



PUC Minas

**PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE MINAS GERAIS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA
MESTRADO EM ENGENHARIA AUTOMOTIVA**

Dissertação de Mestrado

**ANÁLISE DE SENSIBILIDADE APLICADA A
ESTUDOS DE CONFORTO VIBRACIONAL
EM AUTOMÓVEIS**

Renato Henriques Maia

ORIENTADOR: Prof. Marcelo Becker, D.Sc.

Fevereiro de 2002



PUC Minas

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE MINAS GERAIS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA
MESTRADO EM ENGENHARIA AUTOMOTIVA

**ANÁLISE DE SENSIBILIDADE APLICADA A
ESTUDOS DE CONFORTO VIBRACIONAL
EM AUTOMÓVEIS**

Dissertação apresentada ao Departamento de Engenharia Mecânica da PUC Minas pelo aluno **Renato Henriques Maia** como parte dos requisitos para obtenção do título de MESTRE EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA MECÂNICA.

Banca Examinadora:

Prof. Marcelo Becker, D.Sc.- PUC Minas - Orientador
Prof. José Antônio Ferreira Borges, D.Sc. - UFU - Examinador Externo
Prof. Clovis Sperb de Barcellos, Ph.D. - PUC Minas - Examinador Interno
Prof. Jánes Landre Júnior, D.Sc. - PUC Minas - Suplente

Belo Horizonte, 28 de fevereiro de 2002

“Se as coisas são inatingíveis ... ora!
Não é motivo para não querê-las ...
Que tristes os caminhos, se não fora
A presença distante das estrelas!”

Mário Quintana

Dedico este trabalho aos meus Pais, a Gabriela e à minha Irmã.

AGRADECIMENTOS

A meus pais e irmã pela amizade e apoio.

A Gabriela, que sempre esteve disponível ao meu lado apoiando a execução desta dissertação.

Ao Professor Marcelo Becker, pela orientação, apoio e incentivo.

Ao Professor Jánes Landre, pela colaboração e auxílio.

As todas pessoas que colaboraram enviando bibliografias e informações relevantes à tese.

Ao Professor Hamby pelo envio de informações relevantes sobre análise de sensibilidade.

Ao Professor Tortorelli pelas indicações de referências bibliográficas sobre análise de sensibilidade.

Aos colegas e funcionários do mestrado pelo auxílio e convivência.

Ao Professor José Ricardo, coordenador do Mestrado, pelo auxílio e apoio.

À Fundação Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo financiamento do trabalho.

A PUC Minas e a Pró-Reitoria de Pesquisa e Pós Graduação pelo fomento à pesquisa.

A todos os amigos que me incentivaram e apoiaram.

RESUMO

Este trabalho apresenta uma metodologia de análise de sensibilidade para determinar as variações que influenciam o modelo numérico de um veículo aplicado ao estudo do conforto vibracional em automóveis. A implementação da análise de sensibilidade resultou no estudo dos parâmetros e possíveis divergências entre os dados numéricos e experimentais. Após uma análise objetiva do comportamento do modelo numérico proposto, pôde-se atuar nos parâmetros de maneira corretiva, agregando qualidade ao modelo, reduzindo o tempo de pesquisa e as etapas de reavaliação do modelo numérico. O trabalho visa ajustar o modelo numérico utilizando a análise de sensibilidade como instrumento de ajuste do modelo, considerando as características de conforto vibracional em automóveis.

ABSTRACT

The present study is about a methodology for sensibility analysis which determines the variation which influences the numeric model. The result will be applied to the study of vibration comfort of automobiles. The sensibility analysis was implemented as a tool to identify the parameters that have a considerable influence on the model. It resulted in the study about the parameters and possible divergences among the numeric and experimental data. Based on the objective analysis of the proposed numeric model, corrections could be made in order to provide the model with quality. This would reduce the research time as well as the reevaluation steps. This study aims to adjust the numeric model using the sensibility analysis as a tool, considering the vibration comfort of the automobiles.

SUMÁRIO

RELAÇÃO DE FIGURAS	vi
RELAÇÃO DE TABELAS	xii
NOMENCLATURA	xiii

Capítulo 1 – INTRODUÇÃO

1.1	Motivação	1
1.2	Relevância do Tema	3
1.3	Escopo do Trabalho	3
1.4	Objetivos Gerais e Específicos	4
1.5	Referencial do Modelo Matemático	5

Capítulo 2 – REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

2.1	Pistas	6
	2.1.1 Modelos de Pista	8
2.2	Pneus	16
	2.2.1 Construção	16
	2.2.2 Borracha	18
	2.2.3 Vibração no Pneu	19
	2.2.4 Desenvolvimento do Modelo de Pneu	21
2.3	Suspensão	30
	2.3.1 Sistema McPherson	31
	2.3.2 Suspensão Traseira de Braços Combinados e Travessa	36
2.4	Amortecedores	39
2.5	Molas	44
2.6	Barras Estabilizadoras	46
2.7	Modelos de Suspensões	47
2.8	Bancos e Ocupantes	50
2.9	Motor	52

Capítulo 3 – IMPLEMENTAÇÃO DOS MODELOS

3.1	Implementação do Modelo de Pistas	53
3.2	Parâmetros do MIRA	54
3.3	Intervalo de Frequência	54
3.4	Implementação dos Modelos de Pneus	56
3.5	Implementação dos Modelos para Suspensões	58
	3.5.1 Suspensão Dianteira	58
	3.5.2 Suspensão Traseira	61
3.6	Implementação do Modelo para Bancos dos Ocupantes	64
3.7	Implementação do Modelo para Motor	66
3.8	Implementação do Modelo da Carroceria	67
3.9	Implementação do Modelo Numérico Completo	69

Capítulo 4 – AVALIAÇÃO PRELIMINAR DO MODELO

4.1	Comparativo dos Resultados	71
-----	----------------------------	----

Capítulo 5 – ANÁLISE DE SENSIBILIDADE

5.1	Conceitos	76
5.2	Métodos	78
	5.2.1 Análise Diferencial	78
	5.2.1.1 Sistemas Discretizados Estáticos	81
	5.2.1.2 Sistemas Discretizados Dinâmicos	85

Capítulo 6 – ANÁLISE DE SENSIBILIDADE APLICADA AO MODELO

6.1	Metodologia Proposta	90
6.2	Desenvolvimento da Análise de Sensibilidade	90

Capítulo 7 – RESULTADOS

101

Capítulo 8 – CONCLUSÕES

117

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Bibliografia Citada	119
Bibliografia Complementar	122

APÊNDICES

Apêndice A	MÉTODO EXPERIMENTAL	124
Apêndice B	RESULTADOS E DISCUSSÃO	126
Apêndice C	MÉTODOS COMPLEMENTARES DE ANÁLISE DE SENSIBILIDADE	130

RELAÇÃO DE FIGURAS

Capítulo 1 – INTRODUÇÃO

Figura 1.1 – Gráfico de conforto - aceleração vertical x frequência.

Figura 1.2 – Gráfico de conforto - aceleração longitudinal x frequência.

Figura 1.3 – Sistema de eixos coordenados.

