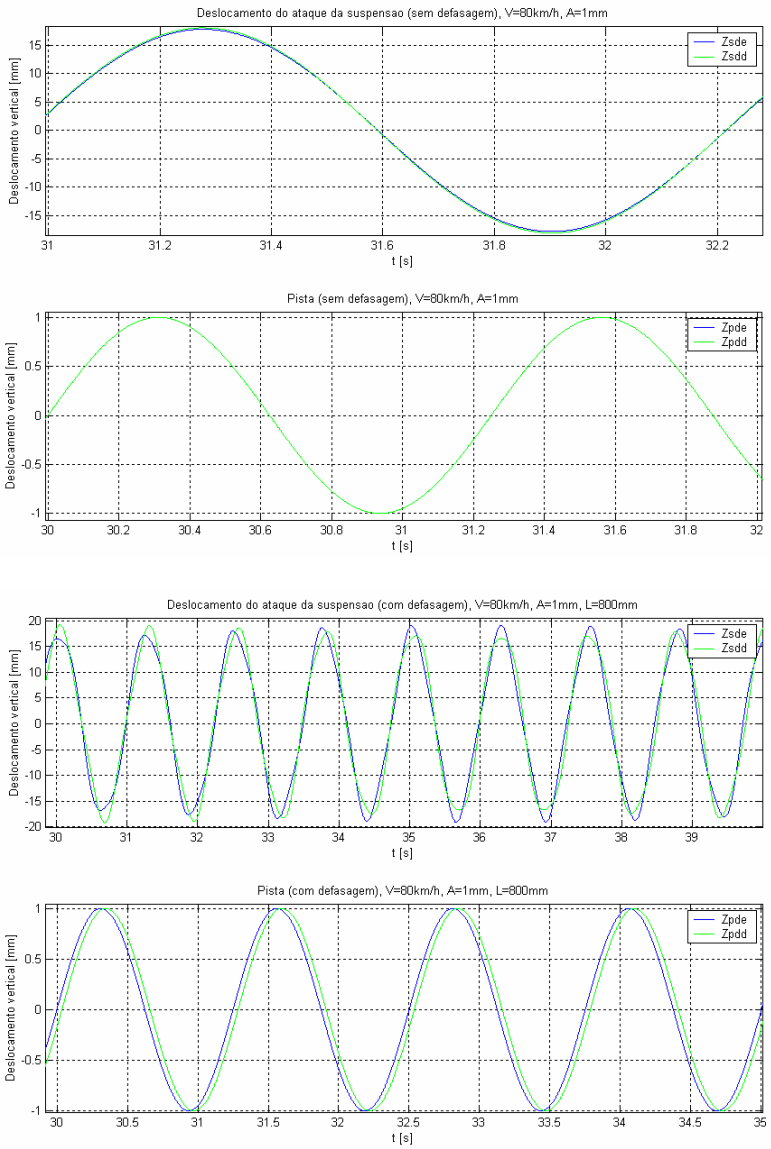


Figura 59 – Influência da excitação da pista sobre a suspensão

- Ressalta-se o fato de o sinal da pista que está em t = 30,30s aproximadamente, é o que gera o deslocamento vertical da suspensão dianteira em aproximadamente t = 31,25s;

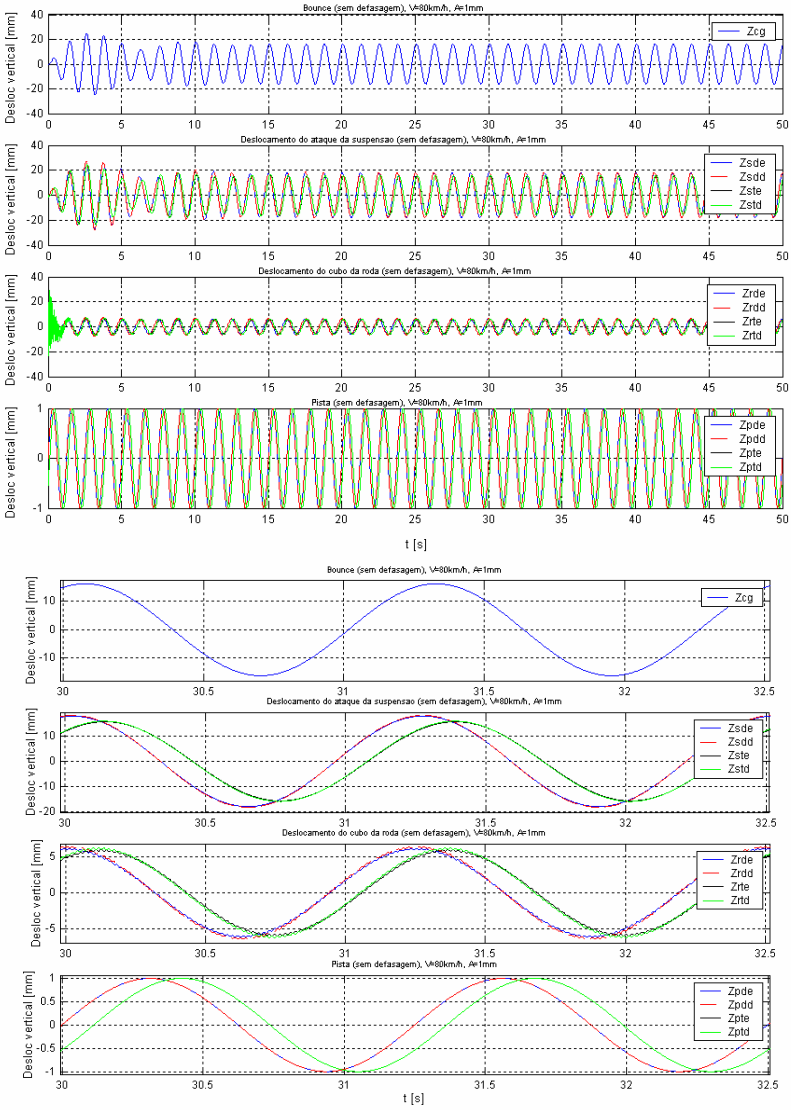


Figura 60 – Influência da excitação da pista sobre a roda, suspensão e *bounce* (simulação completa e detalhe) - sem defasagem

- Na primeira figura (simulação completa) é mostrado o efeito do amortecimento atuando após algumas oscilações (equilíbrio dinâmico do sistema), quando a tendência é de amplificação do movimento. Este gráfico pode ser utilizado para a análise de *comfort* do veículo, no dimensionamento dos amortecedores a fim de mantê-lo dentro de um limite pré-determinado de amplitude de oscilação.

- Na segunda figura (detalhe) é ilustrado o efeito do atraso entre o sinal de entrada no pneu e seu reflexo ao longo da estrutura da suspensão, até chegar ao CG do chassi;

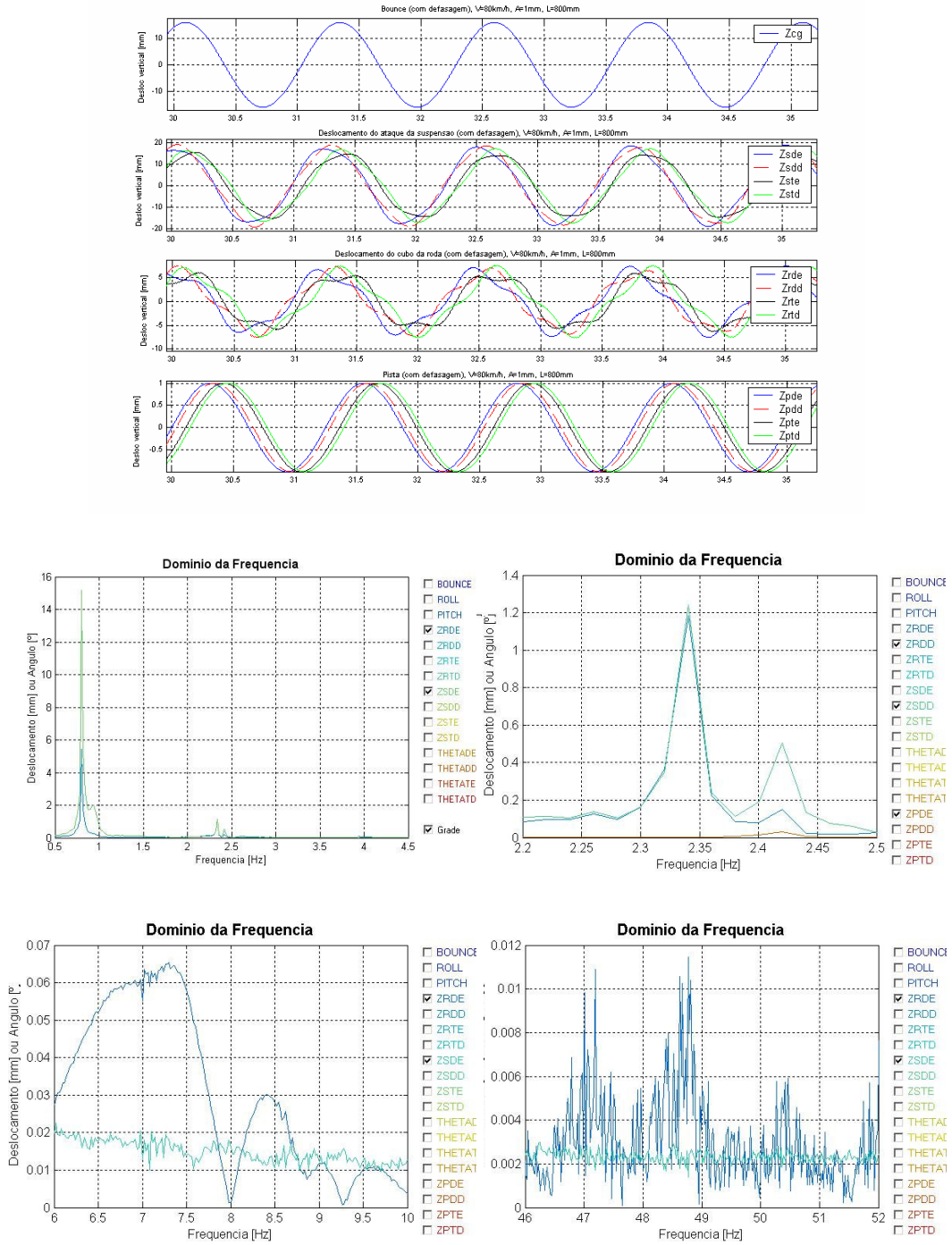


Figura 61 – Influência da excitação da pista sobre a roda, suspensão e *bounce* (simulação completa e detalhe) - com defasagem

- Além do efeito da atuação das cargas excitadoras provenientes da pista (0,8Hz) e de seu terceiro harmônico, nota-se também a ocorrência de outras freqüências: em 2,34Hz existe uma carga excitando a roda e suspensão e não há participação da pista. Pela modal da estrutura, vê-se que este valor é próximo à freqüência do modo *Roll* da carroceria (2,3216Hz);

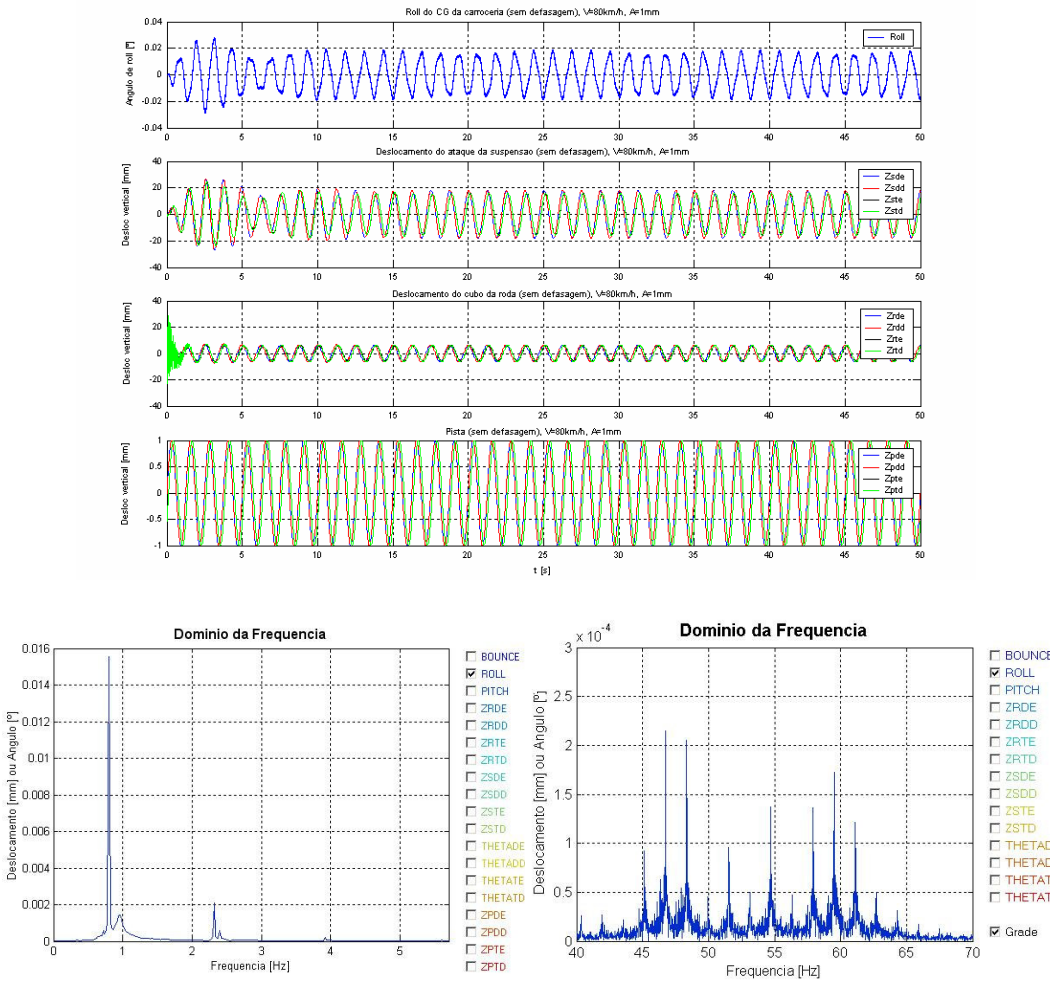


Figura 62 – Influência da excitação da pista sobre a roda, suspensão e *roll* - sem defasagem

- Observa-se que apenas sob o efeito da pista, o ângulo de *roll* é menor, o que é de se esperar pelo fato de não haver defasagem entre as rodas, o que acarretaria seu acréscimo. A existência da rolagem da carroceria mesmo em pista sem defasagem entre rodas se deve unicamente pela posição do CG do chassi fora do eixo de rolagem desta;

- Em termos de freqüência, vê-se que o movimento de *roll* acontece na freqüência de 0,8Hz, referente à excitação da pista. Há também uma baixa freqüência, calculada como sendo 0,08Hz, que não aparece na transformada de Fourier do excitamento de *roll* provavelmente por não possuir energia suficiente para tal. Sua causa pode estar relacionada a algum erro numérico, pois não foi relacionada a nenhum fenômeno físico associado ao sistema. Outras freqüências

detectadas são as que ocorrem no intervalo entre 45 e 65Hz. O movimento de rolagem é composto também por uma senóide de alta freqüência (aproximadamente 50Hz), o que pode ser reflexo de uma excitação da pista em um ou nos dois modos de deslocamento angular dos eixos das rodas, de freqüências características 51,15 e 53,01Hz;

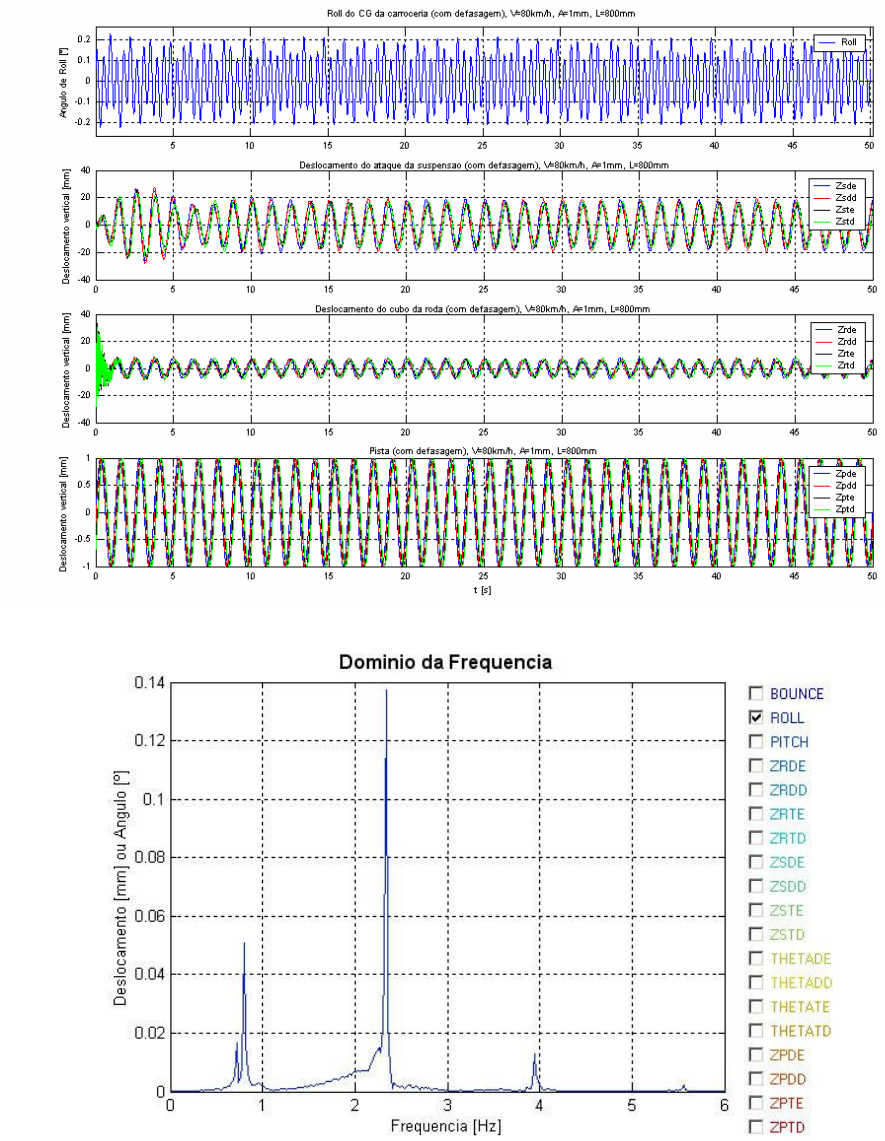


Figura 63 – Influência da excitação da pista sobre a roda, suspensão e *roll* - com defasagem

- Ilustra-se neste gráfico, além de um aumento em amplitude da ordem de 10 vezes em virtude das cargas excitadoras provenientes da travessa, um interessante efeito da suspensão sobre o ângulo de rolagem da carroceria: vê-se que este passa por um valor máximo e,

alguns ciclos depois, por um valor mínimo. Esta flutuação está relacionada à rolagem da carroceria na maior amplitude e à tentativa de correção deste ângulo por parte do sistema de suspensão;

- Observa-se também que é no 3º harmônico da pista que o *roll* se manifesta com maior amplitude, pelo fato de ser esta freqüência a calculada pela modal da estrutura neste grau de liberdade, 2,3216Hz.

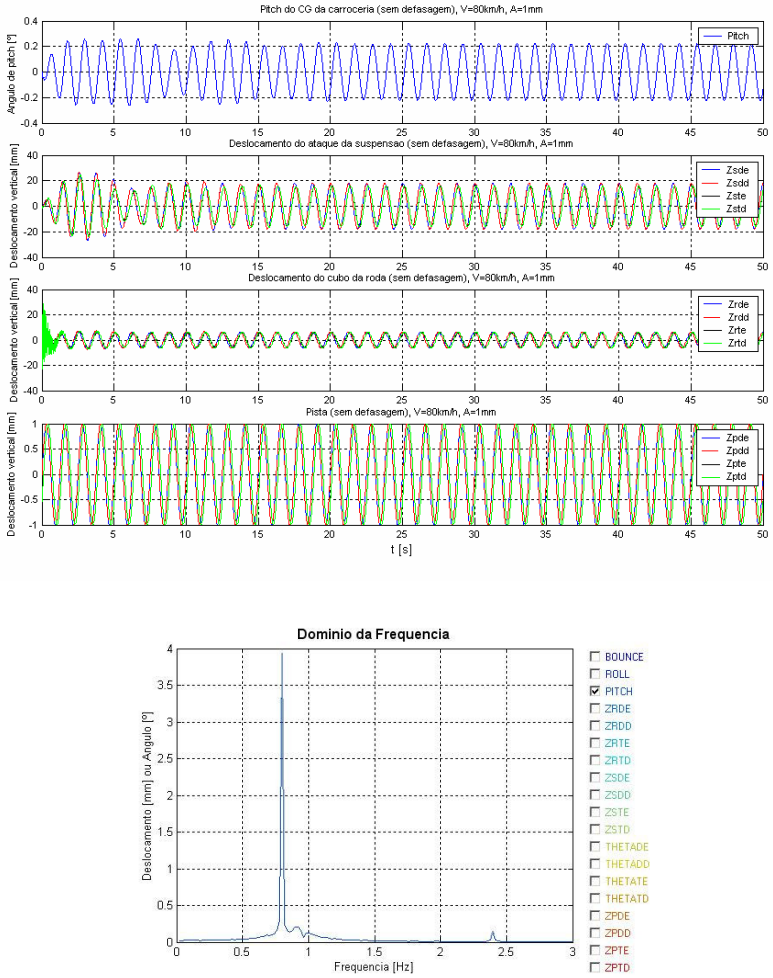


Figura 64 – Influência da excitação da pista sobre a roda, suspensão e *pitch* - sem defasagem

- Observa-se que, para estas condições iniciais e para esta excitação, tanto o *Pitch* quanto o deslocamento da suspensão apresentam, em seu trecho transiente, uma elevação em amplitude e conseqüente atenuação. A elevação é devida à ação predominante da mola, enquanto o processo de atenuação se manifesta quando a atuação

do amortecedor se faz presente. A partir deste ponto, o sistema mola-amortecedor entra em regime permanente;

- A freqüência predominante deste grau de liberdade é a mesma da pista, ou seja, 0,8Hz. A componente representada por este movimento é a que está a 0,92Hz e amplitude 0,2 grau, muito próxima à calculada pela modal para este grau de liberdade, 0,9355Hz.

