

## Dissertação de Mestrado

# “DESENVOLVIMENTO DE FERRAMENTAS PARA DEFINIÇÃO, ANÁLISE E AVALIAÇÃO DE DESEMPENHO DE VEÍCULOS AUTOMOTIVOS”

Leonardo Junqueira Mattana Saturnino

Dissertação apresentada ao Departamento de  
Engenharia Mecânica da PUC Minas como  
parte dos requisitos para obtenção do título de  
MESTRE EM CIÉNCIAS EM ENGENHARIA MECÂNICA.

ORIENTADOR: Prof. Jánés Landre Júnior, Dr.  
CO-ORIENTADOR: Prof. Clóvis Sperb de Barcellos, Dr.

**Banca Examinadora:**

Prof. Jánés Landre Jr., PUC Minas (orientador)  
Prof. Clóvis Sperb de Barcellos, PUC Minas (co-orientador)  
Prof. Marcelo Becker, PUC Minas (avaliador interno)  
Prof: Denílson Laudares Rodrigues, PUC Minas (avaliador interno)  
Prof. Luiz Carlos Sandoval Góes, ITA (avaliador externo)

Belo Horizonte, 25 de março de 2004

## **Agradecimentos**

- À CAPES e à PUC Minas pelas bolsas de estudo oferecidas;
- Aos professores Dr. Jânés Landre Jr. e Dr. Clóvis Sperb de Barcellos pela orientação prestada;
- A meus pais pelo incentivo e confiança;
- Aos membros da banca e demais professores do mestrado;
- Ao professor Roberto Schirm e ao Ivan pelo auxílio nos experimentos realizados com o veículo Mini-Baja;
- À Vibracon Engenharia Ltda. pela disponibilidade de computadores e do *software* de Elementos Finitos ALGOR.
- Ao Sr. Renato Gouvêa de Avelar pelo auxílio na montagem da apresentação;
- À Valéria e demais funcionários do mestrado;
- Aos colegas pela convivência.

## **Resumo**

Este trabalho trata da criação de ferramentas computacionais didáticas, voltadas para a análise estática e dinâmica de veículos. Buscou-se como meta oferecer ao usuário um conhecimento dos métodos matemáticos implementados, através de uma interface amigável. As ferramentas desenvolvidas são executadas através do software MATLAB, utilizando alguns dos recursos já existentes. Foi explorada a facilidade do programa em lidar com cálculos matriciais. Além disto, foram implementados diversos algoritmos de solução e métodos gráficos que realizam a interface com o usuário. O primeiro programa criado possibilita a definição das características de pneus, molas e amortecedores, além de parâmetros geométricos do veículo. A resposta dinâmica do veículo é então verificada. O segundo programa contém módulos de CAD, análise por Elementos Finitos e ODS, que permitem uma avaliação estrutural detalhada. Foi utilizado um veículo tipo Baja para a validação dos resultados dos módulos de Elementos Finitos e ODS (ADES). Para o módulo de avaliação dinâmica (MDV), foram utilizados dados da literatura. O índice de confiabilidade de cada um dos módulos mostrou-se bastante alto, para todos os testes realizados.

## **Abstract**

This work covers the creation of didactic computational tools, which can analyze the static and dynamic responses of vehicles. The tools were developed in such a way that the users can have knowledge of the mathematical methods employed, through a friendly interface. The programs are run on the software MATLAB, using some of the built-in resources. This software's ability to deal with matrices calculation was explored. Besides that, many algorithms and graphical methods were implemented. The first program created allows the definition of tires, coils and dampers characteristics, followed by the vehicle's geometrical parameters. After that, the program verifies the dynamic response of the vehicle. The second program contains three modules: CAD, Finite Element Analysis and ODS, which allow a detailed structural analysis to be done. A Baja-type vehicle was used to validate the results of the Finite Element and ODS modules (ADES), while the dynamic evaluation module (MDV) was executed with data from the literature. The reliability of each module showed to be very high, for every test done.

# Índice

Capítulo 1 - INTRODUÇÃO .....	1
1.1- Objetivo Geral.....	1
1.2- Objetivos Específicos .....	2
Capítulo 2 - REVISÃO BIBLIOGRÁFICA .....	3
2.1- Análise Modal.....	3
2.1.1- Aplicações da Análise Modal .....	4
2.1.2- Base Teórica .....	5
2.1.2.1- Sistema de Um Grau de Liberdade (1 GDL) .....	6
2.1.2.1.1- Não-amortecido .....	7
2.1.2.1.2- Amortecimento Viscoso .....	7
2.1.2.1.3- Amortecimento Estrutural .....	9
2.1.2.2- Formas de FRFs .....	9
2.1.2.2.1- Formas Mais Comuns de Apresentação das FRFs .....	10
2.1.2.3- Sistemas com Múltiplos Graus de Liberdade .....	11
2.1.2.3.1- Não-amortecido .....	11
2.1.2.3.2- Amortecimento Proporcional.....	15
2.1.2.3.3- Amortecimento Histerético - Caso Geral.....	17
2.1.2.3.4- Amortecimento Viscoso - Caso Geral .....	19
2.2- Elementos Finitos .....	22
2.2.1- Derivação Geral das Equações de Equilíbrio de um Elemento Finito.....	24
2.2.2- Imposição de Condições de Contorno .....	30
2.2.3- Funções de Interpolação .....	32
2.2.3.1- Grau de Continuidade .....	32
2.2.3.2- Funções de Interpolação para Elementos $C^0$ .....	33
2.2.3.3- Funções de Interpolação para Elementos $C^1$ .....	34
2.2.4- Análises e Soluções .....	35
2.2.4.1- Solução das Equações de Equilíbrio em Análises Estáticas .....	35
2.2.4.1.1- Soluções com Algoritmos Baseados na Eliminação de Gauss .....	36
A Eliminação de Gauss .....	37
Implementação Computacional da Eliminação de Gauss .....	39

Fatorização de Cholesky .....	41
2.2.4.1.2- Soluções Diretas com Matrizes Ortogonais.....	41
A Fatorização de Givens .....	41
A Fatorização de Householder.....	44
2.2.4.2- Solução das Equações de Equilíbrio em Análises Dinâmicas .....	46
2.2.4.2.1- Métodos de Integração Direta.....	46
2.2.4.2.2- Método de Superposição Modal .....	47
Mudança de Base para Deslocamentos Modais Generalizados .....	47
Não-amortecido .....	48
Amortecimento Proporcional .....	49
Soluções em Estado Permanente.....	49
2.3- Problemas de Auto-valores e Auto-vetores .....	50
2.3.1- Métodos Básicos de Solução para Problemas de Auto-valores .....	50
2.3.2- Método de Lanczos .....	52
2.3.2.1- Algoritmo.....	52
2.3.3- Métodos Robustos de Solução .....	54
2.3.3.1- Método <i>Subspace Iteration</i> .....	54
2.3.3.1.1- Considerações Iniciais .....	55
2.3.3.1.2- Algoritmo.....	55
2.3.3.1.3- Vetores Iniciais .....	56
2.3.3.1.4- Convergência .....	57
2.4- Dinâmica de Auto-veículos .....	57
2.4.1- Suspensão .....	58
2.4.1.1- Suspensões de Eixo Rígido.....	59
2.4.1.2- Suspensões Independentes .....	59
2.4.1.3- Absorvedores .....	60
2.4.1.4- Componentes de Apoio.....	61
2.4.2- Pneus .....	62
2.4.3- Ride .....	64
2.4.3.1- Irregularidades da Pista.....	64
2.4.3.2- Conjunto de Rodas e Pneus .....	66
2.4.3.3- Sistema de Transmissão.....	67
2.4.3.4- Motor .....	67

2.4.3.5- Modelagem de Parâmetros de Ride .....	67
2.5- ODS .....	69
2.5.1- Aplicações de ODS .....	70
2.5.1.1- Visualização das Deformações .....	70
2.5.1.2- Detecção de Dano .....	70
2.5.1.3- Obtenção de Parâmetros Modais .....	71
2.5.2- Escolha das Posições dos Transdutores .....	73
2.5.2.1- Redução de Guyan .....	73
2.5.2.2- Método <i>Effective Independence Distribution Vector</i> .....	74
Capítulo 3 - METODOLOGIA .....	75
3.1- Determinação e Estudo de Parâmetros Veiculares - MDV .....	75
3.1.1- Solução do Sistema de Equações.....	80
3.1.2- Força Transmitida pelos Pneus .....	81
3.1.3- Força Transmitida pela Suspensão .....	81
3.1.4- Sistemas Locais de Coordenadas .....	81
3.1.5- Interface do MDV .....	83
3.2- Verificação de Comportamento Estrutural - ADES .....	89
3.2.1- Parte Gráfica do ADES.....	94
3.2.1.1- Fator de <i>Zoom</i> .....	94
3.2.1.2- Vistas Isométricas .....	94
3.2.1.3- Como Girar os Eixos Coordenados ( <i>Rotate</i> ) .....	96
3.2.1.3.1- Em Torno de <i>h</i> : .....	96
3.2.1.3.2- Em Torno de <i>v</i> : .....	97
3.2.1.4- Como Movimentar a Tela ( <i>Pan</i> ) .....	97
3.2.1.5- Enquadramento da Tela ( <i>Enclose</i> ) .....	99
3.2.1.6- Como Exibir os Pontos na Tela .....	101
3.2.1.7- Como Exibir os Segmentos de Reta .....	103
3.2.1.8- Como Exibir os Arcos de Circunferência .....	103
3.2.1.8.1- Determinação de Eixos Locais a Partir de Três Pontos .....	104
3.2.1.8.2- Determinação do Raio e das Coordenadas do Centro de um Arco .....	106
3.2.1.8.3- Determinação dos Ângulos de Início e Fim de um Arco.....	108

3.2.1.8.4- Determinação do Número de Divisões Adequado para se Traçar um Arco a Partir de Segmentos de Reta.....	110
3.2.1.8.5- Cálculo das Coordenadas de um Certo Número de Pontos ao Longo da Circunferência do Arco .....	111
3.2.1.9- Exibição de Resultados .....	112
3.2.1.10- Legenda e Escala de Cores .....	112
3.2.1.11- Cálculo da Escala Aplicada aos Deslocamentos.....	114
3.3- Implementação do Método de Elementos Finitos .....	115
3.3.1- Geração da Malha de Elementos Finitos .....	115
3.3.2- Formação das Matrizes de Rigidez e Massa.....	116
3.3.2.1- Elementos Unidimensionais $C^0$ e $C^1$ .....	116
3.3.2.1.1- Haste ou Treliça .....	116
3.3.2.1.2- Barra Torcional .....	117
3.3.2.1.3- Viga Bidimensional .....	118
3.3.2.1.4- Viga Tridimensional .....	120
3.3.2.2- Formação das Matrizes Globais de Rigidez e Massa .....	122
3.3.2.2.1- Correspondência entre Graus de Liberdade Locais e Globais.....	123
3.3.3- Otimização da Numeração dos Nós.....	124
3.3.4- Formação do Vetor de Carregamentos .....	126
3.3.4.1- Carregamento Equivalente a uma Carga Distribuída Uniforme .....	126
3.3.4.1.1- Parcela Axial.....	126
3.3.4.1.2- Parcela Transversal .....	127
3.3.5- Aplicação de Condições de Contorno .....	130
3.3.5.1- Deslocamentos Impostos em Problemas Estáticos .....	130
3.3.5.2- Apoio Elástico .....	131
3.3.5.3- Massa Concentrada.....	131
3.4- Implementação do ODS Baseado em Elementos Finitos .....	131
3.5- Tratamento de Dados .....	132
Capítulo 4 - RESULTADOS E DISCUSSÃO .....	136
4.1- Determinação da Resposta Veicular em <i>Ride</i> – MDV .....	138
4.2- Avaliação Estrutural Estática e Dinâmica – ADES .....	140
4.2.1- Geometria.....	140
4.2.2- Elementos Finitos .....	142

4.2.2.1- Malha .....	142
4.2.2.2- Análise Estática com Peso Próprio .....	144
4.2.2.3- Análise dos Modos de Vibração e Frequências Naturais .....	149
4.3- Etapa Experimental.....	158
4.3.1- Acelerações Obtidas no Experimento.....	164
4.3.1.1- Veículo Parado.....	164
4.3.1.2- Veículo em Movimento .....	170
4.3.2- Deslocamentos Obtidos no Experimento.....	177
4.3.2.1- Veículo Parado.....	177
4.3.2.2- Veículo em Movimento .....	184
Capítulo 5 - CONCLUSÕES .....	192
5.1- Sugestões para Trabalhos Futuros .....	193
5.1.1- MDV .....	193
5.1.2- ADES .....	194
Capítulo 6 - REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	195
Apêndice I - DETALHAMENTO DO ADES .....	199
I.1- Tela de Desenho .....	199
I.2- Menus .....	200
I.2.1- Arquivo.....	200
I.2.2- Geometria .....	200
I.2.2.1- Pontos .....	200
Adicionar.....	200
Remover .....	201
Modificar.....	201
I.2.2.2- Retas .....	202
Adicionar.....	202
Remover .....	202
Modificar.....	202
Dividir .....	203
I.2.2.3- Arcos .....	203
Adicionar.....	203
Remover .....	204
Modificar.....	204

Dividir .....	204
I.2.2.4- Mover .....	205
I.2.2.5- Cortar .....	205
I.2.3- Propriedades .....	206
I.2.3.1- Materiais .....	206
Adicionar .....	206
Remover .....	207
Modificar .....	207
Importar .....	208
Exportar .....	208
I.2.3.2- Seções .....	209
Adicionar .....	209
Remover .....	209
Modificar .....	210
Calcular .....	210
I.2.3.3- Grupos .....	211
Adicionar .....	211
Remover .....	212
Modificar .....	212
Associar .....	212
I.2.4- FEM .....	213
I.2.4.1- Elementos .....	213
Definir Tamanho .....	213
Gerar Malha .....	213
Otimizar Numeração .....	213
I.2.4.2- Carregamentos e Condições de Contorno .....	213
I.2.4.3- Análises .....	215
Estática .....	215
Dinâmica .....	215
I.2.5- ODS .....	216
I.2.5.1- Importar Dados .....	216
I.2.5.2- Locais .....	216
Adicionar .....	216

Remover .....	217
Modificar.....	217
Associar.....	217
Calcular .....	218
I.2.5.3- Análise do ODS.....	218
I.2.6- Visualizar.....	218
I.2.6.1- Numeração de Objetos .....	218
I.2.7- Configurações.....	220
I.2.8- Repetir .....	220
I.3- Barra de Ferramentas.....	221
I.3.1- Ferramenta "Vistas" .....	221
I.3.2- Ferramenta "Girar" .....	221
I.3.3- Ferramenta "Zoom" .....	221
I.3.4- Ferramenta "Resultado".....	221
I.3.4.1- Estáticos ou ODS.....	222
I.3.4.2- Dinâmicos.....	223
I.3.5- Ferramenta "Tempo" .....	223
I.4- Barra de Informações .....	223
I.4.1- Modelo Redesenhad.....	223
I.4.2- Número de Objeto Clicado .....	224
I.4.3- Indicação Clicada .....	224
I.4.4- Avanço da Análise.....	224
I.5- Quadro Indicador.....	224
I.6- Formatos.....	225
I.6.1- .GEO (Geometria) .....	225
I.6.2- .PRO (Propriedades).....	225
I.6.3- .FEM (Elementos Finitos) .....	226
I.6.4- .TNS (Resultados Estáticos) .....	227
I.6.5- .MOD (Resultados Dinâmicos) .....	228
Apêndice II - SEÇÕES TRANSVERSAIS E FÓRMULAS.....	229
II.1- Circular.....	229
II.2- Tubular .....	229
II.3- Retangular .....	230

II.4- Perfil L .....	230
II.5- Perfil C .....	231
II.6- Perfil T .....	231
II.7- Perfil I .....	232
II.8- Perfil O .....	232

## **Lista de Figuras**

Figura 2.1 – Análise modal teórica e experimental.....	6
Figura 2.2 – Sistema de um grau de liberdade.....	6
Figura 2.3 – Funções de interpolação $C^0$ para elementos unidimensionais.....	33
Figura 2.4 – Funções de interpolação $C^1$ para elementos unidimensionais.....	34
Figura 2.5 – Funções PSD de dois tipos de pistas. ....	65
Figura 3.1 – Direções e grandezas adotadas. ....	76
Figura 3.2 – Sistemas locais de coordenadas. ....	76
Figura 3.3 – Força transmitida pelos pneus. ....	81
Figura 3.4 – Força transmitida pela suspensão. ....	81
Figura 3.5 – Alturas dos conjuntos pneu-suspensão. ....	82
Figura 3.6 – Parâmetros do veículo .....	84
Figura 3.7 – Parâmetros da pista .....	85
Figura 3.8 – Resposta em estado permanente .....	86
Figura 3.9 – Curvas de resposta em freqüência .....	87
Figura 3.10 – Animação do veículo em operação.....	88
Figura 3.11 – Modos de vibração.....	88
Figura 3.12 – Interface do ADES.....	89
Figura 3.13 – Convenções adotadas para uma seção transversal qualquer.....	90
Figura 3.14 – Convenções adotadas para uma seção transversal qualquer.....	91
Figura 3.15 – Convenção adotada para os esforços. ....	93
Figura 3.16 – Caso básico de vista isométrica. ....	94
Figura 3.17 – Seqüência de rotações necessárias para colocar os eixos na posição de uma vista isométrica.....	94
Figura 3.18 – Última rotação necessária vista no plano formado pelos eixos $v$ e $p$ .....	95
Figura 3.19 – Dimensões e pontos fundamentais da tela. ....	97
Figura 3.20 – Dimensões das folgas internas da tela. ....	98
Figura 3.21 – Sistema de coordenadas da tela. ....	101
Figura 3.22 – Determinação de eixos locais a partir de três pontos.....	104
Figura 3.23 – Determinação de um vetor perpendicular.....	105

Figura 3.24 – Determinação das coordenadas do ponto central de um arco que passa por três pontos quaisquer.....	107
Figura 3.25 – Ângulos correspondentes a cada ponto que forma um arco. ....	108
Figura 3.26 – Exemplos de todas as possibilidades de ângulos dos pontos <i>A</i> , <i>B</i> e <i>C</i> ..	109
Figura 3.27 – Arco traçado através de segmentos de reta.....	110
Figura 3.28 – Distribuição das cores vermelha, verde e azul.....	112
Figura 3.29 – Exemplo de uma escala de cores. ....	114
Figura 3.30 – Elemento de haste e orientação de seus eixos locais. ....	116
Figura 3.31 – Elemento de barra torcional e orientação de seus eixos locais. ....	118
Figura 3.32 – Elemento de viga bidimensional e orientação de seus eixos locais.....	119
Figura 3.33 – Elemento de viga bidimensional, definida sob uma orientação alternativa de eixos locais. ....	120
Figura 3.34 – Elemento de viga tridimensional e orientação de seus eixos locais. ....	121
Figura 3.35 – Redução da largura de banda de uma matriz. ....	125
Figura 3.36 – Elemento submetido a uma carga distribuída uniforme. ....	126
Figura 3.37 – Parcota axial do carregamento distribuído uniforme. ....	126
Figura 3.38 – Parcota transversal do carregamento distribuído uniforme. ....	127
Figura 3.39 – Interface do programa de tratamento de dados.....	134
Figura 4.1 – Foto do Mini-Baja utilizado na etapa experimental. ....	137
Figura 4.2 – Geometria da estrutura do Mini-Baja em vista isométrica. ....	140
Figura 4.3 – Geometria da estrutura do Mini-Baja na vista de frente.....	141
Figura 4.4 – Geometria da estrutura do Mini-Baja na vista de topo. ....	141
Figura 4.5 – Geometria da estrutura do Mini-Baja na vista lateral esquerda.....	141
Figura 4.6 – Malha de elementos finitos gerada no ADES.....	143
Figura 4.7 – Malha de elementos finitos gerada no ALGOR. ....	143
Figura 4.8 – Módulo de deslocamentos (metros).....	144
Figura 4.9 – Deslocamentos na direção X (metros). ....	144
Figura 4.10 – Deslocamentos na direção Y (metros). ....	145
Figura 4.11 – Deslocamentos na direção Z (metros). ....	145
Figura 4.12 – Tensão axial (Pascal). ....	145
Figura 4.13 – Tensão de cisalhamento devida à torção (Pascal). ....	146
Figura 4.14 – Tensão devida à flexão em torno do eixo principal de cada elemento (Pascal). ....	146

Figura 4.15 – Tensão devida à flexão em torno do eixo secundário de cada elemento (Pascal).....	146
Figura 4.16 – Tensão de cisalhamento segundo o eixo principal de cada elemento (Pascal).....	147
Figura 4.17 – Tensão de cisalhamento segundo o eixo secundário de cada elemento (Pascal).....	147
Figura 4.18 – Força axial em cada elemento (Newton).....	147
Figura 4.19 – Momento torçor em cada elemento (Newton × metro) .....	148
Figura 4.20 – Momento fletor principal em cada elemento (Newton × metro) .....	148
Figura 4.21 – Momento fletor secundário em cada elemento (Newton × metro).....	148
Figura 4.22 – Força cortante principal em cada elemento (Newton).....	149
Figura 4.23 – Força cortante secundária em cada elemento (Newton).....	149
Figura 4.24 – Comparação gráfica entre as freqüências naturais calculadas.....	150
Figura 4.25 – Primeiro modo de vibração.....	151
Figura 4.26 – Segundo modo de vibração.....	151
Figura 4.27 – Terceiro modo de vibração.....	151
Figura 4.28 – Quarto modo de vibração.....	152
Figura 4.29 – Quinto modo de vibração.....	152
Figura 4.30 – Sexto modo de vibração.....	152
Figura 4.31 – Sétimo modo de vibração. ....	153
Figura 4.32 – Oitavo modo de vibração.....	153
Figura 4.33 – Nono modo de vibração.....	153
Figura 4.34 – Décimo modo de vibração. ....	154
Figura 4.35 – Décimo primeiro modo de vibração. ....	154
Figura 4.36 – Décimo segundo modo de vibração.....	154
Figura 4.37 – Décimo terceiro modo de vibração.....	155
Figura 4.38 – Décimo quarto modo de vibração.....	155
Figura 4.39 – Décimo quinto modo de vibração.....	155
Figura 4.40 – Décimo sexto modo de vibração.....	156
Figura 4.41 – Décimo sétimo modo de vibração. ....	156
Figura 4.42 – Décimo oitavo modo de vibração. ....	156
Figura 4.43 – Décimo nono modo de vibração. ....	157
Figura 4.44 – Vigésimo modo de vibração. ....	157

Figura 4.45 – Posições dos locais de medição calculados .....	159
Figura 4.46 – Esquema das conexões do equipamento de medição. ....	162
Figura 4.47 – Aceleração em função do tempo para o canal 1, correspondente ao local 3 na direção +Y ( $m/s^2$ ). ....	164
Figura 4.48 – Aceleração em função do tempo para o canal 2, correspondente ao local 7 na direção +Z ( $m/s^2$ ).....	164
Figura 4.49 – Aceleração em função do tempo para o canal 3, correspondente ao local 1 na direção +X ( $m/s^2$ ). ....	165
Figura 4.50 – Aceleração em função do tempo para o canal 4, correspondente ao local 5 na direção +Z ( $m/s^2$ ).....	165
Figura 4.51 – Aceleração em função do tempo para o canal 5, correspondente ao local 6 na direção +Z ( $m/s^2$ ).....	165
Figura 4.52 – Aceleração em função do tempo para o canal 6, correspondente ao local 2 na direção -X ( $m/s^2$ ). ....	166
Figura 4.53 – Aceleração em função do tempo para o canal 7, correspondente ao local 8 na direção +Z ( $m/s^2$ ).....	166
Figura 4.54 – Aceleração em função do tempo para o canal 8, correspondente ao local 4 na direção +Y ( $m/s^2$ ). ....	166
Figura 4.55 – Aceleração em função da freqüência para o canal 1, correspondente ao local 3 na direção +Y ( $m/s^2$ ). ....	167
Figura 4.56 – Aceleração em função da freqüência para o canal 2, correspondente ao local 7 na direção +Z ( $m/s^2$ ).....	167
Figura 4.57 – Aceleração em função da freqüência para o canal 3, correspondente ao local 1 na direção +X ( $m/s^2$ ). ....	168
Figura 4.58 – Aceleração em função da freqüência para o canal 4, correspondente ao local 5 na direção +Z ( $m/s^2$ ). ....	168
Figura 4.59 – Aceleração em função da freqüência para o canal 5, correspondente ao local 6 na direção +Z ( $m/s^2$ ). ....	168
Figura 4.60 – Aceleração em função da freqüência para o canal 6, correspondente ao local 2 na direção -X ( $m/s^2$ ). ....	169
Figura 4.61 – Aceleração em função da freqüência para o canal 7, correspondente ao local 8 na direção +Z ( $m/s^2$ ).....	169

Figura 4.62 – Aceleração em função da freqüência para o canal 8, correspondente ao local 4 na direção +Y ( $\text{m/s}^2$ ) .....	169
Figura 4.63 – Aceleração em função do tempo para o canal 1, correspondente ao local 3 na direção +Y ( $\text{m/s}^2$ ) .....	170
Figura 4.64 – Aceleração em função do tempo para o canal 2, correspondente ao local 7 na direção +Z ( $\text{m/s}^2$ ).....	171
Figura 4.65 – Aceleração em função do tempo para o canal 3, correspondente ao local 1 na direção +X ( $\text{m/s}^2$ ).....	171
Figura 4.66 – Aceleração em função do tempo para o canal 4, correspondente ao local 5 na direção +Z ( $\text{m/s}^2$ ).....	171
Figura 4.67 – Aceleração em função do tempo para o canal 5, correspondente ao local 6 na direção +Z ( $\text{m/s}^2$ ).....	172
Figura 4.68 – Aceleração em função do tempo para o canal 6, correspondente ao local 2 na direção -X ( $\text{m/s}^2$ ).....	172
Figura 4.69 – Aceleração em função do tempo para o canal 7, correspondente ao local 8 na direção +Z ( $\text{m/s}^2$ ).....	172
Figura 4.70 – Aceleração em função do tempo para o canal 8, correspondente ao local 4 na direção +Y ( $\text{m/s}^2$ ) .....	173
Figura 4.71 – Aceleração em função da freqüência para o canal 1, correspondente ao local 3 na direção +Y ( $\text{m/s}^2$ ). ....	174
Figura 4.72 – Aceleração em função da freqüência para o canal 2, correspondente ao local 7 na direção +Z ( $\text{m/s}^2$ ).....	174
Figura 4.73 – Aceleração em função da freqüência para o canal 3, correspondente ao local 1 na direção +X ( $\text{m/s}^2$ ). ....	175
Figura 4.74 – Aceleração em função da freqüência para o canal 4, correspondente ao local 5 na direção +Z ( $\text{m/s}^2$ ).....	175
Figura 4.75 – Aceleração em função da freqüência para o canal 5, correspondente ao local 6 na direção +Z ( $\text{m/s}^2$ ).....	175
Figura 4.76 – Aceleração em função da freqüência para o canal 6, correspondente ao local 2 na direção -X ( $\text{m/s}^2$ ). ....	176
Figura 4.77 – Aceleração em função da freqüência para o canal 7, correspondente ao local 8 na direção +Z ( $\text{m/s}^2$ ).....	176

Figura 4.78 – Aceleração em função da freqüência para o canal 8, correspondente ao local 4 na direção +Y ( $\text{m/s}^2$ ). ....	176
Figura 4.79 – Deslocamento em função do tempo para o canal 1, correspondente ao local 3 na direção +Y (m). ....	177
Figura 4.80 – Deslocamento em função do tempo para o canal 2, correspondente ao local 7 na direção +Z (m). ....	177
Figura 4.81 – Deslocamento em função do tempo para o canal 3, correspondente ao local 1 na direção +X (m). ....	178
Figura 4.82 – Deslocamento em função do tempo para o canal 4, correspondente ao local 5 na direção +Z (m). ....	178
Figura 4.83 – Deslocamento em função do tempo para o canal 5, correspondente ao local 6 na direção +Z (m). ....	178
Figura 4.84 – Deslocamento em função do tempo para o canal 6, correspondente ao local 2 na direção -X (m). ....	179
Figura 4.85 – Deslocamento em função do tempo para o canal 7, correspondente ao local 8 na direção +Z (m). ....	179
Figura 4.86 – Deslocamento em função do tempo para o canal 8, correspondente ao local 4 na direção +Y (m). ....	179
Figura 4.87 – Deslocamento em função da freqüência para o canal 1, correspondente ao local 3 na direção +Y (m). ....	180
Figura 4.88 – Deslocamento em função da freqüência para o canal 2, correspondente ao local 7 na direção +Z (m). ....	180
Figura 4.89 – Deslocamento em função da freqüência para o canal 3, correspondente ao local 1 na direção +X (m). ....	181
Figura 4.90 – Deslocamento em função da freqüência para o canal 4, correspondente ao local 5 na direção +Z (m). ....	181
Figura 4.91 – Deslocamento em função da freqüência para o canal 5, correspondente ao local 6 na direção +Z (m). ....	181
Figura 4.92 – Deslocamento em função da freqüência para o canal 6, correspondente ao local 2 na direção -X (m). ....	182
Figura 4.93 – Deslocamento em função da freqüência para o canal 7, correspondente ao local 8 na direção +Z (m). ....	182

Figura 4.94 – Deslocamento em função da freqüência para o canal 8, correspondente ao local 4 na direção +Y (m) .....	182
Figura 4.95 – Módulo dos deslocamentos ao longo da estrutura correspondentes aos dados coletados com o veículo parado (instante de 29.5 segundos).....	183
Figura 4.96 – Módulo dos deslocamentos ao longo da estrutura correspondentes aos dados coletados com o veículo parado (instante de 30.0 segundos).....	183
Figura 4.97 – Módulo dos deslocamentos ao longo da estrutura correspondentes aos dados coletados com o veículo parado (instante de 30.5 segundos).....	184
Figura 4.98 – Deslocamento em função do tempo para o canal 1, correspondente ao local 3 na direção +Y (m). ....	184
Figura 4.99 – Deslocamento em função do tempo para o canal 2, correspondente ao local 7 na direção +Z (m).....	185
Figura 4.100 – Deslocamento em função do tempo para o canal 3, correspondente ao local 1 na direção +X (m). ....	185
Figura 4.101 – Deslocamento em função do tempo para o canal 4, correspondente ao local 5 na direção +Z (m).....	185
Figura 4.102 – Deslocamento em função do tempo para o canal 5, correspondente ao local 6 na direção +Z (m).....	186
Figura 4.103 – Deslocamento em função do tempo para o canal 6, correspondente ao local 2 na direção -X (m). ....	186
Figura 4.104 – Deslocamento em função do tempo para o canal 7, correspondente ao local 8 na direção +Z (m).....	186
Figura 4.105 – Deslocamento em função do tempo para o canal 8, correspondente ao local 4 na direção +Y (m). ....	187
Figura 4.106 – Deslocamento em função da freqüência para o canal 1, correspondente ao local 3 na direção +Y (m).....	187
Figura 4.107 – Deslocamento em função da freqüência para o canal 2, correspondente ao local 7 na direção +Z (m). ....	188
Figura 4.108 – Deslocamento em função da freqüência para o canal 3, correspondente ao local 1 na direção +X (m).....	188
Figura 4.109 – Deslocamento em função da freqüência para o canal 4, correspondente ao local 5 na direção +Z (m) .....	188

Figura 4.110 – Deslocamento em função da freqüência para o canal 5, correspondente ao local 6 na direção +Z (m) .....	189
Figura 4.111 – Deslocamento em função da freqüência para o canal 6, correspondente ao local 2 na direção -X (m).....	189
Figura 4.112 – Deslocamento em função da freqüência para o canal 7, correspondente ao local 8 na direção +Z (m) .....	189
Figura 4.113 – Deslocamento em função da freqüência para o canal 8, correspondente ao local 4 na direção +Y (m).....	190
Figura 4.114 – Módulo dos deslocamentos ao longo da estrutura correspondentes aos dados coletados com o veículo em movimento (instante de 29.5 segundos).....	190
Figura 4.115 – Módulo dos deslocamentos ao longo da estrutura correspondentes aos dados coletados com o veículo em movimento (instante de 30.0 segundos).....	191
Figura 4.116 – Módulo dos deslocamentos ao longo da estrutura correspondentes aos dados coletados com o veículo em movimento (instante de 30.5 segundos).....	191

## **Lista de Tabelas**

Tabela 2.1 – Formas de FRFs e denominações mais comuns.....	10
Tabela 3.1 – Projeções das coordenadas (x,y,z) em (h,v,p) .....	102
Tabela 4.1 – Características gerais do Mini-Baja. ....	136
Tabela 4.2 – Valores utilizados para os parâmetros do veículo.....	138
Tabela 4.3 – Valores utilizados para os parâmetros da pista. ....	138
Tabela 4.4 – Freqüências naturais do modelo do veículo. ....	139
Tabela 4.5 – Amortecimento modal do veículo. ....	139
Tabela 4.6 – Deslocamentos estáticos do veículo. ....	139
Tabela 4.7 – Comparaçao entre as freqüências naturais da estrutura do Mini-Baja calculadas pelo ALGOR e pelo ADES. ....	150
Tabela 4.8 – Coordenadas (X,Y,Z) dos locais de medição em milímetros.....	158
Tabela 4.9 – Graus de liberdade correspondentes a cada local calculado. ....	159
Tabela 4.10 – Graus de liberdade escolhidos para cada local calculado. ....	159
Tabela 4.11 – Especificações dos acelerômetros (Kistler Piezo BEAM <sup>®</sup> ). ....	160
Tabela 4.12 – Especificações dos pré-amplificadores (Kistler Power Supply/Coupler) .....	161
Tabela 4.13 – Descrição das conexões do equipamento de medição.....	163
Tabela 4.14 – Sensibilidade de cada acelerômetro. ....	163

## Nomenclatura

$A$	Área ( $\text{m}^2$ )
$rA_{j,k}$	$r$ -ésima constante modal que relaciona os graus de liberdade $j$ e $k$
$A_n$	$n$ -ésimo coeficiente dos co-senos da transformada de Fourier
$[B]$	Matriz que relaciona as deformações aos deslocamentos nodais ( $1/\text{m}$ )
$B_n$	$n$ -ésimo coeficiente dos senos da transformada de Fourier
$c$	Coeficiente de amortecimento viscoso ( $\text{N} \times \text{s/m}$ )
$c_0$	Coeficiente de amortecimento crítico ( $\text{N} \times \text{s/m}$ )
$c_p$	Distância da fibra mais externa à linha neutra na direção principal (m)
$c_s$	Distância da fibra mais externa à linha neutra na direção secundária (m)
$c_{sd}$	Coeficiente de amortecimento da suspensão dianteira ( $\text{N} \times \text{s/m}$ )
$c_{st}$	Coeficiente de amortecimento da suspensão traseira ( $\text{N} \times \text{s/m}$ )
$C^m$	Grau de continuidade de ordem $m$
$C_n$	$n$ -ésimo coeficiente da transformada de Fourier na forma exponencial
$[C]$	Matriz de amortecimento ( $\text{N} \times \text{s/m}$ )
$[D]$	Matriz diagonal obtida na fatorização LDL
$e$	Número de Euler
$E$	Módulo de elasticidade (Pa)
$[E]$	Matriz de elasticidade (Pa)
$f$	Força (N)
$F_A$	Força axial (N)
$\{f\}$	Vetor de forças (N)
$\{f\}_A$	Vetor de forças de superfície
$\{f\}_V$	Vetor de forças de corpo
$\{f\}_k$	$k$ -ésimo vetor de forças concentradas (N)
$\{F\}$	Vetor de forças nodais (N)
$\{\hat{F}\}$	Vetor de forças correspondente ao sistema de coordenadas $\{q\}$
$g$	Aceleração da gravidade ( $\text{m/s}^2$ )
$G$	Ganho do pré-amplificador
$G_0$	Parâmetro de magnitude da pista (ciclos $\times$ m)
$G_z(\nu)$	Amplitude da função PSD ( $\text{m}^2/\text{ciclos/m}$ )

$h$	Coeficiente de amortecimento histerético (N/m)
$h_d$	Altura do conjunto pneu-suspensão do eixo dianteiro (m)
$h_t$	Altura do conjunto pneu-suspensão do eixo traseiro (m)
$h_c$	Altura do ponto de referência alinhado verticalmente com o C.G. (m)
$[H]$	Matriz de amortecimento histerético (N/m)
$i$	$\sqrt{-1}$
$I$	Momento de inércia (segundo momento de área) ( $m^4$ )
$I_{pp}$	Momento de inércia secundário ( $m^4$ )
$I_{ss}$	Momento de inércia principal ( $m^4$ )
$[I]$	Matriz identidade
$J_v$	Inércia de <i>pitch</i> do veículo ( $kg \times m^2$ )
$k$	Rigidez (N/m)
$k_d$	Rigidez dos pneus dianteiros (kN/m)
$k_t$	Rigidez dos pneus traseiros (kN/m)
$k_{sd}$	Rigidez da suspensão dianteira (kN/m)
$k_{st}$	Rigidez da suspensão traseira (kN/m)
$k_r$	Rigidez modal do $r$ -ésimo modo (N/m)
$[K]$	Matriz de rigidez (N/m)
$l_d$	Distância horizontal do C.G. ao eixo dianteiro (m)
$l_t$	Distância horizontal do C.G. ao eixo traseiro (m)
$L$	Comprimento do elemento (m)
$[L]$	Matriz triangular inferior obtida na fatorização LDL
$m$	Massa (kg)
$m_d$	Massa não-suspensa do eixo dianteiro (kg)
$m_r$	Massa modal do $r$ -ésimo modo (kg)
$m_t$	Massa não-suspensa do eixo traseiro (kg)
$m_v$	Massa suspensa do veículo (kg)
$M_P$	Momento fletor principal ( $N \times m$ )
$M_S$	Momento fletor secundário ( $N \times m$ )
$[M]$	Matriz de massa (kg)
$N$	Número de graus de liberdade
$[N]$	Matriz de interpolação de deslocamentos
$O$	Origem do sistema de coordenadas

$\{p\}$	Vetor de deslocamentos nas coordenadas modais
$\{\dot{p}\}$	Vetor de velocidades nas coordenadas modais
$\{\ddot{p}\}$	Vetor de acelerações nas coordenadas modais
$\{q\}$	Vetor que agrupa deslocamentos e velocidades
$r_d$	Raio do pneu dianteiro sem deformações (m)
$r_t$	Raio do pneu traseiro sem deformações (m)
$\vec{r}$	Reta
$\{R\}$	Vetor de forças globais (N)
$s$	Auto-valor complexo de um sistema com 1 GDL
$s_r$	Auto-valor complexo do $r$ -ésimo modo
$s_r^*$	Conjugado complexo do $r$ -ésimo auto-valor
$s_d$	Altura livre da suspensão dianteira (m)
$s_t$	Altura livre da suspensão traseira (m)
$S$	Sensibilidade do transdutor
$t$	Tempo (s)
$T$	Período (s)
$T_A$	Momento torçor ( $N \times m$ )
$[T]$	Matriz de transformação
$u$	Deslocamento (m)
$\dot{u}$	Velocidade (m/s)
$\ddot{u}$	Aceleração ( $m/s^2$ )
$\{u\}$	Vetor de deslocamentos (m)
$\{\dot{u}\}$	Vetor de velocidades (m/s)
$\{\ddot{u}\}$	Vetor de acelerações ( $m/s^2$ )
$\{\bar{U}\}$	Vetor de deslocamentos virtuais (m)
$\{\hat{U}\}$	Vetor de deslocamentos nodais (m)
$[U]$	Matriz de deslocamentos (m)
$V$	Volume ( $m^3$ )
$V_P$	Esforço cortante principal (N)
$V_S$	Esforço cortante secundário (N)
$W_P$	Módulo resistente principal ( $m^3$ )
$W_S$	Módulo resistente secundário ( $m^3$ )

$\dot{x}$	Velocidade do veículo (m/s)
$y_{pd}(t)$	Deslocamento vertical da pista sob a roda dianteira (m)
$y_{pt}(t)$	Deslocamento vertical da pista sob a roda traseira (m)
$y_{rd}(t)$	Deslocamento vertical da roda dianteira (m)
$y_{rt}(t)$	Deslocamento vertical da roda traseira (m)
$y_{rd}(t)$	Deslocamento vertical da roda dianteira (m)
$y_{rt}(t)$	Deslocamento vertical da roda traseira (m)
$y_{rd}(t)$	Deslocamento vertical do topo da suspensão dianteira (m)
$y_{rt}(t)$	Deslocamento vertical do topo da suspensão traseira (m)
$y_v(t)$	Deslocamento vertical do veículo (m)
$\alpha(\omega)$	FRF deslocamento/força (m/N)
$[\alpha(\omega)]$	Matriz de receptância (m/N)
$\beta$	Coeficiente da matriz de rigidez no amortecimento proporcional
$\gamma$	Coeficiente da matriz de massa no amortecimento proporcional
$\delta_r$	Decaimento do $r$ -ésimo modo
$\Delta t$	Intervalo de tempo (s)
$\Delta \nu$	Incremento do número de onda (ciclos/m)
$\varepsilon$	Deformação
$\{\varepsilon\}$	Vetor de deformações
$\{\bar{\varepsilon}\}$	Vetor de deformações correspondentes aos deslocamentos virtuais
$\zeta$	Razão de amortecimento
$\zeta_r$	Razão de amortecimento do $r$ -ésimo modo
$\eta$	Fator de perda do amortecimento estrutural
$\eta_r$	Fator de perda do $r$ -ésimo modo
$\theta$	Ângulo (rad)
$\theta(t)$	Ângulo de <i>pitch</i> do veículo (rad)
$[\Theta]$	Matriz de auto-vetores complexos
$\iota(\omega)$	FRF velocidade/força (m/s / N)
$\kappa(\omega)$	FRF aceleração/força (m/s <sup>2</sup> / N)
$\lambda_r$	Auto-valor
$\lambda_r$	Auto-valor do $r$ -ésimo modo

$[\Lambda]$	Matriz de auto-valores
$\nu$	Número de onda (ciclos/m)
$\nu_0$	Número de onda de <i>cutoff</i> (ciclos/m)
$\nu_n$	$n$ -ésimo número de onda (ciclos/m)
$\pi$	Razão entre a circunferência e o diâmetro de um círculo
$\rho$	Massa específica ou densidade ( $\text{kg}/\text{m}^3$ )
$\sigma$	Tensão (Pa)
$\sigma_A$	Tensão de tração/compressão (Pa)
$\sigma_P$	Tensão devida ao momento fletor principal (Pa)
$\sigma_S$	Tensão devida ao momento fletor secundário (Pa)
$\{\sigma\}$	Vetor de tensões (Pa)
$\tau$	Tensão de cisalhamento (Pa)
$\tau_A$	Tensão de cisalhamento devida à torção (Pa)
$\tau_P$	Tensão de cisalhamento devida ao esforço cortante principal (Pa)
$\tau_S$	Tensão de cisalhamento devida ao esforço cortante secundário (Pa)
$\phi$	Ângulo de fase
$\phi_n$	$n$ -ésimo ângulo de fase da transformada de Fourier
$\{\phi\}_r$	$r$ -ésimo auto-vetor normalizado em relação à matriz de massa
$[\Phi]$	Matriz de auto-vetores normalizados em relação à matriz de massa
$\{\psi\}_r$	$r$ -ésimo auto-vetor não-normalizado
$[\Psi]$	Matriz de auto-vetores não-normalizados
$\omega$	Freqüência angular (rad/s)
$\omega_0$	Freqüência natural de um sistema com 1 GDL não-amortecido
$\omega_r$	$r$ -ésima freqüência angular de um sistema com múltiplos GDL não-amortecido
$[\Omega]$	Matriz tri-diagonal
ADES	Análise de Estruturas
CAD	Computer Aided Design
MDV	Modelo Dinâmico de Veículos
ODS	Operational Deflection Shape

# **Capítulo 1**

## **INTRODUÇÃO**

Na indústria automobilística atual, a modelagem numérica se tornou uma ferramenta indispensável na concepção de novos produtos, já que possibilitou a redução do tempo de desenvolvimento e, mais recentemente, também o tempo de testes e qualificação dos produtos a serem lançados para o público consumidor.

Dentre as ferramentas utilizadas pelo setor automotivo, a modelagem através do método de elementos finitos se firmou como a mais popular e eficiente, estando presente na definição, estudo e avaliação de elementos estruturais, na interação entre fluido e estrutura, na definição dos elementos de suspensão, etc.

Para atender a esta crescente demanda por ferramentas numéricas, as empresas de desenvolvimento de *software* disponibilizaram uma grande variedade de programas. Em geral, estes *softwares* podem ser divididos em duas classes. A primeira classe contém as ferramentas que possibilitam uma compreensão da matemática empregada, porém não são práticas para o usuário. A segunda classe compreende as ferramentas que, em nome da praticidade, ocultam seus algoritmos e colocam o usuário como mero espectador do produto.

Diante desta realidade, este trabalho tem como objetivo criar ferramentas que combinem praticidade com a facilidade de acesso aos algoritmos de solução dos problemas.

### **1.1- Objetivo Geral**

Criar ferramentas para verificar e analisar o comportamento estático e dinâmico de veículos.

## **1.2- Objetivos Específicos**

- Desenvolver uma ferramenta que torne possível a verificação do comportamento dinâmico de um veículo ao trafegar sobre diversos tipos de pista. Possibilitar que diferentes arranjos geométricos de carroceria e conjuntos de molas e amortecedores sejam testados.
- Criar uma ferramenta didática de análise por elementos finitos (FEA), que ofereça diferentes métodos de solução tanto para problemas estáticos quanto dinâmicos. Possibilitar o traçado de diferentes geometrias (CAD) e desenvolver toda a interface gráfica e métodos de apresentação de resultados.
- Desenvolver uma ferramenta que possibilite a visualização das deformações de uma estrutura durante sua operação (ODS). Oferecer um meio de avaliar as tensões nesta estrutura a partir dos valores de deslocamentos obtidos experimentalmente.
- Criar uma ferramenta de visualização dos dados experimentais no domínio do tempo e no domínio da freqüência. Oferecer um método para calcular os deslocamentos correspondentes às acelerações coletadas experimentalmente.

## **Capítulo 2**

### **REVISÃO BIBLIOGRÁFICA**

#### **2.1- Análise Modal**

De acordo com Ewins (1984), o estudo experimental das vibrações estruturais sempre foi de grande valia na compreensão e no controle dos diversos fenômenos encontrados na prática. Os métodos experimentais de vibrações são voltados basicamente para dois objetivos:

- Determinar a natureza e extensão dos níveis de vibração;
- Verificar os modelos teóricos e predições.

Atualmente, os problemas relacionados à vibração estrutural trazem limitações aos parâmetros de projeto dos mais diversos componentes. Portanto, é muito importante que os níveis de vibração encontrados durante a operação sejam antecipados e controlados dentro de um valor satisfatório.

Os dois objetivos mencionados anteriormente representam dois tipos de experimentos. O primeiro corresponde ao caso no qual os níveis vibracionais são medidos durante a operação do componente em estudo. O segundo, por sua vez, corresponde a uma condição controlada de excitação, normalmente distinta do seu ambiente operacional. Este segundo tipo é capaz de trazer informações muito mais precisas e detalhadas, sendo chamado atualmente de análise modal experimental.

A análise modal é o processo que envolve o experimento de componentes ou estruturas com o objetivo de se obter uma descrição matemática do seu comportamento dinâmico ou vibracional.

Apesar do nome relativamente novo, os princípios envolvidos na análise modal são conhecidos há muitos anos. Um dos marcos do desenvolvimento da análise modal ocorreu em 1947, através de Kennedy e Pancu. Este trabalho apresentou métodos voltados para a determinação precisa de freqüências naturais e níveis de amortecimento em estruturas de aviões.

Com o rápido avanço das técnicas de medição e análise na década de 1960, abriram-se novos caminhos. Em 1963, Bishop e Gladwell descreveram a teoria do ensaio de ressonância, que na época estava adiante de sua implementação prática. Em 1969, Salter utilizou um ponto de vista totalmente distinto, no qual uma abordagem não-analítica da interpretação dos dados mensurados foi proposta. Esta abordagem oferecia uma boa visão da física que envolvia a vibração da estrutura em estudo.

### **2.1.1- Aplicações da Análise Modal**

Conforme Ewins (1984), a análise modal apresenta um grande número de aplicações, que visam basicamente a obtenção de um modelo matemático de uma determinada estrutura. No entanto, estas aplicações podem ser diferenciadas de acordo com o uso deste modelo matemático:

- Ajuste de modelos. Medição dos modos de vibração e subsequente comparação com os modos gerados por um modelo teórico, tal como o modelo em elementos finitos. Os dados obtidos na análise são utilizados para validar o modelo teórico, de forma que este possa ser usado para prever os níveis de vibração da estrutura em estudo. Para tal, são necessárias estimativas precisas das freqüências naturais e uma descrição dos modos de vibração com precisão e detalhes suficientes para se identificar a correlação entre os modos experimentais e teóricos.
- Comparação e correlação. Na comparação, os dados teóricos são comparados de forma qualitativa com os experimentais. Para a correlação, os modos de vibração da estrutura devem ser medidos precisamente. Os dados teóricos e experimentais são combinados quantitativamente, de forma a se identificarem as causas específicas das discrepâncias entre eles.
- Sub-estruturação. Produz-se um modelo de um determinado componente, de forma a simplificar os cálculos quando este componente for incorporado a um modelo estrutural mais complexo. Para esta aplicação, as freqüências naturais, modos de

vibração e amortecimentos modais devem ser medidos com grande precisão. Além disto, todos os modos do componente devem ser incluídos.

- Prever os efeitos de modificações em uma dada estrutura. Esta aplicação é muito útil durante a etapa de projeto, na qual diversas modificações estruturais se fazem necessárias. A aplicação consiste em utilizar o modelo matemático da estrutura na estimativa das variações no comportamento dinâmico desta, quando certas modificações são realizadas.
- Determinação de forças. Existem muitas situações nas quais o conhecimento das forças que causam vibração é necessário, mas a medição destas forças não é viável. Uma solução para estes casos é a utilização das respostas vibracionais em conjunto com um modelo matemático tal como uma função de transferência. Desta forma, obtém-se as forças de excitação a partir dos dados de deslocamentos, velocidades ou acelerações.

### **2.1.2- Base Teórica**

Segundo Ewins (1984), uma análise vibracional típica pode ser dividida em três etapas. Na análise teórica, inicia-se com uma descrição das características físicas da estrutura, normalmente em termos de suas propriedades de massa, rigidez e amortecimento. Esta descrição é chamada de modelo espacial.

A partir deste ponto, é comum que se faça uma análise modal teórica do modelo espacial. Esta análise gera uma descrição do comportamento da estrutura, chamado de modelo modal. O modelo modal é definido por um conjunto de freqüências naturais com seus respectivos modos de vibração e fatores de amortecimento modais. Estes parâmetros descrevem as várias maneiras pelas quais a estrutura é capaz de vibrar naturalmente, isto é, sem qualquer excitação externa.

A terceira etapa, geralmente de maior interesse, é a análise de como a estrutura vibrará sob certas condições de excitação. Isto depende não apenas das propriedades inerentes da estrutura, como também da natureza e magnitude da excitação imposta. No entanto, é conveniente apresentar um modelo que relaciona a resposta da estrutura a uma excitação "padrão". Esta excitação padrão é tal que serve como base para a solução de qualquer caso particular. O modelo gerado é chamado de modelo de resposta.

Uma excitação padrão bastante utilizada é a força senoidal de amplitude unitária, aplicada a cada ponto da estrutura individualmente e em todas as freqüências dentro de uma faixa específica. O modelo de resposta consiste, portanto, de um conjunto de funções de resposta em freqüência (FRFs), que devem ser definidas sobre uma faixa de freqüências aplicável.

Na análise modal experimental, toma-se o caminho contrário, como pode ser visto na Fig. 2.1.

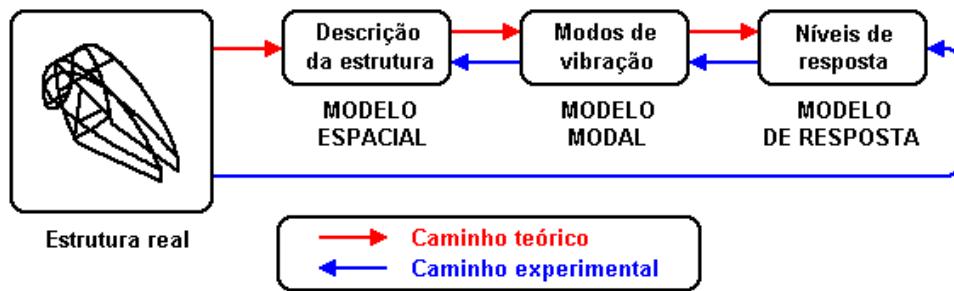


Figura 2.1 – Análise modal teórica e experimental.

### 2.1.2.1- Sistema de Um Grau de Liberdade (1 GDL)

O modelo básico de um sistema com 1 GDL é mostrado na Fig. 2.2, onde  $f(t)$  e  $u(t)$  são a força e o deslocamento, respectivamente. O modelo espacial consiste de uma massa ( $m$ ), uma mola de ( $k$ ) e, quando o amortecimento estiver presente, um elemento de amortecimento viscoso ( $c$ ) ou histerético ( $h$ ).

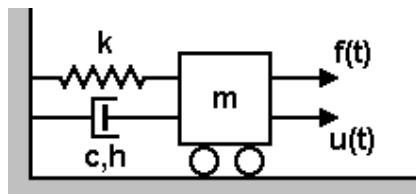


Figura 2.2 – Sistema de um grau de liberdade.

Para se obter o modelo modal, é necessário realizar uma análise modal teórica. Esta análise considera inicialmente um sistema não-amortecido, submetido à vibração livre, ou seja, sem forças externas aplicadas.

### 2.1.2.1.1- Não-amortecido

O modelo espacial consiste apenas da massa ( $m$ ) e da mola ( $k$ ). Para o modelo modal, considera-se o sistema sem forças externas aplicadas, ou seja,  $f(t) = 0$ .

A equação de movimento se torna:

$$m\ddot{u} + ku = 0 \quad (2.1)$$

A solução é da forma  $u(t) = ue^{i\omega t}$ , o que leva a:

$$(k - \omega^2 m)u = 0 \quad (2.2)$$

Portanto, o modelo modal consiste de uma única solução (modo de vibração) com freqüência natural  $\omega_0$  dada por:

$$\omega_0 = \sqrt{k/m} \quad (2.3)$$

Para o modelo de resposta, considera-se uma força da forma  $f(t) = fe^{i\omega t}$  e uma solução da forma  $u(t) = ue^{i\omega t}$ , onde  $u$  e  $f$  são números complexos de forma a acomodarem tanto a informação de amplitude quanto de fase. A equação de movimento se torna:

$$(k - \omega^2 m)ue^{i\omega t} = fe^{i\omega t} \quad (2.4)$$

O modelo de resposta é extraído fazendo-se  $u/f$ :

$$\alpha(\omega) = \frac{u}{f} = \frac{1}{k - \omega^2 m} \quad (2.5)$$

Na prática, sempre existe algum amortecimento, que gera forças dissipativas. A forma na qual estas forças são geradas nem sempre é simples. No entanto, existem dois tipos de amortecimento que apresentam solução analítica: o amortecimento viscoso e o amortecimento histerético ou estrutural.

### 2.1.2.1.2- Amortecimento Viscoso

O amortecimento viscoso considera que as forças dissipativas são proporcionais à velocidade. Para este caso, a equação de movimento em vibração livre se torna:

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = 0 \quad (2.6)$$

Supondo uma solução da forma:  $u(t) = ue^{st}$ , onde  $s$  é um número complexo, obtém-se:

$$(ms^2 + cs + k) = 0 \quad (2.7)$$

O que leva a:

$$s_{1,2} = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\frac{c^2 - 4mk}{2m}} = -\omega_0\zeta \pm i\omega_0\sqrt{1-\zeta^2} \quad (2.8)$$

Onde:

$$\omega_0 = \sqrt{k/m} \quad (2.9)$$

E:

$$\zeta = \frac{c}{c_0} = \frac{c}{2\sqrt{mk}} \quad (2.10)$$

O que implica em uma solução da forma:

$$u(t) = ue^{-\omega_0\zeta t} e^{i\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}t} \quad (2.11)$$

Considerando agora uma vibração forçada da forma  $f(t) = fe^{i\omega t}$ , a equação de movimento se torna:

$$(-\omega^2 m + i\omega c + k)ue^{i\omega t} = fe^{i\omega t} \quad (2.12)$$

E a função de resposta em freqüência passa a ser dada por:

$$\alpha_c(\omega) = \frac{u}{f} = \frac{1}{(k - \omega^2 m) + i(\omega c)} \quad (2.13)$$

Que inclui informações de amplitude:

$$|\alpha_c(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(k - \omega^2 m)^2 + (\omega c)^2}} \quad (2.14)$$

E fase:

$$\angle \alpha_c(\omega) = \arctg \left( \frac{-\omega c}{k - \omega^2 m} \right) \quad (2.15)$$

### 2.1.2.1.3- Amortecimento Estrutural

O modelo de amortecimento viscoso não é representativo do que ocorre nos sistemas reais de múltiplos graus de liberdade. Observa-se, na prática, que há uma dependência do amortecimento em relação à freqüência. Um modelo alternativo para o amortecimento é o histerético ou estrutural, que considera o amortecimento variando inversamente com a freqüência, ou seja:

$$c = \frac{h}{\omega} \quad (2.16)$$

Um ponto negativo do amortecimento estrutural é que ele não apresenta solução simples para a condição de vibração livre. Considerando então a vibração forçada, a equação de movimento se torna:

$$(-\omega^2 m + k + ih)u e^{i\omega t} = f e^{i\omega t} \quad (2.17)$$

E a FRF se torna:

$$\alpha_h(\omega) = \frac{u}{f} = \frac{1}{(k - \omega^2 m) + ih} \quad (2.18)$$

Ou:

$$\alpha_h(\omega) = \frac{\frac{1}{k}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + i\eta} \quad (2.19)$$

Onde  $\eta$  é o fator de perda do amortecimento estrutural, dado por:

$$\eta = \frac{h}{k} \quad (2.20)$$

### 2.1.2.2- Formas de FRFs

De acordo com Ewins (1984), as funções de resposta em freqüência não necessariamente representam a relação entre deslocamentos e forças externas. As velocidades ou acelerações também podem ser utilizadas como parâmetros de resposta. A Tab. 2.1 apresenta as diferentes formas de FRFs e suas denominações mais comuns.

Quando a vibração é senoidal, há uma relação simples entre deslocamento, velocidade e aceleração:

$$u(t) = ue^{i\omega t} \quad (2.21)$$

$$\dot{u}(t) = i\omega ue^{i\omega t} \quad (2.22)$$

$$\ddot{u}(t) = -\omega^2 ue^{i\omega t} \quad (2.23)$$

Portanto, as FRFs apresentam as seguintes relações:

$$\iota(\omega) = \frac{\dot{u}}{f} = i\omega \frac{u}{f} = i\omega \alpha(\omega) \quad (2.24)$$

$$\kappa(\omega) = \frac{\ddot{u}}{f} = -\omega^2 \frac{u}{f} = -\omega^2 \alpha(\omega) \quad (2.25)$$

Tabela 2.1 – Formas de FRFs e denominações mais comuns.

Parâmetro de resposta ( <i>R</i> )	<i>R/F</i> (direta)	<i>F/R</i> (inversa)	Representação
Deslocamento	Receptância, Admitância, Compliância dinâmica, Flexibilidade dinâmica	Rigidez dinâmica	$\alpha(\omega)$
Velocidade	Mobilidade	Impedância mecânica	$\iota(\omega)$
Aceleração	Acelerância, Inertância	Massa aparente	$\kappa(\omega)$

### 2.1.2.2.1- Formas Mais Comuns de Apresentação das FRFs

De modo geral, as FRFs apresentam valores complexos em função da freqüência. Portanto, não é possível traçar gráficos convencionais (*x-y*) destas funções. Para contornar este problema, três formas básicas de representação gráfica foram desenvolvidas:

- Gráfico de Bode: Um gráfico com o módulo da FRF em função da freqüência e outro com a fase da FRF em função da freqüência;

- Um gráfico com a parte real da FRF em função da freqüência e outro com a parte imaginária da FRF em função da freqüência;
- Gráfico de Nyquist: Parte imaginária em função da parte real (não inclui informações de freqüências).

### 2.1.2.3- Sistemas com Múltiplos Graus de Liberdade

A maior parte das estruturas não pode ser modelada adequadamente com apenas um grau de liberdade. Portanto, a obtenção do modelo modal e do modelo de resposta para um sistema com múltiplos graus de liberdade se torna necessária. Seguindo o mesmo procedimento, considera-se inicialmente o sistema não-amortecido.

#### 2.1.2.3.1- Não-amortecido

Para um sistema com  $N$  graus de liberdade não-amortecido, as equações de equilíbrio podem ser escritas de forma matricial como:

$$[M]\{\ddot{u}(t)\} + [K]\{u(t)\} = \{f(t)\} \quad (2.26)$$

Onde  $[M]$  e  $[K]$  são, respectivamente, as matrizes de massa e rigidez de dimensões  $N \times N$ .  $\{u(t)\}$  e  $\{f(t)\}$  são vetores-coluna com  $N$  elementos.  $\{u(t)\}$  contém os deslocamentos em função do tempo e  $\{f(t)\}$  as forças, também em função do tempo.

Resolve-se para a vibração livre, na qual:

$$\{f(t)\} = \{0\} \quad (2.27)$$

Supondo uma solução da forma:

$$\{u(t)\} = \{u\}e^{i\omega t} \quad (2.28)$$

Onde  $\{u\}$  é um vetor-coluna com  $N$  elementos independentes do tempo, tem-se:

$$\{\ddot{u}(t)\} = -\omega^2 \{u\}e^{i\omega t} \quad (2.29)$$

Desde que o sistema seja capaz de vibrar a uma única freqüência  $\omega$ . Substituindo na equação de movimento:

$$([K] - \omega^2[M])\{u\}e^{i\omega t} = \{0\} \quad (2.30)$$

A única solução não-trivial é:

$$\det[K] - \omega^2[M] = 0 \quad (2.31)$$

Que caracteriza um problema de auto-valor generalizado. Há, portanto,  $N$  valores de  $\omega^2$  possíveis, mas não necessariamente diferentes, para a solução. Para cada valor, há um conjunto de valores relativos de  $\{u\}$ , chamados de modos de vibração.

A solução completa pode ser expressa por duas matrizes  $N \times N$ , que constituem o modelo modal:

$$[\Lambda] = \begin{bmatrix} \ddots & & \\ & \omega_r^2 & \\ & & \ddots \end{bmatrix} \text{ e } [\Psi] \quad (2.32)$$

Onde  $[\Lambda]$  é uma matriz-diagonal que contém os auto-valores. O termo  $\omega_r^2$  é o  $r$ -ésimo auto-valor, ou freqüência natural ao quadrado e  $\{\psi\}_r$  é o auto-vetor correspondente.

A matriz de auto-valores é uma matriz única, mas a matriz de auto-vetores não. Isto se deve ao fato que, para  $N$  incógnitas, há  $N-1$  equações. Portanto, sobra uma incógnita e só é possível determinar valores relativos entre elas.

O modelo modal possui as seguintes propriedades de ortogonalidade:

$$[\Psi]^T [M] [\Psi] = \begin{bmatrix} \ddots & & \\ & m_r & \\ & & \ddots \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

$$[\Psi]^T [K] [\Psi] = \begin{bmatrix} \ddots & & \\ & k_r & \\ & & \ddots \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

Sendo  $m_r$  e  $k_r$  conhecidos, respectivamente, como massa e rigidez generalizada ou modal do  $r$ -ésimo modo. Como os auto-vetores não são únicos, ou seja, dependem de um fator de escala ou normalização, os valores de  $m_r$  e  $k_r$  também não são únicos. No entanto, para qualquer escala dos auto-vetores:

$$\frac{k_r}{m_r} = \omega_r^2 \quad (2.35)$$

O processo de normalização mais relevante para a análise modal é a normalização em relação à matriz de massa:

$$[\Phi]^T [M] [\Phi] = [I] \quad (2.36)$$

$$[\Phi]^T [K] [\Phi] = \begin{bmatrix} \ddots & & \\ & \omega_r^2 & \\ & & \ddots \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

A relação entre o  $r$ -ésimo auto-vetor normalizado em relação à matriz de massa e o mesmo auto-vetor não-normalizado é:

$$\{\phi\}_r = \frac{1}{\sqrt{m_r}} \{\psi\}_r \quad (2.38)$$

$$[\Phi] = [\Psi] \begin{bmatrix} \ddots & & \\ & m_r^{-1/2} & \\ & & \ddots \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

Considerando agora que a excitação é um conjunto de forças senoidais a uma mesma freqüência  $\omega$ :

$$\{f(t)\} = \{f\} e^{i\omega t} \quad (2.40)$$

Onde  $\{f\}$  é um vetor-coluna com  $N$  elementos independentes do tempo.