Capítulo 2 – REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Figura 2.1 – Densidade espectral das pistas	7
Figura 2.2 – Perfil de pavimento	8
Figura 2.3 – Levantamento topográfico	9
Figura 2.4 – Perfilômetro Inercial	9
Figura 2.5 – Rugosidade da pista teórica x velocidade de transcurso do veículo	12
Figura 2.6 – Densidade espectral típica dos perfis de pista asfáltica e cimentada	13
Figura 2.7 – Média da densidade espectral do perfil da pista	15
Figura 2.8 – Pneu e principais constituições	17
Figura 2.9 – Ilustração do posicionamento das lonas	18
Figura 2.10 – Modelagem mecânica da borracha	19
Figura 2.11 – Ressonâncias modais do pneu	20
Figura 2.12 – Propriedades de ressonância do pneu medidas no veículo	21
Figura 2.13 – Esquema básico de pneu	21
Figura 2.14 – Modelo ponto de contato	22
Figura 2.15 – Modelo banda de rodagem rígida	25
Figura 2.16 – Modelo comprimento de contato fixo	27
Figura 2.17 – Modelo comprimento de contato adaptativo	28
Figura 2.18 – Modelos de feixes de molas utilizados	31
Figura 2.19 – Sistema de suspensão do conceito McPherson	32
Figura 2.20 – Sistema McPherson dianteiro – veículo Lancia	33
Figura 2.21 – Detalhe do Sistema McPherson dianteiro	34
Figura 2.22 – Detalhamento dos esforços do Sistema McPherson dianteiro	35
Figura 2.23 – Detalhe da suspensão traseira	36
Figura 2.24 – Configurações e posicionamento de travessa	37

Figura 2.25 – Esquema do amortecedor do FIAT Panda fabricado pela Monroe	40
Figura 2.26 – Desenho de um amortecedor de tubo duplo	41
Figura 2.27 – Características da curva de amortecimento progressiva	42
Figura 2.28 – Características da curva de amortecimento decessiva	43
Figura 2.29 – Deslocamentos da barra estabilizadora	46
Figura 2.30 – Modelo De Carbon	47
Figura 2.31 – Modelo de Stensson	48
Figura 2.32– Modelo de Stensson simplificado	49
Figura 2.33 – Resultado da simulação comparativa dos modelos de Stensson	49
Figura 2.34 – Modelo simplificado da dinâmica do corpo humano sentado	51
Figura 2.35 –Modelo em corte do motor FIAT	52

Capítulo 3 – IMPLEMENTAÇÃO DOS MODELOS

Figura 3.1 – Gerador de sinais randômicos de pistas	55
Figura 3.2 – Aproximação do perfil de pista	55
Figura 3.3 – Elevação do perfil da pista	56
Figura 3.4 – Diagrama de blocos do modelo ponto de contato do pneu dianteiro esquerdo	57
Figura 3.5 – Diagrama de blocos do modelo comprimento de contato do pneu dianteiro esquerdo.	58
Figura 3.6 – Sistema de coordenadas e distâncias	59
Figura 3.7 – Representação gráfica do amortecedor dianteiro	60
Figura 3.8 – Diagrama de blocos da suspensão dianteira esquerda	60
Figura 3.9 – Diagrama de blocos do amortecedor dianteiro	61
Figura 3.10 – Diagrama de blocos da suspensão traseira esquerda	62
Figura 3.11 – Representação gráfica do amortecedor traseiro	63
Figura 3.12 – Diagrama de blocos das molas traseiras	64
Figura 3.13 – Diagrama de blocos do sistema banco/motorista	65
Figura 3.14 – Diagrama de blocos do sistema do motor	67
Figura 3.15 – Diagrama de blocos do modelo da carroceria	69
Figura 3.16 – Diagrama de blocos do modelo numérico completo com dez graus de liberdade	70

Capítulo 4 – AVALIAÇÃO PRELIMINAR DO MODELO

Figura 4.1 – Comparativo das rodas, utilizando os modelos de pista lisa e pneu ponto de contato	71
Figura 4.2 – Comparativo do trilho e banco, utilizando os modelos de pista lisa e pneu ponto de contato	72
Figura 4.3 – Comparativo das rodas, utilizando os modelos de pista lisa e pneu comprimento de contato	72
Figura 4.4 – Comparativo do trilho e banco, utilizando os modelos de pista lisa e pneu comprimento de contato	73
Figura 4.5 – Comparativo das rodas, utilizando os modelos de pista irregular e pneu ponto de contato	73
Figura 4.6 – Comparativo do trilho e banco, utilizando os modelos de pista irregular e pneu ponto de contato	74
Figura 4.7 – Comparativo das rodas, utilizando os modelos de pista irregular e pneu comprimento de contato	74
Figura 4.8 – Comparativo do trilho e banco, utilizando os modelos de pista irregular e pneu comprimento de contato	75

Capítulo 5 – ANÁLISE DE SENSIBILIDADE

Figura 5.1 – Sistema abstrato	76
Figura 5.2 – Organograma das formulações dentro da análise de sensibilidade	79

Capítulo 6 – ANÁLISE DE SENSIBILIDADE APLICADA AO MODELO

Figura 6.1 – Sensibilidade das DSP das rodas dianteiras em função do parâmetro amortecimento do pneu (C_t) em pista lisa	91
Figura 6.2 – Sensibilidade das DSP das rodas traseiras em função do parâmetro amortecimento do pneu (C_t) em pista lisa	91
Figura 6.3 – Sensibilidade das DSP do trilho e do banco em função do parâmetro amortecimento do pneu (C_t) em pista lisa	92
Figura 6.4 – Sensibilidade das DSP das rodas dianteiras em função do parâmetro amortecimento do banco (C_{se}) em pista lisa	93

Figura 6.5 – Influência de cada parâmetro nas rodas dianteiras, utilizando os modelos de pista lisa e pneu ponto de contato	94
Figura 6.6 – Influência de cada parâmetro nas rodas traseiras, utilizando os modelos de pista lisa e pneu ponto de contato	94
Figura 6.7 – Influência de cada parâmetro no trilho e banco, utilizando os modelos de pista lisa e pneu ponto de contato	95
Figura 6.8 – Sensibilidade das DSP das rodas dianteiras em função do parâmetro amortecimento do pneu (C_t) em pista irregular	96
Figura 6.9 – Sensibilidade das DSP das rodas traseiras em função do parâmetro amortecimento do pneu (C_t) em pista irregular	97
Figura 6.10 – Sensibilidade das DSP do trilho e banco em função do parâmetro amortecimento do pneu (C_t) em pista irregular	98
Figura 6.11 – Sensibilidade das DSP das rodas dianteiras em função do parâmetro amortecimento do banco (C_{se}) em pista irregular	98
Figura 6.12 – Influência de cada parâmetro nas rodas dianteiras, utilizando os modelos de pista irregular e pneu ponto de contato	99
Figura 6.13 – Influência de cada parâmetro nas rodas traseiras, utilizando os modelos de pista irregular e pneu ponto de contato	99
Figura 6.14 – Influência de cada parâmetro no trilho e banco, utilizando os modelos de pista irregular e pneu ponto de contato	100

Capítulo 7 – RESULTADOS

Figura 7.1 – Comparativo da DSP das rodas, utilizando pista lisa, após ajuste do modelo de pista	102
Figura 7.2 – Comparativo da DSP do trilho e banco, utilizando pista lisa, após ajuste do modelo de pista	102
Figura 7.3 – Modelos adotado da dinâmica do corpo humano sentado	103
Figura 7.4 – Comparativo da DSP das rodas, utilizando pista lisa, após a implementação de um novo modelo de banco	104
Figura 7.5 – Comparativo da DSP do trilho e banco, utilizando pista lisa, após a implementação de um novo modelo de banco	105