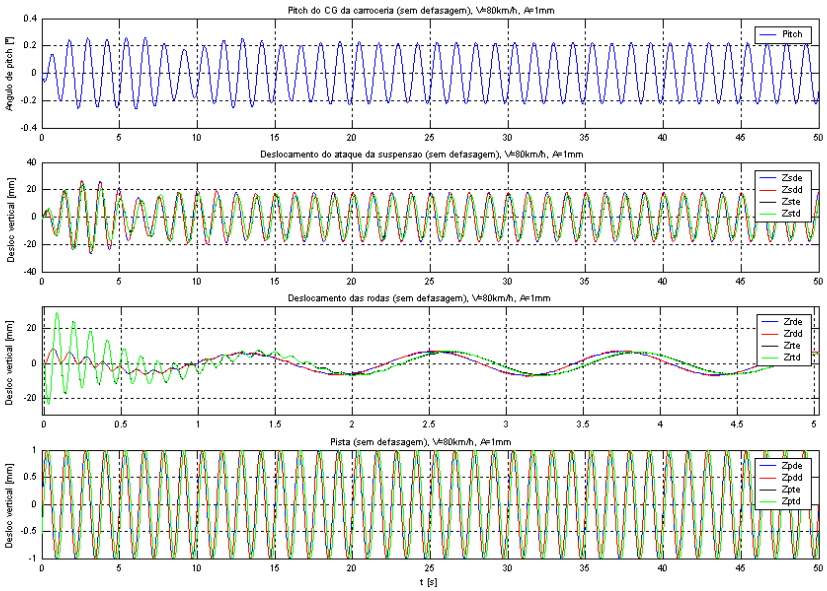


Figura 65 – Influência da excitação da pista sobre a roda, suspensão e *pitch* - sem defasagem (detalhe do deslocamento da roda)

- Ampliando-se o gráfico do deslocamento das rodas, percebe-se que o transiente das rodas traseiras é maior que o das dianteiras. Isto acontece em conseqüência da pista atacar primeiramente as rodas dianteiras, o que provoca uma rotação em *pitch* (elevação da parte anterior e abaixamento da posterior). Com a seqüência de passagens pela pista, esse efeito se mantém até que todo o sistema entre em regime permanente;

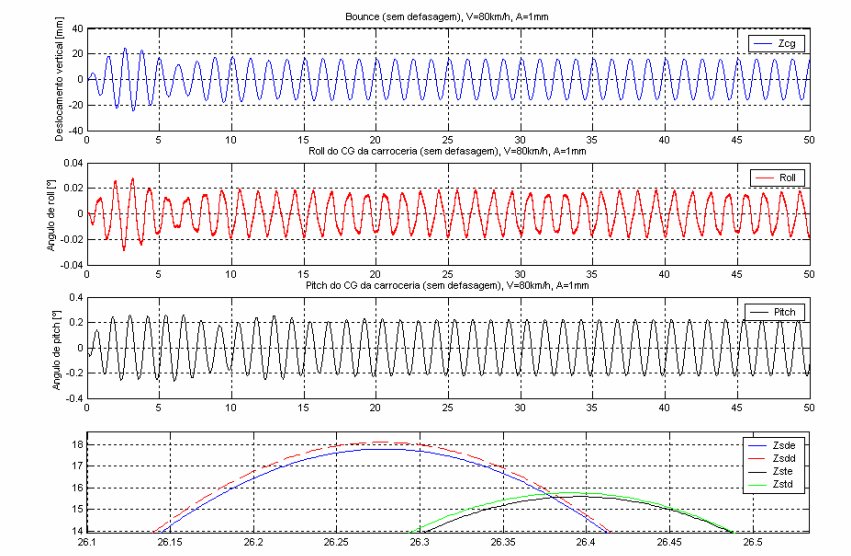


Figura 66 – Detalhe do deslocamento do ataque da suspensão na medida de sua influência sobre o *pitch*, *roll* e *bounce* - sem defasagem

- Em uma primeira análise, pelo fato de a pista não possuir defasagem entre as rodas esquerda e direita, espera-se que não haja movimento de *roll* da carroceria. Mas, ampliando-se o sinal proveniente da suspensão, percebe-se que há uma diferença de amplitude entre o sinal da suspensão dianteira esquerda e dianteira direita e entre o sinal da suspensão traseira esquerda em relação à traseira direita. Isto é suficiente para gerar o ângulo de *roll*, cuja magnitude é pequena (em virtude da pequena diferença de amplitude desses sinais) o que pode ser percebido nos gráficos. Esta diferença de amplitude pode ser justificada pelo deslocamento do centro de massa da linha de rolagem da carroceria. Outra justificativa para a presença deste movimento é o fato de o centro de massa estar fora da linha de centro do CG da carroceria;

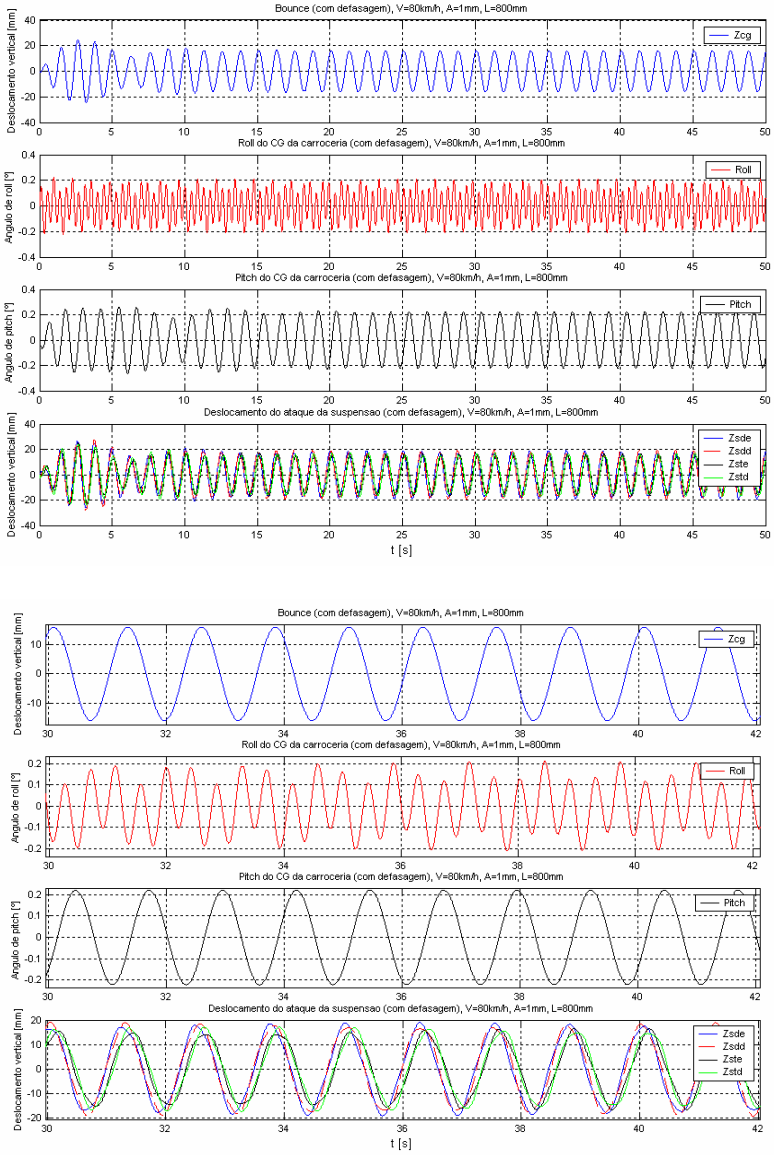
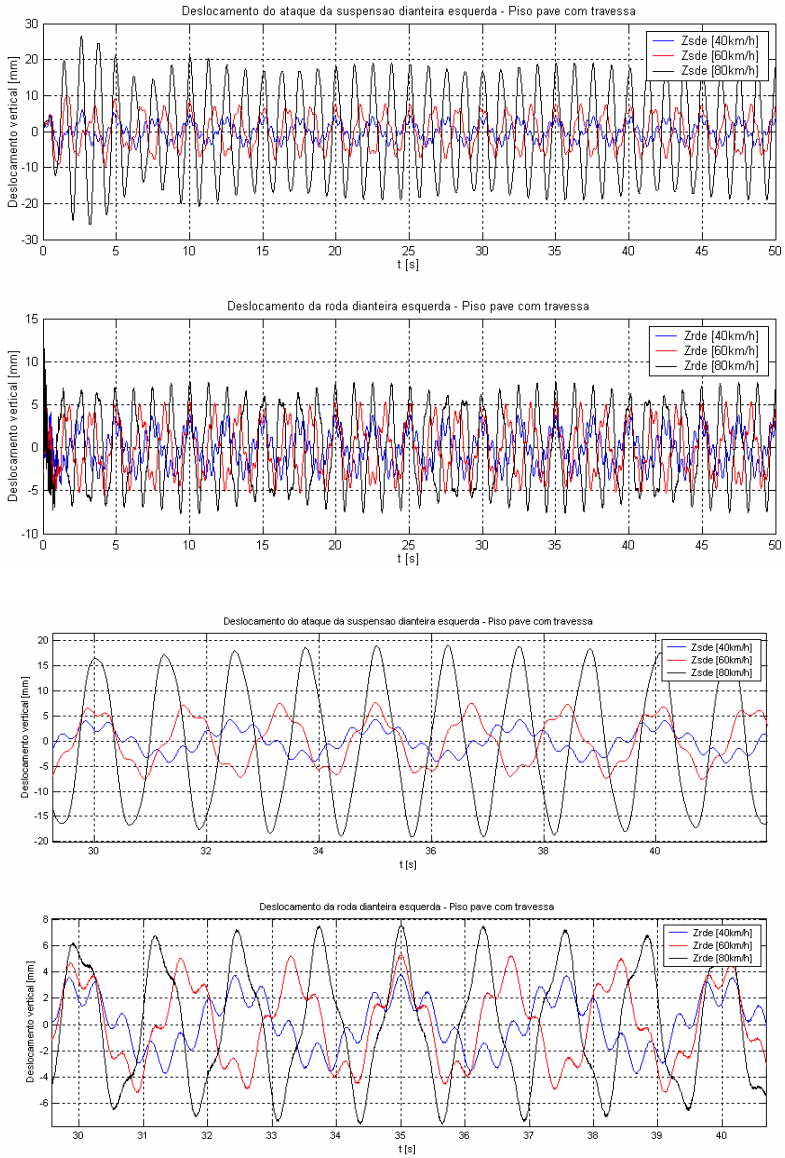


Figura 67 – Detalhe do deslocamento do ataque da suspensão na medida de sua influência sobre o *pitch*, *roll* e *bounce* - com defasagem

- No primeiro gráfico, uma análise preliminar mostra o aumento da amplitude do *roll* da carroceria em comparação à pista sem travessa (senóide pura), o que é ilustrado no segundo gráfico. Este aumento é virtude da ação das travessas inclinadas (senóides defasadas), que excitam pelo menos quatro vezes a estrutura (dianteira esquerda, direita, traseira esquerda e direita) no mesmo tempo em que a pista sem a defasagem excita pelo menos duas. Dependendo do tamanho da travessa pode haver mais excitações em uma passagem do veículo pela pista;

- Observa-se também que há oscilações crescentes seguidas de outras decrescentes. As crescentes se referem à resultante das excitações dos ataques da suspensão, que combinadas com o centro de massa fora da linha de centro da carroceria, leva esta à tendência de rolagem. As decrescentes, restauradoras, devem-se à passagem do veículo por uma travessa do lado oposto ao do movimento, o que traz a carroceria de volta para o sentido oposto ao da tendência de rolagem.

4.2.4 – Resposta dinâmica do veículo para diferentes velocidades de pista



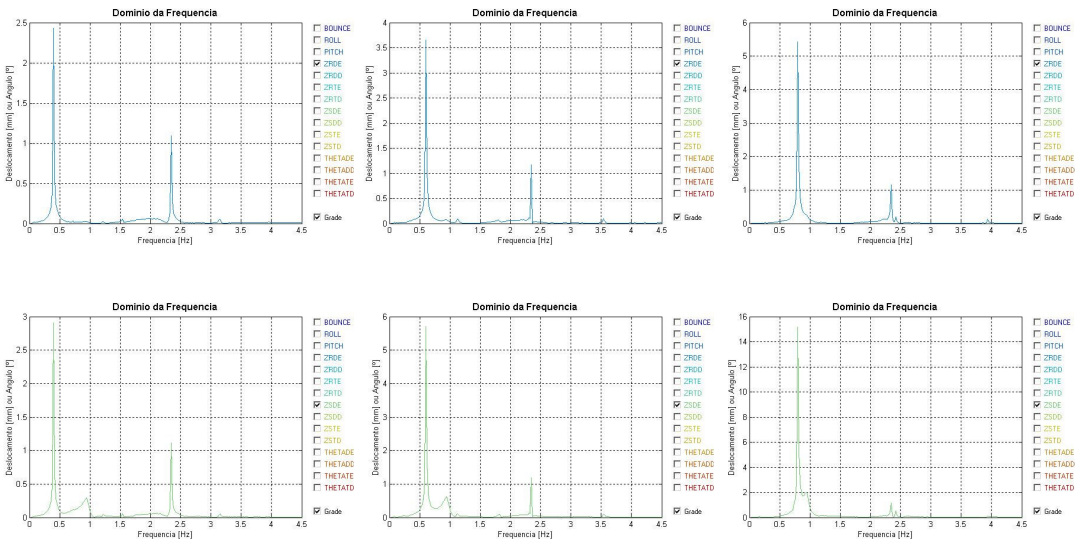


Figura 68 – Influência do deslocamento da roda sobre a suspensão (simulação completa, detalhe e FFT) - com defasagem

- Primeiramente, vê-se que o modelo responde corretamente para esta condição de pista em diferentes velocidades, ou seja, ele apresenta uma maior amplitude quanto maior for a velocidade (isto porque a função razão de transmissibilidade – TR, se encontra no seu trecho crescente para esta faixa de velocidades);
- Confirma-se também a correlação entre o número de excitações de acordo com a velocidade da pista, pois existem 02 picos da curva correspondente a 80 km/h em um período da curva de 40 km/h e 1,5 picos da curva de 60 km/h no período da curva de 40 km/h;
- No primeiro gráfico (simulação completa), vê se que os sinais, tanto da roda quanto da suspensão, são envelopados por uma espécie de batimento (senóide de baixa freqüência sobre o sinal propriamente dito). No trecho de aumento da amplitude há a ação da pista *pavé* e na atenuação manifesta-se o intervalo no qual não há a ação da travessa (defasagem entre as rodas);
- O efeito de “deformação” das ondas é o mesmo apresentado anteriormente, pela forma como as travessas passam pelo veículo de forma às vezes irregular, de acordo com a distância entre elas quando comparada com a distância entre rodas. Nas curvas relativas

à roda dianteira esquerda, ressalta-se a presença da rigidez do pneu, modelado para tê-la na ordem de 10 vezes maior que a suspensão;

- Na análise em freqüência, a primeira observação que se faz é, tanto no excitamento da roda quanto da suspensão, a presença de cargas de excitamento nas freqüências da pista (0,4Hz para V=40Km/h, 0,6Hz para V = 60Km/h e 0,8Hz para V = 80Km/h). Outro fato a ser considerado é que a amplitude dos movimentos aumenta com o aumento de velocidade, o que é esperado para o sistema roda-suspensão;
- Para V = 40Km/h, a análise do movimento da roda dianteira esquerda confirma a hipótese levantada sobre os múltiplos ímpares da freqüência fundamental de excitação, ou seja, no 3º e 5º harmônicos de 0,4Hz encontram-se manifestações deste deslocamento. Em 2,34Hz há aumento considerável na amplitude tanto deste grau de liberdade quanto do ataque da suspensão. Esta é uma freqüência muito próxima à de rolagem da carroceria (2,3216Hz), ou seja, pode estar acontecendo um acoplamento de um modo de rolagem com o de deslocamento vertical das rodas, em virtude da presença da travessa, o que aumenta o deslocamento angular da carroceria. Na análise da suspensão para esta velocidade de pista, vê-se, como destaque, a presença de uma componente na freqüência de 0,94Hz, que pode representar tanto um acoplamento de *Pitch* (0,9355Hz) quanto com *Bounce* (0,9632Hz), considerando para o último a faixa de erros presente na análise numérica;
- Análise similar pode ser feita para V = 60Km/h, dando-se destaque para a freqüência de 2,34Hz, que mais uma vez aparece neste espectro. Isto é um sinal positivo para o acoplamento citado no item anterior pois a velocidade de 60Km/h gera carga excitadora em freqüência e harmônicos diferentes das geradas pela velocidade de 40Km/h. Esta freqüência volta a aparecer na transformada de Fourier do sinal relativo à velocidade de 80Km/h. Outra similaridade é a presença da componente de 0,94Hz na análise da suspensão, tanto

para 60Km/h quanto para 80Km/h, o que pode realmente representar o acoplamento com o modo de *Bounce* ou de *Pitch*.

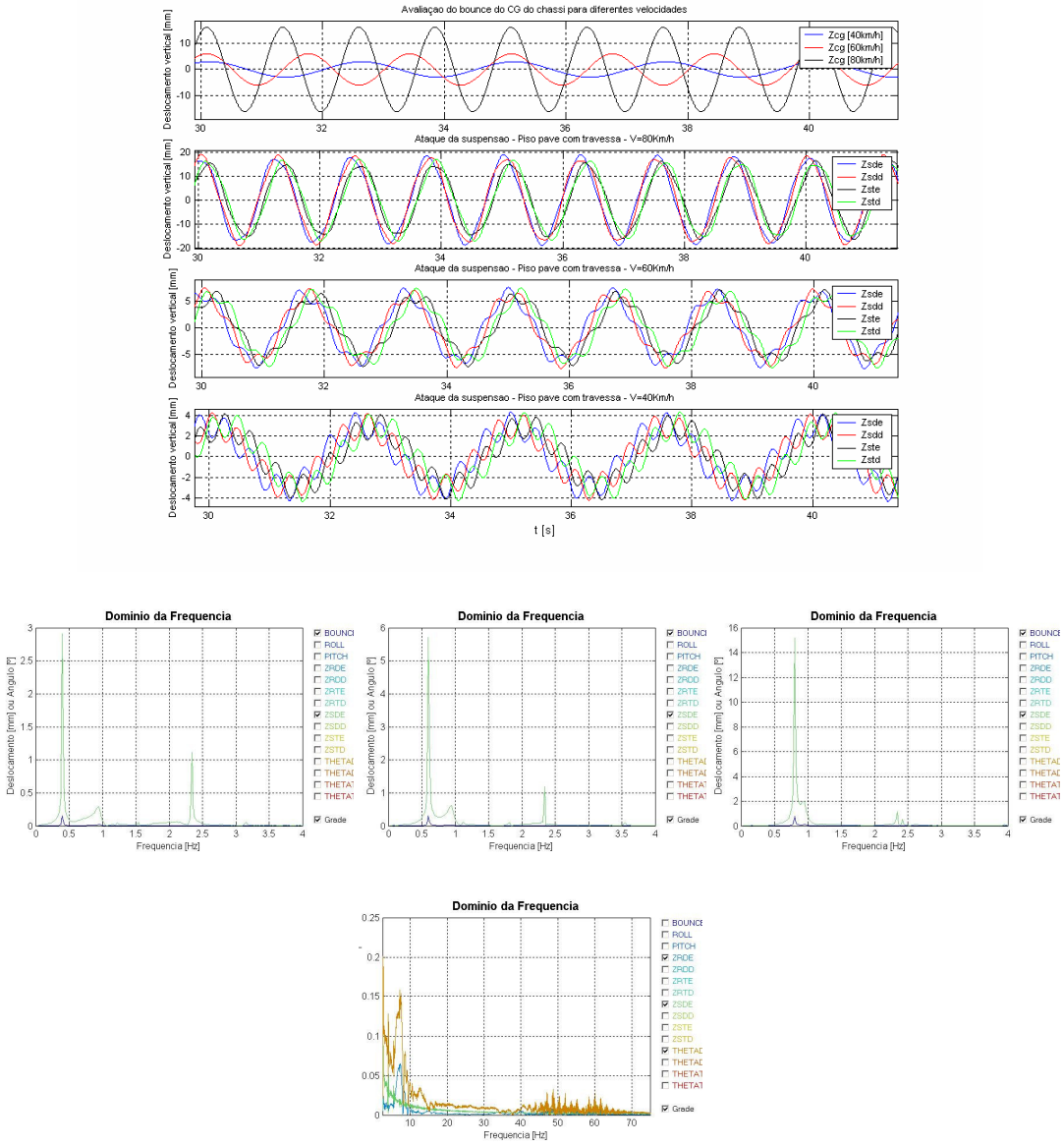


Figura 69 – Deslocamento do ataque da suspensão para diferentes velocidades e sua influência sobre o *bounce*

- No gráfico de *bounce*, vê-se que o modelo responde com uma maior amplitude quanto maior a velocidade da pista. Nos três gráficos referentes ao ataque da suspensão para diferentes velocidades percebe-se que com o seu aumento ocorre o mesmo com a amplitude dos deslocamentos. Há também a contribuição das rodas e barras estabilizadoras, vista no componente de maior freqüência, presente em todas as curvas;

4.2.5 – Resposta dinâmica do veículo para diferentes amortecimentos

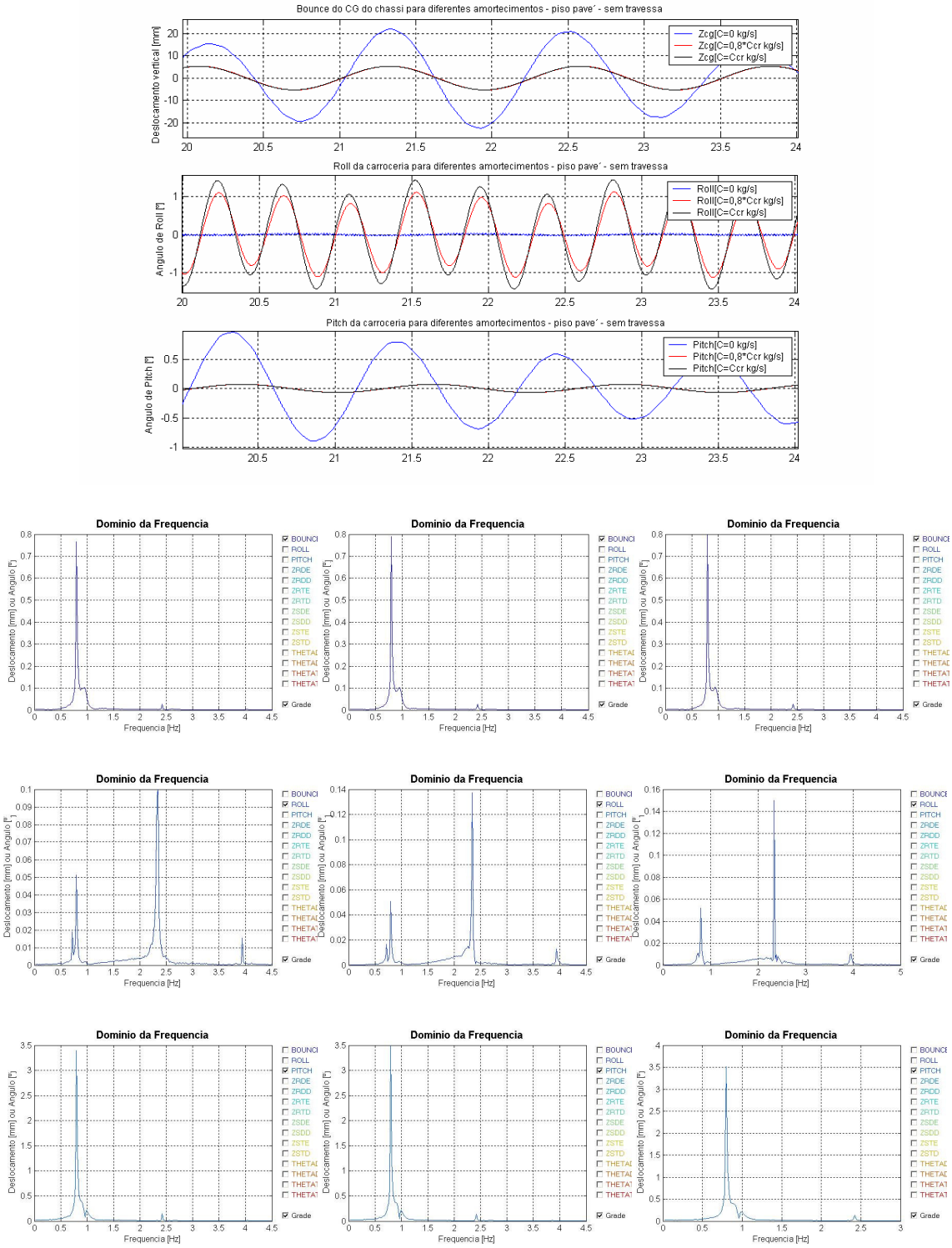


Figura 70 – *Pitch*, *roll* e *bounce* para diferentes amortecimentos

- Vê-se que tanto para *pitch* quanto para *bounce*, a amplitude do movimento quando o coeficiente de amortecimento é 80% do valor crítico pouco se difere da situação em que o amortecimento é crítico.