Considerando também que a solução é dada na forma da Eq. (2.28) e substituindo na equação de movimento:

$$([K] - \omega^2 [M]) \{u\} e^{i\omega t} = \{f\} e^{i\omega t} \quad (2.41)$$

Re-arranjando a Eq. (2.41):

$$\{u\} = ([K] - \omega^2 [M])^{-1} \{f\} \quad (2.42)$$

Que pode ser escrita:

$$\{u\} = [\alpha(\omega)] \{f\} \quad (2.43)$$

Onde  $[\alpha(\omega)]$  é a matriz de receptância  $N \times N$  do sistema, que constitui o modelo de resposta. Um elemento qualquer desta matriz  $\alpha_{j,k}(\omega)$  é definido como:

$$\alpha_{j,k}(\omega) = \frac{u_j}{f_k}, \text{ onde } j = 1, \dots, N; \quad f_k \neq 0; \quad k = 1, \dots, N \quad (2.44)$$

Os valores dos elementos de  $[\alpha(\omega)]$  podem ser calculados para qualquer freqüência de interesse, simplesmente substituindo os valores apropriados na Eq. (2.43). No entanto, este procedimento envolve a inversão de um sistema matricial para cada freqüência de interesse, o que traz sérias desvantagens:

- Alto custo para sistemas de grande ordem;
- Ineficiência caso apenas a resposta de alguns graus de liberdade seja necessária;
- Não fornece uma visão clara das várias propriedades da FRF.

Por estas razões, os parâmetros da FRF são determinados de uma forma alternativa, utilizando-se as propriedades modais do sistema. Levando em conta as Eq. (2.42) e (2.43), tem-se:

$$([K] - \omega^2[M]) = [\alpha(\omega)]^{-1} \quad (2.45)$$

Pré-multiplicando ambos os lados por  $[\Phi]^T$  e pós-multiplicando por  $[\Phi]$ :

$$[\Phi]^T ([K] - \omega^2[M]) [\Phi] = [\Phi]^T [\alpha(\omega)]^{-1} [\Phi] \quad (2.46)$$

Ou:

$$\begin{bmatrix} \ddots & & \\ & \omega_r^2 - \omega^2 & \\ & & \ddots \end{bmatrix} = [\Phi]^T [\alpha(\omega)]^{-1} [\Phi] \quad (2.47)$$

Isolando a matriz  $[\alpha(\omega)]$ :

$$[\alpha(\omega)] = [\Phi] \begin{bmatrix} \ddots & & \\ & \omega_r^2 - \omega^2 & \\ & & \ddots \end{bmatrix}^{-1} [\Phi]^T \quad (2.48)$$

A partir da Eq. (2.48), torna-se claro que a matriz  $[\alpha(\omega)]$  é simétrica, caracterizando o princípio da reciprocidade:

$$\alpha_{j,k}(\omega) = \frac{u_j}{f_k} = \alpha_{k,j}(\omega) = \frac{u_k}{f_j} \quad (2.49)$$

Qualquer parâmetro  $\alpha_{j,k}$  pode ser calculado através de:

$$\alpha_{j,k}(\omega) = \sum_{r=1}^N \frac{(\phi_{j,r})(\phi_{k,r})}{\omega_r^2 - \omega^2} = \sum_{r=1}^N \frac{(\psi_{j,r})(\psi_{k,r})}{m_r(\omega_r^2 - \omega^2)} \quad (2.50)$$

Ou:

$$\alpha_{j,k}(\omega) = \sum_{r=1}^N \frac{r A_{j,k}}{\omega_r^2 - \omega^2} \quad (2.51)$$

O parâmetro  $r A_{j,k}$  é chamado de constante modal. Neste caso, a constante modal refere-se ao  $r$ -ésimo modo e liga as coordenadas  $j$  e  $k$  pela FRF de receptância.

### 2.1.2.3.2- Amortecimento Proporcional

O amortecimento proporcional apresenta algumas vantagens que simplificam os cálculos de um sistema com múltiplos graus de liberdade. Os modos de vibração do sistema com amortecimento proporcional são idênticos aos do sistema não-amortecido, enquanto que as freqüências naturais sofrem uma pequena alteração. Por isto, é possível calcular as propriedades modais de um sistema com amortecimento proporcional a partir da análise do sistema não-amortecido, fazendo-se uma correção devida à presença do amortecimento.

A equação geral de movimento para um sistema com múltiplos GDL é:

$$[M]\{\ddot{u}(t)\} + [C]\{\dot{u}(t)\} + [K]\{u(t)\} = \{f(t)\} \quad (2.52)$$

Sendo a matriz de amortecimento  $[C]$  dada por:

$$[C] = \beta[K] + \gamma[M] \quad (2.53)$$

Onde  $\beta$  e  $\gamma$  são constantes escolhidas adequadamente.

Pré-multiplicando ambos os lados por  $[\Phi]^T$  e pós-multiplicando por  $[\Phi]$ :

$$[\Phi]^T[C][\Phi] = \beta \begin{bmatrix} \ddots & & \\ & k_r & \\ & & \ddots \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} \ddots & & \\ & m_r & \\ & & \ddots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddots & & \\ & c_r & \\ & & \ddots \end{bmatrix} \quad (2.54)$$

Onde os elementos  $c_r$ , que estão na diagonal principal, representam o amortecimento generalizado dos diversos modos do sistema. O fato desta matriz ser

diagonal significa que os modos de vibração do sistema não-amortecido são idênticos ao do amortecido.

Fazendo:

$$\{p\} = [\Phi]^{-1} \{u\} \quad (2.55)$$

E substituindo na equação de movimento:

$$\begin{bmatrix} \ddots & & \\ & m_r & \\ & & \ddots \end{bmatrix} \{\ddot{p}\} + \begin{bmatrix} \ddots & & \\ & c_r & \\ & & \ddots \end{bmatrix} \{\dot{p}\} + \begin{bmatrix} \ddots & & \\ & k_r & \\ & & \ddots \end{bmatrix} \{p\} = \{0\} \quad (2.56)$$

Verifica-se que o sistema de equações se torna desacoplado. Portanto, cada equação pode ser resolvida separadamente, como um sistema de um único GDL.

O  $r$ -ésimo modo possui freqüência natural complexa com parte oscilatória igual a:

$$\omega'_r = \omega_r \sqrt{1 - \zeta_r^2} \quad (2.57)$$

E a parte correspondente ao decaimento igual a:

$$\delta_r = \zeta_r \omega_r = \frac{\beta \omega_r^2}{2} + \frac{\gamma}{2} \quad (2.58)$$

Onde:

$$\omega_r = \sqrt{\frac{k_r}{m_r}} \quad (2.59)$$

E:

$$\zeta_r = \frac{c_r}{2\sqrt{k_r m_r}} = \frac{\beta \omega_r}{2} + \frac{\gamma}{2\omega_r} \quad (2.60)$$

Para a vibração forçada, a função de receptância se torna:

$$[\alpha(\omega)] = [(K] + i\omega[C] - \omega^2[M])^{-1} \quad (2.61)$$

Ou:

$$\alpha_{j,k}(\omega) = \sum_{r=1}^N \frac{(\psi_{j,r})(\psi_{k,r})}{(k_r - \omega^2 m_r) + i(\omega c_r)} \quad (2.62)$$

A distribuição de amortecimento proporcional é plausível de um ponto de vista prático: para amortecimento interno, os elementos amortecedores estão em paralelo com os elementos de rigidez. Para amortecimento devido à fricção, os elementos estão em paralelo com os elementos de massa.

A equação de movimento de um sistema com múltiplos GDL e amortecimento histerético é dada por:

$$[M]\{\ddot{u}(t)\} + ([K] + i[H])\{u(t)\} = \{f(t)\} \quad (2.63)$$

Considerando a matriz  $[H]$  proporcional:

$$[H] = \beta[K] + \gamma[M] \quad (2.64)$$

Novamente, os modos de vibração são idênticos ao do sistema não-amortecido e os auto-valores tomam forma complexa:

$$\lambda_r^2 = \omega_r^2(1 + i\eta_r) \quad (2.65)$$

$$\eta_r = \beta + \frac{\gamma}{\omega_r^2} \quad (2.66)$$

$$\omega_r = \sqrt{\frac{k_r}{m_r}} \quad (2.67)$$

E a FRF se torna:

$$\alpha_{j,k}(\omega) = \sum_{r=1}^N \frac{(\psi_{j,r})(\psi_{k,r})}{(k_r - \omega^2 m_r) + i\eta_r k_r} \quad (2.68)$$

### 2.1.2.3.3- Amortecimento Histerético - Caso Geral

Tomando como base a Eq. (2.63) e considerando inicialmente a equação diferencial homogênea, correspondente à condição de vibração livre:

$$[M]\{\ddot{u}(t)\} + ([K] + i[H])\{u(t)\} = \{0\} \quad (2.69)$$

A solução é dada por:

$$\{u(t)\} = \{u\}e^{i\lambda t} \quad (2.70)$$

Substituindo na equação de movimento, obtém-se um problema de auto-valores e auto-vetores complexos. O  $r$ -ésimo auto-valor pode ser escrito como:

$$\lambda_r = \omega_r^2 (1 + \eta_r) \quad (2.71)$$

Onde  $\omega_r$  é a freqüência natural e  $\eta_r$  o fator de perda para este modo de vibração.

A freqüência  $\omega_r$  aqui obtida não é necessariamente igual à freqüência natural do sistema não-amortecido, como no caso do amortecimento proporcional. Na prática, no entanto, os valores são bastante próximos.

O significado físico dos auto-vetores complexos é que cada GDL possui não apenas uma amplitude, como também um ângulo de fase.

A solução obtida possui as mesmas propriedades de ortogonalidade do sistema não-amortecido, dadas pelas Eq. (2.33) e (2.34).

Novamente, os parâmetros de massa e rigidez generalizados dependem da normalização dos modos de vibração, mas sempre obedecem à seguinte relação:

$$\lambda_r = \frac{k_r}{m_r} \quad (2.72)$$

E os auto-vetores normalizados em relação à matriz de massa podem ser definidos através de:

$$\{\phi\}_r = (m_r)^{-1/2} \{\psi\}_r \quad (2.73)$$

Para a obtenção do modelo de resposta, considera-se uma excitação harmônica:

$$([K] + i[H] - \omega^2[M])\{u\}e^{i\omega t} = \{f\}e^{i\omega t} \quad (2.74)$$

Isolando o vetor  $\{u\}$ :

$$\{u\} = ([K] + i[H] - \omega^2[M])^{-1} \{f\} = [\alpha(\omega)] \{f\} \quad (2.75)$$

Utilizando a propriedade de ortogonalidade:

$$[\alpha(\omega)] = [\Phi] \begin{bmatrix} \ddots & & \\ & (\lambda_r - \omega^2)^{-1} & \\ & & \ddots \end{bmatrix} [\Phi]^T \quad (2.76)$$

Ou em forma de série:

$$\alpha_{j,k}(\omega) = \sum_{r=1}^N \frac{(\phi_{j,r})(\phi_{k,r})}{\omega_r^2 - \omega^2 + i\eta_r\omega_r^2} \quad (2.77)$$

Nestas expressões, tanto o numerador quanto o denominador são complexos.

#### 2.1.2.3.4- Amortecimento Viscoso - Caso Geral

Tomando como base a Eq. (2.52) e considerando inicialmente a equação diferencial homogênea:

$$[M]\{\ddot{u}(t)\} + [C]\{\dot{u}(t)\} + [K]\{u(t)\} = \{0\} \quad (2.78)$$

Supondo uma solução da forma:

$$\{u(t)\} = \{u\}e^{st} \quad (2.79)$$

Onde  $s$  é um número complexo. Substituindo na equação de movimento:

$$(s^2[M] + s[C] + [K])\{u\} = \{0\} \quad (2.80)$$

Cuja solução constitui um problema de auto-valor complexo. Há  $2N$  auto-valores  $s_r$ , mas estes ocorrem em pares de conjugados complexos. Isto se deve ao fato que todos os coeficientes nas matrizes são reais. Como nos casos anteriores, para cada auto-valor corresponde um auto-vetor, que também apresenta um conjugado complexo. Portanto, a solução do problema pode ser descrita por:

$$s_r, s_r^* \in \{\Phi\}_r, \{\Phi\}_r^* \quad r = 1, \dots, N \quad (2.81)$$

É comum representar cada auto-valor  $s_r$  da seguinte maneira:

$$s_r = \omega_r \left( -\zeta_r + i\sqrt{1 - \zeta_r^2} \right) \quad (2.82)$$

Onde  $\omega_r$  é a "freqüência natural" e  $\zeta_r$  a razão de amortecimento para este modo. A razão de se colocar "freqüência natural" entre aspas é que esta freqüência não é a mesma do sistema não-amortecido. As freqüências só se igualam para o caso em que o amortecimento é proporcional.

A auto-solução possui propriedades de ortogonalidade que são diferentes dos casos anteriores. A partir destas propriedades, obtém-se:

$$2\omega_r \zeta_r = \frac{\{\psi\}_r^H [C] \{\psi\}_r}{\{\psi\}_r^H [M] \{\psi\}_r} = \frac{c_r}{m_r} \quad (2.83)$$

$$\omega_r^2 = \frac{\{\psi\}_r^H [K] \{\psi\}_r}{\{\psi\}_r^H [M] \{\psi\}_r} = \frac{k_r}{m_r} \quad (2.84)$$

Onde  $m_r$ ,  $k_r$  e  $c_r$  são, respectivamente, os parâmetros de massa, rigidez e amortecimento modais. O significado físico destes parâmetros, no entanto, é um pouco diferente dos outros casos abordados.

Para o modelo de resposta, utiliza-se uma excitação da forma:

$$\{f(t)\} = \{f\}e^{iot} \quad (2.85)$$

E uma resposta:

$$\{u(t)\} = \{u\}e^{iot} \quad (2.86)$$

A solução da equação de movimento se torna:

$$\{u\} = ([K] - \omega^2 [M] + i\omega[C])^{-1} \{f\} \quad (2.87)$$

Mas esta expressão não é conveniente para aplicações numéricas. Procura-se colocar a expressão acima na forma de uma série, como nos outros casos abordados. Para este fim, é necessário definir um novo vetor de coordenadas  $\{q\}$  que contém tanto os deslocamentos  $\{u\}$  quanto as velocidades  $\{\dot{u}\}$ :

$$\{q\}_{(2N \times 1)} = \begin{Bmatrix} \{u\} \\ \{\dot{u}\} \end{Bmatrix} \quad (2.88)$$

Utilizando o vetor  $\{q\}$ , a equação de equilíbrio pode ser escrita como:

$$[[C] \ [M]]_{(N \times 2N)} \{\dot{q}\}_{(2N \times 1)} + [[K] \ [0]]_{(N \times 2N)} \{q\}_{(2N \times 1)} = \{0\}_{(N \times 1)} \quad (2.89)$$

Mas esta forma apresenta apenas  $N$  equações para um total de  $2N$  incógnitas. Adicionando uma equação identidade da forma:

$$[[M] \ [0]] \{\dot{q}\} + [[0] \ [-M]] \{q\} = \{0\} \quad (2.90)$$

Obtém-se um conjunto de  $2N$  equações:

$$\begin{bmatrix} [C] & [M] \\ [M] & [0] \end{bmatrix} \{\dot{q}\} + \begin{bmatrix} [K] & [0] \\ [0] & [-M] \end{bmatrix} \{q\} = \{0\} \quad (2.91)$$

Que podem ser escritas de forma simplificada:

$$[\bar{A}] \{\dot{q}\} + [\bar{B}] \{q\} = \{0\} \quad (2.92)$$

A Eq. (2.92) constitui um problema de auto-valores convencional. Supondo uma solução da forma  $\{q(t)\} = \{q\}e^{st}$ , obtém-se:

$$\begin{aligned} & (\lambda_r [\bar{A}] + [\bar{B}]) \{\theta\}_r = \{0\} \\ & r = 1, \dots, 2N \end{aligned} \quad (2.93)$$

Que possui  $2N$  auto-valores e auto-vetores como solução. Utilizando as propriedades de ortogonalidade:

$$[\Theta]^T [\bar{A}] [\Theta] = \begin{bmatrix} \ddots & & \\ & \bar{a}_r & \\ & & \ddots \end{bmatrix} \quad (2.94)$$

$$[\Theta]^T [\bar{B}] [\Theta] = \begin{bmatrix} \ddots & & \\ & \bar{b}_r & \\ & & \ddots \end{bmatrix} \quad (2.95)$$

Tem-se:

$$\begin{aligned} \lambda_r &= -\frac{\bar{b}_r}{\bar{a}_r} \\ r &= 1, \dots, 2N \end{aligned} \quad (2.96)$$

Colocando o vetor de forças em termos do sistema de coordenadas  $\{q\}$ :

$$\{\hat{F}\}_{(2N \times 1)} = \begin{cases} \{f\} \\ \{0\} \end{cases} \quad (2.97)$$

Supondo resposta harmônica e utilizando a expressão de resposta na forma de série:

$$\begin{Bmatrix} \{u\} \\ i\omega\{u\} \end{Bmatrix}_{(2N \times 1)} = \sum_{r=1}^{2N} \frac{\{\theta\}_r^T \{\hat{F}\} \{\theta\}_r}{\bar{a}_r (i\omega - s_r)} \quad (2.98)$$

Como os auto-valores e auto-vetores ocorrem na forma de conjugados complexos, pode-se escrever:

$$\begin{Bmatrix} \{u\} \\ i\omega\{u\} \end{Bmatrix}_{(2N \times 1)} = \sum_{r=1}^{2N} \left( \frac{\{\theta\}_r^T \{\hat{F}\} \{\theta\}_r}{\bar{a}_r (i\omega - s_r)} + \frac{\{\theta\}_r^H \{\hat{F}\} \{\theta\}_r^*}{\bar{a}_r^* (i\omega - s_r^*)} \right) \quad (2.99)$$

Onde o asterisco indica conjugado complexo e o índice  $H$  indica o vetor conjugado e transposto.

Analizando a resposta de um único grau de liberdade  $j$  em função de uma única força aplicada ao  $k$ -ésimo grau de liberdade:

$$\alpha_{j,k}(\omega) = \sum_{r=1}^N \left( \frac{\{\theta_{j,r}\} \{\theta_{k,r}\}}{\bar{a}_r (\omega_r \zeta_r + i(\omega + \omega_r \sqrt{1 - \zeta_r^2}))} + \frac{\{\theta_{j,r}\}^* \{\theta_{k,r}\}^*}{\bar{a}_r^* (\omega_r \zeta_r + i(\omega + \omega_r \sqrt{1 - \zeta_r^2}))} \right) \quad (2.100)$$

Usando o fato que  $s_r = \omega_r (-\zeta_r + i\sqrt{1 - \zeta_r^2})$ , a Eq. (2.100) se reduz a:

$$\alpha_{j,k}(\omega) = \sum_{r=1}^N \frac{(_r R_{j,k}) + i(\cancel{\omega}/\omega_r) (_r S_{j,k})}{\omega_r^2 - \omega^2 + 2i\omega\omega_r\zeta_r} \quad (2.101)$$

Onde os coeficientes  $R$  e  $S$  são obtidos de:

$$\begin{aligned} \{_r R_k\} &= 2(\zeta_r \operatorname{Re}\{_r G_k\} - \operatorname{Im}\{_r G_k\} \sqrt{1 - \zeta_r^2}) \\ \{_r S_k\} &= 2 \operatorname{Re}\{_r G_k\} \\ \{_r G_k\} &= \frac{\theta_{k,r}}{\bar{a}_r} \{\theta\}_r \end{aligned} \quad (2.102)$$

## 2.2- Elementos Finitos

Conforme Bathe (1982), o desenvolvimento do método de elementos finitos como ferramenta de análise começou essencialmente com o advento dos computadores digitais. Apesar de sua base teórica ser relativamente antiga, sua aplicação prática surgiu apenas há algumas décadas, com a sua implementação computacional. A partir desta, tornou-se possível resolver um grande número de equações de uma maneira bastante eficiente.

O método de elementos finitos se baseia na discretização de uma estrutura ou meio contínuo e na consequente solução do sistema discreto obtido. É principalmente devido à generalidade da estrutura ou contínuo que pode ser analisado, à relativa facilidade em estabelecer as equações que regem o sistema e às boas propriedades numéricas das matrizes envolvidas que o método de elementos finitos encontrou o seu campo de aplicações.

É difícil dizer em qual data o método de elementos finitos foi "inventado", mas as raízes deste método remetem a três grupos de pesquisa separados: matemáticos aplicados, físicos e engenheiros. Apesar do método ter sido publicado anteriormente, os principais avanços ocorreram nos desenvolvimentos independentes realizados por engenheiros. Contribuições originais importantes apareceram no meio da década de 1950, nos trabalhos de Turner et al. e de Argyris e Kelsey. O nome "elemento finito" surgiu em 1960 a partir de um trabalho de Clough, no qual a técnica foi apresentada para uma análise de estado plano de tensões. A partir de então, muitas pesquisas voltaram-se para este assunto, gerando o grande volume de publicações disponíveis atualmente.

Hoje em dia, o conceito de elementos finitos é muito vasto. Mesmo que se restrinja à análise de problemas da mecânica sólida e estrutural, o método pode ser usado de várias formas diferentes. No entanto, a formulação mais importante e que é largamente utilizada na solução de problemas práticos, é a do método de elementos finitos baseados em deslocamentos. Praticamente todos os programas de análise genérica foram escritos utilizando esta formulação. Isto se deve à sua simplicidade, generalidade e boas propriedades numéricas.

O método de elementos finitos baseados em deslocamentos pode ser visto como uma extensão do método de análise de deslocamentos, que foi utilizado por muitos anos na análise de estruturas formadas por vigas e hastes. Os passos básicos na análise de uma estrutura de vigas e hastes utilizando o método de deslocamentos são:

- Idealizar a estrutura total como um conjunto de vigas e hastes que são interconectadas nas juntas estruturais;
- Identificar as juntas com deslocamentos desconhecidos. Estes deslocamentos deverão definir completamente a resposta da estrutura idealizada;
- Estabelecer as equações de equilíbrio de forças correspondentes aos deslocamentos desconhecidos e resolver estas equações;
- Conhecendo-se os deslocamentos nas extremidades das vigas e hastes, calcular a distribuição interna de tensões;
- Interpretar os deslocamentos e tensões calculadas, considerando as suposições feitas.

Em uma análise prática, os passos mais importantes são a idealização apropriada da estrutura e a interpretação correta dos resultados. Dependendo da complexidade do sistema real a ser analisado, é necessário um conhecimento considerável das características do sistema e de seu comportamento mecânico, de modo que uma idealização apropriada seja realizada.

Originalmente, a análise de um conjunto de vigas e hastas não era considerada uma análise de elementos finitos, pois há uma grande diferença entre estas soluções e as análises mais gerais de problemas com duas ou três dimensões. Isto se deve ao fato de que as matrizes de rigidez destes elementos podem ser calculadas exatamente (de acordo com a teoria de vigas).

### 2.2.1- Obtenção das Equações de Equilíbrio de um Elemento Finito

De acordo com Bathe (1982), considera-se inicialmente o equilíbrio de um corpo tri-dimensional qualquer. As forças externas que agem no corpo são as trações de superfície  $\{f\}_A$ , as forças de corpo  $\{f\}_V$  e as forças concentradas  $\{f\}_k$ . Estas forças incluem todas as reações e forças aplicadas externamente, tendo, em geral, três componentes correspondentes aos três eixos coordenados:

$$\{f\}_A = \begin{Bmatrix} f_X \\ f_Y \\ f_Z \end{Bmatrix}_A \quad \{f\}_V = \begin{Bmatrix} f_X \\ f_Y \\ f_Z \end{Bmatrix}_V \quad \{f\}_k = \begin{Bmatrix} f_X \\ f_Y \\ f_Z \end{Bmatrix}_k \quad (2.103)$$

Os deslocamentos do corpo na configuração sem carregamentos são representados por  $\{U\}$ , onde:

$$\{U\} = \begin{Bmatrix} U_X \\ U_Y \\ U_Z \end{Bmatrix} \quad (2.104)$$

As deformações correspondentes a  $\{U\}$  são:

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_{XX} \quad \varepsilon_{YY} \quad \varepsilon_{ZZ} \quad \gamma_{XY} \quad \gamma_{YZ} \quad \gamma_{ZX}\}^T \quad (2.105)$$

E as tensões correspondentes a  $\{\varepsilon\}$  são:

$$\{\sigma\} = \{\sigma_{XX} \quad \sigma_{YY} \quad \sigma_{ZZ} \quad \tau_{XY} \quad \tau_{YZ} \quad \tau_{ZX}\}^T \quad (2.106)$$

Considera-se que as forças aplicadas externamente são dadas e que se deseja calcular os deslocamentos, deformações e tensões resultantes deste carregamento. Para se calcular a resposta do corpo, as equações diferenciais de equilíbrio são estabelecidas e resolvidas de acordo com as condições de contorno e compatibilidade apropriadas.

Uma abordagem equivalente para expressar o equilíbrio do corpo é o uso do princípio dos deslocamentos virtuais. De acordo com este princípio, um corpo está em equilíbrio se, para qualquer deslocamento virtual pequeno e compatível (que satisfaz as condições de contorno essenciais) imposto a ele, o trabalho virtual interno total é igual ao trabalho virtual externo total:

$$\int_V \{\bar{\varepsilon}\}^T \{\sigma\} dV = \int_V \{\bar{U}\}^T \{f\}_V dV + \int_A \{\bar{U}\}_A^T \{f\}_A dA + \sum_k \{\bar{U}\}_k^T \{f\}_k \quad (2.107)$$

O trabalho virtual interno é dado pelo lado esquerdo da equação e é igual ao produto entre as tensões  $\{\sigma\}$  e as deformações  $\{\bar{\varepsilon}\}$  (que correspondem aos deslocamentos virtuais impostos).

O trabalho externo, por sua vez, é dado pelo lado direito da equação e é igual às forças reais  $\{f\}_V$ ,  $\{f\}_A$  e  $\{f\}_k$  agindo sobre os deslocamentos virtuais  $\{\bar{U}\}$ .

Deve-se enfatizar que as deformações virtuais usadas na equação são aqueles correspondentes aos deslocamentos virtuais impostos e que estes deslocamentos podem ser qualquer conjunto compatível de deslocamentos que satisfaçam as condições de contorno geométricas.

Finalmente, deve-se notar que, apesar da Eq. (2.107) ter sido escrita nas coordenadas globais  $(X,Y,Z)$  do corpo, ela é válida em qualquer outro sistema de coordenadas.

Na análise de elementos finitos, o corpo em estudo é aproximado por um conjunto de elementos finitos discretos. Estes elementos são conectados nos pontos nodais de seu contorno. Os deslocamentos medidos em um sistema local de coordenadas  $(x,y,z)$  (escolhido de forma conveniente) para cada elemento são funções dos deslocamentos em  $n$  pontos nodais. Desta forma, para um elemento  $j$ , tem-se:

$$\{U(x,y,z)\}_{(j)} = [N(x,y,z)]_{(j)} \{\hat{U}\} \quad (2.108)$$

Onde  $[N]_{(j)}$  é a matriz de interpolação dos deslocamentos. O índice  $(j)$  denota o elemento de número  $j$  e  $\{\hat{U}\}$  é um vetor com as três componentes de deslocamento globais  $\{U_X, U_Y, U_Z\}_i$  em todos os pontos nodais, incluindo aqueles nos suportes da montagem do elemento.  $\{\hat{U}\}$  é um vetor de dimensão  $3n$ :

$$\{\hat{U}\} = \{U_{x1} \quad U_{y1} \quad U_{z1} \quad U_{x2} \quad U_{y2} \quad U_{z2} \quad \dots \quad U_{xn} \quad U_{yn} \quad U_{zn}\}^T \quad (2.109)$$

De forma mais geral:

$$\{\hat{U}\} = \{U_1 \quad U_2 \quad U_3 \quad \dots \quad U_N\}^T \quad (2.110)$$

Onde  $U_i$  pode corresponder a um deslocamento em qualquer direção e que não precisa estar alinhado com os eixos globais de coordenadas.  $U_i$  também pode corresponder a uma rotação quando o elemento considerado é uma viga, placa ou casca.

Apesar de todos os deslocamentos nodais estarem listados em  $\{\hat{U}\}$ , deve-se notar que, para um dado elemento, apenas os deslocamentos de seus nós afetam a distribuição de deslocamentos e deformações em seu interior. Supondo um campo de deslocamentos tal como na Eq. (2.108), as deformações correspondentes podem ser calculadas:

$$\{\varepsilon(x, y, z)\}_{(j)} = [B(x, y, z)]_{(j)} \{\hat{U}\} \quad (2.111)$$

Onde  $[B]_{(j)}$  é a matriz que relaciona as deformações aos deslocamentos nodais. As linhas de  $[B]_{(j)}$  são obtidas pela diferenciação e combinação apropriada das linhas da matriz  $[N]_{(j)}$ .

As tensões em um elemento finito são relacionadas às suas deformações e às suas tensões iniciais através de:

$$\{\sigma\}_{(j)} = [E]_{(j)} \{\varepsilon\}_{(j)} + \{\sigma\}_{I(j)} \quad (2.112)$$

Onde  $[E]_{(j)}$  é a matriz de elasticidade do elemento  $j$  e  $\{\sigma\}_{I(j)}$  são as tensões iniciais do elemento. A lei do material especificada em  $[E]_{(j)}$  para cada elemento pode ser a de um material isotrópico ou anisotrópico e pode variar de elemento para elemento.

Supondo que os deslocamentos de cada elemento atendem à Eq. (2.108), as equações de equilíbrio correspondentes aos deslocamentos nodais do modelo podem ser obtidas. Primeiramente, a Eq. (2.107) é re-escrita como uma soma de integrais ao longo dos volumes e áreas dos elementos finitos:

$$\sum_j \int_{V(j)} \{\bar{\mathcal{E}}\}_{(j)}^T \{\sigma\}_{(j)} dV_{(j)} = \sum_j \int_{V(j)} \{\bar{U}\}_{(j)}^T \{f\}_{V(j)} dV_{(j)} + \sum_j \int_{A(j)} \{\bar{U}\}_{A(j)}^T \{f\}_{A(j)} dA_{(j)} + \sum_k \{\bar{U}\}_k^T \{f\}_k \quad (2.113)$$

Onde  $j = 1, 2, \dots, n_E$  ( $n_E$  é o número de elementos)

É importante notar que as integrações na Eq. (2.113) são calculadas ao longo do volume e da área do elemento e que, por conveniência, pode-se utilizar um sistema de coordenadas distinto para cada elemento. Esta é a razão básica pela qual as integrais podem ser calculadas de forma muito eficiente no modelo de elementos finitos.

Substituindo as Eq. (2.108) a (2.112) na Eq. (2.113):

$$\{\hat{U}\}^T \left( \sum_j \int_{V(j)} [B]_{(j)}^T [E]_{(j)} [B]_{(j)} dV_{(j)} \right) \{\hat{U}\} = \{\hat{U}\}^T \begin{pmatrix} \left( \sum_j \int_{V(j)} [N]_{(j)}^T \{f\}_{V(j)} dV_{(j)} \right) \\ + \left( \sum_j \int_{A(j)} [N]_{A(j)}^T \{f\}_{A(j)} dA_{(j)} \right) \\ - \left( \sum_j \int_{V(j)} [B]_{(j)}^T \{\sigma\}_I^T dV_{(j)} \right) + \{F\} \end{pmatrix} \quad (2.114)$$

O segundo termo da Eq. (2.114) foi representado em linhas diferentes apenas por questões de espaço.

As matrizes de interpolação de superfície  $[N]_{A(j)}$  são obtidas das matrizes de interpolação de volume  $[N]_{(j)}$  pela substituição das coordenadas da superfície do elemento.  $\{F\}$  é um vetor de forças externas aplicadas sobre os nós do modelo.

Deve-se notar que a  $k$ -ésima componente de  $\{F\}$  é a força nodal concentrada que corresponde ao  $k$ -ésimo componente de deslocamento em  $\{\hat{U}\}$ . Na Eq. (2.114), o vetor global de deslocamentos nodais  $\{\hat{U}\}$  é independente do elemento considerado e, portanto, é colocado em evidência nas somas.

A partir da Eq. (2.114), obtêm-se as equações de equilíbrio correspondentes aos deslocamentos nodais, utilizando-se o teorema de deslocamentos virtuais. As equações obtidas são:

$$[K]\{U\} = \{R\} \quad (2.115)$$

Onde:

$$\{R\} = \{R\}_V + \{R\}_A - \{R\}_I + \{R\}_C \quad (2.116)$$

A matriz  $[K]$  é a matriz de rigidez do modelo:

$$[K] = \sum_j \int_{V(j)} [B]_{(j)}^T [E]_{(j)} [B]_{(j)} dV_{(j)} \quad (2.117)$$

O vetor  $\{R\}_V$  inclui o efeito das forças de corpo do elemento:

$$\{R\}_V = \sum_j \int_{V(j)} [N]_{(j)}^T \{f\}_{V(j)} dV_{(j)} \quad (2.118)$$

O vetor  $\{R\}_A$  inclui o efeito das forças de superfície do elemento:

$$\{R\}_A = \sum_j \int_{A(j)} [N]_{A(j)}^T \{f\}_{A(j)} dA_{(j)} \quad (2.119)$$

O vetor  $\{R\}_I$  inclui o efeito das tensões iniciais:

$$\{R\}_I = \sum_j \int_{V(j)} [B]_{(j)}^T \{\sigma\}_{I(j)} dV_{(j)} \quad (2.120)$$

E o vetor  $\{R\}_C$  inclui o efeito das forças concentradas:  $\{R\}_C = \{F\}$

Nota-se que a soma das integrais de volume do elemento na Eq. (2.117) expressa a adição direta das matrizes de rigidez de cada elemento  $[K]_{(j)}$ , obtendo-se a matriz de rigidez do modelo  $[K]$ . Da mesma forma, o vetor de forças de corpo  $\{R\}_V$  é calculado pela soma das forças de corpo de cada elemento  $\{f\}_{V(j)}$ , assim como para  $\{R\}_A$ ,  $\{R\}_I$  e  $\{R\}_C$ . Portanto, a formulação das equações de equilíbrio, a partir da Eq. (2.114), da maneira indicada acima é chamada de método de rigidez direto.

Na prática, as matrizes de elementos finitos são calculadas de forma compacta, isto é, a ordem das matrizes calculadas é igual ao número de graus de liberdade de cada elemento e a montagem dos elementos é feita associando-se cada grau de liberdade local com o grau de liberdade global correspondente.

A Eq. (2.115) representa a condição de equilíbrio estático do modelo. Nesta consideração, as forças podem variar lentamente com o tempo, o que leva a uma variação dos deslocamentos no tempo.

Se as forças aplicadas variam rapidamente no tempo, torna-se necessário considerar as forças de inércia. Utilizando o princípio de d'Alembert, podem-se incluir os efeitos das forças de inércia como parte das forças de corpo. Supondo que as

acelerações do elemento são aproximadas da mesma forma que os deslocamentos na Eq. (2.108), a contribuição de todas as forças de corpo para o vetor  $\{R\}$  é:

$$\{R\}_V = \sum_j \int_{V(j)} [N]_{(j)}^T (\{f\}_{V(j)} - \rho_{(j)} [N]_{(j)} \{\ddot{U}\}) dV_{(j)} \quad (2.121)$$

Onde  $\{f\}_{V(j)}$  agora não inclui as forças de inércia,  $\{\ddot{U}\}$  lista as acelerações nodais (segunda derivada no tempo de  $\{U\}$ ) e  $\rho_{(j)}$  é a massa específica (densidade) do  $j$ -ésimo elemento. As equações de equilíbrio para este caso se tornam:

$$[M]\{\ddot{U}\} + [K]\{U\} = \{R\} \quad (2.122)$$

Sendo  $\{R\}$  e  $\{U\}$  dependentes do tempo.

$[M]$  é a matriz de massa do modelo, dada por:

$$[M] = \sum_j \int_{V(j)} \rho_{(j)} [N]_{(j)}^T [N]_{(j)} dV_{(j)} \quad (2.123)$$

Na medição da resposta de estruturas reais, observa-se que uma certa quantia de energia é dissipada durante a vibração. Na análise vibracional, normalmente leva-se em conta esta perda pela introdução de forças de amortecimento que dependem da velocidade. Introduzindo o efeito das forças de amortecimento nas forças de corpo, obtém-se:

$$\{R\}_V = \sum_j \int_{V(j)} [N]_{(j)}^T (\{f\}_{V(j)} - \rho_{(j)} [N]_{(j)} \{\ddot{U}\} - c_{(j)} [N]_{(j)} \{\dot{U}\}) dV_{(j)} \quad (2.124)$$

Onde  $\{f\}_{V(j)}$  agora não inclui as forças de inércia nem as forças de amortecimento,  $\{\dot{U}\}$  é o vetor de velocidades nodais (primeira derivada no tempo de  $\{U\}$ ) e  $c_{(j)}$  é o parâmetro de amortecimento do  $j$ -ésimo elemento. As equações de equilíbrio se tornam:

$$[M]\{\ddot{U}\} + [C]\{\dot{U}\} + [K]\{U\} = \{R\} \quad (2.125)$$

Onde  $[C]$  é a matriz de amortecimento do modelo, dada por:

$$[C] = \sum_j \int_{V(j)} c_{(j)} [N]_{(j)}^T [N]_{(j)} dV_{(j)} \quad (2.126)$$

Na prática, é difícil (mas não impossível) determinarem-se os parâmetros de amortecimento para um modelo de elementos finitos. Isto ocorre particularmente devido à dependência destes parâmetros em relação à freqüência. Por esta razão, a matriz  $[C]$  não é, em geral, montada através das matrizes de amortecimento de cada elemento e sim

construída a partir das matrizes de massa e rigidez do modelo (amortecimento proporcional), com base em dados experimentais.

Barkanov et al. (2003) aborda diferentes tipos de amortecimento, inclusive com mecanismos visco-elásticos, aplicados a modelos em elementos finitos.

### 2.2.2- Imposição de Condições de Contorno

Conforme Bathe (1982), ao se utilizar o método de elementos finitos baseado em deslocamentos, as condições de contorno de forças são levadas em conta no cálculo do vetor de forças nodais aplicado externamente. O vetor  $\{R\}_C$  agrupa as cargas concentradas incluindo as reações e o vetor  $\{R\}_A$  contém o efeito dos carregamentos e reações distribuídas.

Considerando as seguintes equações de equilíbrio para um modelo de elementos finitos:

$$\begin{bmatrix} [M]_{aa} & [M]_{ab} \\ [M]_{ba} & [M]_{bb} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\ddot{U}\}_a \\ \{\ddot{U}\}_b \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [K]_{aa} & [K]_{ab} \\ [K]_{ba} & [K]_{bb} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{U\}_a \\ \{U\}_b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{R\}_a \\ \{R\}_b \end{Bmatrix} \quad (2.127)$$

Onde  $\{U\}_a$  contém os deslocamentos desconhecidos e  $\{U\}_b$  os deslocamentos conhecidos ou prescritos.

Resolvendo para  $\{U\}_a$ , obtém-se:

$$[M]_{aa} \{\ddot{U}\}_a + [K]_{aa} \{U\}_a = \{R\}_a - [K]_{ab} \{U\}_b - [M]_{ab} \{\ddot{U}\}_b \quad (2.128)$$

Portanto, na solução de  $\{U\}_a$ , apenas as matrizes de rigidez e massa correspondentes aos graus de liberdade  $\{U\}_a$  da montagem completa precisam ser calculadas, mas o vetor  $\{R\}_a$  deve ser modificado para incluir os efeitos dos deslocamentos impostos não-nulos. Uma vez que os deslocamentos  $\{U\}_a$  tenham sido calculados, as forças correspondentes aos deslocamentos  $\{U\}_b$  podem ser obtidas de:

$$\{R\}_b = [M]_{ba} \{\ddot{U}\}_a + [M]_{bb} \{\ddot{U}\}_b + [K]_{ba} \{U\}_a + [K]_{bb} \{U\}_b \quad (2.129)$$

As relações nas Eq. (2.128) e (2.129) representam um procedimento formal para o cálculo dos deslocamentos  $\{U\}_a$  e reações  $\{R\}_b$ , quando os deslocamentos  $\{U\}_b$  são conhecidos. Ao se utilizar a Eq. (2.127), levou-se em conta que todos os deslocamentos prescritos estavam incluídos no vetor de deslocamentos global. Se este não for o caso, é necessário identificar todos os deslocamentos prescritos que não correspondam aos

graus de liberdade do modelo e transformar as equações de equilíbrio para que estas correspondam aos deslocamentos prescritos. Então:

$$\{U\} = [T]\{\tilde{U}\} \quad (2.130)$$

Onde  $\{\tilde{U}\}$  é o vetor que contém os graus de liberdade nas direções requeridas. A matriz de transformação  $[T]$  é uma matriz identidade que foi alterada pelos co-senos diretores das componentes de  $\{\tilde{U}\}$  medidas nas direções originais dos deslocamentos. Usando a Eq. (2.130) na Eq. (2.127):

$$[\tilde{M}]\ddot{\{\tilde{U}\}} + [\tilde{K}]\{\tilde{U}\} = \{\tilde{R}\} \quad (2.131)$$

Onde:

$$\begin{aligned} [\tilde{M}] &= [T]^T[M][T] \\ [\tilde{K}] &= [T]^T[K][T] \\ \{\tilde{R}\} &= [T]^T\{R\} \end{aligned} \quad (2.132)$$

Deve-se notar que as multiplicações matriciais na Eq. (2.132) envolvem apenas mudanças nas colunas de  $[M]$ ,  $[K]$  e  $\{R\}$  que são realmente afetadas e estas transformações são equivalentes aos cálculos realizados na matriz de um único elemento. Na prática, a transformação é calculada de forma mais eficiente no nível dos elementos, antes de adicionar as matrizes dos elementos à matriz do modelo.

Em uma abordagem alternativa, os deslocamentos requeridos podem também ser impostos pela adição de equações de restrição às equações de equilíbrio. As equações de restrição expressam as condições dos deslocamentos impostos. Considerando que o deslocamento deva ser especificado no  $i$ -ésimo grau de liberdade, tem-se a equação de restrição:

$$kU_i = kb \quad (2.133)$$

Esta equação é adicionada às equações de equilíbrio, onde  $k \gg k_{ii}$ . Portanto, a solução das equações de equilíbrio modificadas devem levar a  $U_i = b$ .

Este procedimento pode ser interpretado fisicamente como a adição de uma mola de grande rigidez ao  $i$ -ésimo grau de liberdade e a especificação de uma força que

produza neste grau de liberdade o deslocamento prescrito  $b$ . Matematicamente, o procedimento corresponde à aplicação de um método de penalidade.

Além das condições de deslocamentos nodais especificados, alguns deslocamentos nodais podem também estar sujeitos a condições de restrições. Uma equação de restrição típica é:

$$U_i = \sum_{j=1}^{r_i} \mu_{qj} U_{qj} \quad (2.134)$$

Onde  $U_i$  é um deslocamento nodal dependente e  $U_q$  são  $r_i$  deslocamentos independentes. Utilizando todas as equações de restrição da forma de (2.134) e reconhecendo que estas restrições devem ser verdadeiras na aplicação do princípio do trabalho virtual tanto para os deslocamentos nodais reais quanto para os virtuais, a imposição de restrições corresponde a uma transformação da forma das Eq. (2.131) e (2.132), onde  $[T]$  é agora uma matriz retangular e  $\{\tilde{U}\}$  contém todos os graus de liberdade independentes. Esta transformação corresponde a somar  $\mu_{qj}$  vezes a  $i$ -ésima coluna e linha à  $q$ -ésima coluna e linha, para  $j = 1, 2, \dots, r_i$  e todos os  $i$  considerados. Na implementação real, esta transformação é processada de forma mais eficiente no nível dos elementos durante o processo de montagem.

Finalmente, deve-se notar que combinações das condições de contorno mencionadas anteriormente são possíveis. Por exemplo, um deslocamento independente pode corresponder a um deslocamento imposto que não esteja nas coordenadas globais.

### 2.2.3- Funções de Interpolação

O método de elementos finitos utiliza um número limitado de GDLs em cada elemento. Os resultados das partes do elemento que não correspondem aos GDLs nodais são obtidos através de interpolação. Isto é feito a partir de um operador linear  $[N]$  que multiplica os GDLs  $U_i$ . Este operador é a matriz de interpolação de deslocamentos, que serve de base para a formulação de elementos finitos.

#### 2.2.3.1- Grau de Continuidade

Segundo Cook et al. (1989), uma função qualquer apresenta um grau de continuidade  $C^m$  se todas as suas derivadas até a  $m$ -ésima ordem forem funções

contínuas. Em geral, para que uma malha de elementos finitos possua continuidade de grau  $m$ , é necessário que os elementos apresentem GDLs de ordem  $m$ .

### 2.2.3.2- Funções de Interpolação para Elementos $C^0$

Um elemento  $C^0$  possui continuidade do campo de deslocamentos, mas não de todas as primeiras derivadas deste. Portanto, uma malha de elementos  $C^0$  apresenta saltos nos valores das primeiras derivadas de um elemento para outro.

As fórmulas de interpolação levam às matrizes  $[N]$ , a partir das quais os elementos finitos podem ser formulados.

Um campo de deslocamentos qualquer é interpolado a partir dos  $n$  graus de liberdade apresentados pelo elemento:

$$U = \sum_{i=1}^n N_i U_i \quad (2.135)$$

Onde os  $N_i$  são funções das coordenadas. Uma função  $N_i$  define a distribuição de  $U$  ao longo do elemento, quando o  $i$ -ésimo GDL é igual a um e os outros são iguais a zero. Para um elemento unidimensional com dois nós, pode-se realizar uma interpolação linear. As funções  $N_1$  e  $N_2$  deste elemento são dadas por:

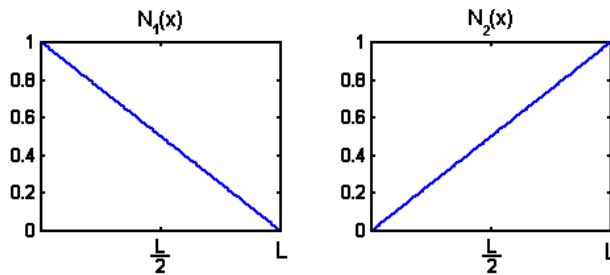


Figura 2.3 – Funções de interpolação  $C^0$  para elementos unidimensionais.

Onde:

$$\begin{aligned} N_1(x) &= 1 - \frac{x}{L} \\ N_2(x) &= \frac{x}{L} \end{aligned} \quad \text{e} \quad [N] = [N_1 \quad N_2] \quad (2.136)$$

As seguintes características são válidas para todos os polinômios de interpolação de grau  $C^0$ :

- Todas as funções  $N_i$  e a própria função  $U$  são polinômios de mesmo grau;

- Para qualquer função de interpolação  $N_i$ ,  $N_i = 1$  quando  $x = x_i$  e  $N_i = 0$  quando  $x = x_j$ ,  $j \neq i$ ;
- A soma das funções  $C^0$  é igual a um, ou seja:  $1 = \sum_{i=1}^n N_i$ .

### 2.2.3.3- Funções de Interpolação para Elementos $C^1$

Um elemento  $C^1$  apresenta continuidade do campo de deslocamentos e de sua primeira derivada. As derivadas segundas, por sua vez, não são contínuas.

Para um elemento unidimensional com dois nós, supondo rotações pequenas, pode-se realizar uma interpolação cúbica. As funções  $N_1, N_2, N_3$  e  $N_4$  deste elemento são dadas por:

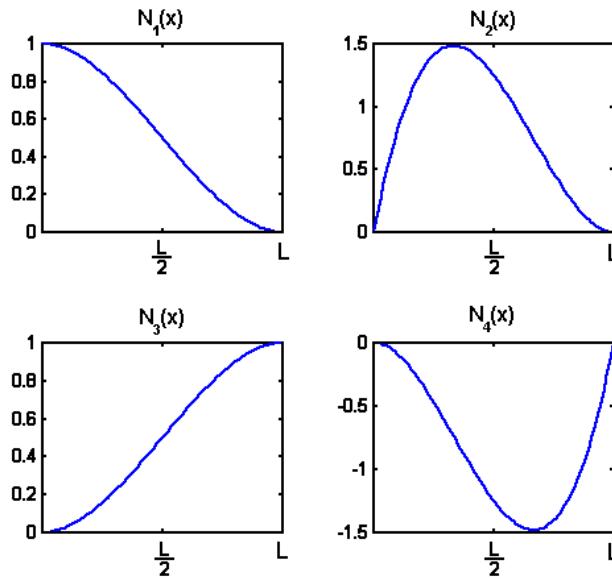


Figura 2.4 – Funções de interpolação  $C^1$  para elementos unidimensionais.

Onde:

$$\begin{aligned}
 N_1(x) &= 1 - \frac{3}{L^2}x^2 + \frac{2}{L^3}x^3 \\
 N_2(x) &= x - \frac{2}{L}x^2 + \frac{1}{L^2}x^3 \\
 N_3(x) &= \frac{3}{L^2}x^2 - \frac{2}{L^3}x^3 \quad \text{e} \quad [N] = [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4] \quad (2.137) \\
 N_4(x) &= -\frac{1}{L}x^2 + \frac{1}{L^2}x^3
 \end{aligned}$$

As características dos polinômios  $C^0$  também são válidas para os de grau  $C^1$ , com a diferença que apenas os polinômios relacionados aos GDL de translação possuem soma igual a um.

### 2.2.4- Análises e Soluções

De acordo com Bathe (1982), a eficiência de uma análise por elementos finitos depende, em grande parte, dos procedimentos numéricos utilizados na solução das equações de equilíbrio do sistema. A precisão dos resultados de uma análise é, em geral, tanto melhor quanto mais refinada for a malha de elementos finitos. Por esta razão, há uma tendência em utilizar um número cada vez maior de elementos para se obter uma melhor aproximação da estrutura real correspondente.

O custo de uma análise e sua aplicabilidade prática dependem consideravelmente dos algoritmos disponíveis para a solução do problema. Durante os primeiros anos nos quais o método de elementos finitos foi utilizado, sistemas da ordem de cem equações eram considerados de grande ordem. Atualmente, sistemas da ordem de cem mil equações são resolvidos sem grandes problemas. Isto se deve não apenas ao aumento da capacidade de processamento dos microcomputadores, mas também à otimização dos diversos algoritmos de solução.

O tempo para a solução das equações de equilíbrio em uma análise estática pode representar uma grande porcentagem do tempo total de solução. O tempo gasto depende do tipo e número de elementos utilizados e da topologia da malha de elementos finitos. Nas análises dinâmicas, esta porcentagem pode ser ainda maior. Portanto, técnicas não-apropriadas de solução podem levar a um custo computacional desnecessário.

Além do custo computacional, é importante notar que alguns algoritmos não apresentam estabilidade numérica em certas condições. Portanto, procedimentos numéricos não-apropriados podem inviabilizar certos tipos de análise.

#### 2.2.4.1- Solução das Equações de Equilíbrio em Análises Estáticas

Essencialmente, há duas classes de métodos de solução de um sistema de equações estáticas: técnicas de solução direta e técnicas de solução iterativa. Nas soluções diretas, as equações são resolvidas através de um número pré-determinado de passos e operações. Nas soluções iterativas, no entanto, não se conhece o número exato

de operações. Cada esquema de solução apresenta suas vantagens, mas na maioria das aplicações os métodos diretos são os mais eficientes.

#### **2.2.4.1.1- Soluções com Algoritmos Baseados na Eliminação de Gauss**

As técnicas mais eficientes de solução direta atualmente em uso são, basicamente, aplicações da eliminação de Gauss, proposta há mais de um século. O procedimento básico de Gauss pode ser aplicado na solução de praticamente todos os sistemas de equações lineares simultâneas. No entanto, sua eficiência nas análises de elementos finitos depende de propriedades específicas apresentadas pela matriz de rigidez: é simétrica, positiva definida e possui banda.

O procedimento básico da solução é subtrair das equações  $i+1, i+2, \dots, N$  múltiplos da equação  $i$ , durante o  $i$ -ésimo passo. Onde:  $i = 1, 2, \dots, N-1$ . Desta forma, a matriz de coeficientes  $[K]$  é reduzida a uma matriz triangular superior, ou seja, todos os elementos abaixo da diagonal principal ficam iguais a zero. Começando pela última equação, é possível resolver para as variáveis  $U_N, U_{N-1}, \dots, U_1$ , utilizando um procedimento chamado de substituição inversa.

É importante notar que, durante o  $i$ -ésimo passo, os termos  $k_{a,b}$  com índices  $a = i, i+1, \dots, N$  e  $b = i, i+1, \dots, N$  formam uma sub-matriz simétrica de ordem  $N-i$ . Portanto, os elementos localizados acima da diagonal principal e os termos da própria diagonal principal contém todos os termos necessários da matriz em qualquer instante da solução. Esta propriedade é utilizada na prática para reduzir o número de termos armazenados.

Outra observação importante é que, no  $i$ -ésimo passo, o  $i$ -ésimo termo da diagonal principal deve ser diferente de zero. Caso contrário, ocorre uma divisão por zero. Felizmente, na análise de elementos finitos baseados em deslocamentos, todos os elementos da diagonal da matriz de coeficientes são positivos, em qualquer passo da solução. Esta é outra propriedade que torna a eliminação de Gauss um procedimento bastante eficiente.

A eliminação de Gauss não precisa, no entanto, ser realizada em ordem crescente. Qualquer ordem é válida, o que torna possível a solução de sistemas com termos nulos

na diagonal principal, simplesmente escolhendo-se adequadamente a ordem na qual a eliminação é realizada.

### A Eliminação de Gauss

O procedimento básico da eliminação de Gauss é reduzir a matriz de coeficientes para uma matriz triangular superior, a partir da qual os deslocamentos desconhecidos  $\{U\}$  podem ser calculados por substituição inversa. As operações realizadas na eliminação de Gauss podem ser escritas como:

$$[L]_{N-1}^{-1} \cdots [L]_2^{-1} [L]_1^{-1} [K] = [S] \quad (2.138)$$

Onde  $[S]$  é a matriz triangular superior final e:

$$[L]_i^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ \ddots & & & & \\ & 1 & & & \\ & -l_{i+1,i} & \ddots & & \\ & -l_{i+2,i} & & \ddots & \\ \vdots & & & & \ddots \\ & -l_{N,i} & & & 1 \end{bmatrix} \quad (2.139)$$

$$l_{i+j,i} = \frac{k_{i+j,i}^{(i)}}{k_{i,i}^{(i)}} \quad (2.140)$$

Os elementos  $l_{i+j,i}$  são os fatores multiplicantes de Gauss e o superescrito  $(i)$  indica que um elemento da matriz  $[L]_{i-1}^{-1} \cdots [L]_2^{-1} [L]_1^{-1} [K]$  é usada.

A matriz  $[L]_i$  é obtida simplesmente pela troca de sinais dos elementos que estão fora da diagonal principal. Desta forma:

$$[K] = [L]_1 [L]_2 \cdots [L]_{n-1} [S] \quad (2.141)$$

Onde:

$$[L]_i = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & l_{i+1,i} & \ddots & \\ & & l_{i+2,i} & & \ddots \\ & & \vdots & & \ddots \\ & & l_{N,i} & & 1 \end{bmatrix} \quad (2.142)$$

Portanto:

$$[K] = [L][S] \quad (2.143)$$

Onde  $[L] = [L]_1[L]_2 \cdots [L]_{n-1}$ , ou:

$$[L] = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ l_{2,1} & 1 & & & & \\ l_{3,1} & l_{3,2} & \ddots & & & \\ l_{4,1} & l_{4,2} & \dots & \ddots & & \\ \vdots & \vdots & \dots & \dots & 1 & \\ l_{N,1} & l_{N,2} & \dots & \dots & l_{N,N-1} & 1 \end{bmatrix} \quad (2.144)$$

Como  $[S]$  é uma matriz triangular superior e os elementos da diagonal são os pivôs na eliminação de Gauss, pode-se escrever que  $[S] = [D]\tilde{[S]}$ , onde  $[D]$  é uma matriz diagonal que armazena os elementos da diagonal principal de  $[S]$ , isto é,  $d_{i,i} = s_{i,i}$ . Substituindo para  $[S]$  na Eq. (2.143) e notando que  $[K]$  é simétrica e a decomposição é única, obtém-se:  $\tilde{[S]} = [L]^T$ . Portanto:

$$[K] = [L][D][L]^T \quad (2.145)$$

Esta decomposição da matriz  $[K]$  pode ser usada de forma eficiente na obtenção da solução das equações  $[K]\{U\} = \{R\}$  através dos seguintes passos:

$$[L]\{V\} = \{R\} \quad (2.146)$$

$$[D][L]^T\{U\} = \{V\} \quad (2.147)$$

Na implementação do algoritmo, o vetor  $\{V\}$  é freqüentemente calculado ao mesmo tempo em que as matrizes  $L_i^{-1}$  são estabelecidas. Na prática, as multiplicações

matriciais usadas para obter  $[L]$  e  $\{V\}$  não são formalmente calculadas, mas estabelecidas diretamente a partir de modificações em  $[K]$  e  $\{R\}$ .

### *Implementação Computacional da Eliminação de Gauss*

Na implementação computacional, procura-se minimizar o tempo gasto para a solução. Além disto, é necessário otimizar a utilização da memória, de forma a não ser necessário o acesso a disco durante a solução.

A vantagem da análise por elementos finitos está no fato de que a matriz de rigidez dos elementos não é apenas simétrica, como também uma matriz-banda. Isto é,  $k_{i,j} = 0$  para  $j > i + m_k$ , onde  $m_k$  é a meia largura de banda do sistema. Como na análise por elementos finitos todos os elementos não-nulos estão dispostos em uma faixa ao longo da diagonal principal, o número total de operações é reduzido de forma significativa. No entanto, esta propriedade depende da numeração dos nós do modelo, que deve ser escolhida de forma a se minimizar a largura de banda.

Apesar da eliminação de Gauss ser realizada em linhas, a decomposição  $[L][D][L]^T$  da matriz de rigidez  $[K]$  pode ser obtida de forma eficiente considerando-se uma coluna de cada vez. Isto se deve ao fato de que os elementos finais das matrizes  $[D]$  e  $[L]$  são calculados por colunas. Usando  $d_{1,1} = k_{1,1}$ , o algoritmo para o cálculo dos elementos  $l_{i,j}$  e  $d_{j,j}$  na  $j$ -ésima coluna é:

$$\begin{aligned} g_{mj,j} &= k_{mj,j} \\ g_{i,j} &= k_{i,j} - \sum_{r=mj}^{i-1} l_{r,i} g_{r,j} \\ i &= m_j + 1, \dots, j-1 \end{aligned} \quad (2.148)$$

Para  $j = 2, \dots, N$ , onde  $m_j$  é o número da linha do primeiro termo não-nulo da  $j$ -ésima coluna. Os elementos  $g_{i,j}$  são termos intermediários.

Bathe (1982) afirma que o somatório na Eq. (2.147) deve ser realizado de  $m_m$  a  $i-1$ , onde  $m_m$  é o máximo entre  $m_j$  e  $m_i$ . Sendo que  $m_i$ , para  $i = 1, \dots, N$ , define a *skyline* da matriz. No entanto, isto não é necessário, pois nunca existirá um termo não-nulo que esteja fora da largura de banda da matriz, ou seja, não existirá  $m_j < m_i$ .

Portanto,  $m_m$  é sempre igual a  $m_j$ . É claro que, durante a procura pelo valor de  $m_j$ , deve-se utilizar o valor de  $m_i$  como o valor mínimo a procurar.

Os termos intermediários são então utilizados para calcular os termos  $l_{i,j}$  e  $d_{j,j}$ :

$$\begin{aligned} l_{i,j} &= \frac{g_{i,j}}{d_{i,i}} \quad i = m_j, \dots, j-1 \\ d_{j,j} &= k_{j,j} - \sum_{r=m_j}^{j-1} l_{r,j} g_{r,j} \end{aligned} \quad (2.149)$$

Nota-se que as somas nas Eq. (2.148) e (2.149) não envolvem multiplicação por termos nulos que se encontram fora da banda da matriz. Além disto, os termos dados por  $l_{i,j}$  são elementos da matriz  $[L]^T$  e não da matriz  $[L]$ .

Bathe (1982) afirma que, por questões de armazenamento, o termo  $l_{i,j}$  calculado na Eq. (2.149) pode substituir imediatamente o termo  $g_{i,j}$ . No entanto, esta substituição só pode ser realizada após o cálculo de  $d_{j,j}$ . Caso contrário, o valor de  $d_{j,j}$  seria calculado de forma incorreta.

O vetor  $\{R\}$  pode ser reduzido ao vetor  $\{V\}$  durante o cálculo dos fatores  $[L]$  e  $[D]$ . Partindo de  $V_1 = R_1$  e calculando para  $i = 2, \dots, N$ :

$$V_i = R_i - \sum_{r=m_i}^{i-1} l_{r,i} V_r \quad (2.150)$$

Determina-se então o vetor  $\{U\}$  através de substituição inversa. É utilizada uma variável intermediária  $\{\bar{V}\}$ , tal que  $\{\bar{V}\} = [D]^{-1} \{V\}$ . Utilizando o fato que  $\{\bar{V}\}^{(n)} = \{\bar{V}\}$ , tem-se que  $\{U\}_n = \{\bar{V}\}_n^{(n)}$ . Calculando para  $i = N, \dots, 2$ :

$$\begin{aligned} \bar{V}_r^{(i-1)} &= \bar{V}_r^{(i)} - l_{r,i} U_i \quad r = m_i, \dots, i-1 \\ U_{i-1} &= \bar{V}_{i-1}^{(i-1)} \end{aligned} \quad (2.151)$$

Onde o índice (i-1) indica que o elemento é calculado no mesmo passo que o elemento  $U_{i-1}$ .

### *Fatorização de Cholesky*

Além da decomposição  $[L][D][L]^T$ , há vários outros métodos baseados no procedimento da eliminação de Gauss. Na fatorização de Cholesky, a matriz de rigidez é decomposta da seguinte maneira:

$$[K] = [\tilde{L}][\tilde{L}]^T \quad (2.152)$$

Onde:

$$[\tilde{L}] = [L][D]^{\frac{1}{2}} \quad (2.153)$$

Portanto, os fatores de Cholesky poderiam ser calculados a partir dos fatores  $[L]$  e  $[D]$ . No entanto, existem algoritmos para o cálculo direto dos elementos de  $[\tilde{L}]$ .

A fatorização de Cholesky é válida apenas para a solução de sistemas PD (positivos definidos), para os quais todos os elementos diagonais  $d_{i,i}$  são positivos. Do contrário, seria necessário utilizar aritmética complexa. A decomposição  $[L][D][L]^T$ , por outro lado, se aplica efetivamente não apenas a sistemas PD, como também a sistemas indefinidos.

#### **2.2.4.1.2- Soluções Diretas com Matrizes Ortogonais**

Na análise prática de elementos finitos com esquemas de solução direta, a eliminação de Gauss é quase sempre utilizada de uma forma ou de outra. Isto se deve à sua estabilidade numérica e ao baixo custo de solução. No entanto, há outras técnicas de solução direta.

A função básica de cada matriz elementar  $[L]_{j,i}^{-1}$  é reduzir um elemento da matriz de rigidez a zero. Mas para que este objetivo seja cumprido, matrizes ortogonais podem ser utilizadas no lugar das matrizes elementares da eliminação de Gauss.

### *A Fatorização de Givens*

Nesta fatorização, utilizam-se matrizes de rotação que reduzem  $[K]$  a uma matriz triangular superior. Tem-se:

$$[P]_G^T [K] = [S]_G \quad (2.154)$$

Onde:

$$[P]_G^T = [P]_{n,n-1}^T \cdots ([P]_{n,2}^T [P]_{n-1,2}^T \cdots [P]_{3,2}^T) ([P]_{n,1}^T [P]_{n-1,1}^T \cdots [P]_{2,1}^T) \quad (2.155)$$

E  $[S]_G$  é uma matriz triangular superior. O subscrito  $G$  é utilizado para diferenciar a matriz  $[S]_G$  da matriz  $[S]$  utilizada na eliminação de Gauss.

A solução do sistema de equações estáticas é obtida pela decomposição da matriz de rigidez estabelecida na Eq. (2.154):

$$[K] = [P]_G [S]_G \quad (2.156)$$

Portanto, de forma análoga à eliminação de Gauss, é necessário reduzir o vetor de carregamentos  $\{R\}$ :

$$[P]_G \{V\} = \{R\} \quad (2.157)$$

Ou:

$$\{V\} = [P]_G^T \{R\} \quad (2.158)$$

O vetor-solução  $\{U\}$  é obtido por substituição inversa:

$$[S]_G \{U\} = \{V\} \quad (2.159)$$

Um aspecto importante é o cálculo das matrizes de rotação  $[P]_{j,i}^T$ , que devem reduzir a zero os elementos nas posições  $(j,i)$  tal que  $j > i$ , da matriz de coeficientes. Uma matriz de rotação típica é dada por:

$$[P]_{j,i}^T = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ \ddots & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & \cos \theta & & \sin \theta & \\ & & & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \\ & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & 1 \end{bmatrix} \quad (2.160)$$

Onde  $\theta$  é escolhido de forma a zerar o elemento  $(j,i)$ .