Figura 7.6 – Comparativo da DSP das rodas, utilizando pista lisa, após ajuste final do modelo numérico	106
Figura 7.7 – Comparativo da DSP do trilho e banco, utilizando pista lisa, após ajuste final do modelo numérico	106
Figura 7.8 – Comparativo da DSP das rodas, utilizando pista irregular, após ajuste no modelo de pista	107
Figura 7.9 – Comparativo da DSP das rodas, utilizando pista irregular, após ajuste no modelo de pista	108
Figura 7.10 – Comparativo da DSP das rodas, utilizando pista irregular, após ajuste no modelo do banco	109
Figura 7.11 – Comparativo da DSP do trilho e banco, utilizando pista irregular, após ajuste no modelo do banco	109
Figura 7.12 – Comparativo da DSP das rodas, utilizando pista irregular, após ajuste final do modelo numérico	110
Figura 7.13 – Comparativo da DSP do trilho e banco, utilizando pista irregular, após ajuste final do modelo numérico	110
Figura 7.14 – Influência de cada parâmetro nas rodas dianteiras, após a reavaliação do modelo de pista irregular	111
Figura 7.15 – Influência de cada parâmetro nas rodas traseiras, após a reavaliação do modelo de pista irregular	112
Figura 7.16 – Influência de cada parâmetro no trilho e banco, após a reavaliação do modelo de pista irregular	112
Figura 7.17 – Comparativo da DSP das rodas, utilizando pista lisa, modelo de pneu comprimento de contato, após ajuste final do modelo numérico	113
Figura 7.18 – Comparativo da DSP do trilho e banco, utilizando pista lisa, modelo de pneu comprimento de contato, após ajuste final do modelo numérico	114
Figura 7.19 – Comparativo da DSP das rodas, utilizando pista irregular, modelo de pneu comprimento de contato, após ajuste final do modelo numérico	114
Figura 7.20 – Comparativo da DSP do trilho e banco, utilizando pista irregular, modelo de pneu comprimento de contato, após ajuste final do modelo numérico	115

Apêndice 2 – RESULTADOS E DISCUSSÃO

Figura B.1 – Densidade espectral das rodas	126
Figura B.2 – Densidade espectral dos pontos em asfalto liso	127
Figura B.3 – Densidade espectral em pista de asfalto irregular	128
Figura B.4 – Densidade espectral em pista de asfalto irregular	129

Apêndice 3 – MÉTODOS COMPLEMENTARES DE ANÁLISE DE SENSIBILIDADE

Figura C.1 – Exemplo do teste de Smirnov	139
--	-----

RELAÇÃO DE TABELAS

Capítulo 2 – FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Tabela 2.1 – Classes de pistas teóricas com base no índice de rugosidade Gr	11
Tabela 2.2 – Parâmetros aplicados ao modelo do MIRA	15
Tabela 2.3 – Características geométricas do eixo traseiro do veículo simulado	38

Capítulo 3 – IMPLEMENTAÇÃO DOS MODELOS

Tabela 3.1 – Parâmetros aplicados ao modelo do MIRA	54
Tabela 3.2 – Valores w_1 e w_2 utilizados neste trabalho	54

Capítulo 7 – Resultados

Tabela 7.1 – Parâmetros do corpo humano – ISO 5982-1981	103
---	-----

NOMENCLATURA

Variáveis

Capítulo 2 – FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

A	área de contato [m ²]
c	amortecimento do pneu
c''	amortecimento cúbico [N.s/m ³]
d	diâmetro do fio de arame [m]
D	diâmetro de hélice entre centros [m]
d_a	distância entre as buchas da travessa [m]
d_b	distância entre o centro da roda e o centro da travessa [m]
d_c	distância entre as buchas de fixação [m]
d_t	bitola traseira do veículo
F	força no sistema mola amortecedor [N]
F_D	força de amortecimento [N]
F_h	força horizontal [N]
F_m	força na mola [N]
F_v	força vertical [N]
F_t	força vertical no centro da roda [N]
F_x	força longitudinal no centro da roda [N]
F_z	força vertical transmitida ao veículo [N]
G	módulo de cisalhamento [MPa]
G_0	parâmetro de magnitude da pista [m ³ /ciclo]
G_r	índice de rugosidade [m ² /ciclo/m]
$G_z(v)$	densidade espectral da pista [m ² /ciclo/m]
$G(v_0)$	rugosidade característica do trajeto [m ² /ciclo/m]
$G_{z_r}(w)$	densidade espectral da pista em função da velocidade angular [m ² /rad/s]
k	rigidez do pneu [N/m]

k''	rigidez cúbica [N/m ³]
k_D	constante de amortecimento
k_m	rigidez da mola [N/m]
L	comprimento de contato [m]
m	massa não suspensa [kg]
N_e	número de espiras ativas [adimensional]
N_v	número de voltas [adimensional]
P_i	pressão do pneu
r	raio da banda de rolagem [m]
R_r	parâmetro de rugosidade da pista [m ² .ciclo/s]
v	número de onda [ciclo/m]
V	velocidade do veículo [m/s]
v_0	ponto de inflexão do modelo [ciclo/m]
v_D	velocidade do pistão [m/s]
w	velocidade angular [rad/s]
w_1	parâmetro de controle para números de onda menores que v_0 [adimensional]
w_2	parâmetro de controle para números de onda maiores que v_0 [adimensional]
\bar{x}	distância do comprimento de contato [m]
z_0	deslocamento vertical no ponto de contato [m/s]
\dot{z}_0	velocidade vertical no ponto de contato [m/s]
z_I	deslocamento vertical no centro da roda [m/s]
\dot{z}_I	velocidade vertical no centro da roda [m/s]
z_{st}	deflexão em função do carregamento W [adimensional]
$z_0(\bar{x})$	perfil de elevação em função da coordenada do comprimento \bar{x} [m]
$\dot{z}_0(\bar{x})$	taxa de mudança do perfil de elevação em função da coordenada do comprimento \bar{x} [m]

Capítulo 3 – IMPLEMENTAÇÃO DOS MODELOS

A	distância longitudinal entre o eixo dianteiro e o eixo X da massa suspensa [m]
B	distância longitudinal entre o eixo traseiro e o eixo X [m]
C	distância longitudinal entre o centro do banco do motorista e o eixo Y [m]
Ce	amortecimento vertical do motor [N.s/m]
Cse	amortecimento vertical do banco [N.s/m]
Ct	amortecimento vertical do pneu [N.s/m]
$\frac{dz_0}{dt}$	velocidade vertical da estrada [m/s]
$\frac{dz_1}{dt}$	velocidade vertical da massa não suspensa [m/s]
$\frac{d^2 z_1}{dt^2}$	aceleração vertical da massa não suspensa [m/s ²]
$\frac{d^2 Z_m}{dt^2}$	aceleração vertical do motorista [m/s ²]
$\frac{d^2 Z_{motor}}{dt^2}$	aceleração vertical do motor [m/s ²]
$d^2 Z$	aceleração vertical da carroceria [m/s ²]
D	distância longitudinal entre o CG do motor e o eixo Y da massa suspensa [m]
E	distância transversal entre o centro das rodas e o eixo Y da massa suspensa [m]
F	distância transversal entre o centro das rodas e o eixo Y da massa suspensa [m]

f	frequência [Hz]
f_s	frequência de amostragem [Hz]
$F_{zocupantes}$	força vertical exercida pelo motorista e passageiro [N]
$F_{zocupantes_m}$	força vertical exercida pelo motorista [N]
$F_{zocupantes_p}$	força vertical exercida pelo passageiro [N]
F_{zmotor}	força vertical exercida pelo motor [N]
F_{zsusp}	forças verticais exercidas pelas quatro suspensões [N]
F_{zsusp_d}	força exercida pelas suspensões dianteiras [N]
F_{zsusp_dd}	força vertical exercida pela suspensão traseira direita [N]
F_{zsusp_de}	força vertical exercida pela suspensão dianteira esquerda [N];
F_{zsusp_t}	força vertical exercida pelas suspensões traseiras [N]
F_{zsuspe_td}	força vertical exercida pela suspensão traseira esquerda [N]
F_{zsusp_te}	força vertical exercida pela suspensão traseira esquerda [N]
g	aceleração da gravidade [m/s^2]
G	distância transversal entre o centro das rodas e o eixo Y da massa suspensa [m]
H	distância transversal entre o centro das rodas e o eixo Y da massa suspensa [m]
I_{xx}	inércia à rotação em torno do eixo X [kgm^2]
I_{yy}	inércia a rotação em torno do eixo Y [kgm^2]
J	distância transversal entre o CG do motor e o eixo X da massa suspensa [m]
Ke	rigidez vertical do motor [N/m]
Kse	rigidez vertical do banco [N/m]
Kt	rigidez vertical do pneu [N/m]
m	massa suspensa descontada a massa do motor [kg]

md	massa do motorista suportada pelo banco [kg]
mde	massa não suspensa dianteira esquerda [kg]
me	massa do conjunto motor/câmbio [kg]
Q	distância transversal entre o centro do banco do motorista e o eixo X da massa suspensa [m]
ν	número de onda [ciclo/m]
V	velocidade do veículo [m/s]