- O ângulo de *roll*, por depender mais diretamente da variação das amplitudes dos ataques das suspensões, apresenta maior sensibilidade à pequena variação entre 80% do $c_{crítico}$ e quando é adotado o valor crítico;

- Como esperado, a alteração do coeficiente de amortecimento da suspensão não deveria afetar de forma significativa (como não afetou) a freqüência das cargas de excitamento da massa suspensa, o que pode ser verificado nos gráficos correspondentes aos deslocamentos angulares de *Pitch* e *Roll*, para as três condições de amortecimento, $c = 0$, $c = 0{,}8.c_{cr}$ e $c = c_{cr}$. No domínio do tempo o amortecimento gera um atraso (do tipo atraso de transporte), causado pela maior ou menor dissipação de energia;

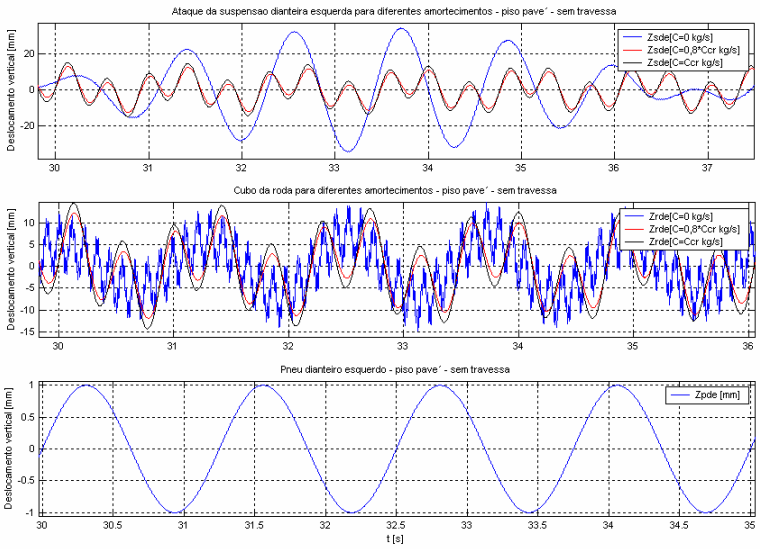


Figura 71 – Pista, roda e suspensão para diferentes amortecimentos

- Tanto no gráfico referente à suspensão quanto ao referente à roda dianteira esquerda, nota-se uma maior diferença entre a amplitude para o caso de o amortecimento estar em 80% do valor crítico em relação ao crítico;

- As curvas referentes à roda dianteira esquerda possuem o mesmo comportamento, alterando-se apenas o aspecto da curva para o caso de amortecimento zero quando o sistema se comporta como um massa-mola, levando-se em conta também a contribuição da barra de torção dianteira sobre a roda;

Para c = 0Kg/s^2

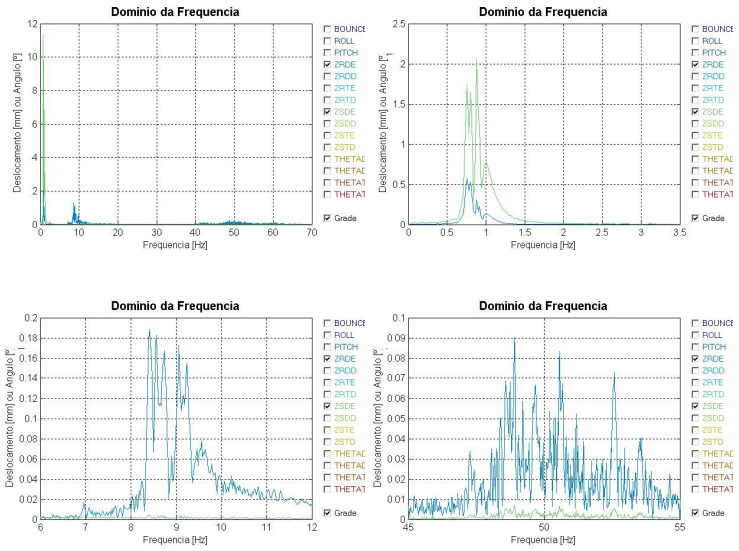


Figura 72 – Roda e suspensão para amortecimento c = 0Kg/s

- A primeira análise que se faz diz respeito à condição do sistema, ou seja, sem amortecimento. Seu comportamento neste caso é de um sistema massa-mola e suas principais freqüências são excitadas;
- O primeiro pico de freqüência acontece em 0,76Hz, e provavelmente está relacionado à pista (0,8Hz). Logo após há a presença de amplitude, tanto por parte da roda quanto da suspensão, em 0,9Hz, que também pode estar deslocada à esquerda pelo mesmo motivo da fundamental. Ela pode ser manifestação de um carregamento que excita a massa suspensa em seu modo de *bounce* (0,9355Hz), que é o modo predominante na condição do sistema funcionando como um massa-mola;
- Entre 8 e 10Hz tem-se 3 picos, mal definidos, mas em parte possivelmente relacionados a um acoplamento dos 2 modos de deslocamento vertical dos eixos das rodas (9,1476 e 9,479Hz, respectivamente), além de poder existir alguma carga dinâmica excitando o sistema em algum harmônico da pista.
- Na faixa entre 50 e 54Hz pode-se identificar uma excitação proveniente dos modos de deslocamento angular dos eixos das rodas, respectivamente 51,1529Hz e 53,0148Hz.. Como a faixa também é ampla, pode existir algum outro harmônico sendo excitado;

Para c = 0,8.c_{cr} Kg/s^2

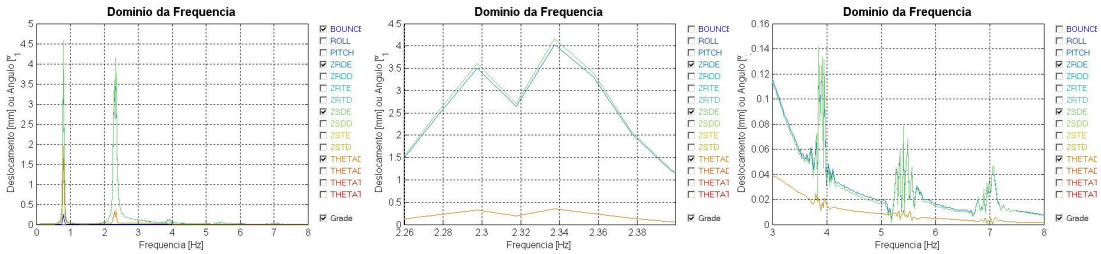


Figura 73 – Roda, suspensão e braço da barra estabilizadora para c = 0,8.c_{cr}

- Na presença de amortecimento, o primeiro item a se destacar são as freqüências em torno de 2,3Hz. Existe aí o modo de rolagem da carroceria (2,3216Hz), além da presença da excitação da pista em seu terceiro harmônico (2,4Hz), quinto harmônico (próximo a 4Hz), sétimo (~5,6Hz) e nono harmônico (~7,2Hz), em amplitudes decrescentes.

Para c = c_{cr} Kg/s^2

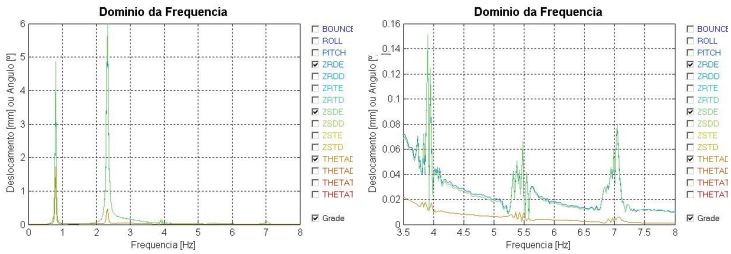


Figura 74 – Roda, suspensão e braço da barra estabilizadora para c = c_{cr}

- Análise semelhante se faz quando o amortecimento é crítico em termos das freqüências características. A diferença é ordem das amplitudes, neste caso, menores.

4.2.6 – Análise do comportamento das barras de torção para diferentes condições de rigidez

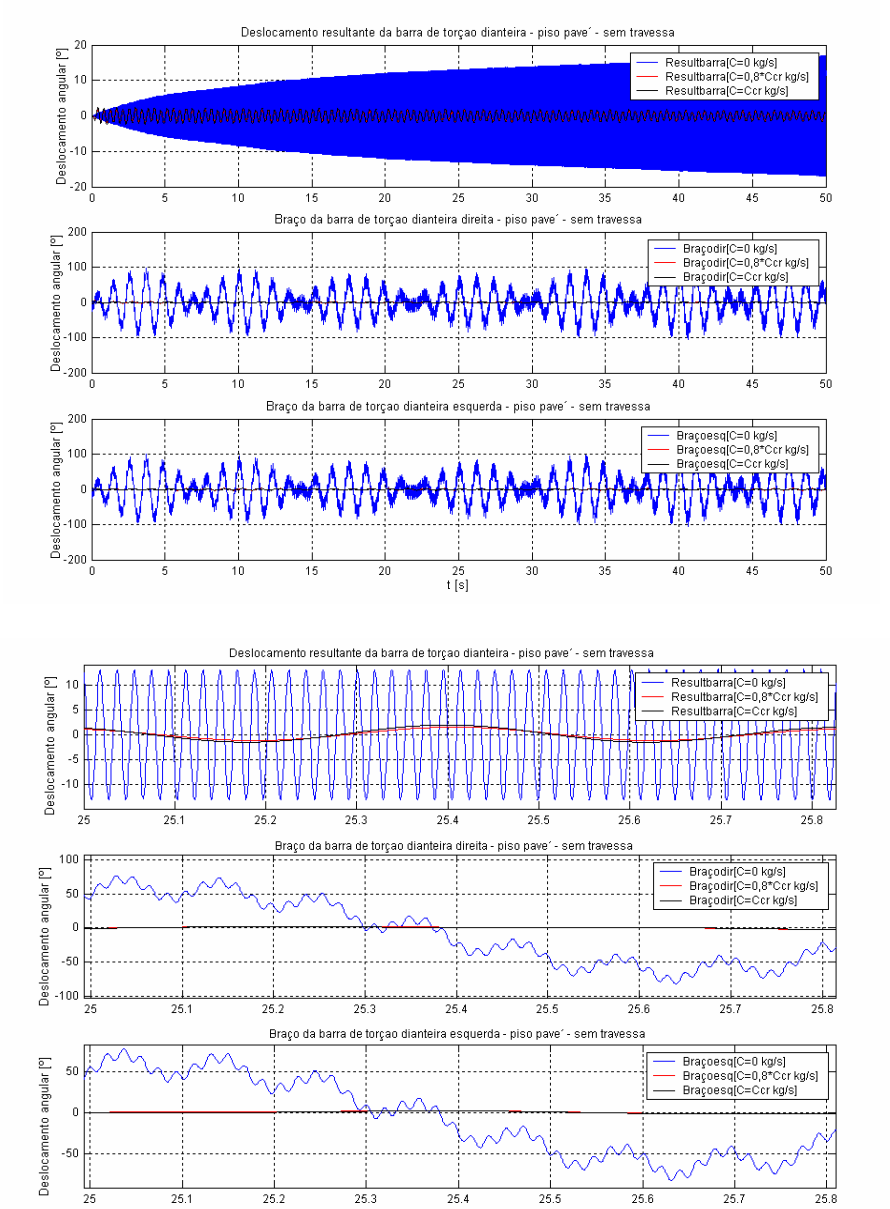


Figura 75 – Ângulo do braço da barra de torção para diferentes amortecimentos

- No primeiro gráfico (simulação completa) nota-se que, conforme esperado, na ausência de amortecimento, a amplitude do deslocamento resultante da barra de torção, ligada em suas extremidades aos cubos das rodas, é continuamente crescente;

- Nas curvas referentes aos braços dianteiro esquerdo e dianteiro direito, percebe-se que existem dois sinais, um em alta e outro em baixa freqüência. O sinal referente ao braço é o de alta freqüência, enquanto o de baixa se refere à pista;

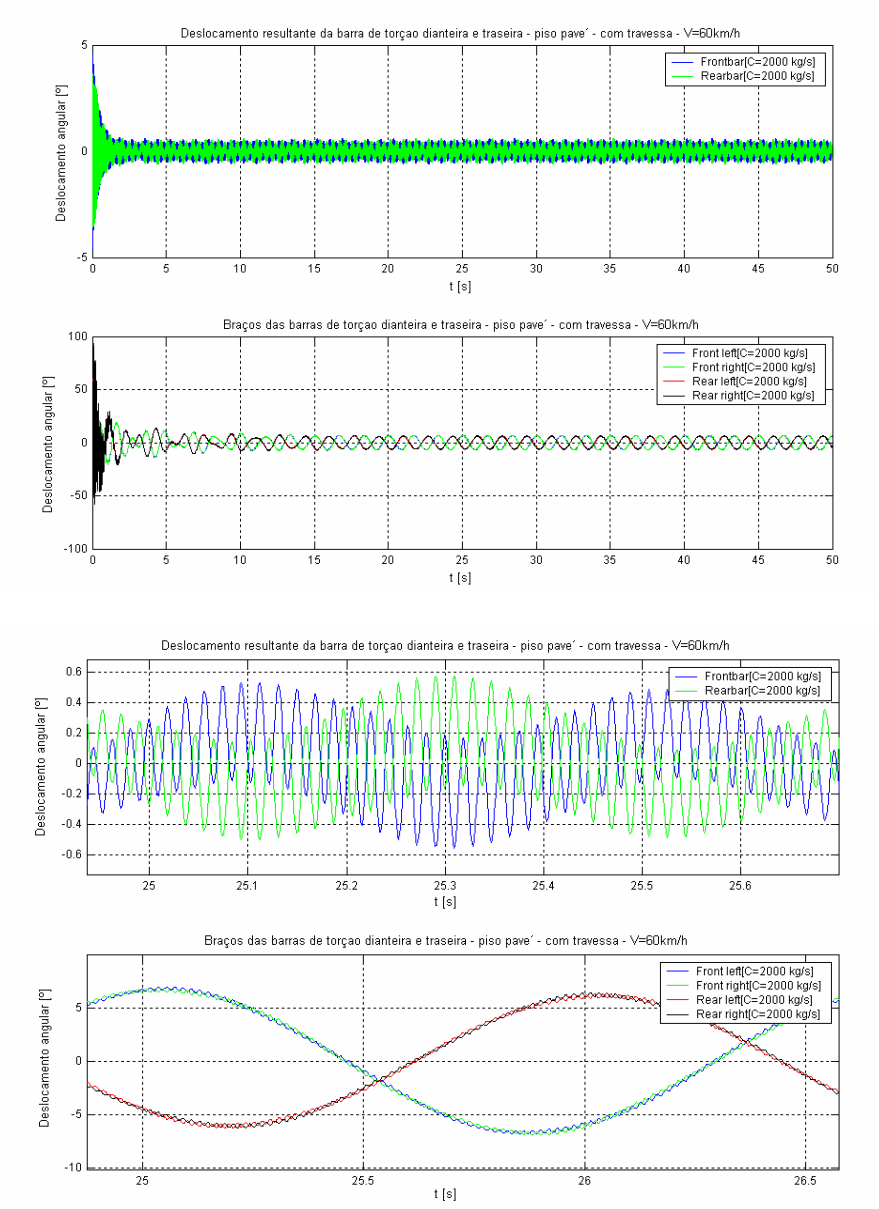
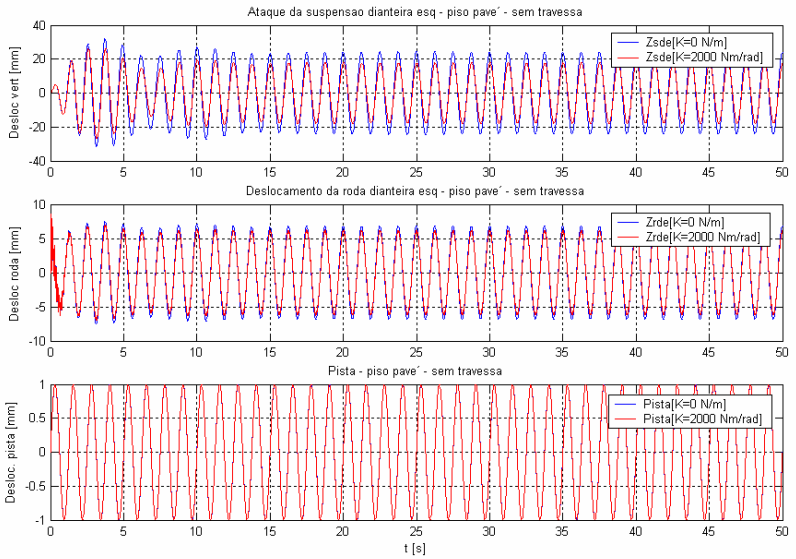
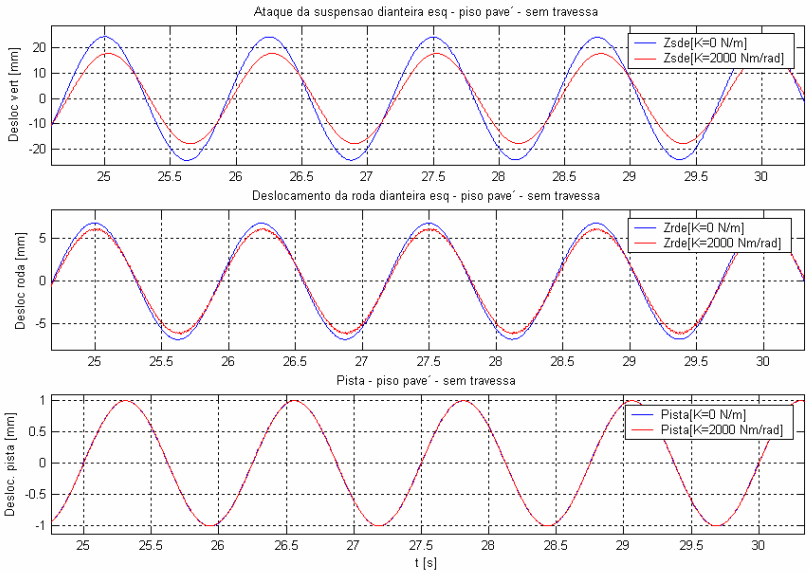


Figura 76 – Ângulo da barra de torção dianteira e traseira

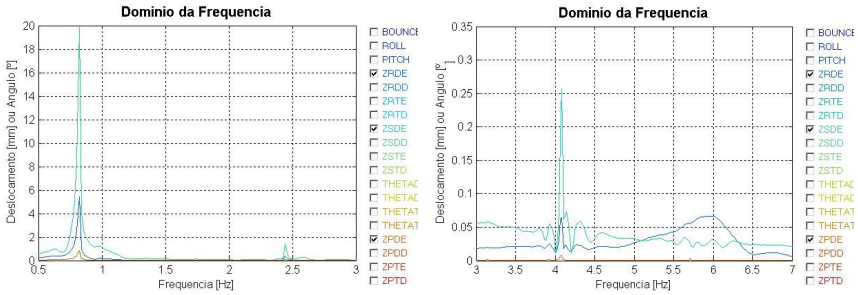
- Para efeito de análise, lembra-se que a resultante de movimento das barras estabilizadoras, tanto dianteira quanto traseira, é tomada como o ângulo do lado esquerdo subtraído do ângulo do lado direito. Vê-se que o comportamento da resultante das barras é conseqüência do movimento dos respectivos braços, ou seja, existe uma componente em baixa freqüência, vinda da pista e outra em alta. Nota-se também a defasagem entre os sinais dos braços dianteiro esquerdo e direito, traseiro esquerdo e direito. Isto acontece devido a presença da travessa.