A ordem na qual os elementos da matriz de coeficientes são zerados é dada por:

$$\begin{aligned} i &= 1, \quad j = 2, 3, \dots, N \\ i &= 2, \quad j = 3, 4, \dots, N \\ &\vdots \\ i &= N-1, \quad j = N \end{aligned} \quad (2.161)$$

Considerando a construção da matriz  $[P]_{2,1}^T$ , que é típica, calcula-se um produto matricial de forma a reduzir o termo (2,1) da matriz de rigidez original a zero:

$$[\tilde{K}] = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & & & \\ -\sin \theta & \cos \theta & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & \dots \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & \\ \vdots & & & \end{bmatrix} \quad (2.162)$$

Ou:

$$[\tilde{K}] = \begin{bmatrix} \tilde{k}_{11} & \tilde{k}_{12} & \tilde{k}_{13} & \dots \\ 0 & \tilde{k}_{22} & \tilde{k}_{23} & \\ \tilde{k}_{31} & \tilde{k}_{32} & \tilde{k}_{33} & \\ \vdots & & & \end{bmatrix} \quad (2.163)$$

O ângulo  $\theta$  é obtido da seguinte equação:

$$-k_{1,1} \sin \theta + k_{2,1} \cos \theta = 0 \quad (2.164)$$

Portanto:

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{k_{1,1}}{\sqrt{k_{1,1}^2 + k_{2,1}^2}} \\ \sin \theta &= \frac{k_{2,1}}{\sqrt{k_{1,1}^2 + k_{2,1}^2}} \end{aligned} \quad (2.165)$$

Se  $k_{1,1}^2 + k_{2,1}^2 = 0$ , nenhuma transformação é necessária. Usa-se então:

$$\begin{aligned} \cos \theta &= 1 \\ \sin \theta &= 0 \end{aligned} \quad (2.166)$$

Deve-se notar que não é necessário que o termo  $k_{1,1}$  seja diferente de zero, como na eliminação de Gauss.

A pré-multiplicação da matriz de rigidez  $[K]$  por  $[P]_{2,1}^T$  corresponde a fazer uma combinação linear entre as duas primeiras linhas de  $[K]$ , ou seja:

$$\left. \begin{array}{l} \tilde{k}_{1,j} = k_{1,j} \cos \theta + k_{2,j} \sin \theta \\ \tilde{k}_{1,j} = -k_{1,j} \sin \theta + k_{2,j} \cos \theta \\ \tilde{k}_{i,j} = k_{i,j}, \quad i = 3, \dots, N \end{array} \right\} j = 1, \dots, N \quad (2.167)$$

A eliminação dos outros termos contidos abaixo da diagonal principal é feita de maneira análoga.

### *A Fatorização de Householder*

Na fatorização de Householder, utilizam-se matrizes de reflexão:

$$[P]_H^T [K] = [S]_H \quad (2.168)$$

Onde:

$$[P]_H^T = [P]_{N-1}^T \cdots [P]_2^T [P]_1^T \quad (2.169)$$

E  $[S]_H$  é uma matriz triangular superior.

As matrizes  $[P]_i^t$ ,  $i = 1, \dots, N-1$  são matrizes de reflexão construídas de tal forma que  $[P]_i^t$  reduz a zero os elementos sub-diagonais na coluna  $i$  da matriz de rigidez atual. Ou seja:

$$[P]_i^t = \begin{bmatrix} [I]_{i-1} & \\ & [\tilde{P}]_i \end{bmatrix} \quad (2.170)$$

Onde  $[I]_{i-1}$  é a matriz identidade de ordem  $i-1$ , e:

$$[\tilde{P}]_i = [I] - \theta \{w\}_i \{w\}_i^T \quad (2.171)$$

$$\theta = \frac{2}{\{w\}_i^T \{w\}_i} \quad (2.172)$$

Sendo que  $\{w\}_i$  é um vetor de ordem  $N-i+1$ . Como  $[\tilde{P}]_i$  é uma matriz simétrica,  $[P]_i$  também o é.

Após o cálculo da fatorização da matriz  $[K]$ , na qual  $[K] = [P]_H [S]_H$ , a solução das equações de equilíbrio é dada por:

$$\begin{aligned}[P]_H \{V\} &= \{R\} \\ \{V\} &= [P]_H^T \{R\} \\ [S]_H \{U\} &= \{V\}\end{aligned}\tag{2.173}$$

Considerando a construção da matriz  $[P]_1$ , que é típica, tem-se:

$$[\tilde{K}] = [P]_1 [K]\tag{2.174}$$

Particionando a matriz  $[K]$  da seguinte maneira:

$$[K] = [\{k\}_1 \quad [K]_{11}]\tag{2.175}$$

Onde  $\{k\}_1$  é a primeira coluna da matriz  $[K]$ .

Tem-se também:

$$[P]_1 = [I] - \theta \{w\}_1 \{w\}_1^T\tag{2.176}$$

Deseja-se zerar os termos que estão abaixo da diagonal principal na primeira coluna. Portanto,  $[P]_1 \{k\}_1$  deve ser um vetor que possui apenas o primeiro termo diferente de zero. Esta condição é atendida através da escolha adequada do vetor  $\{w\}_1$ :

$$([I] - \theta \{w\}_1 \{w\}_1^T) \{k\}_1 = \pm \|\{k\}_1\| \{e\}_1\tag{2.177}$$

Onde  $\{e\}_1$  é um vetor unitário de dimensão  $N$ .

A Eq. (2.177) corresponde à reflexão do vetor  $\{k\}_1$  no espaço  $N$ -dimensional de tal forma que apenas a componente correspondente à direção 1 seja diferente de zero. O vetor refletido possui o mesmo comprimento (norma euclidiana) do vetor  $\{k\}_1$ .

A partir da Eq. (2.177), obtém-se:

$$\{k\}_1 - \bar{\theta} \{w\}_1 = \pm \|\{k\}_1\| \{e\}_1\tag{2.178}$$

Onde  $\bar{\theta} = \theta \{w\}_1^T \{k\}_1$ , que é igual a uma constante.

Como  $\{w\}_1$  determina apenas a direção da reflexão, o vetor pode ter um comprimento arbitrário. Por conveniência, faz-se  $\bar{\theta} = 1$ , obtendo-se:

$$\{w\}_1 = \{k\}_1 + sign(\{k\}_{1,1}) \|\{k\}_1\| \{e\}_1\tag{2.179}$$

Onde o sinal é escolhido de tal forma que o valor absoluto do primeiro elemento em  $\{w\}_1$  seja igual ao valor absoluto de  $k_{1,1}$  adicionado de  $\|\{w\}_1\|$ .

Nota-se que a matriz  $[P]_1$  não precisa ser calculada explicitamente. Faz-se então:

$$\{v\}_1^T = \{w\}_1^T [K] \quad (2.180)$$

$$[\tilde{K}] = [K] - \theta(\{w\}_1 \{v\}_1^T) \quad (2.181)$$

As matrizes  $[P]_2, \dots, [P]_{N-1}$  são obtidas de maneira análoga a  $[P]_1$ .

#### 2.2.4.2- Solução das Equações de Equilíbrio em Análises Dinâmicas

Matematicamente, a equação dinâmica de equilíbrio representa um sistema de equações diferenciais lineares de segunda ordem. Em princípio, o problema pode ser resolvido através de procedimentos padrões de solução de equações diferenciais com coeficientes constantes. No entanto, estes procedimentos podem ter custo muito elevado para matrizes de grande ordem, a não ser que se tire vantagem das características especiais das matrizes de coeficientes  $[M]$ ,  $[C]$  e  $[K]$ . Na análise prática de elementos finitos, o interesse cai sobre um número limitado de métodos eficientes.

Os procedimentos de solução podem ser divididos em duas classes: integração direta e superposição modal. Apesar de parecerem muito diferentes à primeira vista, são procedimentos muito semelhantes. A escolha de um método ou outro é determinada principalmente pela eficiência numérica.

##### 2.2.4.2.1- Métodos de Integração Direta

Na integração direta, as equações de equilíbrio são integradas ao longo do tempo utilizando-se um procedimento passo-a-passo. O termo “direta” significa que as equações de equilíbrio não recebem qualquer transformação anterior à integração.

Há duas idéias por trás dos métodos de integração direta. A primeira é que as equações de equilíbrio são calculadas apenas em intervalos discretos de tempo  $\Delta t$ . A segunda é que a forma (linear, quadrática, etc.) na qual os deslocamentos, velocidades e acelerações variam entre os intervalos discretos é previamente estipulada.

Supõe-se que os deslocamentos, velocidades e acelerações iniciais são conhecidos. Estas grandezas são denotadas, respectivamente, por:  ${}^0\{U\}$ ,  ${}^0\{\dot{U}\}$  e  ${}^0\{\ddot{U}\}$ .

Supõe-se ainda que as equações de equilíbrio devem ser resolvidas do instante 0 ao instante  $T$ . O intervalo de tempo da solução é dividido em  $n$  intervalos igualmente espaçados  $\Delta t$ , tal que  $\Delta t = T/n$ .

Os métodos de integração direta estabelecem soluções aproximadas nos instantes  $0, \Delta t, 2\Delta t, \dots, t, t+\Delta t, \dots, T$ . Como o algoritmo calcula a solução do instante de tempo seguinte a partir das soluções dos instantes anteriores, consideram-se conhecidas as soluções nos instantes  $0, \Delta t, 2\Delta t, \dots, t$  e calcula-se a solução no instante  $t + \Delta t$ .

Os métodos de integração direta podem ser separados em métodos explícitos e implícitos. Os métodos explícitos são aqueles em que uma solução  $^{t+\Delta t}\{U\}$  é obtida através da solução das equações de equilíbrio num instante  $t$ . Ex.: Método de diferença central. Os métodos implícitos utilizam as condições de equilíbrio num instante  $t + \Delta t$ . Ex.: Métodos de Houbolt, Wilson  $\theta$ , Newmark.

O número de operações necessárias na solução das equações de equilíbrio através desses métodos é diretamente proporcional ao número de instantes de tempo utilizados. Além disto, o número de instantes afeta a qualidade do resultado obtido, ou a estabilidade do algoritmo, ou ambos. Portanto, o uso destes métodos é eficiente apenas quando se deseja obter uma solução em um curto período de tempo, no qual um número adequado de intervalos pode ser utilizado.

#### **2.2.4.2.2- Método de Superposição Modal**

Quando a solução das equações dinâmicas de equilíbrio deve ser obtida para um grande número de instantes de tempo, os métodos de integração direta tornam-se inefficientes. Sabe-se que o custo de solução do procedimento de integração passo-a-passo também é proporcional à largura de banda da matriz de rigidez. Portanto, se uma transformação adequada for realizada sobre as equações de equilíbrio, a largura de banda pode ser reduzida, aumentando a eficiência dos métodos de integração.

#### *Mudança de Base para Deslocamentos Modais Generalizados*

Propõe-se transformar as equações de equilíbrio em uma forma mais eficiente para a integração usando a seguinte transformação nos deslocamentos nodais  $\{U\}$ :

$$\{U(t)\} = [T]\{P(t)\} \quad (2.182)$$

Onde  $[T]$  é uma matriz quadrada e  $\{P(t)\}$  é um vetor em função do tempo de ordem  $N$ . As componentes deste vetor são chamadas de deslocamentos generalizados.

O objetivo da transformação é obter novas matrizes do sistema, que contenham largura de banda menor que as originais. Para tal, a matriz  $[T]$  deve ser escolhida adequadamente. Além disto, a matriz  $[T]$  deve ser não-singular, ou seja, ter ordem  $N$ , de tal forma que haja uma única relação entre os vetores  $\{U(t)\}$  e  $\{P(t)\}$  da forma expressa na Eq. (2.182).

Teoricamente, há inúmeras matrizes de transformação  $[T]$  que podem ser usadas. Na prática, uma matriz de transformação eficiente é a matriz de modos de vibração do sistema não-amortecido.

### *Não-amortecido*

Se as forças de amortecimento puderem ser desprezadas, as equações de equilíbrio se tornam:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{p}_i(t) + \omega_i^2 p_i(t) &= r_i(t) \\ r_i(t) &= \{\phi\}_i^T \{R(t)\} \end{aligned} \right\} \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (2.183)$$

As condições iniciais correspondentes às equações acima são dadas por:

$$\begin{aligned} {}^0 p_i &= \{\phi\}_i^T [M] {}^0 \{U\} \\ {}^0 \dot{p}_i &= \{\phi\}_i^T [M] {}^0 \{\dot{U}\} \end{aligned} \quad (2.184)$$

A solução das Eq. (2.183) pode ser obtida através dos algoritmos de integração direta ou calculados através da integral de Duhamel:

$$p_i(t) = \frac{1}{\omega_i} \int_0^t r_i(\tau) \sin \omega_i(t - \tau) d\tau + A_i \cos \omega_i t + B_i \sin \omega_i t \quad (2.185)$$

Onde  $A_i$  e  $B_i$  são determinados pelas condições iniciais nas Eq. (2.184).

A resposta completa é dada pela superposição de todas as respostas individuais:

$$\{U(t)\} = \sum_{i=1}^N \{\phi\}_i p_i(t) \quad (2.186)$$

A essência da solução por superposição modal é que, freqüentemente, apenas uma pequena parcela do número total de equações desacopladas precisa ser considerada, de

forma a se obter uma boa aproximação para a resposta real do sistema. Isto significa que apenas os  $J$  primeiros modos de vibração precisam ser calculados.

O número de modos a serem utilizados na superposição depende da natureza das forças que excitam o sistema. Para excitações de baixa freqüência, pode-se considerar um número pequeno de modos, enquanto que, para excitações de alta freqüência, um número bem maior de modos deve ser calculado.

Segundo Zao et al. (2002), quando o truncamento dos modos de vibração é excessivo, o método de superposição modal não é capaz de gerar bons resultados. No entanto, é possível obter uma resposta mais próxima da exata, utilizando-se os primeiros modos de vibração em conjunto com as matrizes do sistema.

### *Amortecimento Proporcional*

Caso as forças de amortecimento não possam ser desprezadas, as equações de equilíbrio ainda podem ser desacopladas em uma condição específica de amortecimento: o amortecimento proporcional. Nesta condição, as  $n$  equações de equilíbrio se tornam:

$$\ddot{p}_i(t) + 2\omega_i \zeta_i \dot{p}_i(t) + \omega_i^2 p_i(t) = r_i(t) \quad (2.187)$$

Onde  $\zeta_i$  é a razão de amortecimento do  $i$ -ésimo modo.

Para esta condição, a integral de Duhamel se torna:

$$p_i(t) = \frac{1}{\overline{\omega}_i} \int_0^t r_i(\tau) e^{-\zeta_i \omega_i (t-\tau)} \sin \overline{\omega}_i (t-\tau) d\tau + e^{-\zeta_i \omega_i t} (A_i \cos \overline{\omega}_i t + B_i \sin \overline{\omega}_i t) \quad (2.188)$$

Onde:

$$\overline{\omega}_i = \omega_i \sqrt{1 - \zeta_i^2} \quad (2.189)$$

### *Soluções em Estado Permanente*

Para os casos em que as forças externas levam o sistema a um estado permanente, o procedimento de transformar as coordenadas geométricas do sistema para coordenadas modais torna-se ainda mais interessante. Um destes casos ocorre quando as forças de excitação são harmônicas.

Quando apenas a solução em estado permanente é necessária, as equações de resposta em freqüência utilizadas na análise modal podem ser estendidas aos modelos em elementos finitos. Desta forma, obtém-se as respostas de um certo número de graus de liberdade em função das forças de excitação.

### 2.3- Problemas de Auto-valores e Auto-vetores

Conforme Bathe (1982), o problema de auto-valores padrão é dado por:

$$[K]\{\phi\} = \lambda\{\phi\} \quad (2.190)$$

Onde  $[K]$  é uma matriz de rigidez positiva definida ou semi-definida, de ordem  $N$  e meia largura de banda  $m_k$ . Há  $N$  auto-valores e auto-vetores que satisfazem a Eq. (2.190). O  $i$ -ésimo par de solução é representado por  $(\lambda_i; \{\phi\}_i)$  e os auto-valores são ordenados segundo sua magnitude:

$$0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_{N-1} \leq \lambda_N \quad (2.191)$$

A solução para  $p$  pares de auto-valores e auto-vetores pode ser escrita da seguinte maneira:

$$[K][\Phi] = [\Phi][\Lambda] \quad (2.192)$$

Onde  $[\Phi]$  é uma matriz  $N \times J$  que contém um auto-vetor em cada coluna e  $[\Lambda]$  é uma matriz diagonal  $J \times J$  que contém os auto-valores.

Os problemas de auto-valores generalizados são dados por:

$$[K]\{\phi\} = \lambda[M]\{\phi\} \quad (2.193)$$

Em analogia à Eq. (2.192), a solução dos  $J$  auto-valores e auto-vetores é dada por:

$$[K][\Phi] = [M][\Phi][\Lambda] \quad (2.194)$$

#### 2.3.1- Métodos Básicos de Solução para Problemas de Auto-valores

Os métodos de solução podem ser subdivididos em quatro grupos, de acordo com a propriedade básica utilizada no algoritmo.

O primeiro grupo é formado pelos métodos que utilizam iterações vetoriais. Estes métodos aproveitam a seguinte propriedade:

$$[K]\{\phi\}_i = \lambda_i[M]\{\phi\}_i \quad (2.195)$$

Ex.: iteração inversa, iteração direta, iteração vetorial com *shift*, iteração do quociente de Rayleigh.

O segundo grupo é constituído pelos métodos de transformação, baseados nas seguintes propriedades:

$$[\Phi]^T [K] [\Phi] = [\Lambda] \quad (2.196)$$

$$[\Phi]^T [M] [\Phi] = [I] \quad (2.197)$$

Onde:

$$[\Phi] = [\{\phi\}_1 \ \cdots \ \{\phi\}_N] \text{ e } [\Lambda] = \begin{bmatrix} \ddots & & \\ & \lambda_i & \\ & & \ddots \end{bmatrix}, \text{ para } i = 1, \dots, N \quad (2.198)$$

Ex.: método de Jacobi generalizado, Householder-QR-inversa.

O terceiro grupo engloba os métodos de iteração polinomial, que utilizam o seguinte fato:

$$D(\lambda_i) = 0 \quad (2.199)$$

Onde:

$$D(\lambda_i) = \| [K] - \lambda [M] \| \quad (2.200)$$

Ex.: iteração polinomial explícita, iteração polinomial implícita.

O quarto grupo utiliza a propriedade apresentada pela seqüência de Sturm dos polinômios característicos:

$$D(\lambda_i) = \| [K] - \lambda [M] \| \quad (2.201)$$

$$D^{(r)}(\lambda^{(r)}) = \| [K]^{(r)} - \lambda^{(r)} [M]^{(r)} \| \quad (2.202)$$

Para  $r = 1, \dots, N-1$ , onde  $D^{(r)}(\lambda^{(r)})$  é o polinômio característico do  $r$ -ésimo problema de restrição correspondente à Eq. (2.195).

É importante notar que todos os métodos de solução devem ser iterativos, pois resolver um problema de auto-valores e auto-vetores é equivalente ao procedimento de calcular as raízes de um polinômio  $D(\lambda)$ . Este polinômio possui a mesma ordem que as matrizes  $[K]$  e  $[M]$  e não há solução explícita para o cálculo das raízes de um polinômio com ordem maior que quatro.

### 2.3.2- Método de Lanczos

O método de Lanczos foi originalmente proposto para a tri-diagonalização de matrizes. No entanto, pode-se estender sua aplicação à solução de problemas de auto-valores. Uma vez que as matrizes de coeficientes do problema são colocadas na forma tri-diagonal, os auto-valores e auto-vetores podem ser calculados de forma bem mais eficiente com o uso das técnicas citadas anteriormente.

#### 2.3.2.1- Algoritmo

Supondo que  $\{x\}$  seja um vetor inicial arbitrário e normalizando este mesmo vetor em relação à matriz de massa, tem-se:

$$\{x\}_1 = \frac{\{x\}}{\gamma}, \quad \gamma = \sqrt{\{x\}^T [M] \{x\}} \quad (2.203)$$

No algoritmo de Lanczos, os vetores  $\{x\}_2, \dots, \{x\}_J$  são calculados utilizando-se as seguintes equações:

$$[K]\{\bar{x}\}_i = [M]\{x\}_{i-1} \quad (2.204)$$

$$\alpha_{i-1} = \{\bar{x}\}_i^T [M] \{x\}_{i-1} \quad (2.205)$$

$$\{\tilde{x}\}_i = \{\bar{x}\}_i - \alpha_{i-1} \{x\}_{i-1} - \beta_{i-1} \{x\}_{i-2} \quad (2.206)$$

$$\beta_i = \sqrt{\{\tilde{x}\}_i^T [M] \{\tilde{x}\}_i} \quad (2.207)$$

$$\{x\}_i = \{\tilde{x}\}_i / \beta_i \quad (2.208)$$

Para  $i = 2, 3, \dots, J$  e  $\beta_1 = 0$ .

Teoricamente, os vetores  $\{x\}_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, J$  gerados a partir das Eq. (2.204) a (2.208) são orto-normais em relação à matriz  $[M]$ .

Fazendo  $[X] = [\{x\}_1 \quad \{x\}_2 \quad \cdots \quad \{x\}_J]$ , tem-se a seguinte relação:

$$[X]^T ([M][K]^{-1}[M]) [X] = [\Omega] \quad (2.209)$$

Onde  $[\Omega]$  é tri-diagonal e de ordem  $J$ :

$$[\Omega] = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_2 & & & \\ \beta_2 & \alpha_2 & \beta_3 & & \\ & \beta_3 & \alpha_3 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \alpha_{J-1} & \beta_J \\ & & & \beta_J & \alpha_J \end{bmatrix} \quad (2.210)$$

Usando a Eq. (2.209), os auto-valores e auto-vetores de  $[\Omega]$  quando  $J = N$  podem ser relacionados aos auto-valores e auto-vetores do problema  $[K]\{\phi\} = \lambda[M]\{\phi\}$ .

Pode-se escrever:

$$\frac{1}{\lambda} [M]\{\phi\} = [M][K]^{-1}[M]\{\phi\} \quad (2.211)$$

Usando a transformação:

$$\{\phi\} = [X]\{\tilde{\phi}\} \quad (2.212)$$

E a Eq. (2.209), obtém-se da Eq. (2.211):

$$[\Omega]\{\tilde{\phi}\} = \frac{1}{\lambda}\{\tilde{\phi}\} \quad (2.213)$$

Portanto, os auto-valores da matriz  $[\Omega]$  são os recíprocos dos auto-valores de  $[K]\{\phi\} = \lambda[M]\{\phi\}$  e os auto-vetores de ambos os problemas são relacionados através da Eq. (2.212).

Observa-se na prática que, na solução de problemas de grande ordem, os vetores  $\{x\}_i$  podem não ser ortogonais em relação a  $[M]$ , devido a erros de arredondamento.

A aplicabilidade do método de Lanczos está no fato que se  $J$  é menor que  $N$ , os auto-valores de  $[\Omega]$  dão uma boa aproximação para os menores auto-valores do problema  $[K]\{\phi\} = \lambda[M]\{\phi\}$ . No entanto, a qualidade desta aproximação não é conhecida. Para que se confirme a exatidão da solução, o método de Lanczos deve ser combinado com um esquema iterativo e os auto-valores checados através de seqüências de *Sturm*.

### 2.3.3- Métodos Robustos de Solução

Os grupos básicos de solução mencionados anteriormente apresentam características próprias, que os tornam mais adequados a certos problemas de auto-valores. Ou seja, nenhum destes métodos é sempre o mais eficiente. Para se obter um método mais robusto de solução, é necessário que as diversas características básicas sejam combinadas, de forma a se atingir um algoritmo mais flexível e com baixo custo de solução.

Como visto anteriormente, para os problemas de dinâmica, apenas os  $J$  primeiros auto-valores e auto-vetores precisam ser calculados para que se obtenha uma boa aproximação do comportamento real de uma estrutura. Portanto, o custo de solução pode ser bastante reduzido caso  $J \ll N$ . Um método confiável e de baixo custo que calcula apenas os  $J$  primeiros auto-valores e os auto-vetores correspondentes é o método *subspace iteration*.

#### 2.3.3.1- Método *Subspace Iteration*

Em essência, o método *subspace iteration* desenvolvido por Bathe consiste nos seguintes passos:

- Estabelecer  $L$  vetores iniciais, tal que  $L > J$ , onde  $J$  é número de auto-valores e auto-vetores a serem calculados;
- Aplicar iteração inversa nos  $L$  vetores simultaneamente e utilizar análise de Ritz para extrair as “melhores” aproximações de auto-valores e auto-vetores correspondentes aos  $L$  vetores da iteração;
- Após a convergência das iterações, utilizar a seqüência de *Sturm* para verificar se todos os auto-valores requeridos e auto-vetores correspondentes foram calculados.

O método *subspace iteration* recebeu este nome porque cada iteração é realizada em um subespaço de dimensão  $L$ .

### 2.3.3.1.1- Considerações Iniciais

A idéia essencial por trás do método *subspace iteration* é que os auto-vetores na Eq. (2.194) formam uma base orto-normal em relação a  $[M]$  para o subespaço *least-dominant* dos operadores  $[K]$  e  $[M]$ . Este subespaço será chamado de  $E_\infty$ .

Na solução, a iteração com os  $L$  vetores linearmente independentes pode ser considerada uma iteração em um subespaço. Os vetores iniciais da iteração formam uma base para  $E_1$  e a iteração prossegue até que, com determinada precisão, os vetores formem uma base para  $E_\infty$ .

O fato da iteração ser realizada em um subespaço leva a algumas consequências importantes. O número total de iterações necessárias depende de quanto “perto”  $E_1$  está de  $E_\infty$  e não da proximidade entre os vetores da iteração e os auto-vetores. É muito mais fácil estabelecer um subespaço inicial de dimensão  $L$  que seja próximo de  $E_\infty$ , do que encontrar  $L$  vetores que sejam próximos dos auto-vetores requeridos. A eficiência do algoritmo se deve a este fato. Além disto, a convergência do subespaço é a única restrição das iterações. Não é necessário que cada vetor da iteração converja para um dado auto-vetor.

### 2.3.3.1.2- Algoritmo

Fazendo com que  $[X]_1$  armazene os  $L$  vetores iniciais que são a base do subespaço  $E_1$ , a iteração inversa simultânea sobre os  $L$  vetores pode ser representada por:

$$[K][X]_{k+1} = [M][X]_k \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.214)$$

Os  $L$  vetores contidos na matriz  $[X]_{k+1}$  formam uma base para o subespaço  $E_{k+1}$  e a seqüência de subespaços gerada converge para  $E_\infty$ , desde que os vetores iniciais não sejam ortogonais a  $E_\infty$ .

O algoritmo *subspace iteration* encontra uma base ortogonal de vetores em  $E_{k+1}$ , preservando a estabilidade numérica na iteração dada pela Eq. (2.214). Além disto, o algoritmo calcula em um único passo os auto-vetores requeridos quando  $E_{k+1}$  converge para  $E_\infty$ .

Para  $k = 1, 2, \dots$ , tem-se:

$$[K][\bar{X}]_{k+1} = [M][X]_k \quad (2.215)$$

Encontram-se as projeções das matrizes  $[K]$  e  $[M]$  no subespaço  $E_{k+1}$ :

$$[K]_{k+1} = [\bar{X}]_{k+1}^T [K][\bar{X}]_{k+1} \quad (2.216)$$

$$[M]_{k+1} = [\bar{X}]_{k+1}^T [M][\bar{X}]_{k+1} \quad (2.217)$$

Resolve-se o problema de auto-valores com as matrizes projetadas:

$$[K]_{k+1}[Q]_{k+1} = [M]_{k+1}[Q]_{k+1}[\Lambda]_{k+1} \quad (2.218)$$

Encontrando-se uma melhor aproximação para os auto-vetores:

$$[X]_{k+1} = [\bar{X}]_{k+1}[Q]_{k+1} \quad (2.219)$$

Considerando que os vetores em  $[X]_1$  não são ortogonais a um dos auto-vetores requeridos, tem-se:

$$\left. \begin{array}{l} [\Lambda]_{k+1} \rightarrow [\Lambda] \\ [X]_{k+1} \rightarrow [\Phi] \end{array} \right\} \quad k \rightarrow \infty \quad (2.220)$$

É importante destacar que, em todas as iterações, os auto-vetores deverão estar ordenados segundo a ordem crescente dos auto-valores correspondentes.

### 2.3.3.1.3- Vetores Iniciais

O primeiro passo do algoritmo é a seleção de um conjunto de vetores iniciais  $[X]_1$ . A escolha adequada destes vetores é de extrema importância, pois este passo influencia todo o procedimento de solução. Há dois algoritmos para este fim que se demonstram eficientes na prática.

O primeiro algoritmo calcula os vetores iniciais a partir de  $[M][X]_1 = [Y]$ . A primeira coluna da matriz  $[Y]$  é formada pelos elementos da diagonal de  $[M]$ . As outras colunas de  $[Y]$  são vetores unitários  $\{e\}_i$ , com valores +1 nas coordenadas correspondentes às menores razões  $k_{i,i}/m_{i,i}$ . Uma quantidade adequada para os  $L$  vetores iniciais utilizados é dada por:  $L = \min(2J; J + 8)$ .

O segundo algoritmo utiliza o método de Lanczos descrito anteriormente. O vetor  $\{x\}$  utilizado é tal que:  $x_i = 1, \quad i = 1, 2, \dots, N$ . Uma quantidade adequada para os vetores iniciais criados pelo método de Lanczos é  $L = 2J$ .

### 2.3.3.1.4- Convergência

No método *subspace iteration*, é necessário medir a convergência. Considerando que, nas iterações  $k$  e  $k+1$ , as aproximações  $\lambda_i^{(k)}$  e  $\lambda_i^{(k+1)}$  ( $i = 1, \dots, J$ ) para os auto-valores foram obtidas, a convergência é dada por:

$$\frac{|\lambda_i^{(k+1)} - \lambda_i^{(k)}|}{\lambda_i^{(k+1)}} \leq tol, \quad i = 1, \dots, J \quad (2.221)$$

Para que os auto-valores possuam  $2\chi$  dígitos de precisão, a tolerância deve ser da ordem de  $10^{-2\chi}$ . Neste caso, os auto-vetores correspondentes possuem em torno de  $\chi$  dígitos precisos.

Quando a convergência é atingida, é necessário verificar se os auto-valores requeridos e auto-vetores correspondentes foram de fato calculados. Para tal, utiliza-se uma propriedade da seqüência de Sturm. Decompondo a matriz  $[K] - \mu[M]$  em  $[L][D][L]^T$ , sabe-se que o número de elementos negativos na matriz  $[D]$  é igual ao número de auto-valores menores que  $\mu$ . Supondo que a última iteração realizada é dada por  $l$ , obtém-se uma estimativa das regiões nas quais os auto-valores se encontram:

$$0.99\lambda_i^{(l+1)} < \lambda_i < 1.01\lambda_i^{(l+1)} \quad (2.222)$$

## 2.4- Dinâmica de Auto-veículos

O surgimento dos automóveis ocorreu em torno de 1769 quando o engenheiro militar francês Nicholas Joseph Cugnot construiu um veículo de três rodas movido a vapor. No entanto, os primeiros automóveis práticos movidos a gasolina surgiram apenas em 1886, com os trabalhos independentes de Karl Benz e Gottlieb Daimler. A partir de 1908, a indústria automobilística já estava bem estabelecida nos Estados Unidos, com a produção em série do Modelo T de Henry Ford e a fundação da General Motors Corporation.

Durante um século de desenvolvimento da indústria automobilística, grandes avanços tecnológicos foram alcançados. Estudos cada vez mais aprofundados tornaram-se necessários para as áreas de projeto e desenvolvimento de auto-veículos. Um tópico muito importante destes estudos é o que envolve o comportamento dinâmico de veículos.

A dinâmica de auto-veículos trata da relação entre movimentos e forças atuantes sob as diversas condições às quais um veículo é submetido. O comportamento dinâmico de um veículo é determinado pelas forças impostas a ele pelos pneus, gravidade e aerodinâmica. O veículo e seus componentes são estudados para que as forças geradas em uma dada manobra sejam obtidas. A resposta do veículo a estas forças é então calculada.

Um veículo motorizado é composto por um grande número de componentes. No entanto, para muitas das análises mais elementares, pode-se considerar que todos os componentes se movem em conjunto. Para as manobras de aceleração, frenagem e a maioria das análises de mudança de direção, é suficiente representar o veículo como uma massa concentrada localizada no seu centro de gravidade (CG), com propriedades adequadas de massa e inércia. Mas para a análise de *ride*, é freqüentemente necessário tratar as rodas em separado. Neste caso, a massa concentrada que representa o corpo do veículo é chamada de “massa suspensa” e o conjunto das rodas é chamado de “massa não-suspensa”.

Para análises mais realistas, é necessário modelar cada componente veicular, ou pelo menos os componentes de um dado sistema (suspensão, direção, transmissão, freios, etc.). Antigamente, não havia meios para realizar análises desta natureza. No entanto, com o desenvolvimento dos computadores digitais e algoritmos de solução, modelos cada vez mais complexos podem ser formulados e resolvidos.

Nas diversas manobras realizadas por um veículo, dois componentes são de extrema importância: suspensão e pneus.

#### **2.4.1- Suspensão**

As funções principais da suspensão, de acordo com Gillespie (1992), são:

- Oferecer flexibilidade vertical, permitindo que as rodas acompanhem as irregularidades da pista e isolando o chassi ou monobloco destas irregularidades;

- Manter as rodas nas condições adequadas de esterçamento e *camber*;
- Reagir às forças e momentos gerados pelos pneus;
- Resistir ao movimento de *roll* da carroceria;
- Manter os pneus em contato com o solo, com mínimas variações de carregamento.

As suspensões geralmente podem ser divididas em duas categorias: suspensões de eixo rígido (*solid axles*) e suspensões independentes.

#### **2.4.1.1- Suspensões de Eixo Rígido**

Possuem uma viga rígida, na qual as rodas são montadas. Desta forma, o movimento de uma roda é transmitido à roda oposta, fazendo com que elas recebam o mesmo esterçamento e *camber*. A vantagem deste tipo de suspensão é que o ângulo de *camber* das rodas não é afetado pelo movimento de *roll* da carroceria, além de apresentar pequenas variações nas curvas. Além disto, o alinhamento das rodas é garantido pelo próprio eixo, reduzindo o desgaste dos pneus. Sua maior desvantagem se deve aos níveis de vibrações provocadas pelo esterçamento. Alguns tipos de suspensões de eixo rígido são:

- *Hotchkiss*
- Quatro barras (*Four links*)
- *De Dion*

#### **2.4.1.2- Suspensões Independentes**

As suspensões independentes permitem que cada roda se movimente verticalmente sem afetar a roda oposta. Praticamente todos os veículos de passageiros e caminhões leves utilizam suspensões dianteiras independentes. Isto se deve ao espaço interno oferecido para a montagem do motor e aos menores níveis de vibrações devidas ao esterçamento. Outras vantagens são: facilidade de se controlar o centro de *roll* através de uma escolha adequada da geometria, habilidade de se controlar a área de contato pneu-solo durante os movimentos verticais, maiores deflexões da suspensão e maior rigidez ao movimento de *roll*. Alguns tipos de suspensões independentes são:

- Braços oscilantes
- SLA
- *MacPherson*
- *Multi-Link*
- *Semi-Trailing arm*
- *Swing axle*

Apesar da grande variedade de geometrias, as suspensões são compostas basicamente de três componentes: mola, amortecedor e componentes de apoio.

As molas são os elementos que absorvem os movimentos provenientes da pista. Seu comportamento é bem conhecido. Os amortecedores têm a função de reduzir as amplitudes da suspensão e atenuar as oscilações provocadas pelas molas. São componentes não-lineares e de difícil modelagem. O conjunto mola-amortecedor é também conhecido como absorvedor de choque ou isolador de vibrações.

Os componentes de apoio são os elementos que ligam as rodas à carroceria ou chassis do veículo. A maior parte dos estudos na área de suspensões automotivas é voltada para o cálculo da geometria destes componentes, pois eles determinam a forma na qual as rodas se movimentam em relação ao restante do veículo.

#### **2.4.1.3- Absorvedores**

Segundo Schiehlen e Hu (2003), os absorvedores de choque são utilizados para otimizar a segurança e o conforto em um veículo. Torna-se necessário, portanto, identificar as características destes absorvedores em condições reais. Isto pode ser obtido através de uma metodologia de simulação chamada de *hardware-in-the-loop*. Esta metodologia consiste em utilizar modelos matemáticos para os componentes que podem ser modelados satisfatoriamente, enquanto que os componentes restantes são montados em uma bancada de testes e submetidos às condições reais. A simulação é feita em tempo real, utilizando conversores A/D e D/A, atuadores e um computador de alta performance.

Um outro modelo de amortecedor é o criado por Liu e Zhang (2002). Este modelo descreve um amortecedor de tubo duplo e inclui as características de rigidez e

amortecimento de todos os componentes do amortecedor. O modelo obtido é comparado com um modelo experimental, atingindo bons resultados.

#### **2.4.1.4- Componentes de Apoio**

Os componentes de apoio são freqüentemente calculados como mecanismos de múltiplos corpos e otimizados segundo parâmetros como *ride* e *handling*. Segundo Attia (2002), há várias formas de simular o comportamento dinâmico de mecanismos. No entanto, é interessante utilizar uma metodologia capaz de minimizar o número de equações diferenciais que descrevem o problema. Desta forma, obtém-se uma solução computacional mais eficiente. O modelo de Attia (2002) simula uma suspensão do tipo SLA.

O modelo desenvolvido por Simionescu e Beale (2002) trata da suspensão do tipo *Multi-Link*. A metodologia utilizada na síntese do mecanismo consiste em considerar a roda desconexa de suas juntas. A roda é colocada para mover em posições sucessivas ao longo de uma trajetória ideal. O problema consiste então em encontrar as posições das juntas de forma que haja a menor variação possível no comprimento das barras que compõem o mecanismo.

De acordo com Kim et al. (2002), os parâmetros de *ride* e *handling* são conflitantes no desempenho das suspensões automotivas. Para otimizar ambos os parâmetros, inúmeras soluções já foram propostas. Estas soluções consistem não apenas em diferentes geometrias de suspensão como também em controle computadorizado: sistemas de suspensão ativa e semi-ativa.

Conforme Spentzas e Kanarachos (2002), a idéia básica de uma suspensão ativa ou híbrida é o uso de um atuador (hidráulico, pneumático ou mecânico) capaz de melhorar a performance dinâmica do veículo. Para que a performance supere o sistema de suspensão passiva, é necessário um controle inteligente e não-linear.

Segundo Kim et al. (2002), para que os sistemas de controle sejam mais eficientes, é necessário conhecer os perfis de pista atuais e futuros. Há vários métodos para se levantar os perfis de pista: perfilômetro, sensor *look-ahead* e estimativas a partir da resposta das rodas. Com exceção do perfilômetro, os procedimentos de medição geram perfis contaminados pelo movimento da carroceria do veículo. Para remover esta

influência, propõe-se um sistema capaz de reconstruir o perfil através da simulação da dinâmica veicular.

Ao contrário de outros trabalhos, Sun (2002) apresenta o conceito de veículo *road-friendly*. Este conceito trata do desenvolvimento de suspensões que reduzam a força exercida pelos veículos sobre a pista, minimizando os danos provocados no pavimento. Utiliza-se um modelo do tipo *walking beam*, que consiste na representação de um dos eixos do veículo, levando-se em conta o deslocamento vertical e o movimento de *roll*. De acordo com os resultados do modelo, pneus com alta pressão e suspensões com pequeno amortecimento levam a grandes carregamentos sobre os pneus, o que leva a um desgaste prematuro dos pavimentos.

#### **2.4.2- Pneus**

Segundo Gillespie (1992), as principais forças aplicadas a um veículo, com exceção das forças aerodinâmicas, são geradas na superfície de contato entre os pneus e o solo. Portanto, um entendimento das relações entre os pneus, suas condições de operação e as forças e momentos resultantes são aspectos essenciais na dinâmica do veículo como um todo.

As funções principais dos pneus são:

- Suportar a carga vertical enquanto absorve os impactos da pista;
- Desenvolver as forças longitudinais de aceleração e frenagem;
- Desenvolver as forças laterais nas curvas.

Os pneus são compostos de uma carcaça de borracha reforçada por cordões de elevado módulo de elasticidade, dispostos em várias camadas. A borracha é responsável não apenas pela aderência ao solo como também pela vedação do gás de enchimento. Este gás é pressurizado de forma a tensionar os cordões de reforço, fazendo com que o pneu reaja às deformações impostas a ele.

Há dois tipos básicos de construção de pneus largamente utilizados: radial e diagonal. A diferença entre eles está na orientação dos cordões de reforço da carcaça de borracha. Os pneus diagonais apresentam tiras com ângulos entre 35 e 45 graus em relação à circunferência, sendo que as camadas possuem sentidos alternados. Os radiais

possuem tiras a 90 graus e reforços ao longo da circunferência, que garantem estabilidade direcional.

Cada pneu constitui um sistema não-linear complexo. Inúmeros modelos já foram desenvolvidos na tentativa de representar o comportamento dos pneus às mais diversas situações. Muitos destes modelos são semi-analíticos ou empíricos, o que reflete o grau de complexidade destes componentes.

O modelo apresentado por Guo et al. (2001) é baseado nas características do USES (*unified semi-empirical tire model for steady state*). A diferença básica é que o modelo apresentado aplica-se aos casos de grande *slip*. Por ser um modelo de maior ordem e não limitado à condição de estado permanente, o modelo é capaz de representar adequadamente a dinâmica não-linear dos pneus.

Miyashita et al. (2003) propõe um modelo para a razão entre a força frenante e a força normal. A força frenante é a soma de duas parcelas: a primeira se deve ao esforço cisalhante do pneu e a segunda ao *slip*. O modelo proposto utiliza uma parábola generalizada que é capaz de representar a distribuição das parcelas de esforços. Os coeficientes das parábolas são obtidos através de um ajuste de dados experimentais, levando-se em conta os menores erros quadráticos.

De acordo com Kageyama e Kuwahara (2002), um fenômeno chamado *wandering* ocorre quando um veículo viaja em uma superfície irregular tal como uma pista com sulcos. Este fenômeno faz com que um veículo tenha um movimento lateral oscilatório de baixa freqüência, prejudicando a direção. Este assunto foi tratado em vários estudos experimentais e análises teóricas que confirmaram a influência dos seguintes parâmetros: *roll steer*, força lateral e a força sobre os pneus, incluindo a força e o torque de *camber* gerados pelo contato do pneu com a superfície do sulco.

O modelo de pneu apresentado considera os efeitos da força e torque de *camber*. São obtidas as características do pneu em função do ângulo de *camber*: dimensões da área de contato, largura e raio do pneu, etc. Considera-se que as dimensões da área de contato são relacionadas ao ângulo de *camber* e ao carregamento vertical, que a pressão de contato muda com o comprimento de contato e que a rigidez varia com a pressão de contato. O modelo foi comparado com resultados experimentais, apresentando boa correlação.

### 2.4.3- Ride

Segundo Gillespie (1992), os automóveis são submetidos a vibrações de várias freqüências por causa das altas velocidades desempenhadas. As vibrações são transmitidas aos passageiros por três caminhos distintos: tátil, visual e sonoro. O termo *ride* é utilizado em referência às vibrações táteis e visuais, enquanto que as sonoras são categorizadas como ruído. O espectro de vibrações pode ser dividido de acordo com a freqüência e classificado como *ride* (0 a 25 Hz) ou ruído (25 Hz a 20 kHz). Normalmente, os dois tipos de vibrações estão correlacionados, sendo difícil considerar cada um separadamente.

As vibrações de *ride* são excitadas por diversas fontes, que podem ser classificadas como irregularidades da pista ou fontes embarcadas. As fontes embarcadas se devem aos componentes rotativos e alternativos, portanto incluem o conjunto de rodas e pneus, o sistema de transmissão e o motor.

#### 2.4.3.1- Irregularidades da Pista

As irregularidades da pista englobam tanto falhas localizadas quanto os desvios aleatórios da rugosidade do pavimento. Estes desvios aleatórios estão sempre presentes, pois existem limites práticos de precisão nos processos de construção e manutenção das pistas. As irregularidades da pista são descritas pelo perfil de elevações ao longo da trajetória percorrida pelas rodas do veículo.

Perfis de elevações de pista pertencem à categoria de “sinais aleatórios de banda larga” e, portanto, podem ser descritos tanto pelo perfil por si só, quanto por suas propriedades estatísticas. Uma das representações mais úteis destas propriedades é a função de densidade espectral de potência (PSD - *Power Spectral Density*). Como qualquer sinal aleatório, o perfil de elevações medido ao longo de um comprimento da pista pode ser decomposto por uma transformada de Fourier em uma série de senóides variando em amplitude e fase. A função PSD nada mais é que uma relação entre as amplitudes das senóides ao quadrado e suas respectivas freqüências espaciais. A freqüência espacial é também chamada de número de onda, que por sua vez é o inverso do comprimento de onda.

Os perfis de elevações de pista são normalmente medidos por equipamentos conhecidos como perfilômetros. Após a determinação das PSDs, pode-se obter gráficos como o da Fig 2.5.

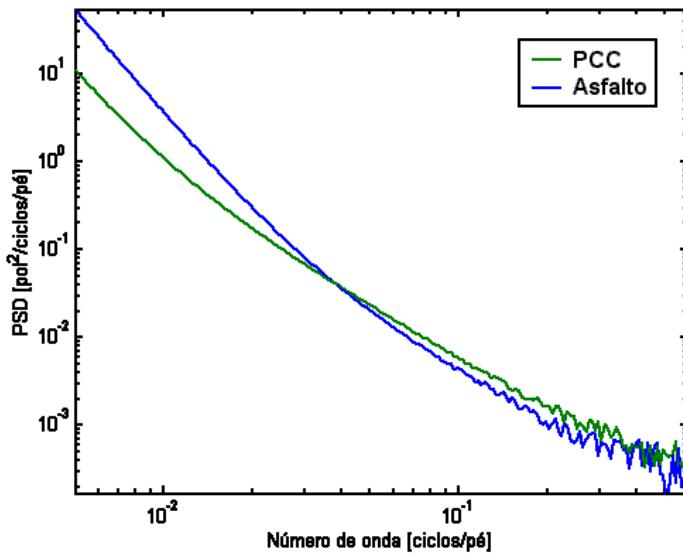


Figura 2.5 – Funções PSD de dois tipos de pistas.

Embora a PSD de cada seção da pista seja única, todas as pistas apresentam como característica uma queda de amplitude com o aumento do número de onda. Isto reflete o fato de que oscilações com pequenos comprimentos de onda possuem pequenas amplitudes, enquanto que grandes comprimentos de onda apresentam amplitudes bem maiores. O nível de amplitude geral da PSD é indicativo da qualidade da pista. Quanto maiores as amplitudes, pior é a qualidade da pista.

A PSD em verde na Fig 2.5 é um pavimento de concreto com Cimento Portland (PCC), também conhecido como “pavimento rígido”. A PSD em azul é um pavimento de asfalto convencional, também conhecido como "pavimento flexível".

Apesar de muitos problemas de *ride* serem peculiares a uma pista específica, ou a um tipo de pista, a noção de propriedades “médias” de pista pode freqüentemente ser útil. A similaridade geral no conteúdo espectral das pistas visto na Fig. 2.5 é reconhecida como representativa da maioria das pistas.

O conteúdo espectral das pistas de asfalto e de PCC é ligeiramente diferente. O nível geral de elevação da curva pode ser aumentado ou diminuído para representar as diferentes condições da pista, mas as inclinações características e pontos de inflexão são

constantes. A diferença entre as curvas de asfalto e PCC está na magnitude relativa dos conteúdos para números de onda grandes e pequenos.

A PSD para as propriedades médias de perfis de pista pode ser representada pela seguinte equação:

$$G_z(\nu) = G_0 \frac{1 + \left( \frac{\nu_0}{\nu} \right)^2}{(2\pi\nu)^2} \quad (2.223)$$

Onde:

- $G_z(\nu)$ : amplitude PSD
- $\nu$ : número de onda
- $G_0$ : parâmetro de magnitude da rugosidade
- $\nu_0$ : número de onda de *cutoff*

O perfil de elevações age como um deslocamento vertical imposto às rodas, excitando vibrações de *ride*. Supondo uma velocidade constante para o veículo, pode-se transformar o perfil de elevações para uma função de deslocamento ao longo do tempo. A conversão de freqüência espacial para freqüência temporal é obtida multiplicando-se o número de onda pela velocidade do veículo.

#### **2.4.3.2- Conjunto de Rodas e Pneus**

As imperfeições de fabricação de pneus, rodas, freios e outras partes do conjunto rotativo podem resultar em:

- Massas desbalanceadas
- Variações dimensionais
- Variações de rigidez

Estas deformidades fazem com que o conjunto de rodas e pneus sofra variações de forças e momentos à medida que giram. Estas variações são então transmitidas para o eixo do veículo, gerando vibrações de *ride*.

### **2.4.3.3- Sistema de Transmissão**

O sistema de transmissão engloba todos os componentes que transferem torque desde o motor até as rodas. As vibrações geradas no sistema de transmissão são mais comuns em veículos com motor dianteiro e tração traseira. Nestes casos, o torque do motor é transmitido através de eixos ligados a juntas universais. As forças que geram vibrações originam-se das massas desbalanceadas dos componentes e dos momentos secundários que surgem com a angulação das juntas universais.

### **2.4.3.4- Motor**

Os motores com pistões fornecem potência em um processo cíclico. Portanto, o torque não possui magnitude constante. No virabrequim, o torque consiste de uma série de pulsos correspondentes à combustão em cada cilindro. O volante do motor, em conjunto com as inércias dos componentes rotativos, age como um reservatório de energia cinética, atenuando estas oscilações. Portanto, o torque fornecido ao sistema de transmissão consiste de duas componentes sobrepostas: uma em estado permanente e uma oscilatória devida às variações de torque que não são absorvidas. Estas variações de torque são capazes de gerar vibrações.

Apesar de servir como fonte de excitações, o motor também pode agir como absorvedor de vibrações. Isto se deve à sua grande massa e à flexibilidade que há na sua montagem sobre a carroceria. Se o sistema de montagem for projetado adequadamente, o motor é capaz de atenuar as vibrações, principalmente verticais, provenientes das rodas.

### **2.4.3.5- Modelagem de Parâmetros de Ride**

Naudé e Snyman (2003) criaram um modelo de um veículo militar de três eixos, que apresentava problemas na suspensão. Estes problemas, por sua vez, levavam a falhas prematuras nos eixos. Utilizando um algoritmo de otimização em conjunto com o modelo do veículo e alguns perfis de pista, parâmetros ótimos para a suspensão foram obtidos.

Shiiba e Suda (2002) utilizaram a dinâmica de múltiplos corpos de um veículo real em um simulador. Desta forma, as características deste simulador se tornaram muito próximas dos automóveis reais. O simulador pôde então ser utilizado para

predizer a performance dinâmica e o conforto de forma subjetiva. Ou seja, o operador do simulador pode avaliar o comportamento do veículo sem a necessidade de criação de um protótipo deste.

Segundo Atsumi et al. (2002), vários estudos vêm sendo desenvolvidos com o intuito de melhorar os parâmetros de *ride*, devido ao crescente interesse no conforto veicular. No entanto, poucos estudos se concentram no estudo do enjôo (*motion sickness*) causado pela vibração do veículo. Isto se deve principalmente ao grande número de parâmetros que podem provocar enjôo: condições físicas individuais, situações nas quais o veículo é submetido, etc.

Há vários estudos sobre os mecanismos fisiológicos que levam ao enjôo. Muitos destes estudos utilizam a teoria dos conflitos entre sentidos. De acordo com esta teoria, o enjôo é causado pelas discrepâncias entre o sentido visual de movimento e os movimentos sentidos pelos órgãos vestibular e otolítico. Estas discrepâncias podem ser minimizadas através da redução dos níveis vibracionais do veículo. Vários testes foram realizados de forma a se traçar uma relação entre o enjôo e os níveis de vibração em várias freqüências.

Gobbi e Mastinu (2001) analisaram um sistema com dois graus de liberdade que representa o conjunto pneu-suspensão. Utilizando dois tipos de perfis de pista, três parâmetros de performance foram calculados: conforto (relacionado ao desvio-padrão da aceleração vertical do veículo), *holding* de pista (relacionado ao desvio-padrão da força sobre o pneumático) e amplitude de trabalho da suspensão (relacionado ao desvio-padrão do deslocamento relativo entre a roda e o corpo do veículo). Foram obtidas equações analíticas que descrevem os parâmetros de performance em relação aos parâmetros de entrada (valores de rigidez, amortecimento e massa). Através de um método de programação com múltiplos objetivos, os parâmetros ótimos do sistema puderam ser obtidos.

Bae et al. (2000) desenvolveram uma metodologia para a solução das equações que governam a cinemática e a dinâmica de um veículo em tempo real.

Margolis e Shim (2001) modelaram a dinâmica de um veículo de quatro rodas, enfatizando os sistemas de controle relacionados à segurança: suspensão ativa, controle de esterçamento e de frenagem. Foram utilizados "gráficos de vínculos", que mostram

as interligações de todos os sistemas modelados. As equações de movimento foram obtidas diretamente dos gráficos de vínculos e simuladas através de um software chamado "ACSL", capaz de resolver equações diferenciais de primeira ordem explícitas.

## 2.5- ODS

Segundo Richardson (1997), os modos de vibração e os ODS (*Operating Deflection Shapes* ou *Operational Deflection Shapes*) estão relacionados entre si. Do ponto de vista analítico, os modos de vibração são as soluções da equação de movimento da vibração não-forçada de uma estrutura ou componente. São, portanto, características inatas do objeto de estudo. Dependem apenas da geometria, propriedades de materiais e condições de contorno de deslocamento (e rotação). O ODS, por sua vez, está relacionado à solução da equação de equilíbrio para a vibração forçada. Depende, portanto, não apenas das características do objeto de estudo, como também da natureza das forças aplicadas sobre ele. De forma geral, o ODS representa as deformações de uma estrutura ou componente, quando submetido(a) a uma vibração forçada.

Do ponto de vista experimental, a medição de qualquer vibração forçada caracteriza um ODS. A medição dos modos de vibração, por sua vez, é um caso especial de ODS. Ou seja, os modos de vibração são obtidos através da interpretação ou pós-processamento do ODS medido de uma forma específica.

A análise modal experimental é normalmente realizada com o uso de uma força senoidal controlada. Para que os resultados medidos caracterizem um modo de vibração, três condições devem ser atendidas:

- A força de excitação deve ser aplicada em um grau de liberdade que não seja um nó do modo de vibração (ponto no qual o movimento é nulo);
- A freqüência de excitação deve estar próxima de uma freqüência de ressonância;
- Em uma dada freqüência de ressonância, o ODS deve ser dominado por um único modo de vibração.

Outras diferenças entre modos de vibração e ODS são:

- Um modo de vibração é apenas um conjunto de valores relativos, portanto não apresenta unidade. O ODS, por sua vez, apresenta unidade e mostra exatamente quanto uma determinada estrutura está se movendo;
- Para obter experimentalmente os modos de vibração, todas as forças de excitação devem ser conhecidas e mensuradas. Para medir um ODS, não é necessário conhecer as forças de excitação.

### **2.5.1- Aplicações de ODS**

Muitas das aplicações de ODS podem ser divididas em três categorias:

- Visualização das deformações de um equipamento em operação;
- Detecção de dano em estruturas;
- Obtenção de parâmetros modais sem a necessidade de realizar uma análise modal experimental.

#### **2.5.1.1- Visualização das Deformações**

Os dados vibracionais coletados experimentalmente são representados muitas vezes na forma de gráficos no domínio do tempo ou da freqüência. Esta representação, no entanto, não possibilita uma visualização adequada das relações entre diferentes pontos de medição. A utilização de animações para uma melhor visualização dos dados é uma das aplicações mais freqüentes de ODS.

#### **2.5.1.2- Detecção de Dano**

De acordo com Waldron et al. (2002), a detecção de dano em estruturas pode aumentar a segurança, estender a vida útil, reduzir custos de manutenção e definir limites de operação reduzidos. Os métodos baseados no comportamento vibracional são uma nova abordagem na detecção de dano. Estes métodos são mais sensíveis de forma global, ao contrário de métodos de detecção local tais como ultra-som e circulação de corrente.

A interpretação das respostas vibracionais é normalmente um procedimento complicado, devido às variações que uma estrutura pode sofrer quando sujeita às diversas condições do ambiente operacional. A qualidade da identificação de dano depende da quantidade e dos tipos de sensores e atuadores utilizados.

Uma técnica que vem sendo bastante estudada é a utilização de ODS na detecção de dano. O ODS apresenta os padrões de deslocamentos ou velocidades de uma estrutura vibrando em estado permanente, devido a um determinado carregamento. O ODS pode ser representado teoricamente como a soma dos modos de vibração multiplicados por valores adequados de escala. Através de um modelo em elementos finitos, os parâmetros de excitação mais adequados podem ser escolhidos para ajudar na identificação dos danos na estrutura.

Segundo Pai e Young (2001), o monitoramento de danos em estruturas através de suas respostas dinâmicas vem se tornando uma abordagem factível nos últimos anos. Uma fissura em uma determinada estrutura introduz flexibilidades localizadas, que alteram o comportamento dinâmico de todo o conjunto. No entanto, para que estas mudanças sejam visualizadas, é necessário excitar a estrutura em altas freqüências. Para que os modos de altas freqüências sejam adequadamente detectados, necessita-se de uma resolução espacial razoável e de uma boa precisão dos resultados.

### **2.5.1.3- Obtenção de Parâmetros Modais**

Conforme Parloo et al. (2002), a única forma possível de se obter um modelo modal de certas estruturas é através da análise modal em operação. Ou seja, não é possível ou viável realizar uma análise modal convencional, na qual a força de excitação é controlada. Utilizam-se, portanto, as próprias condições operacionais da estrutura.

A vantagem de coletar as respostas vibracionais no próprio ambiente operacional é que, muitas vezes, os testes laboratoriais diferem significativamente das condições normais de operação. Por outro lado, não se conhecem as forças que excitam uma determinada estrutura durante a sua operação. Portanto, nem todos os parâmetros modais podem ser estimados, o que leva a modos de vibração fora de escala.

O modelo modal obtido pela análise em operação é incompleto, o que restringe seu campo de aplicações. As técnicas de localização de dano são um exemplo de aplicação que dependem da normalização dos modos de vibração. Desta forma, a determinação de valores adequados de escala se faz necessária.

Parloo et al. (2002) propõe um método de normalização baseado apenas nas respostas vibracionais de uma determinada estrutura. Se uma ou mais massas de valores conhecidos são adicionadas à estrutura, seus modos de vibração podem ser

normalizados tomando como base as variações entre as freqüências naturais da estrutura original e da estrutura com as massas.

De acordo com Han e Feeny (2003), os modos de vibração de uma determinada estrutura podem ser extraídos sem a necessidade de medir diversas FRFs. Isto se dá através da implementação de POD (*Proper Orthogonal Decomposition*) sobre as respostas estruturais medidas. A técnica de POD é menos restritiva de se implementar que a análise modal convencional, pois dispensa a medição das forças de excitação.

Para que os POMs (*Proper Orthogonal Modes*) obtidos da POD sejam os modos de vibração da estrutura, é necessário que várias condições sejam atendidas:

- As respostas vibracionais devem conter contribuições de todos os modos de vibração que serão extraídos;
- A matriz de massa da estrutura deve ser um múltiplo constante da matriz identidade, ou então a matriz de massa correspondente ao sistema de coordenadas de medição deve ser conhecida;
- As freqüências naturais da estrutura devem ser bem separadas, de forma que a correlação entre diferentes modos de vibração seja pequena;
- Todas as respostas vibracionais precisam ser medidas simultaneamente sob a mesma excitação.

Quando a POD é aplicada sobre as respostas temporais da estrutura, observa-se que apenas um modo ortogonal converge para um determinado modo de vibração da estrutura. O modo que converge é aquele que apresenta maior contribuição nas respostas obtidas. Os outros modos ortogonais apresentam desvios em relação aos modos de vibração. Estes desvios dependem da resolução espacial dos dados obtidos, ou seja, do número de posições medidas.

Na prática, apenas um número limitado de graus de liberdade pode ser medido simultaneamente, o que compromete a obtenção dos modos de vibração. Han e Feeny (2003) sugerem o uso de *cross-spectral density functions* para eliminar a limitação de que as respostas vibracionais devam ser medidas simultaneamente. Desta forma, basta utilizar um grau de liberdade de referência para todas as medições e a resolução espacial pode ser melhorada tanto quanto necessária.

### 2.5.2- Escolha das Posições dos Transdutores

A escolha das posições dos transdutores é um passo importante para a coleta de dados vibracionais. Existem diversos métodos voltados para este fim. Neste trabalho, serão abordados dois destes métodos: um procedimento baseado na redução de Guyan e o método *effective independence distribution vector*.

#### 2.5.2.1- Redução de Guyan

De acordo com Atalla (1996), a maneira mais simples de reduzir o número de GDL de um modelo é particionar as matrizes de rigidez e massa e o vetor de carregamentos em GDL mestres e escravos.

Considerando que nenhuma força é aplicada aos GDL escravos, tem-se:

$$\begin{bmatrix} M_{mm} & M_{me} \\ M_{em} & M_{ee} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{U}_m \\ \ddot{U}_e \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{mm} & K_{me} \\ K_{em} & K_{ee} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_m \\ U_e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_m \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.224)$$

Na redução de Guyan, as matrizes  $[M_{em}]$  e  $[M_{ee}]$  são desprezadas, o que leva a:

$$[K_{em}]\{U_m\} + [K_{ee}]\{U_e\} = 0 \quad (2.225)$$

Ou seja:

$$\{U_e\} = -[K_{ee}]^{-1}[K_{em}]\{U_m\} \quad (2.226)$$

A Eq. (2.226) pode ser utilizada para eliminar os GDL escravos:

$$\begin{Bmatrix} U_m \\ U_e \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ -[K_{ee}]^{-1}[K_{em}] \end{bmatrix} \{U_m\} = [T]_e \{U_m\} \quad (2.227)$$

Portanto:

$$\begin{aligned} [M]_r &= [T]_e^T [M] [T]_e \\ [K]_r &= [T]_e^T [K] [T]_e \end{aligned} \quad (2.228)$$

Onde  $[M]_r$  e  $[K]_r$  são as matrizes de rigidez e massa reduzidas.

Considerando que os GDL mestres são aqueles nos quais os transdutores serão posicionados, o seguinte procedimento é utilizado:

- Eliminam-se os GDL rotacionais e não-acessíveis do modelo original;
- Elimina-se o GDL com maior razão  $k_{ii}/m_{ii}$ ;
- Repete-se o passo anterior até que o número de GDL restantes seja igual ao número desejado de transdutores.

### 2.5.2.2- Método *Effective Independence Distribution Vector*

Este método seleciona os locais de medição que representam os modos de vibração de interesse da forma mais linearmente independente possível. Inicialmente, realiza-se uma redução de Guyan sobre os GDL rotacionais e não-acessíveis. Calcula-se então a matriz de Fisher:

$$[\hat{S}] = [\Phi]_r^T [\Phi]_r \quad (2.229)$$

Onde  $[\Phi]_r$  é a matriz que contém os modos de vibração, já reduzida.

Calcula-se a matriz  $[\hat{P}]$ :

$$[\hat{P}] = [\Phi]_r [\hat{S}]^{-1} [\Phi]_r^T \quad (2.230)$$

Esta matriz é chamada de idempotente, pois  $[\hat{P}] = [\hat{P}]^2$ . Ela apresenta a propriedade que seu traço é igual ao seu posto (*rank*). Portanto, os elementos da diagonal principal de  $[\hat{P}]$  representam a contribuição de cada GDL para o posto desta matriz.

O GDL correspondente ao menor elemento na diagonal principal de  $[\hat{P}]$  é removido, pois ele apresenta a menor contribuição para a independência linear dos vetores em  $[\Phi]_r$ . O procedimento usado para calcular as matrizes  $[\Phi]_r$ ,  $[\hat{S}]$  e  $[\hat{P}]$  é repetido até que o número de GDL seja igual ao número de transdutores.

## **Capítulo 3**

### **METODOLOGIA**

Neste capítulo, serão apresentadas as ferramentas criadas para avaliação veicular, mostrando o desenvolvimento teórico e a implementação computacional de cada ferramenta. Um destaque maior foi dado à interface gráfica criada, que possibilita a visualização dos recursos de entrada de dados e interpretação dos resultados.