Capítulo 5 – ANÁLISE DE SENSIBILIDADE

$g, \bar{g}, G, \mathbf{g}$	função de restrição da performance do sistema
G	módulo cortante
G	função de restrição
G^*	Função de restrição atribuída
h	variável modelo (parâmetro)
h	argumento [adimensional]
\mathbf{K}	matriz de rigidez do sistema
\mathbf{M}	matriz massa do sistema
N	número de graus de liberdade do sistema
q	vetor deslocamento modal
q^*	valor inicial de q
T	Matriz transposta
\mathbf{x}, x_i	vetor de variáveis espaciais
X	variável independente
Y	variável dependente
${}^t(\cdot)$	função avaliada no tempo t
$(\cdot)^T$	vetor transposto ou matriz
$(\cdot).h$	derivada absoluta com respeito a variável do modelo h
$(\cdot),h$	derivada parcial com respeito a variável do modelo h
$(\cdot),i$	derivada parcial com respeito a variável do modelo x_i

$(\cdot);i$	derivada parcial com respeito a variável espacial referencia ${}^T\mathbf{x}_i$
$(\cdot).\alpha$	derivada parcial com respeito ao deslocamento nodal \mathbf{q}_α
(\cdot)	derivada parcial de g

Apêndice 3 – MÉTODOS COMPLEMENTARES DE ANÁLISE DE SENSIBILIDADE

b_k	coeficiente de regressão
$\mathbf{B}_{ij\alpha}$	matriz deslocamento modal-deformação
$\mathbf{C}, \mathbf{C}_{\alpha\beta}$	matriz amortecimento
D_{max}	valor máximo do parâmetro de saída do modelo
D_{min}	valor mínimo do parâmetro de saída do modelo
$F(\cdot)$	função campo
\mathbf{F}, F_α	vetor das forças nodais internas
\mathbf{F}, F_{ij}	gradiente de deformação
\mathbf{h}, h_d, h_e	vetor de variáveis do modelo (parâmetro)
I_i	índice de importância [adimensional]
\mathbf{I}	matriz identidade
J	Jacobiana
$\mathbf{K}, K_{\alpha\beta}$	matriz de rigidez do sistema
$\mathbf{K}^{(s)}, K_{\alpha\beta}^{(s)}$	matriz de rigidez secante
$\mathbf{K}^{(T)}, K_{\alpha\beta}^{(T)}$	matriz de rigidez tangente
$\mathbf{K}^{(\sigma)}, K_{\alpha\beta}^{(\sigma)}$	matriz de rigidez geométrica
l, l_p	comprimento de membro estrutural
L	número de casos de carregamento
$M_{\alpha\beta}$	matriz massa do sistema
m	número de amostra para estimar a distribuição do teste de Cramer-von-Mises
n	número de amostra para estimar a distribuição do teste de Cramer-von-Mises
\mathbf{n}, n_i	vetor normal
N	número de graus de liberdade do sistema
$P(\cdot)$	função de distribuição acumulativa

\mathbf{P}, P_{α}	vetor de forças nodais generalizadas externas
\mathbf{q}, q_{α}	vetor de coordenadas nodais generalizadas
\mathbf{Q}, Q_{α}	vetor de carregamentos nodais externos
\mathbf{Q}, Q_{α}^*	vetor de referencia do carregamento
Q	vetor carregamento nodal externo
r	coeficiente de correlação de Pearson
R	operador residual
\mathbf{R}, R_{α}	vetor residual
s	desvio padrão dos parâmetros de saída
s_k	desvio padrão na entrada do modelo
SI	índice de sensibilidade [adimensional]
S_x^2	variância dos valores do parâmetro
S_y^2	variância dos valores dependentes
$S_1(x)$	distribuição empírica utilizada no Teste de Smirnov
$S_2(x)$	distribuição empírica utilizada no Teste de Smirnov
T_1	resultado do Teste Estatístico de Smirnov
T_2	resultado do Teste Estatístico de Cramer-von-Mises
\mathbf{u}, u_i	vetor deslocamento
\mathbf{x}, x_i	vetor de variáveis espaciais
Z_k	variável pré-determinada

Letras Gregas

α	coeficiente de amortecimento proporcional (massa)
α	expoente [adimensional]
α	ângulo de <i>roll</i> [adimensional]
$\boldsymbol{\alpha}, \alpha_{ij}$	vetor de tensão anterior
β	coeficiente de amortecimento proporcional (rigidez)
$\Delta(\cdot)$	quantidade incremental
Δt	incremento de tempo
θ	ângulo de <i>pitch</i> [°]

ϕ	ângulo de inclinação da carroceria [°]
ϕ_α	autovetor
γ	ângulo de posição da travessa [°]
λ	vetor N-dimensional dos multiplicadores de Lagrange
λ, λ_α	vetor de variáveis adjacentes
μ_x	amostragem média
$\gamma(\cdot)$	correção iterativa
δ	variação
$\bar{\delta}$	variação do modelo total
$\tilde{\delta}$	variação do modelo implícito
τ	fator de amortecimento modal
τ	variável de tempo
$\Phi, \phi_{\alpha\beta}$	matriz de forma modal
w	contador de interações
$\partial(\cdot)$	variação de modelo explícito
$\hat{\partial}(\cdot)$	variação de modelo explícito efetivamente

Abreviaturas

CCP	Coeficiente de correlação parcial
CRP	Coeficiente de regressão da posição
MDD	Método da diferenciação direta
MSA	Método do sistema adjunto
PSD	Densidade espectral de potência
TDR	Taxa de desvio relativo

Siglas

MIRA	Motor Industry Research Association
------	-------------------------------------

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

1.1 Motivação

As características de conforto são um dos critérios mais importantes para se medir a “qualidade” de um veículo exposto a diferentes tipos de vibrações.

A classificação do espectro vibracional pode ser dividida em *ride* (0 - 25 Hz) e ruído (25 - 20000 Hz). O termo *ride* é comumente usado como referência a vibrações táteis e visuais, enquanto que vibrações auditivas são caracterizadas por ruído. Mas, tratar tais vibrações separadamente pode ser difícil, visto que, o ruído está sempre presente quando vibrações em baixas frequências são excitadas.

Ride é uma percepção subjetiva, associada ao nível de conforto sentido quando um veículo trafega. Esta percepção pode ser associada às vibrações transmitidas para o corpo dos ocupantes através do banco, das mãos e dos pés. A avaliação de *ride* vibracional em veículos pertence a uma área de bastante controvérsia na comunidade automotiva.

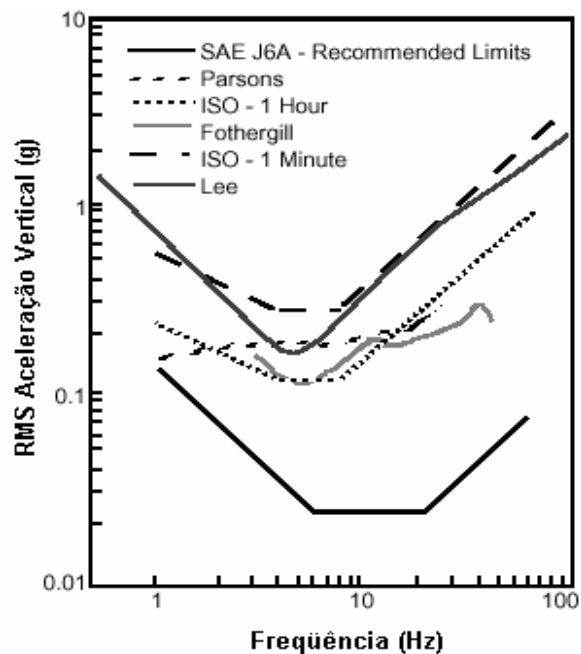


Figura 1.1 – Gráfico de conforto - aceleração vertical x frequência.