4.2.7 – Análise do comportamento do veículo para diferentes condições de rigidez das barras de torção





K=0 Nm/rad



K=2000Nm/rad

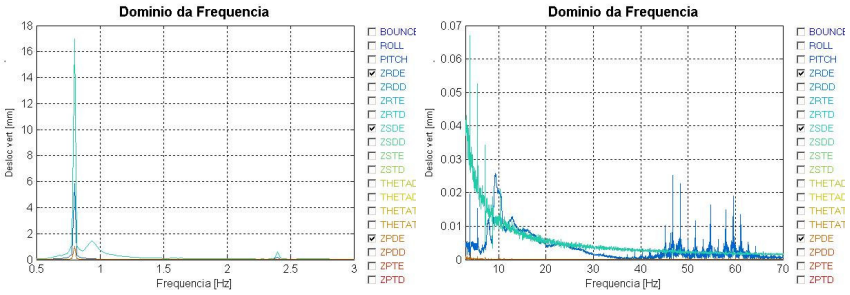


Figura 77 – Influência da excitação da pista sobre a roda e suspensão sobre variação da rigidez da barra estabilizadora

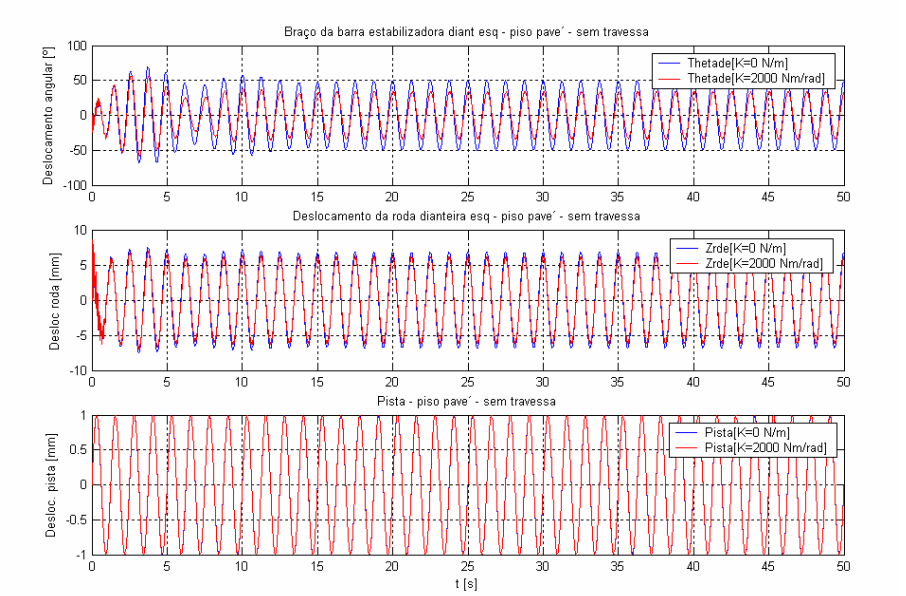
- Primeira observação a respeito destas curvas é referente ao aspecto geral destas, ou seja, na ausência das barras estabilizadoras a amplitude do movimento relativo às rodas, e por conseguinte à suspensão, é maior quando comparada às curvas nas quais este sistema é presente. Como também era de se esperar, não houve alteração na excitação, o que pode ser verificado no gráfico em detalhe. Comparativamente, o sistema sem as barras de torção seria a modelagem de uma suspensão indepentente, enquanto o de K=2000Nm/rad é um sistema semi-independente;

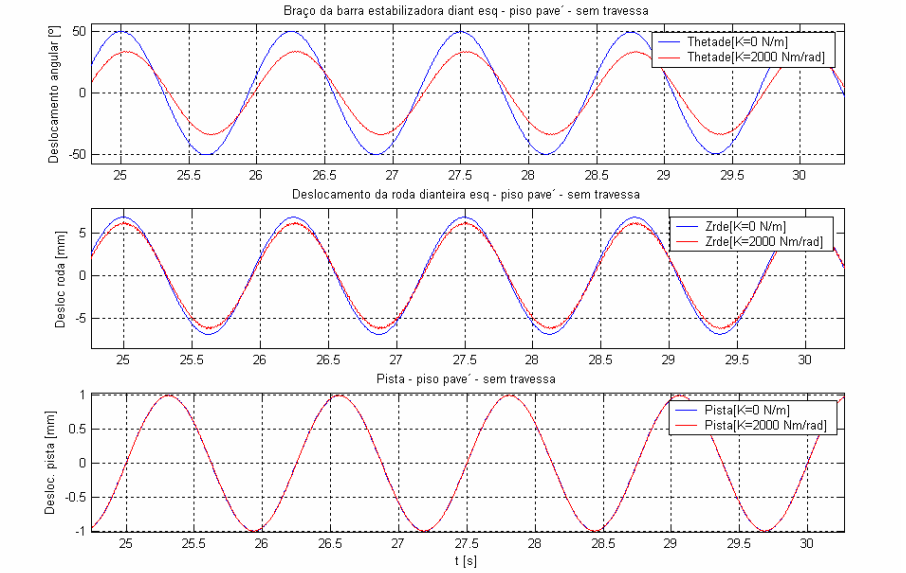
- Também é percebido, na fase transiente, que o modelo se comporta como um sistema massa-mola, e após 4 oscilações há a atuação do amortecimento, trazendo este para a condição de regime permanente. O efeito é igualmente sentido independente da presença ou não das barras estabilizadoras.

- Observando-se a resposta do sistema de K=0Nm/rad e comparando-o com o de K=2000Nm/rad, vê-se que o primeiro apresenta um "adiantamento" em relação ao segundo. Este efeito se deve à rigidez à torção da barra, que leva um tempo para transmitir a energia de deformação da pista à roda e desta à suspensão;

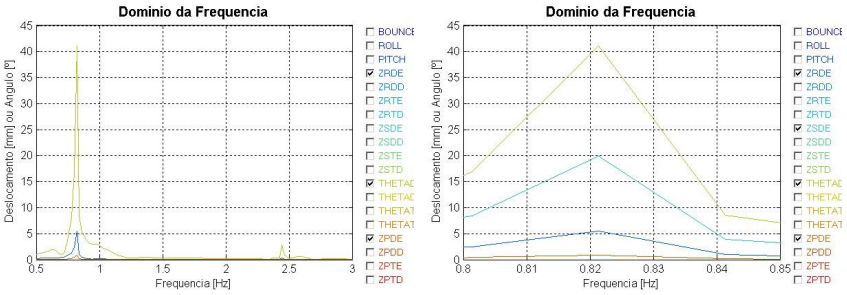
- Analisando-se a resposta da roda, vê-se que para o sistema com barra estabilizadora há a presença de uma componente em alta freqüência (~50Hz, como visto no espectro de banda obtido pela FFT, entre 45 e 60Hz). Esta componente, como dito anteriormente,

pode estar relacionada com um dos modos de deslocamento angular da barra, que pode estar sendo excitada pela pista.





K=0 Nm/rad



K=2000 Nm/rad

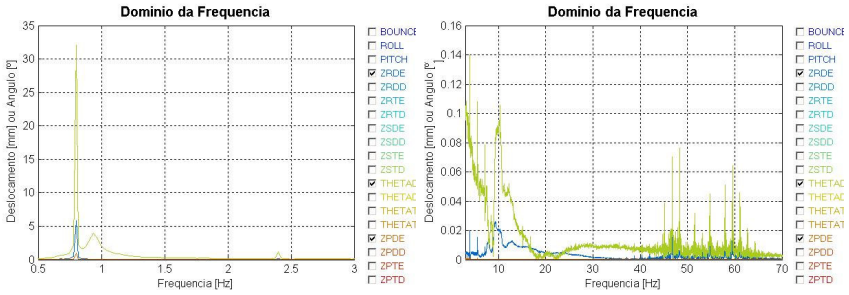
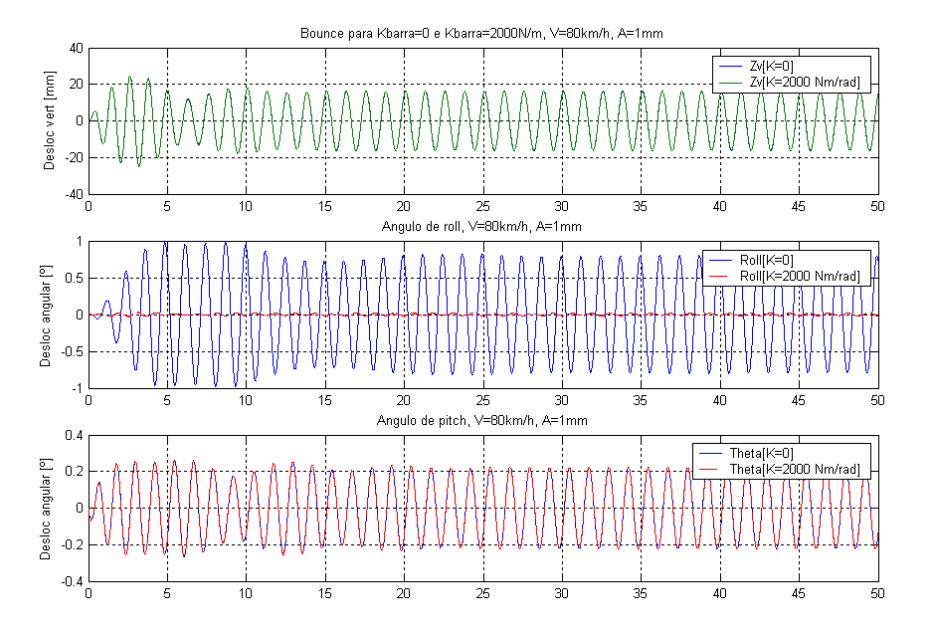
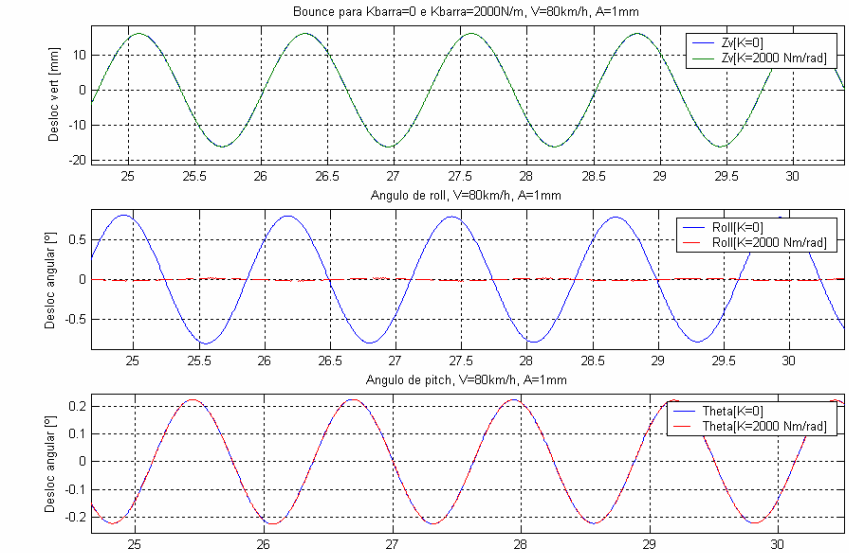


Figura 78 – Comparação entre o sinal da pista, roda e suspensão para variação de rigidez da barra estabilizadora

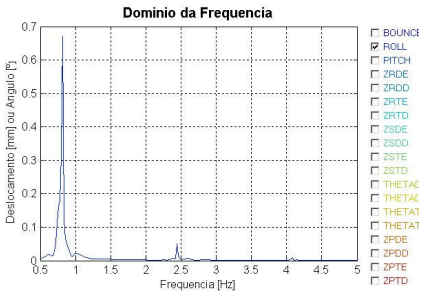
- Além das considerações sobre a diferença de amplitudes entre o sistema sem e com a barra estabilizadora, percebe-se na análise em freqüência, que a excitação da pista, que deveria ter sua componente fundamental em exatos 0,8Hz, apresenta um desvio desta freqüência para um valor um pouco maior que 0,82Hz. Suas super-harmônicas estão de acordo com este valor. Viu-se que na simulação para K=0Nm/rad, o tempo necessário para a obtenção da solução das equações foi menor (~19segundos) frente à simulação para K=2000Nm/rad (~285segundos), bem como o tamanho da matriz solução (8985 contra 40217 elementos). Na ausência da rigidez (e dos graus de liberdade que dependem dela - vide a matriz rigidez no apêndice referente ao desenvolvimento matemático do modelo), a função ode45, responsável pelo cálculo das respostas, usa incrementos de tempo maiores e de intervalos mais irregulares, o que na análise em freqüência pode causar o desvio indicado acima;

- Avaliando-se a curva referente ao braço da barra, vê-se também a freqüência em torno de 50Hz. Fisicamente este é um resultado esperado uma vez que o movimento, para ser passado da pista para a barra, necessariamente transmite-se através destes braços;


Bounce para Kbarra=0 e Kbarra=2000N/m, V=80km/h, A=1mm
Desloc vert [mm]
Zv[K=0]
Zv[K=2000 Nm/rad]
Angulo de roll, V=80km/h, A=1mm
Desloc angular [º]
Roll[K=0]
Roll[K=2000 Nm/rad]
Angulo de pitch, V=80km/h, A=1mm
Desloc angular [º]
Theta[K=0]
Theta[K=2000 Nm/rad]


Bounce para Kbarra=0 e Kbarra=2000N/m, V=80km/h, A=1mm
Desloc vert [mm]
Zv[K=0]
Zv[K=2000 Nm/rad]
Angulo de roll, V=80km/h, A=1mm
Desloc angular [º]
Roll[K=0]
Roll[K=2000 Nm/rad]
Angulo de pitch, V=80km/h, A=1mm
Desloc angular [º]
Theta[K=0]
Theta[K=2000 Nm/rad]

K=0 Nm/rad


Dominio da Frequencia
Deslocamento [mm] ou Angulo [º]
Frequencia [Hz]
BOUNCE
ROLL
PITCH
ZRDE
ZRDD
ZRTE
ZRTD
ZSDE
ZSDD
ZSTE
ZSTD
THETAE
THETAE
THETAT
THETAT
ZPDE
ZPDD
ZPTE
ZPTD

K=2000 Nm/rad

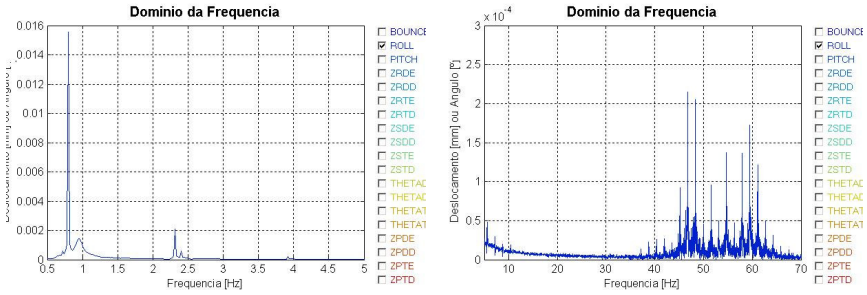


Figura 79 – Comparação entre *pitch*, *roll* e *bounce* para variação de rigidez da barra estabilizadora

- Percebe-se que o único movimento afetado pela componente de alta freqüência é o de rolagem da carroceria, o que também corrobora a hipótese de existir uma excitação proveniente da pista que esteja relacionada a um dos modos de deslocamento angular da barra. Pelo fato de haver um vínculo físico desta à carroceria há a transmissão deste movimento angular, percebido exatamente no modo de *roll*.

Capítulo 5

CONCLUSÕES

Analisando o objetivo que o presente trabalho propõe de estabelecer uma metodologia para avaliação de um modelo veicular tridimensional e a aplicação desta modelagem para verificação da influência de um sistema de suspensão semi-rígido em sua resposta dinâmica, pôde-se concluir:

- A metodologia proposta, através do equilíbrio de d'Alembert, mostrou-se totalmente aplicável para o objeto em estudo com o número de graus de liberdade proposto. O equacionamento, embora extenso e dependente de grande observação por parte do projetista, fornece um sentimento físico sobre a dinâmica do sistema que outra metodologia (tal qual Lagrange por exemplo) não proporcionaria de imediato;
- O modelo respondeu bem ao intento para o qual ele foi obtido, uma vez que suas respostas temporais estão coerentes com o previsto na literatura e encontra-se de acordo com a experiência de projetistas que atuam na indústria automotiva, na área de testes veiculares;
- Em relação à análise da interação do sistema de suspensão com e sem a barra estabilizadora e sua influência na resposta da carroceria, pode-se afirmar que o resultado obtido está de acordo com o suposto e discutido no capítulo de análise dos resultados. Esta conclusão leva a reafirmação da influência do sistema de suspensão semi-rígido em manobras que demandam de auxílio no tocante à tendência de

rolagem da carroceria e neste aspecto o modelo respondeu fielmente ao que a situação física impõe;

- A liberdade fornecida pela interface no tocante a variação das propriedades de inércia, rigidez de molas e barras de torção, amortecimento, geometria, pista e a conseqüente alteração da resposta frente à variação destes parâmetros é base para se afirmar que a ferramenta computacional desenvolvida pode funcionar como ferramenta de pré-projeto, tanto no desenvolvimento de novos produtos como numa fase de planejamento de testes de estrada. Pode-se daí avaliar a relação entre o compromisso entre *ride*, *comfort* e *handling*, uma das questões fundamentais a serem respondidas pelo projetista quando a etapa de concepção de um projeto se inicia;

5.1- Sugestões para trabalhos futuros

- Aumento do número de graus de liberdade do modelo, tais como os referentes ao motor e ao motorista, a fim de serem estudadas outras propriedades relacionadas à dinâmica do veículo, bem como ao conforto;
- Permitir que outros modelos de pista sejam implementados, para aumentar o escopo no qual este modelo poderá ser aplicado, como por exemplo em manobras em curvas, testes de raio crescente, *slalom*, ISO *lane change*, dentre outros que utilizem mais eficientemente os graus de liberdade fornecidos pelas barras estabilizadoras.
- Considerar o efeito de desagarramento do pneu, uma vez que no atual modelo o contato é permanente, o que é causa de aparecimento de harmônicos ímpares na análise em freqüência da pista;
- Análise de sensibilidade deste modelo para que parâmetros sejam melhor estimados, a fim de que seja economizado tempo de simulação na busca destes;

- Fornecer a matriz “dof” composta pelo tempo de simulação e dos graus de liberdade de deslocamento, velocidade e aceleração para o módulo ODS desenvolvido por Saturnino (2004), com o objetivo de fazer o ajuste do presente modelo uma vez que este módulo fornece os deslocamentos de uma estrutura que esteja em excitamento forçado;
- Inserir os aspectos de não-linearidade da suspensão (esforços laterais provenientes do ângulo de ataque da suspensão, por exemplo);
- Inserir amortecimento no pneu e os esforços de escorregamento lateral;

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Bastow, D., e Howard G., 1997, *Car Suspension and Handling*, 3ª ed., Pentech Press, London, and SAE, Warrendale, ISBN 0-7273-0318X, 362p.

Biasizzo, Mauro Bruno, 2001, *Estudo da influência da barra estabilizadora dianteira no conforto vibracional de um automóvel*, Dissertação de Mestrado, Pro-reitoria de Pesquisa e Pós-graduação, PUC Minas, Belo Horizonte, MG, Brasil.

Bouazara, M., Richard, Marc J., 2001, "An optimization method designed to improve 3-D vehicle comfort and road holding capability through the use of active and semi-active suspensions". *European Journal of Mechanics - A/Solids*, v.20, n.3, pág 509–520.

Čech, I., 2000, "Anti-Roll and Active Roll Suspensions", *Vehicle System Dynamics*, v.33, pág 91–106.

Chu, T. W., Jones, R. P., Whittaker, M. T., 2002, "A System Theoretic Analysis of Automotive Vehicle Dynamics and Control". *Vehicle System Dynamics Supplement*, n.37, pág 83–95.

Dixon, J. C., 1996, *Tires, Suspension and Handling*, 2ª ed.**,** Society of Automotive Engineers, Warrendalle, ISBN 1-56091-831-4, 621p.

Ellis, J.R., 1994, *Vehicle Handling Dynamics*, Mechanical Engineering Publications Ltd., ISBN 0-85298-885-0, 199 p.

Esmailzadeh, E., Vossoughi, G. R., Goodarzi, A., 2001, “Dynamic Modeling and Analysis of a Four Motorized Wheels Eletric Vehicle”. *Vehicle System Dynamics*, v.35, n.3, pág 163–194.

Ewins, D. J., 1984, *Modal testing: theory and practice*, Somerset: Research Studies, ISBN 0-86380-017-3, 269p.

Fenton, J., 1996, *Handbook of vehicle design analysis*, Society of Automotive Engineers, Warrendalle, ISBN 1-56091-903-5, 755p.

Gillespie, T. D.,1992, *Fundamentals of Vehicle Dynamics*, Society of Automotive Engineers SAE, Warrendalle, ISBN 1-56091-199-9, 495p.

Kenneth, Bruce, 2000, *The history of suspension*, http://www.citroen.mb.ca/citroenet/html/s/suspension1.html

Margolis, D., Shim, T, 2001, “A bond graph model incorporating sensors,

actuators, and vehicle dynamics for developing controllers for vehicle safety”, *Journal of the Franklin Institute*, n.338, pág 21–34.

Máximo, Luiz F. B., 2002, *Estudo do comportamento dinâmico de um veículo de passageiros em manobras de handling*, Dissertação de Mestrado, Pro-reitoria de Pesquisa e Pós-graduação, PUC Minas, Belo Horizonte, MG, Brasil.

Milliken, W. F., Milliken D. L., 1995, *Race Car Vehicle Dynamics*, Society of Automotive Engineers, Warrendalle, ISBN 1-56091-526-9, 890p.

Mills, V., Samuels, B., Wagner, J., 2002, “Modeling and Analysis of Automotive Antilock Brake Systems Subject to Vehicle Payload Shifting”. *Vehicle System Dynamics*, v.37, n.4, pág 283–310.

Naudé, A.F., Snyman, J.A., 2003, “Optimisation of road vehicle passive suspension systems – Part 2. Qualification and case study”, *Applied Mathematical Modelling*, v.27, pág 263–274.

Naudé, A.F., Snyman, J.A., 2003, “Optimisation of road vehicle passive suspension systems – Part 1. Optimisation algorithm and vehicle model”, *Applied Mathematical Modelling*, v.27, pág 249–261.

Okabe, Eduardo P., 2003, *Metodologia de projeto para desenvolvimento de suspensão veicular*, Dissertação de Mestrado, Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 158 p.