#### **3.1- Determinação e Estudo de Parâmetros Veiculares - MDV**

O programa MDV (Modelo Dinâmico de Veículos) foi desenvolvido para a modelagem dinâmica de um veículo com dois eixos. Basicamente, o MDV oferece ao usuário a possibilidade de alterar uma série de parâmetros de um certo veículo e verificar a resposta de *ride* deste, ao percorrer um determinado perfil de pista.

O MDV oferece quatro tipos de resposta:

- Gráficos de resposta em estado permanente do veículo percorrendo o perfil de pista definido;
- Gráficos de resposta em freqüência obtidos a partir de uma entrada senoidal de amplitude unitária aplicada simultaneamente a cada eixo do veículo;
- Animação da resposta em estado permanente;
- Animação dos modos de vibração do veículo.

No desenvolvimento do modelo veicular, foram adotadas as direções e grandezas apresentadas na Fig. 3.1 e na Fig 3.2.

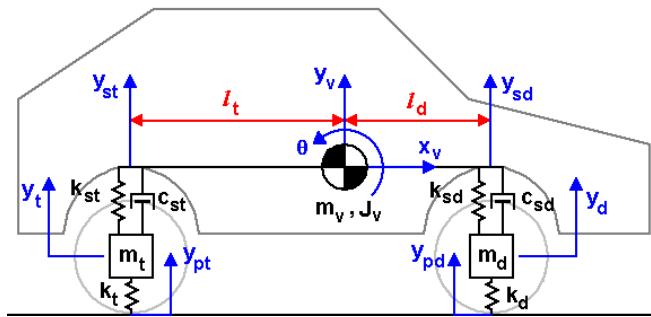


Figura 3.1 – Direções e grandezas adotadas.

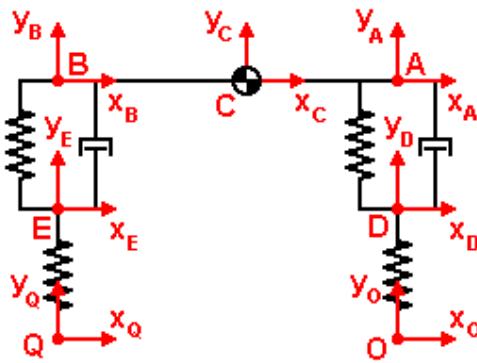


Figura 3.2 – Sistemas locais de coordenadas.

Onde:

- $l_d$ : distância horizontal do C.G. ao eixo dianteiro
- $l_t$ : distância horizontal do C.G. ao eixo traseiro
- $y_{pd}, y_{pt}$ : deslocamentos verticais da pista em relação aos pontos  $O$  e  $Q$ , respectivamente.
- $y_{rd}, y_{rt}$ : deslocamentos verticais das rodas em relação aos pontos  $D$  e  $E$ , respectivamente.
- $y_{sd}, y_{st}$ : deslocamentos verticais do topo da suspensão em relação aos pontos  $A$  e  $B$ , respectivamente.
- $y_v$ : deslocamento vertical do veículo em relação ao ponto  $C$ .
- $\theta$ : rotação do veículo (*pitch*) em torno do ponto  $C$ .

De posse das variáveis que definem o veículo, o modelo foi equacionado.

Relacionando os deslocamentos  $y_{sd}$  e  $y_{st}$  com o deslocamento  $y_v$  e a rotação  $\theta$ :

$$y_{sd} = y_v + l_d \cdot \operatorname{tg} \theta \approx y_v + l_d \theta \quad (3.1)$$

$$y_{st} = y_v - l_t \cdot \operatorname{tg} \theta \approx y_v - l_t \theta \quad (3.2)$$

Isolando  $\theta$  das Eq. (3.1) e (3.2):

$$\theta = \frac{y_{sd} - y_{st}}{l_d + l_t} \quad (3.3)$$

Obtém-se:

$$y_{sd} = y_v + l_d \frac{y_{sd} - y_{st}}{l_d + l_t} \quad (3.4)$$

$$y_{st} = y_v - l_t \frac{y_{sd} - y_{st}}{l_d + l_t} \quad (3.5)$$

Isolando-se  $y_v$ :

$$y_v = \frac{l_d y_{st} + l_t y_{sd}}{l_d + l_t} \quad (3.6)$$

O equilíbrio de forças no C.G. do veículo é dado por:

$$\begin{aligned} \sum F_y &= m_v \ddot{y}_v \\ m_v \ddot{y}_v &= -k_{st}(y_{st} - y_{rt}) - c_{st}(\dot{y}_{st} - \dot{y}_{rt}) - k_{sd}(y_{sd} - y_{rd}) - c_{sd}(\dot{y}_{sd} - \dot{y}_{rd}) \end{aligned} \quad (3.7)$$

E o equilíbrio de momentos por:

$$\begin{aligned} \sum M_{CG} &= J_v \ddot{\theta} \\ J_v \ddot{\theta} &= l_t k_{st}(y_{st} - y_{rt}) + l_t c_{st}(\dot{y}_{st} - \dot{y}_{rt}) - l_d k_{sd}(y_{sd} - y_{rd}) - l_d c_{sd}(\dot{y}_{sd} - \dot{y}_{rd}) \end{aligned} \quad (3.8)$$

Para as rodas dianteiras, o equilíbrio de forças é dado por:

$$\begin{aligned} \sum F_y &= m_d \ddot{y}_{rd} \\ m_d \ddot{y}_{rd} &= -k_d(y_{rd} - y_{pd}) + k_{sd}(y_{sd} - y_{rd}) + c_{sd}(\dot{y}_{sd} - \dot{y}_{rd}) \end{aligned} \quad (3.9)$$

Para as rodas traseiras, o equilíbrio de forças é dado por:

$$\begin{aligned} \sum F_y &= m_t \ddot{y}_{rt} \\ m_t \ddot{y}_{rt} &= -k_t(y_{rt} - y_{pt}) + k_{st}(y_{st} - y_{rt}) + c_{st}(\dot{y}_{st} - \dot{y}_{rt}) \end{aligned} \quad (3.10)$$

As excitações aplicadas ao modelo se devem aos deslocamentos  $y_{pd}$  e  $y_{pt}$ , impostos pela pista. Como o modelo é bidimensional, considerou-se que o veículo trafega em linha reta. Portanto, as rodas dianteira e traseira percorrem o mesmo trajeto e  $y_{pt}$  está relacionado a  $y_{pd}$  com um certo atraso  $\Delta t$ :

$$y_{pt}(t) = y_{pd}(t - \Delta t) \quad (3.11)$$

O atraso depende da velocidade do veículo e da distância entre eixos ( $l_d + l_t$ ):

$$\Delta t = \frac{l_d + l_t}{\dot{x}_v} \quad (3.12)$$

O deslocamento  $y_{pd}$  pode ser representado por uma série de Fourier:

$$y_{pd}(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t) \quad (3.13)$$

Eliminando-se a parcela constante  $A_0$ , que não tem efeito dinâmico, a Eq. (3.13) pode ser escrita assim:

$$y_{pd}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(\omega_n t - \phi_n) \quad (3.14)$$

Onde:

$$\phi_n = \arctg \left( \frac{B_n}{A_n} \right) \quad (3.15)$$

$$C_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2} \quad (3.16)$$

Para um veículo movendo-se a uma velocidade constante  $\dot{x}$ , sabe-se que a freqüência angular  $\omega_n$  é relacionada à freqüência espacial  $\nu_n$  através de:

$$\omega_n = 2\pi\nu_n \dot{x} \quad (3.17)$$

Substituindo a Eq. (3.17) na Eq. (3.14):

$$y_{pd}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(2\pi\nu_n \dot{x}t - \phi_n) \quad (3.18)$$

Conforme Schiehlenm e Hu (2003), os coeficientes  $C_n$  podem ser obtidos a partir da equação:

$$C_n = \sqrt{2G_Z(\nu_n)\Delta\nu} \quad (3.19)$$

Onde:

- $G_Z(\nu)$  é uma função PSD da pista, tal como descrita na Eq. (2.223);
- $\Delta\nu$  é o incremento que há de  $\nu_n$  para  $\nu_{n+1}$ , que é igual a  $\nu_1$  para a Eq. (3.19).

Os ângulos de fase não são fornecidos pela função PSD. Portanto, é necessário estipular valores aleatórios, igualmente distribuídos, para os ângulos de fase  $\phi_n$ .

Para o eixo traseiro, tem-se:

$$y_{pt}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(\omega_n(t - \Delta t) - \phi_n) \quad (3.20)$$

Reunindo as Eq. (3.7) a (3.10) em forma matricial:

$$[M]\{\ddot{Y}\} + [C]\{\dot{Y}\} + [K]\{Y\} = \{F\} \quad (3.21)$$

Onde:

$$\{Y(t)\} = \begin{Bmatrix} y_v(t) \\ \theta(t) \\ y_{rd}(t) \\ y_{rt}(t) \end{Bmatrix} \quad (3.22)$$

$$\{\dot{Y}(t)\} = \frac{d\{Y(t)\}}{dt} = \begin{Bmatrix} \dot{y}_v(t) \\ \dot{\theta}(t) \\ \dot{y}_{rd}(t) \\ \dot{y}_{rt}(t) \end{Bmatrix} \quad (3.23)$$

$$\{\ddot{Y}(t)\} = \frac{d^2\{Y(t)\}}{dt^2} = \begin{Bmatrix} \ddot{y}_v(t) \\ \ddot{\theta}(t) \\ \ddot{y}_{rd}(t) \\ \ddot{y}_{rt}(t) \end{Bmatrix} \quad (3.24)$$

$$[M] = \begin{bmatrix} m_v & & & \\ & J_v & & \\ & & m_d & \\ & & & m_t \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

$$[C] = \begin{bmatrix} c_{sd} + c_{st} & l_d c_{sd} - l_t c_{st} & -c_{sd} & -c_{st} \\ l_d c_{sd} - l_t c_{st} & l_d^2 c_{sd} + l_t^2 c_{st} & -l_d c_{sd} & l_t c_{st} \\ -c_{sd} & -l_d c_{sd} & c_{sd} & \\ -c_{st} & l_t c_{st} & & c_{st} \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

$$[K] = \begin{bmatrix} k_{sd} + k_{st} & l_d k_{sd} - l_t k_{st} & -k_{sd} & -k_{st} \\ l_d k_{sd} - l_t k_{st} & l_d^2 k_{sd} + l_t^2 k_{st} & -l_d k_{sd} & l_t k_{st} \\ -k_{sd} & -l_d k_{sd} & k_{sd} + k_d & \\ -k_{st} & l_t k_{st} & & k_{st} + k_t \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ k_d y_{pd} \\ k_t y_{pt} \end{Bmatrix} \quad (3.28)$$

### 3.1.1- Solução do Sistema de Equações

A Eq. (3.21) pode ser resolvida de acordo com o procedimento de análise modal para amortecimento viscoso, Eq. (2.77) a (2.98). Na Eq. (2.98), considera-se que todas as forças estão na mesma freqüência. Para atender a esta consideração, é necessário colocar os deslocamentos  $y_{pd}$  e  $y_{pt}$  na forma das Eq. (3.14) e Eq. (3.20), respectivamente.

Quando os deslocamentos são representados em uma série de Fourier, cada componente corresponde a uma determinada freqüência. A Eq. (2.98) pode, então, ser aplicada a cada componente. Os resultados obtidos são sobrepostos, gerando o resultado no domínio do tempo da Eq. (3.21).

### 3.1.2- Força Transmitida pelos Pneus

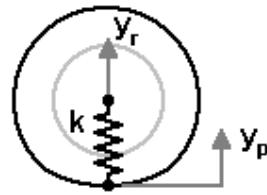


Figura 3.3 – Força transmitida pelos pneus.

Tomando como base a Fig. 3.3, tem-se para o eixo dianteiro:

$$F_{T,rd} = k_d (y_{rd} - y_{pd}) \quad (3.29)$$

E para o eixo traseiro:

$$F_{T,rt} = k_t (y_{rt} - y_{pt}) \quad (3.30)$$

### 3.1.3- Força Transmitida pela Suspensão

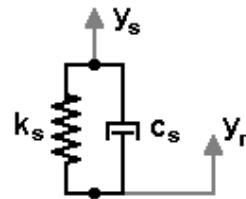


Figura 3.4 – Força transmitida pela suspensão.

Tomando como base a Fig. 3.4, tem-se para o eixo dianteiro:

$$F_{T,sd} = k_{sd} (y_{sd} - y_{rd}) + c_{sd} (\dot{y}_{sd} - \dot{y}_{rd}) \quad (3.31)$$

E para o eixo traseiro:

$$F_{T,st} = k_{st} (y_{st} - y_{rt}) + c_{st} (\dot{y}_{st} - \dot{y}_{rt}) \quad (3.32)$$

### 3.1.4- Sistemas Locais de Coordenadas

Como pode ser visto na Fig. 3.2, os eixos  $x$  de todos os sistemas de coordenadas são colocados na horizontal, enquanto que os eixos  $y$  são colocados na vertical. As origens dos sistemas de coordenadas são obtidas quando não há esforços atuando sobre o veículo.

Para calcular as origens dos sistemas locais de coordenadas, é necessário considerar que os eixos do veículo possam ter pneus de raios diferentes ou suspensões com alturas diferentes. A Fig. 3.5 apresenta as alturas dos conjuntos pneu-suspensão para os eixos dianteiro e traseiro.

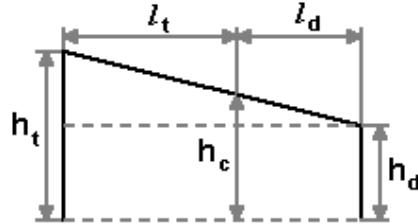


Figura 3.5 – Alturas dos conjuntos pneu-suspensão.

Tem-se:

$$\begin{aligned} h_d &= r_d + s_d \\ h_t &= r_t + s_t \end{aligned} \quad (3.33)$$

Onde:

- $r_d$ : raio do pneu dianteiro (sem deformações)
- $r_t$ : raio do pneu traseiro (sem deformações)
- $s_d$ : altura livre da suspensão dianteira
- $s_t$ : altura livre da suspensão traseira
- $h_d$ : altura do conjunto pneu-suspensão do eixo dianteiro
- $h_t$ : altura do conjunto pneu-suspensão do eixo traseiro
- $h_c$ : altura do ponto de referência alinhado verticalmente com o C.G.

Há três casos a serem avaliados:

$$\begin{aligned} h_d &= h_t \rightarrow h_c = h_d = h_t \\ h_d &< h_t \rightarrow h_c = h_d + l_d \frac{h_t - h_d}{l_d + l_t} \\ h_d &> h_t \rightarrow h_c = h_t + l_t \frac{h_d - h_t}{l_d + l_t} \end{aligned} \quad (3.34)$$

Tomando os eixos ( $x_O, y_O$ ) como referência, a posição instantânea de cada ponto é dada por:

$$\begin{aligned}
 & \begin{cases} A_x(t) = 0 \\ A_y(t) = h_d + y_v(t) + l_d\theta(t) \end{cases} \\
 & \begin{cases} B_x(t) = -(l_d + l_t) \\ B_y(t) = h_t + y_v(t) - l_t\theta(t) \end{cases} \\
 & \begin{cases} C_x(t) = 0 \\ C_y(t) = h_c + y_v(t) \end{cases} \\
 & \begin{cases} D_x(t) = 0 \\ D_y(t) = r_d + y_{rd}(t) \end{cases} \\
 & \begin{cases} E_x(t) = -(l_d + l_t) \\ E_y(t) = r_t + y_{rt}(t) \end{cases} \\
 & \begin{cases} O_x(t) = 0 \\ O_y(t) = y_{pd}(t) \end{cases} \\
 & \begin{cases} Q_x(t) = -(l_d + l_t) \\ Q_y(t) = y_{pt}(t) \end{cases}
 \end{aligned} \tag{3.35}$$

### 3.1.5- Interface do MDV

Esta seção apresenta as telas que interagem com o usuário do MDV. Foram criadas seis telas, sendo as duas primeiras voltadas para a entrada de dados e as outras quatro voltadas para a visualização e a interpretação dos resultados.

A primeira tela do MDV, Fig. 3.6, contém os parâmetros do veículo. É apresentada uma figura que indica os graus de liberdade do modelo e as variáveis a serem fornecidas.

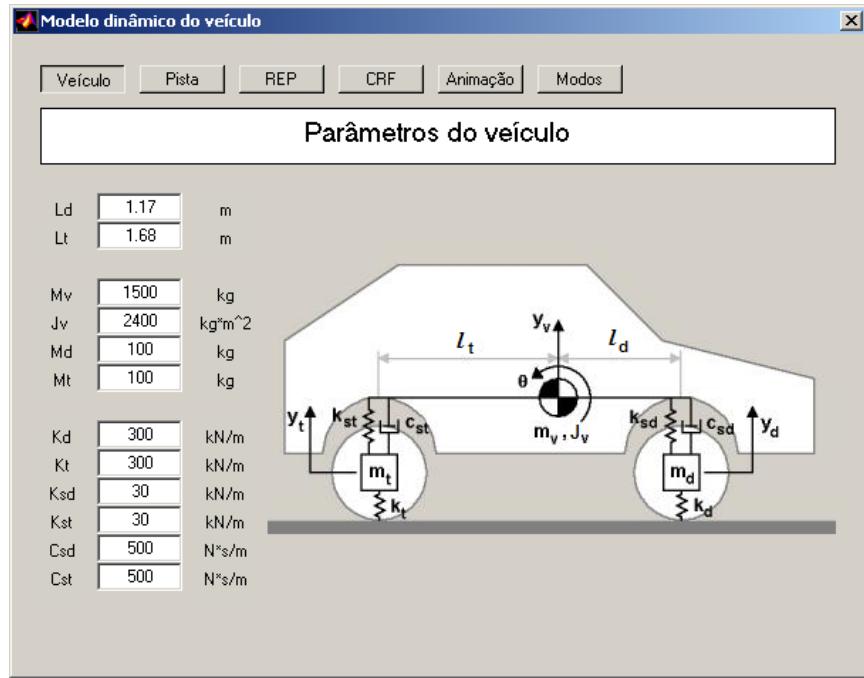


Figura 3.6 – Parâmetros do veículo

Onde:

- $l_d$ : distância horizontal do CG do veículo ao eixo dianteiro (m);
- $l_t$ : distância horizontal do CG do veículo ao eixo traseiro (m);
- $m_v$ : massa suspensa do veículo (kg);
- $J_v$ : inércia de *pitch* do veículo ( $\text{kg} \times \text{m}^2$ );
- $m_d$ : massa não-suspensa do eixo dianteiro (kg);
- $m_t$ : massa não-suspensa do eixo traseiro (kg);
- $k_d$ : rigidez dos pneus dianteiros (kN/m);
- $k_t$ : rigidez dos pneus traseiros (kN/m);
- $k_{sd}$ : rigidez da suspensão dianteira (kN/m);
- $k_{st}$ : rigidez da suspensão traseira (kN/m);
- $c_{sd}$ : coeficiente de amortecimento da suspensão dianteira ( $\text{N} \times \text{s}/\text{m}$ );
- $c_{st}$ : coeficiente de amortecimento da suspensão traseira ( $\text{N} \times \text{s}/\text{m}$ ).

Os valores iniciais para os parâmetros do veículo foram baseados no trabalho de Margolis e Shim (2001).

A segunda tela do MDV, Fig 3.7, apresenta os parâmetros que definem um perfil de pista. Os parâmetros que podem ser modificados pelo usuário afetam o comprimento e amplitudes do perfil. Os ângulos de fase de cada componente são calculados aleatoriamente em uma distribuição homogênea, a cada vez que o usuário clica no botão “Calcular”.

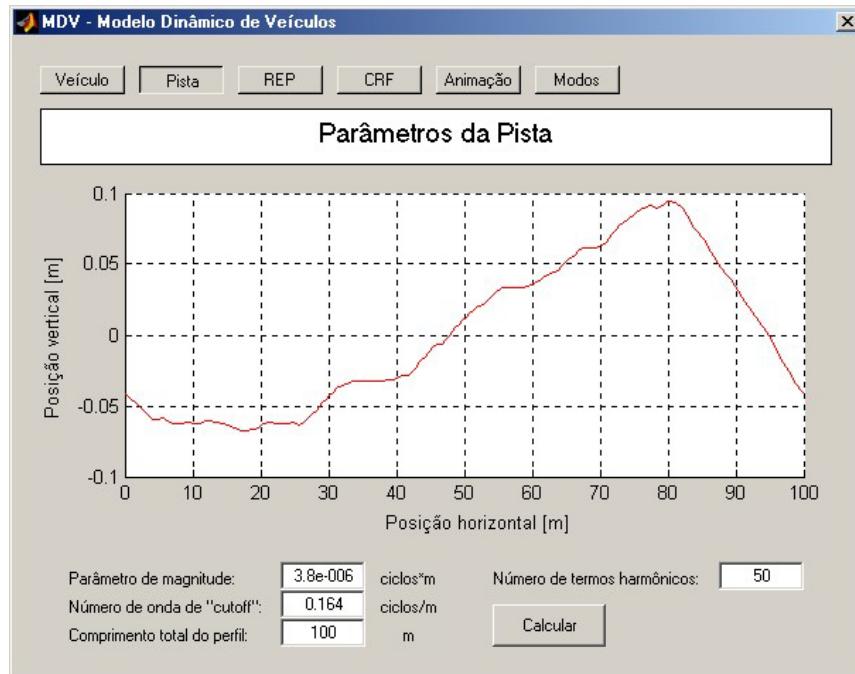


Figura 3.7 – Parâmetros da pista

Os parâmetros que devem ser preenchidos pelo usuário são:

- $G_0$ : parâmetro de magnitude das irregularidades (ciclos × m);
- $\nu_0$ : número de onda de *cutoff* (ciclos/m);
- $L$ : comprimento total do perfil (m);
- $N_h$ : número de termos harmônicos utilizados no perfil.

Os valores iniciais para os parâmetros  $G_0$  e  $v_0$  foram baseados no trabalho de Gillespie (1992), mas convertidos para o Sistema Internacional de unidades.

A terceira tela do MDV, Fig. 3.8, apresenta os resultados em estado permanente, quando o veículo percorre o perfil de pista a uma dada velocidade. É possível modificar o valor da velocidade do veículo e verificar a variação na resposta. Além disto, é possível incluir a resposta estática devida ao peso próprio do veículo.

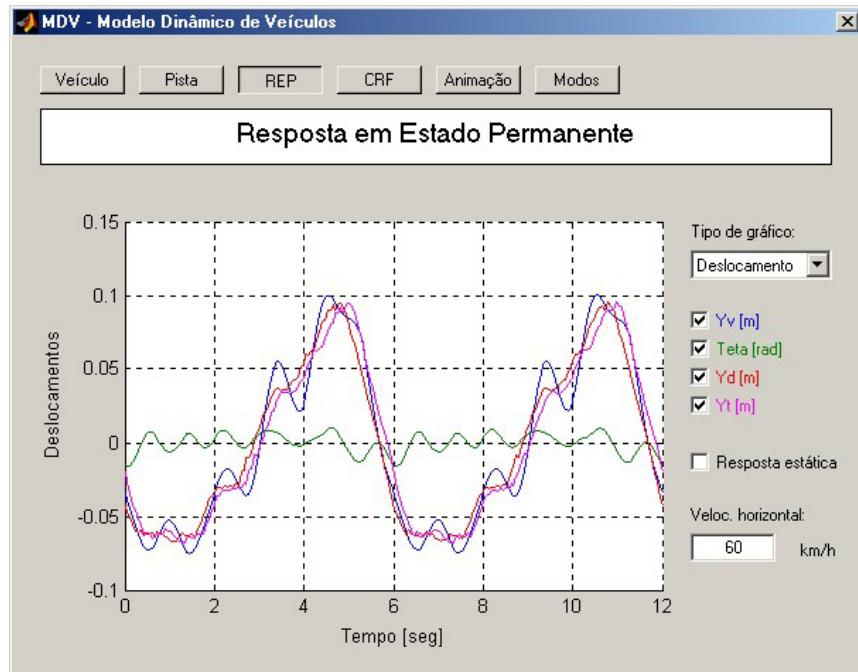


Figura 3.8 – Resposta em estado permanente

Há três grandezas que podem ser visualizadas:

- Deslocamento(m) ou rotação (rad);
- Velocidade (m/s) ou (rad/s);
- Aceleração ( $m/s^2$ ) ou ( $rad/s^2$ ).

A apresentação dos resultados foi implementada de forma a possibilitar ao usuário a seleção de quais graus de liberdade serão visualizados. A Fig. 3.8 apresenta um exemplo no qual todos os GDL são visualizados simultaneamente.

Como pode ser visto na Fig. 3.8, o eixo vertical do gráfico não apresenta uma unidade. Isto foi adotado porque tanto deslocamentos quanto rotações são exibidos no mesmo gráfico. As unidades são apresentadas ao lado de cada GDL.

A quarta tela, Fig. 3.9, apresenta a resposta em freqüência do veículo quando submetido a uma entrada senoidal de amplitude unitária em cada eixo. São apresentados gráficos de amplitude e fase em função da freqüência. É possível visualizar a escala de freqüências de forma linear ou logarítmica e a escala de amplitudes em decibéis ou em forma linear.

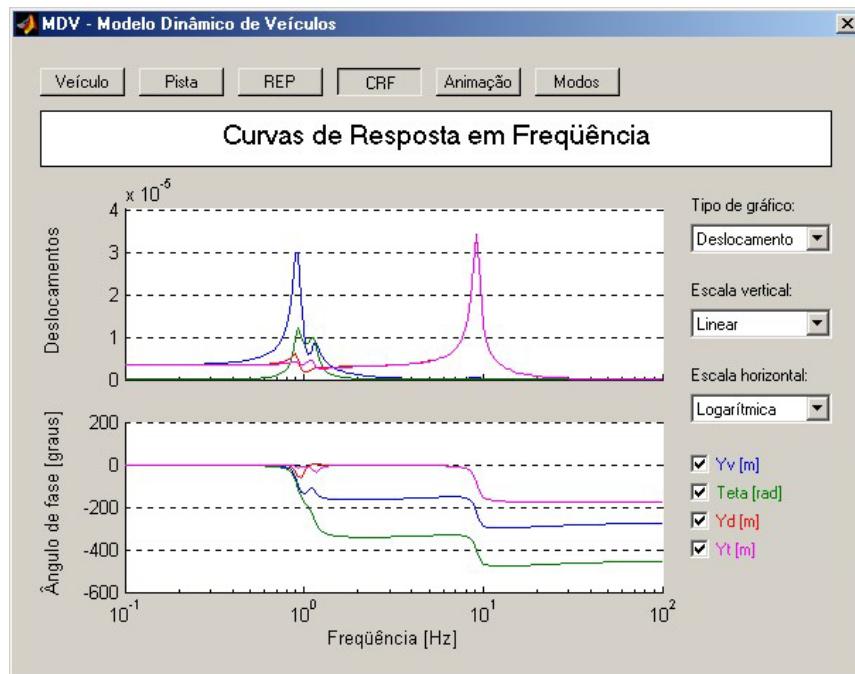


Figura 3.9 – Curvas de resposta em freqüência

Assim como na resposta em estado permanente, é possível visualizar os resultados de deslocamentos, velocidades e acelerações. Os graus de liberdade podem ser exibidos ou ocultados separadamente.

Como pode ser visto na Fig. 3.9, o eixo relacionado às amplitudes não apresenta uma unidade, pelas mesmas razões da tela de resposta em estado permanente. As unidades são apresentadas ao lado de cada GDL.

A quinta tela, Fig. 3.10, apresenta uma animação do veículo percorrendo o perfil de pista calculado. É possível variar a velocidade do veículo e a escala dos deslocamentos.

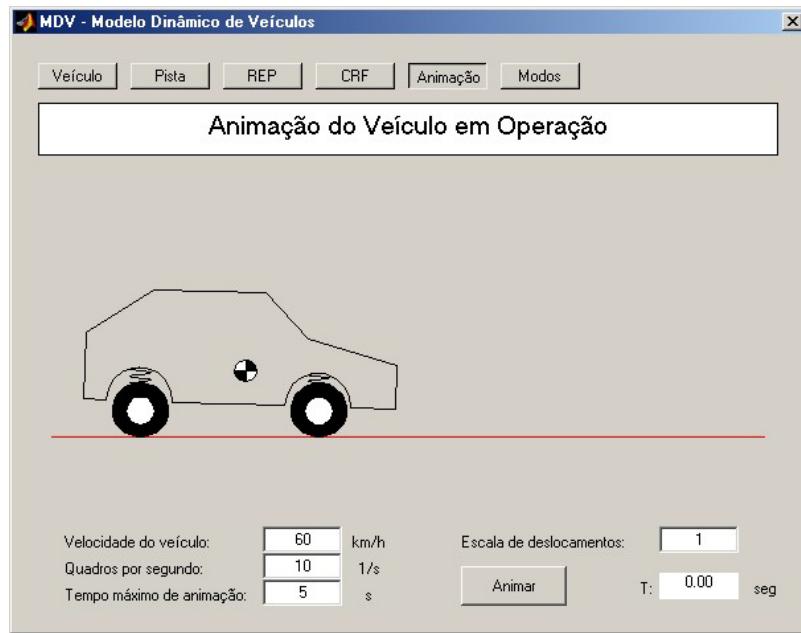


Figura 3.10 – Animação do veículo em operação

Para uma maior controle sobre a exibição dos resultados, duas opções de configuração da animação foram implementadas: número de quadros por segundo e o tempo máximo de animação.

A sexta e última tela, Fig. 3.11, apresenta as freqüências naturais e os modos de vibração do veículo.

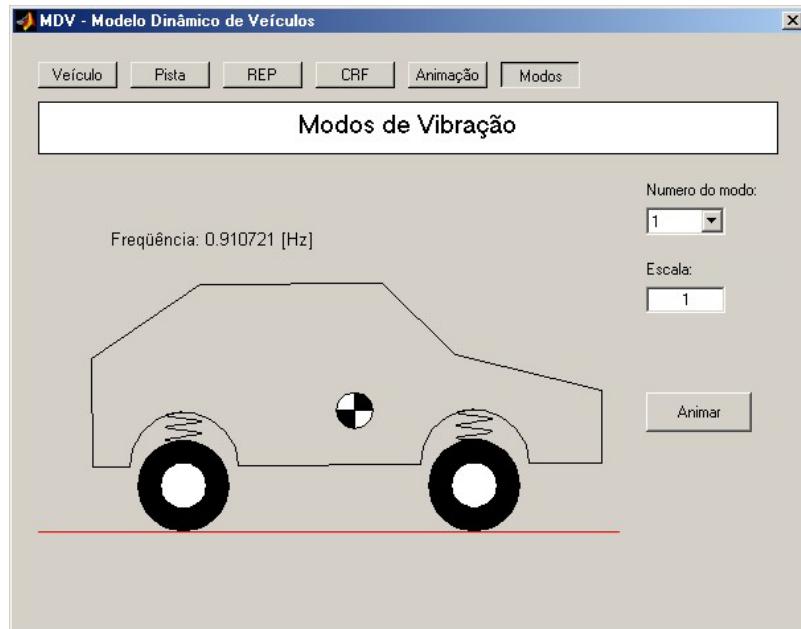


Figura 3.11 – Modos de vibração

Também nesta fase de apresentação dos resultados é possível alterar a escala de deslocamentos. Há uma opção de animar o modo de vibração, multiplicando-se o modo por uma senóide de amplitude unitária em função do tempo.

### 3.2- Verificação de Comportamento Estrutural - ADES

O ADES (Análise de Estruturas) é um programa de análise estrutural executado através do software MATLAB<sup>TM</sup>. O programa é uma combinação de CAD (*Computer Aided Design*), ODS (*Operational Deflection Shape* ou *Operating Deflection Shape*) e FEM (*Finite Element Method*). Sua interface é apresentada na Fig. 3.12:

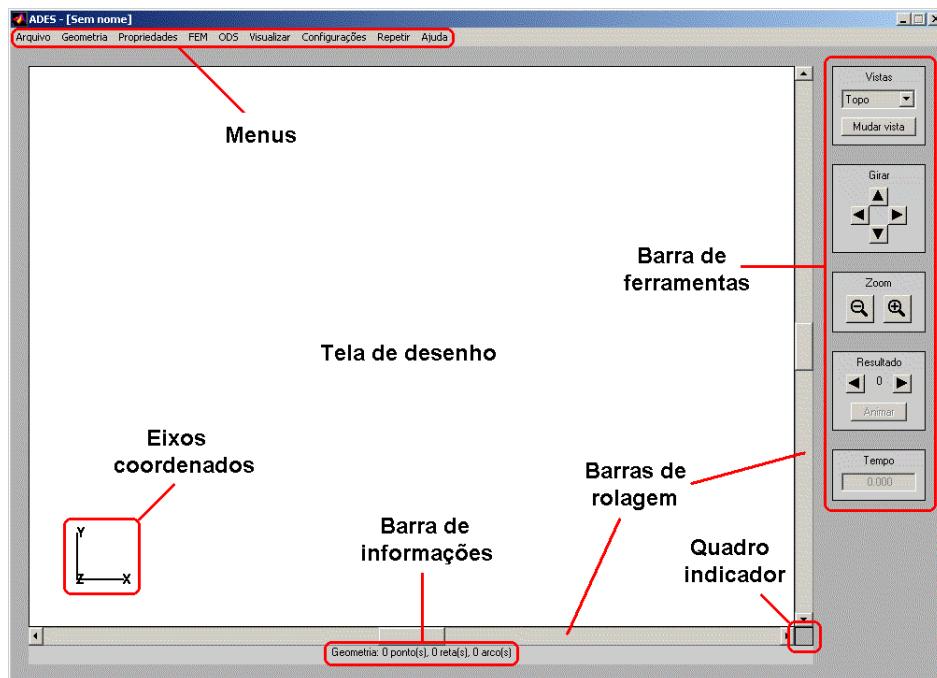


Figura 3.12 – Interface do ADES

- Tela de desenho - Parte da tela na qual o modelo é exibido;
- *Menus* - Contém a maioria dos comandos do programa;
- Barra de ferramentas - Contém comandos de visualização do modelo;
- Barras de rolagem - Movimentam a tela nas direções horizontal e vertical (*pan*);
- Eixos coordenados - Indicam a orientação do modelo na tela;

- Barra de informações - Apresenta informações sobre objetos e passos da análise;
- Quadro indicador - Mostra se o arquivo foi modificado, ou se há uma análise em andamento.

O desenvolvimento da ferramenta ADES teve como filosofia a simplicidade de uso e a possibilidade de escolha de diferentes algoritmos de solução. A ferramenta permite a solução de problemas estáticos e dinâmicos, incorporando técnicas de animação para uma melhor compreensão dos resultados obtidos.

O ADES permite o traçado de uma geometria tridimensional qualquer, composta por segmentos de reta e arcos de circunferência. Os segmentos são formados pela ligação de dois pontos e os arcos por três pontos. Estes pontos são definidos através de um sistema cartesiano de coordenadas ( $X, Y, Z$ ).

Dois tipos de elementos finitos foram implementados: hastes e vigas. A haste é um elemento que resiste apenas a esforços de tração e compressão. A viga, além de resistir a esforços axiais, resiste também a esforços transversais e à torção ao longo do seu eixo. Ambos os elementos são unidimensionais, ou seja, apresentam apenas comprimento. Portanto, é necessário definir as propriedades de suas seções transversais (áreas, momentos de inércia, etc.).

A Fig. 3.13 apresenta as convenções adotadas para uma seção transversal qualquer, indicando as direções segundo as quais suas propriedades são definidas:

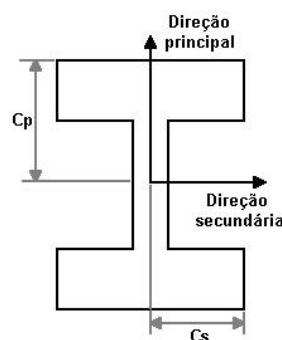


Figura 3.13 – Convenções adotadas para uma seção transversal qualquer

As dimensões  $c_p$  e  $c_s$  representam as distâncias das fibras mais externas até as linhas neutras. Enquanto que  $c_p$  é orientada ao longo da direção principal,  $c_s$  é orientada ao longo da direção secundária.

Chamando a direção principal de  $p$  e a direção secundária de  $s$ , o momento de inércia principal é o momento  $I_{ss}$ , enquanto que o momento secundário é o momento  $I_{pp}$ . Ou seja, o momento de inércia principal é aquele em torno da direção secundária, enquanto que o momento secundário é aquele em torno da direção principal.

Os módulos resistentes da seção ( $W_p$  e  $W_s$ ) são dados por:

$$W_p = \frac{I_{ss}}{c_p} \quad (3.36)$$

$$W_s = \frac{I_{pp}}{c_s} \quad (3.37)$$

As direções principal e secundária são definidas através da direção axial do elemento e de um vetor de orientação. É importante ressaltar que estes vetores não podem ser colineares. A Fig. 3.14 mostra os vetores em questão.

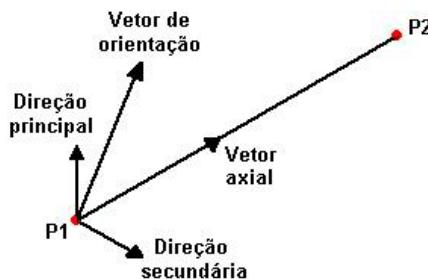


Figura 3.14 – Convenções adotadas para uma seção transversal qualquer

Os vetores e direções apresentados na Fig. 3.14 são:

- Vetor axial: é colinear ao segmento de reta que liga os pontos  $P_1$  e  $P_2$ . A orientação deste vetor é dada de  $P_1$  para  $P_2$ .
- Vetor de orientação: é o vetor definido durante a criação da seção transversal.

- Direção principal: é um vetor contido no plano formado pelos vetores axial e de orientação e que é perpendicular ao vetor axial.
- Direção secundária: é definida pela regra da mão direita, ou seja, através do produto vetorial entre o vetor axial e a direção principal.

Para oferecer uma maior flexibilidade de trabalho ao usuário, a ferramenta ADES foi criada incorporando o conceito de grupos de trabalho, cuja finalidade é fazer uma ponte entre a geometria e a malha de elementos finitos a ser gerada. Cada grupo contém um tipo de elemento, um conjunto de propriedades de seção transversal e as propriedades de um material.

O ADES oferece quatro algoritmos para solução estática:

- Algoritmo padrão do MATLAB (função *mldivide*);
- Fatorização LDL;
- Fatorização de Householder;
- Fatorização de Givens.

Para a solução dinâmica, são oferecidos dois algoritmos:

- Algoritmo padrão do MATLAB (função *eig*)
- *Subspace iteration*

Para a formulação dos elementos e para a apresentação dos resultados, é necessário adotar uma convenção para as forças e momentos. No ADES, o sentido positivo adotado para os esforços é dado pela Fig 3.15.

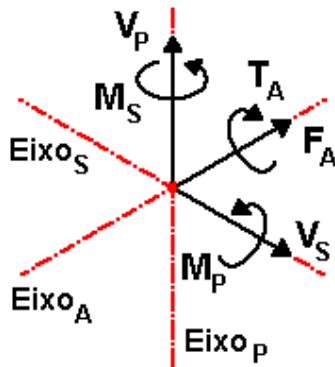


Figura 3.15 – Convenção adotada para os esforços.

Onde:

- $F_A$ : Força de tração/compressão;
- $T_A$ : Momento torçor;
- $M_P$ : Momento fletor principal;
- $M_S$ : Momento fletor secundário;
- $V_P$ : Força cortante principal;
- $V_S$ : Força cortante secundária.

As unidades adotadas no ADES para as forças e momentos são Newtons e Newton-metros, respectivamente. As tensões são dadas em Pascal. Para cada esforço indicado na Fig 3.16, pode-se calcular uma tensão correspondente:

- $\sigma_A$ : Tensão devida ao esforço de tração/compressão;
- $\tau_A$ : Tensão de cisalhamento devida à torção;
- $\sigma_P$ : Tensão máxima devida ao momento fletor principal;
- $\sigma_S$ : Tensão máxima devida ao momento fletor secundário;
- $\tau_P$ : Tensão de cisalhamento devida à força cortante principal;
- $\tau_S$ : Tensão de cisalhamento devida à força cortante secundária.

### 3.2.1- Parte Gráfica do ADES

A maioria dos programas de elementos finitos incorpora ferramentas de desenho. O ADES não é uma exceção. Ele apresenta vários recursos de desenho e visualização, cujos desenvolvimentos são aqui apresentados.

#### 3.2.1.1- Fator de Zoom

O fator de *zoom* é a relação entre o tamanho dos objetos exibidos na tela e o tamanho real destes objetos. O ADES utiliza dimensões em milímetros para os objetos, porém a unidade de exibição na tela de um computador é dada em pixels. Portanto, o fator de *zoom* possui unidade de pixels por milímetros.

#### 3.2.1.2- Vistas Isométricas

O caso básico é dado pela Fig. 3.16.

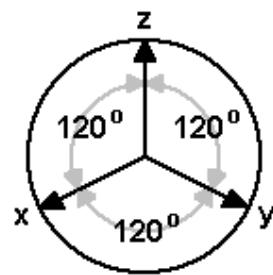


Figura 3.16 – Caso básico de vista isométrica.

Os eixos coordenados são visualizados como vetores com o mesmo tamanho e diferença de orientação de 120°. Esta vista pode ser atingida a partir de uma vista retangular, realizando-se duas rotações, como pode ser visto na Fig. 3.17.

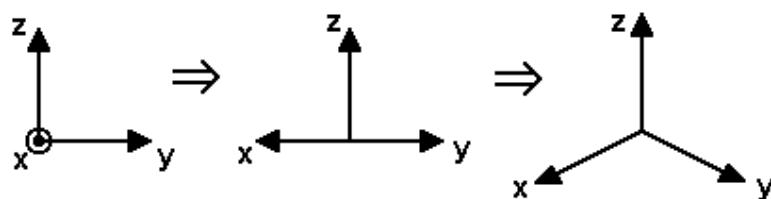


Figura 3.17 – Seqüência de rotações necessárias para colocar os eixos na posição de uma vista isométrica.

Na posição intermediária da Fig. 3.17, sabe-se que:

$$\begin{aligned}\vec{x} &= -\sqrt{2}/2 \vec{h} + \sqrt{2}/2 \vec{p} \\ \vec{y} &= \sqrt{2}/2 \vec{h} + \sqrt{2}/2 \vec{p} \\ \vec{z} &= \vec{v}\end{aligned}\quad (3.38)$$

Onde  $\vec{h}$  é o eixo horizontal da tela,  $\vec{v}$  é o eixo vertical da tela e  $\vec{p}$  o eixo perpendicular à tela.

Na posição final indicada na Fig. 3.17, alteram-se as componentes  $\vec{v}$  e  $\vec{p}$ . Além disto, as projeções dos vetores  $\vec{x}$ ,  $\vec{y}$  e  $\vec{z}$  no plano da tela apresentam o mesmo comprimento.

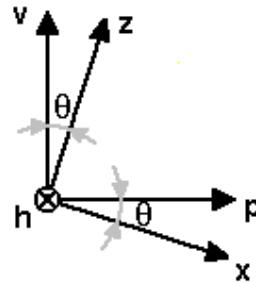


Figura 3.18 – Última rotação necessária vista no plano formado pelos eixos  $v$  e  $p$ .

A partir da Eq. (3.38) e da Fig. 3.18, obtém-se:

$$\begin{aligned}\vec{x} &= -\sqrt{2}/2 \vec{h} + \sqrt{2}/2 (\sin(-\theta)\vec{v} + \cos(-\theta)\vec{p}) \\ \vec{y} &= \sqrt{2}/2 \vec{h} + \sqrt{2}/2 (\sin(-\theta)\vec{v} + \cos(-\theta)\vec{p}) \\ \vec{z} &= \cos\theta \cdot \vec{v} + \sin\theta \cdot \vec{p}\end{aligned}\quad (3.39)$$

Tomando apenas as componentes do plano da tela (horizontal e vertical):

$$\begin{aligned}\vec{x}' &= -\sqrt{2}/2 \vec{h} - \sqrt{2}/2 \sin\theta \cdot \vec{v} \\ \vec{y}' &= \sqrt{2}/2 \vec{h} - \sqrt{2}/2 \sin\theta \cdot \vec{v} \\ \vec{z}' &= \cos\theta \cdot \vec{v}\end{aligned}\quad (3.40)$$

$$\begin{aligned}
 \|\vec{x}'\| &= \sqrt{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{sen} \theta\right)^2} \\
 \|\vec{y}'\| &= \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{sen} \theta\right)^2} \\
 \|\vec{z}'\| &= \sqrt{\cos^2 \theta}
 \end{aligned} \tag{3.41}$$

Fazendo  $\|\vec{x}'\| = \|\vec{y}'\| = \|\vec{z}'\|$ :

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{1 + \operatorname{sen}^2 \theta} = \sqrt{\cos^2 \theta} \tag{3.42}$$

Isolando  $\theta$ :

$$\theta = \arccos \sqrt{\frac{2}{3}} \approx 35,2644^\circ \tag{3.43}$$

Portanto:

$$\begin{aligned}
 \vec{x} &\approx -0,7071\vec{h} - 0,4082\vec{v} + 0,5774\vec{p} \\
 \vec{y} &\approx 0,7071\vec{h} - 0,4082\vec{v} + 0,5774\vec{p} \\
 \vec{z} &\approx 0,8165\vec{v} + 0,5774\vec{p}
 \end{aligned} \tag{3.44}$$

Para as outras vistas isométricas, basta alterar o sinal de algumas das componentes.

### 3.2.1.3- Como Girar os Eixos Coordenados (Rotate)

Os eixos  $(x,y,z)$  podem ser girados em torno do eixo  $h$  ou do eixo  $v$ . A rotação em torno de  $h$  altera apenas as componentes  $v$  e  $p$  das projeções. Em torno de  $v$ , as componentes alteradas são  $h$  e  $p$ .

#### 3.2.1.3.1- Em Torno de h:

Obtêm-se as projeções dos eixos  $(x,y,z)$  em  $(v,p)$ . Calcula-se o módulo e o ângulo do vetor formado pelas projeções. Tomando o eixo  $x$  como exemplo, tem-se:

$$m = \sqrt{x_v^2 + x_p^2} \tag{3.45}$$

$$\theta = \operatorname{arctg} \left( \frac{x_p}{x_v} \right) \tag{3.46}$$

Calculam-se as novas projeções, somando-se (ou subtraindo-se) uma quantidade  $\alpha$  do ângulo do novo vetor:

$$\begin{aligned}x_v &= m \cdot \cos(\theta + \alpha) \\x_p &= m \cdot \sin(\theta + \alpha)\end{aligned}\quad (3.47)$$

### 3.2.1.3.2- Em Torno de v:

Obtêm-se as projeções dos eixos ( $x,y,z$ ) em ( $h,p$ ). Calcula-se o módulo e o ângulo do vetor formado pelas projeções. Tomando o eixo  $x$  como exemplo, tem-se:

$$m = \sqrt{x_h^2 + x_p^2} \quad (3.48)$$

$$\theta = \arctg\left(\frac{x_h}{x_p}\right) \quad (3.49)$$

Calculam-se as novas projeções:

$$\begin{aligned}x_h &= m \cdot \sin(\theta + \alpha) \\x_p &= m \cdot \cos(\theta + \alpha)\end{aligned}\quad (3.50)$$

### 3.2.1.4- Como Movimentar a Tela (Pan)

As dimensões e pontos fundamentais da tela são apresentados na Fig. 3.19.

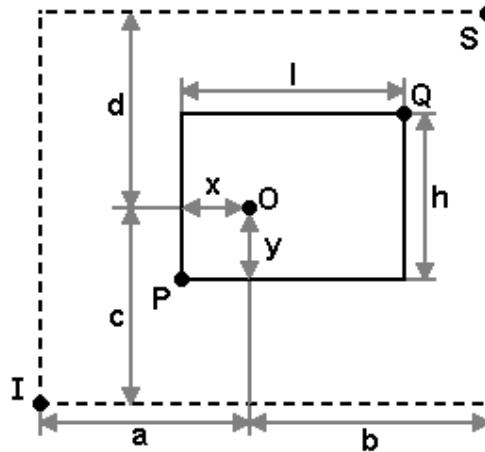


Figura 3.19 – Dimensões e pontos fundamentais da tela.

As linhas pontilhadas indicam os limites do desenho. As linhas cheias indicam os limites da tela. A origem deverá ser deslocada de forma que os limites inferiores (ou superiores) do desenho não ultrapassem os limites superiores (ou inferiores) da tela.

Valores máximos para a origem:

$$\begin{aligned} x &= a + l \\ y &= c + h \end{aligned} \quad (3.51)$$

Valores mínimos para a origem:

$$\begin{aligned} x &= -b \\ y &= -d \end{aligned} \quad (3.52)$$

Utilizando a origem como referência, pode-se deslocar o ponto  $P$  (ou  $Q$ ) de forma a coincidir com o ponto  $S$  (ou  $I$ ). As coordenadas mínima, máxima e atual do ponto  $P$  são dadas por:

$$\begin{aligned} P_{x,MIN} &= -a - l \\ P_{x,MAX} &= b \\ P_{x,ATUAL} &= -x \end{aligned} \quad (3.53)$$

$$\begin{aligned} P_{y,MIN} &= -c - h \\ P_{y,MAX} &= d \\ P_{y,ATUAL} &= -y \end{aligned} \quad (3.54)$$

As dimensões apresentadas na Fig 3.19 são dadas por:

$$\begin{aligned} a &= O_x - I_x \\ b &= S_x - O_x \\ c &= O_y - I_y \\ d &= S_y - O_y \end{aligned} \quad (3.55)$$

A Fig. 3.20 apresenta o caso em que são consideradas folgas internas na tela.

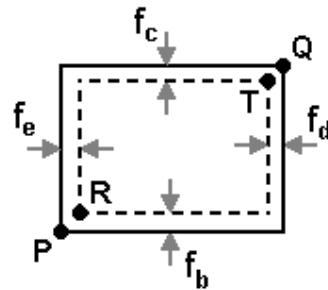


Figura 3.20 – Dimensões das folgas internas da tela.

Onde:

- $f_e$ : folga esquerda
- $f_d$ : folga direita
- $f_c$ : folga de cima
- $f_b$ : folga de baixo

As coordenadas mínima e máxima do ponto  $P$  passam a ser:

$$\begin{aligned} P_{x,MIN} &= -a - l + f_d \\ P_{x,MAX} &= b - f_e \end{aligned} \quad (3.56)$$

$$\begin{aligned} P_{y,MIN} &= -c - h + f_c \\ P_{y,MAX} &= d - f_b \end{aligned} \quad (3.57)$$

Ou seja:

$$\begin{aligned} P_{x,MIN} &= I_x - O_x - l + f_d \\ P_{x,MAX} &= S_x - O_x - f_e \end{aligned} \quad (3.58)$$

$$\begin{aligned} P_{y,MIN} &= I_y - O_y - h + f_c \\ P_{y,MAX} &= S_y - O_y - f_b \end{aligned} \quad (3.59)$$

É importante arredondar os valores mínimos e máximos calculados, pois a tela trabalha com pixels, que são números inteiros.

### 3.2.1.5- Enquadramento da Tela (*Enclose*)

O retângulo definido pelos pontos  $I$  e  $S$  na Fig. 3.19 deverá ser colocado entre os limites da tela, considerando as folgas horizontais e verticais.

Horizontal:

$$(a + b)\bar{Z} = l - (f_e + f_d) \quad (3.60)$$

Vertical:

$$(c + d)\bar{Z} = h - (f_c + f_b) \quad (3.61)$$

Portanto:

$$\bar{Z} = \frac{l - (f_e + f_d)}{S_x - I_x} \quad (3.62)$$

Ou:

$$\bar{Z} = \frac{h - (f_c + f_b)}{S_y - I_y} \quad (3.63)$$

Toma-se o menor valor para o fator de zoom ( $\bar{Z}$ ).

A origem deve ser posta de tal forma que o desenho fique centrado na tela, ou seja:

$$T_x - S'_x = I'_x - R_x \quad (3.64)$$

$$T_y - S'_y = I'_y - R_y \quad (3.65)$$

Onde:

$$\begin{aligned} T_x &= Q_x - f_d = l - f_d \\ T_y &= Q_y - f_c = h - f_c \\ R_x &= P_x + f_e = f_e \\ R_y &= P_y + f_b = f_b \end{aligned} \quad (3.66)$$

E:

$$\begin{aligned} I'_x &= O'_x - Za \\ I'_y &= O'_y - Zc \\ S'_x &= O'_x + Zb \\ S'_y &= O'_y + Zd \end{aligned} \quad (3.67)$$

Substituindo as Eq. (3.67) e as Eq. (3.66) nas Eq. (3.65) e (3.64):

$$\begin{cases} (l - f_d) - (O'_x + \bar{Z}b) = (O'_x - \bar{Z}a) - f_e \\ (h - f_c) - (O'_y + \bar{Z}d) = (O'_y - \bar{Z}c) - f_b \end{cases} \quad (3.68)$$

Isolando  $O_x$  e  $O_y$ :

$$\begin{cases} O'_x = \frac{1}{2}(l + f_e - f_d + \bar{Z}(a - b)) \\ O'_y = \frac{1}{2}(h + f_b - f_c + \bar{Z}(c - d)) \end{cases} \quad (3.69)$$

Os valores de  $a$ ,  $b$ ,  $c$  e  $d$  devem ser obtidos para um *zoom* de 100%, ou seja, quando um milímetro corresponde a um pixel.

Colocando o ponto  $O$  sobre o ponto  $P$ :

$$\begin{aligned} a &= O_x - I_x = -H_{MIN} \\ b &= S_x - O_x = H_{MAX} \\ c &= O_y - I_y = -V_{MIN} \\ d &= S_y - O_y = V_{MAX} \end{aligned} \quad (3.70)$$

A nova posição da origem é dada por:

$$\begin{cases} O'_x = \frac{1}{2}(l + f_e - f_d - \bar{Z}(H_{MIN} + H_{MAX})) \\ O'_y = \frac{1}{2}(h + f_b - f_c - \bar{Z}(V_{MIN} + V_{MAX})) \end{cases} \quad (3.71)$$

### 3.2.1.6- Como Exibir os Pontos na Tela

Cada ponto na tela é definido por quatro parâmetros:

- Suas coordenadas ( $P_x$ ,  $P_y$ ,  $P_z$ );
- A orientação dos eixos coordenados ( $x,y,z$ );
- A posição da origem;
- O fator de *zoom*.

O sistema de coordenadas da tela depende do software. Há duas possibilidades, como pode ser observado na Fig. 3.21.

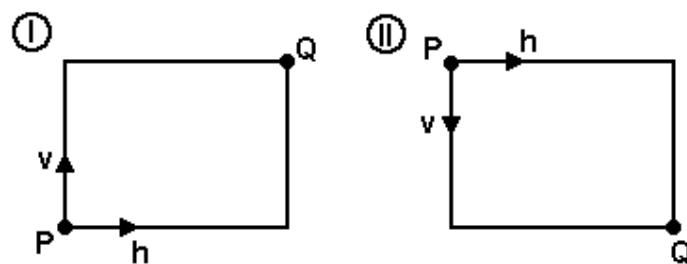


Figura 3.21 – Sistema de coordenadas da tela.

Sendo que o padrão mais comum é o (II). No entanto, o MATLAB utiliza o padrão (I), no qual a origem do sistema de coordenadas da tela é colocada no canto inferior esquerdo.

Considerando o padrão do MATLAB, é necessário projetar os eixos coordenados ( $x,y,z$ ) nos eixos ( $h,v$ ). O eixo  $p$  é perpendicular à tela, não tendo efeito na exibição.

A projeção de um vetor qualquer sobre outro é dada pelo produto escalar entre estes vetores. Como  $x, y, z, h$  e  $v$  são vetores unitários, a projeção é simplesmente o cosseno do ângulo entre eles. A Tab. 3.1 apresenta as projeções entre os vetores.

Tabela 3.1 – Projeções das coordenadas ( $x,y,z$ ) em ( $h,v,p$ )

	<b>x</b>	<b>y</b>	<b>z</b>
<b>h</b>	$x_h$	$y_h$	$z_h$
<b>v</b>	$x_v$	$y_v$	$z_v$
<b>p</b>	$x_p$	$y_p$	$z_p$

Onde  $x_h$  indica a projeção do vetor  $x$  sobre o vetor  $h$  e assim em diante.

Dado um ponto qualquer de coordenadas ( $P_x, P_y, P_z$ ), as coordenadas deste ponto em ( $h,v$ ) são:

$$\begin{aligned} h &= P_x x_h + P_y y_h + P_z z_h \\ v &= P_x x_v + P_y y_v + P_z z_v \end{aligned} \quad (3.72)$$

Ou seja, basta fazer um produto de uma matriz por um vetor:

$$\{\tilde{P}\}_i = [T]_i \{P\}_i \quad (3.73)$$

Onde:

$$\{\tilde{P}\}_i = \left\{ \begin{array}{c} \tilde{P}_h \\ \tilde{P}_v \\ \tilde{P}_p \end{array} \right\}_i \quad (3.74)$$

$$[T]_i = \begin{bmatrix} x_h & y_h & z_h \\ x_v & y_v & z_v \\ x_p & y_p & z_p \end{bmatrix} \quad (3.75)$$

$$\{P\}_i = \begin{Bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{Bmatrix}_i \quad (3.76)$$

No entanto, é necessário levar em conta a posição da origem e o fator de *zoom*. Se a origem já estiver representada nas coordenadas  $(h, v, p)$ , tem-se:

$$\{\tilde{P}\}_i = \{\tilde{O}\} + \bar{Z}[T]_t \{P\}_i \quad (3.77)$$

Onde:  $\{\tilde{O}\} = \begin{Bmatrix} \tilde{O}_h \\ \tilde{O}_v \\ \tilde{O}_p \end{Bmatrix}$  e  $\bar{Z}$  é um escalar que representa o fator de *zoom*.

### 3.2.1.7- Como Exibir os Segmentos de Reta

O MATLAB, assim como a maioria das linguagens de programação, já traz uma função para desenhar linhas retas. A função utiliza como dados de entrada as coordenadas dos pontos extremos da linha. Portanto, basta fornecer as coordenadas  $(h, v)$  destes pontos.

### 3.2.1.8- Como Exibir os Arcos de Circunferência

Não existe uma função pronta para o traçado de arcos tridimensionais. Portanto, é necessário o desenvolvimento de uma metodologia para este fim. Os arcos utilizados no ADES são compostos por três pontos espaciais. Os passos para se traçar um arco são:

- Determinar um sistema local de coordenadas baseado nos três pontos que formam o arco;
- Calcular o raio do arco e as coordenadas do seu centro no sistema local de coordenadas;
- Determinar os ângulos de início e fim do arco;
- Calcular as coordenadas de um número adequado de pontos ao longo de sua circunferência;
- Converter os pontos calculados para as coordenadas globais;
- Converter os pontos para as coordenadas da tela e uni-los por segmentos de reta, de tal forma que os segmentos se aproximem do arco.

### 3.2.1.8.1- Determinação de Eixos Locais a Partir de Três Pontos

Um plano pode ser definido a partir de três pontos não-colineares e não-coincidentes. Dados três pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$  que atendam a estes requisitos, como na Fig. 3.22:

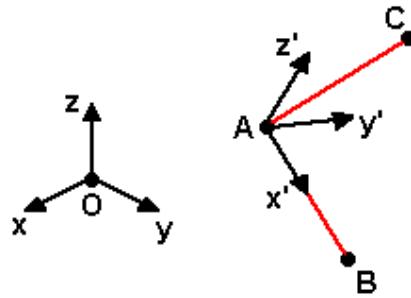


Figura 3.22 – Determinação de eixos locais a partir de três pontos.

Definem-se dois vetores:

$$\begin{aligned}\vec{v}_1 &= \overrightarrow{(B-A)} \\ \vec{v}_2 &= \overrightarrow{(C-A)}\end{aligned}\quad (3.78)$$

A origem do sistema local de coordenadas será colocada no ponto  $A$ . Rescrevendo os vetores em função de suas componentes  $(x', y', z')$ :

$$\begin{aligned}\vec{v}_1 &= (B_{x'} - A_{x'})\hat{x}' + (B_{y'} - A_{y'})\hat{y}' + (B_{z'} - A_{z'})\hat{z}' \\ \vec{v}_2 &= (C_{x'} - A_{x'})\hat{x}' + (C_{y'} - A_{y'})\hat{y}' + (C_{z'} - A_{z'})\hat{z}'\end{aligned}\quad (3.79)$$

É necessário normalizar o vetor  $\vec{v}_1$ :

$$\vec{u}_1 = \frac{\vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\|} \quad (3.80)$$

Onde  $\|\vec{v}_1\|$  é a norma euclidiana do vetor  $\vec{v}_1$ .

Procura-se então um vetor  $\vec{v}_2'$  que é perpendicular ao vetor  $\vec{u}_1$ , como mostrado na Fig. 3.23.

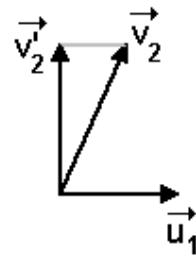


Figura 3.23 – Determinação de um vetor perpendicular.

Isto é feito através de:

$$\vec{v}'_2 = \vec{v}_2 - (\vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1) \vec{u}_1 \quad (3.81)$$

Normaliza-se então  $\vec{v}'_2$ :

$$\vec{u}_2 = \frac{\vec{v}'_2}{\|\vec{v}'_2\|} \quad (3.82)$$

O vetor  $\vec{u}_3$  é dado pelo produto vetorial entre  $\vec{u}_1$  e  $\vec{u}_2$ :

$$\vec{u}_3 = \vec{u}_1 \times \vec{u}_2 \quad (3.83)$$

Como  $\vec{u}_1$  e  $\vec{u}_2$  são vetores unitários, o vetor  $\vec{u}_3$  também será. Portanto, os eixos locais são:

$$\begin{aligned} \vec{x}' &= \vec{u}_1 \\ \vec{y}' &= \vec{u}_2 \\ \vec{z}' &= \vec{u}_3 \end{aligned} \quad (3.84)$$

Deseja-se, então, calcular uma matriz de transformação dos eixos globais para os eixos locais. Chamando de  $\vec{v}_0$  o vetor que parte da origem dos eixos globais e vai até o ponto  $A$  (que é a origem dos eixos locais), tem-se:

$$\vec{v}_0 = A_x \hat{x} + A_y \hat{y} + A_z \hat{z} \quad (3.85)$$

Projetando o vetor  $\vec{v}_0$  nos eixos locais:

$$\begin{aligned} X &= \vec{v}_0 \bullet \vec{u}_1 \\ Y &= \vec{v}_0 \bullet \vec{u}_2 \\ Z &= \vec{v}_0 \bullet \vec{u}_3 \end{aligned} \quad (3.86)$$

A matriz de transformação  $[T]$  é dada por:

$$[T] = \begin{bmatrix} u_{1x} & u_{1y} & u_{1z} & -X \\ u_{2x} & u_{2y} & u_{2z} & -Y \\ u_{3x} & u_{3y} & u_{3z} & -Z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.87)$$

Os pontos globais e locais são dados por:

$$\{P\}_i = \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (3.88)$$

$$\{P\}'_i = \begin{Bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (3.89)$$

$$\begin{aligned} \{P\}'_i &= [T]\{P\}_i \\ \{P\}_i &= [T]^{-1}\{P\}'_i \end{aligned} \quad (3.90)$$

### 3.2.1.8.2- Determinação do Raio e das Coordenadas do Centro de um Arco

Tomando como referência a Fig. 3.24, tem-se:

- $A, B$  e  $C$ : pontos pelos quais o arco passa;
- $P$ : ponto central do arco.

Deseja-se determinar as coordenadas do ponto  $P$ , a partir das coordenadas dos pontos  $A, B$  e  $C$ .

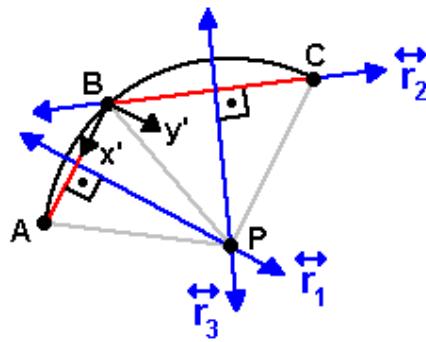


Figura 3.24 – Determinação das coordenadas do ponto central de um arco que passa por três pontos quaisquer.

Utilizando um sistema local de coordenadas posicionado sobre o ponto  $B$ , a coordenada  $x'$  do centro do arco é dada por:

$$P_{x'} = \frac{\overline{AB}}{2} \quad (3.91)$$

Resta, portanto, determinar a coordenada  $y'$ .