Fonte: Gillespie, 1992

Estudos originados da década de 1920 e apresentados pela SAE - *Ride and Vibration Data Manual*, publicados em 1965, dedicam-se a focalizar e relatar as tolerâncias e o desconforto dos passageiros na posição sentada, para se determinar as frequências às quais o corpo humano é mais sensível.

Devido às várias interpretações dadas ao conforto, as amplitudes mostradas no gráfico da Fig. 1.1, não são diretamente comparáveis, mas pode-se mostrar que a maioria apresenta uma tolerância mínima (maior sensibilidade) do corpo humano na faixa entre 4 e 8 Hz. Esta sensibilidade é associada ao resultado da ressonância vertical da cavidade abdominal.

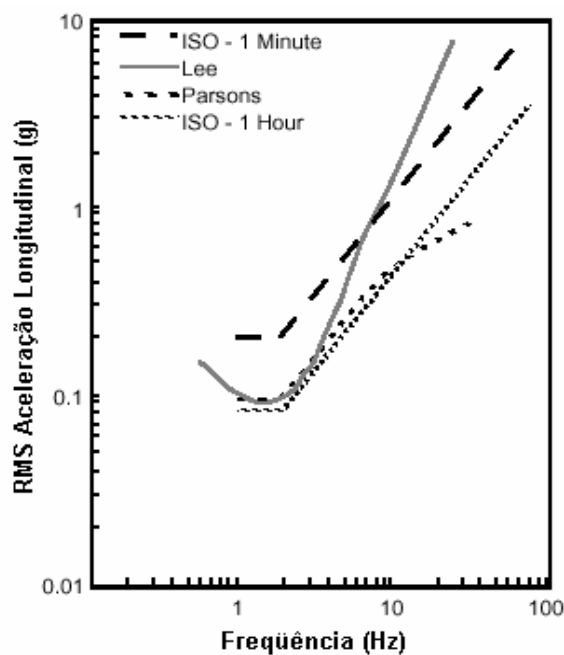


Figura 1.2 – Gráfico de conforto - aceleração longitudinal x frequência.

Fonte: Gillespie, 1992

Pode-se observar na Fig. 1.2, que a região de mínima tolerância ocorre na faixa de 1 a 2 Hz. Esta sensibilidade é mostrada como resultado da ressonância na parte superior do corpo humano.

A faixa de *ride comfort* (1 a 4 Hz) é caracterizada pelo efeito da aceleração sobre a parte superior do corpo humano. Na faixa acima de 4 Hz, as irregularidades da pista são transmitidas aos ocupantes do veículo como aceleração de alta frequência, tais vibrações são geralmente sentidas no assoalho do veículo, nos bancos e no volante.

1.2 Relevância do Tema

Pesquisas na área de conforto automotivo são de suma importância, uma vez que, as vibrações em baixa frequência são manifestações de comportamento dinâmico comum a todos os veículos. Desta forma, o resultado destas pesquisas pode proporcionar aos ocupantes, maior conforto e segurança no tráfego do veículo por várias horas.

Pode-se adicionar às características de conforto o tipo de banco, temperatura, ventilação, espaço interior e muitos outros fatores.

1.3 Escopo do Trabalho

A proposta deste trabalho é apresentar uma metodologia de análise de sensibilidade como ferramenta de ajuste ao modelo matemático computacional para estudos de conforto vibracional em automóveis.

Primeiramente foram analisados os pontos divergentes e possíveis discrepâncias entre os dados experimentais e numéricos. O próximo passo foi a implantação da análise de sensibilidade como ferramenta para identificar os parâmetros que exercem maior influência sobre o modelo proposto.

De posse de uma análise objetiva do comportamento do modelo matemático proposto, pode-se atuar nos parâmetros de maneira corretiva, agregando qualidade ao modelo, reduzindo o tempo de desenvolvimento e as etapas de reavaliação do modelo numérico. Busca-se provar a qualidade do modelo desenvolvido de forma a aproximar os resultados numéricos e experimentais

O trabalho visa ajustar o modelo numérico utilizando como ferramenta a análise de sensibilidade, considerando as características de conforto vibracional em automóveis.

O Capítulo 2, mostra uma revisão bibliográfica sobre os principais componentes, responsáveis pelo comportamento vibracional do veículo. Neste capítulo, são tratadas também as características de pistas, pneus, suspensão, motor e banco.

O Capítulo 3 apresenta o desenvolvimento do modelo matemático proposto identificando e modelando as partes constituintes da dinâmica automotiva na direção vertical.

No Capítulo 4 é proposta uma abordagem ampla e completa sobre a análise de sensibilidade, caracterizando os métodos e suas aplicações.

No Capítulo 5 é realizada uma análise de sensibilidade dos parâmetros de influência no modelo numérico a fim de obter informações referentes ao seu comportamento.

O Capítulo 6 apresenta uma validação do modelo de conforto veicular através da correção dos seus parâmetros de simulação com o propósito de ajustá-los aos dados experimentais.

As conclusões finais do trabalho constam do Capítulo 7.

1.4 Objetivos Gerais e Específicos

A contribuição mais significativa desse trabalho é a utilização da análise de sensibilidade como ferramenta investigativa de modelos numéricos que apresentem variação em seus parâmetros.

Propõe-se a disponibilização de métodos de análise de sensibilidade, que podem ser adequados a diversas áreas de estudo.

Os objetivos específicos deste estudo são:

- Elaborar uma referência técnica dos componentes geradores e ou absorvedores de vibração nos automóveis;
- Expor detalhadamente um modelo de veículo para estudo de conforto vibracional;
- Descrever os procedimentos e resultados experimentais de um veículo avaliando as características de conforto;
- Elaborar uma extensa revisão técnica referente a aplicação da análise de sensibilidade em diversos segmentos da ciência;
- Desenvolver uma metodologia de análise de sensibilidade aplicada a estudos de conforto vibracional em automóveis, em que se busca comparar os resultados entre o modelo numérico e os dados experimentais;
- Determinar as possíveis causas da diferença entre os resultados numéricos e experimentais;
- Propor a modificação do modelo matemático e apresentar os resultados de maneira a obter a sua validação para o estudo de conforto vibracional em veículos automotores.

1.5 Referencial do Modelo Matemático

Durante o desenvolvimento dos modelos matemáticos, foi empregado o sistema de eixos coordenado apresentado na Fig. 1.3.