Rauh, J., 2003, “Virtual Development of Ride and Handling Characteristics for Advanced Passenger Cars”. *Vehicle System Dynamics*, v.40, n.1-3, pág 135–155.

Reimpell, J., Stoll, H., 1996, *The Automotive Chassis: Engineering Principles*, Society of Automotive Engineers, Warrendalle, ISBN 1-56091-736-9,410p.

Robert Bosch GmbH, *Automotive Handbook*, 4ª ed., Stuttgart 1996. Pág. 560–593.

Saturnino, Leonardo J. M., 2004, *Desenvolvimento de ferramentas para definição, análise e avaliação de desempenho de veículos automotivos*, Dissertação de Mestrado, Pro-reitoria de Pesquisa e Pós-graduação, PUC Minas, Belo Horizonte, MG, Brasil.

Shampine, L. F. and M. W. Reichelt, 1997, “The MATLAB ODE Suite”, SIAM Journal on Scientific Computing, v.18, pág 1–22.

Apêndice A

DETALHAMENTO DO MODELO VEICULAR TRIDIMENSIONAL

Correlação dos graus de liberdade da suspensão com os gdl's do centro de massa da carroceria

Face dianteira

$$Z_{sde} = Z_1 + Z' = Z_1 + l_c \tan(\phi_V)$$

Considerando hipótese de pequenos deslocamentos,

$$\tan(\phi_V) \cong \phi_V$$

Daí,

$$Z_{sde} = Z_1 + l_c \, \phi_V \tag{A.1}$$

Analogamente,

$$Z_{sdd} = Z_1 - l_d \, \phi_V \tag{A.2}$$

Fazendo (A.1) - (A.2)

$$Z_{sde} - Z_{sdd} = (l_c + l_d)\phi_V$$

ou seja,

$$\phi_V = \frac{Z_{sde} - Z_{sdd}}{l_c + l_d} \tag{A.3}$$

substituindo (A.3) em (A.1)

$$Z_{sde} = Z_1 + l_c \left(\frac{Z_{sde} - Z_{sdd}}{l_c + l_d} \right)$$, o que nos leva a

$$Z_1 = \frac{l_d Z_{sde} + l_c Z_{sdd}}{l_c + l_d}$$

Face Traseira

Analogamente à face dianteira

$$Z_{ste} = Z_2 + l_e \phi_V \tag{A.4}$$

$$Z_{std} = Z_2 - l_f \phi_V \tag{A.5}$$

Fazendo (A.4) - (A.5)

$$Z_{ste} - Z_{std} = (l_e + l_f)\phi_V$$

ou seja,

$$\phi_V = \frac{Z_{ste} - Z_{std}}{l_e + l_f}$$

substituindo

$$Z_{ste} = Z_2 + l_e \left(\frac{Z_{ste} - Z_{std}}{l_e + l_f} \right)$$, o que nos leva a

$$Z_2 = \frac{l_f Z_{ste} + l_e Z_{std}}{l_e + l_f}$$

Sob o ângulo de pitch (θ_V)

$$Z_2 = Z_V + l_b \theta_V \tag{A.6}$$

$$Z_1 = Z_V - l_a \theta_V \tag{A.7}$$

(A.6) - (A.7)

$$Z_2 - Z_1 = (l_a + l_b)\theta_V$$, que leva a

$$\theta_V = \frac{Z_2 - Z_1}{l_a + l_b} \tag{A.8}$$

Substituindo (A.6) e (A.7) em (A.8)

$$\theta_V = \frac{1}{l_a + l_b}\left[\left(\frac{l_f Z_{ste} + l_e Z_{std}}{l_e + l_f}\right) - \left(\frac{l_d Z_{sde} + l_c Z_{sdd}}{l_c + l_d}\right)\right] \tag{A.9}$$

De

$Z_2 = Z_V + l_b\,\theta_V \Rightarrow Z_V = Z_2 - l_b\,\theta_V$, o que leva a

$$Z_V = \left(\frac{l_f Z_{ste} + l_e Z_{std}}{l_e + l_f}\right) - \frac{l_b}{l_a + l_b}\left[\left(\frac{l_f Z_{ste} + l_e Z_{std}}{l_e + l_f}\right) - \left(\frac{l_d Z_{sde} + l_c Z_{sdd}}{l_c + l_d}\right)\right] \tag{A.10}$$

Verificação das propriedades geométricas da carroceria

Neste modelo serão dados de entrada as coordenadas que se referem às dimensões dos eixos dianteiro, traseiro e centro de massa;

Percebe-se, entretanto, que existe uma correlação entre as coordenadas da carroceria e do centro de massa, o que as torna não-independentes. A linha de ação pela qual passa o centro de massa pode não ser perpendicular às faces dianteira/traseira.

$$\frac{l_h - l_d}{l_a} = \frac{l_f - l_d}{l_a + l_b} \tag{A.11}$$

e

$$l_h = \frac{l_a l_f + l_b l_d}{l_a + l_b} \tag{A.12}$$

Aplicando-se o Princípio da semelhança de triângulos, tem-se:

$$\frac{l_g - l_c}{l_a} = \frac{l_e - l_c}{l_a + l_b} \tag{A.13}$$

e

$$l_g = \frac{l_a l_e + l_b l_c}{l_a + l_b} \tag{A.14}$$

É claro que, obedecendo-se (I), (K) é automaticamente obedecida, pois não haverá outra correlação entre as dimensões l_c, l_d, l_e, l_f, l_g e l_h.

Da figura (46), obtém-se também que:

$$Z_1 = \frac{l_d Z_{sde} + l_c Z_{sdd}}{l_c + l_d},\ Z_2 = \frac{l_f Z_{ste} + l_e Z_{std}}{l_e + l_f},\ Z_3 = \frac{l_b Z_{sde} + l_a Z_{ste}}{l_a + l_b} \text{ e}$$

$$Z_4 = \frac{l_b Z_{sdd} + l_a Z_{std}}{l_a + l_b}$$

Obtém-se Z_v por Z_1 e Z_2:

$$Z_V = \frac{l_b Z_1 + l_a Z_2}{l_a + l_b} = \frac{1}{l_a + l_b}\left[l_b \left(\frac{l_d Z_{sde} + l_c Z_{sdd}}{l_c + l_d} \right) + l_a \left(\frac{l_f Z_{ste} + l_e Z_{std}}{l_e + l_f} \right) \right]$$

$$Z_V = \frac{1}{l_a + l_b}\left[\frac{l_b}{l_c + l_d}\left(l_d Z_{sde} + l_c Z_{sdd}\right) + \frac{l_a}{l_e + l_f}\left(l_f Z_{ste} + l_e Z_{std}\right) \right] \tag{A.15}$$

Obtendo-se agora Z_v por Z_3 e Z_4 (chamar-se-á Z_v de $\overline{Z}_v$ para fim de comparação)

$$\overline{Z}_V = \frac{l_h Z_3 + l_g Z_4}{l_g + l_h} = \frac{1}{l_g + l_h}\left[l_h \left(\frac{l_b Z_{sde} + l_a Z_{ste}}{l_a + l_b} \right) + l_g \left(\frac{l_b Z_{sdd} + l_a Z_{std}}{l_a + l_b} \right) \right]$$

$$\overline{Z}_V = \frac{1}{l_g + l_h}\left[\frac{l_h}{l_a + l_b}\left(l_b Z_{sde} + l_a Z_{ste}\right) + \frac{l_g}{l_a + l_b}\left(l_b Z_{sdd} + l_a Z_{std}\right) \right] \tag{A.16}$$

Re-arranjando o termo (l_a+l_b),

$$\overline{Z}_V = \frac{1}{l_a + l_b}\left[\frac{l_h}{l_g + l_h}\left(l_b Z_{sde} + l_a Z_{ste}\right) + \frac{l_g}{l_g + l_h}\left(l_b Z_{sdd} + l_a Z_{std}\right)\right]$$

Agrupando termos em Z_{sde}, Z_{sdd}, Z_{ste} e Z_{std} na mesma podem em que aparecem em Z_v:

$$\overline{Z}_V = \frac{1}{l_a + l_b}\left[\frac{l_h}{l_g + l_h}\left(l_b Z_{sde}\right) + \frac{l_g}{l_g + l_h}\left(l_b Z_{sdd}\right) + \frac{l_h}{l_g + l_h}\left(l_a Z_{ste}\right) + \frac{l_g}{l_g + l_h}\left(+l_a Z_{std}\right)\right]$$

Reescrevendo Z_v tem-se:

$$Z_V = \frac{1}{l_a + l_b}\left[\frac{l_d}{l_c + l_d}\left(l_b Z_{sde}\right) + \frac{l_c}{l_c + l_d}\left(l_b Z_{sdd}\right) + \frac{l_f}{l_e + l_f}\left(l_a Z_{ste}\right) + \frac{l_e}{l_e + l_f}\left(l_a Z_{std}\right)\right]$$

ou seja, por $Z_v = \overline{Z}_v$, comparando-se ambas as equações chega-se a:

$$\frac{l_h}{l_g + l_h} = \frac{l_d}{l_c + l_d} \tag{A.17}$$

$$\frac{l_g}{l_g + l_h} = \frac{l_c}{l_c + l_d} \tag{A.18}$$

$$\frac{l_h}{l_g + l_h} = \frac{l_f}{l_e + l_f} \tag{A.19}$$

$$\frac{l_g}{l_g + l_h} = \frac{l_e}{l_e + l_f} \tag{A.20}$$

Agrupando-se as quatro últimas equações:

$$\frac{l_h}{l_g + l_h} = \frac{l_d}{l_c + l_d} = \frac{l_f}{l_e + l_f} \text{ e } \frac{l_g}{l_g + l_h} = \frac{l_c}{l_c + l_d} = \frac{l_f}{l_e + l_f}$$

Da equação anterior,

$$\frac{l_d}{l_c + l_d} = \frac{l_f}{l_e + l_f} \Rightarrow l_d\left(l_e + l_f\right) = l_f\left(l_c + l_d\right) \Rightarrow l_d\, l_e = l_c\, l_f \text{, ou seja, } \frac{l_c}{l_d} = \frac{l_e}{l_f} \tag{A.21}$$

Também, da mesma equação

$$\frac{l_h}{l_g + l_h} = \frac{l_d}{l_c + l_d} \Rightarrow l_h\left(l_c + l_d\right) = l_d\left(l_g + l_h\right) \Rightarrow l_h\, l_c = l_d\, l_g \text{, ou seja, } \frac{l_c}{l_d} = \frac{l_g}{l_h} \qquad \text{(A.22)}$$

Unindo as duas últimas equações, tem-se que:

$\frac{l_c}{l_d} = \frac{l_e}{l_f} = \frac{l_g}{l_h}$, o que também pode ser verificado para o outro conjunto de correlações geométricas. Esta correlação limita o número e a forma de entrada de dados para a simulação do modelo, o que, se não for respeitado, pode levar à não-simetria das matrizes rigidez e amortecimento.

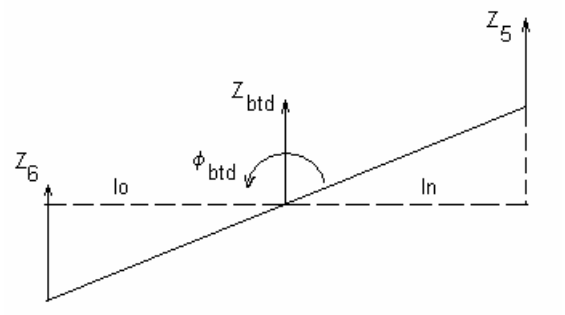
Correlação dos graus de liberdade das rodas com os gdl's da barra estabilizadora e do sistema de suspensão

Suspensão dianteira

$$Z_V = Z_{btd} + (l_a - l_i)\theta_V \Rightarrow Z_{btd} = Z_V - (l_a - l_i)\theta_V \tag{A.23}$$

e

$$\phi_{btd} = \phi_V$$



$$Z_5 = Z_{btd} + l_n\,\phi_{btd} \tag{A.24}$$

$$Z_6 = Z_{btd} - l_o\,\phi_{btd} \tag{A.25}$$

Fazendo (A.24) – (A.25)

$$\phi_{btd} = \frac{Z_5 - Z_6}{l_n + l_o} \tag{A.26}$$

Substituindo (A.26) em (A.24)

$$Z_5 = Z_{btd} + l_n\,\phi_{btd} = Z_{btd} + l_n\left(\frac{Z_5 - Z_6}{l_n + l_o}\right), \text{ ou seja}$$

$$Z_{btd} = \frac{l_o\,Z_5 + l_n\,Z_6}{l_n + l_o} \tag{A.27}$$

Outra correlação

$$Z_5 - \overline{Z}_5 = l_i\,\theta_{de} \Rightarrow \theta_{de} = \frac{Z_5 - \overline{Z}_5}{l_i}$$ (premissa: $\theta_{res} = \theta_{de} - \theta_{dd} > 0$)

Substituindo Z_{btd}

$$\overline{Z}_5 = Z_{btd} + l_n\,\phi_{btd} - l_i\,\theta_{de} = Z_V - (l_a - l_i)\theta_V + l_n\,\phi_V - l_i\,\theta_{de}$$

e também

$$Z_{rde} = \overline{Z}_5 + l_k\,\phi_{btd} = \overline{Z}_5 + l_k\,\phi_V \Rightarrow \overline{Z}_5 = Z_{rde} - l_k\,\phi_V$$, o que leva a

$$\theta_{de} = \frac{Z_5 - Z_{rde}}{l_i} + \frac{l_k}{l_i}\phi_V \qquad \text{(A.28)}$$

Relacionando com os gdl's do centro de massa

$$\theta_{de} = \frac{(Z_V - (l_a - l_i)\theta_V + l_n\,\phi_V) - Z_{rde}}{l_i} + \frac{l_k}{l_i}\phi_V$$

$$\theta_{de} = \frac{Z_V + (l_n + l_k)\phi_V - (l_a - l_i)\theta_V - Z_{rde}}{l_i} \qquad \text{(A.29)}$$

Repetindo o raciocínio para o lado direito

$$Z_6 - \overline{Z}_6 = l_i\,\theta_{dd} \Rightarrow \theta_{dd} = \frac{Z_6 - \overline{Z}_6}{l_i}$$

$$\overline{Z}_6 = Z_{btd} - l_o\,\phi_{btd} - l_i\,\theta_{dd} = Z_V - (l_a - l_i)\theta_V - l_o\,\phi_V - l_i\,\theta_{dd}$$

e também,

$$Z_{rdd} = \overline{Z}_6 - l_r\,\phi_{btd} = \overline{Z}_6 - l_r\,\phi_V \Rightarrow \overline{Z}_6 = Z_{rdd} + l_r\,\phi_V$$, o que leva a

$$\theta_{dd} = \frac{Z_6 - Z_{rdd}}{l_i} - \frac{l_r}{l_i}\phi_V \qquad \text{(A.30)}$$

Relacionando com os gdl's do centro de massa

$$\theta_{dd} = \frac{(Z_V - (l_a - l_i)\theta_V - l_o\,\phi_V) - Z_{rdd}}{l_i} - \frac{l_r}{l_i}\phi_V$$

$$\theta_{dd} = \frac{Z_V - (l_r + l_o)\phi_V - (l_a - l_i)\theta_V - Z_{rdd}}{l_i} \tag{A.31}$$

Suspensão traseira

Mantendo a premissa: $\theta_{res} = \theta_{te} - \theta_{td} > 0$

$$\overline{Z}_7 - Z_7 = l_j\,\theta_{te} \Rightarrow \theta_{te} = \frac{\overline{Z}_7 - Z_7}{l_j}$$

$$\overline{Z}_7 = Z_{btt} + l_p\,\phi_{btt} + l_j\,\theta_{te} = Z_V + (l_b - l_j)\theta_V + l_p\,\phi_V + l_j\,\theta_{te} \tag{A.32}$$

e também

$Z_{rte} = \overline{Z}_7 + l_m\,\phi_{btt} = \overline{Z}_7 + l_m\,\phi_V \Rightarrow \overline{Z}_7 = Z_{rte} - l_m\,\phi_V$, o que leva a

$$\theta_{te} = \frac{Z_{rte} - Z_7}{l_j} - \frac{l_m}{l_j}\phi_V \tag{A.33}$$

Relacionando com os gdl's do centro de massa

$$\theta_{te} = \frac{Z_{rte} - (Z_{btt} + l_p\,\phi_{btt})}{l_j} - \frac{l_m}{l_j}\phi_V$$

$$\theta_{te} = \frac{Z_{rte} - (l_p - l_m)\phi_V - (l_b - l_j)\theta_V - Z_V}{l_j} \tag{A.34}$$

Repetindo o raciocínio para o lado direito

$$\overline{Z}_8 - Z_8 = l_j\,\theta_{td} \Rightarrow \theta_{td} = \frac{\overline{Z}_8 - Z_8}{l_j}$$

$$\overline{Z}_8 = Z_{btt} - l_q\,\phi_{btt} + l_j\,\theta_{td} = Z_V + (l_b - l_j)\theta_V - l_q\,\phi_V + l_j\,\theta_{td} \tag{A.35}$$

e também

$Z_{rtd} = \overline{Z}_8 - l_s\,\phi_{btt} = \overline{Z}_8 - l_s\,\phi_V \Rightarrow \overline{Z}_8 = Z_{rtd} + l_s\,\phi_V$, o que leva a

$$\theta_{td} = \frac{Z_{rtd} - Z_8}{l_j} + \frac{l_s}{l_j}\phi_V \tag{A.36}$$

Relacionando com os gdl's do centro de massa

$$\theta_{td} = \frac{Z_{rtd} - \left(Z_{btt} - l_q\,\phi_{btt}\right)}{l_j} + \frac{l_s}{l_j}\phi_V$$

$$\theta_{td} = \frac{Z_{rtd} + \left(l_q + l_s\right)\phi_V - \left(l_b - l_j\right)\theta_V - Z_V}{l_j} \tag{A.37}$$

Considerações sobre Inércia da barra de torção dianteira e do conjunto torsor traseiro

- A barra de torção dianteira é representada, neste modelo, por uma mola de torção, localizada de acordo com as distâncias indicadas neste. Mesmo pequena, a barra apresenta um efeito de inércia quando fixada na carroceria e se desloca juntamente com ela. Este efeito será representado por um acréscimo de massa, equivalente a esta inércia de translação, a ser feito em cada roda (metade desta massa equivalente em cada roda) dianteira. Para tal, usa-se Teorema de Steiner para transladar a inércia para as rodas e a relação $J = m\ r^2$ para o cálculo da massa equivalente;
- Raciocínio análogo é utilizado para o conjunto torsor (barra+perfil de torção) traseiro.
- É considerado eixo de inércia aquele no qual as barras estão fixadas na carroceria, em torno do qual elas apresentam o esforço de torção, neste caso o eixo de *pitch* da carroceria;
- Ressalta-se que à massa de cada roda também serão acrescidas as parcelas relativas ao prato da suspensão, 1/3 da massa da mola, que dinamicamente fica constantemente apoiada sobre o prato, e a massa equivalente à inércia da barra, descrita nos itens anteriores;
- Os esforços da carroceria estão, na realidade, sendo transmitidos através das linhas de ação $Z_5\overline{Z}_5$, $Z_6\overline{Z}_6$, $Z_7\overline{Z}_7$ e $Z_8\overline{Z}_8$ nas barras de torção e destas para as rodas. Como o presente modelo se baseia nos esforços que estão na linha de ação da suspensão, para efeito de análise das equações de equilíbrio dinâmico da carroceria as forças das barras precisam ser transladadas para a linha de ação da suspensão. Neste caso, usou-se a conservação de momentos para tal, da seguinte maneira:

Exemplo: $Z_5\,\overline{Z}_5$

$F_{rde}(l_n + l_k) = F_{Z_5\overline{Z}_5}(l_k) \Rightarrow F_{rde} = \frac{l_k}{l_n + l_k} F_{Z_5\overline{Z}_5}$, estando a força na roda dianteira esquerda, F_{rde}, na linha de ação da suspensão;

Efeitos de inércia no conjunto dianteiro

$$m_{rde} = m_{rdd} = m_{roda} + m_{pneu} + m_{prato} + \frac{1}{3} m_{mola} + m_{equivalente}$$

A rigidez à torção da barra dianteira é calculada como sendo $\overline{K}_{btd} = \frac{G\,J_p}{l}$, onde:

- $\overline{K}_{btd}$: rigidez à torção da barra estabilizadora dianteira [N.m/rad];
- G: módulo de elasticidade transversal [Pa], $G = \frac{E}{2(1+\upsilon)}$;
    - E: módulo de elasticidade longitudinal [Pa]
    - Coeficiente de Poisson [adimensional]
- J_p: momento de inércia de massa polar, em torno do eixo de torção [Kg.m^2];
- l: comprimento do braço de momento de torção [m]

Aplicando-se o Teorema dos eixos paralelos, vê-se que o braço da barra de torção contribui com uma massa equivalente calculada como sendo:

$$m_{eq} = \frac{I_{yy}}{l_i^2}, \text{ com } I_{yy} = I_{CGconjunto} + m_{braço}.(l_i)^2$$

Este procedimento de acréscimo de uma massa equivalente apresenta-se como uma fonte de erro no tocante à sua atuação. A massa equivalente, como calculada acima, fornece um valor relativo à inércia de deslocamento de corpo rígido e a atuação da barra se dá quando da presença de deslocamento diferencial entre os braços de uma mesma barra, ou seja, para que o procedimento fosse isento de

erro, enquanto o veículo trafegue com $\theta_{res} = 0$, a massa equivalente a ser acrescentada é a calculada. Quando da sua atuação, esta massa deveria ser retirada, pois sua equivalência não vale para a condição rotacional.