Traça-se o segmento  $\overline{BC}$ . No ponto médio, traça-se uma reta perpendicular a este segmento. Faz-se o mesmo para o segmento  $\overline{AB}$ . O ponto de interseção das duas retas é o centro do arco. Analiticamente, tem-se:

Reta  $\overleftrightarrow{r_1}$ :

$$x' = \frac{\overline{AB}}{2} = \frac{A_{x'}}{2} \quad (3.92)$$

Reta  $\overleftrightarrow{r_2}$ :

$$y' = \frac{C_{y'} - B_{y'}}{C_{x'} - B_{x'}} x' = \frac{C_{y'}}{C_{x'}} x' \quad (3.93)$$

Reta  $\overleftrightarrow{r_3}$ :

$$\begin{aligned} y' - \left( \frac{C_{y'} - B_{y'}}{2} \right) &= -\frac{C_{x'} - B_{x'}}{C_{y'} - B_{y'}} \left( x' - \left( \frac{C_{x'} - B_{x'}}{2} \right) \right) \\ y' &= \frac{C_{y'}}{2} - \frac{C_{x'}}{C_{y'}} \left( x' - \frac{C_{x'}}{2} \right) \end{aligned} \quad (3.94)$$

A interseção ocorre em:

$$y' = \frac{C_{y'}}{2} - \frac{C_{x'}}{C_{y'}} \left( \frac{A_{x'} - C_{x'}}{2} \right) \quad (3.95)$$

Como a origem do sistema de coordenadas local foi colocada sobre um ponto da circunferência do arco, o raio pode ser facilmente determinado:

$$r = \sqrt{C_{x'}^2 + C_{y'}^2} \quad (3.96)$$

### 3.2.1.8.3- Determinação dos Ângulos de Início e Fim de um Arco

A Fig. 3.25 apresenta os ângulos correspondentes aos pontos que formam um arco qualquer.

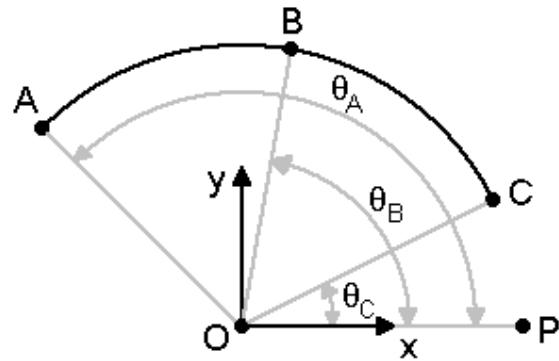


Figura 3.25 – Ângulos correspondentes a cada ponto que forma um arco.

O arco passa por três pontos:  $A$ ,  $B$  e  $C$ . Têm-se os seguintes ângulos:

$$\begin{aligned} \theta_A &\equiv A\hat{O}P = \arctg \left( \frac{A_y}{A_x} \right) \\ \theta_B &\equiv B\hat{O}P = \arctg \left( \frac{B_y}{B_x} \right) \\ \theta_C &\equiv C\hat{O}P = \arctg \left( \frac{C_y}{C_x} \right) \end{aligned} \quad (3.97)$$

Para os quais há seis possibilidades:

- $$\begin{aligned}
 (1) \quad & \theta_A < \theta_B < \theta_C \\
 (2) \quad & \theta_B < \theta_C < \theta_A \\
 (3) \quad & \theta_C < \theta_A < \theta_B \\
 (4) \quad & \theta_A < \theta_C < \theta_B \\
 (5) \quad & \theta_B < \theta_A < \theta_C \\
 (6) \quad & \theta_C < \theta_B < \theta_A
 \end{aligned} \tag{3.98}$$

Sendo que estes ângulos podem ser representados por um dos seguintes intervalos:

- $$\begin{aligned}
 (I) \quad & [0; 2\pi) \\
 (II) \quad & (-\pi; \pi]
 \end{aligned} \tag{3.99}$$

Adotando o intervalo (II) e exemplificando cada uma das possibilidades na Fig. 3.26:

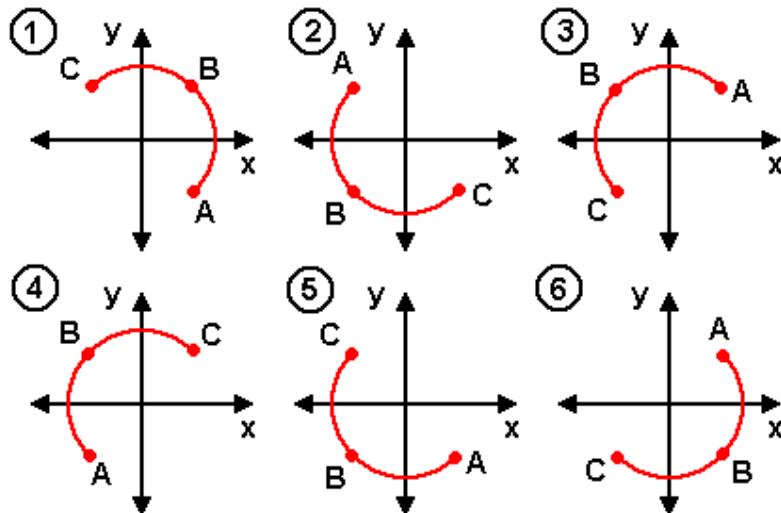


Figura 3.26 – Exemplos de todas as possibilidades de ângulos dos pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$ .

Como o MATLAB adota o sentido anti-horário como positivo, o arco é traçado de  $A$  para  $C$  nos casos (1), (2) e (3), enquanto que nos casos (4), (5) e (6) ele é traçado de  $C$  para  $A$ . Portanto, tem-se:

$$\text{Casos (1), (2) e (3): } \begin{aligned} \theta_{inicial} &= \theta_A \\ \theta_{final} &= \theta_C \end{aligned} \tag{3.100}$$

$$\text{Casos (4), (5) e (6): } \begin{cases} \theta_{\text{inicial}} = \theta_C \\ \theta_{\text{final}} = \theta_A \end{cases} \quad (3.101)$$

Se o valor do ângulo final for menor que o do ângulo inicial, faz-se:

$$\theta'_{\text{final}} = \theta_{\text{final}} + 2\pi \quad (3.102)$$

### 3.2.1.8.4- Determinação do Número de Divisões Adequado para se Traçar um Arco a Partir de Segmentos de Reta

A Fig. 3.27 apresenta a aproximação do traçado de um arco através de segmentos de reta.

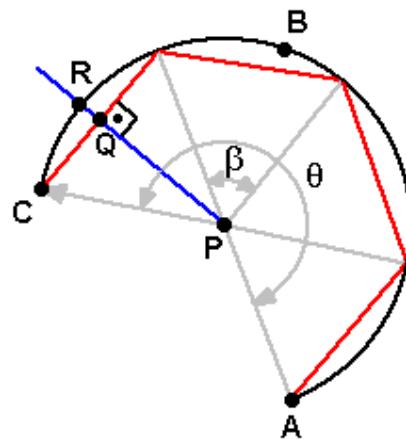


Figura 3.27 – Arco traçado através de segmentos de reta.

Tomando novamente um arco que passa por três pontos  $A, B$  e  $C$ , tem-se:

$$\begin{aligned} r &= \overline{PA} = \overline{PB} = \overline{PC} = \overline{PR} \\ \beta &= \theta / N \\ h &= \overline{PQ} = r \cdot \cos \frac{\beta}{2} \\ a &= r - h \end{aligned} \quad (3.103)$$

Onde  $N$  é o número de divisões escolhido. Portanto:

$$\begin{aligned} a &= r \left( 1 - \cos \frac{\beta}{2} \right) \\ \cos \frac{\beta}{2} &= 1 - \frac{a}{r} \\ \beta &= 2 \cdot \arccos \left( 1 - \frac{a}{r} \right) \end{aligned} \quad (3.104)$$

O que leva a:

$$N = \frac{\theta}{2 \cdot \arccos\left(1 - \frac{a}{r}\right)} \quad (3.105)$$

Com a restrição que  $0 < a < 2r$ .

No entanto, algo interessante ocorre quando  $a = 1/8$ :

$$\frac{1}{2 \cdot \arccos\left(1 - \frac{1}{8r}\right)} \approx \sqrt{r} \quad (3.106)$$

Colocando  $r$  (raio em pixels) em função de  $R$  (raio verdadeiro) e  $Z$  (fator de *zoom*):

$$r = RZ \quad (3.107)$$

Substituindo (3.106) e (3.107) em (3.105):

$$N = \sqrt{RZ}\theta \quad (3.108)$$

### 3.2.1.8.5- Cálculo das Coordenadas de um Certo Número de Pontos ao Longo da Circunferência do Arco

Considerando que o número  $n$  de divisões adequado já foi escolhido, calculam-se as coordenadas de  $n+1$  pontos ao longo da circunferência do arco. Chamando de  $Q_i$  o  $i$ -ésimo ponto ao longo da circunferência, onde  $i = 0, 1, \dots, n$ , sabe-se que as coordenadas dos pontos  $Q_0$  e  $Q_n$  correspondem às coordenadas dos pontos  $A$  e  $C$  (ou  $C$  e  $A$ ).

Considerando que os ângulos inicial e final são dados por  $\theta_{inicial}$  e  $\theta_{final}$ , que o raio é dado por  $r$  e que  $P$  é o ponto central do arco, tem-se:

$$\theta_{total} = \theta_{final} - \theta_{inicial} \quad (3.109)$$

Portanto:

$$\begin{aligned} Q_{xi} &= P_x + r \cdot \cos\left(\frac{i}{n}\theta_{total} + \theta_{inicial}\right) \\ Q_{yi} &= P_y + r \cdot \sin\left(\frac{i}{n}\theta_{total} + \theta_{inicial}\right) \end{aligned} \quad (3.110)$$

### 3.2.1.9- Exibição de Resultados

Os resultados consistem dos deslocamentos, tensões, esforços, modos de vibração e freqüências naturais calculados. Para que estes resultados sejam exibidos graficamente, é necessário determinar uma escala de cores correspondente aos diversos valores possíveis, assim como ocorre em outros programas de elementos finitos. Cada parte do modelo é exibida com uma cor correspondente a uma faixa de valores de uma legenda.

Além de uma escala de cores, é importante também que os deslocamentos sofridos pelo modelo sejam visíveis através de uma variação na geometria deste. Normalmente, os deslocamentos calculados apresentam ordem de grandeza muito inferior às dimensões do modelo. Portanto, faz-se necessário o cálculo de um escalar que, multiplicando estes deslocamentos, os tornem visíveis. É importante também que este escalar não apresente um valor muito alto, pois isto também prejudicaria a visualização.

### 3.2.1.10- Legenda e Escala de Cores

A escala de cores utilizada para os resultados e legendas do ADES obedece à distribuição de cores básicas apresentada na Fig. 3.28.

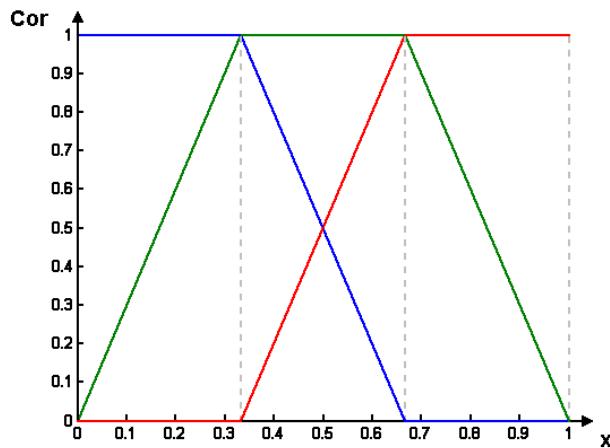


Figura 3.28 – Distribuição das cores vermelha, verde e azul.

Cor vermelha:

$$\begin{aligned}
 r = 0 & \quad x < \frac{1}{3} \\
 r = 3x - 1 & \quad \frac{1}{3} \leq x \leq \frac{2}{3} \\
 r = 1 & \quad x > \frac{2}{3}
 \end{aligned} \tag{3.111}$$

Cor verde:

$$\begin{aligned}
 g = 3x & \quad x < \frac{1}{3} \\
 g = 1 & \quad \frac{1}{3} \leq x \leq \frac{2}{3} \\
 g = -3x + 3 & \quad x > \frac{2}{3}
 \end{aligned} \tag{3.112}$$

Cor azul:

$$\begin{aligned}
 b = 1 & \quad x < \frac{1}{3} \\
 b = -3x + 2 & \quad \frac{1}{3} \leq x \leq \frac{2}{3} \\
 b = 0 & \quad x > \frac{2}{3}
 \end{aligned} \tag{3.113}$$

Dado um valor qualquer para a variável  $x$ , é necessário normalizá-lo para que este se encontre na faixa de zero a um. Para tal, utilizam-se dois parâmetros: o valor mínimo e o valor máximo:

$$\bar{x} = \frac{x - x_{MIN}}{x_{MAX} - x_{MIN}} \tag{3.114}$$

Dado um número  $N$ , que representa o número de divisões da legenda e  $x$  um número inteiro contido no intervalo  $1 \leq x \leq N$ :

$$\bar{x} = \frac{x - 1}{N - 1} \tag{3.115}$$

Isolando  $x$ :

$$x = (N - 1)\bar{x} + 1 \tag{3.116}$$

Mas cada divisão da legenda apresenta um valor inferior e um valor superior, como pode ser visto na Fig. 3.29.

### Exemplo

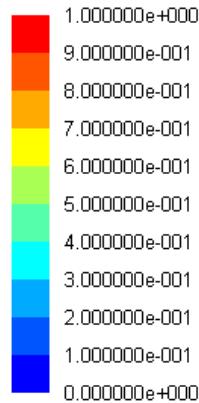


Figura 3.29 – Exemplo de uma escala de cores.

Portanto, o número de valores da legenda é igual ao número de divisões mais um:

$$V = N + 1 \quad (3.117)$$

$$d = (V - 1)\bar{x} + 1 \Rightarrow d = N\bar{x} + 1 \quad (3.118)$$

Desta forma, dado um valor normalizado qualquer, é possível calcular a qual faixa da legenda este número pertence.

#### 3.2.1.11- Cálculo da Escala Aplicada aos Deslocamentos

Para a determinação da escala foi adotada a seguinte seqüência de procedimentos:

- Calcula-se a maior distância existente entre os nós do modelo ( $d_t$ );
- Calcula-se o módulo do deslocamento de cada nó do modelo;

$$d_{\text{mod}} = \sqrt{d_X^2 + d_Y^2 + d_Z^2} \quad (3.119)$$

- Retiram-se os valores máximo ( $d_{\max}$ ) e mínimo ( $d_{\min}$ ) dentre todos os nós;
- Calcula-se o deslocamento médio de todos os nós:

$$d'_{\text{med}} = \frac{1}{n} \sum_i^n d_{\text{mod},i} , \text{ onde } n \text{ é o número de nós} \quad (3.120)$$

- Calcula-se a média entre os deslocamentos máximo e mínimo:

$$d''_{\text{med}} = \frac{d_{\max} + d_{\min}}{2} \quad (3.121)$$

- Toma-se o máximo das médias:

$$d_{med} = \max(d'_{med}; d''_{med}) \quad (3.122)$$

- Se este valor for menor que uma dada tolerância, a escala de deslocamentos fica igual a zero;
- Caso contrário, calcula-se a escala através de:

$$k = 0.03 \times \frac{d_t}{d_{med}} \quad (3.123)$$

O valor de 3% que aparece na Eq. (3.123) foi obtido a partir de experimentações.

### 3.3- Implementação do Método de Elementos Finitos

Finalizada a etapa gráfica com a criação da ferramenta CAD, serão apresentados os procedimentos adotados na implementação da ferramenta FEM.

#### 3.3.1- Geração da Malha de Elementos Finitos

Como todos os elementos utilizados no ADES são unidimensionais, a malha consiste na divisão dos segmentos e arcos em um certo número de partes. É importante observar que os arcos não são divididos em arcos menores e sim em segmentos de reta.

Para que o número de divisões seja obtido, é necessário estipular um tamanho máximo para os elementos. O número de divisões é então calculado de forma que nenhum elemento seja maior que o tamanho estipulado.

$$n_i = \frac{l_i}{l_{max}} \quad (3.124)$$

Onde:

- $n_i$  é o número de divisões do  $i$ -ésimo objeto (segmento ou arco);
- $l_i$  é o comprimento do  $i$ -ésimo objeto;
- $l_{max}$  é o tamanho máximo estipulado.

Caso  $n_i$  seja um valor fracionário, arredonda-se para cima.

### 3.3.2- Formação das Matrizes de Rigidez e Massa

Nesta etapa é mostrada a metodologia adotada na criação das matrizes locais de rigidez e massa e na conversão destas para o sistema global de coordenadas.

#### 3.3.2.1- Elementos Unidimensionais $C^0$ e $C^1$

Os elementos finitos normalmente são formulados em um sistema local de coordenadas. Desta forma, pode-se escolher um sistema mais adequado capaz de simplificar os cálculos das matrizes de rigidez e massa. No entanto, durante o procedimento de formação das matrizes globais (ou matrizes do modelo), as matrizes locais devem ser convertidas para o sistema global de coordenadas.

Para todos os elementos aqui apresentados, a origem dos eixos locais é colocada sobre o nó local 1. No entanto, para facilitar a visualização, os eixos locais foram transladados.

Com base nas funções  $C^0$  e  $C^1$ , pode-se definir os seguintes elementos:

##### 3.3.2.1.1- Haste ou Treliça

O elemento de haste mais simples é formado por dois nós, localizados nas extremidades do elemento. Cada nó possui um grau de liberdade de translação ao longo da direção axial deste elemento. A interpolação do campo de deslocamentos no interior do elemento é feita através de uma função linear  $C^0$ .

A Fig. 3.30 apresenta um elemento de haste típico e a orientação adotada para seus eixos locais.



Figura 3.30 – Elemento de haste e orientação de seus eixos locais.

A matriz de rigidez local é dada por:

$$[K] = \int_V [B]^T [E][B]dV \quad (3.125)$$

Onde:

$$[E] = EA \quad (3.126)$$

E:

$$[B] = \frac{\partial[N]}{\partial x} = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.127)$$

Portanto:

$$[K] = \frac{1}{L^2} \int_0^L \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} EA \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} dx \quad (3.128)$$

Para uma haste homogênea, nas quais o módulo de elasticidade e a área da seção transversal são constantes ao longo de seu comprimento:

$$[K] = \frac{EA}{L^2} \int_0^L \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} dx = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.129)$$

Enquanto que sua matriz de massa local é dada por:

$$[M] = \int_V \rho [N]^T [N] dV \quad (3.130)$$

Ou seja:

$$[M] = \int_0^L \rho A \begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{L} \\ \frac{x}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{L} & \frac{x}{L} \end{bmatrix} dx \quad (3.131)$$

Para uma haste homogênea:

$$[M] = \rho A \int_0^L \begin{bmatrix} \left(1 - \frac{x}{L}\right)^2 & \frac{x}{L} \left(1 - \frac{x}{L}\right) \\ \frac{x}{L} \left(1 - \frac{x}{L}\right) & \left(\frac{x}{L}\right)^2 \end{bmatrix} dx = \frac{\rho AL}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (3.132)$$

### 3.3.2.1.2- Barra Torcional

A barra torcional é análoga à haste, porém seus graus de liberdade são rotações em torno do seu eixo, como pode ser visto na Fig. 3.31.

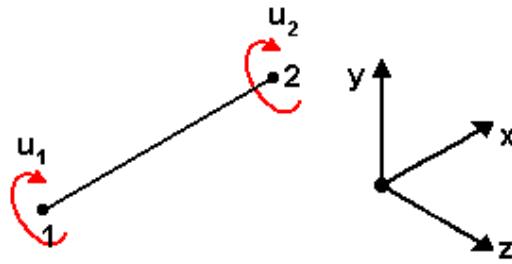


Figura 3.31 – Elemento de barra torcional e orientação de seus eixos locais.

A matriz de rigidez local é dada por:

$$[K] = \frac{1}{L^2} \int_0^L \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} GJ \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} dx \quad (3.133)$$

Para uma barra homogênea:

$$[K] = \frac{GJ}{L^2} \int_0^L \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} dx = \frac{GJ}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.134)$$

Enquanto que sua matriz de massa local é dada por:

$$[M] = \int_0^L \rho J \begin{bmatrix} 1-x/L & x/L \\ x/L & x/L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-x/L & x/L \\ x/L & x/L \end{bmatrix} dx \quad (3.135)$$

Para uma barra homogênea:

$$[M] = \rho J \int_0^L \begin{bmatrix} (1-x/L)^2 & x/L(1-x/L) \\ x/L(1-x/L) & (x/L)^2 \end{bmatrix} dx = \frac{\rho JL}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (3.136)$$

### 3.3.2.1.3- Viga Bidimensional

O elemento de viga bidimensional mais simples é formado por dois nós, localizados nas extremidades do elemento. Cada nó possui um grau de liberdade de translação e um de rotação. A translação é perpendicular ao eixo da viga e a rotação é aproximada pela derivada primeira do campo de deslocamentos. A interpolação deste campo no interior do elemento é feita através de uma função cúbica  $C^1$ .

A Fig. 3.32 apresenta um elemento de viga bidimensional típico e a orientação adotada para seus eixos locais.

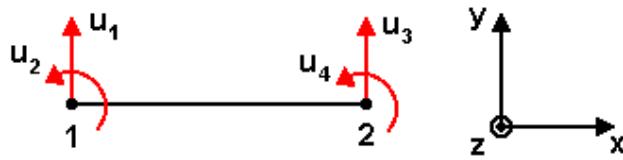


Figura 3.32 – Elemento de viga bidimensional e orientação de seus eixos locais.

A matriz de rigidez local é dada por:

$$[K] = \int_V [B]^T [E] [B] dV \quad (3.137)$$

Onde:

$$[E] = EI \quad (3.138)$$

E:

$$[B] = \frac{\partial^2 [N]}{\partial x^2} = \begin{bmatrix} -\frac{6}{L^2} + \frac{12}{L^3}x \\ -\frac{4}{L} + \frac{6}{L^2}x \\ \frac{6}{L^2} - \frac{12}{L^3}x \\ -\frac{2}{L} + \frac{6}{L^2}x \end{bmatrix}^T \quad (3.139)$$

Para uma viga homogênea, nas quais o módulo de elasticidade e a inércia da seção transversal são constantes ao longo de seu comprimento:

$$[K] = EI \int_0^L [B]^T [B] dx = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (3.140)$$

Enquanto que sua matriz de massa local é dada por:

$$[M] = \int_V \rho [N]^T [N] dV \quad (3.141)$$

Para uma viga homogênea:

$$[M] = \rho A \int_0^L [N]^T [N] dx = \frac{\rho A L}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22L & 54 & -13L \\ 22L & 4L^2 & 13L & -3L^2 \\ 54 & 13L & 156 & -22L \\ -13L & -3L^2 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (3.142)$$

Considerando outra orientação do elemento de viga, como na Fig. 3.33:

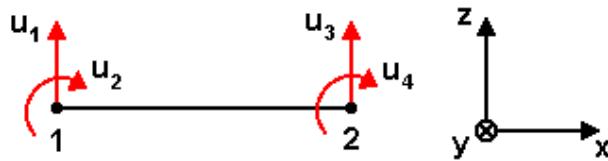


Figura 3.33 – Elemento de viga bidimensional, definida sob uma orientação alternativa de eixos locais.

Neste caso, as funções de interpolação  $N_2$  e  $N_4$ , que correspondem aos graus de liberdade de rotação, ficam com o sinal invertido:

$$\begin{aligned} N_2(x) &= -x + \frac{2}{L}x^2 - \frac{1}{L^2}x^3 \\ N_4(x) &= \frac{1}{L}x^2 - \frac{1}{L^2}x^3 \end{aligned} \quad (3.143)$$

Portanto, os termos  $k_{i,j}$  da matriz de rigidez e os termos  $m_{i,j}$  da matriz de massa que possuem  $i+j$  ímpar têm seu sinal trocado:

$$[K] = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & -6L & -12 & -6L \\ -6L & 4L^2 & 6L & 2L^2 \\ -12 & 6L & 12 & 6L \\ -6L & 2L^2 & 6L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (3.144)$$

$$[M] = \frac{\rho AL}{420} \begin{bmatrix} 156 & -22L & 54 & 13L \\ -22L & 4L^2 & -13L & -3L^2 \\ 54 & -13L & 156 & 22L \\ 13L & -3L^2 & 22L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (3.145)$$

### 3.3.2.1.4- Viga Tridimensional

O elemento de viga tridimensional é formado pela combinação de um elemento de haste, um elemento de barra torcional e dois elementos de viga bidimensionais.

A Fig. 3.34 apresenta um elemento de viga tridimensional típico e a orientação adotada para seus eixos locais.

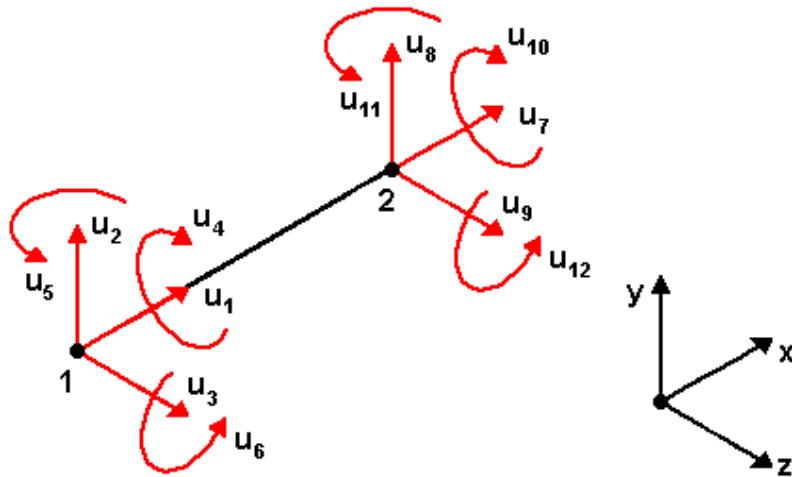


Figura 3.34 – Elemento de viga tridimensional e orientação de seus eixos locais.

O elemento de viga tridimensional apresenta seis GDL por nó, totalizando 12 GDL. Portanto, as matrizes de rigidez e massa locais são de dimensões  $12 \times 12$ . O vetor de deslocamentos correspondente a este elemento é dado por:

$$\{u\} = \{u_1 \ u_2 \ u_3 \ u_4 \ u_5 \ u_6 \ u_7 \ u_8 \ u_9 \ u_{10} \ u_{11} \ u_{12}\}^T \quad (3.146)$$

Utilizando índices para diferenciar as origens dos GDL: “*h*” para o elemento de haste, “*t*” para a barra torcional, “*v1*” para a primeira viga e “*v2*” para a segunda viga, tem-se:

$$\begin{aligned} u_1 &= u_{1(h)} & u_4 &= u_{1(t)} & u_7 &= u_{2(h)} & u_{10} &= u_{2(t)} \\ u_2 &= u_{1(v1)} & u_5 &= -u_{2(v2)} & u_8 &= u_{3(v1)} & u_{11} &= -u_{4(v2)} \\ u_3 &= u_{1(v2)} & u_6 &= u_{2(v1)} & u_9 &= u_{3(v2)} & u_{12} &= u_{4(v1)} \end{aligned} \quad (3.147)$$

As matrizes de rigidez e massa ficam assim:

$$[K] = E \begin{bmatrix} \frac{A}{L} & & & -\frac{A}{L} & \\ 12\frac{I_1}{L^3} & 6\frac{I_1}{L^2} & -12\frac{I_1}{L^3} & 6\frac{I_1}{L^2} & \\ 12\frac{I_2}{L^3} & -6\frac{I_2}{L^2} & -12\frac{I_2}{L^3} & -6\frac{I_2}{L^2} & \\ \frac{GJ}{EL} & & -\frac{GJ}{EL} & & \\ -6\frac{I_2}{L^2} & 4\frac{I_2}{L} & 6\frac{I_2}{L^2} & 2\frac{I_2}{L} & \\ 6\frac{I_1}{L^2} & 4\frac{I_1}{L} & -6\frac{I_1}{L^2} & 2\frac{I_1}{L} & \\ -\frac{A}{L} & \frac{A}{L} & & & \\ -12\frac{I_1}{L^3} & -6\frac{I_1}{L^2} & 12\frac{I_1}{L^3} & -6\frac{I_1}{L^2} & \\ -12\frac{I_2}{L^3} & 6\frac{I_2}{L^2} & 12\frac{I_2}{L^3} & 6\frac{I_2}{L^2} & \\ -\frac{GJ}{EL} & & \frac{GJ}{EL} & & \\ -6\frac{I_2}{L^2} & 2\frac{I_2}{L} & 6\frac{I_2}{L^2} & 4\frac{I_2}{L} & \\ 6\frac{I_1}{L^2} & 2\frac{I_1}{L} & -6\frac{I_1}{L^2} & 4\frac{I_1}{L} & \end{bmatrix} \quad (3.148)$$

$$[M] = \frac{\rho AL}{420} \begin{bmatrix} 140 & & & 70 & & & \\ 156 & 22L & 54 & & & & \\ & 156 & -22L & 54 & 13L & & \\ & & \frac{140J}{A} & & & & \\ & -22L & 4L^2 & & & & \\ 22L & & 4L^2 & 13L & & & \\ 70 & & & 140 & & & \\ 54 & 13L & 13L & 156 & & & \\ & 54 & -13L & 156 & 22L & & \\ & & \frac{70J}{A} & & & & \\ & -13L & -3L^2 & -3L^2 & 22L & 4L^2 & \\ & & & & & & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (3.149)$$

### 3.3.2.2- Formação das Matrizes Globais de Rígidez e Massa

As matrizes de rigidez e massa globais são iniciadas com zeros em todas as posições. Considerando que as matrizes locais de cada elemento finito já estão formadas, é necessário convertê-las para o sistema global de coordenadas. Após a conversão, é necessário identificar a correspondência entre os graus de liberdade locais e os globais. Esta correspondência é dada pela numeração dos nós na malha de elementos finitos. Os efeitos de todos os elementos são então sobrepostos, de forma que os valores de rigidez e massa que atuam sobre um mesmo grau de liberdade se somam.

Na conversão das matrizes de rigidez e massa das coordenadas locais para as globais, não é necessário considerar a posição da origem do sistema local de coordenadas. Apenas a orientação dos eixos locais ( $x,y,z$ ) afeta a transformação. Considerando que o sistema local de coordenadas já foi determinado, sabe-se que a relação entre os sistemas local e global é dada por:

$$\begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix} = [T] \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} \quad (3.150)$$

Onde  $[T]$  é uma matriz  $3 \times 3$  que apresenta a seguinte forma:

$$[T] = \begin{bmatrix} Xx & Xy & Xz \\ Yx & Yy & Yz \\ Zx & Zy & Zz \end{bmatrix} \quad (3.151)$$

Onde  $Xx$  representa a projeção do eixo local  $x$  sobre o eixo global  $X$ ,  $Xy$  a projeção de  $y$  em  $X$  e assim em diante.

Para um elemento formado por dois nós e que apresenta seis graus de liberdade por nó (três translações e três rotações), sabe-se que as matrizes de rigidez e massa apresentam dimensão  $12 \times 12$ . A conversão destas matrizes locais para as coordenadas globais é então dada por:

$$[K]_{(m)global} = \begin{bmatrix} [T] & & & \\ & [T] & & \\ & & [T] & \\ & & & [T] \end{bmatrix} [K]_{(m)local} \quad (3.152)$$

### 3.3.2.2.1- Correspondência entre Graus de Liberdade Locais e Globais

Considerando novamente um elemento formado por dois nós, deve-se relacionar os nós locais 1 e 2 aos nós globais correspondentes. Se o nó local 1 corresponde ao nó global  $i$ , tem-se:

- $i_U = 6i$  : índice da última linha/coluna global correspondente ao nó local 1
- $i_P = i_U - 5$  : índice da primeira linha/coluna global correspondente ao nó local 1

De maneira semelhante, considerando que o nó local 2 corresponde ao nó global  $j$ , tem-se:

- $j_U = 6j$ : índice da última linha/coluna global correspondente ao nó local 2
- $j_P = j_U - 5$ : índice da primeira linha/coluna global correspondente ao nó local 2

As matrizes de rigidez e massa podem ser divididas em quatro sub-matrizes da seguinte maneira:

$$[K]_{(m)} = \begin{bmatrix} [K]_{(m)1,1} & [K]_{(m)1,2} \\ [K]_{(m)2,1} & [K]_{(m)2,2} \end{bmatrix} \quad (3.153)$$

E:

$$[M]_{(m)} = \begin{bmatrix} [M]_{(m)1,1} & [M]_{(m)1,2} \\ [M]_{(m)2,1} & [M]_{(m)2,2} \end{bmatrix} \quad (3.154)$$

Para um elemento com seis graus de liberdade por nó, cada sub-matriz apresenta dimensão  $6 \times 6$ .

A relação entre as sub-matrizes de um dado elemento e as linhas e colunas das matrizes globais é dada por:

- 1,1: linhas e colunas de  $i_P$  a  $i_U$ .
- 1,2: linhas de  $i_P$  a  $i_U$  e colunas de  $j_P$  a  $j_U$ .
- 2,1: linhas de  $j_P$  a  $j_U$  e colunas de  $i_P$  a  $i_U$ .
- 2,2: linhas e colunas de  $j_P$  a  $j_U$ .

### 3.3.3- Otimização da Numeração dos Nós

A numeração obtida após a geração da malha de elementos finitos depende da ordem na qual os segmentos e arcos foram criados. Portanto, as matrizes de rigidez e massa obtidas através desta numeração podem apresentar grande largura de banda, o que aumenta o número de cálculos realizados em uma determinada análise.

A otimização da numeração consiste em utilizar a função *symrcm* do MATLAB, que corresponde ao algoritmo *Symmetric reverse Cuthill-McKee permutation*. Esta

função retorna um vetor com as permutações a serem realizadas nas linhas e colunas de uma dada matriz, de forma que sua largura de banda diminua.

A matriz utilizada como parâmetro de entrada da função *symrcm* é obtida da seguinte maneira:

- Cria-se uma matriz de conexões  $N \times N$  com zeros em todas as posições, onde  $N$  é o número total de nós do modelo;
- Realiza-se um *loop* ao longo de todos os elementos do modelo, verificando os números dos nós a que estão associados. Como todos os elementos do ADES são formados por apenas dois nós, identificam-se os nós de números  $i$  e  $j$  de cada elemento;
- Na matriz de conexões, impõe-se o valor 1 para as posições  $(i,i)$ ,  $(j,j)$ ,  $(i,j)$  e  $(j,i)$ .

A Fig. 3.35 apresenta um exemplo de redução na largura de banda com a otimização da numeração.

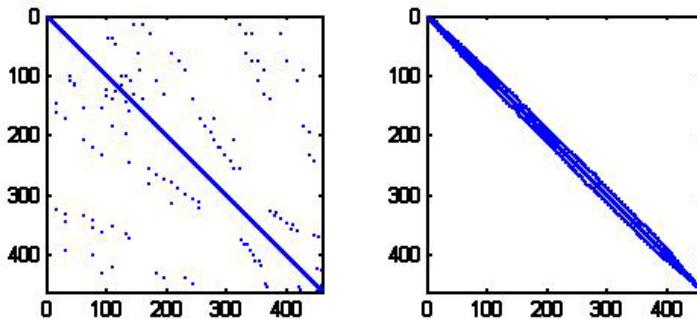


Figura 3.35 – Redução da largura de banda de uma matriz.

Observa-se que uma largura de banda ainda menor poderia ser obtida se a função *symrcm* fosse aplicada diretamente sobre as matrizes de rigidez e massa geradas. No entanto, duas desvantagens surgiriam. Em primeiro lugar, a função seria executada para cada análise realizada, aumentando o tempo de processamento. Em segundo, os graus de liberdade de um dado nó poderiam ficar dispersos ao longo das matrizes, devendo ser re-agrupados após o término da análise, demandando processamento adicional.

### 3.3.4- Formação do Vetor de Carregamentos

O vetor de carregamentos é iniciado com zeros em todas as posições. Para acrescentar o efeito de forças e momentos concentrados, basta somar os valores destes aos graus de liberdade correspondentes do vetor de carregamentos. Para cargas distribuídas, é necessário calcular o carregamento equivalente que será aplicado a cada nó.

#### 3.3.4.1- Carregamento Equivalente a uma Carga Distribuída Uniforme

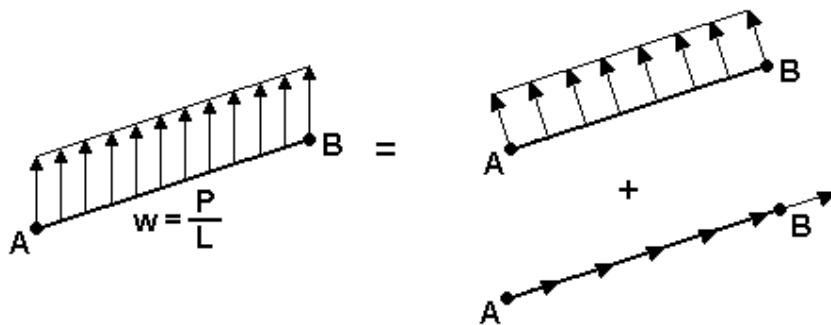


Figura 3.36 – Elemento submetido a uma carga distribuída uniforme.

A Fig. 3.36 apresenta uma viga bi-dimensional submetida a uma carga distribuída uniforme qualquer. Esta carga pode ser dividida em duas parcelas: uma carga perpendicular à viga e uma na direção axial. Para uma viga tri-dimensional, uma carga distribuída pode ser dividida em três parcelas: uma axial e duas transversais, perpendiculares entre si. É interessante que as cargas transversais sejam colocadas no mesmo alinhamento que os eixos de inércia da viga.

O exemplo mais comum de carga distribuída encontrado na prática é o peso próprio das estruturas. Esta carga é dada por:  $w = \rho A g$ . Em forma vetorial:

$$\vec{w} = -\rho A g \hat{Z}.$$

#### 3.3.4.1.1- Parcada Axial

A Fig. 3.37 apresenta um elemento submetido a uma carga distribuída axial.

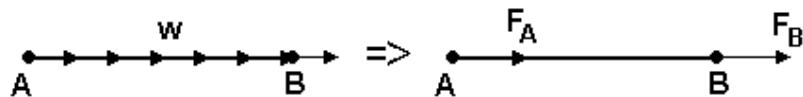


Figura 3.37 – Parcada axial do carregamento distribuído uniforme.

A carga equivalente é dada por:

$$\{F\}_{eq} = \int_0^L [N]^T w dx \quad (3.155)$$

Onde:

$$\{F\}_{eq} = \begin{Bmatrix} F_A \\ F_B \end{Bmatrix} \quad (3.156)$$

E:

$$[N] = \begin{bmatrix} 1 & x/L \\ 1 & x/L \end{bmatrix} \quad (3.157)$$

Para um carregamento uniforme:

$$\{F\}_{eq} = w \int_0^L \begin{bmatrix} 1-x/L \\ x/L \end{bmatrix} dx = \frac{wL}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.158)$$

### 3.3.4.1.2- Parcada Transversal

A Fig. 3.38 apresenta um elemento submetido a uma carga distribuída transversal.

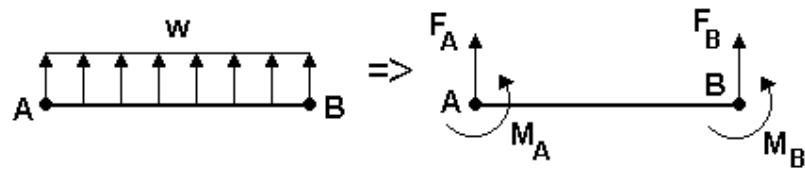


Figura 3.38 – Parcada transversal do carregamento distribuído uniforme.

Novamente, a carga equivalente é dada pela Eq. 3.155, onde:

$$\{F\}_{eq} = \begin{Bmatrix} F_A \\ M_A \\ F_B \\ M_B \end{Bmatrix} \quad (3.159)$$

E:

$$[N] = \begin{bmatrix} 1 & -3/L^2 x^2 + 2/L^3 x^3 & x - 2/L x^2 + 1/L^2 x^3 & 3/L^2 x^2 - 2/L^3 x^3 & -1/L x^2 + 1/L^2 x^3 \end{bmatrix} \quad (3.160)$$

Para um carregamento uniforme:

$$\{F\}_{eq} = w \int_0^L \begin{bmatrix} 1 - \frac{3}{L^2}x^2 + \frac{2}{L^3}x^3 \\ x - \frac{2}{L}x^2 + \frac{1}{L^2}x^3 \\ \frac{3}{L^2}x^2 - \frac{2}{L^3}x^3 \\ -\frac{1}{L}x^2 + \frac{1}{L^2}x^3 \end{bmatrix} dx = \frac{wL}{12} \begin{bmatrix} 6 \\ L \\ 6 \\ -L \end{bmatrix} \quad (3.161)$$

Para um elemento de orientação qualquer, é possível criar uma matriz de transformação  $[T]$ , que leva as coordenadas globais às coordenadas locais, ou seja:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = [T] \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} \quad (3.162)$$

Tem-se também:

$$\begin{bmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{bmatrix} = [T] \begin{bmatrix} w_X \\ w_Y \\ w_Z \end{bmatrix} \quad (3.163)$$

E:

$$\begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix} = L \begin{bmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{bmatrix} \quad (3.164)$$

Obtém-se, desta forma, três cargas distribuídas, que agem nas direções locais  $x$ ,  $y$  e  $z$ . O vetor de carregamentos equivalentes local fica:

$$\{F\}_{eq} = \left\{ \frac{P_x}{2} \quad \frac{P_y}{2} \quad \frac{P_z}{2} \quad 0 \quad -P_z L_x / 12 \quad P_y L_x / 12 \quad \frac{P_x}{2} \quad \frac{P_y}{2} \quad \frac{P_z}{2} \quad 0 \quad P_z L_x / 12 \quad -P_y L_x / 12 \right\}^T \quad (3.165)$$

E a carga equivalente global é obtida por:

$$\{F\}_{eq,G} = \begin{bmatrix} [T]^{-1} & & & & & \\ & [T]^{-1} & & & & \\ & & [T]^{-1} & & & \\ & & & [T]^{-1} & & \\ & & & & [T]^{-1} & \end{bmatrix} \{F\}_{eq,L} \quad (3.166)$$

Mas o vetor  $\{F\}_{eq,L}$  pode ser dividido da seguinte forma:

$$\{F\}_{eq,L} = \begin{Bmatrix} \{F\}_L \\ \{M\}_L \\ \{F\}_L \\ -\{M\}_L \end{Bmatrix} \quad (3.167)$$

Onde:

$$\{F\}_L = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{Bmatrix} \quad (3.168)$$

E:

$$\{M\}_L = \frac{1}{12} \begin{Bmatrix} 0 \\ -P_z L_x \\ P_y L_x \end{Bmatrix} \quad (3.169)$$

Verifica-se que o vetor  $\{M\}_L$  nada mais é do que o produto vetorial entre o vetor comprimento  $\{L\}_L$  e o vetor força  $\{F\}_L$ , dividido por seis:

$$\{M\}_L = \frac{1}{6} \{L\}_L \times \{F\}_L \quad (3.170)$$

Mas:

$$\{L\}_L = [T] \{L\}_G \text{ e } \{F\}_L = [T] \{F\}_G \quad (3.171)$$

Portanto:

$$\{M\}_L = \frac{1}{6} [T] (\{L\}_L \times \{F\}_L) \quad (3.172)$$

Então:

$$\{F\}_{eq,G} = \begin{Bmatrix} [T]^{-1} ([T] \{F\}_G) \\ [T]^{-1} \left( \frac{1}{6} [T] (\{L\}_G \times \{F\}_G) \right) \\ [T]^{-1} ([T] \{F\}_G) \\ [T]^{-1} \left( -\frac{1}{6} [T] (\{L\}_G \times \{F\}_G) \right) \end{Bmatrix} \quad (3.173)$$

Como  $\{M\}_G = \frac{1}{6} (\{L\}_G \times \{F\}_G)$ :

$$\{F\}_{eq,G} = \begin{Bmatrix} \{F\}_G \\ \{M\}_G \\ \{F\}_G \\ -\{M\}_G \end{Bmatrix} \quad (3.174)$$

Onde:

$$\{F\}_G = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} P_X \\ P_Y \\ P_Z \end{Bmatrix} \quad (3.175)$$

E:

$$\{L\}_G = \begin{Bmatrix} L_X \\ L_Y \\ L_Z \end{Bmatrix} \quad (3.176)$$

Portanto:

$$\{M\}_G = \frac{1}{12} \begin{Bmatrix} P_Z L_Y - P_Y L_Z \\ P_X L_Z - P_Z L_X \\ P_Y L_X - P_X L_Y \end{Bmatrix} \quad (3.177)$$

### 3.3.5- Aplicação de Condições de Contorno

#### 3.3.5.1- Deslocamentos Impostos em Problemas Estáticos

Para problemas estáticos, que é o caso no qual os deslocamentos impostos do ADES são utilizados, a Eq. (2.127) se reduz a:

$$[K]_{aa} \{U\}_a = \{R\}_a - [K]_{ab} \{U\}_b \quad (3.178)$$

E a Eq. (2.128) se reduz a:

$$\{R\}_b = [K]_{ba} \{U\}_a + [K]_{bb} \{U\}_b \quad (3.179)$$

Para o caso especial em que os deslocamentos impostos são iguais a zero, que é o caso da imposição de restrições no ADES, tem-se:

$$[K]_{aa} \{U\}_a = \{R\}_a \quad (3.180)$$

Ou seja, basta resolver as equações correspondentes aos graus de liberdade  $\{U\}_a$ .

### 3.3.5.2- Apoio Elástico

Um apoio elástico é basicamente uma mola atuando em uma dada direção. Desprezando-se a massa da mola, tem-se a matriz de rigidez local:

$$[K]_{mola} = k \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.181)$$

Considerando a mola como um elemento de dois nós, tem-se que um dos nós é ligado à malha de elementos finitos e que o outro nó possui deslocamento igual a zero, o que leva a:

$$[\bar{K}]_{mola} = k \quad (3.182)$$

Considerando ainda que a mola é orientada segundo um dos eixos globais, basta somar  $k$  na posição da diagonal principal de  $[K]$  global correspondente ao grau de liberdade que receberá o apoio elástico.

### 3.3.5.3- Massa Concentrada

De forma análoga ao apoio elástico, basta somar  $m$  na posição da diagonal principal de  $[M]$  global correspondente ao GDL que receberá a massa concentrada.

## 3.4- Implementação do ODS Baseado em Elementos Finitos

O ODS foi implementando em conjunto com a ferramenta ADES e calculado através do método de elementos finitos, tomando como base a Eq. (2.114). Desta forma, supôs-se que haveria equilíbrio estático a cada instante de tempo  $t_i$ :

$$[K]\{u(t_i)\} = \{r(t_i)\}, \text{ para } i = 1, 2, \dots, T \quad (3.183)$$

Os vetores instantâneos de forças e deslocamentos podem ser agrupados da seguinte maneira:

$$[R] = \begin{bmatrix} r_1(t_1) & r_1(t_2) & \cdots & r_1(t_T) \\ r_2(t_1) & r_2(t_2) & \cdots & r_2(t_T) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_n(t_1) & r_n(t_2) & \cdots & r_n(t_T) \end{bmatrix} \quad (3.184)$$

$$[U] = \begin{bmatrix} u_1(t_1) & u_1(t_2) & \cdots & u_1(t_T) \\ u_2(t_1) & u_2(t_2) & \cdots & u_2(t_T) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_n(t_1) & u_n(t_2) & \cdots & u_n(t_T) \end{bmatrix} \quad (3.185)$$

O que leva a:

$$[K][U] = [R] \quad (3.186)$$

Os graus de liberdade correspondentes aos locais de medição apresentam deslocamentos conhecidos  $[U]_b$ , onde  $[U]_b = [\{u(t_1)\}_b \quad \{u(t_2)\}_b \quad \cdots \quad \{u(t_T)\}_b]$  e  $T$  é o número total de instantes de tempo. Os deslocamentos desconhecidos são dados por  $[U]_a$ , onde  $[U]_a = [\{u(t_1)\}_a \quad \{u(t_2)\}_a \quad \cdots \quad \{u(t_T)\}_a]$ . As equações de equilíbrio podem então ser divididas da seguinte maneira:

$$\begin{bmatrix} [K]_{aa} & [K]_{ab} \\ [K]_{ba} & [K]_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [U]_a \\ [U]_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [R]_a \\ [R]_b \end{bmatrix} \quad (3.187)$$

Considerando que as forças externas  $[R]_a$  são iguais a zero:

$$\begin{bmatrix} [K]_{aa} & [K]_{ab} \\ [K]_{ba} & [K]_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [U]_a \\ [U]_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [0] \\ [R]_b \end{bmatrix} \quad (3.188)$$

Tomando o primeiro grupo de equações:

$$[K]_{aa}[U]_a + [K]_{ab}[U]_b = [0] \quad (3.189)$$

Ou seja:

$$[K]_{aa}[U]_a = -[K]_{ab}[U]_b = [\bar{R}]_a \quad (3.190)$$

A matriz de deslocamentos  $[U]_a$  pode então ser calculada por um algoritmo adequado de solução estática.

### 3.5- Tratamento de Dados

Além das ferramentas MDV (Modelo Dinâmico de Veículos) e ADES (Análise de Estruturas), foi desenvolvida também uma ferramenta de tratamento e visualização de dados experimentais. Esta ferramenta permite que os dados vibracionais sejam avaliados, preparando-os para o programa ODS.

Os dados experimentais são coletados como um sinal de tensão elétrica em função do tempo. Inicialmente, é necessário converter este sinal para aceleração, através da sensibilidade dos transdutores.

$$a(t) = \frac{V(t)}{S} \quad (3.191)$$

Onde:

- $a(t)$ : aceleração em função do tempo ( $\text{m/s}^2$ );
- $V(t)$ : tensão elétrica em função do tempo (V);
- $S$ : sensibilidade do transdutor (acelerômetro) ( $\text{V}\times\text{s}^2/\text{m}$ ).

Nas cartas de calibração dos acelerômetros, a sensibilidade é dada em milivolts por gravidade. Portanto:

$$a(t) = \frac{V(t)}{S} = \frac{9.81 \times 10^3 \cdot V(t)}{\bar{S}} \quad (3.192)$$

Onde  $\bar{S}$  é a sensibilidade do transdutor em ( $\text{mV/grav}$ ).

Como o sinal obtido no experimento é pré-multiplicado por um ganho, é necessário dividir este sinal pelo valor do ganho correspondente, o que leva a:

$$a(t) = \frac{9.81 \times 10^3 \cdot \bar{V}(t)}{G\bar{S}} \quad (3.193)$$

Onde:

- $\bar{V}(t)$  é o valor coletado pelo sistema de aquisição de dados;
- $G$  é o valor do ganho do pré-amplificador.

As acelerações em função do tempo podem ser então colocadas no domínio da freqüência. Isto é feito através de uma transformada de Fourier, utilizando-se a função *fft* do MATLAB.

Para obter os deslocamentos em função do tempo, há dois caminhos possíveis a serem seguidos:

- Integrar as acelerações ao longo do tempo;
- Transformar as acelerações para o domínio da freqüência e dividir o valor de cada componente  $A_n$  da transformada por  $-\omega_n^2$ , onde  $\omega_n$  é a freqüência angular correspondente à amplitude  $A_n$ . Os valores resultantes são então colocados no domínio do tempo, através de uma transformada inversa de Fourier.

Optou-se pela segunda alternativa, pois com ela é possível remover as amplitudes com freqüência inferior àquela que o acelerômetro é capaz de medir. Além disto, este procedimento fornece diretamente as seguintes funções:

- Acelerações em função da freqüência;
- Deslocamentos em função da freqüência;
- Deslocamentos em função do tempo.

A Fig. 3.39 mostra a interface gráfica do programa de tratamento de dados.

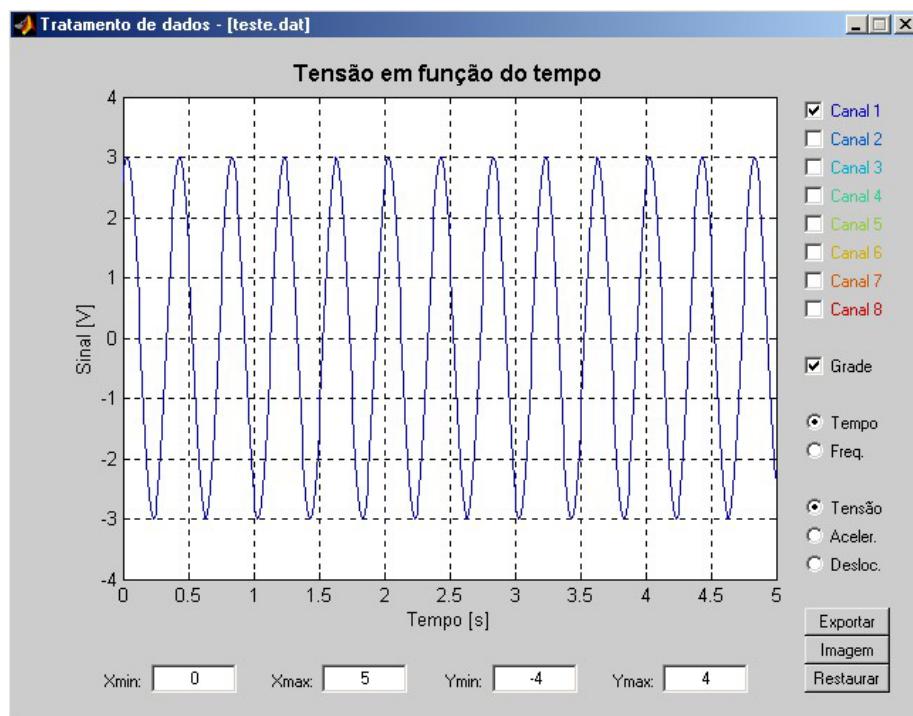


Figura 3.39 – Interface do programa de tratamento de dados.

A tela do programa, como visto na Fig. 3.39, apresenta os seguintes componentes que realizam a interação com o usuário:

- *Check boxes* para a exibir ou ocultar cada um dos canais;
- *Check box* para a exibir ou ocultar uma grade de valores do gráfico (linhas pontilhadas exibidas dentro da área do gráfico);
- *Radio buttons* para a seleção do domínio do tempo ou da freqüência;
- *Radio buttons* para a seleção da grandeza a ser exibida;
- Caixas de edição para modificar os extremos dos eixos horizontal e vertical do gráfico;
- Botões para exportar os dados, salvar uma imagem ou restaurar os eixos do gráfico.

Os botões são:

- Exportar: Salva um arquivo ASCII com os dados de todos os canais, porém apenas dentro da faixa de tempo ou freqüência selecionada pelas caixas de edição.
- Imagem: Salva uma imagem JPG do gráfico da forma como está exibido na tela.
- Restaurar: Restaura os valores extremos dos eixos horizontal e vertical do gráfico, de modo a conter todos os dados de amplitude, tempo ou freqüência.

## **Capítulo 4**

### **RESULTADOS E DISCUSSÃO**

Este capítulo apresenta os resultados obtidos a partir das três ferramentas desenvolvidas. É feita uma comparação dos resultados de modelagem via método dos elementos finitos com um software comercial, o que valida a ferramenta ADES.

Para a realização dos testes, utilizou-se um veículo tipo Mini-Baja, desenvolvido pelos alunos da PUC-Minas. As características gerais deste veículo podem ser vistas na Tab. 4.1.

Tabela 4.1 – Características gerais do Mini-Baja.

Carroceria	Estrutura tubular em aço SAE 1020
Motor	Briggs & Stratton de 10HP
Suspensão dianteira	Braços oscilantes
Suspensão traseira	<i>Swing axle</i>
Conjunto mola-amortecedor dianteiro	Motocicleta Honda XL 125
Conjunto mola-amortecedor traseiro	Motocicleta Honda CB 500
Transmissão	CVT Modelo 780S - Comet Industries
Caixa de redução adicional	7.25:1
Pneus dianteiros	21x7x10 DUNLOP
Pneus traseiros	21x7x10 DUNLOP
Freios	A disco com acionamento hidráulico
Sistema de direção	Pinhão e cremalheira

A partir dos desenhos da estrutura tubular e das propriedades mecânicas do aço SAE 1020, gerou-se um modelo em elementos finitos. Este modelo foi utilizado tanto para as avaliações estática e dinâmica quanto para a determinação dos locais de instalação dos transdutores de aceleração para a realização da etapa experimental deste trabalho.

A Fig. 4.1 mostra uma foto do Mini-Baja utilizado na etapa experimental.



Figura 4.1 – Foto do Mini-Baja utilizado na etapa experimental.

Os resultados obtidos serão apresentados segundo a seqüência mostrada a seguir:

- Determinação da resposta veicular em *ride* – MDV
- Avaliação estrutural estática e dinâmica – ADES
- Obtenção dos pontos de coleta da etapa experimental – ADES
- Identificação de respostas no domínio do tempo e da freqüência
- Avaliação do comportamento em uso – ODS

## 4.1- Determinação da Resposta Veicular em *Ride* – MDV

Devido à indisponibilidade dos parâmetros do próprio Mini-Baja, a ferramenta MDV foi executada com valores baseados no trabalho de Margolis e Shim (2001), apenas para demonstrar suas capacidades. A Tab. 4.2 apresenta os valores utilizados para os parâmetros veiculares:

Tabela 4.2 – Valores utilizados para os parâmetros do veículo.

Parâmetro	Valor
$l_d$	1.16 m
$l_t$	1.68 m
$m_v$	1500 kg
$J_v$	2400 kg × m <sup>2</sup>
$m_d$	100 kg
$m_t$	100 kg
$k_d$	300 kN/m
$k_t$	300 kN/m
$k_{sd}$	30 kN/m
$k_{st}$	30 kN/m
$c_{sd}$	500 N × s/m
$c_{st}$	500 N × s/m

Os parâmetros da pista, por sua vez, foram baseados no trabalho de Gillespie (1992). A Tab. 4.3 apresenta os valores adotados para os parâmetros da pista.

Tabela 4.3 – Valores utilizados para os parâmetros da pista.

Parâmetro	Valor
Parâmetro de magnitude	$3.8 \times 10^{-6}$ ciclos × m
Número de onda de <i>cutoff</i>	0.164 ciclos/m
Comprimento do perfil	100 m
Número de termos harmônicos	50

O perfil da pista e os resultados obtidos correspondem às figuras exibidas no capítulo Metodologia, Fig. 3.7 a 3.11. Além dos resultados gráficos, o MDV também apresenta resultados numéricos das características do veículo, como pode ser visto nas Tab 4.4 a 4.6.

Tabela 4.4 – Freqüências naturais do modelo do veículo.

1º modo	0.91072 Hz
2º modo	1.1391 Hz
3º modo	9.1438 Hz
4º modo	9.1443 Hz

Tabela 4.5 – Amortecimento modal do veículo.

1º modo	4.326 %
2º modo	5.4042 %
3º modo	4.4431 %
4º modo	4.4955 %

Tabela 4.6 – Deslocamentos estáticos do veículo.

Mola dianteira	289 mm
Mola traseira	201 mm
Pneu dianteiro	32 mm
Pneu traseiro	23 mm

É possível observar na Fig. 3.8 que os deslocamentos nas rodas apresentam componentes de altas freqüências e que estas componentes são desprezíveis nos deslocamentos do próprio veículo. Isto se deve à ação da suspensão, que filtra as componentes de altas freqüências.

Comparando-se a Tab. 4.4 com a Fig. 3.9, verifica-se que os picos do gráfico correspondem às freqüências naturais obtidas, como era de se esperar.

## 4.2- Avaliação Estrutural Estática e Dinâmica – ADES

Nesta etapa do estudo, os dados de geometria e propriedades mecânicas dos materiais do Mini-Baja foram inseridos no programa ADES, possibilitando a validação da ferramenta. Os tópicos a seguir mostram a seqüência de entrada e obtenção dos resultados de avaliação estrutural estática e dinâmica.

### 4.2.1- Geometria

As Fig. 4.2 a 4.5 apresentam vistas diferentes da estrutura do Mini-Baja. Os pontos são exibidos em vermelho, os segmentos de reta em verde e os arcos de circunferência em azul. A Fig. 4.2 apresenta também a numeração dos pontos, retas e arcos apresentada pelo ADES.

A orientação dos eixos (X,Y,Z) foi escolhida de tal forma que a vista de frente (plano X-Z) corresponde à frente do veículo, que a vista de topo (plano X-Y) corresponde a uma vista superior e que a vista lateral (plano Y-Z) corresponde à lateral do veículo.

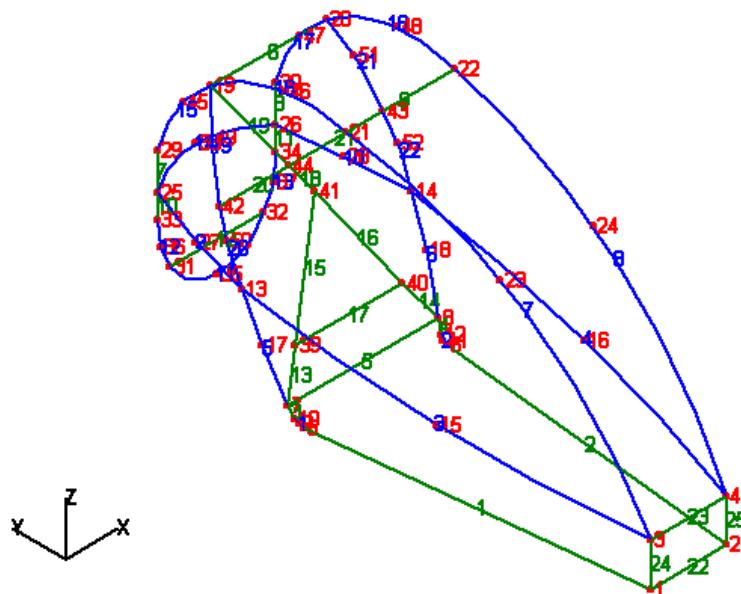


Figura 4.2 – Geometria da estrutura do Mini-Baja em vista isométrica.

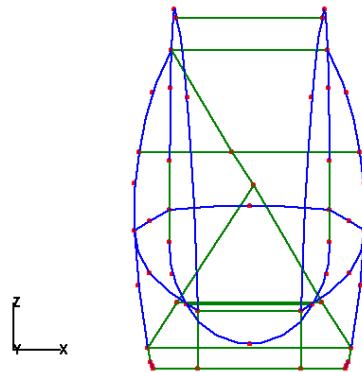


Figura 4.3 – Geometria da estrutura do Mini-Baja na vista de frente.

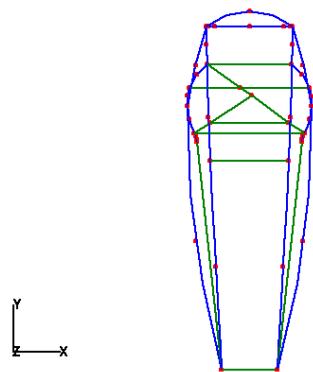


Figura 4.4 – Geometria da estrutura do Mini-Baja na vista de topo.

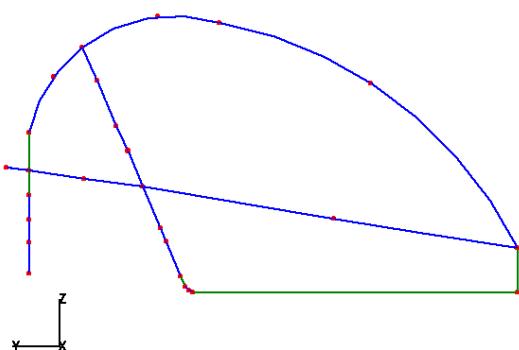


Figura 4.5 – Geometria da estrutura do Mini-Baja na vista lateral esquerda.

## 4.2.2- Elementos Finitos

### 4.2.2.1- Malha

A malha de elementos finitos foi gerada com elementos de aproximadamente vinte e cinco milímetros de comprimento. Como toda a estrutura do Mini-Baja é formada por tubos dobrados e soldados, a orientação da seção transversal dos elementos não é importante. No entanto, é necessário que o vetor que determina a orientação da seção de um elemento não seja colinear ao eixo deste elemento.

Para a malha gerada no ADES, o menor ângulo entre o eixo de um elemento e o vetor de orientação correspondente é de  $52.7^\circ$ , enquanto que o maior ângulo é de  $127.3^\circ$ . Ou seja, a parcela do vetor de orientação perpendicular ao elemento é maior que a parcela colinear em todos os elementos. Desta forma, tem-se a garantia de que os eventuais erros numéricos não terão efeito significativo no cálculo do plano que contém a seção transversal de um dado elemento.

O modelo foi criado inicialmente na ferramenta ADES, totalizando 892 nós e 909 elementos. Foram aplicadas nove restrições à estrutura, como pode ser visto na Fig. 4.6. As restrições R1 a R8 representam os nós que tiveram todos os GDLs restringidos. Estes nós correspondem aos pontos de conexão entre a estrutura e a suspensão. Na restrição R9, apenas o deslocamento na direção Y foi restringido. Esta última restrição se deve à conexão rígida existente entre a estrutura e o motor neste nó.

A opção de restringir os deslocamentos nestes pontos não representa corretamente o que ocorre com o veículo em movimento. Para o veículo parado, no entanto, o movimento da suspensão é desprezível e as condições de contorno se tornam adequadas.