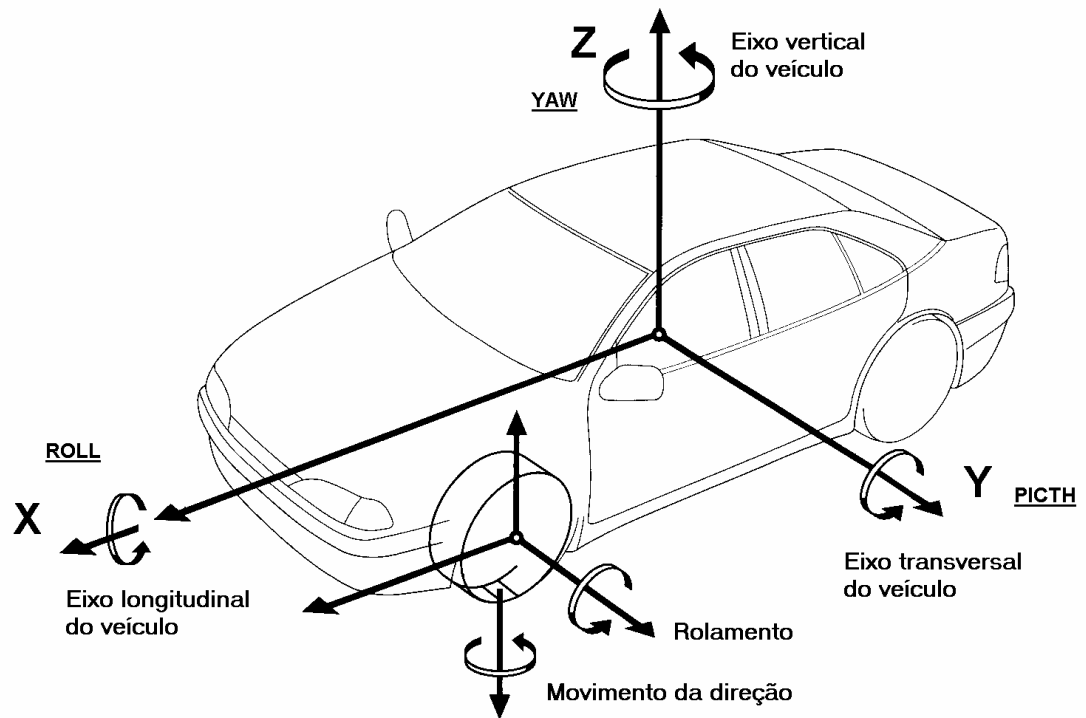


Figura 1.3 – Sistema de eixos coordenados.

Capítulo 2

REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

O veículo é um sistema dinâmico que apresenta vibrações em resposta às excitações impostas. As características das respostas às fontes de vibração determinam a magnitude e a direção imposta ao compartimento do passageiro e, por consequência, a percepção de conforto dos passageiros no veículo. Existem duas fontes que podem excitar o veículo, pode-se distingui-las entre fontes originárias da pista e fontes relacionadas aos elementos do veículo.

Neste capítulo, são apresentados os conceitos básicos de modelo de pista, pneus, suspensão e motorização.

2.1 Pistas

A rugosidade de uma pista é descrita pela irregularidade do perfil da pista ao longo da trajetória do veículo. Gillespie *et al.* (1980) considera que o perfil de uma pista é um sinal randômico de banda larga. Na sua essência, a pista pode ser descrita através de seu próprio perfil ou por suas propriedades estatísticas.

Butkunas (1966) definiu que a vibração de um sistema pode ser periódica ou randômica. Um sistema é periódico se sua amplitude repetir em intervalos iguais; caso não haja repetição, o sistema é randômico. Se a vibração do sinal analisado é periódica, a amplitude pode ser prognosticada num período futuro e o sinal pode ser remodelado em séries de ondas tipo senos e co-senos com frequências que são múltiplas da frequência de repetição (Análise de Frequência Harmônica). Um processo randômico, entretanto, não pode ser prognosticado; ele não se repete e sua amplitude pode ser descrita somente em médias estatísticas.

Para reconstituição de um sinal, utiliza-se uma função *Power Spectral Density (PSD)*. A densidade espectral de potência é a distribuição da variância do perfil como uma função do número de ondas, cuja unidade é ciclos/metro.

Um cálculo típico da *PSD* segue os seguintes passos:

1. Processamento do sinal através de um filtro *band pass* para selecionar uma faixa de frequência;
2. Elevar ao quadrado as amplitudes do sinal filtrado;
3. Obter a média do sinal ao quadrado sobre um intervalo de tempo selecionado, pela integração ou pela média dos valores calculados;
4. Dividir a média do sinal calculado, pelo comprimento de banda do filtro, calculando-se portanto a *PSD*.

Na Fig. 2.1 é mostrada a densidade espectral de várias pistas.

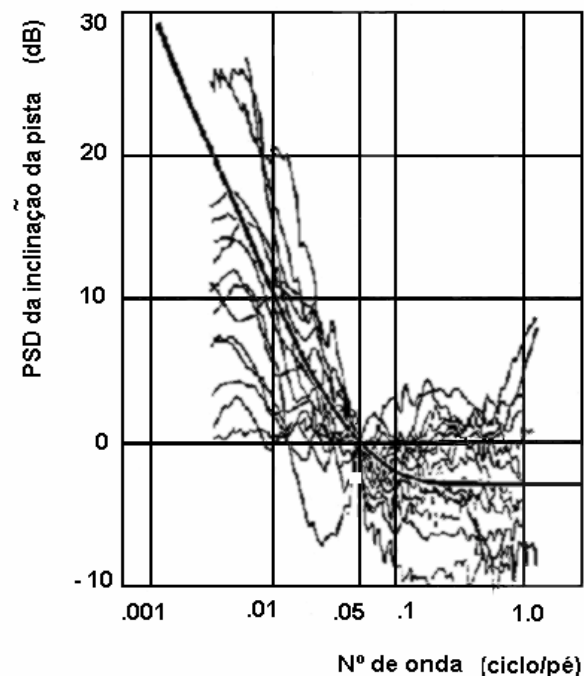


Figura 2.1 – Densidade espectral das pistas.

Fonte: Gillespie et al., 1980

Pode-se observar através da Fig. 2.1 que as características de densidade espectral possuem valores elevados para números de onda mais baixos, longos comprimentos de onda. Para números de onda mais altos, curtos comprimentos de onda, a densidade espectral possui valores menores.

2.1.1 Modelos de Pista

Há 20 anos, funções de densidade espectral eram utilizadas como descrição usual de pavimentos de estradas e pistas de aeroporto. A densidade espectral de uma seção de pavimento é geralmente única, mas quando comparada a vários números de pistas, percebe-se que todos possuem formas similares.

Um perfil de pista ou pavimento pode ser medido ao longo de uma linha contínua e imaginária na superfície. Se a medição é repetida, espera-se que o mesmo perfil se repita, desde que a mesma linha imaginária se repita. Estes conceitos são exemplificados na Fig. 2.2.

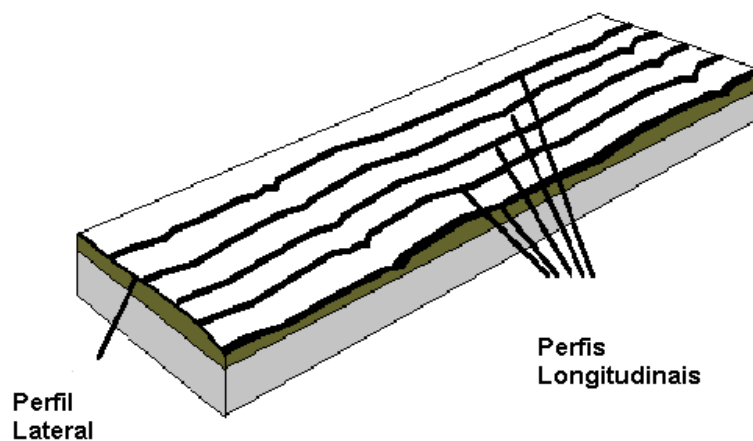


Figura 2.2 – Perfil de pavimento.

Fonte: Sayers e Karamihas, 1998

As irregularidades da pista podem ser medidas através de levantamentos topográficos, Fig. 2.3, ou por intermédio de perfilômetros, Fig. 2.4.