Efeitos de inércia no conjunto traseiro

$$m_{rte} = m_{rtd} = m_{roda} + m_{pneu} + m_{prato} + \frac{1}{3} m_{mola} + m_{equivalente}$$

A rigidez à torção do conjunto traseiro dianteira foi calculada como sendo $\overline{K}_{btt} = \overline{K}_{barra} + \overline{K}_{perfil} = \frac{G J_p}{l} + K_{perfil}$, onde:

- $\overline{K}_{btd}$: rigidez à torção da barra estabilizadora dianteira [N.m/rad];
- G: módulo de elasticidade transversal [Pa], $G = \frac{E}{2(1+\upsilon)}$;
    - E: módulo de elasticidade longitudinal [Pa]
    - Coeficiente de Poisson [adimensional]
- J_p: momento de inércia de massa polar, em torno do eixo de torção [$Kg.m^2$];
- l: comprimento do braço de momento de torção [m]

Análise do braço da barra-estabilizadora dianteira

Aplicando-se o Teorema dos eixos paralelos, vê-se que o braço da barra de torção contribui com uma massa equivalente calculada como sendo:

$$m_{eq} = \frac{I_{yy}}{l_i^2}, \text{ com } I_{yy} = I_{CGconjunto} + m_{braço}.(l_i)^2$$

Equação de equilíbrio dinâmico das rodas

Considerações:

- Forças agem na linha de ação da suspensão, ou seja, para os esforços nas barras de torção, usam-se as forças "transladadas" do seu real ponto de atuação ($Z_5\overline{Z}_5, Z_6\overline{Z}_6, Z_7\overline{Z}_7, Z_8\overline{Z}_8$) para as rodas, que estão, neste modelo, na linha de ação da suspensão;

Equação de equilíbrio dinâmico da roda dianteira esquerda

Momento da roda em torno da linha de fixação da barra estabilizadora dianteira:

$$M = -\overline{K}_{btd}\left(\theta_{de} - \theta_{dd}\right) \tag{A.38}$$

O sinal do momento é aquele da resposta à solicitação, que mantém a convenção adotada para este modelo, $\theta_{res} = \theta_{de} - \theta_{dd} > 0$, sendo θ_{res} o ângulo resultante que gera o momento numa mola de torção. Isto acontece quando $Z_{rde} - Z_{rdd} > 0$.

$$\text{Força em } Z_5\overline{Z}_5: \ \overline{F}_{Z_5\overline{Z}_5} = \overline{K}_{btd}\,\frac{\left(\theta_{de} - \theta_{dd}\right)}{l_i} \tag{A.38}$$

O sinal da força é dado como sendo aquele que faz dela uma força restauradora, a fim de manter um $\theta_{res} > 0$.

Força na roda dianteira esquerda:

Pela conservação de momentos,

$$\overline{F}_{rde}\left(l_k + l_n\right) = \overline{F}_{Z_5\overline{Z}_5}\left(l_n\right) \Rightarrow \overline{F}_{rde} = \frac{l_n}{l_n + l_k}\overline{K}_{btd}\,\frac{\left(\theta_{de} - \theta_{dd}\right)}{l_i} \tag{A.39}$$

O equilíbrio dinâmico na roda dianteira esquerda fica:

$$\sum F_Z = m_{rde}\,\ddot{Z}_{rde}$$

$$m_{rde}\,\ddot{Z}_{rde} = -K_{pde}\left(Z_{rde} - Z_{pde}\right) + K_{sde}\left(Z_{sde} - Z_{rde}\right) + C_{sde}\left(\dot{Z}_{sde} - \dot{Z}_{rde}\right) + \frac{l_n}{l_n + l_k}\overline{K}_{btd}\,\frac{\left(\theta_{de} - \theta_{dd}\right)}{l_i}$$

Equação de equilíbrio dinâmico da roda dianteira direita

Momento da roda em torno da linha de fixação da barra estabilizadora dianteira:

$$M = \overline{K}_{btd}\left(\theta_{de} - \theta_{dd}\right) \tag{A.40}$$

$$\text{Força em } Z_6\overline{Z}_6: \ \overline{F}_{Z_6\overline{Z}_6} = -\overline{K}_{btd}\,\frac{\left(\theta_{de} - \theta_{dd}\right)}{l_i} \tag{A.41}$$

Força na roda dianteira direita:

Pela conservação de momentos,

$$\overline{F}_{rdd}\left(l_o + l_r\right) = \overline{F}_{Z_6\overline{Z}_6}\left(l_o\right) \Rightarrow \overline{F}_{rdd} = -\frac{l_o}{l_o + l_r}\overline{K}_{btd}\,\frac{\left(\theta_{de} - \theta_{dd}\right)}{l_i} \tag{A.42}$$

O equilíbrio dinâmico na roda dianteira direita fica:

$$\sum F_Z = m_{rdd}\,\ddot{Z}_{rdd}$$

$$m_{rdd}\,\ddot{Z}_{rdd} = -K_{pdd}\left(Z_{rdd} - Z_{pdd}\right) + K_{sdd}\left(Z_{sdd} - Z_{rdd}\right) + C_{sdd}\left(\dot{Z}_{sdd} - \dot{Z}_{rdd}\right) - \frac{l_o}{l_o + l_r}\overline{K}_{btd}\,\frac{\left(\theta_{de} - \theta_{dd}\right)}{l_i}$$

Equação de equilíbrio dinâmico da roda traseira esquerda

Momento da roda em torno da linha de fixação do conjunto torsor traseiro:

$$M = -\overline{K}_{btteq}\left(\theta_{te} - \theta_{td}\right) \tag{A.43}$$

O sinal do momento é aquele da resposta à solicitação, que mantém a convenção adotada para este modelo, $\theta_{res} = \theta_{te} - \theta_{td} > 0$, sendo θ_{res} o ângulo resultante que gera o momento numa mola de torção. Isto acontece quando $Z_{rte} - Z_{rtd} > 0$.

$$\text{Força em } Z_7\overline{Z}_7: \ \overline{F}_{Z_7\overline{Z}_7} = -\overline{K}_{btteq}\,\frac{\left(\theta_{te} - \theta_{td}\right)}{l_j} \tag{A.44}$$

O sinal da força é dado como sendo aquele que faz dela uma força restauradora, a fim de manter um $\theta_{res} > 0$.

Força na roda traseira esquerda:

Pela conservação de momentos,

$$\overline{F}_{rte}\left(l_p + l_m\right) = \overline{F}_{Z_7\overline{Z}_7}\left(l_p\right) \Rightarrow \overline{F}_{rte} = -\frac{l_p}{l_p + l_m}\overline{K}_{btteq}\frac{\left(\theta_{te} - \theta_{td}\right)}{l_j} \tag{A.45}$$

O equilíbrio dinâmico na roda traseira esquerda fica:

$$\sum F_Z = m_{rte}\ddot{Z}_{rte}$$

$$m_{rte}\ddot{Z}_{rte} = -K_{pte}\left(Z_{rte} - Z_{pte}\right) + K_{ste}\left(Z_{ste} - Z_{rte}\right) + C_{ste}\left(\dot{Z}_{ste} - \dot{Z}_{rte}\right) - \frac{l_p}{l_p + l_m}\overline{K}_{btteq}\frac{\left(\theta_{te} - \theta_{td}\right)}{l_j}$$

Equação de equilíbrio dinâmico da roda traseira direita

Momento da roda em torno da linha de fixação do conjunto torsor traseiro:

$$M = \overline{K}_{btteq}\left(\theta_{te} - \theta_{td}\right) \tag{A.46}$$

$$\text{Força em } Z_8\overline{Z}_8: \ \overline{F}_{Z_8\overline{Z}_8} = \overline{K}_{btteq}\frac{\left(\theta_{te} - \theta_{td}\right)}{l_j} \tag{A.47}$$

Força na roda traseira direita:

Pela conservação de momentos,

$$\overline{F}_{rtd}\left(l_q + l_s\right) = \overline{F}_{Z_8\overline{Z}_8}\left(l_q\right) \Rightarrow \overline{F}_{rtd} = \frac{l_q}{l_q + l_s}\overline{K}_{btteq}\frac{\left(\theta_{te} - \theta_{td}\right)}{l_j} \tag{A.48}$$

O equilíbrio dinâmico na roda traseira direita fica:

$$\sum F_Z = m_{rtd}\ddot{Z}_{rtd}$$

$$m_{rtd}\ddot{Z}_{rtd} = -K_{ptd}\left(Z_{rtd} - Z_{ptd}\right) + K_{std}\left(Z_{std} - Z_{rtd}\right) + C_{std}\left(\dot{Z}_{std} - \dot{Z}_{rtd}\right) + \frac{l_q}{l_q + l_s}\overline{K}_{btteq}\frac{\left(\theta_{te} - \theta_{td}\right)}{l_j}$$

Equação de equilíbrio dinâmico da roda dianteira esquerda

O somatório de forças em relação ao deslocamento vertical da carroceria (*bounce*) é:

$$\sum F_Z = m_V \ddot{Z}_V$$

$$\begin{aligned} m_V \ddot{Z}_V = & -K_{sde}(Z_{sde} - Z_{rde}) - C_{sde}(\dot{Z}_{sde} - \dot{Z}_{rde}) - \frac{l_n}{l_n + l_k}\overline{K}_{btd}\frac{(\theta_{de} - \theta_{dd})}{l_i} + \\ & - K_{sdd}(Z_{sdd} - Z_{rdd}) - C_{sdd}(\dot{Z}_{sdd} - \dot{Z}_{rdd}) + \frac{l_o}{l_o + l_r}\overline{K}_{btd}\frac{(\theta_{de} - \theta_{dd})}{l_i} + \\ & - K_{ste}(Z_{ste} - Z_{rte}) - C_{ste}(\dot{Z}_{ste} - \dot{Z}_{rte}) + \frac{l_p}{l_p + l_m}\overline{K}_{btteq}\frac{(\theta_{te} - \theta_{td})}{l_j} + \\ & - K_{std}(Z_{std} - Z_{rtd}) - C_{std}(\dot{Z}_{std} - \dot{Z}_{rtd}) - \frac{l_q}{l_q + l_s}\overline{K}_{btteq}\frac{(\theta_{te} - \theta_{td})}{l_j} \end{aligned}$$

O equilíbrio dinâmico para este gdl é:

$$\begin{aligned} & m_V \ddot{Z}_V + K_{sde}(Z_{sde} - Z_{rde}) + C_{sde}(\dot{Z}_{sde} - \dot{Z}_{rde}) + \frac{l_n}{l_n + l_k}\overline{K}_{btd}\frac{(\theta_{de} - \theta_{dd})}{l_i} + \\ & + K_{sdd}(Z_{sdd} - Z_{rdd}) + C_{sdd}(\dot{Z}_{sdd} - \dot{Z}_{rdd}) - \frac{l_o}{l_o + l_r}\overline{K}_{btd}\frac{(\theta_{de} - \theta_{dd})}{l_i} + \\ & + K_{ste}(Z_{ste} - Z_{rte}) + C_{ste}(\dot{Z}_{ste} - \dot{Z}_{rte}) - \frac{l_p}{l_p + l_m}\overline{K}_{btteq}\frac{(\theta_{te} - \theta_{td})}{l_j} + \\ & + K_{std}(Z_{std} - Z_{rtd}) + C_{std}(\dot{Z}_{std} - \dot{Z}_{rtd}) + \frac{l_q}{l_q + l_s}\overline{K}_{btteq}\frac{(\theta_{te} - \theta_{td})}{l_j} = 0 \end{aligned} \tag{A.49}$$

Percebe-se que, no caso de a barra ser simétrica ($l_n = l_o$, $l_k = l_r$, $l_p = l_q$, $l_m = l_s$), os termos referentes à barra de torção se anulam, o que é justificado pela própria aplicação deste dispositivo, ou seja, nas manobras que envolvem diferença de altura entre as rodas (traversinas e curvas).

Nota-se que os sinais encontrados nestes equilíbrios dinâmicos estão invertidos em relação a, por exemplo, análise dos esforços das rodas. Isto se deve exatamente à condição de equilíbrio interno de forças, premissa do método aqui adotado para a obtenção das equações diferenciais que regem o comportamento do veículo.

O equilíbrio dinâmico em relação à rolagem da carroceria (*roll*) é:

$$J_{\varphi_v}\ddot{\varphi}_v + l_c C_{sde}\left(\dot{Z}_{sde} - \dot{Z}_{rde}\right) - l_d C_{sdd}\left(\dot{Z}_{sdd} - \dot{Z}_{rdd}\right) + l_e C_{ste}\left(\dot{Z}_{ste} - \dot{Z}_{rte}\right) - l_f C_{std}\left(\dot{Z}_{std} - \dot{Z}_{rtd}\right) +$$

$$+ l_c K_{sde}\left(Z_{sde} - Z_{rde}\right) - l_d K_{sdd}\left(Z_{sdd} - Z_{rdd}\right) + l_e K_{ste}\left(Z_{ste} - Z_{rte}\right) - l_f K_{std}\left(Z_{std} - Z_{rtd}\right) +$$

$$+ l_c\left[\frac{l_n}{l_n + l_k}\overline{K}_{btd}\left(\frac{\left(\theta_{de} - \theta_{dd}\right)}{l_i}\right)\right] + l_d\left[\frac{l_o}{l_o + l_r}\overline{K}_{btd}\left(\frac{\left(\theta_{de} - \theta_{dd}\right)}{l_i}\right)\right] - l_e\left[\frac{l_p}{l_p + l_m}\overline{K}_{btteq}\left(\frac{\left(\theta_{te} - \theta_{td}\right)}{l_j}\right)\right] +$$

$$- l_f\left[\frac{l_q}{l_q + l_s}\overline{K}_{btteq}\left(\frac{\left(\theta_{te} - \theta_{td}\right)}{l_j}\right)\right] = 0$$

e o equilíbrio da carroceria em relação ao *pitch* é (A.50):

$$J_{\theta_v}\ddot{\theta}_v - l_a C_{sde}\left(\dot{Z}_{sde} - \dot{Z}_{rde}\right) - l_a C_{sdd}\left(\dot{Z}_{sdd} - \dot{Z}_{rdd}\right) + l_b C_{ste}\left(\dot{Z}_{ste} - \dot{Z}_{rte}\right) + l_b C_{std}\left(\dot{Z}_{std} - \dot{Z}_{rtd}\right) +$$

$$- l_a K_{sde}\left(Z_{sde} - Z_{rde}\right) - l_a K_{sdd}\left(Z_{sdd} - Z_{rdd}\right) + l_b K_{ste}\left(Z_{ste} - Z_{rte}\right) + l_b K_{std}\left(Z_{std} - Z_{rtd}\right) +$$

$$- l_a\left[\frac{l_n}{l_n + l_k}\overline{K}_{btd}\left(\frac{\left(\theta_{de} - \theta_{dd}\right)}{l_i}\right)\right] + l_a\left[\frac{l_o}{l_o + l_r}\overline{K}_{btd}\left(\frac{\left(\theta_{de} - \theta_{dd}\right)}{l_i}\right)\right] - l_b\left[\frac{l_p}{l_p + l_m}\overline{K}_{btteq}\left(\frac{\left(\theta_{te} - \theta_{td}\right)}{l_j}\right)\right] +$$

$$+ l_b\left[\frac{l_q}{l_q + l_s}\overline{K}_{btteq}\left(\frac{\left(\theta_{te} - \theta_{td}\right)}{l_j}\right)\right] = 0$$

Aqui também é percebido que, sendo a barra simétrica ($l_n = l_o$, $l_k = l_r$, $l_p = l_q$, $l_m = l_s$), havendo apenas a presença de movimento de corpo rígido em levantamento ou abaixamento da parte anterior/posterior os esforços relativos às barras de torção se anulam.

O modelo dinâmico do veículo pode ser escrito pela seguinte equação diferencial:

$$\underset{\approx}{M}\,\underset{\sim}{\ddot{x}} + \underset{\approx}{C}\,\underset{\sim}{\dot{x}} + \underset{\approx}{K}\,\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{f} \qquad \text{(A.51)}$$

Onde:

- $\underset{\approx}{M}$: matriz massa [Kg para massa ou Kg.m^2 para inércia]
- $\underset{\approx}{C}$: matriz amortecimento [Kg/s]

- $\underset{\approx}{K}$: matriz rigidez [N/m ou Kg/s^2]

- $\underset{\sim}{f} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ K_{pde}\ Z_{pde} \\ K_{pdd}\ Z_{pdd} \\ K_{pte}\ Z_{pte} \\ K_{ptd}\ Z_{ptd} \end{pmatrix}$: vetor força ou vetor excitação [N]

Translação dos graus de liberdade locais para globais

$$\left.\begin{aligned} Z_{sde} &= Z_1 + l_c\,\phi_v \\ Z_1 &= Z_v - l_a\,\theta_v \end{aligned}\right\}$$
$$\begin{cases} Z_{sde} = Z_v + l_c\,\phi_v - l_a\,\theta_v \\ \dot{Z}_{sde} = \dot{Z}_v + l_c\,\dot{\phi}_v - l_a\,\dot{\theta}_v \end{cases} \tag{A.52}$$

$$\left.\begin{aligned} Z_{sdd} &= Z_1 - l_d\,\phi_v \\ Z_1 &= Z_v - l_a\,\theta_v \end{aligned}\right\}$$
$$\begin{cases} Z_{sdd} = Z_v - l_d\,\phi_v - l_a\,\theta_v \\ \dot{Z}_{sde} = \dot{Z}_v - l_d\,\dot{\phi}_v - l_a\,\dot{\theta}_v \end{cases} \tag{A.53}$$

$$\left.\begin{aligned} Z_{ste} &= Z_2 + l_e\,\phi_v \\ Z_2 &= Z_v + l_b\,\theta_v \end{aligned}\right\}$$
$$\begin{cases} Z_{sdd} = Z_v + l_e\,\phi_v + l_b\,\theta_v \\ \dot{Z}_{sdd} = \dot{Z}_v + l_e\,\dot{\phi}_v + l_b\,\dot{\theta}_v \end{cases} \tag{A.54}$$

$$\left.\begin{aligned} Z_{std} &= Z_2 - l_f\,\phi_v \\ Z_2 &= Z_v + l_b\,\theta_v \end{aligned}\right\}$$
$$\begin{cases} Z_{sdd} = Z_v - l_f\,\phi_v + l_b\,\theta_v \\ \dot{Z}_{sdd} = \dot{Z}_v - l_f\,\dot{\phi}_v + l_b\,\dot{\theta}_v \end{cases} \tag{A.55}$$

$$\begin{cases} Z_{btd} = Z_v - (l_a - l_i)\theta_v \\ Z_{btt} = Z_v + (l_b - l_j)\theta_v \\ \phi_{btd} = \phi_v \\ \phi_{btt} = \phi_v \end{cases} \tag{A.56}$$

$$\begin{cases} Z_{btd} = Z_v - (l_a - l_i)\theta_v \\ Z_{btt} = Z_v + (l_b - l_j)\theta_v \\ \phi_{btd} = \phi_v \\ \phi_{btt} = \phi_v \end{cases} \tag{A.57}$$

$$\begin{cases} Z_5 = Z_{btd} + l_n\,\phi_{btd} \\ Z_5 = Z_v + l_n\,\phi_v - (l_a - l_i)\theta_v \end{cases} \tag{A.58}$$

$$\begin{cases} \overline{Z}_5 = Z_5 - l_i\,\theta_{de} \\ \overline{Z}_5 = Z_v + l_n\,\phi_v - (l_a - l_i)\theta_v - l_i\,\theta_{de} \end{cases} \tag{A.59}$$

$$\begin{cases} Z_6 = Z_{btd} - l_o\,\phi_{btd} \\ Z_6 = Z_v - l_o\,\phi_v - (l_a - l_i)\theta_v \end{cases} \tag{A.60}$$

$$\begin{cases} \overline{Z}_6 = Z_6 - l_i\,\theta_{dd} \\ \overline{Z}_6 = Z_v - l_o\,\phi_v - (l_a - l_i)\theta_v - l_i\,\theta_{dd} \end{cases} \tag{A.61}$$

$$\begin{cases} Z_7 = Z_{btt} + l_p\,\phi_{btt} \\ Z_7 = Z_v + l_p\,\phi_v + (l_b - l_j)\theta_v \end{cases} \tag{A.62}$$

$$\begin{cases} \overline{Z}_7 = Z_7 + l_j\,\theta_{te} \\ \overline{Z}_7 = Z_v + l_p\,\phi_v + (l_b - l_j)\theta_v + l_j\,\theta_{te} \end{cases} \tag{A.63}$$

$$\begin{cases} Z_8 = Z_{btt} - l_q\,\phi_{btt} \\ Z_8 = Z_v - l_q\,\phi_v + (l_b - l_j)\theta_v \end{cases} \tag{A.64}$$

$$\begin{cases} \overline{Z}_8 = Z_8 + l_j\,\theta_{td} \\ \overline{Z}_8 = Z_v - l_q\,\phi_v + (l_b - l_j)\theta_v + l_j\,\theta_{td} \end{cases} \tag{A.65}$$

e

$$\theta_{de} = \frac{Z_5 - Z_{rde} + l_k\,\phi_v}{l_i} = \frac{Z_v + (l_n + l_k)\phi_v - (l_a - l_i)\theta_v - Z_{rde}}{l_i} \tag{A.66}$$

$$\theta_{dd} = \frac{Z_6 - Z_{rdd} - l_r\,\phi_v}{l_i} = \frac{Z_v - (l_o + l_r)\phi_v - (l_a - l_i)\theta_v - Z_{rdd}}{l_i} \tag{A.67}$$

$$\theta_{te} = \frac{Z_{rte} - Z_7 - l_m\,\phi_v}{l_j} = \frac{Z_{rte} - (l_p + l_m)\phi_v - (l_b - l_j)\theta_v - Z_v}{l_j} \tag{A.68}$$

$$\theta_{td} = \frac{Z_{rtd} - Z_8 + l_s\,\phi_v}{l_j} = \frac{Z_{rtd} + (l_q + l_s)\phi_v - (l_b - l_j)\theta_v - Z_v}{l_j} \tag{A.69}$$

Daí,

$$\theta_{de} - \theta_{dd} = \frac{(l_n + l_k + l_o + l_r)}{l_i}\phi_v - \frac{(Z_{rde} - Z_{rdd})}{l_i} \tag{A.70}$$

$$\theta_{te} - \theta_{td} = \frac{(Z_{rte} - Z_{rtd})}{l_j} - \frac{(l_p + l_q + l_m + l_s)}{l_j}\phi_v \tag{A.71}$$

Destas duas últimas expressões pode-se ver que:

- Para $\phi_v = 0$, $(Z_{rde}-Z_{rdd}) \neq 0$ e $(Z_{rte}-Z_{rtd}) \neq 0$, situação que se apresenta quando o veículo passa por uma traversina, vê-se que a expressão $\theta_{de} - \theta_{dd} = -\frac{(Z_{rde} - Z_{rdd})}{l_i}$ e que $\theta_{te} - \theta_{td} = \frac{(Z_{rte} - Z_{rtd})}{l_j}$, o que mostra a atuação da barra estabilizadora independente de haver rolagem da carroceria.
- Para $\phi_v \neq 0$, $(Z_{rde}-Z_{rdd}) = 0$ e $(Z_{rte}-Z_{rtd}) = 0$, situação que se apresenta quando há a rolagem da carroceria sem desnivelamento da pista, vê-se que a expressão $\theta_{de} - \theta_{dd} = \frac{(l_n + l_k + l_o + l_r)}{l_i}\phi_v$ e que $\theta_{te} - \theta_{td} = -\frac{(l_p + l_q + l_m + l_s)}{l_j}\phi_v$, atuação da barra estabilizadora em função da fixação desta à carroceria.