O objetivo das análises foi demonstrar o funcionamento adequado da ferramenta ADES e não o de retratar fielmente o que ocorre com o veículo. Portanto, não houve uma maior preocupação na determinação das condições de contorno exatas às quais a estrutura do Mini-Baja é submetida.

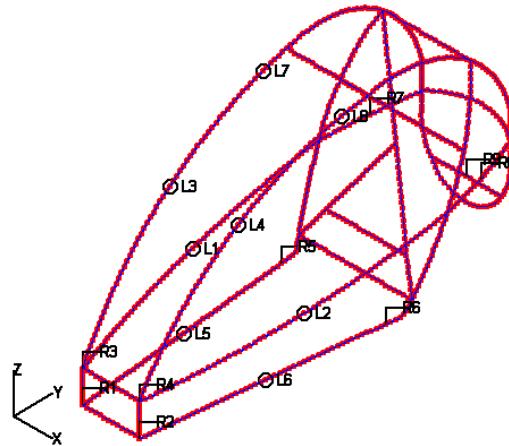


Figura 4.6 – Malha de elementos finitos gerada no ADES.

Para efeito de comparação e validação da ferramenta ADES, o mesmo modelo foi criado no ALGOR, que é um software comercial de elementos finitos. A Fig. 4.7 apresenta o modelo criado no ALGOR, com uma malha semelhante à gerada no ADES (858 nós e 869 elementos). A orientação do modelo adotada foi a mesma da Fig. 4.6.

As condições de contorno aplicadas foram as mesmas do ADES. Na Fig. 4.7, os triângulos representam uma condição de engaste, ou seja, restrições em todos os deslocamentos e rotações. O círculo representa a condição em que apenas alguns GDL foram restringidos. No caso específico deste modelo, apenas o deslocamento em Y. Devido ao modo como o ALGOR exibe o modelo, não é possível distinguir as divisões entre os elementos finitos.

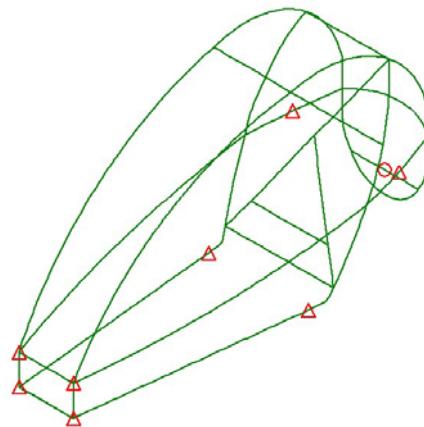


Figura 4.7 – Malha de elementos finitos gerada no ALGOR.

#### 4.2.2.2- Análise Estática com Peso Próprio

Nesta análise, apenas o efeito gravitacional sobre a estrutura foi considerado. Esta análise foi realizada apenas para avaliar o funcionamento do ADES, comparando os resultados com os calculados no ALGOR. Outro objetivo desta análise foi o de demonstrar como os resultados de deslocamentos, esforços e tensões são exibidos no ADES. Não foram aplicados os pesos dos outros componentes do veículo.

As Fig. 4.8 a 4.11 apresentam os resultados de deslocamentos. As figuras do lado esquerdo correspondem ao ADES e as do lado direito ao ALGOR.

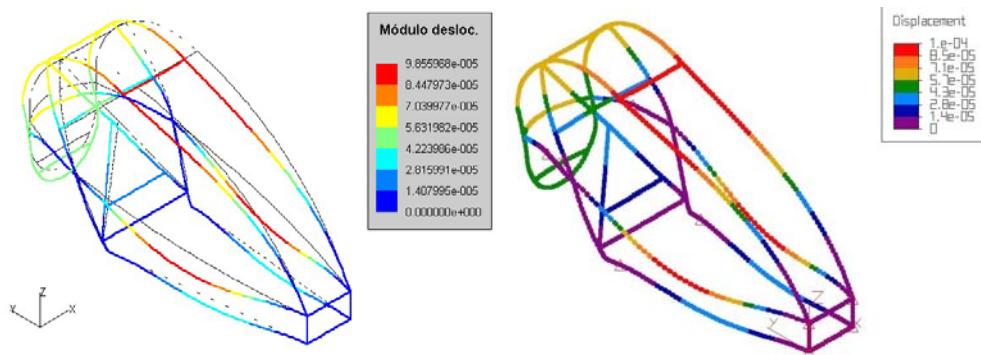


Figura 4.8 – Módulo de deslocamentos (metros).

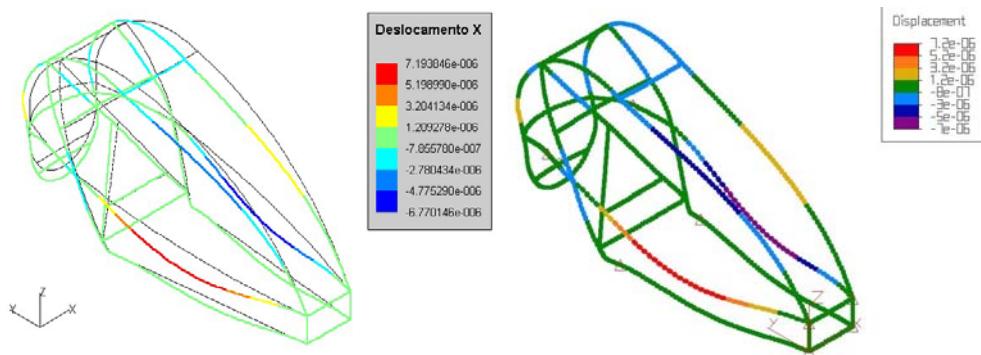


Figura 4.9 – Deslocamentos na direção X (metros).

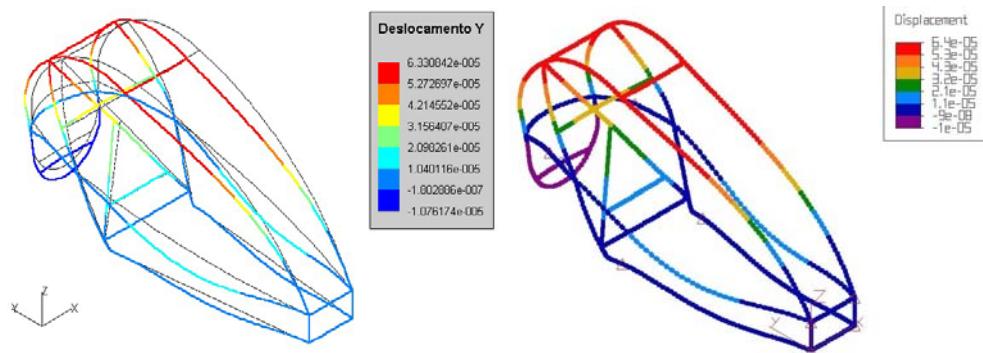


Figura 4.10 – Deslocamentos na direção Y (metros).

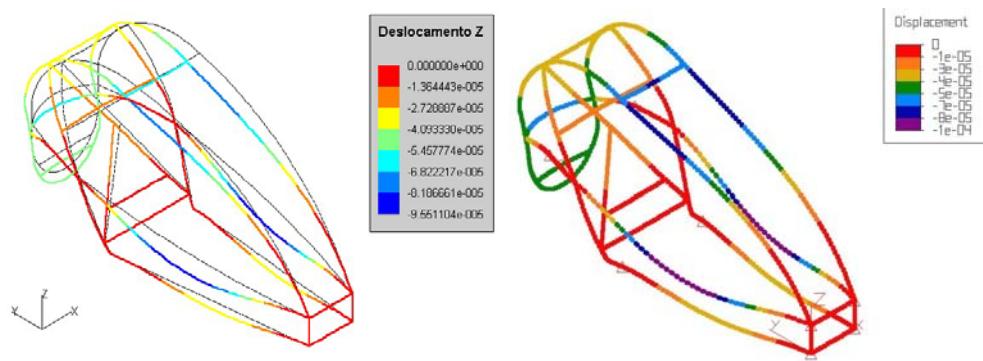


Figura 4.11 – Deslocamentos na direção Z (metros).

As Fig. 4.12 a 4.17 apresentam os resultados de tensões. O ALGOR não oferece a exibição das tensões devidas à torção e aos esforços cortantes. Para as outras tensões, as figuras do lado esquerdo correspondem ao ADES e as do lado direito ao ALGOR.

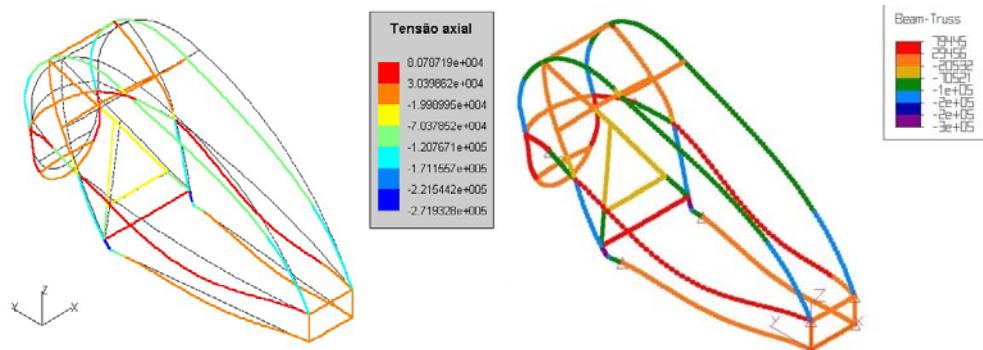


Figura 4.12 – Tensão axial (Pascal).

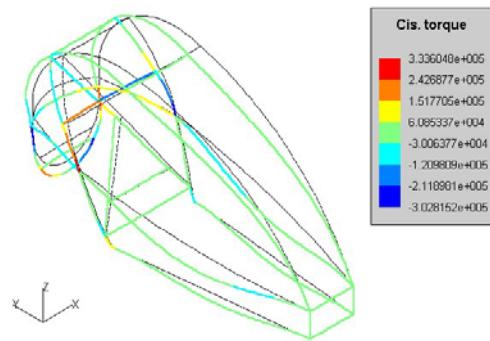


Figura 4.13 – Tensão de cisalhamento devida à torção (Pascal).

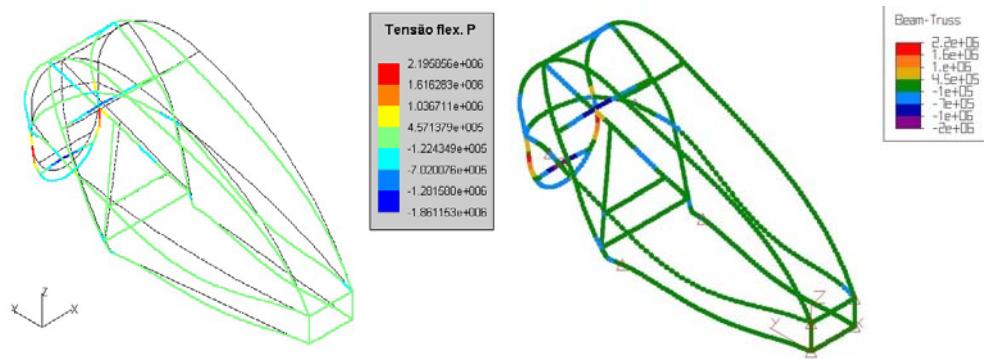


Figura 4.14 – Tensão devida à flexão em torno do eixo principal de cada elemento (Pascal).

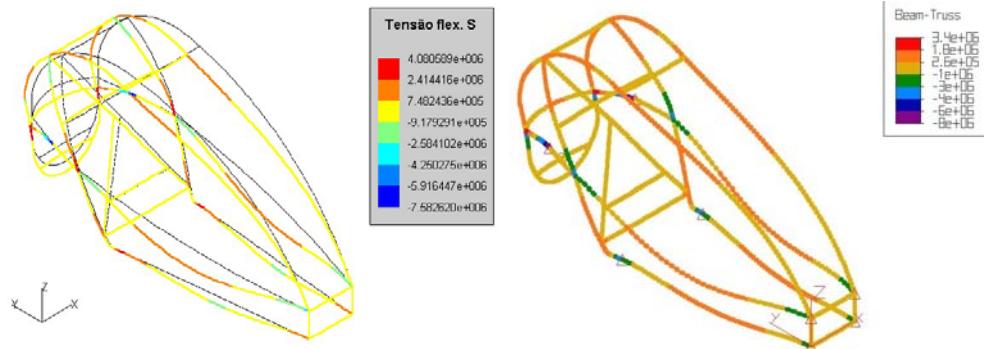


Figura 4.15 – Tensão devida à flexão em torno do eixo secundário de cada elemento (Pascal).

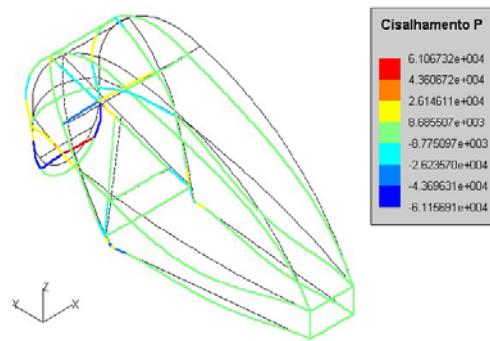


Figura 4.16 – Tensão de cisalhamento segundo o eixo principal de cada elemento (Pascal).

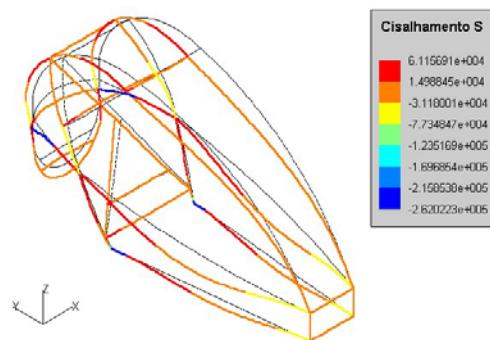


Figura 4.17 – Tensão de cisalhamento segundo o eixo secundário de cada elemento (Pascal).

As Fig. 4.18 a 4.23 apresentam os resultados de esforços (forças e momentos). Apenas os resultados do ADES são apresentados.

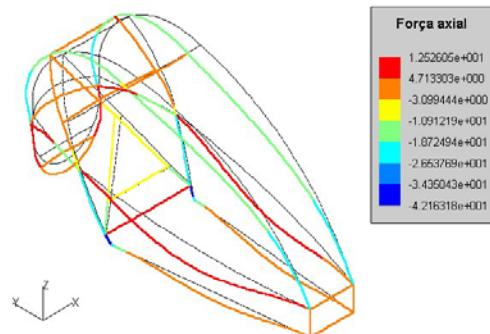


Figura 4.18 – Força axial em cada elemento (Newton).

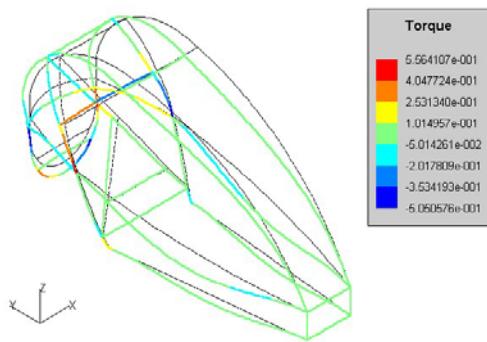


Figura 4.19 – Momento torçor em cada elemento (Newton × metro).

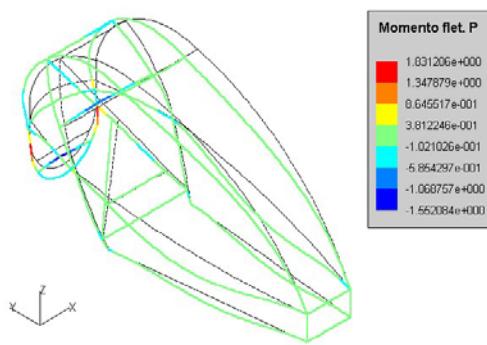


Figura 4.20 – Momento fletor principal em cada elemento (Newton × metro).

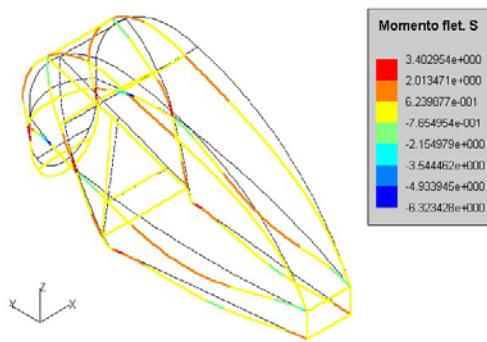


Figura 4.21 – Momento fletor secundário em cada elemento (Newton × metro).

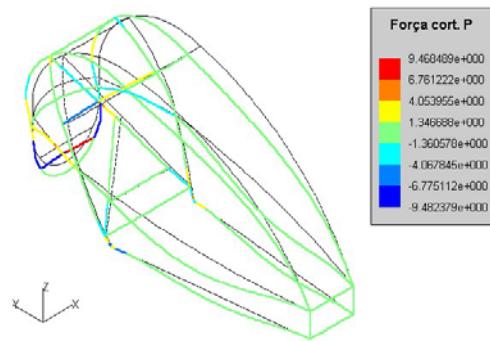


Figura 4.22 – Força cortante principal em cada elemento (Newton).

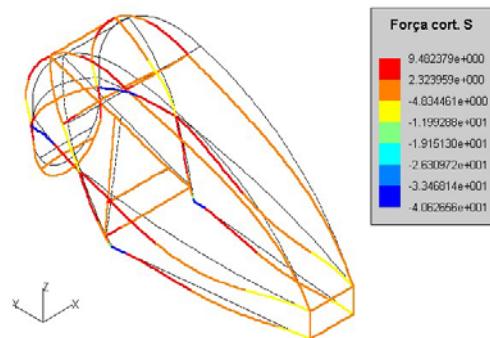


Figura 4.23 – Força cortante secundária em cada elemento (Newton).

#### 4.2.2.3- Análise dos Modos de Vibração e Freqüências Naturais

A análise de modos de vibração e freqüências naturais representa uma primeira etapa no procedimento de superposição modal. Mas esta análise, por si só, apresenta alguns resultados importantes da estrutura. A análise foi realizada tanto no ADES quanto no ALGOR e os resultados comparados.

A Tab. 4.7 mostra uma comparação entre os valores de freqüência natural calculados pelo ADES e pelo ALGOR, onde se pode notar a confiabilidade da ferramenta desenvolvida. A Fig. 4.24 mostra graficamente a comparação entre os dois resultados.

Tabela 4.7 – Comparação entre as freqüências naturais da estrutura do Mini-Baja calculadas pelo ALGOR e pelo ADES.

Modo	Freqüência Algor [Hz]	Freqüência ADES [Hz]	Erro [%]
1	30.807	30.931	0.40
2	44.975	45.313	0.75
3	51.668	51.735	0.13
4	56.350	56.493	0.25
5	56.804	56.943	0.25
6	67.802	68.040	0.35
7	68.326	68.472	0.21
8	72.159	72.467	0.43
9	88.356	88.633	0.31
10	93.261	93.502	0.26
11	93.261	93.502	0.26
12	93.261	93.502	0.26
13	93.261	93.502	0.26
14	101.81	102.29	0.47
15	102.50	103.46	0.94
16	111.61	112.56	0.86
17	114.06	114.34	0.25
18	119.21	120.02	0.68
19	137.14	137.54	0.29
20	143.37	144.04	0.47

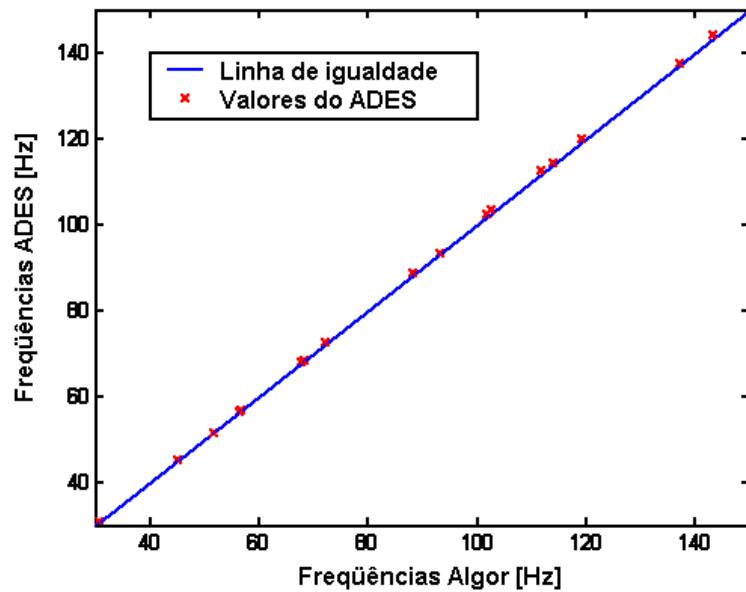


Figura 4.24 – Comparação gráfica entre as freqüências naturais calculadas.

As Fig. 4.25 a 4.44 apresentam os vinte primeiros modos da estrutura, com suas respectivas freqüências naturais. As figuras do lado esquerdo correspondem ao ADES e as do lado direito ao ALGOR.

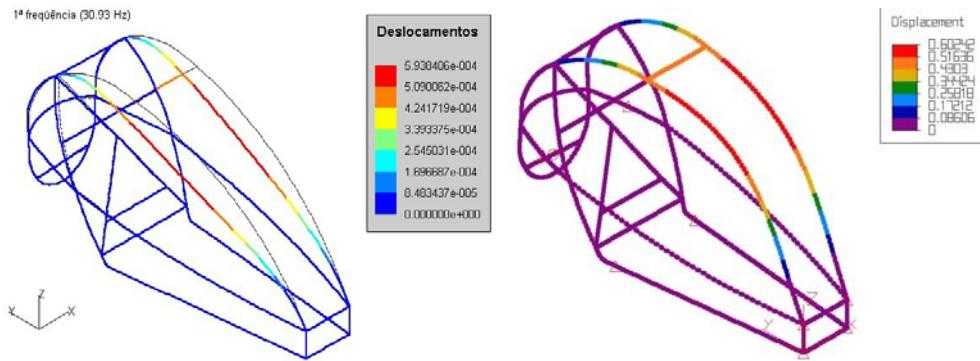


Figura 4.25 – Primeiro modo de vibração.

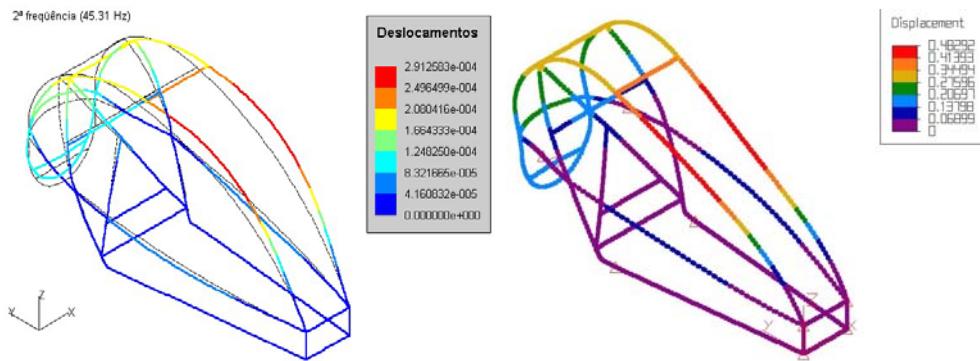


Figura 4.26 – Segundo modo de vibração.

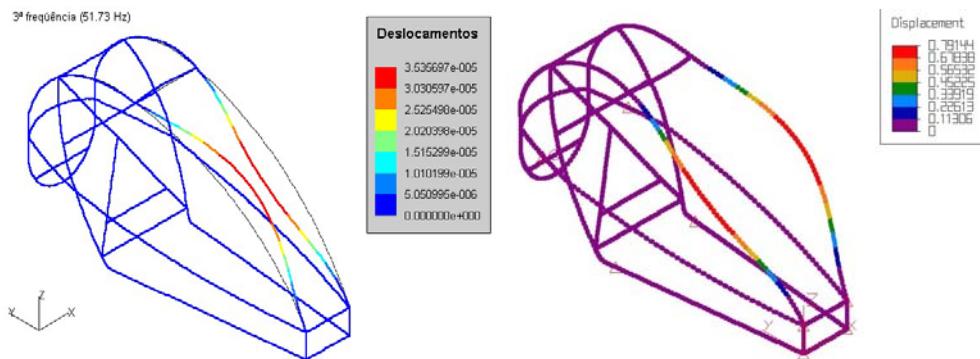


Figura 4.27 – Terceiro modo de vibração.

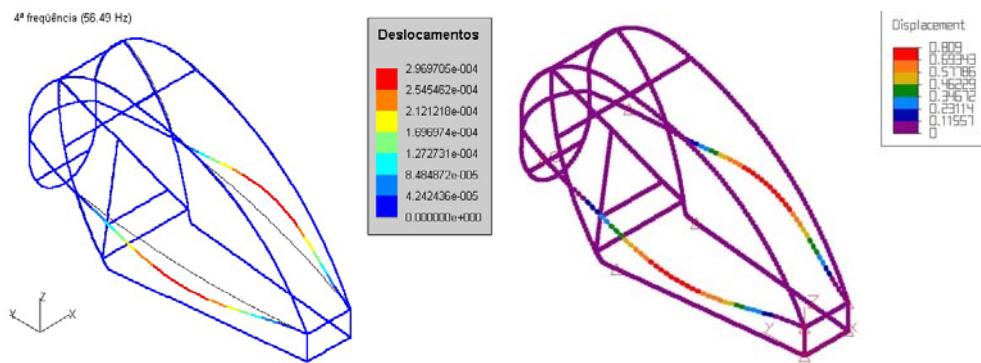


Figura 4.28 – Quarto modo de vibração.

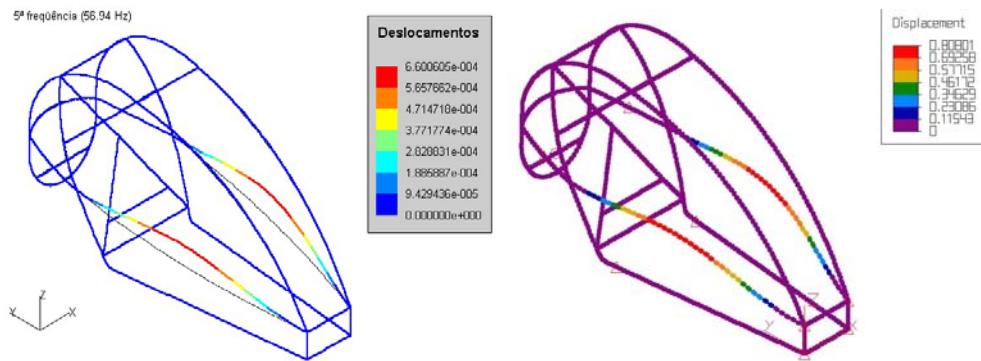


Figura 4.29 – Quinto modo de vibração.

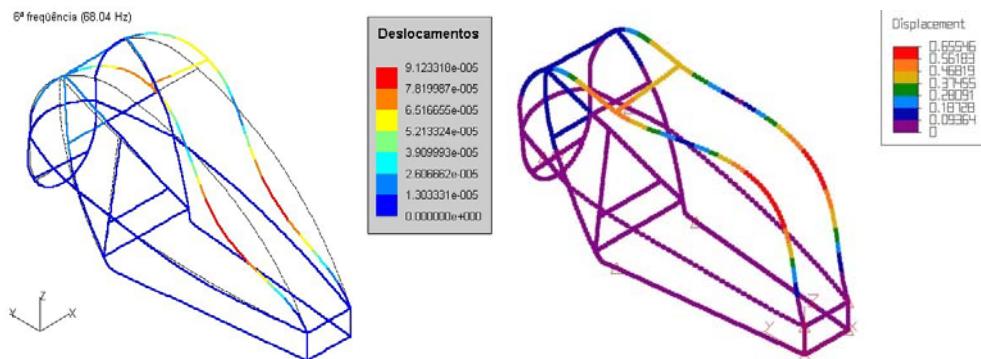


Figura 4.30 – Sexto modo de vibração.

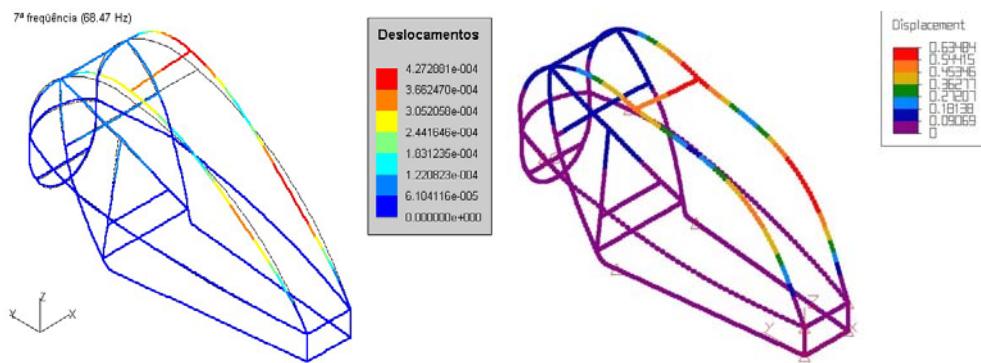


Figura 4.31 – Sétimo modo de vibração.

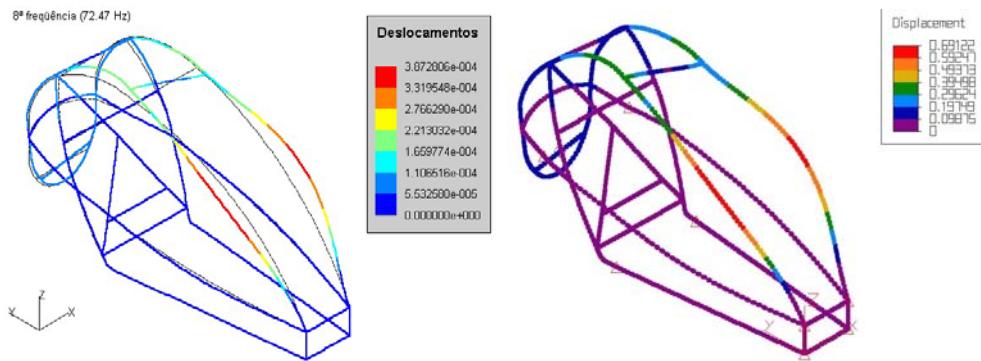


Figura 4.32 – Oitavo modo de vibração.

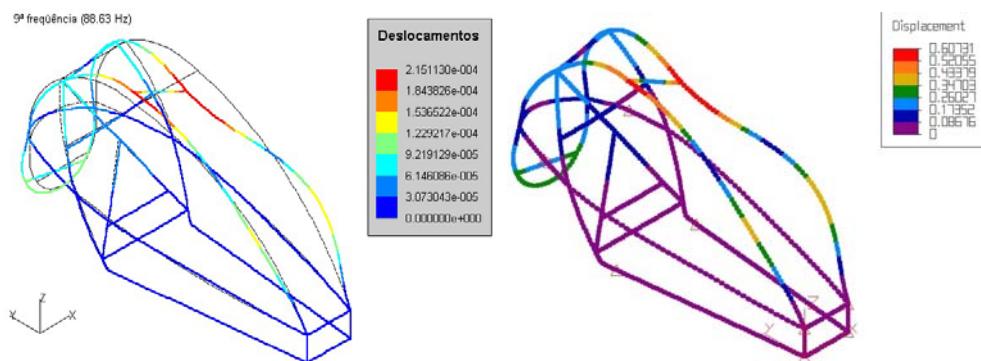


Figura 4.33 – Nono modo de vibração.

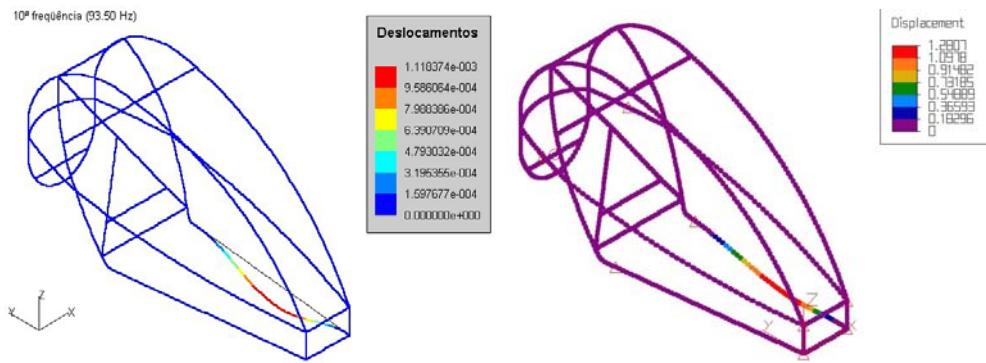


Figura 4.34 – Décimo modo de vibração.

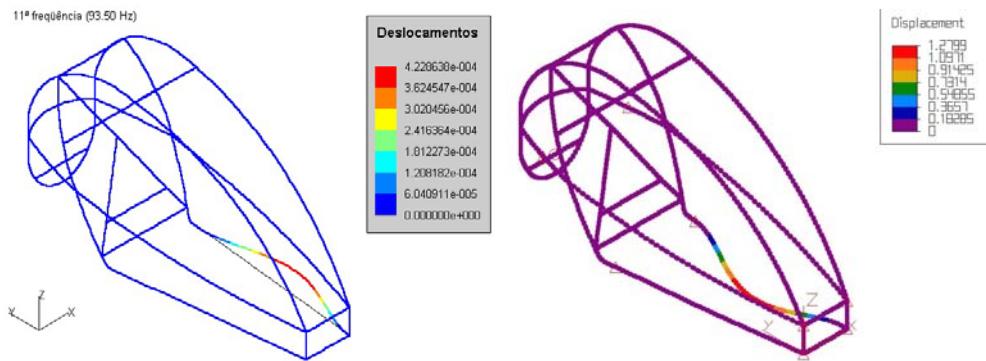


Figura 4.35 – Décimo primeiro modo de vibração.

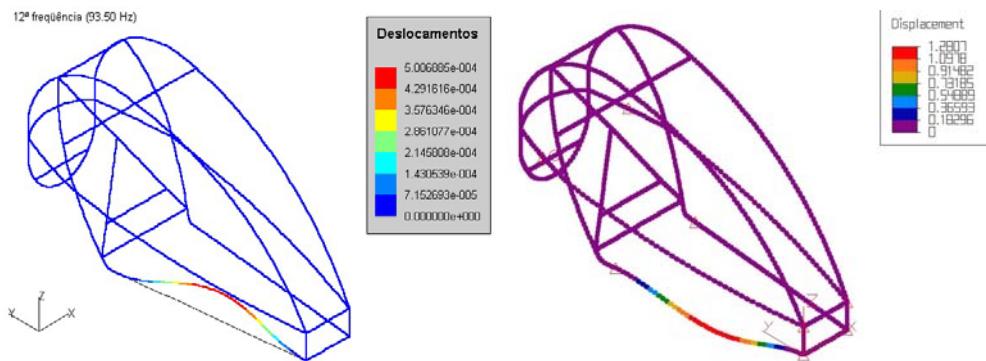


Figura 4.36 – Décimo segundo modo de vibração.

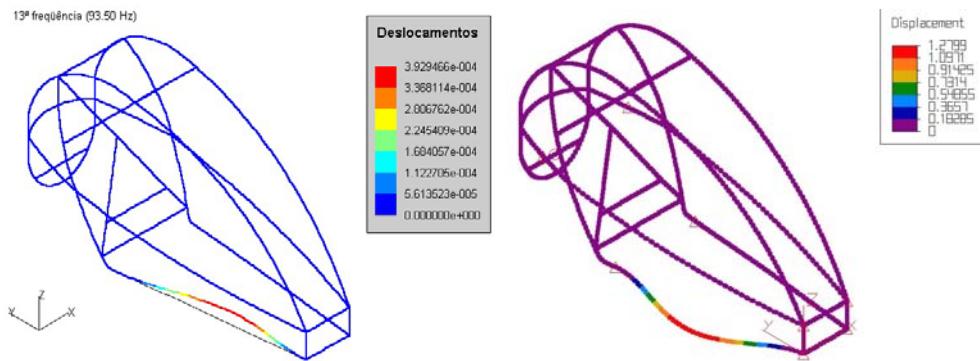


Figura 4.37 – Décimo terceiro modo de vibração.

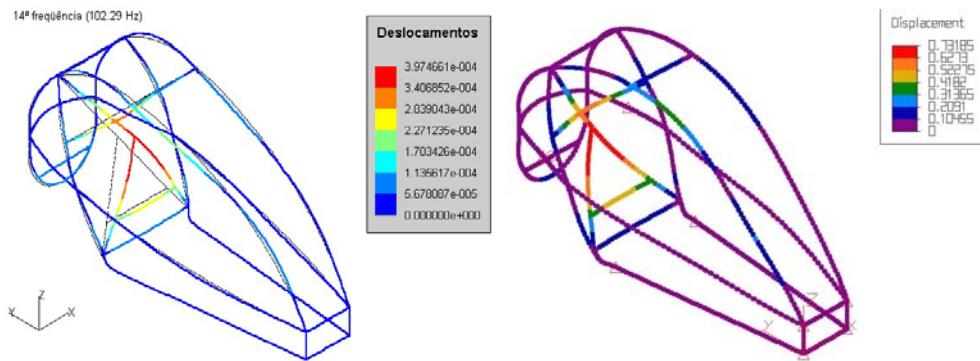


Figura 4.38 – Décimo quarto modo de vibração.

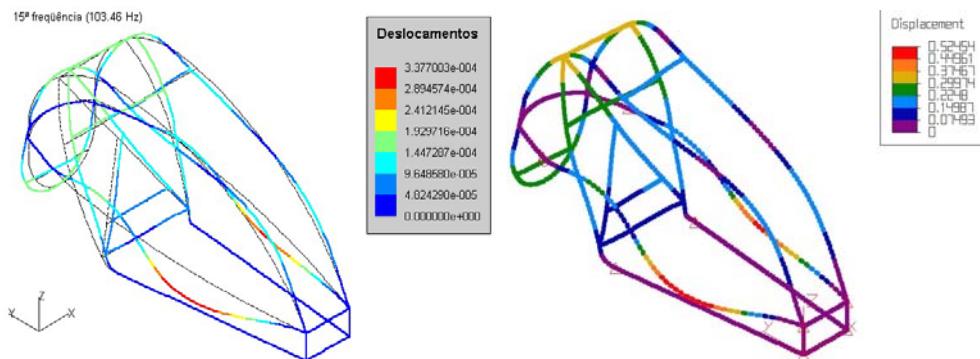


Figura 4.39 – Décimo quinto modo de vibração.

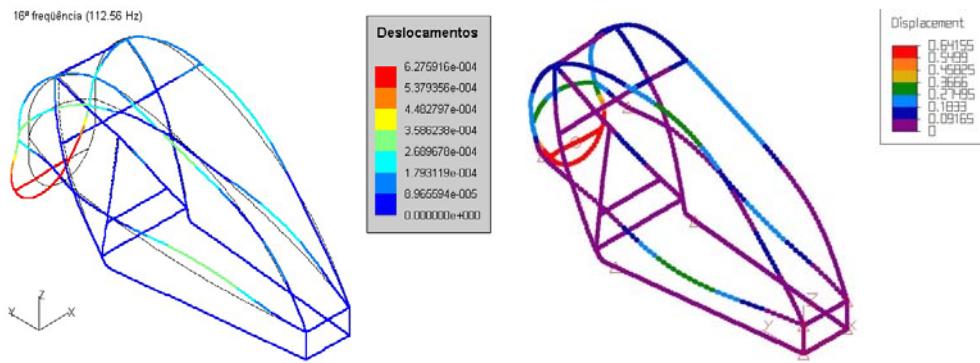


Figura 4.40 – Décimo sexto modo de vibração.

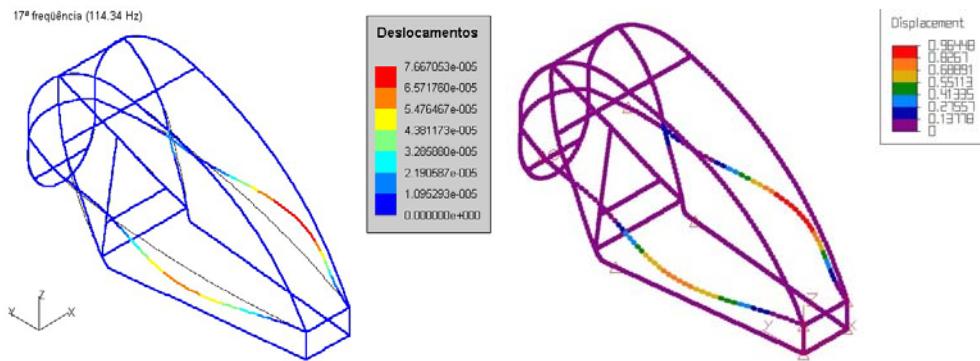


Figura 4.41 – Décimo sétimo modo de vibração.

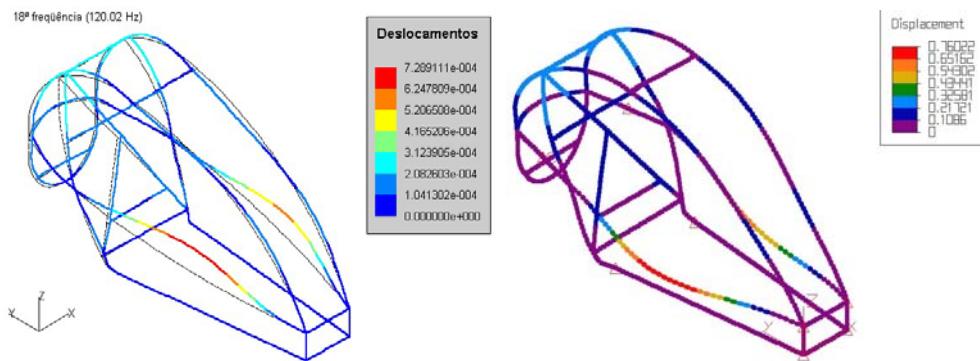


Figura 4.42 – Décimo oitavo modo de vibração.

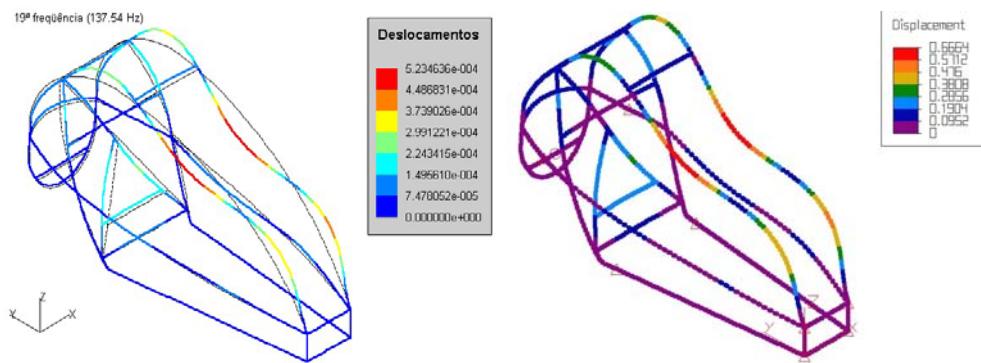


Figura 4.43 – Décimo nono modo de vibração.

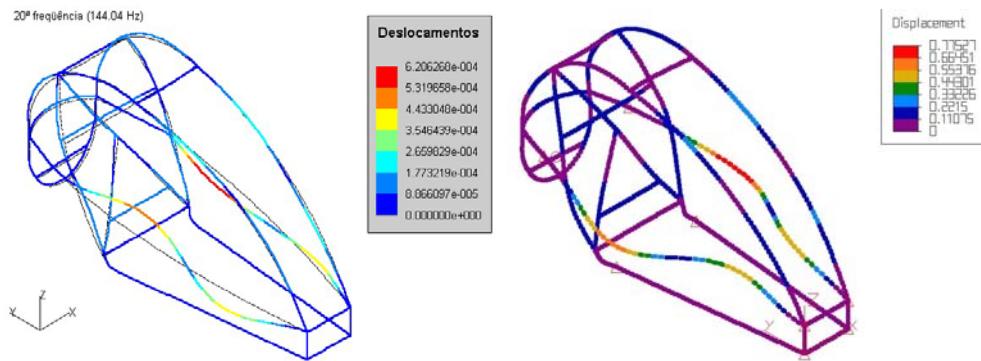


Figura 4.44 – Vigésimo modo de vibração.

Como pode ser visto nas Fig. 4.34 a 4.37, o modelo apresenta quatro modos para um mesmo valor de freqüência natural (93.5 Hz). Na realidade, esta freqüência natural apresenta infinitos modos de vibração, pois qualquer combinação linear dos modos apresentados também é um modo de vibração.

Para os modos de vibração 4, 5, 8, 9, 10, 15, 17 e 19, observa-se que os resultados obtidos através do ADES assemelham-se aos do ALGOR quando multiplicados por uma constante positiva. A diferença entre os valores se deve à forma na qual a normalização dos modos é realizada. Para os modos de vibração restantes, observa-se que os resultados do ADES assemelham-se aos do ALGOR quando multiplicados por uma constante negativa.

### 4.3- Etapa Experimental

Para a etapa experimental, o veículo Mini-Baja foi instrumentado com uma série de acelerômetros. Os graus de liberdade escolhidos para a medição foram determinados através do algoritmo *effective independence distribution vector*, tal como abordado por Atalla (1996). Como o sistema de aquisição é capaz de coletar dados em oito canais simultaneamente, utilizou-se o algoritmo para o cálculo dos oito graus de liberdade correspondentes. Os graus de liberdade de rotação foram removidos antes da aplicação do algoritmo e apenas os modos de vibração com freqüências naturais abaixo de 100 Hz foram utilizados.

A escolha da freqüência máxima de 100 Hz foi devida às características dos equipamentos de medição. O sistema de aquisição apresenta uma freqüência de amostragem de 400 Hz, o que resulta em uma freqüência de Nyquist de 200 Hz. O pré-amplificador, por sua vez, não utiliza o valor de 200 Hz para a freqüência de corte do seu filtro passa-baixa. O valor mais próximo oferecido é o de 100 Hz.

Quando o algoritmo *effective independence distribution vector* atingiu as últimas iterações, observou-se que a matriz de Fisher aproximava-se de uma matriz singular. Portanto, não havia uma boa confiabilidade nos graus de liberdade obtidos. Optou-se então por calcular os dezesseis GDLs mais significativos e escolher apenas oito dentre estes. As coordenadas dos locais obtidos são apresentadas na Tab. 4.8, enquanto que os graus de liberdade correspondentes a cada local são apresentados na Tab. 4.9.

Tabela 4.8 – Coordenadas (X,Y,Z) dos locais de medição em milímetros.

Local	X	Y	Z
1	-155	773	302
2	477	773	302
3	-31	523	798
4	353	523	798
5	-68	639	0
6	390	639	0
7	-61	1076	1069
8	383	1076	1069

Tabela 4.9 – Graus de liberdade correspondentes a cada local calculado.

Local	1	2	3	4	5	6	7	8
GDLs	X e Z	X e Z	X e Y	X e Y	X e Z	X e Z	X e Z	X e Z

As coordenadas dos locais apresentadas na Tab. 4.8 foram arredondadas para o número inteiro mais próximo. As posições dos locais de medição calculados podem ser melhor visualizadas na Fig. 4.45.

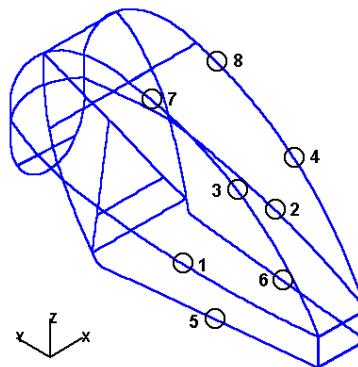


Figura 4.45 – Posições dos locais de medição calculados.

Os oito graus de liberdade foram então escolhidos dentre os dezesseis, de forma a manter a simetria e abordar as três direções X, Y e Z. A Tab. 4.10 apresenta os graus de liberdade que foram escolhidos para cada local de medição.

Tabela 4.10 – Graus de liberdade escolhidos para cada local calculado.

Local	1	2	3	4	5	6	7	8
GDL	X	X	Y	Y	Z	Z	Z	Z

Como a estrutura do Mini-Baja é tubular, foi necessário soldar pequenos tarugos de aço nos locais de medição, de forma que os acelerômetros pudessem ser fixados. Estes tarugos em forma de paralelepípedos foram orientados segundo os eixos globais (X,Y,Z) do modelo. Os acelerômetros foram fixados com uma fina camada de cera de abelha fornecida pelo próprio fabricante destes. Os cabos dos acelerômetros foram presos à estrutura do Mini-Baja com fita crepe, partindo de uma distância de aproximadamente sete centímetros do ponto de fixação dos acelerômetros.

Os pré-amplificadores foram colocados um de cada lado do banco do Mini-Baja e presos com o uso de espumas e plásticos de bolha. O sistema de aquisição foi posicionado em frente ao banco, apoiado sobre espumas e preso por cintas de velcro.

As características dos acelerômetros e pré-amplificadores utilizados podem ser vistas nas Tab. 4.11 e 4.12, respectivamente.

Tabela 4.11 – Especificações dos acelerômetros (Kistler Piezo BEAM®).

<b>Parâmetro</b>	<b>Unidade</b>	<b>Valor</b>
Modelo	-	8632C10
Faixa de aceleração	grav.	$\pm 10$
Limite de aceleração	grav.	$\pm 16$
Sensibilidade, $\pm 5\%$ em 100 Hz	mV/grav.	500
Limiar nominal	$\mu\text{grav. RMS}$	280
Impacto máximo (pulso de 0.2 ms)	grav.	10000
Linearidade de amplitude nominal	%	$\pm 1$
Constante de tempo nominal	s	1
Freqüência de ressonância nominal	kHz	22
Faixa de freqüências nominal, $\pm 5\%$	Hz	0.5 a 5000
Mudança de fase, $< 5^\circ$	Hz	4 a 2000
Sensibilidade transversal	%	$< 1$
Sensibilidade a deformação da base, para $250 \mu\varepsilon$	grav./ $\mu\varepsilon$	$< 0.001$
Faixa de temperaturas de operação	°C	0 a 65
Faixa de temperaturas de armazenamento	°C	-23 a 94
Coeficiente de sensibilidade a temperatura	%/°C	+0.08
Massa	g	6
Bias de saída, $\pm 3$ Volts	VDC	11
Impedância de saída	$\Omega$	$< 500$
Corrente de saída, 4 mA de entrada	mA	2
Tensão elétrica de saída, Full-Scale	V	$\pm 5$
Isolamento elétrico	$M\Omega$	10
Corrente elétrica da fonte	mA	2 a 18

Tensão elétrica da fonte	VDC	20 a 30
Impedância da fonte	kΩ	> 100

Tabela 4.12 – Especificações dos pré-amplificadores (Kistler Power Supply/Coupler)

Parâmetro	Unidade	Valor/Tipo
Modelo	-	5134A
Conecotor de entrada	-	BNC-neg
Ruído na entrada (filtro de 30kHz, ganho 1)	µV	70 (típico)
Ruído na entrada (filtro de 30kHz, ganho 100)	µV	15 (máximo)
Ruído na entrada (filtro de 1kHz, ganho 1)	µV	30 (típico)
Fonte do transdutor	mA	4
Faixa de ajuste opcional	mA	2 a 18
Ganhos	-	1, 2, 5, 10, 20, 50, 100
Exatidão (ganhos 1 a 50)	%	±0.5
Exatidão (ganho 100)	%	±1.0
Largura de banda (ganho 1)	Hz	0.04 a 30000
Largura de banda (ganho 100)	Hz	0.04 a 8000
Filtro passa-baixa	-	Butterworth de 2 pólos
Freqüências de corte	Hz	100, 1000, 10000, 30000
Exatidão da freqüência	%	±7
Filtro passa-alta	-	Passivo de 2 pólos
Freqüência de corte	Hz	0.04
Constante de tempo	s	3.5
Exatidão da freqüência	%	±10
Offset máximo	mV	25
Fonte do teste de sistema	-	ruído branco
Amplitude do sinal	mV <sub>RMS</sub>	10
Exatidão da amplitude	%	-50 a +100
Largura de banda	Hz	1 a 30000
Flatness	dB	±10
Conecotor de saída	BNC-neg	

Impedância típica	$\Omega$	100
Faixa de tensão, pico a pico	V	20
Corrente limite	mA	$\pm 5$
Tensão de alimentação	VAC	115/230 +18,-23%
Consumo máximo	VA	14
Freqüência	Hz	48 a 62
Largura	mm	71
Altura	mm	129
Profundidade	mm	184
Massa	kg	1.25
Faixa de temperaturas de operação	°C	0 a 50
Faixa de temperaturas de armazenamento	°C	-20 a 85
Umidade (non-condensing)	%	10 a 90

Para o experimento, os pré-amplificadores foram ajustados para um ganho de 2×, filtro passa-baixa de 100 Hz e *Bias* em *OFF*. O cabo de cada acelerômetro foi ligado a uma das entradas do pré-amplificador. Cada saída do pré-amplificador foi então ligada a um canal do sistema de aquisição. Um esquema das conexões realizadas pode ser observado na Fig. 4.46 e na Tab. 4.13.

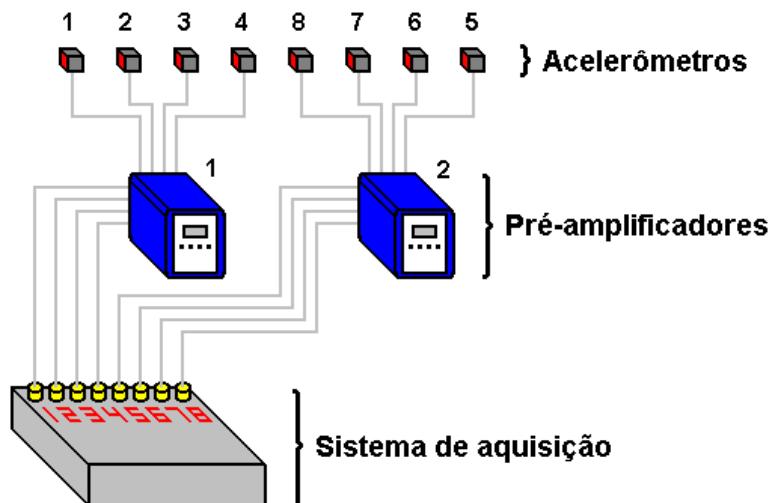


Figura 4.46 – Esquema das conexões do equipamento de medição.

Tabela 4.13 – Descrição das conexões do equipamento de medição.

<b>Canal do sistema de aquisição</b>	<b>Local de medição</b>	<b>Direção e sentido</b>	<b>Pré-amp. / Canal</b>	<b>Acelerômetro</b>
1	3	+Y	D / 2	1 (C105264)
2	7	+Z	D / 4	2 (C105263)
3	1	+X	D / 1	3 (C122014)
4	5	+Z	D / 3	4 (C104245)
5	6	+Z	E / 3	8 (C105265)
6	2	-X	E / 1	7 (C105262)
7	8	+Z	E / 4	6 (C122016)
8	4	+Y	E / 2	5 (C122015)

Os testes experimentais foram realizados com o veículo parado e em movimento circular. São apresentados como resultados os níveis de aceleração e deslocamento, nos domínios do tempo e da freqüência.

Para obter as acelerações a partir dos dados coletados, é necessário utilizar a sensibilidade de cada acelerômetro. A sensibilidade relaciona a tensão elétrica medida com a aceleração. A Tab. 4.14 apresenta as sensibilidades dos acelerômetros, obtidas a partir das cartas de calibração correspondentes.

Tabela 4.14 – Sensibilidade de cada acelerômetro.

<b>Número de série</b>	<b>Sensibilidade em 100 Hz</b>
C104245	503.7 mV/grav.
C105262	478.6 mV/grav.
C105263	488.8 mV/grav.
C105264	494.8 mV/grav.
C105265	488.5 mV/grav.
C122014	483 mV/grav.
C122015	501 mV/grav.
C122016	498 mV/grav.

### 4.3.1- Acelerações Obtidas no Experimento

#### 4.3.1.1- Veículo Parado

As Fig. 4.47 a 4.54 apresentam o resultados de aceleração em função do tempo para o veículo parado, excitado apenas pela vibração do motor. Os gráficos do lado esquerdo apresentam os valores de 0 a 60 segundos, enquanto que os do lado direito apresentam uma pequena faixa entre 29.5 e 30.5 segundos.

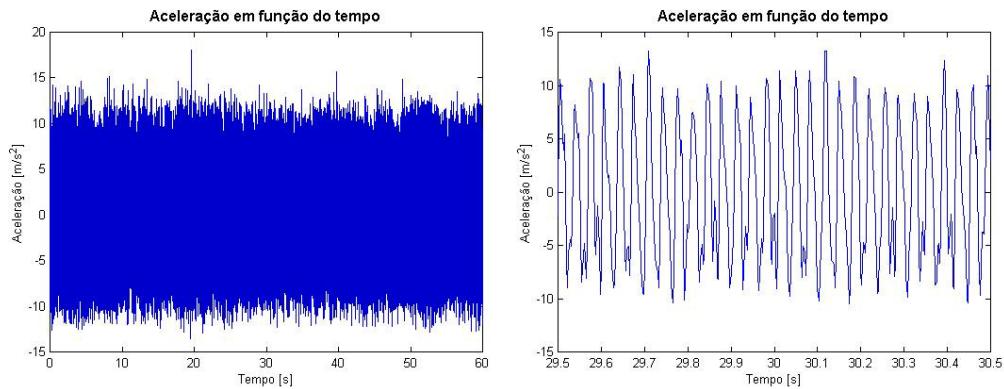


Figura 4.47 – Aceleração em função do tempo para o canal 1, correspondente ao local 3 na direção +Y ( $\text{m/s}^2$ ).

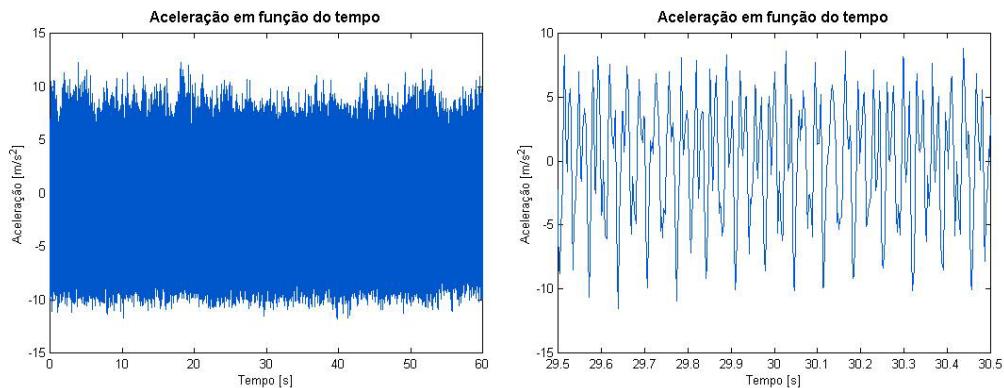


Figura 4.48 – Aceleração em função do tempo para o canal 2, correspondente ao local 7 na direção +Z ( $\text{m/s}^2$ ).

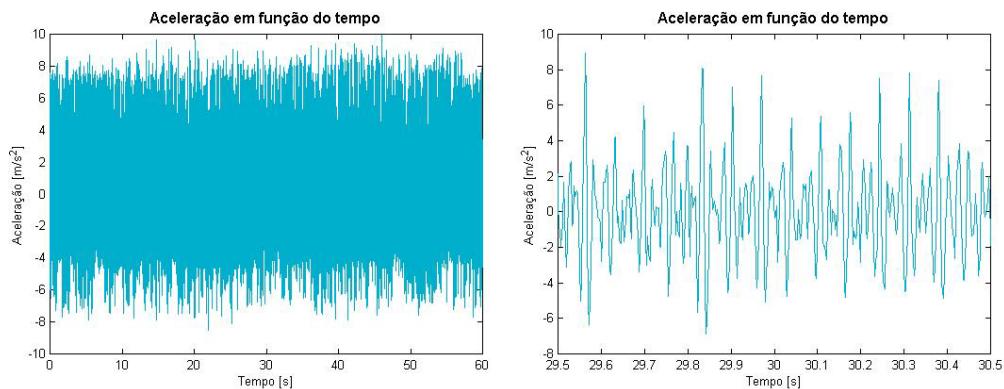


Figura 4.49 – Aceleração em função do tempo para o canal 3,  
correspondente ao local 1 na direção +X (m/s<sup>2</sup>).

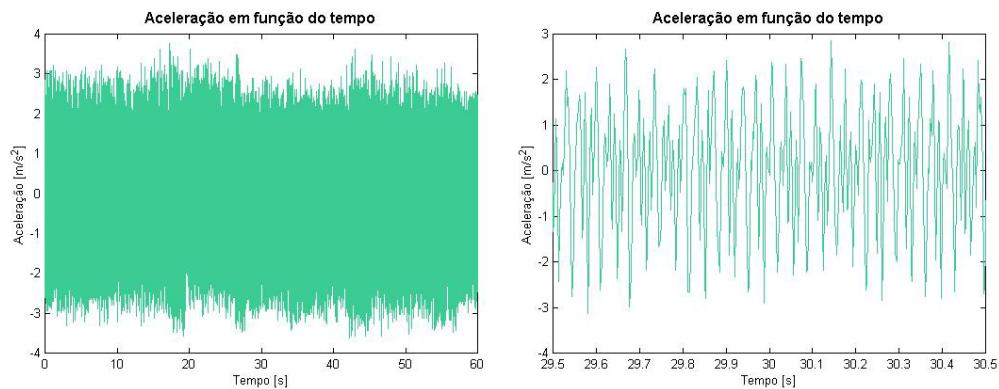


Figura 4.50 – Aceleração em função do tempo para o canal 4,  
correspondente ao local 5 na direção +Z (m/s<sup>2</sup>).

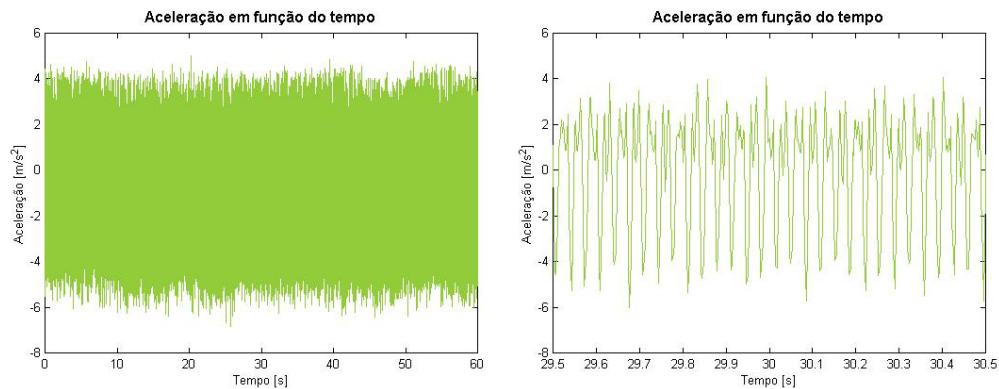


Figura 4.51 – Aceleração em função do tempo para o canal 5,  
correspondente ao local 6 na direção +Z (m/s<sup>2</sup>).

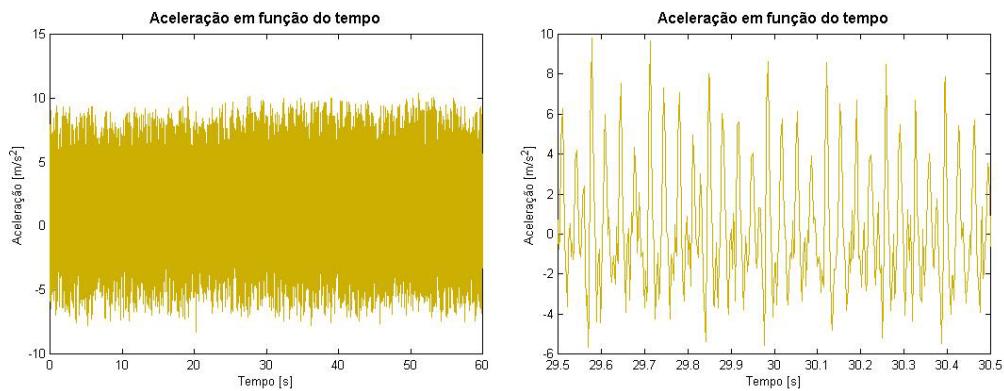


Figura 4.52 – Aceleração em função do tempo para o canal 6,  
correspondente ao local 2 na direção -X (m/s<sup>2</sup>).