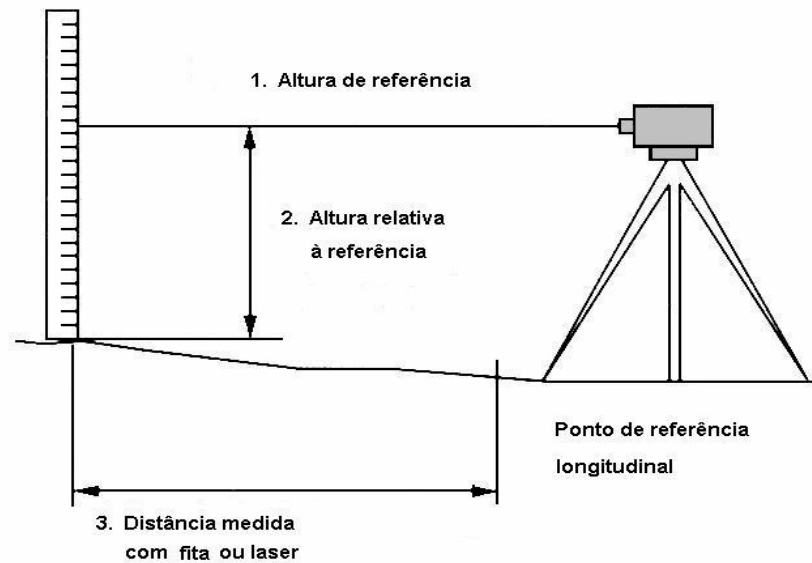


Figura 2.3 – Levantamento topográfico.

Fonte: Sayers e Karamihas, 1998

Um perfilômetro, conforme é mostrado na Fig. 2.4, é um instrumento usado para produzir uma série de parâmetros relacionados ao perfil verdadeiro de pista. É um método bem definido de se obter um verdadeiro perfil. Um perfilômetro trabalha apenas combinando 3 itens:

1. Elevação de referência;
2. Altura relativa à referência;
3. Distância longitudinal.

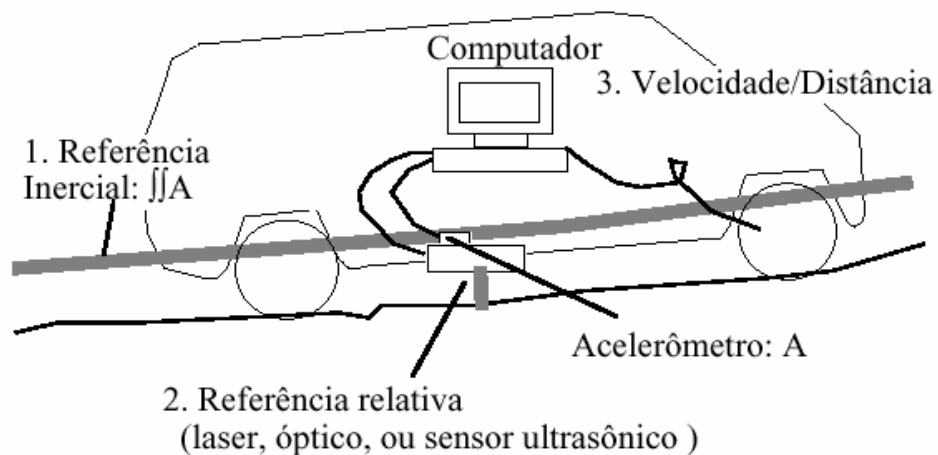


Figura 2.4 – Perfilômetro Inercial.

Fonte: : Sayers e Karamihas, 1998

Expressões analíticas que permitem a reprodução de perfis “médios” da densidade espectral das estradas foram sugeridas por vários pesquisadores. Estas são empregadas quando os perfis de pistas não são medidos ou avaliados. O conceito de perfil “médio” das densidades espectrais das pistas facilita na avaliação da resposta do veículo à rugosidade da pista.

Modelos apurados foram apresentados por diversos autores e centros de pesquisa, entre eles, pode-se citar MIRA - *Motor Industry Research Association* (1965), Gillespie *et al.*, (1980), Gillespie (1992).

Modelo de Houlboud

O modelo de Houlboud, desenvolvido inicialmente para a simulação de modelo de pistas de aeroportos, foi durante muito tempo o mais conhecido e utilizado modelo de pistas. Entretanto, na medida em que as estradas pavimentadas eram avaliadas através de perfilômetros, tornou-se aparente que a densidade espectral real da pista adquiria uma maior amplitude nas ondas baixas frequências do que as sugeridas pelo modelo proposto. Nos trabalhos mais recentes foram incluídos parâmetros adicionais para melhorar o ajuste das densidades espectrais na tentativa de aproxima-la dos valores experimentais medidos.

O modelo de Houlboud é definido como:

$$G_z(v) = \frac{G_0}{v^2} \quad (2.1)$$

onde:

$G_z(v)$ é o modelo de densidade espectral da pista;

v é o número de onda (número de onda equivale ao comprimento de onda);

G_0 é o parâmetro da magnitude da rugosidade (nível de rugosidade da pista).

Modelo Randômico de Gauss

Este modelo foi desenvolvido para prever a resposta do modelo do veículo e tratar a excitação causada pelas irregularidades como um processo estacionário randômico de Gauss.

Segundo El Beheiry e Karnopp (1996) este modelo simplificado de PSD tinha sido sugerido por Sayers (1985) como:

$$G_z(v) = G_r \cdot v^\alpha \quad (2.2)$$

onde:

G_r é o coeficiente de rugosidade;

v é o número de onda (ciclo/m);

α é um expoente adimensional.

Relacionando as Eqs. (2.1) e (2.2), tem-se $\alpha = -2$.

Uma classificação aproximada do perfil de pista foi teoricamente derivada com base nos diferentes valores de G_r por Lu (1985) citado por El Beheiry e Karnopp (1996), como mostrado na Tab. 2.1.

Tabela 2.1 – Classes de pistas teóricas com base no índice de rugosidade G_r .

Classe de Pistas	Índice de rugosidade de pista G_r (m^2 ciclo/m)
A Muito boa	$0,001 \times 10^{-4}$
B Boa	$0,004 \times 10^{-4}$
C Média	$0,016 \times 10^{-4}$
D Ruim	$0,064 \times 10^{-4}$
E Muito Ruim	$0,259 \times 10^{-4}$
F	$1,037 \times 10^{-4}$
G	$4,147 \times 10^{-4}$
H	

Fonte: El Beheiry e Karnopp, 1996

A excitação imposta no pneu do veículo depende de dois fatores: do coeficiente de rugosidade e da velocidade do veículo.

O parâmetro de rugosidade R_r da pista é expresso em termos destes dois fatores, e pode ser considerado como:

$$R_r = 2\pi G_r \cdot V \quad (2.3)$$

Deste modo:

$$G_{z_r}(\omega) = \frac{1}{2\pi \cdot V} \cdot G_{z_r}(v) = \frac{R_r}{\omega^2} \quad (m^2 / rad / s) \quad (2.4)$$

$$\omega = 2\pi \cdot V \cdot v \quad (rad/seg) \quad (2.5)$$

Observa-se na Fig. 2.5 uma faixa de parâmetros de rugosidade da pista R_r versus a resposta de um veículo em sua velocidade de transcurso.

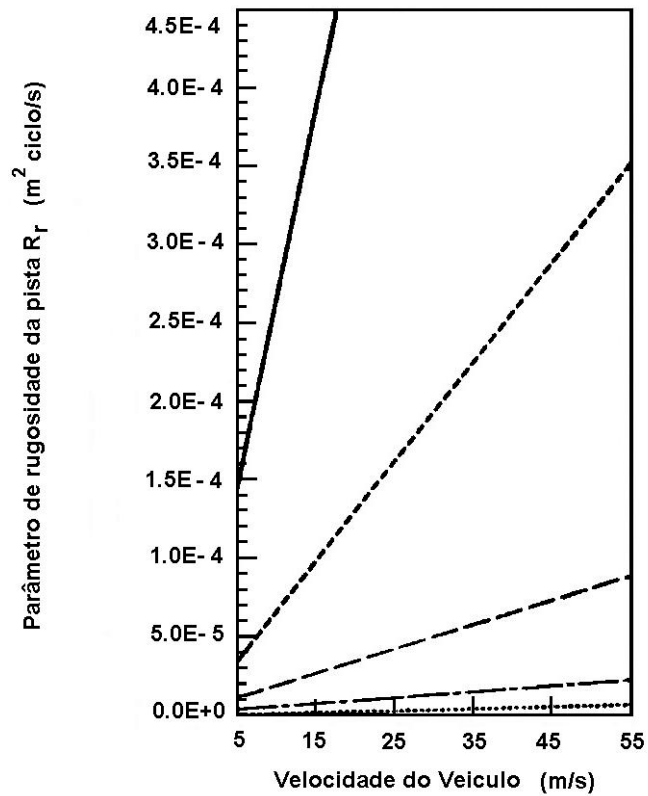


Figura 2.5 – Rugosidade da pista teórica x velocidade de transcurso do veículo.