Reescrevendo as equações de equilíbrio dinâmico para delas extrair as matrizes C e K

$$
\begin{aligned}
& m_V \ddot{Z}_V + K_{sde}\left(Z_{sde} - Z_{rde}\right) + C_{sde}\left(\dot{Z}_{sde} - \dot{Z}_{rde}\right) + \frac{l_n}{l_n + l_k}\overline{K}_{btd}\frac{\left(\theta_{de} - \theta_{dd}\right)}{l_i} + \\
& + K_{sdd}\left(Z_{sdd} - Z_{rdd}\right) + C_{sdd}\left(\dot{Z}_{sdd} - \dot{Z}_{rdd}\right) - \frac{l_o}{l_o + l_r}\overline{K}_{btd}\frac{\left(\theta_{de} - \theta_{dd}\right)}{l_i} + \\
& + K_{ste}\left(Z_{ste} - Z_{rte}\right) + C_{ste}\left(\dot{Z}_{ste} - \dot{Z}_{rte}\right) - \frac{l_p}{l_p + l_m}\overline{K}_{btteq}\frac{\left(\theta_{te} - \theta_{td}\right)}{l_j} + \\
& + K_{std}\left(Z_{std} - Z_{rtd}\right) + C_{std}\left(\dot{Z}_{std} - \dot{Z}_{rtd}\right) + \frac{l_q}{l_q + l_s}\overline{K}_{btteq}\frac{\left(\theta_{te} - \theta_{td}\right)}{l_j} = 0
\end{aligned}
$$

Substituindo os gdl's "transladados" e agrupando por grau de liberdade de acordo com o vetor deslocamento, a equação se torna (A.72):

$$
\begin{aligned}
& m_V \ddot{Z}_V + \\
& + \left(C_{sde} + C_{sdd} + C_{ste} + C_{std}\right)\dot{Z}_v + \\
& + \left(l_c C_{sde} - l_d C_{sdd} + l_e C_{ste} - l_f C_{std}\right)\dot{\phi}_v + \\
& + \left(-l_a C_{sde} - l_a C_{sdd} + l_b C_{ste} + l_b C_{std}\right)\dot{\theta}_v + \\
& + \left(-C_{sde}\right)\dot{Z}_{rde} + \left(-C_{sdd}\right)\dot{Z}_{rdd} + \left(-C_{ste}\right)\dot{Z}_{rte} + \left(-C_{std}\right)\dot{Z}_{rtd} + \\
& + \left(K_{sde} + K_{sdd} + K_{ste} + K_{std}\right)Z_v + \\
& + \left(\begin{array}{l} l_c K_{sde} - l_d K_{sdd} + l_e K_{ste} - l_f K_{std} + \dfrac{l_n\left(l_n + l_k + l_o + l_r\right)}{l_i^2\left(l_n + l_k\right)}\overline{K}_{btd} - \dfrac{l_o\left(l_n + l_k + l_o + l_r\right)}{l_i^2\left(l_o + l_r\right)}\overline{K}_{btd} + \\ + \dfrac{l_p\left(l_p + l_m + l_q + l_s\right)}{l_j^2\left(l_p + l_m\right)}\overline{K}_{btt} - \dfrac{l_q\left(l_p + l_m + l_q + l_s\right)}{l_j^2\left(l_q + l_s\right)}\overline{K}_{btt} \end{array}\right)\phi_v + \\
& + \left(-l_a K_{sde} - l_a K_{sdd} + l_b K_{ste} + l_b K_{std}\right)\theta_v + \\
& + \left(-K_{sde} - \frac{l_n}{l_i^2\left(l_n + l_k\right)}\overline{K}_{btd} + \frac{l_o}{l_i^2\left(l_o + l_r\right)}\overline{K}_{btd}\right)Z_{rde} + \\
& + \left(-K_{sdd} + \frac{l_n}{l_i^2\left(l_n + l_k\right)}\overline{K}_{btd} - \frac{l_o}{l_i^2\left(l_o + l_r\right)}\overline{K}_{btd}\right)Z_{rdd} + \\
& + \left(-K_{ste} - \frac{l_p}{l_j^2\left(l_p + l_m\right)}\overline{K}_{btt} + \frac{l_q}{l_j^2\left(l_q + l_s\right)}\overline{K}_{btt}\right)Z_{rte} + \\
& + \left(-K_{std} + \frac{l_p}{l_j^2\left(l_p + l_m\right)}\overline{K}_{btt} - \frac{l_q}{l_j^2\left(l_q + l_s\right)}\overline{K}_{btt}\right)Z_{rtd} = 0
\end{aligned}
$$

$$J_{\varphi_v}\,\ddot{\varphi}_v + l_c C_{sde}\left(\dot{Z}_{sde} - \dot{Z}_{rde}\right) - l_d C_{sdd}\left(\dot{Z}_{sdd} - \dot{Z}_{rdd}\right) + l_e C_{ste}\left(\dot{Z}_{ste} - \dot{Z}_{rte}\right) - l_f C_{std}\left(\dot{Z}_{std} - \dot{Z}_{rtd}\right) +$$

$$+ l_c K_{sde}\left(Z_{sde} - Z_{rde}\right) - l_d K_{sdd}\left(Z_{sdd} - Z_{rdd}\right) + l_e K_{ste}\left(Z_{ste} - Z_{rte}\right) - l_f K_{std}\left(Z_{std} - Z_{rtd}\right) +$$

$$+ l_c\left[\frac{l_n}{l_n + l_k}\overline{K}_{btd}\left(\frac{\left(\theta_{de} - \theta_{dd}\right)}{l_i}\right)\right] + l_d\left[\frac{l_o}{l_o + l_r}\overline{K}_{btd}\left(\frac{\left(\theta_{de} - \theta_{dd}\right)}{l_i}\right)\right] - l_e\left[\frac{l_p}{l_p + l_m}\overline{K}_{btteq}\left(\frac{\left(\theta_{te} - \theta_{td}\right)}{l_j}\right)\right] +$$

$$- l_f\left[\frac{l_q}{l_q + l_s}\overline{K}_{btteq}\left(\frac{\left(\theta_{te} - \theta_{td}\right)}{l_j}\right)\right] = 0$$

Substituindo os gdl's "transladados" e agrupando por grau de liberdade de acordo com o vetor deslocamento, a equação se torna (A.73):

$$\begin{aligned}
&J_{\varphi_v}\,\ddot{\varphi}_v + \\
&+ \left(l_c C_{sde} - l_d C_{sdd} + l_e C_{ste} - l_f C_{std}\right)\dot{Z}_v + \\
&+ \left(l_c^{\,2} C_{sde} + l_d^{\,2} C_{sdd} + l_e^{\,2} C_{ste} + l_f^{\,2} C_{std}\right)\dot{\phi}_v + \\
&+ \left(-l_a l_c C_{sde} + l_a l_d C_{sdd} + l_b l_e C_{ste} - l_b l_f C_{std}\right)\dot{\theta}_v + \\
&+ \left(-l_c C_{sde}\right)\dot{Z}_{rde} + \left(l_d C_{sdd}\right)\dot{Z}_{rdd} + \left(-l_e C_{ste}\right)\dot{Z}_{rte} + \left(l_f C_{std}\right)\dot{Z}_{rtd} + \\
&+ \left(l_c K_{sde} - l_d K_{sdd} + l_e K_{ste} - l_f K_{std}\right) Z_v + \\
&+ \left(\begin{array}{l} l_c^{\,2} K_{sde} + l_d^{\,2} K_{sdd} + l_e^{\,2} K_{ste} + l_f^{\,2} K_{std} + l_c \dfrac{l_n\left(l_n + l_k + l_o + l_r\right)}{l_i^{\,2}\left(l_n + l_k\right)}\overline{K}_{btd} + l_d \dfrac{l_o\left(l_n + l_k + l_o + l_r\right)}{l_i^{\,2}\left(l_o + l_r\right)}\overline{K}_{btd} + \\ + l_e \dfrac{l_p\left(l_p + l_m + l_q + l_s\right)}{l_j^{\,2}\left(l_p + l_m\right)}\overline{K}_{btt} + l_f \dfrac{l_q\left(l_p + l_m + l_q + l_s\right)}{l_j^{\,2}\left(l_q + l_s\right)}\overline{K}_{btt} \end{array}\right)\phi_v \\
&+ \left(-l_a l_c K_{sde} + l_a l_d K_{sdd} + l_b l_e K_{ste} - l_b l_f K_{std}\right)\theta_v + \\
&+ \left(-l_c K_{sde} - l_c \frac{l_n}{l_i^{\,2}\left(l_n + l_k\right)}\overline{K}_{btd} - l_d \frac{l_o}{l_i^{\,2}\left(l_o + l_r\right)}\overline{K}_{btd}\right) Z_{rde} + \\
&+ \left(l_d K_{sdd} + l_c \frac{l_n}{l_i^{\,2}\left(l_n + l_k\right)}\overline{K}_{btd} + l_d \frac{l_o}{l_i^{\,2}\left(l_o + l_r\right)}\overline{K}_{btd}\right) Z_{rdd} + \\
&+ \left(-l_e K_{ste} - l_e \frac{l_p}{l_j^{\,2}\left(l_p + l_m\right)}\overline{K}_{btt} - l_f \frac{l_q}{l_j^{\,2}\left(l_q + l_s\right)}\overline{K}_{btt}\right) Z_{rte} + \\
&+ \left(l_f K_{std} + l_e \frac{l_p}{l_j^{\,2}\left(l_p + l_m\right)}\overline{K}_{btt} + l_f \frac{l_q}{l_j^{\,2}\left(l_q + l_s\right)}\overline{K}_{btt}\right) Z_{rtd} = 0
\end{aligned}$$

$$J_{\theta_v}\ddot{\theta}_v - l_a C_{sde}\left(\dot{Z}_{sde} - \dot{Z}_{rde}\right) - l_a C_{sdd}\left(\dot{Z}_{sdd} - \dot{Z}_{rdd}\right) + l_b C_{ste}\left(\dot{Z}_{ste} - \dot{Z}_{rte}\right) + l_b C_{std}\left(\dot{Z}_{std} - \dot{Z}_{rtd}\right) +$$

$$- l_a K_{sde}\left(Z_{sde} - Z_{rde}\right) - l_a K_{sdd}\left(Z_{sdd} - Z_{rdd}\right) + l_b K_{ste}\left(Z_{ste} - Z_{rte}\right) + l_b K_{std}\left(Z_{std} - Z_{rtd}\right) +$$

$$- l_a\left[\frac{l_n}{l_n + l_k}\overline{K}_{btd}\left(\frac{\left(\theta_{de} - \theta_{dd}\right)}{l_i}\right)\right] + l_a\left[\frac{l_o}{l_o + l_r}\overline{K}_{btd}\left(\frac{\left(\theta_{de} - \theta_{dd}\right)}{l_i}\right)\right] - l_b\left[\frac{l_p}{l_p + l_m}\overline{K}_{btteq}\left(\frac{\left(\theta_{te} - \theta_{td}\right)}{l_j}\right)\right] +$$

$$+ l_b\left[\frac{l_q}{l_q + l_s}\overline{K}_{btteq}\left(\frac{\left(\theta_{te} - \theta_{td}\right)}{l_j}\right)\right] = 0$$

Substituindo os gdl's "transladados" e agrupando por grau de liberdade de acordo com o vetor deslocamento, a equação se torna (A.74):

$$\begin{aligned}
&J_{\theta_v}\ddot{\theta}_v + \\
&+\left(-l_a C_{sde} - l_a C_{sdd} + l_b C_{ste} + l_b C_{std}\right)\dot{Z}_v + \\
&+\left(-l_a l_c C_{sde} + l_a l_d C_{sdd} + l_b l_e C_{ste} - l_b l_f C_{std}\right)\dot{\phi}_v + \\
&+\left(l_a^2 C_{sde} + l_a^2 C_{sdd} + l_b^2 C_{ste} + l_b^2 C_{std}\right)\dot{\theta}_v + \\
&+\left(l_a C_{sde}\right)\dot{Z}_{rde} + \left(l_a C_{sdd}\right)\dot{Z}_{rdd} + \left(-l_b C_{ste}\right)\dot{Z}_{rte} + \left(-l_b C_{std}\right)\dot{Z}_{rtd} + \\
&+\left(-l_a K_{sde} - l_a K_{sdd} + l_b K_{ste} + l_b K_{std}\right)Z_v + \\
&+\left(\begin{aligned}
&-l_a l_c K_{sde} + l_a l_d K_{sdd} + l_b l_e K_{ste} - l_b l_f K_{std} - l_a \frac{l_n\left(l_n + l_k + l_o + l_r\right)}{l_i^2\left(l_n + l_k\right)}\overline{K}_{btd} + l_a \frac{l_o\left(l_n + l_k + l_o + l_r\right)}{l_i^2\left(l_o + l_r\right)}\overline{K}_{btd} + \\
&+ l_b \frac{l_p\left(l_p + l_m + l_q + l_s\right)}{l_j^2\left(l_p + l_m\right)}\overline{K}_{btt} - l_b \frac{l_q\left(l_p + l_m + l_q + l_s\right)}{l_j^2\left(l_q + l_s\right)}\overline{K}_{btt}
\end{aligned}\right) \\
&+\left(l_a^2 K_{sde} + l_a^2 K_{sdd} + l_b^2 K_{ste} + l_b^2 K_{std}\right)\theta_v + \\
&+\left(l_a K_{sde} + l_a \frac{l_n}{l_i^2\left(l_n + l_k\right)}\overline{K}_{btd} - l_a \frac{l_o}{l_i^2\left(l_o + l_r\right)}\overline{K}_{btd}\right)Z_{rde} + \\
&+\left(l_a K_{sdd} - l_a \frac{l_n}{l_i^2\left(l_n + l_k\right)}\overline{K}_{btd} + l_a \frac{l_o}{l_i^2\left(l_o + l_r\right)}\overline{K}_{btd}\right)Z_{rdd} + \\
&+\left(-l_b K_{ste} - l_b \frac{l_p}{l_j^2\left(l_p + l_m\right)}\overline{K}_{btt} + l_b \frac{l_q}{l_j^2\left(l_q + l_s\right)}\overline{K}_{btt}\right)Z_{rte} + \\
&+\left(-l_b K_{std} + l_b \frac{l_p}{l_j^2\left(l_p + l_m\right)}\overline{K}_{btt} - l_b \frac{l_q}{l_j^2\left(l_q + l_s\right)}\overline{K}_{btt}\right)Z_{rtd} = 0
\end{aligned}$$

$$m_{rde}\,\ddot{Z}_{rde} = -K_{pde}\left(Z_{rde} - Z_{pde}\right) + K_{sde}\left(Z_{sde} - Z_{rde}\right) + C_{sde}\left(\dot{Z}_{sde} - \dot{Z}_{rde}\right) + \frac{l_n}{l_n + l_k}\overline{K}_{btd}\frac{\left(\theta_{de} - \theta_{dd}\right)}{l_i}$$

Substituindo os gdl's "transladados" e agrupando por grau de liberdade de acordo com o vetor deslocamento, a equação se torna:

$$\begin{aligned}
&m_{rde}\,\ddot{Z}_{rde} + \\
&+\left(-C_{sde}\right)\dot{Z}_v + \\
&+\left(-l_c C_{sde}\right)\dot{\phi}_v + \\
&+\left(l_a C_{sde}\right)\dot{\theta}_v + \\
&+\left(C_{sde}\right)\dot{Z}_{rde} + \\
&+\left(K_{sde}\right)Z_v \\
&+\left(-l_c K_{sde} - \frac{l_n\left(l_n + l_k + l_o + l_r\right)}{l_i^2\left(l_n + l_k\right)}\overline{K}_{btd}\right)\phi_v + \\
&+\left(l_a K_{sde}\right)\theta_v + \\
&+\left(K_{sde} + \frac{l_n}{l_i^2\left(l_n + l_k\right)}\overline{K}_{btd} + K_{pde}\right)Z_{rde} + \left(-\frac{l_n}{l_i^2\left(l_n + l_k\right)}\overline{K}_{btd}\right)Z_{rdd} = K_{pde}\,Z_{pde}
\end{aligned} \tag{A.75}$$

$$m_{rdd}\,\ddot{Z}_{rdd} = -K_{pdd}\left(Z_{rdd} - Z_{pdd}\right) + K_{sdd}\left(Z_{sdd} - Z_{rdd}\right) + C_{sdd}\left(\dot{Z}_{sdd} - \dot{Z}_{rdd}\right) - \frac{l_o}{l_o + l_r}\overline{K}_{btd}\frac{\left(\theta_{de} - \theta_{dd}\right)}{l_i}$$

Substituindo os gdl's "transladados" e agrupando por grau de liberdade de acordo com o vetor deslocamento, a equação se torna:

$$\begin{aligned}
&m_{rdd}\,\ddot{Z}_{rdd} + \\
&+\left(-C_{sdd}\right)\dot{Z}_v + \\
&+\left(l_d C_{sdd}\right)\dot{\phi}_v + \\
&+\left(l_a C_{sdd}\right)\dot{\theta}_v + \\
&+\left(C_{sdd}\right)\dot{Z}_{rdd} + \\
&+\left(K_{sdd}\right)Z_v \\
&+\left(l_d K_{sdd} - \frac{l_o\left(l_n + l_k + l_o + l_r\right)}{l_i^2\left(l_o + l_r\right)}\overline{K}_{btd}\right)\phi_v + \\
&+\left(l_a K_{sdd}\right)\theta_v + \\
&+\left(K_{sdd} + \frac{l_o}{l_i^2\left(l_o + l_r\right)}\overline{K}_{btd} + K_{pdd}\right)Z_{rdd} + \left(-\frac{l_o}{l_i^2\left(l_o + l_r\right)}\overline{K}_{btd}\right)Z_{rde} = K_{pdd}\,Z_{pdd}
\end{aligned} \tag{A.76}$$

$$m_{rte}\,\ddot{Z}_{rte} = -K_{pte}\left(Z_{rte} - Z_{pte}\right) + K_{ste}\left(Z_{ste} - Z_{rte}\right) + C_{ste}\left(\dot{Z}_{ste} - \dot{Z}_{rte}\right) - \frac{l_p}{l_p + l_m}\overline{K}_{botteq}\frac{\left(\theta_{te} - \theta_{td}\right)}{l_j}$$

Substituindo os gdl's "transladados" e agrupando por grau de liberdade de acordo com o vetor deslocamento, a equação se torna:

$$\begin{aligned}
&m_{rte}\,\ddot{Z}_{rte} + \\
&+\left(-C_{ste}\right)\dot{Z}_v + \\
&+\left(-l_e C_{ste}\right)\dot{\phi}_v + \\
&+\left(-l_b C_{ste}\right)\dot{\theta}_v + \\
&+\left(C_{ste}\right)\dot{Z}_{rte} + \\
&+\left(K_{ste}\right)Z_v \\
&+\left(-l_e K_{ste} - \frac{l_p\left(l_p + l_m + l_q + l_s\right)}{l_i^2\left(l_p + l_m\right)}\overline{K}_{botte}\right)\phi_v + \\
&+\left(-l_b K_{ste}\right)\theta_v + \\
&+\left(K_{ste} + \frac{l_p}{l_i^2\left(l_p + l_m\right)}\overline{K}_{botte} + K_{pte}\right)Z_{rte} + \left(-\frac{l_p}{l_i^2\left(l_p + l_m\right)}\overline{K}_{botte}\right)Z_{rtd} = K_{pte}\,Z_{pte}
\end{aligned} \tag{A.77}$$

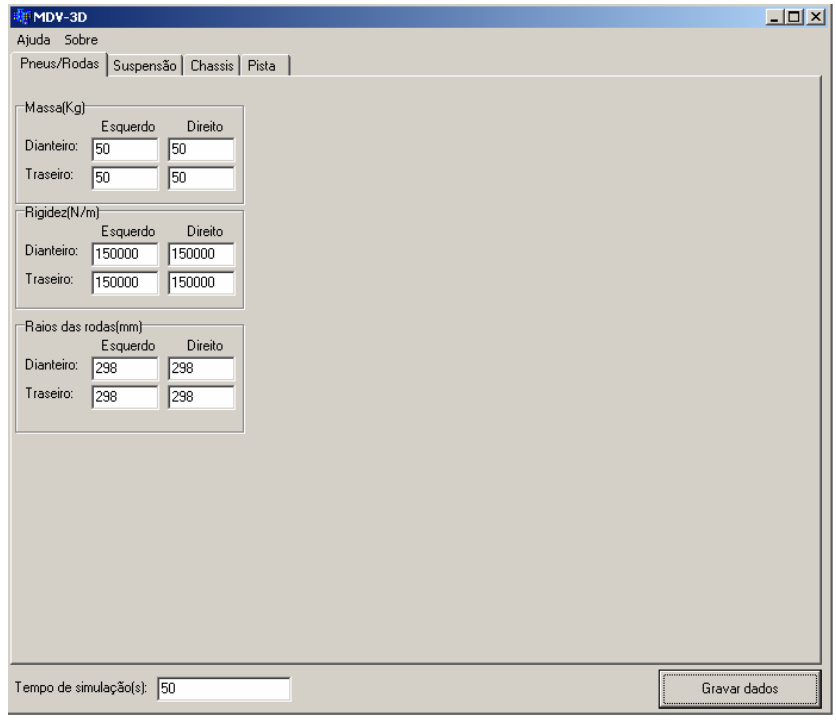
$$m_{rtd}\,\ddot{Z}_{rtd} = -K_{ptd}\left(Z_{rtd} - Z_{ptd}\right) + K_{std}\left(Z_{std} - Z_{rtd}\right) + C_{std}\left(\dot{Z}_{std} - \dot{Z}_{rtd}\right) + \frac{l_q}{l_q + l_s}\overline{K}_{botteq}\frac{\left(\theta_{te} - \theta_{td}\right)}{l_j}$$