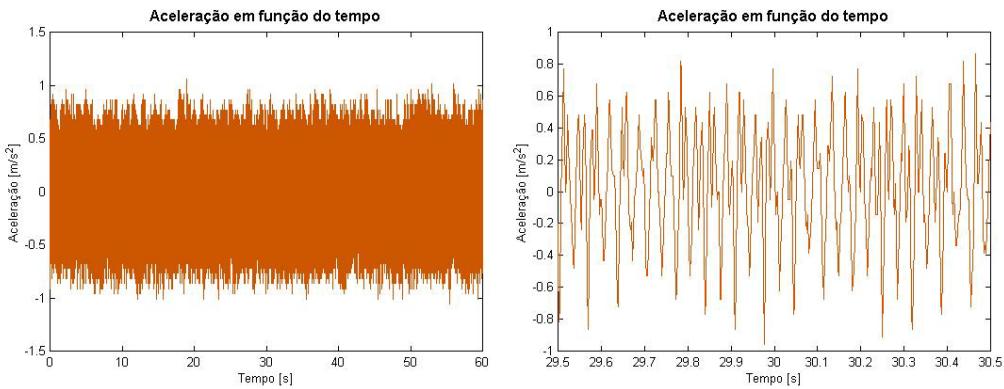


Figura 4.53 – Aceleração em função do tempo para o canal 7,  
correspondente ao local 8 na direção +Z (m/s<sup>2</sup>).

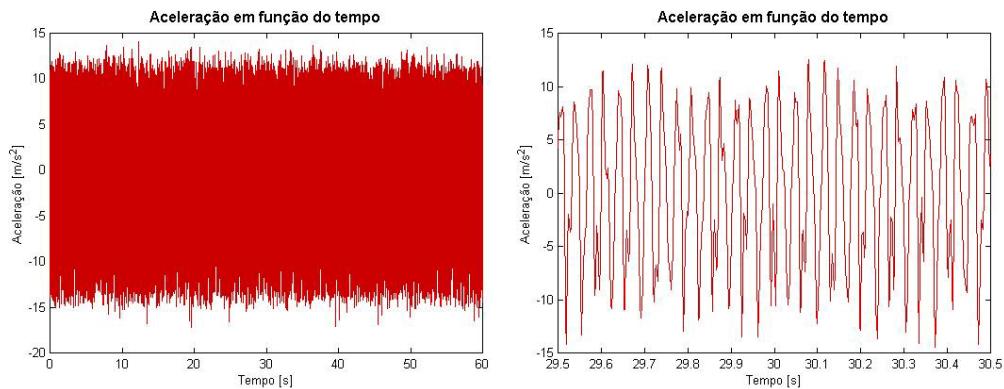


Figura 4.54 – Aceleração em função do tempo para o canal 8,  
correspondente ao local 4 na direção +Y (m/s<sup>2</sup>).

Como pode ser observado, os níveis de aceleração chegam a ser pouco maiores que  $10 \text{ m/s}^2$ , ou seja, pouco maiores que uma gravidade. Não há muitas observações a serem feitas a respeito dos gráficos de aceleração em função do tempo. É necessário fazer uma transformada de Fourier deste sinal.

As Fig. 4.55 a 4.62 apresentam as transformadas de Fourier dos sinais de aceleração.

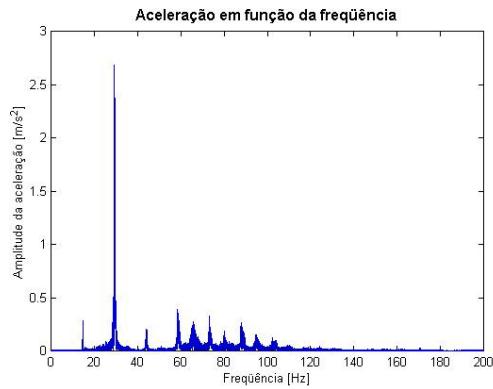


Figura 4.55 – Aceleração em função da freqüência para o canal 1, correspondente ao local 3 na direção +Y ( $\text{m/s}^2$ ).

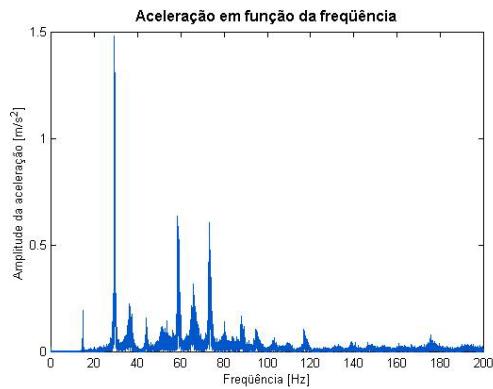


Figura 4.56 – Aceleração em função da freqüência para o canal 2, correspondente ao local 7 na direção +Z ( $\text{m/s}^2$ ).

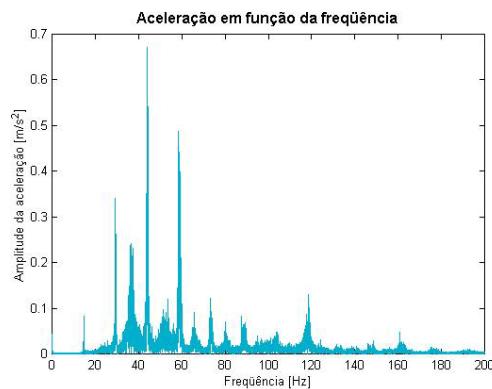


Figura 4.57 – Aceleração em função da freqüência para o canal 3, correspondente ao local 1 na direção +X ( $\text{m/s}^2$ ).

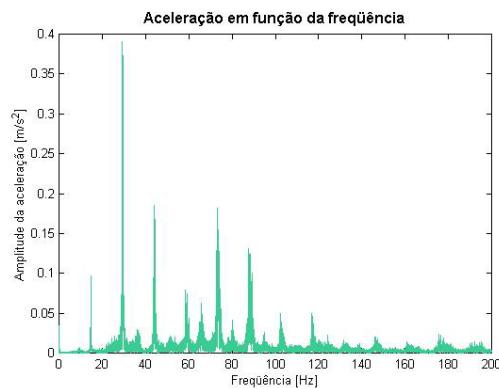


Figura 4.58 – Aceleração em função da freqüência para o canal 4, correspondente ao local 5 na direção +Z ( $\text{m/s}^2$ ).

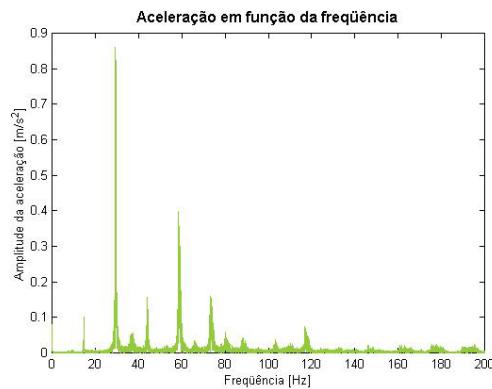


Figura 4.59 – Aceleração em função da freqüência para o canal 5, correspondente ao local 6 na direção +Z ( $\text{m/s}^2$ ).

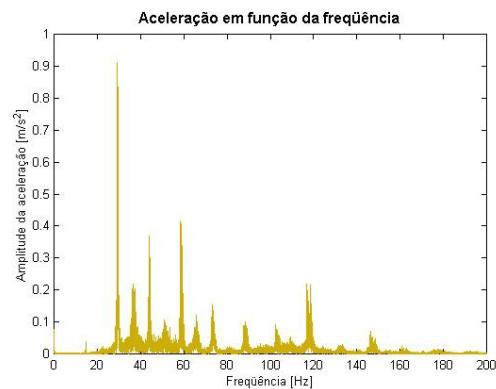


Figura 4.60 – Aceleração em função da freqüência para o canal 6, correspondente ao local 2 na direção -X (m/s<sup>2</sup>).

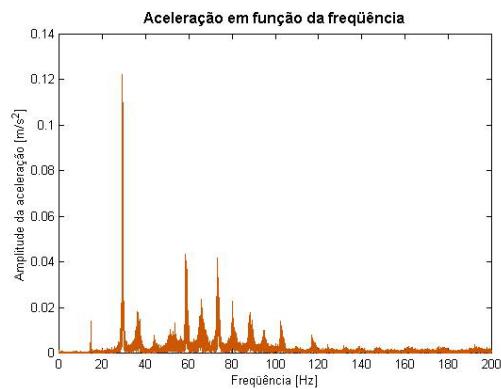


Figura 4.61 – Aceleração em função da freqüência para o canal 7, correspondente ao local 8 na direção +Z (m/s<sup>2</sup>).

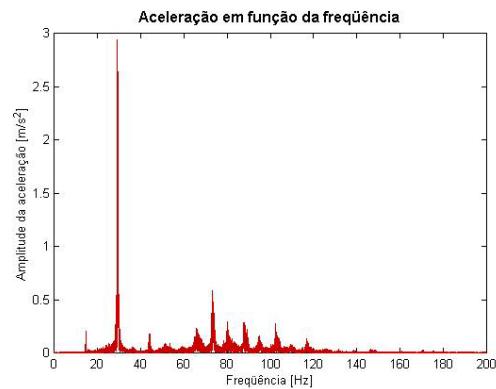


Figura 4.62 – Aceleração em função da freqüência para o canal 8, correspondente ao local 4 na direção +Y (m/s<sup>2</sup>).

Os gráficos de aceleração em função da freqüência apresentam os maiores picos em torno dos 29.3 Hz. Esta freqüência corresponde a 1758 rpm. De acordo com o fabricante (Briggs & Stratton), a rotação do motor em ponto morto é de 1750 rpm. Observa-se também que existem picos nos harmônicos (múltiplos inteiros) de 29.3 Hz e no seu primeiro sub-harmônico (14.65 Hz).

A razão do pico de 29.3 Hz sobressair em relação aos outros se deve às características da estrutura do Mini-Baja. A primeira freqüência natural da estrutura é de 30.9 Hz, o que caracteriza uma condição próxima da ressonância.

#### 4.3.1.2- Veículo em Movimento

As Fig. 4.63 a 4.70 apresentam o resultados de aceleração em função do tempo para o veículo em movimento. Os gráficos do lado esquerdo apresentam os valores de 0 a 60 segundos, enquanto que os do lado direito apresentam uma pequena faixa entre 29.5 e 30.5 segundos.

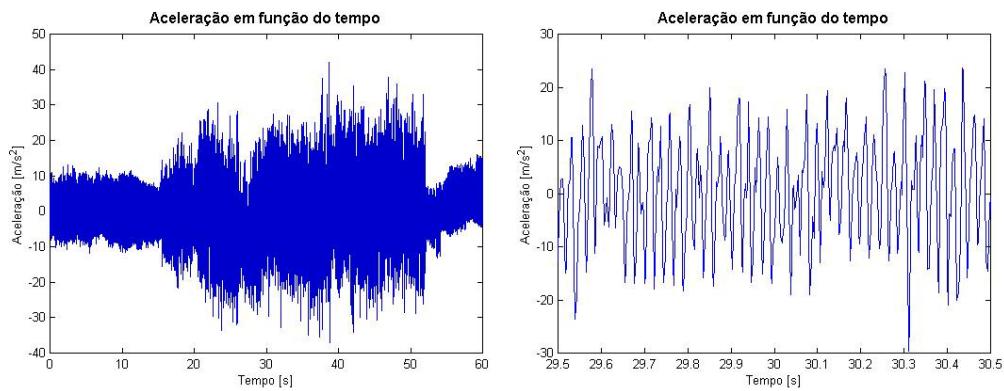


Figura 4.63 – Aceleração em função do tempo para o canal 1, correspondente ao local 3 na direção +Y (m/s<sup>2</sup>).

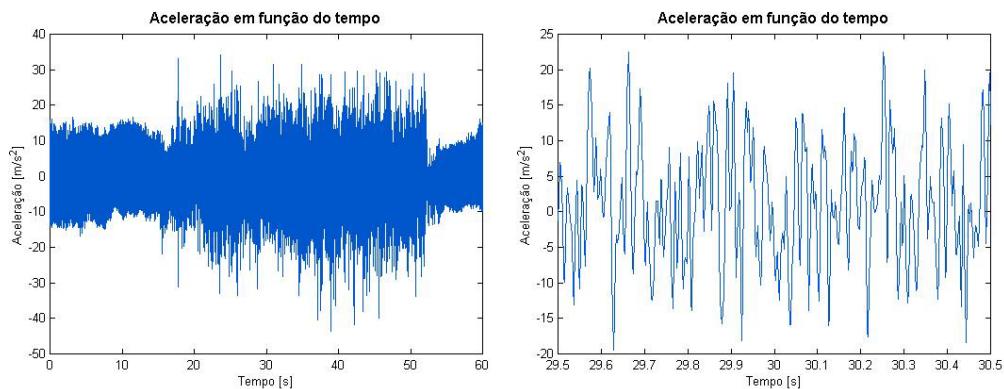


Figura 4.64 – Aceleração em função do tempo para o canal 2,  
correspondente ao local 7 na direção +Z (m/s<sup>2</sup>).

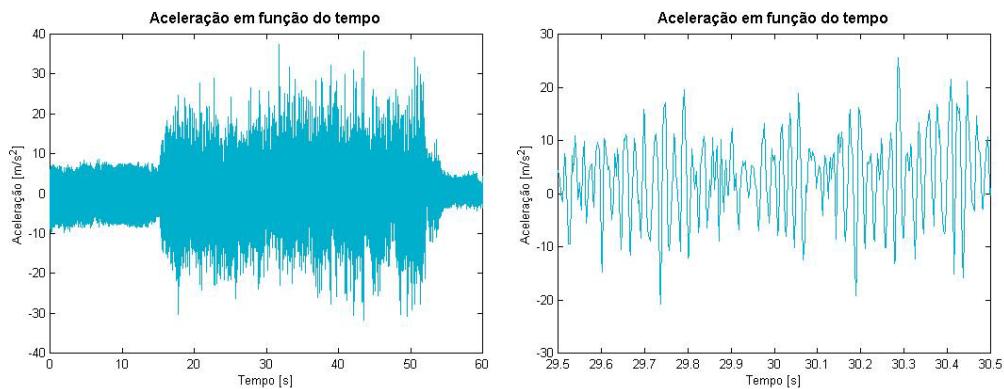


Figura 4.65 – Aceleração em função do tempo para o canal 3,  
correspondente ao local 1 na direção +X (m/s<sup>2</sup>).

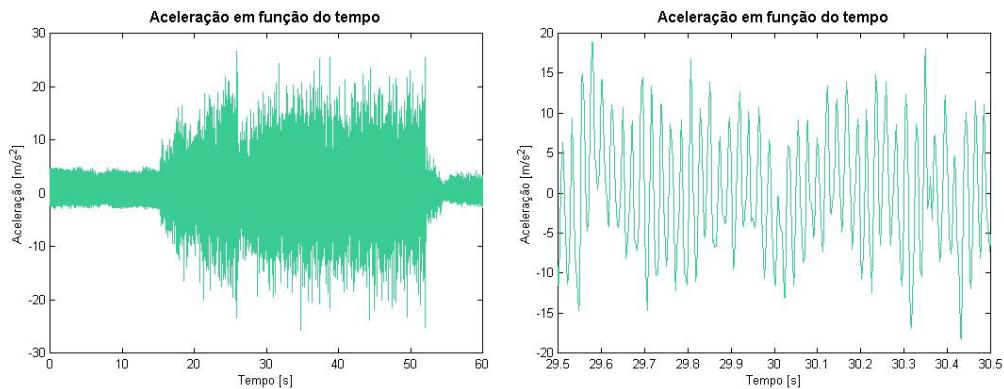


Figura 4.66 – Aceleração em função do tempo para o canal 4,  
correspondente ao local 5 na direção +Z (m/s<sup>2</sup>).

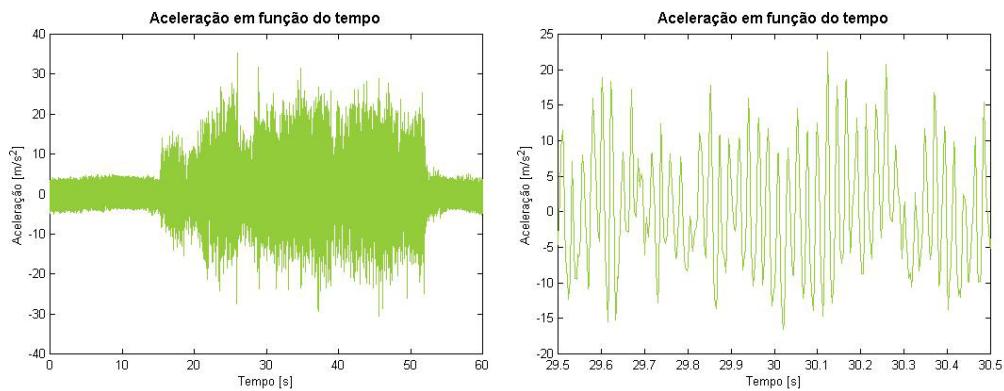


Figura 4.67 – Aceleração em função do tempo para o canal 5,  
correspondente ao local 6 na direção +Z (m/s<sup>2</sup>).

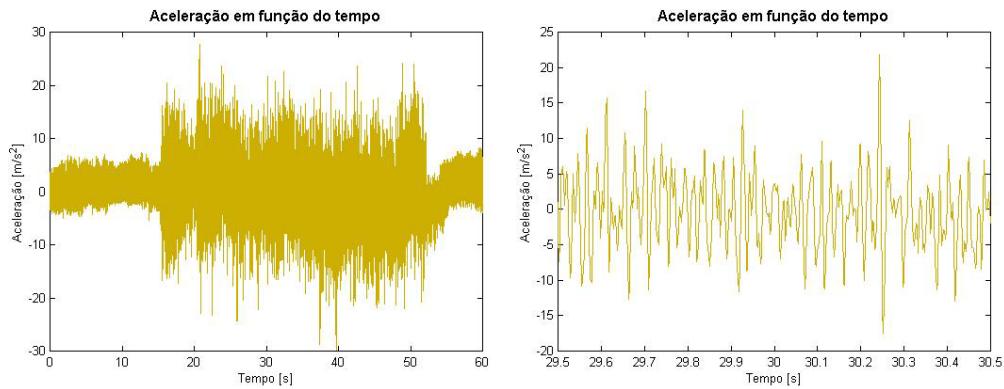


Figura 4.68 – Aceleração em função do tempo para o canal 6,  
correspondente ao local 2 na direção -X (m/s<sup>2</sup>).

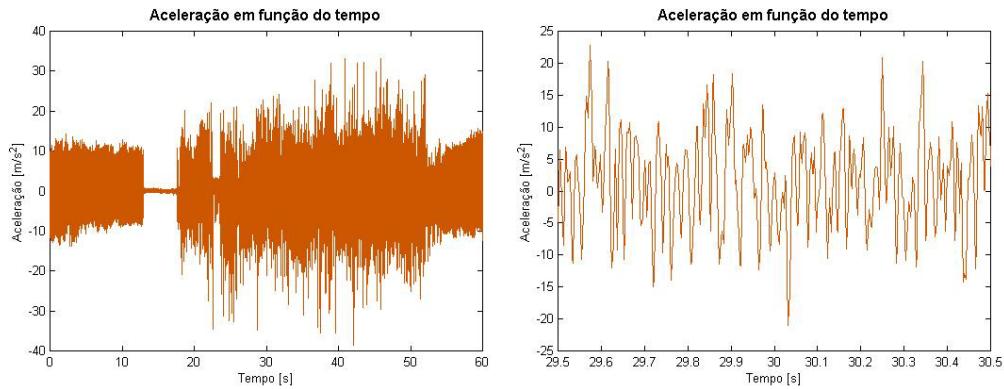


Figura 4.69 – Aceleração em função do tempo para o canal 7,  
correspondente ao local 8 na direção +Z (m/s<sup>2</sup>).

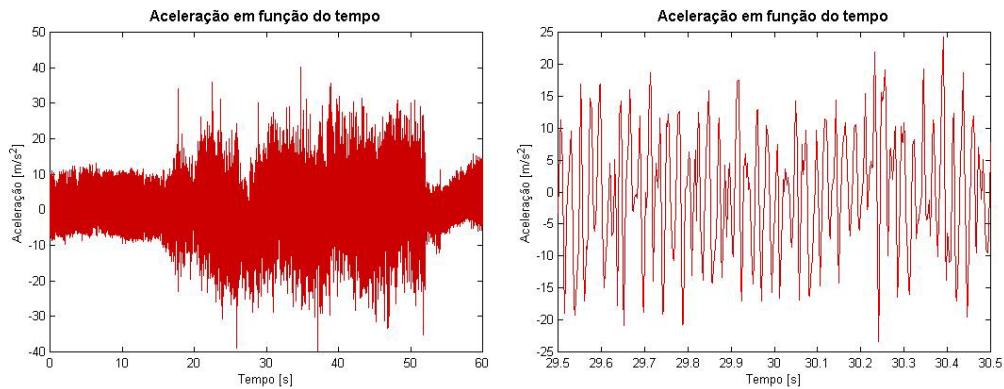


Figura 4.70 – Aceleração em função do tempo para o canal 8, correspondente ao local 4 na direção +Y ( $\text{m/s}^2$ ).

É possível separar os gráficos em três fases. A primeira, que vai de zero a aproximadamente quinze segundos, representa a resposta do veículo parado. A segunda, aproximadamente de 15 a 52 segundos, representa o veículo em movimento. A terceira fase, que vai de 52 a 60 segundos, representa a frenagem e parada do veículo.

Dentro da primeira fase, é possível verificar nos canais 1 e 8 (locais 3 e 4) que há uma inclinação decrescente da aceleração na faixa entre 8 e 15 segundos aproximadamente. Isto representa a arrancada e aceleração do veículo. Estes canais correspondem a acelerações em +Y, ou seja, medidos na horizontal da dianteira para a traseira do veículo.

No canal 7 (local 8), aparentemente ocorreu uma falha do equipamento de medição na faixa de 13 a 17 segundos e também numa pequena faixa em torno de 22 segundos. Este mesmo tipo de falha ocorreu em outros testes realizados. A causa deste problema, no entanto, não foi determinada.

Na segunda fase, observam-se grandes amplitudes e alguns picos devidos à resposta do veículo ao percorrer a pista de testes.

Na terceira fase, observa-se uma queda abrupta nas amplitudes. Nos canais 1 e 8 (locais 3 e 4) é possível observar também uma tendência crescente da aceleração, que corresponde à frenagem e parada do veículo.

Embora algumas características significativas possam ser obtidas dos gráficos de acelerações em função do tempo, há certas características que só podem ser observadas no domínio da freqüência. As Fig. 4.71 a 4.78 apresentam as transformadas de Fourier dos sinais de aceleração para o veículo em movimento.

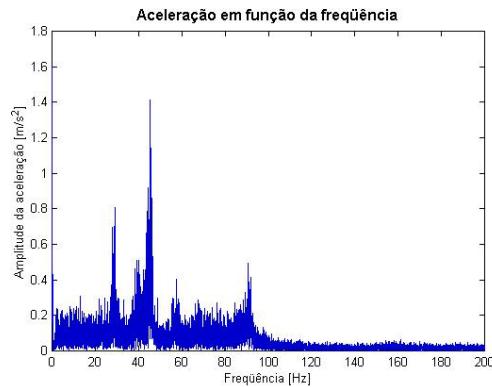


Figura 4.71 – Aceleração em função da freqüência para o canal 1, correspondente ao local 3 na direção +Y ( $\text{m/s}^2$ ).

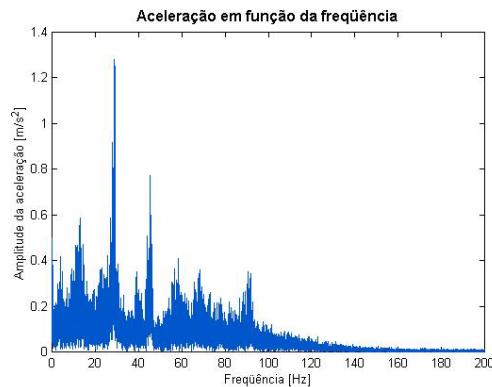


Figura 4.72 – Aceleração em função da freqüência para o canal 2, correspondente ao local 7 na direção +Z ( $\text{m/s}^2$ ).

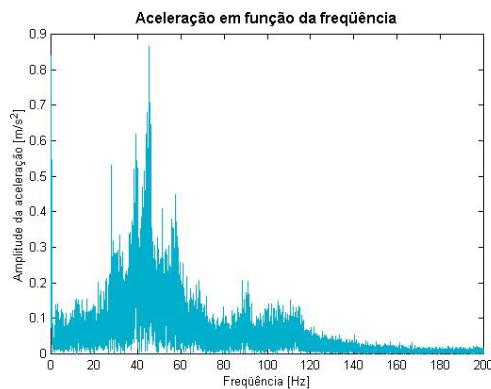


Figura 4.73 – Aceleração em função da freqüência para o canal 3, correspondente ao local 1 na direção +X ( $\text{m/s}^2$ ).

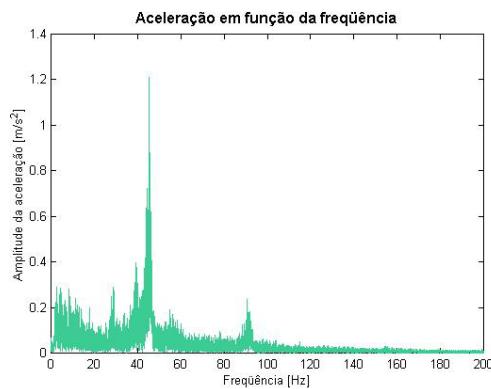


Figura 4.74 – Aceleração em função da freqüência para o canal 4, correspondente ao local 5 na direção +Z ( $\text{m/s}^2$ ).

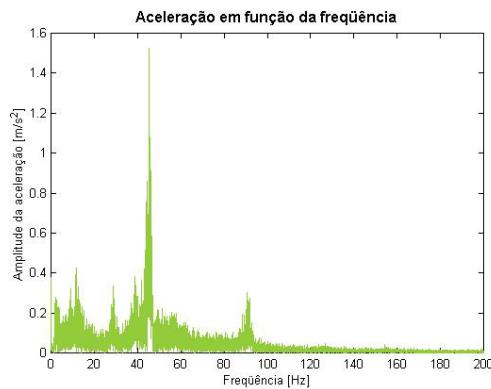


Figura 4.75 – Aceleração em função da freqüência para o canal 5, correspondente ao local 6 na direção +Z ( $\text{m/s}^2$ ).

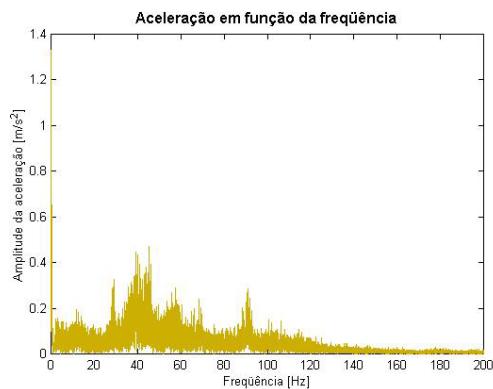


Figura 4.76 – Aceleração em função da freqüência para o canal 6, correspondente ao local 2 na direção -X ( $\text{m/s}^2$ ).

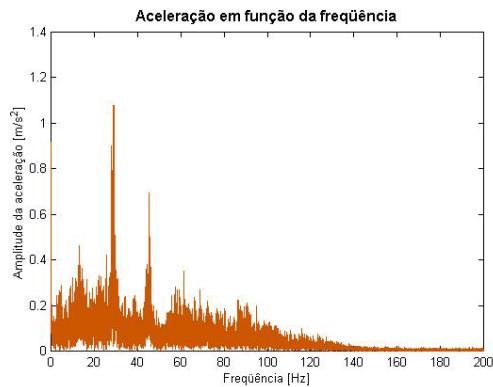


Figura 4.77 – Aceleração em função da freqüência para o canal 7, correspondente ao local 8 na direção +Z ( $\text{m/s}^2$ ).

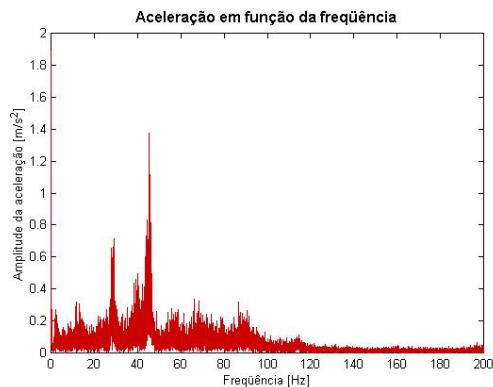


Figura 4.78 – Aceleração em função da freqüência para o canal 8, correspondente ao local 4 na direção +Y ( $\text{m/s}^2$ ).

Observam-se picos de amplitude principalmente em torno de 30 e 45 Hz, que correspondem às duas primeiras freqüências naturais da estrutura tubular. Outro pico que aparece na maioria dos gráficos é o de aproximadamente 90 Hz. As freqüências naturais do sexto ao décimo modo são próximas deste valor.

#### 4.3.2- Deslocamentos Obtidos no Experimento

##### 4.3.2.1- Veículo Parado

A partir dos sinais de aceleração, foi possível calcular os deslocamentos em função do tempo. As Fig. 4.79 a 4.86 apresentam os deslocamentos estruturais obtidos para o veículo parado.

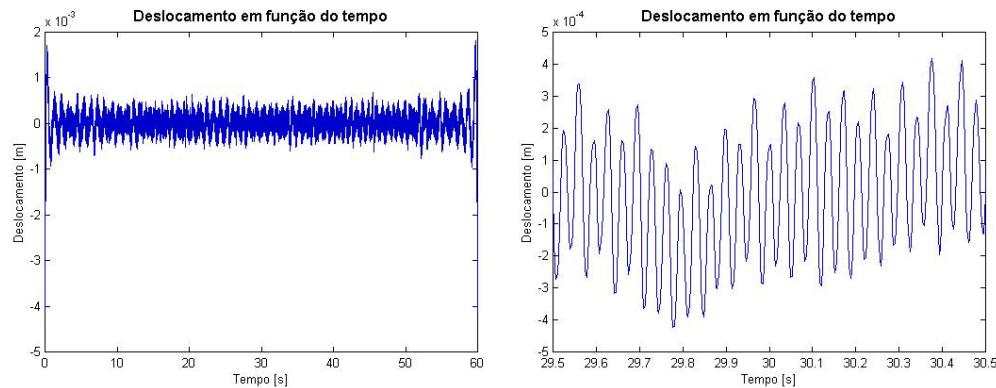


Figura 4.79 – Deslocamento em função do tempo para o canal 1, correspondente ao local 3 na direção +Y (m).

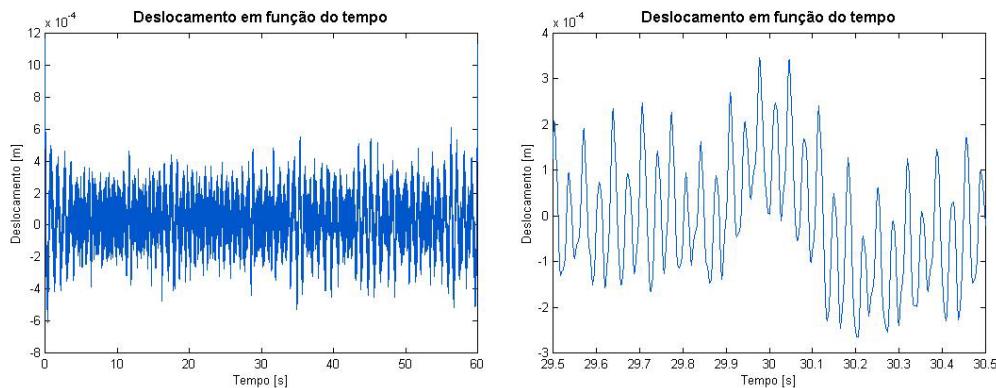


Figura 4.80 – Deslocamento em função do tempo para o canal 2, correspondente ao local 7 na direção +Z (m).

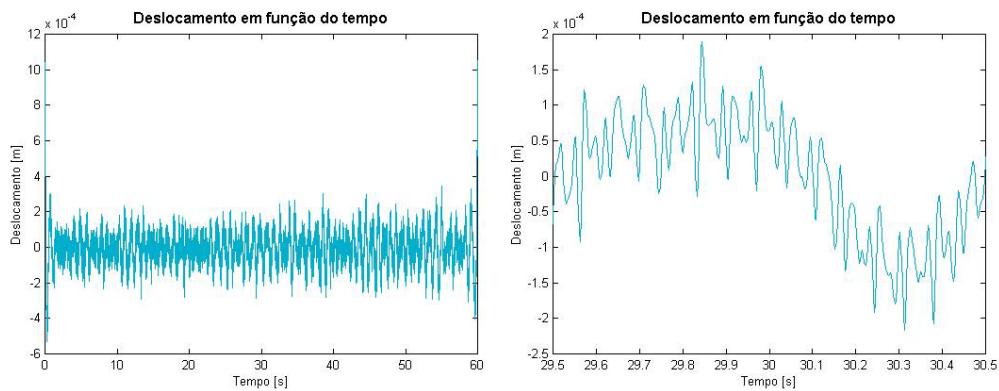


Figura 4.81 – Deslocamento em função do tempo para o canal 3,  
correspondente ao local 1 na direção +X (m).

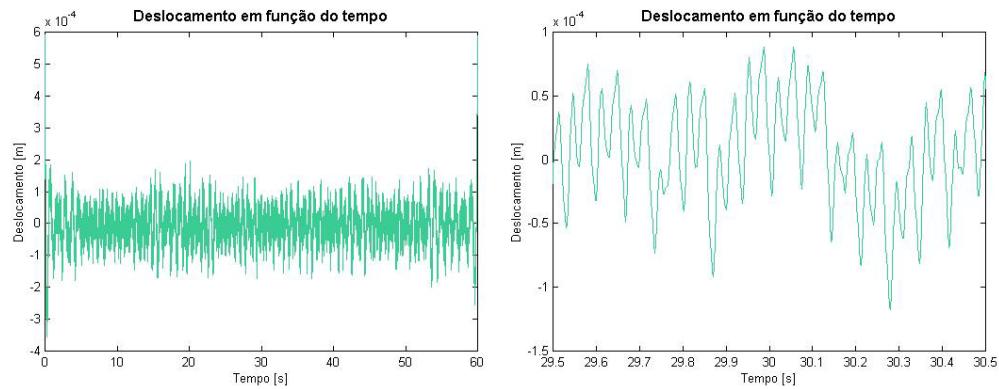


Figura 4.82 – Deslocamento em função do tempo para o canal 4,  
correspondente ao local 5 na direção +Z (m).

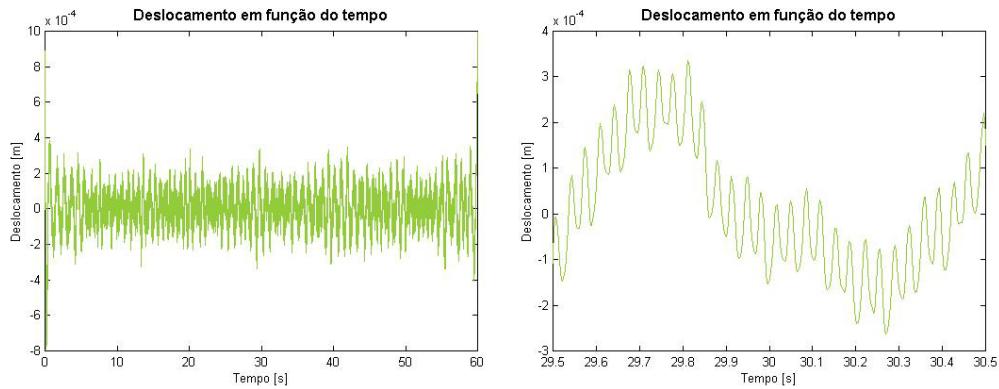


Figura 4.83 – Deslocamento em função do tempo para o canal 5,  
correspondente ao local 6 na direção +Z (m).

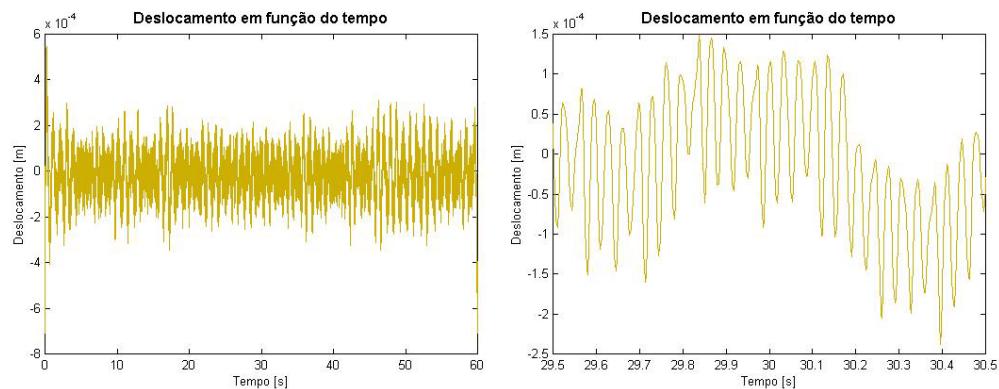


Figura 4.84 – Deslocamento em função do tempo para o canal 6,  
correspondente ao local 2 na direção -X (m).

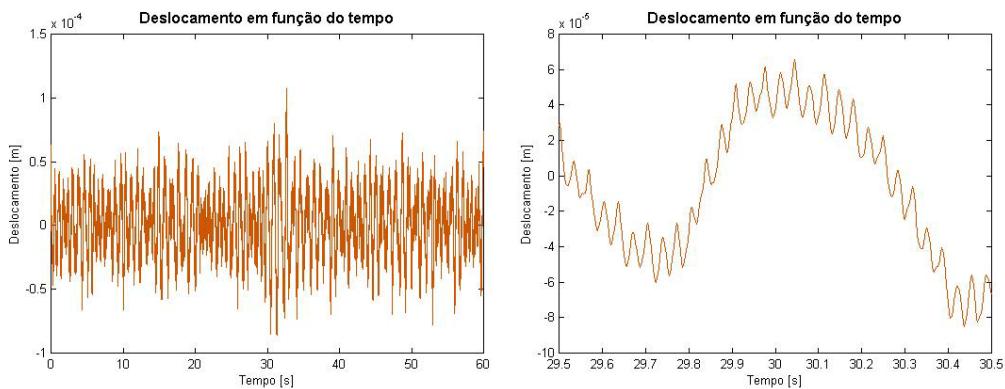


Figura 4.85 – Deslocamento em função do tempo para o canal 7,  
correspondente ao local 8 na direção +Z (m).

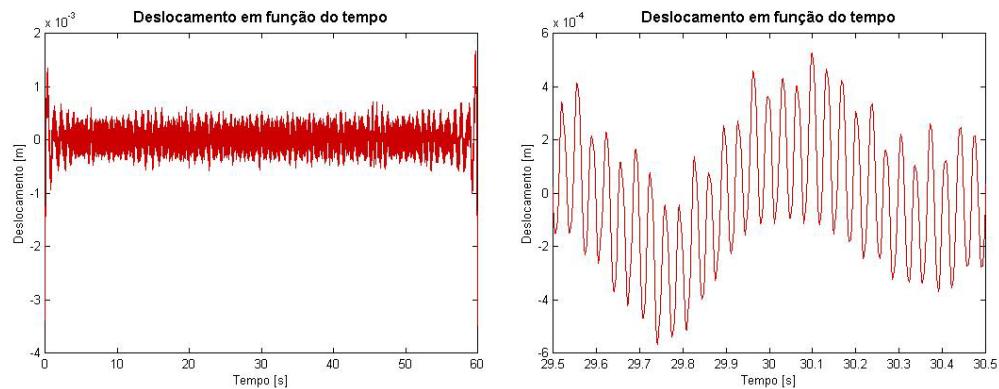


Figura 4.86 – Deslocamento em função do tempo para o canal 8,  
correspondente ao local 4 na direção +Y (m).

Observa-se que a amplitude dos deslocamentos é da ordem de décimos de milímetros. Para obter resultados mais significativos, realizou-se uma transformada de Fourier de cada canal, como pode ser visto nas Fig. 4.87 a 4.94.

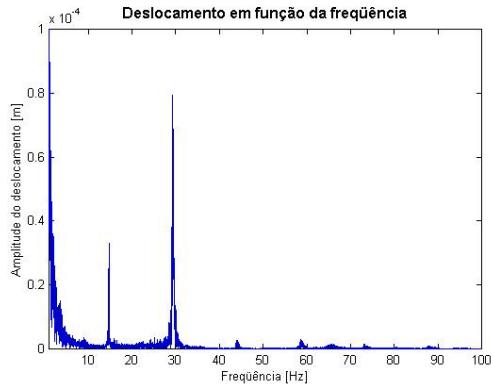


Figura 4.87 – Deslocamento em função da freqüência para o canal 1, correspondente ao local 3 na direção +Y (m).

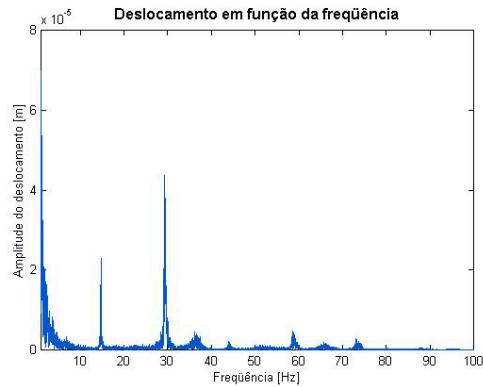


Figura 4.88 – Deslocamento em função da freqüência para o canal 2, correspondente ao local 7 na direção +Z (m).

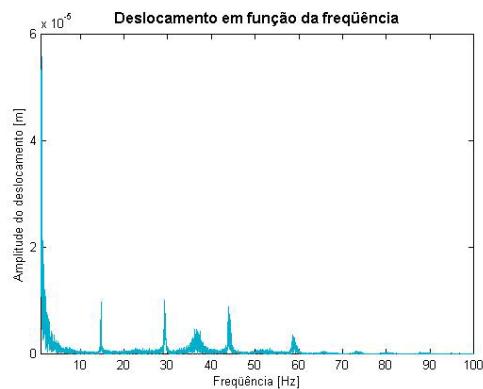


Figura 4.89 – Deslocamento em função da freqüência para o canal 3, correspondente ao local 1 na direção +X (m).

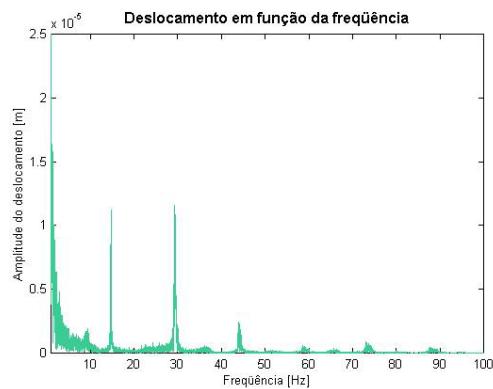


Figura 4.90 – Deslocamento em função da freqüência para o canal 4, correspondente ao local 5 na direção +Z (m).

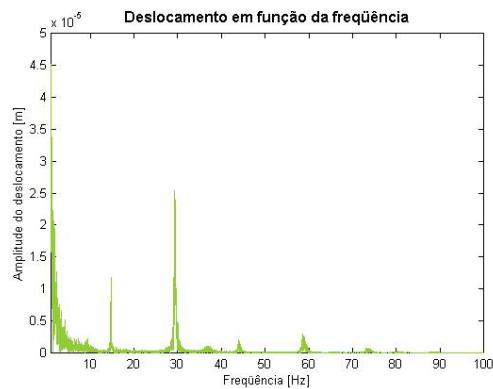


Figura 4.91 – Deslocamento em função da freqüência para o canal 5, correspondente ao local 6 na direção +Z (m).

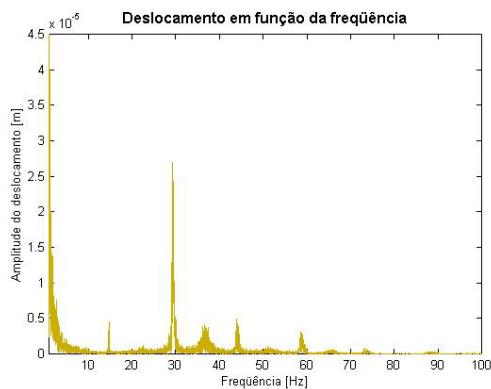


Figura 4.92 – Deslocamento em função da freqüência para o canal 6, correspondente ao local 2 na direção -X (m).

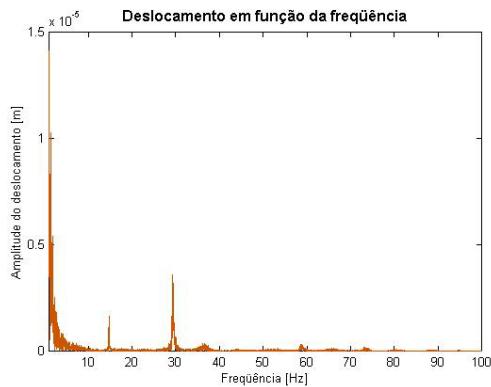


Figura 4.93 – Deslocamento em função da freqüência para o canal 7, correspondente ao local 8 na direção +Z (m).

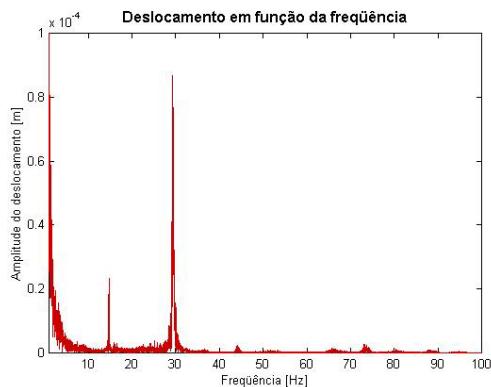


Figura 4.94 – Deslocamento em função da freqüência para o canal 8, correspondente ao local 4 na direção +Y (m).

Todos os gráficos apresentam três picos significativos. Dois destes picos correspondem a aproximadamente 15 e 30 Hz. O outro pico é um sinal de baixa freqüência, que corresponde às pequenas variações na rotação do motor.

Os deslocamentos obtidos através do experimento e tratamento de dados foram exportados para o módulo ODS da ferramenta ADES. As Fig. 4.95 a 4.97 mostram os deslocamentos da estrutura nos instantes de 29.5, 30.0 e 30.5 segundos. A única fonte de excitação é a vibração do motor.

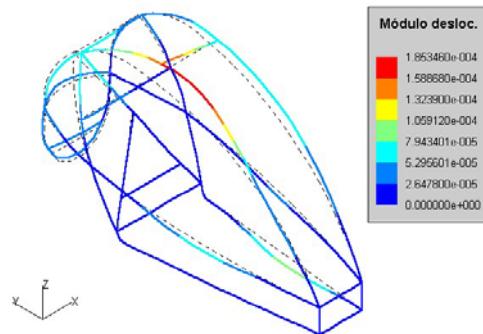


Figura 4.95 – Módulo dos deslocamentos ao longo da estrutura correspondentes aos dados coletados com o veículo parado (instante de 29.5 segundos).

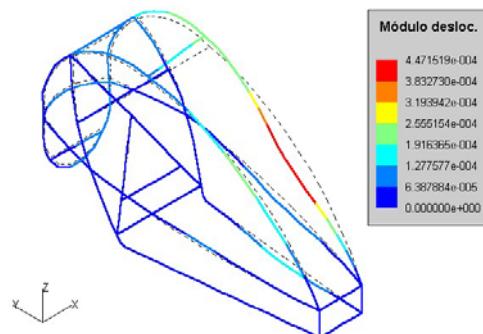


Figura 4.96 – Módulo dos deslocamentos ao longo da estrutura correspondentes aos dados coletados com o veículo parado (instante de 30.0 segundos).

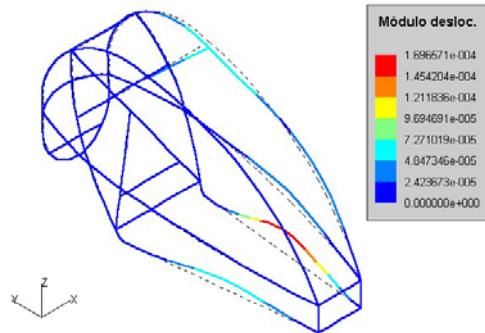


Figura 4.97 – Módulo dos deslocamentos ao longo da estrutura correspondentes aos dados coletados com o veículo parado (instante de 30.5 segundos).

#### 4.3.2.2- Veículo em Movimento

Para a obtenção dos sinais de deslocamentos, o sinal de aceleração foi integrado, desprezando-se as componentes abaixo de 1 Hz e acima de 100 Hz. Os deslocamentos em função do tempo obtidos para o veículo em movimento são apresentados nas Fig. 4.98 a 4.105.

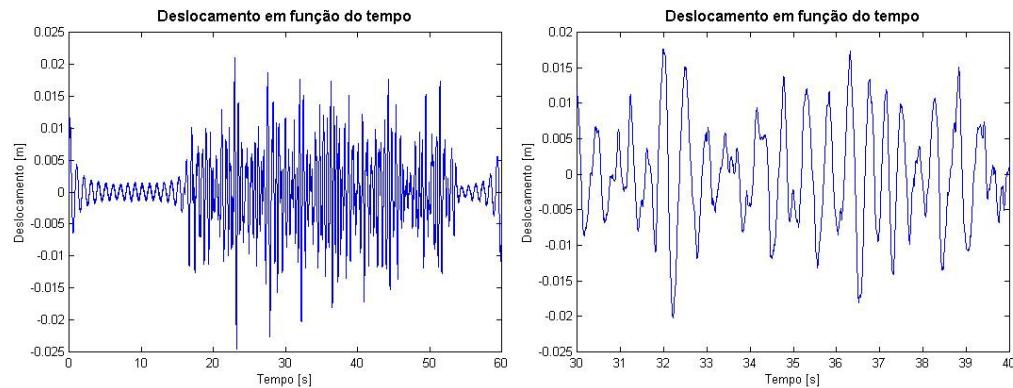


Figura 4.98 – Deslocamento em função do tempo para o canal 1, correspondente ao local 3 na direção +Y (m).

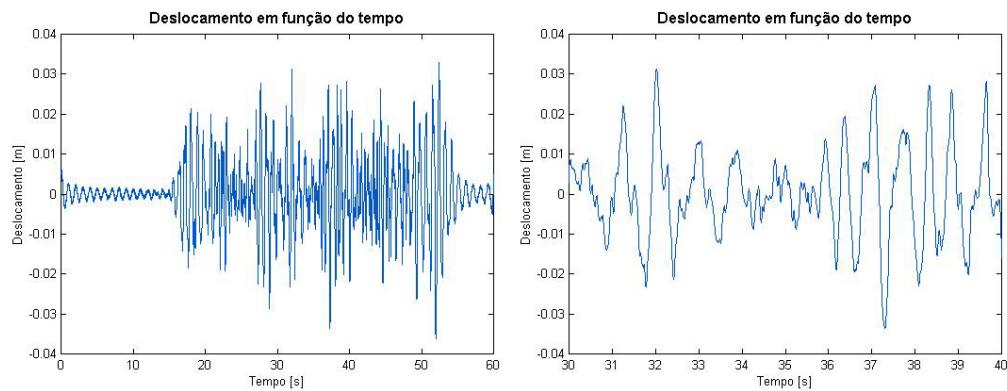


Figura 4.99 – Deslocamento em função do tempo para o canal 2,  
correspondente ao local 7 na direção +Z (m).

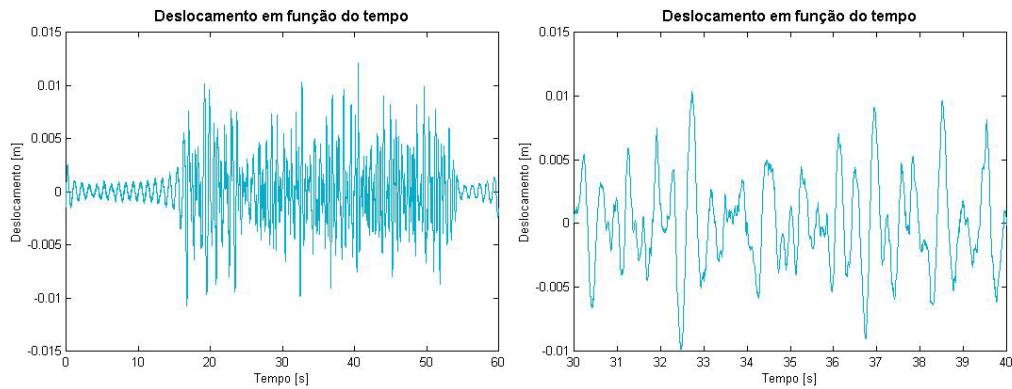


Figura 4.100 – Deslocamento em função do tempo para o canal 3,  
correspondente ao local 1 na direção +X (m).

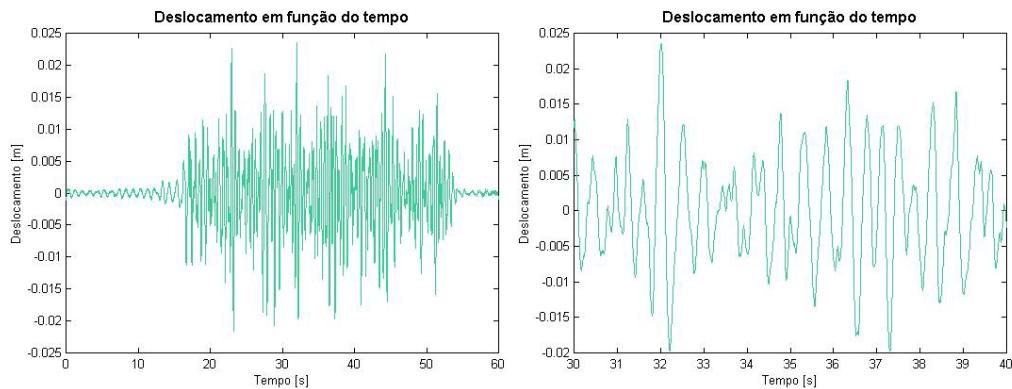


Figura 4.101 – Deslocamento em função do tempo para o canal 4,  
correspondente ao local 5 na direção +Z (m).

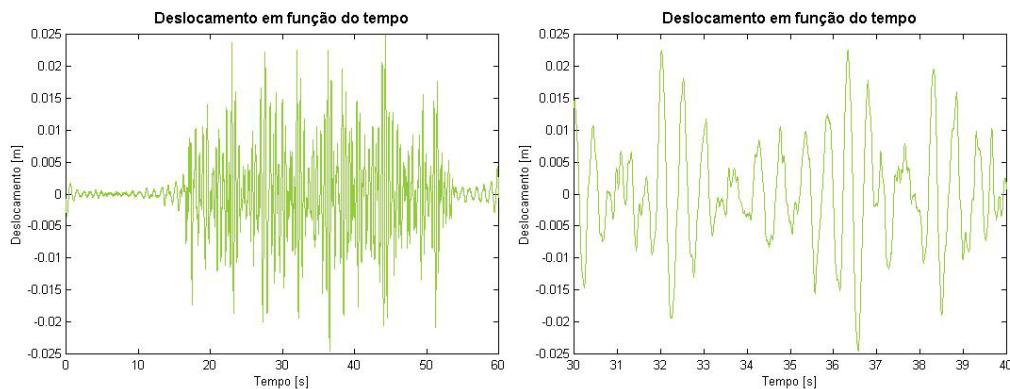


Figura 4.102 – Deslocamento em função do tempo para o canal 5, correspondente ao local 6 na direção +Z (m).

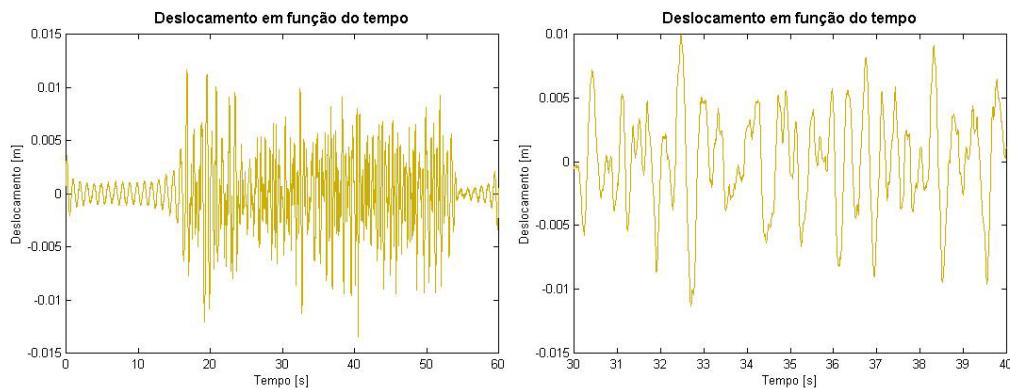


Figura 4.103 – Deslocamento em função do tempo para o canal 6, correspondente ao local 2 na direção -X (m).

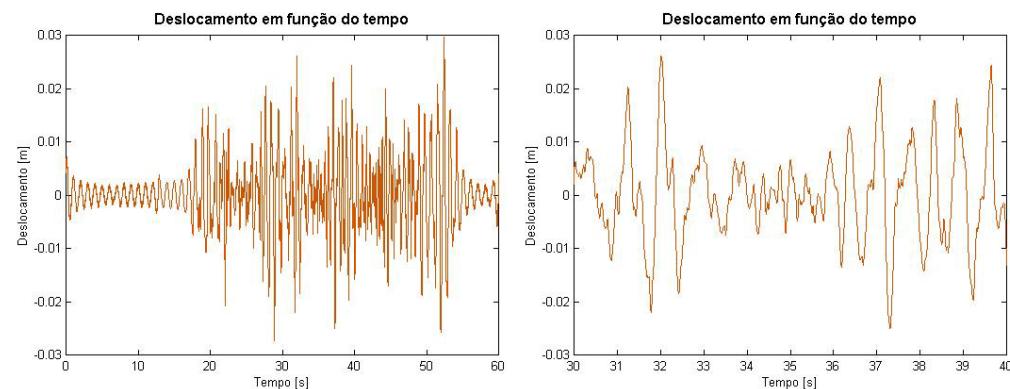


Figura 4.104 – Deslocamento em função do tempo para o canal 7, correspondente ao local 8 na direção +Z (m).

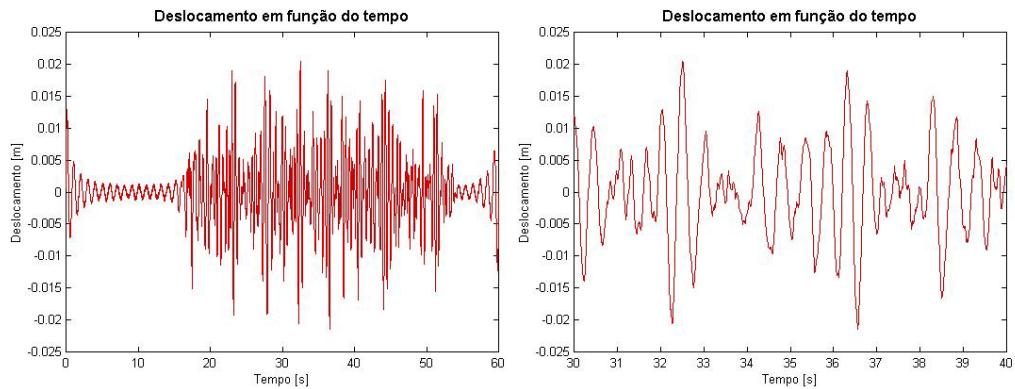


Figura 4.105 – Deslocamento em função do tempo para o canal 8, correspondente ao local 4 na direção +Y (m).

Observam-se pequenos deslocamentos nas faixas de 0 a 15 segundos e de 52 a 60 segundos, que correspondem ao veículo parado ou na arrancada/parada. A ordem de grandeza dos deslocamentos é de  $10^{-2}$  metros.

Os deslocamentos para o veículo em movimento também foram obtidos no domínio da freqüência, como pode ser visto nas Fig. 4.106 a 4.113.

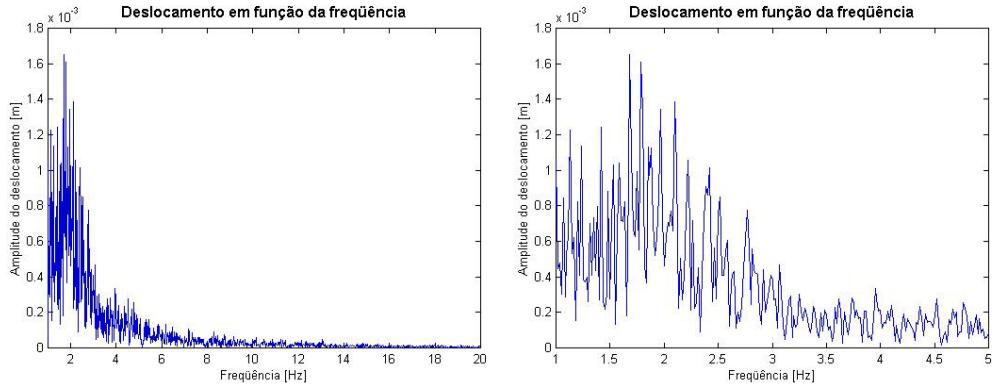


Figura 4.106 – Deslocamento em função da freqüência para o canal 1, correspondente ao local 3 na direção +Y (m).

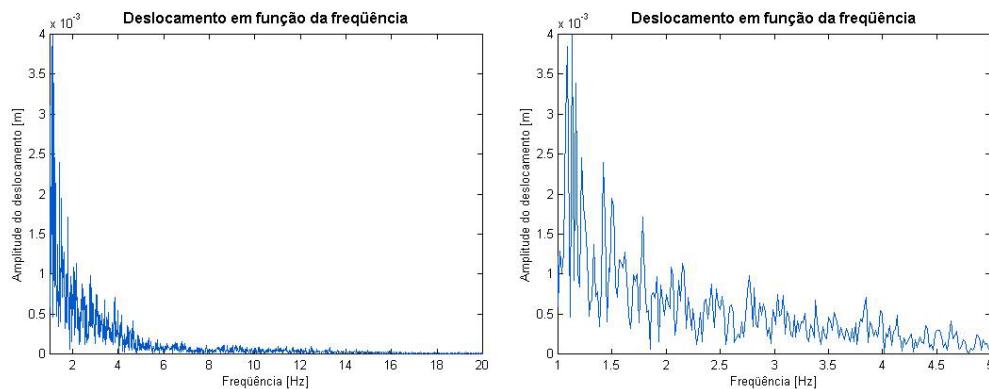


Figura 4.107 – Deslocamento em função da freqüência para o canal 2,  
correspondente ao local 7 na direção +Z (m).

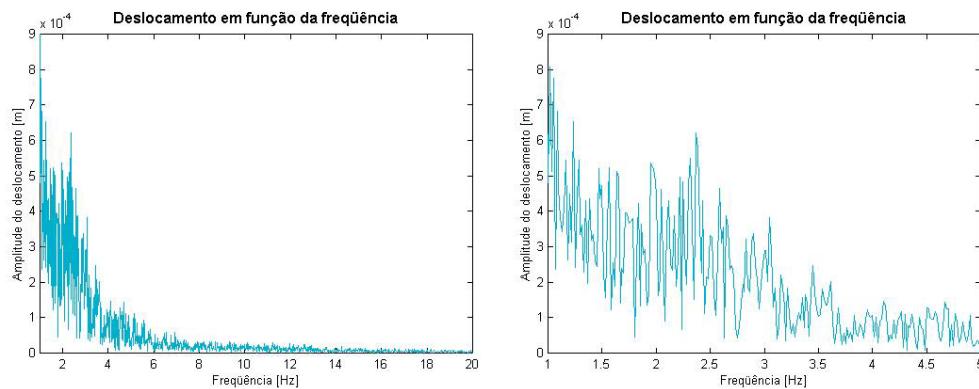


Figura 4.108 – Deslocamento em função da freqüência para o canal 3,  
correspondente ao local 1 na direção +X (m).

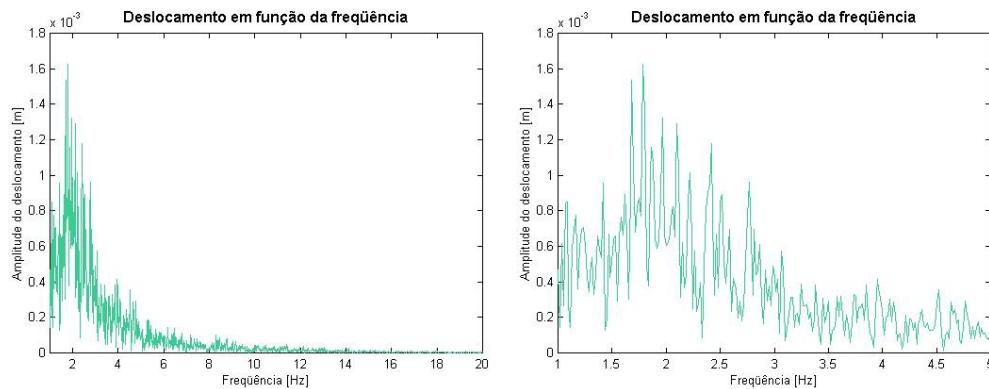


Figura 4.109 – Deslocamento em função da freqüência para o canal 4,  
correspondente ao local 5 na direção +Z (m).