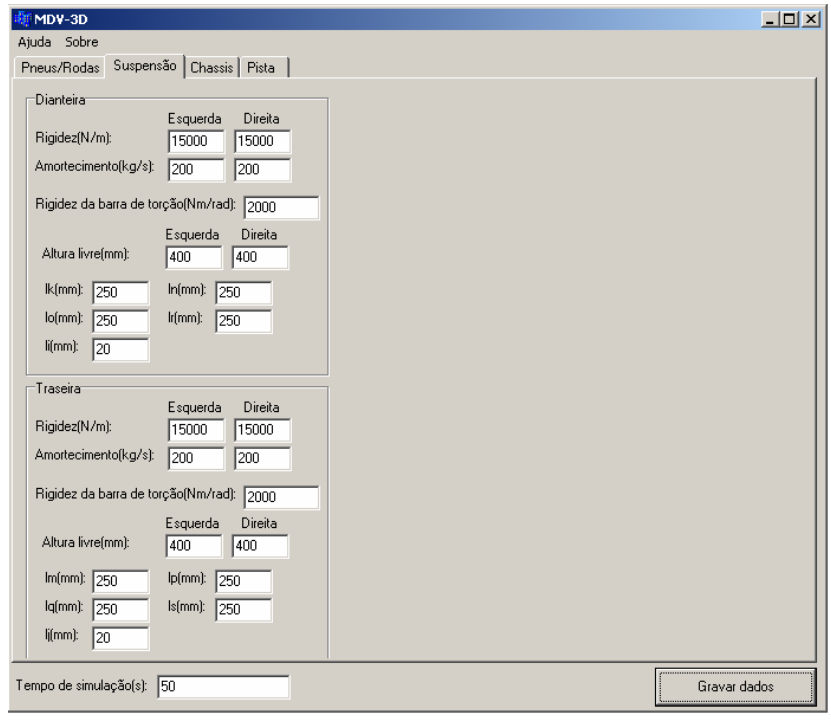
Substituindo os gdl's "transladados" e agrupando por grau de liberdade de acordo com o vetor deslocamento, a equação se torna:

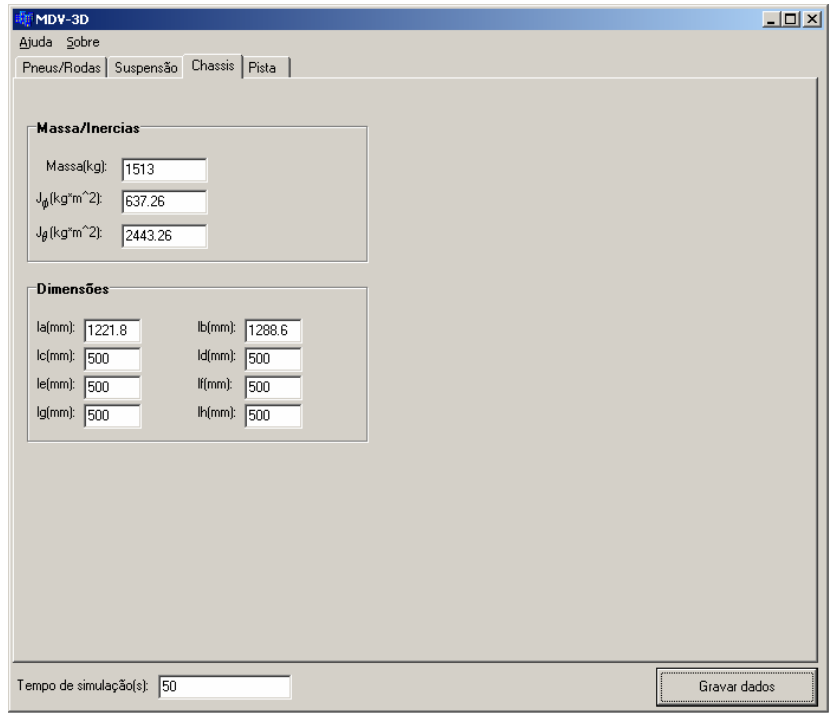
$$\begin{aligned}
&m_{rtd}\,\ddot{Z}_{rtd} + \\
&+\left(-C_{std}\right)\dot{Z}_v + \\
&+\left(l_f C_{std}\right)\dot{\phi}_v + \\
&+\left(-l_b C_{std}\right)\dot{\theta}_v + \\
&+\left(C_{std}\right)\dot{Z}_{rtd} + \\
&+\left(-K_{std}\right)Z_v \\
&+\left(l_f K_{std} - \frac{l_q\left(l_p + l_m + l_q + l_s\right)}{l_i^2\left(l_q + l_s\right)}\overline{K}_{botte}\right)\phi_v + \\
&+\left(-l_b K_{std}\right)\theta_v + \\
&+\left(K_{std} + \frac{l_q}{l_i^2\left(l_q + l_s\right)}\overline{K}_{botte} + K_{ptd}\right)Z_{rtd} + \left(-\frac{l_q}{l_i^2\left(l_q + l_s\right)}\overline{K}_{botte}\right)Z_{rte} = K_{ptd}\,Z_{ptd}
\end{aligned} \tag{A.78}$$

Matrizes massa (M), amortecimento (C) e rigidez (K)

Sejam os dados geométricos e constitutivos considerados para o veículo:







As seguintes matrizes massa, rigidez e amortecimento serão

Matriz massa - M

$\dot{Z}_V$	$\dot{\phi}_V$	$\dot{\theta}_V$	$\dot{Z}_{rde}$	$\dot{Z}_{rdd}$	$\dot{Z}_{rte}$	$\dot{Z}_{rtd}$	Termos em $\partial Z_i/\partial t$ vindos da equação
m_{11}	m_{12}	m_{13}	m_{14}	m_{15}	m_{16}	m_{17}	$\left(m_V.\ddot{Z}_V\right)$
m_{21}	m_{22}	m_{23}	m_{24}	m_{25}	m_{26}	m_{27}	$\left(J_{\phi_V}.\ddot{\phi}_V\right)$
m_{31}	m_{32}	m_{33}	m_{34}	m_{35}	m_{36}	m_{37}	$\left(J_{\theta_V}.\ddot{\theta}_V\right)$
m_{41}	m_{42}	m_{43}	m_{44}	m_{45}	m_{46}	m_{47}	$\left(m_{rde}.\ddot{Z}_{rde}\right)$
m_{51}	m_{52}	m_{53}	m_{54}	m_{55}	m_{56}	m_{57}	$\left(m_{rdd}.\ddot{Z}_{rdd}\right)$
m_{61}	m_{62}	m_{63}	m_{64}	m_{65}	m_{66}	m_{67}	$\left(m_{rte}.\ddot{Z}_{rte}\right)$
m_{71}	m_{72}	m_{73}	m_{74}	m_{75}	m_{76}	m_{77}	$\left(m_{rtd}.\ddot{Z}_{rtd}\right)$

Onde:

$m_{11} = m_v$;

$m_{12} = J_{\phi_V}$;

$m_{13} = J_{\theta_V}$;

$m_{14} = m_{rde}$;

$m_{15} = m_{rdd}$;

$m_{16} = m_{rte}$;

$m_{17} = m_{rtd}$;

Os demais termos desta matriz são iguais a zero.

Numericamente a matriz massa tem os valores abaixo:

$$M = \begin{bmatrix} 1513 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 637{,}3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2443{,}3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 50 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 50 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 50 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 50 \end{bmatrix}$$

Matriz C

$\dot{Z}_V$	$\dot{\phi}_V$	$\dot{\theta}_V$	$\dot{Z}_{rde}$	$\dot{Z}_{rdd}$	$\dot{Z}_{rte}$	$\dot{Z}_{rtd}$	Termos em $\partial Z_i / \partial t$ vindos da equação
C_{11}	C_{12}	C_{13}	C_{14}	C_{15}	C_{16}	C_{17}	$\left(m_V . \ddot{Z}_V\right)$
C_{21}	C_{22}	C_{23}	C_{24}	C_{25}	C_{26}	C_{27}	$\left(J_{\phi_V} . \ddot{\phi}_V\right)$
C_{31}	C_{32}	C_{33}	C_{34}	C_{35}	C_{36}	C_{37}	$\left(J_{\theta_V} . \ddot{\theta}_V\right)$
C_{41}	C_{42}	C_{43}	C_{44}	C_{45}	C_{46}	C_{47}	$\left(m_{rde} . \ddot{Z}_{rde}\right)$
C_{51}	C_{52}	C_{53}	C_{54}	C_{55}	C_{56}	C_{57}	$\left(m_{rdd} . \ddot{Z}_{rdd}\right)$
C_{61}	C_{62}	C_{63}	C_{64}	C_{65}	C_{66}	C_{67}	$\left(m_{rte} . \ddot{Z}_{rte}\right)$
C_{71}	C_{72}	C_{73}	C_{74}	C_{75}	C_{76}	C_{77}	$\left(m_{rtd} . \ddot{Z}_{rtd}\right)$

Onde:

$$C_{11} = C_{sde} + C_{sdd} + C_{ste} + C_{std}$$

$$C_{12} = l_c C_{sde} - l_d C_{sdd} + l_e C_{ste} - l_f C_{std}$$

$$C_{13} = -l_a C_{sde} - l_a C_{sdd} + l_b C_{ste} + l_b C_{std}$$

$$C_{14} = -C_{sde}$$

$$C_{15} = -C_{sdd}$$

$$C_{16} = -C_{ste}$$

$$C_{17} = -C_{std}$$

$$C_{21} = l_c C_{sde} - l_d C_{sdd} + l_e C_{ste} - l_f C_{std}$$

$$C_{22} = l_c^2 C_{sde} + l_d^2 C_{sdd} + l_e^2 C_{ste} + l_f^2 C_{std}$$

$$C_{23} = -l_a l_c C_{sde} + l_a l_d C_{sdd} + l_b l_e C_{ste} - l_b l_f C_{std}$$

$$C_{24} = -l_c C_{sde}$$

$$C_{25} = l_d C_{sdd}$$

$$C_{26} = -l_e C_{ste}$$

$$C_{27} = l_f C_{std}$$

$$C_{31} = -l_a C_{sde} - l_a C_{sdd} + l_b C_{ste} + l_b C_{std}$$

$$C_{32} = -l_a l_c C_{sde} + l_a l_d C_{sdd} + l_b l_e C_{ste} - l_b l_f C_{std}$$

$$C_{33} = l_a^2 C_{sde} + l_a^2 C_{sdd} + l_b^2 C_{ste} + l_b^2 C_{std}$$

$$C_{34} = l_a C_{sde}$$

$$C_{35} = l_a C_{sdd}$$

$$C_{36} = -l_b C_{ste}$$

$$C_{37} = -l_b C_{std}$$

$$C_{41} = -C_{sde}$$

$C_{42} = -l_c C_{sde}$

$C_{43} = l_a C_{sde}$

$C_{44} = C_{sde}$

$C_{45} = C_{46} = C_{47} = 0$

$C_{51} = -C_{sdd}$

$C_{52} = l_d C_{sdd}$

$C_{53} = l_a C_{sdd}$

$C_{54} = 0$

$C_{55} = C_{sdd}$

$C_{56} = C_{57} = 0$

$C_{61} = -C_{ste}$

$C_{62} = -l_e C_{ste}$

$C_{63} = -l_b C_{ste}$

$C_{64} = C_{65} = 0$

$C_{66} = C_{ste}$

$C_{67} = 0$

$C_{71} = -C_{std}$

$C_{72} = l_f C_{std}$

$C_{73} = -l_b C_{std}$

$C_{74} = C_{75} = C_{76} = 0$

$C_{77} = C_{std}$

Numericamente, a matriz C tem os seguintes valores:

$$C = \begin{bmatrix} 800 & 0 & 26{,}7 & -200 & -200 & -200 & -200 \\ 200 & 200 & 0 & -100 & 100 & -100 & 100 \\ 26{,}7 & 0 & 1261{,}3 & 244{,}4 & 244{,}4 & -257{,}7 & -257{,}7 \\ -200 & -100 & 244{,}4 & 200 & 0 & 0 & 0 \\ -200 & 100 & 244{,}4 & 0 & 200 & 0 & 0 \\ -200 & -100 & -257{,}7 & 0 & 0 & 200 & 0 \\ -200 & 100 & -257{,}7 & 0 & 0 & 0 & 200 \end{bmatrix}$$

Matriz K

Z_V	ϕ_V	θ_V	Z_{rde}	Z_{rdd}	Z_{rte}	Z_{rtd}	Termos em Z_i vindos da equação
K_{11}	K_{12}	K_{13}	K_{14}	K_{15}	K_{16}	K_{17}	$\left(m_V . \ddot{Z}_V\right)$
K_{21}	K_{22}	K_{23}	K_{24}	K_{25}	K_{26}	K_{27}	$\left(J_{\phi_V} . \ddot{\phi}_V\right)$
K_{31}	K_{32}	K_{33}	K_{34}	K_{35}	K_{36}	K_{37}	$\left(J_{\theta_V} . \ddot{\theta}_V\right)$
K_{41}	K_{42}	K_{43}	K_{44}	K_{45}	K_{46}	K_{47}	$\left(m_{rde} . \ddot{Z}_{rde}\right)$
K_{51}	K_{52}	K_{53}	K_{54}	K_{55}	K_{56}	K_{57}	$\left(m_{rdd} . \ddot{Z}_{rdd}\right)$
K_{61}	K_{62}	K_{63}	K_{64}	K_{65}	K_{66}	K_{67}	$\left(m_{rte} . \ddot{Z}_{rte}\right)$
K_{71}	K_{72}	K_{73}	K_{74}	K_{75}	K_{76}	K_{77}	$\left(m_{rtd} . \ddot{Z}_{rtd}\right)$

Onde:

$$K_{11} = K_{sde} + K_{sdd} + K_{ste} + K_{std}$$

$$K_{12} = \begin{aligned} & l_c K_{sde} - l_d K_{sdd} + l_e K_{ste} - l_f K_{std} + \frac{l_n\left(l_n + l_k + l_o + l_r\right)}{l_i^2\left(l_n + l_k\right)}\overline{K}_{btd} - \frac{l_o\left(l_n + l_k + l_o + l_r\right)}{l_i^2\left(l_o + l_r\right)}\overline{K}_{btd} + \\ & + \frac{l_p\left(l_p + l_m + l_q + l_s\right)}{l_j^2\left(l_p + l_m\right)}\overline{K}_{btt} - \frac{l_q\left(l_p + l_m + l_q + l_s\right)}{l_j^2\left(l_q + l_s\right)}\overline{K}_{btt} \end{aligned}$$

$$K_{13} = -l_a K_{sde} - l_a K_{sdd} + l_b K_{ste} + l_b K_{std}$$

$$K_{14} = -K_{sde} - \frac{l_n}{l_i^2\left(l_n + l_k\right)}\overline{K}_{btd} + \frac{l_o}{l_i^2\left(l_o + l_r\right)}\overline{K}_{btd}$$

$$K_{15} = -K_{sdd} + \frac{l_n}{l_i^2\left(l_n + l_k\right)}\overline{K}_{btd} - \frac{l_o}{l_i^2\left(l_o + l_r\right)}\overline{K}_{btd}$$

$$K_{16} = -K_{ste} - \frac{l_p}{l_j^2\left(l_p + l_m\right)}\overline{K}_{btt} + \frac{l_q}{l_j^2\left(l_q + l_s\right)}\overline{K}_{btt}$$

$$K_{17} = -K_{std} + \frac{l_p}{l_j^2\left(l_p + l_m\right)}\overline{K}_{btt} - \frac{l_q}{l_j^2\left(l_q + l_s\right)}\overline{K}_{btt}$$

$$K_{21} = l_c K_{sde} - l_d K_{sdd} + l_e K_{ste} - l_f K_{std}$$

$$\begin{aligned} K_{22} = {} & l_c^2 K_{sde} + l_d^2 K_{sdd} + l_e^2 K_{ste} + l_f^2 K_{std} + \\ & + l_c \frac{l_n\left(l_n + l_k + l_o + l_r\right)}{l_i^2\left(l_n + l_k\right)}\overline{K}_{btd} + l_d \frac{l_o\left(l_n + l_k + l_o + l_r\right)}{l_i^2\left(l_o + l_r\right)}\overline{K}_{btd} + \\ & + l_e \frac{l_p\left(l_p + l_m + l_q + l_s\right)}{l_j^2\left(l_p + l_m\right)}\overline{K}_{btt} + l_f \frac{l_q\left(l_p + l_m + l_q + l_s\right)}{l_j^2\left(l_q + l_s\right)}\overline{K}_{btt} \end{aligned}$$

$$K_{23} = -l_a l_c K_{sde} + l_a l_d K_{sdd} + l_b l_e K_{ste} - l_b l_f K_{std}$$

$$K_{24} = -l_c K_{sde} - l_c \frac{l_n}{l_i^2\left(l_n + l_k\right)}\overline{K}_{btd} - l_d \frac{l_o}{l_i^2\left(l_o + l_r\right)}\overline{K}_{btd}$$

$$K_{25} = l_d K_{sdd} + l_c \frac{l_n}{l_i^2\left(l_n + l_k\right)}\overline{K}_{btd} + l_d \frac{l_o}{l_i^2\left(l_o + l_r\right)}\overline{K}_{btd}$$

$$K_{26} = -l_e K_{ste} - l_e \frac{l_p}{l_j^2\left(l_p + l_m\right)}\overline{K}_{btt} - l_f \frac{l_q}{l_j^2\left(l_q + l_s\right)}\overline{K}_{btt}$$

$$K_{27} = l_f K_{std} + l_e \frac{l_p}{l_j^2\left(l_p + l_m\right)}\overline{K}_{btt} + l_f \frac{l_q}{l_j^2\left(l_q + l_s\right)}\overline{K}_{btt}$$

$$K_{31} = -l_a K_{sde} - l_a K_{sdd} + l_b K_{ste} + l_b K_{std}$$

$$\begin{aligned} K_{32} = {} & -l_a l_c K_{sde} + l_a l_d K_{sdd} + l_b l_e K_{ste} - l_b l_f K_{std} + \\ & - l_a \frac{l_n\left(l_n + l_k + l_o + l_r\right)}{l_i^2\left(l_n + l_k\right)}\overline{K}_{btd} + l_a \frac{l_o\left(l_n + l_k + l_o + l_r\right)}{l_i^2\left(l_o + l_r\right)}\overline{K}_{btd} + \\ & + l_b \frac{l_p\left(l_p + l_m + l_q + l_s\right)}{l_j^2\left(l_p + l_m\right)}\overline{K}_{btt} - l_b \frac{l_q\left(l_p + l_m + l_q + l_s\right)}{l_j^2\left(l_q + l_s\right)}\overline{K}_{btt} \end{aligned}$$

$$K_{33} = l_a^2 K_{sde} + l_a^2 K_{sdd} + l_b^2 K_{ste} + l_b^2 K_{std}$$

$$K_{34} = l_a K_{sde} + l_a \frac{l_n}{l_i^2 (l_n + l_k)} \overline{K}_{btd} - l_a \frac{l_o}{l_i^2 (l_o + l_r)} \overline{K}_{btd}$$

$$K_{35} = l_a K_{sdd} - l_a \frac{l_n}{l_i^2 (l_n + l_k)} \overline{K}_{btd} + l_a \frac{l_o}{l_i^2 (l_o + l_r)} \overline{K}_{btd}$$

$$K_{36} = -l_b K_{ste} - l_b \frac{l_p}{l_j^2 (l_p + l_m)} \overline{K}_{btt} + l_b \frac{l_q}{l_j^2 (l_q + l_s)} \overline{K}_{btt}$$

$$K_{37} = -l_b K_{std} + l_b \frac{l_p}{l_j^2 (l_p + l_m)} \overline{K}_{btt} - l_b \frac{l_q}{l_j^2 (l_q + l_s)} \overline{K}_{btt}$$

$$K_{41} = -K_{sde}$$

$$K_{42} = -l_c K_{sde} - \frac{l_n (l_n + l_k + l_o + l_r)}{l_i^2 (l_n + l_k)} \overline{K}_{btd}$$

$$K_{43} = l_a K_{sde}$$

$$K_{44} = K_{sde} + \frac{l_n}{l_i^2 (l_n + l_k)} \overline{K}_{btd} + K_{pde}$$

$$K_{45} = -\frac{l_n}{l_i^2 (l_n + l_k)} \overline{K}_{btd}$$

$$K_{46} = K_{47} = 0$$

$$K_{51} = -K_{sdd}$$

$$K_{52} = l_d K_{sdd} + \frac{l_o (l_n + l_k + l_o + l_r)}{l_i^2 (l_n + l_k)} \overline{K}_{btd}$$

$$K_{53} = l_a K_{sdd}$$

$$K_{54} = -\frac{l_o}{l_i^2 (l_n + l_k)} \overline{K}_{btd}$$

$$K_{55} = K_{sdd} + \frac{l_o}{l_i^2 (l_n + l_k)} \overline{K}_{btd} + K_{pdd}$$

$$K_{56} = K_{57} = 0$$

$$K_{61} = -K_{ste}$$

$$K_{62} = -l_e K_{ste} - \frac{l_p\left(l_p + l_m + l_q + l_s\right)}{l_j^2\left(l_p + l_m\right)}\overline{K}_{btt}$$

$$K_{63} = -l_b K_{ste}$$

$$K_{64} = K_{65} = 0$$

$$K_{66} = K_{ste} + \frac{l_p}{l_j^2\left(l_p + l_m\right)}\overline{K}_{btt} + K_{pte}$$

$$K_{67} = -\frac{l_p}{l_j^2\left(l_p + l_m\right)}\overline{K}_{btt}$$

$$K_{71} = -K_{std}$$

$$K_{72} = l_f K_{std} + \frac{l_q\left(l_p + l_m + l_q + l_s\right)}{l_j^2\left(l_q + l_s\right)}\overline{K}_{btt}$$

$$K_{73} = -l_b K_{std}$$

$$K_{74} = K_{75} = 0$$

$$K_{76} = -\frac{l_q}{l_j^2\left(l_q + l_s\right)}\overline{K}_{btt}$$

$$K_{77} = K_{std} + \frac{l_q}{l_j^2\left(l_q + l_s\right)}\overline{K}_{btt} + K_{ptd}$$

Numericamente, a matriz rigidez possui os seguintes valores:

$$K = 10^3 \begin{bmatrix} 60 & 0 & 2 & -15 & -15 & -15 & -15 \\ 2 & 5015 & 0 & -2507{,}5 & 2507{,}5 & -2507{,}5 & 2507{,}5 \\ 2 & 0 & 94{,}6 & 18{,}3 & 18{,}3 & -19{,}3 & -19{,}3 \\ -15 & -2507{,}5 & 18{,}3 & 2665 & -2500 & 0 & 0 \\ -15 & 2507{,}5 & 18{,}3 & -2500 & 2665 & 0 & 0 \\ -15 & -2507{,}5 & -19{,}3 & 0 & 0 & 2665 & -2500 \\ -15 & 2507{,}5 & -19{,}3 & 0 & 0 & -2500 & 2665 \end{bmatrix}$$