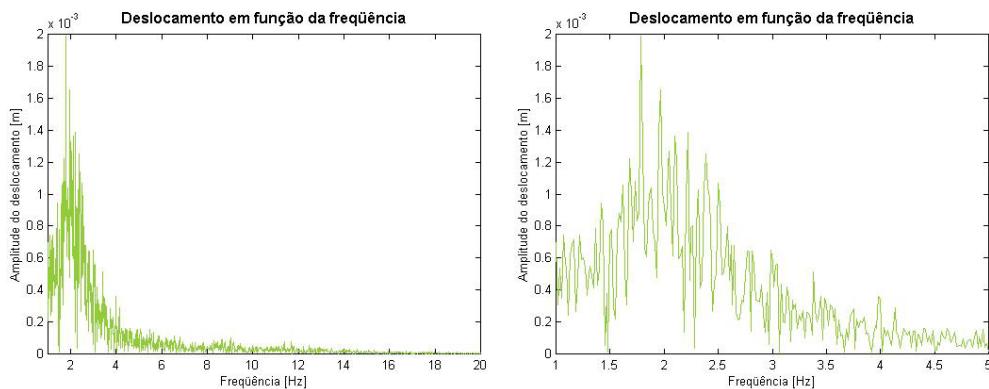


Figura 4.110 – Deslocamento em função da freqüência para o canal 5, correspondente ao local 6 na direção +Z (m).

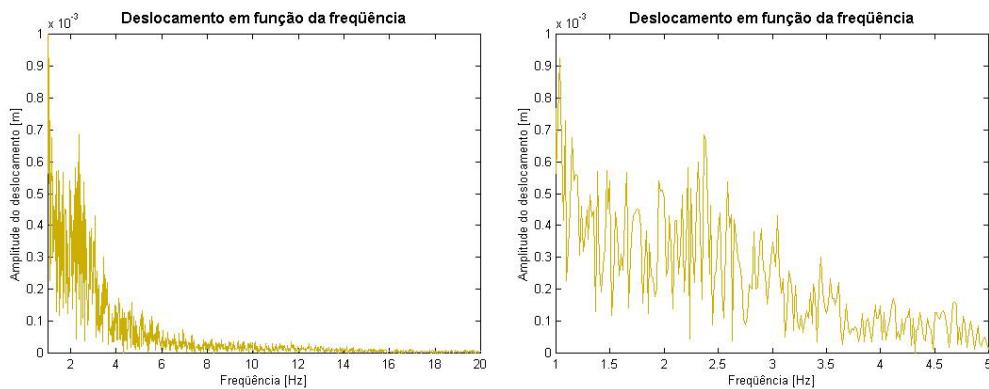


Figura 4.111 – Deslocamento em função da freqüência para o canal 6, correspondente ao local 2 na direção -X (m).

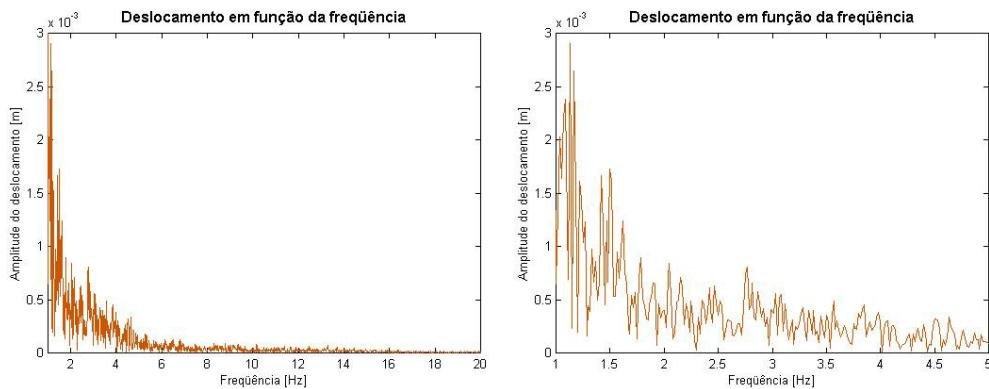


Figura 4.112 – Deslocamento em função da freqüência para o canal 7, correspondente ao local 8 na direção +Z (m).

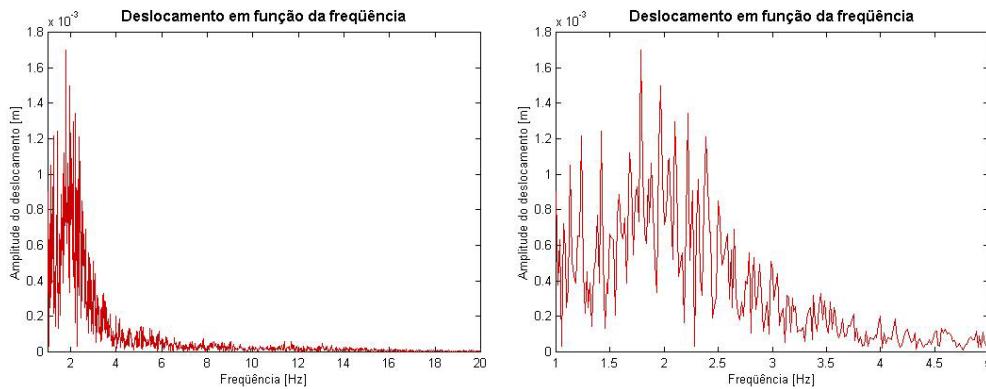


Figura 4.113 – Deslocamento em função da freqüência para o canal 8, correspondente ao local 4 na direção +Y (m).

Observa-se que, acima de 10 Hz, as amplitudes estão com pelo menos uma ordem de grandeza abaixo dos valores máximos, que se encontram na faixa de 1 a 3 Hz. O sinal acima de 20 Hz é desprezível. Ou seja, o efeito da vibração do motor é desprezível diante do efeito da excitação proveniente da pista.

Os deslocamentos obtidos através do experimento e tratamento de dados foram exportados para o módulo ODS da ferramenta ADES. As Fig. 4.114 a 4.116 mostram os deslocamentos da estrutura nos instantes de 29.5, 30.0 e 30.5 segundos. O veículo se encontra sob ação dos esforços dinâmicos provenientes do motor e das irregularidades da pista.

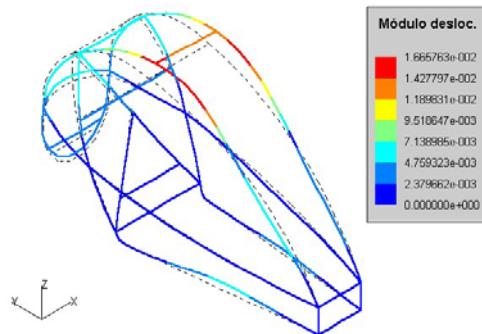


Figura 4.114 – Módulo dos deslocamentos ao longo da estrutura correspondentes aos dados coletados com o veículo em movimento (instante de 29.5 segundos).

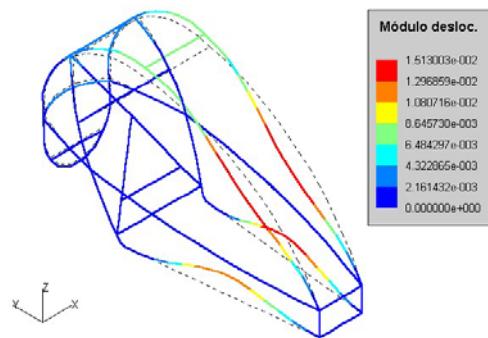


Figura 4.115 – Módulo dos deslocamentos ao longo da estrutura correspondentes aos dados coletados com o veículo em movimento (instante de 30.0 segundos).

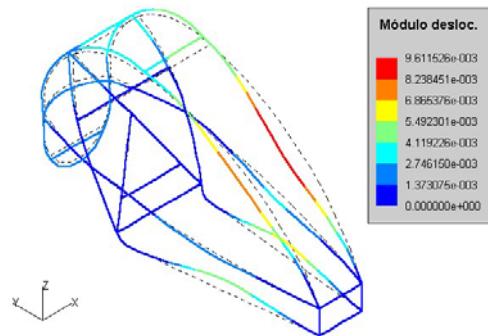


Figura 4.116 – Módulo dos deslocamentos ao longo da estrutura correspondentes aos dados coletados com o veículo em movimento (instante de 30.5 segundos).

## **Capítulo 5**

### **CONCLUSÕES**

A respeito das ferramentas desenvolvidas e dos resultados obtidos, pôde-se concluir o seguinte:

- A ferramenta de modelagem dinâmica de veículos (MDV) mostrou-se útil para uma análise preliminar de conjuntos de molas e amortecedores que melhor se adaptam a diferentes tipos de pista.
- O módulo de desenho da ferramenta ADES foi capaz não apenas de adicionar e remover elementos básicos como segmentos de reta e arcos de circunferência, como também utilizar recursos de visualização tais como *zoom*, *pan*, *enclose*, mudança de vistas, etc.
- O módulo de elementos finitos da ferramenta ADES foi capaz de realizar adequadamente a modelagem de estruturas formadas por elementos de hastes e vigas. Além disto, o módulo foi validado em comparação com um software comercial (ALGOR), apresentando resultados com erros inferiores a 1%.
- Os algoritmos de solução estática implementados mostraram-se funcionais, porém a função *mldivide* do próprio MATLAB apresentou-se mais eficiente, até mesmo por ser um código compilado e não interpretado. Colocando os algoritmos em ordem crescente de tempo gasto na solução, tem-se: função *mldivide* do MATLAB, fatorização LDL, fatorização de Householder e fatorização de Givens.

- O algoritmo *subspace iteration* implementado mostrou-se capaz de resolver sistemas de equações de grande ordem, ao contrário da função *eig* do próprio MATLAB. E, apesar de ser uma rotina interpretada, ela atingiu a solução em um curto intervalo de tempo. A verificação pela seqüência de *Sturm* foi capaz de apontar se todas as freqüências naturais realmente haviam sido calculadas. No entanto, este procedimento é demorado, pois se baseia no mesmo algoritmo da fatorização LDL.
- O método *effective independence distribution vector* foi capaz de calcular os graus de liberdade a serem medidos no experimento, baseando-se nos modos de vibração da estrutura em estudo.
- O módulo de ODS da ferramenta ADES mostrou-se capaz de apresentar animações das deformações de uma estrutura ao longo do tempo, mostrando escalas de deslocamentos, esforços ou tensões.
- Como as ferramentas são executadas através do software MATLAB, alguns recursos tornaram-se um pouco lentos. Como o MATLAB não é um compilador e sim uma ferramenta matemática, ele interpreta os códigos linha a linha, o que provoca a lentidão de algoritmos com muitos *loops* e linhas de código.
- Quando o número de quadros utilizados na animação do módulo ODS é muito grande, o MATLAB passa utilizar memória virtual, o que torna a animação extremamente lenta. Para um computador com 512 MB de memória RAM, um número de 100 quadros mostrou-se razoavelmente rápido.
- Como o ODS despreza as forças de inércia e as forças dissipativas, é necessário medir um número suficiente de graus de liberdade para se obter um bom resultado. Além disto, deve-se escolher os GDLs mais significativos, ou seja, aqueles que apresentam os maiores deslocamentos.

## 5.1- Sugestões para Trabalhos Futuros

### 5.1.1- MDV

- Implementar o cálculo de funções de resposta em freqüência correspondentes ao perfil de pista e às diferentes velocidades do veículo.

- Implementar o cálculo da resposta transiente do veículo.
- Transformar o modelo de 2D para 3D.
- Fazer com que o modelo leve em conta a geometria da suspensão.
- Possibilitar que um perfil de pista real, obtido experimentalmente, seja aplicado ao modelo.
- Implementar algoritmos de integração numérica para a solução de modelos não-lineares.

### **5.1.2- ADES**

- Possibilitar a aplicação de momentos e forças variando no tempo.
- Implementar algoritmos de solução das equações dinâmicas de equilíbrio através dos métodos de superposição modal e integração direta.
- Possibilitar o desenho de superfícies e sólidos.
- Implementar outros tipos de elementos finitos.
- Resolver o ODS sem desprezar as forças de inércia e forças de amortecimento.

Além das sugestões citadas acima, é importante destacar que os códigos de ambos os programas poderiam ser convertidos para um compilador adequado, de forma a tornar mais eficiente a execução destes.

## **Capítulo 6**

### **REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS**

Atalla, M. J., 1996, *Model Updating Using Neural Networks*, Tese de Doutorado, Virginia Polytechnic Institute, State University, Blacksburg, Virginia, USA.

Atsumi, B., Tokunaga, H., Kanamori, H., Sugawara, T., Yasuda, E., Inagaki, H., 2002, “Evaluation of vehicle motion sickness due to vehicle vibration”, JSAE Review, n.23, pág 341-346.

Attia, H. A., 2002, “Dynamic modelling of the double wishbone motor-vehicle suspension system”, European Journal of Mechanics A/Solids, n.21, pág 167-174.

Bae, D. S., Lee, J. K., Cho, H. J., Yae, H., 2000, “An explicit integration method for real time simulation of multibody vehicle models”, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, n.187, pág 337-350.

Barkanov, E., Hufenbach, W., Kroll, L., 2003, “Transient response analysis of systems with different damping models”, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, n.192, pág 33-46.

Bathe, K., 1982, *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*, Massachusetts Institute of Technology, USA, Prentice-Hall.

Cook, R. D., Malkus, D. S., Plesha, M. E., 1989, *Concepts and applications of finite element analysis*, 3<sup>rd</sup> ed., New York, Wiley.

Ewins, D. J., 1984, *Modal Testing: Theory and Practice*, Imperial College of Science, Technology & Medicine, London, England, Research Studies Press.

Gillespie, T. D., 1992, *Fundamentals of Vehicle Dynamics*, 6<sup>th</sup> printing, USA, Society of Automotive Engineers.

Gobbi, M., Mastinu, G., 2001, “Analytical description and optimization of the dynamic behaviour of passively suspended road vehicles”, *Journal of Sound and Vibration*, n.245(3), pág 457-481.

Guo, K., Lu, D., Ren, L., 2001, “A unified non-steady non-linear tyre model under complex wheel motion inputs including extreme operating conditions”, *JSAE Review*, n.22, pág 395-402.

Han, S., Feeny, B., 2003, “Application of proper orthogonal decomposition to structural vibration analysis”, *Mechanical Systems and Signal Processing*, n.17(5), pág 989-1001.

Kageyama, I., Kuwahara, S., 2002, “A study on tire modeling for camber thrust and camber torque”, *JSAE Review*, n.23, pág 325-331.

Kim, H., Yang, H. S., Park, Y., 2002, “Improving the vehicle performance with active suspension using road-sensing algorithm”, *Computers and Structures*, n.80, pág 1569-1577.

Liu, Y., Zhang, J., 2002, “Nonlinear dynamic responses of twin-tube hydraulic shock absorber”, *Mechanical Research Communications*, n.29, pág 359-365.

Margolis, D., Shim, T., 2001, “A bond graph model incorporating sensors, actuators, and vehicle dynamics for developing controllers for vehicle safety”, *Journal of the Franklin Institute*, n.338, pág 21-34.

- Miyashita, N., Kawazura, T., Kabe, K., 2003, "Analytical model of  $\mu$ -S curve using generalized skewed-parabola", JSAE Review, n.24, pág 87-92.
- Naudé, A. F., Snyman, J. A., 2003b, "Optimisation of road vehicle passive suspension systems. Part 2. Qualification and case study", Applied Mathematical Modelling, n.27, pág 263-274.
- Naudé, A. F., Snyman, J. A., 2003a, "Optimisation of road vehicle passive suspension systems. Part 1. Optimisation algorithm and vehicle model", Applied Mathematical Modelling, n.27, pág 249-261.
- Pai, P. F., Young, L. G., 2001, "Damage detection of beams using operational deflection shapes", International Journal of Solids and Structures, n.38, pág 3161-3192.
- Parloo, E., Verboven, P., Guillaume, P., Van Overmeire, M., 2002, "Sensitivity-based operational mode shape normalization", Mechanical Systems and Signal Processing, n.16(5), pág 757-767.
- Richardson, M. H., 1997, "Is It a Mode Shape, or an Operating Deflection Shape?", Sound & Vibration Magazine 30<sup>th</sup> Anniversary Issue.
- Schiehlen W., Hu, B., 2003, "Spectral simulation and shock absorber identification", International Journal of Non-Linear Mechanics, n.38, pág 161-171.
- Shiiba, T., Suda, Y., 2002, "Development of driving simulator with full vehicle model of multibody dynamics", JSAE Review, n.23, pág 223-230.
- Simionescu, P. A., Beale, D., 2002, "Synthesis and Analysis of the five-link rear suspension system used in automobiles", Mechanical and Machine Theory, n. 37, pág 815-832.

Spentzas, K., Kanarachos, S. A., 2002, “Design of a non-linear hybrid car suspension system using neural networks”, Mathematics and Computers in Simulation, n.60, pág. 369-378.

Sun, L., 2002, “Optimum design of road-friendly vehicle suspension systems subjected to rough pavement surfaces”, Applied Mathematical Modelling, n.26, pág 635-652.

Waldron, K., Ghoshal, A., Schulz, M. J., Sundaresan, M. J., Ferguson, F., Pai, P. F., Chung, J. H., 2002, “Damage detection using finite element and laser operational deflection shapes”, Finite Elements in Analysis and Design, n.38, pág 193-226.

Zhao, Y., Chen, S., Chai, S., Qu, Q., 2002, “An improved modal truncation method for responses to harmonic excitation”, Computers and Structures, n.80, pág 99-103.

## **Apêndice I**

### **DETALHAMENTO DO ADES**

#### **I.1- Tela de Desenho**

A tela de desenho é o local onde o modelo é exibido. Há três tipos de exibição possíveis:

- **Geometria:** exibe os pontos, segmentos de reta e arcos de circunferência criados;
- **Elementos:** exibe a malha de elementos finitos;
- **Resultados:** exibe os deslocamentos, esforços, tensões ou modos de vibração.

Quando os elementos são exibidos, os nós recebem indicações de carregamentos e condições de contorno impostas sobre eles. Estas indicações são formadas por uma letra e um número. O número indica apenas a ordem na qual o carregamento ou condição de contorno foi criado(a), mas as letras possuem significados especiais:

- **R:** Restrição
- **F:** Força
- **M:** Momento
- **D:** Deslocamento imposto
- **A:** Apoio elástico
- **C:** Massa concentrada

## I.2- Menus

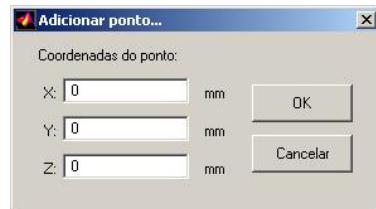
### I.2.1- Arquivo

- **Novo:** Cria um novo modelo, apagando todos os objetos e resultados de análises.
- **Abrir:** Abre um arquivo previamente gerado. Os objetos e resultados de análises são recuperados.
- **Salvar:** Salva o modelo atual em arquivo. Se o nome ainda não estiver definido, abre uma janela requisitando a entrada do nome pelo usuário.
- **Salvar Como:** Abre uma janela requisitando a entrada do nome pelo usuário e salva o modelo com este nome.
- **Salvar Imagem:** Salva uma imagem em JPEG (*Joint Photographic Experts Group*) do conteúdo da tela de desenho.
- **Sair:** Fecha a janela do programa.

### I.2.2- Geometria

#### I.2.2.1- Pontos

*Adicionar*



Adiciona um novo ponto à geometria. As coordenadas (X,Y,Z) devem ser fornecidas em milímetros. Há duas condições nas quais o procedimento é interrompido:

- É fornecido um valor inválido (valor em branco ou não-numérico) para qualquer uma das coordenadas;
- Já existe um ponto com as mesmas coordenadas fornecidas (ou tão próximas quanto a tolerância permite).

### *Remover*

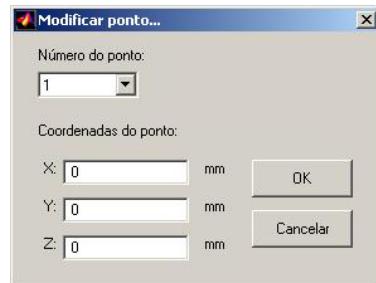


Remove um ponto da geometria. Há duas condições nas quais o procedimento é interrompido:

- O ponto é utilizado na definição de um segmento de reta;
- O ponto é utilizado na definição de um arco de circunferência.

Se houver alguma associação com uma reta ou um arco, a associação deve ser removida (apagando-se ou modificando-se a reta ou o arco) antes que o ponto possa ser removido.

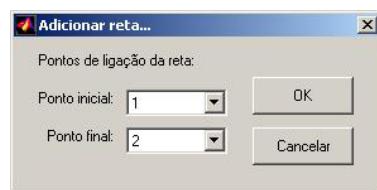
### *Modificar*



Modifica as coordenadas de um ponto já existente. O procedimento é interrompido se ocorrer qualquer uma das condições citadas na criação do ponto.

### I.2.2.2- Retas

#### *Adicionar*



Adiciona uma nova reta à geometria. Os números dos pontos inicial e final devem ser fornecidos. Há duas condições nas quais o procedimento é interrompido:

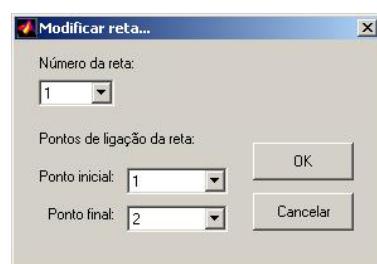
- Os números dos pontos inicial e final são os mesmos;
- Já existe um segmento de reta com os mesmos pontos de ligação.

#### *Remover*



Remove um segmento de reta da geometria.

#### *Modificar*



Modifica os pontos de ligação de um segmento de reta já existente. O procedimento é interrompido se ocorrer qualquer uma das condições citadas na criação da reta.

### *Dividir*

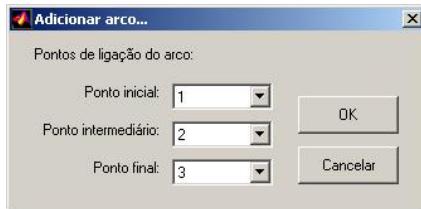


Divide o segmento de reta em  $N$  segmentos de mesmo tamanho. Há três condições nas quais o procedimento é interrompido:

- É fornecido um valor inválido (valor em branco ou não-numérico) para o número de divisões;
- O número de divisões é menor que dois;
- O número de divisões não é inteiro.

### **I.2.2.3- Arcos**

#### *Adicionar*

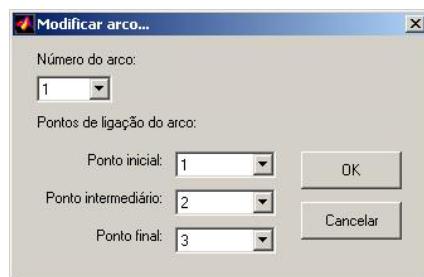


Adiciona um novo arco à geometria. Os números dos pontos inicial, intermediário e final devem ser fornecidos. Há cinco condições nas quais o procedimento é interrompido:

- Os números dos pontos inicial e intermediário são os mesmos;
- Os números dos pontos intermediário e final são os mesmos;
- Os números dos pontos inicial e final são os mesmos;
- Os pontos selecionados são colineares;
- Já existe um arco de circunferência com os mesmos pontos de ligação.

*Remover*

Remove um arco de circunferência da geometria.

*Modificar*

Modifica os pontos de ligação de arco de circunferência já existente. O procedimento é interrompido se ocorrer qualquer uma das condições citadas na criação do arco.

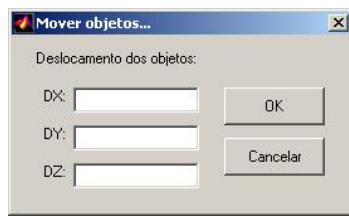
*Dividir*

Divide o arco de circunferência em  $N$  arcos de mesmo tamanho. Há três condições nas quais o procedimento é interrompido:

- É fornecido um valor inválido (valor em branco ou não-numérico) para o número de divisões;
- O número de divisões é menor que dois;
- O número de divisões é um número não-inteiro.

#### I.2.2.4- Mover

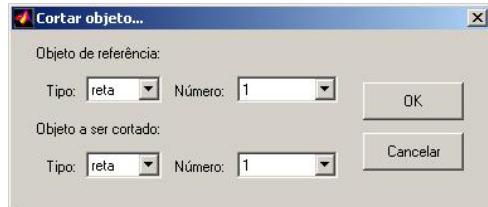
Desloca todos os pontos do modelo de uma quantidade ( $\Delta X, \Delta Y, \Delta Z$ ). O procedimento é interrompido se um valor inválido (valor em branco ou não-numérico) for fornecido para  $\Delta X$ ,  $\Delta Y$  ou  $\Delta Z$ .



#### I.2.2.5- Cortar

Corta um objeto tipo reta ou arco, tomando como referência um outro objeto tipo reta ou arco. O procedimento de corte se dá em duas etapas:

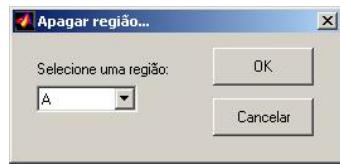
A primeira etapa é a escolha do objeto de referência e do objeto a ser cortado.



Seleciona-se o tipo de objeto de referência (reta ou arco) e o seu número. Seleciona-se então o tipo de objeto a ser cortado (reta ou arco) e o seu número. Há duas condições nas quais o procedimento é interrompido:

- O tipo e número do objeto de referência são iguais ao do objeto a ser cortado;
- Não há interseções válidas.

A segunda etapa é a escolha da região a ser apagada.

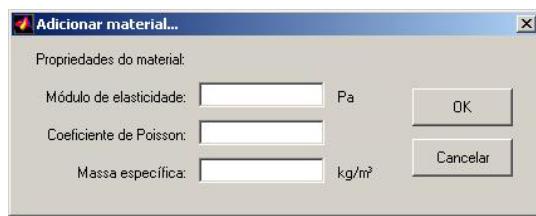


Seleciona-se a região a ser apagada. A porção restante do objeto é mantida.

### I.2.3- Propriedades

#### I.2.3.1- Materiais

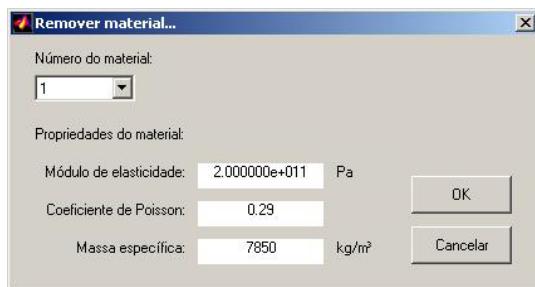
##### *Adicionar*



Adiciona um novo conjunto de propriedades à lista de materiais. O módulo de elasticidade deve ser fornecido em Pascal e a massa específica em quilogramas por metro cúbico. Há quatro condições nas quais o procedimento é interrompido:

- É fornecido um valor inválido (valor em branco ou não-numérico) para qualquer uma das propriedades;
- É fornecido um valor menor ou igual a zero para o módulo de elasticidade;
- É fornecido um valor para o coeficiente de Poisson fora do intervalo (0.0;0.5);
- É fornecido um valor menor ou igual a zero para a massa específica.

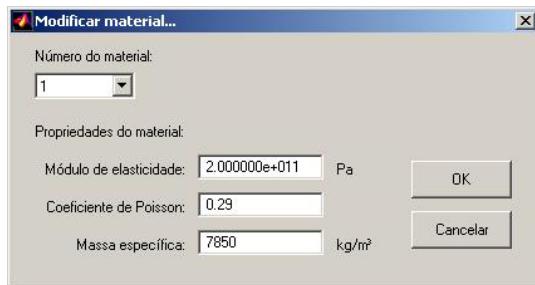
### *Remover*



Remove um conjunto de propriedades. As propriedades são exibidas na tela para facilitar a identificação. O procedimento é interrompido se o material pertencer a algum grupo de propriedades.

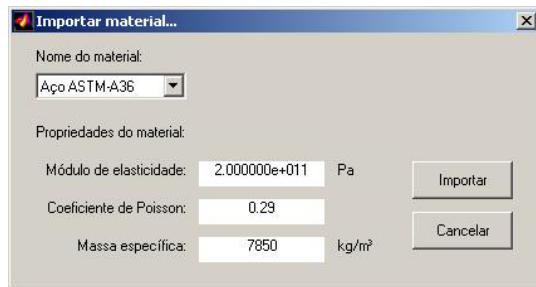
Se houver alguma associação com um grupo, a associação deve ser removida (apagando-se ou modificando-se o grupo) antes que o material possa ser removido.

### *Modificar*



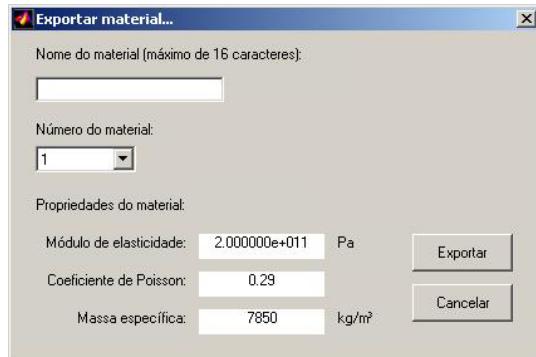
Modifica as propriedades de um material já definido. O procedimento é interrompido se ocorrer qualquer uma das condições citadas na adição do material.

### Importar



Importa um material pré-definido. As propriedades são exibidas na tela para facilitar a identificação. O procedimento é interrompido se o arquivo "mats.txt" não for encontrado.

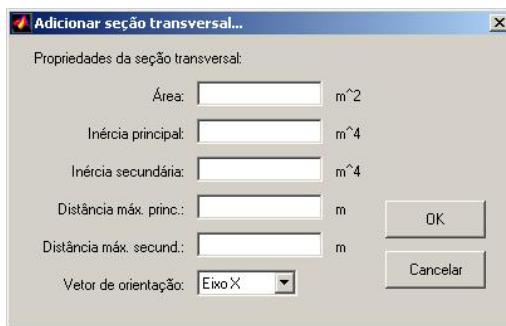
### Exportar



Exporta um conjunto de propriedades definidas na lista de materiais. As propriedades são exibidas na tela para facilitar a identificação. O usuário deve fornecer um nome para o material a ser exportado.

### I.2.3.2- Seções

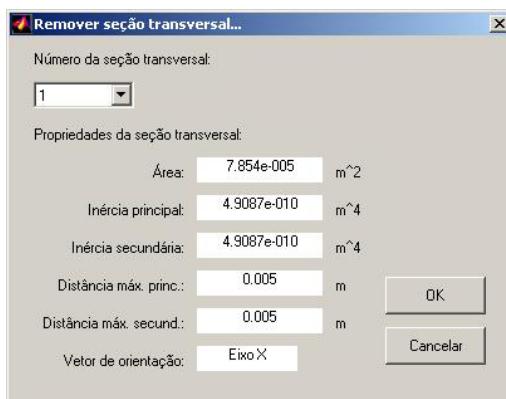
#### *Adicionar*



Adiciona um novo conjunto de propriedades à lista de seções transversais. A área deve ser fornecida em metros quadrados, os momentos de inércia em metros elevados à quarta potência e as distâncias em metros. Há duas condições nas quais o procedimento é interrompido:

- É fornecido um valor inválido (valor em branco ou não-numérico) para qualquer uma das propriedades;
- É fornecido um valor menor ou igual a zero para qualquer uma das propriedades.

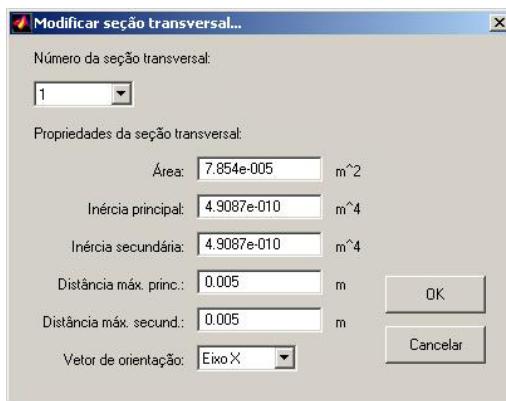
#### *Remover*



Remove um conjunto de propriedades. As propriedades são exibidas na tela para facilitar a identificação. O procedimento é interrompido se a seção transversal pertencer a algum grupo de propriedades.

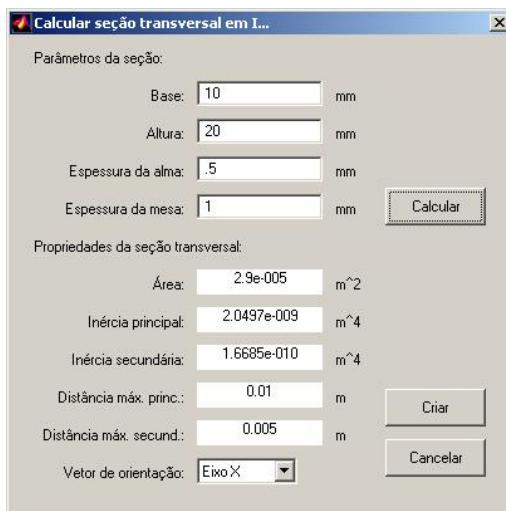
Se houver alguma associação com um grupo, a associação deve ser removida (apagando-se ou modificando-se o grupo) antes que a seção transversal possa ser removida.

### *Modificar*

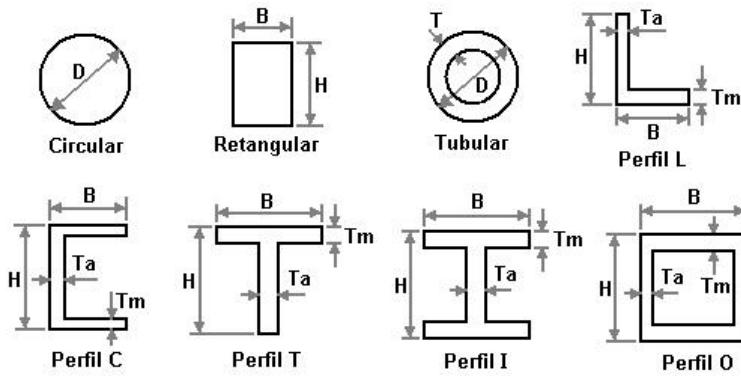


Modifica as propriedades de uma seção transversal já definida. O procedimento é interrompido se ocorrer qualquer uma das condições citadas na adição da seção.

### *Calcular*



Calcula as propriedades de uma seção com geometria pré-definida. As propriedades são exibidas na tela após o cálculo. A figura abaixo mostra os tipos de seções pré-definidas:



As letras indicadas na figura acima significam:

- **D:** Diâmetro;
- **B:** Base;
- **H:** Altura;
- **T:** Espessura;
- **L:** Lado;
- **Ta:** Espessura da alma;
- **Tm:** Espessura da mesa.

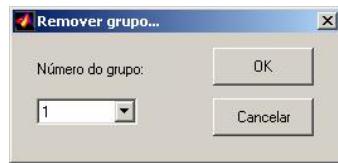
### I.2.3.3- Grupos

Agrupam as propriedades de materiais e seções transversais e o tipo de elemento utilizado. Os grupos fazem uma ponte entre a geometria e a malha de elementos finitos a ser gerada.

#### *Adicionar*



Adiciona um novo grupo de propriedades. Deve-se selecionar um tipo de elemento (haste ou viga), o número de um conjunto de propriedades de material e o número de um conjunto de propriedades de seção transversal.

*Remover*

Remove um grupo de propriedades.

*Modificar*

Modifica um grupo de propriedades.

*Associar*

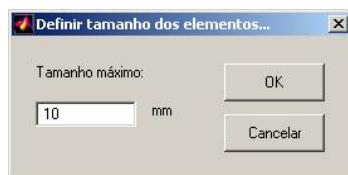
Associa as retas e arcos com os grupos de propriedades criados. A janela se divide em três partes: seleção do número do grupo, associação das retas e associação dos arcos.

A malha de elementos finitos é gerada apenas sobre as retas e os arcos que estiverem associados a algum grupo.

## I.2.4- FEM

### I.2.4.1- Elementos

#### *Definir Tamanho*



Define o tamanho máximo dos elementos finitos gerados. Há duas condições nas quais o procedimento é interrompido:

- É fornecido um valor inválido (valor em branco ou não-numérico);
- O valor fornecido é menor que o dobro da tolerância especificada.

#### *Gerar Malha*

Gera elementos de acordo com o tamanho máximo definido e as associações impostas entre grupos e geometria. Quando a malha é gerada, todos os resultados anteriores do modelo são perdidos. Além disto, perdem-se as referências dos carregamentos e condições de contorno anteriores.

#### *Otimizar Numeração*

Otimiza a numeração dos nós, para que as matrizes de massa e rigidez tenham uma reduzida largura de banda. Quando a numeração é otimizada, todos os resultados anteriores do modelo são perdidos.

### I.2.4.2- Carregamentos e Condições de Contorno

As opções de carregamentos e condições de contorno são:

- **Restrições:** Fazem com que um determinado grau de liberdade tenha deslocamento ou rotação nula. Cada nó apresenta seis graus de liberdade.
- **Forças:** Forças concentradas.
- **Momentos:** Momentos concentrados.

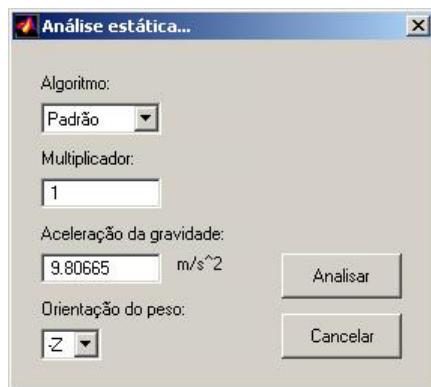
- **Deslocamentos impostos:** Fazem com que um determinado grau de liberdade tenha deslocamento ou rotação fixa. Para análises estáticas, os deslocamentos impostos trabalham da mesma forma que as restrições. A diferença é que os valores impostos não necessariamente são nulos, como no caso das restrições. Nas análises dinâmicas, os deslocamentos impostos são ignorados.
- **Apoios elásticos:** Apóiam um determinado nó por uma mola axial ou torcional.
- **Massas concentradas:** Concentram um determinado valor de massa sobre um nó. As massas concentradas afetam apenas os graus de liberdade de deslocamento (os G.L. de rotação não são alterados).

Todos os carregamentos e condições de contorno apresentam forma semelhante de aplicação. Cada um apresenta cinco comandos: adicionar, remover, modificar, transferir e copiar.

- **Adicionar:** adiciona um carregamento ou condição de contorno a um dado nó;
- **Remover:** remove um carregamento ou condição de contorno;
- **Modificar:** modifica os valores do carregamento ou condição de contorno;
- **Transferir:** transfere o carregamento ou condição de contorno para outro nó;
- **Copiar:** copia os valores de um carregamento ou condição de contorno para um novo nó.

### I.2.4.3- Análises

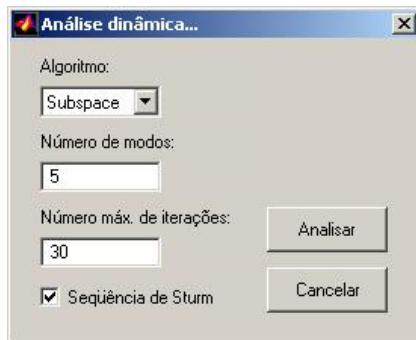
#### *Estática*



Calcula os deslocamentos, esforços e tensões sofridos pela estrutura. Há duas condições nas quais a análise estática não é executada:

- É fornecido um valor inválido (valor em branco ou não-numérico) para o multiplicador;
- É fornecido um valor inválido (valor em branco ou não-numérico) para a aceleração da gravidade.

#### *Dinâmica*



Calcula os modos de vibração e as freqüências naturais da estrutura. Há quatro condições nas quais a análise dinâmica não é executada:

- É fornecido um valor inválido (valor em branco ou não-numérico) para o número de modos;

- É fornecido um valor inválido (valor em branco ou não-numérico) para o máximo de iterações;
- O número de modos é menor ou igual a zero;
- O número máximo de iterações é menor ou igual a zero.

## I.2.5- ODS

### I.2.5.1- Importar Dados

Importa um conjunto de dados experimentais utilizados pelo ODS. O arquivo de dados deve ser gravado no formato ASCII e apresentar a seguinte estrutura:

- Os dados devem ser dispostos em colunas;
- Todas as colunas devem ter o mesmo número de linhas;
- Cada linha corresponde a um instante de tempo;
- A primeira coluna contém os instantes de tempo da medição;
- As colunas restantes correspondem aos deslocamentos medidos.

### I.2.5.2- Locais

Objetos que correspondem aos locais de medição dos deslocamentos utilizados pelo ODS. Os locais são exibidos junto à malha de elementos finitos.

#### *Adicionar*



Adiciona um novo local de medição. As coordenadas (X,Y,Z) devem ser fornecidas em milímetros. Há duas condições nas quais o procedimento é interrompido:

- É fornecido um valor inválido (valor em branco ou não-numérico) para qualquer uma das coordenadas;
- Já existe um local com as mesmas coordenadas fornecidas (ou tão próximas quanto a tolerância permite).

### *Remover*



Remove um local de medição. O procedimento é interrompido se o local estiver associado a alguma coluna de dados experimentais.

### *Modificar*



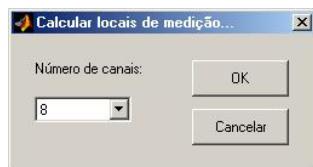
Modifica as coordenadas de um local de medição já existente. O procedimento é interrompido se ocorrer qualquer uma das condições citadas na adição do local.

### *Associar*



Associa as colunas do arquivo de deslocamentos experimentais aos locais de medição, com uma determinada direção. A associação não é aceita se o local e direção selecionados já estiverem associados a outra coluna de dados.

### **Calcular**



Calcula os locais de medição mais adequados, baseando nos modos de vibração do modelo.

### **I.2.5.3- Análise do ODS**

Calcula os deslocamentos dos pontos restantes da estrutura a partir dos dados experimentais fornecidos. Calcula também os esforços e tensões sofridas pela estrutura durante a sua operação.

### **I.2.6- Visualizar**

#### **I.2.6.1- Numeração de Objetos**

A numeração dos objetos possui basicamente duas funções:

- Identificação dos objetos;
- Verificação das propriedades de um determinado objeto.

É dada a opção de ocultar a numeração, para que a visualização se torne mais clara. Quando a numeração não é exibida, o modelo é desenhado mais rapidamente.

A identificação é necessária em três fases da criação do modelo: edição da geometria, associação dos grupos de propriedades com a geometria e aplicação de carregamentos e condições de contorno.

A verificação das propriedades é feita clicando-se sobre o número de um determinado objeto. As propriedades deste objeto são mostradas na barra de informações, de acordo com as tabelas abaixo:

Objeto	O que é mostrado
Ponto	Coordenadas (X,Y,Z) do ponto em milímetros
Reta	Números dos pontos de ligação da reta (inicial, final)
Arco	Números dos pontos de ligação do arco (inicial, intermediário, final)
Nó	Coordenadas (X,Y,Z) do nó em milímetros

A escolha de exibir/ocultar a numeração não afeta as indicações de carregamentos e condições de contorno. A tabela abaixo apresenta o que é mostrado na barra de informações quando o usuário clica em uma destas indicações.

Indicação	O que é mostrado
R (Restrição)	Graus de liberdade restringidos (Tx, Ty, Tz, Rx, Ry, Rz)
F (Força)	Componentes (X, Y, Z) da força em Newtons
M (Momento)	Componentes (X, Y, Z) do momento em Newton-metros
D (Deslocamento)	Valores das componentes impostas em milímetros
A (Apoio elástico)	Componentes (X, Y, Z) da rigidez axial em quilo-Newtons por metro e componentes (X, Y, Z) da rigidez torcional em quilo-Newton-metros por radiano
C (Massa concentrada)	Valor da massa em quilogramas

- **Associações entre Geometria e Grupos:** Quando a visualização das associações é selecionada, os objetos "retas" e "arcos" são desenhados com a cor do grupo a que pertencem. Se a numeração dos objetos estiver ativa, o número do grupo é apresentado.
- **Geometria:** Quando a visualização da geometria é selecionada, os objetos "pontos", "retas" e "arcos" são exibidos na tela de desenho. Quando os comandos "Novo" ou "Abrir" são executados, a visualização automaticamente retorna para esta opção. A visualização da geometria sempre está disponível.
- **Elementos:** Quando a visualização dos elementos é selecionada, os objetos "nós" e "elementos" são exibidos na tela de desenho. Além disto, as indicações de

carregamentos e condições de contorno também o são. Esta opção de visualização só se torna disponível após a geração de uma malha de elementos finitos.

- **Resultados:** Quando a visualização dos resultados é selecionada, os elementos finitos são exibidos com uma escala de cores, de acordo com a legenda do canto superior direito da tela. Esta opção de visualização só se torna disponível após a execução de uma análise. Os resultados podem se dividir em estáticos, dinâmicos e ODS.
- **Vistas pré-definidas:** Coloca o modelo em uma das dez vistas pré-definidas. As vistas podem ser divididas em retangulares e isométricas.
- **Ajustar tela:** Ajusta a posição e a escala da tela de desenho, de forma a enquadrar o modelo atual.

### I.2.7- Configurações

- **Fixar origem:** Quando esta opção é marcada, os eixos cartesianos são colocados em uma posição fixa, no canto inferior esquerdo da tela. Quando esta opção é desmarcada, a origem dos eixos é colocada sobre a origem do modelo. Sempre que o ADES é iniciado, a origem dos eixos é colocada na posição fixa.
- **Centrar referência:** Quando esta opção é marcada, os comandos de zoom e giro utilizam como referência o centro da tela de desenho. Quando esta opção é desmarcada, os comandos mencionados anteriormente utilizam a origem do modelo como referência. Sempre que o ADES é iniciado, a referência é colocada na origem do modelo.
- **Preferências:** Configura as propriedades de tamanho, cor e valor dos objetos.

### I.2.8- Repetir

Repete o último comando acionado.

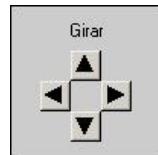
## I.3- Barra de Ferramentas

### I.3.1- Ferramenta "Vistas"



Coloca o modelo em uma das vistas pré-definidas. Esta ferramenta utiliza as mesmas vistas do menu "Visualizar". Para mudar a vista, seleciona-se uma das opções da lista e aciona-se o botão "Mudar vista".

### I.3.2- Ferramenta "Girar"



Gira o modelo em torno do eixo horizontal ou vertical. Utilizando a regra da mão direita, a direção e sentido do vetor de giro, para cada seta acionada, é:

- **Esquerda:** eixo vertical tomado de cima para baixo.
- **Direita:** eixo vertical tomado de baixo para cima.
- **Cima:** eixo horizontal tomado da direita para a esquerda.
- **Baixo:** eixo horizontal tomado da esquerda para a direita.

### I.3.3- Ferramenta "Zoom"



Reduz ou aumenta o *zoom* da tela, ou seja, reduz ou aumenta a escala na qual o modelo é exibido na tela de desenho.

### I.3.4- Ferramenta "Resultado"

Possui duas funções distintas:

- Modificar o "caso" de resultado exibido na tela;
- Apresentar uma animação do resultado (apenas dinâmico e ODS).

O "caso" é o número que aparece entre as setas. Quando a seta para a esquerda é acionada, o número diminui de uma unidade. A seta para a direita aumenta o "caso" em uma unidade. O tipo de resultado apresentado na tela depende do valor do "caso" atual e da opção selecionada no menu "Visualizar, Resultados":

#### I.3.4.1- Estáticos ou ODS

Deslocamentos (em metros)

- Módulo do deslocamento;
- Deslocamento em X;
- Deslocamento em Y;
- Deslocamento em Z;

Esforços (em Newtons ou Newton-metros)

- Força de tração/compressão;
- Momento torçor;
- Momento fletor principal;
- Momento fletor secundário;
- Força cortante principal;
- Força cortante secundária.

Tensões (em Pascal)

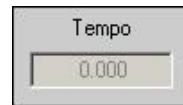
- Tensão de tração/compressão;
- Tensão de cisalhamento devida à torção;
- Tensão máxima devida à flexão principal;

- Tensão máxima devida à flexão secundária;
- Tensão de cisalhamento transversal, segundo o eixo principal;
- Tensão de cisalhamento transversal, segundo o eixo secundário.

#### I.3.4.2- Dinâmicos

Os "casos" de 1 a  $N_{FQ}$  correspondem aos modos de vibração.

#### I.3.5- Ferramenta "Tempo"



Modifica o instante de tempo do resultado apresentado na tela. Esta ferramenta é utilizada apenas para a visualização de resultados do ODS.

A caixa de edição aceita apenas um valor numérico maior ou igual a zero. Caso o conteúdo digitado seja não-numérico, é apresentada uma mensagem de erro, indicando que o conteúdo é inválido. Quando o valor digitado é válido, o instante de tempo é acertado para o valor mais próximo do que foi digitado.

### I.4- Barra de Informações

Apresenta diversas informações sobre o modelo ou a análise em execução. Há três condições nas quais a informação é atualizada:

- O modelo é redesenrado;
- O usuário clica sobre o número de algum objeto ou sobre alguma indicação;
- A análise em execução atinge um novo passo.

#### I.4.1- Modelo Redesenhado

- **Geometria:** Número de pontos, retas e arcos criados;
- **Elementos:** Número de nós e elementos gerados;
- **Resultados estáticos:** Tipo de resultado exibido;
- **Resultados dinâmicos:** Valor da freqüência natural.

#### I.4.2- Número de Objeto Clicado

- **Ponto:** Coordenadas (X, Y, Z) do ponto em milímetros;
- **Reta:** Números dos pontos de ligação da reta (inicial, final);
- **Arco:** Números dos pontos de ligação do arco (inicial, intermediário, final);
- **Nó:** Coordenadas (X, Y, Z) do nó em milímetros;

#### I.4.3- Indicação Clicada

- **Restrição:** Graus de liberdade restringidos (Tx, Ty, Tz, Rx, Ry, Rz);
- **Força:** Componentes (X, Y, Z) da força em Newtons;
- **Momento:** Componentes (X, Y, Z) do momento em Newton-metros;
- **Deslocamento:** Valores das componentes impostas em milímetros;
- **Apoio elástico:** Componentes (X, Y, Z) da rigidez axial em quilo-Newtons por metro e componentes (X, Y, Z) da rigidez torcional em quilo-Newton-metros por radiano;
- **Massa concentrada:** Valor da massa em quilogramas.

#### I.4.4- Avanço da Análise

Apresenta informações sobre a execução da análise.

### I.5- Quadro Indicador

Indica a condição atual do modelo. Há três indicações distintas:

-  Sem alterações: não há análises sendo executadas e o modelo não foi modificado desde a última vez que foi salvo.
-  Arquivo alterado: não há análises sendo executadas, porém o modelo foi modificado após a última vez que foi salvo.
-  Executando análise: o programa deixa de responder temporariamente aos comandos do usuário. Quando a análise é encerrada, o funcionamento retorna ao normal.

## I.6- Formatos

Os modelos criados no ADES utilizam quatro formatos de arquivo:

- .GEO
- .PRO
- .FEM
- .TNS
- .MOD

### I.6.1- .GEO (Geometria)

Os arquivos .GEO armazenam as informações sobre os pontos, retas e arcos criados. A estrutura dos arquivos .GEO é a seguinte:

- **Primeira linha:** quantidade de pontos (NP), retas (NR) e arcos (NA) gerados, separados por tabulações.
- **Próximas NP linhas:** coordenadas dos pontos. Cada linha representa um ponto e contém as coordenadas X, Y e Z deste, separadas por tabulações.
- **Próximas NR linhas:** números dos pontos de ligação dos segmentos de reta. Cada linha representa uma reta e contém os números dos pontos inicial e final, separados por tabulações.
- **Próximas NA linhas:** números dos pontos de ligação dos arcos de circunferência. Cada linha representa um arco e contém os números dos pontos inicial, intermediário e final, separados por tabulações.

### I.6.2- .PRO (Propriedades)

Os arquivos .PRO armazenam as informações sobre as propriedades de materiais, seções transversais e tipos de elemento. Armazenam também as ligações entre a geometria e estas propriedades. A estrutura dos arquivos .PRO é a seguinte:

- **Primeira linha:** quantidade de materiais (NT), seções (NS), grupos (NG), retas (NR) e arcos (NA) gerados, separadas por tabulações.

- **Próximas NM linhas:** propriedades dos materiais. Cada linha representa um material e contém: módulo de elasticidade, coeficiente de Poisson e massa específica, separados por tabulações.
- **Próximas NS linhas:** propriedades das seções transversais. Cada linha representa uma seção e contém: área, inércia principal e secundária, distância máxima principal e secundária, além de um algarismo que representa o vetor de orientação, separados por tabulações.
- **Próximas NG linhas:** agrupamentos de propriedades. Cada linha representa um grupo e contém: um algarismo que representa o tipo de elemento, o número do material e o número da seção transversal, separados por tabulações.
- **Próximas NR linhas:** relação entre retas e grupos. Cada linha corresponde à reta de mesma numeração e representa o número do grupo ao qual a reta está associada.
- **Próximas NA linhas:** relação entre arcos e grupos. Cada linha corresponde ao arco de mesma numeração e representa o número do grupo ao qual o arco está associado.

### I.6.3- .FEM (Elementos Finitos)

Os arquivos .FEM armazenam as informações sobre os nós, elementos, carregamentos e condições de contorno criadas. A estrutura dos arquivos .FEM é a seguinte:

- **Primeira linha:** quantidade de nós (NN), elementos (NE), restrições (NRE), forças (NFO), momentos (NMO), deslocamentos impostos (NDI), apoios elásticos (NAE) e massas concentradas (NMC) geradas, separados por tabulações.
- **Segunda linha:** tamanho máximo dos elementos gerados.
- **Próximas NN linhas:** coordenadas dos nós. Cada linha representa um nó e contém as coordenadas X, Y e Z deste, separadas por tabulações.
- **Próximas NE linhas:** ligações dos elementos com os nós e propriedades. Cada linha representa um elemento e contém: números dos nós inicial e final, tipo de elemento, número do material e número da seção, separados por tabulações.
- **Próximas NRE linhas:** graus de liberdade restringidos. Cada linha representa um conjunto de restrições de um determinado nó, contendo o número deste e um valor

(de 1 a 63), separados por tabulações. O valor corresponde aos graus de liberdade restringidos, sendo calculado da seguinte maneira:  $VAL = 32Tx + 16Ty + 8Tz + 4Rx + 2Ry + Rz$ , onde  $Tx$ ,  $Ty$ ,  $Tz$ ,  $Rx$ ,  $Ry$  e  $Rz$  valem 0 (liberado) ou 1 (restringido).

- **Próximas NFO linhas:** valores das forças aplicadas. Cada linha representa uma força aplicada e contém: número do nó que recebe a força e as componentes  $F_x$ ,  $F_y$  e  $F_z$  desta, separados por tabulações.
- **Próximas NMO linhas:** valores dos momentos aplicados. Cada linha representa um momento aplicado e contém: número do nó que recebe o momento e as componentes  $M_x$ ,  $M_y$  e  $M_z$  deste, separados por tabulações.
- **Próximas NDI linhas:** valores dos deslocamentos impostos. Cada linha representa um conjunto de deslocamentos impostos sobre um determinado nó e contém: o número do nó, um valor (de 1 a 63) e as componentes  $T_x$ ,  $T_y$ ,  $T_z$ ,  $R_x$ ,  $R_y$ ,  $R_z$ , separados por tabulações. O valor em questão é calculado da mesma forma que o valor das restrições.
- **Próximas NAE linhas:** valores de rigidez dos apoios elásticos. Cada linha representa um apoio elástico e contém: número do nó que recebe o apoio e valores de rigidez axial e torcional, separados por tabulações.
- **Próximas NMC linhas:** valores das massas concentradas. Cada linha representa uma massa concentrada e contém o número do nó que a recebe e o seu valor, separados por tabulações.

#### I.6.4- .TNS (Resultados Estáticos)

Os arquivos .TNS armazenam as informações sobre os deslocamentos, esforços e tensões calculados para o modelo. A estrutura dos arquivos .TNS é a seguinte:

- **Primeira linha:** quantidade de nós (NN), pontos de esforços (NES) e pontos de tensões (NTN) calculados, separados por tabulações.
- **Próximas NN linhas:** deslocamentos e rotações dos nós. Cada linha representa um nó e contém: deslocamentos  $\Delta X$ ,  $\Delta Y$  e  $\Delta Z$  e rotações  $\Delta Rx$ ,  $\Delta Ry$  e  $\Delta Rz$  deste nó, separados por tabulações.

- **Próximas NES linhas:** esforços calculados para cada elemento. Cada linha representa um conjunto de esforços, correspondente a um determinado elemento.
- **Próximas NTN linhas:** tensões calculadas para cada elemento. Cada linha representa um conjunto de tensões, correspondente a um determinado elemento.

#### I.6.5- .MOD (Resultados Dinâmicos)

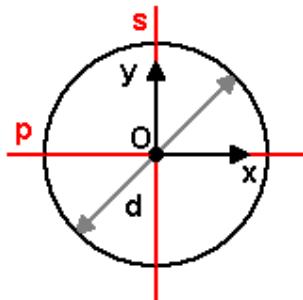
Os arquivos .MOD armazenam as informações sobre as freqüências naturais e modos de vibração calculados para o modelo. A estrutura dos arquivos .MOD é a seguinte:

- **Primeira linha:** quantidade de graus de liberdade (NGL) e de modos calculados (NFQ), separados por tabulações.
- **Próximas NFQ linhas:** freqüências naturais calculadas.
- **Próximas NGL linhas:** cada linha corresponde a um grau de liberdade. Cada coluna corresponde a um modo de vibração, separados por tabulações.

## Apêndice II

### SEÇÕES TRANSVERSAIS E FÓRMULAS

#### II.1- Circular



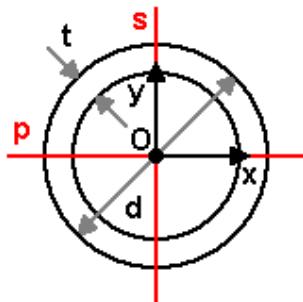
$$A = \frac{\pi d^2}{4}$$

$$C_x = C_y = 0$$

$$c_p = c_s = d/2$$

$$I_{pp} = I_{ss} = \frac{\pi d^4}{64}$$

#### II.2- Tubular



$$d_e = d$$

$$d_i = d_e - 2t$$

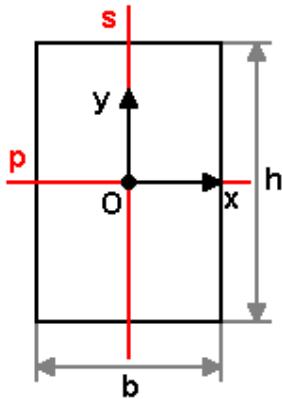
$$A = \pi(d_e^2 - d_i^2)$$

$$C_x = C_y = 0$$

$$c_p = c_s = d/2$$

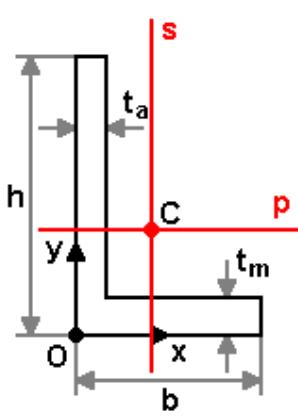
$$I_{pp} = I_{ss} = \frac{\pi}{64} (d_e^4 - d_i^4)$$

### II.3- Retangular



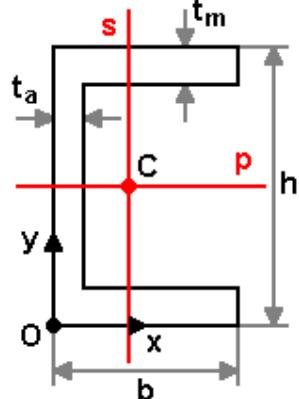
$$\begin{aligned}
 A &= bh \\
 C_x = C_y &= 0 \\
 c_p &= \frac{b}{2} \\
 c_s &= \frac{h}{2} \\
 I_{pp} &= \frac{bh^3}{12} \\
 I_{ss} &= \frac{b^3h}{12}
 \end{aligned}$$

### II.4- Perfil L



$$\begin{aligned}
 A &= bt_m + (h - t_m)t_a \\
 C_x &= \frac{1}{2} \frac{b^2t_m + t_a^2(h - t_m)}{bt_m + t_a(h - t_m)} \\
 C_y &= \frac{1}{2} \frac{bt_m^2 + t_a(h^2 - t_m^2)}{bt_m + t_a(h - t_m)} \\
 c_p &= \max(b - C_x; C_x) \\
 c_s &= \max(h - C_y; C_y) \\
 I_{pp} &= \frac{bh^3 - (b - t_a)(h - t_m)^3}{12} - \frac{bht_m^2(b - t_a)(h - t_m)}{4bt_m + 4t_a(h - t_m)} \\
 I_{ss} &= \frac{b^3h - (b - t_a)^3(h - t_m)}{12} - \frac{bht_a^2(b - t_a)(h - t_m)}{4bt_m + 4t_a(h - t_m)}
 \end{aligned}$$

## II.5- Perfil C



$$A = 2bt_m + (h - 2t_m)t_a$$

$$C_x = \frac{1}{2} \frac{2b^2 t_m + t_a^2 (h - 2t_m)}{2bt_m + t_a(h - 2t_m)}$$

$$C_y = \frac{h}{2}$$

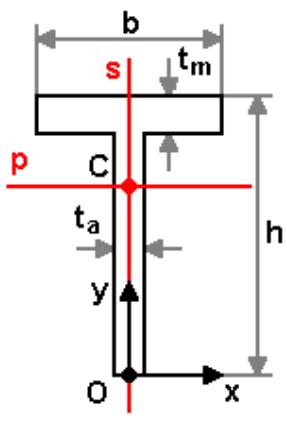
$$c_p = \max(b - C_x; C_x)$$

$$c_s = \frac{h}{2}$$

$$I_{pp} = \frac{bh^3 - (b - t_a)(h - 2t_m)^3}{12}$$

$$I_{ss} = \frac{b^3 h - (b - t_a)^3 (h - 2t_m)}{12} - \frac{bht_a^2 (b - t_a)(h - 2t_m)}{8bt_m + 4t_a(h - 2t_m)}$$

## II.6- Perfil T



$$A = bt_m + (h - t_m)t_a$$

$$C_x = 0$$

$$C_y = \frac{1}{2} \frac{bh^2 - (b - t_a)(h - t_m)^2}{bh - (b - t_a)(h - t_m)}$$

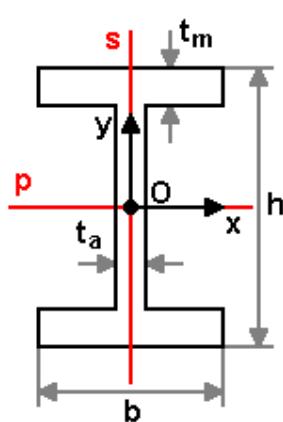
$$c_p = \frac{b}{2}$$

$$c_s = \max(h - C_y; C_y)$$

$$I_{pp} = \frac{bh^3 - (b - t_a)(h - t_m)^3}{12} - \frac{bht_m^2 (b - t_a)(h - t_m)}{4bh - 4(b - t_a)(h - t_m)}$$

$$I_{ss} = \frac{b^3 t_m + (h - t_m)t_a^3}{12}$$

## II.7- Perfil I



$$A = 2bt_m + (h - 2t_m)t_a$$

$$C_x = C_y = 0$$

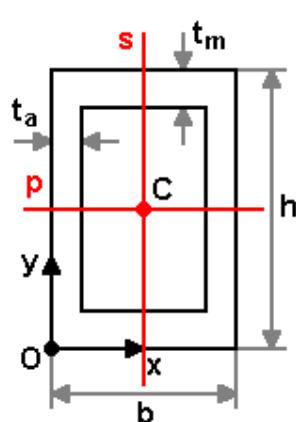
$$c_p = \frac{b}{2}$$

$$c_s = \frac{h}{2}$$

$$I_{pp} = \frac{2bt_m(t_m^2 + 3(h - t_m)^2) + t_a(h - 2t_m)^3}{12}$$

$$I_{ss} = \frac{2b^3t_m + t_a^3(h - 2t_m)}{12}$$

## II.8- Perfil O



$$A = 2bt_m + 2t_a(h - 2t_m)$$

$$C_x = C_y = 0$$

$$c_p = \frac{b}{2}$$

$$c_s = \frac{h}{2}$$

$$I_{pp} = \frac{bh^3 - (b - 2t_a)(h - 2t_m)^3}{12}$$

$$I_{ss} = \frac{b^3h - (b - 2t_a)^3(h - 2t_m)}{12}$$