Fonte: El Beheiry e Karnopp, 1996

Portanto, se considerar $\alpha=-2$ como índice da densidade espectral da Eq. (2.2), a inclinação do espectro será um sinal Branco¹.

Modelo de Gillespie

Visualiza-se na Fig. 2.6 que o perfil espectral é ligeiramente diferente entre pistas de asfalto e concreto. Observa-se que as características de elevação da curva podem variar para diferentes tipos de pistas, mas as características de inclinação e inflexão são constantes.

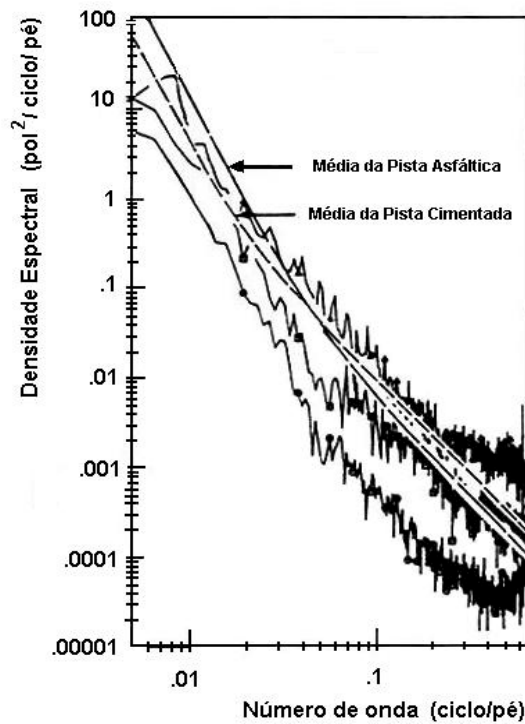


Figura 2.6 – Densidade espectral típica dos perfis de pista asfáltica e cimentada.

Fonte: Gillespie et al., 1980

De acordo com Gillespie *et al.* (1980), a PSD média para representação da rugosidade da pista pode ser obtida pela equação:

$$G_z(v) = \frac{G_0 [1 + (v_0/v)^2]}{(2\pi v)^2} \quad (2.6)$$

¹ Sinal Branco: Um sinal puramente randômico que possui uma densidade espectral constante sobre todas as frequências.

onde:

$G_z(v)$ é a PSD amplitude ($m^2/ciclo/m$);

v é o número de onda;

G_0 é o parâmetro da magnitude da rugosidade (nível de rugosidade);

$G_0 = 3,808 \times 10^{-5}$ para pistas rugosas;

$G_0 = 3,808 \times 10^{-6}$ para pistas lisas;

v_0 é o número de onda *cut-off* (ciclo/m);

$v_0 = 0,164$ para asfalto (ciclo/m);

$v_0 = 0,066$ para concreto (ciclo/m).

A Eq. (2.6), combinada com uma sequência de números randômicos proporciona um método usual para gerar perfis de pista com rugosidade randômica, que representa a qualidade espectral de pistas típicas para o estudo do comportamento dinâmico do conforto nos veículos (Gillespie *et al.*, 1980).

Modelo do MIRA (*Motor Industry Research Association*)

Uma forma analítica para avaliação das densidades espectrais elaboradas pelo MIRA utiliza a representação das seguintes equações:

$$G_z(v) = G(v_0) \left(\frac{v}{v_0} \right)^{-w_1} \quad \text{para } v \leq v_0 \quad (2.7)$$

$$G_z(v) = G(v_0) \left(\frac{v}{v_0} \right)^{-w_2} \quad \text{para } v \geq v_0 \quad (2.8)$$

onde:

$G_z(v)$ é a amplitude da PSD ($m^2/ciclo/m$);

v é o número de onda (ciclos/m);

$G(v_0)$ é o parâmetro de rugosidade característico do trajeto ($m^2/ciclo/m$);

$v_0 = \frac{I}{2\pi}$ que determina o ponto de inflexão do modelo (ciclo/m);

w_1 é o parâmetro de controle para números de onda menores que v_0 ;

w_2 é o parâmetro de controle para números maiores que v_0 .

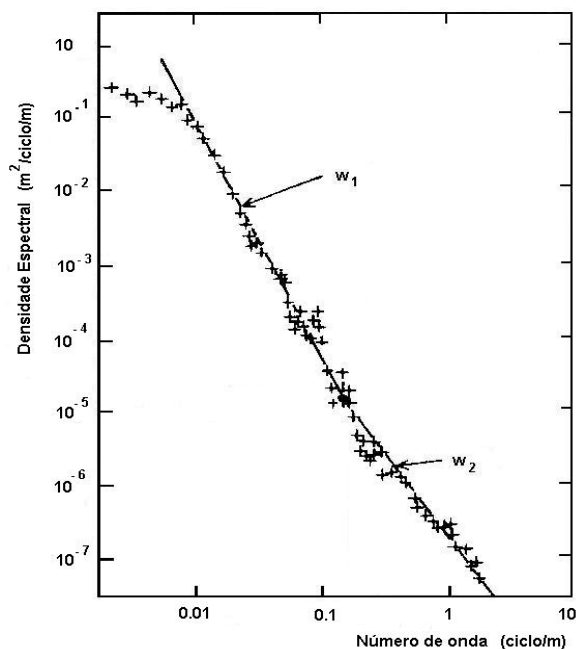


Figura 2.7 – Média da densidade espectral do perfil da pista.

Fonte: Dodds e Robson, 1973

A Tab. 2.2 apresenta valores médios característicos para diversos coeficientes a serem utilizados nas Eqs. (2.7) e (2.8).

Tabela 2.2 – Parâmetros aplicados ao modelo do MIRA.

Classificação		$G(v_0)$ $\times 10^{-6}$ (m ² /ciclo/m)	w_1		w_2	
			Média	Desvio	Média	Desvio
Auto estradas	Muito boa	2-8	1,95	0,464	1,360	0,221
	Boa	8-32				
Vias Principais	Muito Boa	2-8	2,05	0,487	1,440	0,266
	Boa	8-32				
	Média	32-128				
	Ruim	128-512				
Vias Secundárias	Média	32-128	2,28	0,534	1,428	0,263
	Ruim	128-512				
	Muito Ruim	512-2048				
	Ruim					

Fonte: Dodds e Robson, 1973

Para controlar a inclinação dos segmentos da reta que compõem o espectro, são utilizados os valores de w_1 e w_2 . Valores elevados de w_1 correspondem ao aumento da rugosidade do trajeto na região de comprimento de onda maiores. Por sua vez, valores elevados de w_2 correspondem a uma diminuição do nível de rugosidade do trajeto na região de comprimento de ondas menores.

2.2 Pneus

O movimento do veículo é excitado pelas forças que são exercidas nos pneus pela pista. A principal função dos pneus é interagir com a estrada e produzir forças necessárias para suportar, movimentar e direcionar o veículo. O pneu é utilizado também para amortecer partes das irregularidades da pista devendo então trabalhar com grande confiabilidade.

O primeiro artigo sobre as propriedades do pneu (Evans, 1935) citado por Dixon (1996) comentava: *“A área de contato entre o pneu e a estrada é a linha de frente na batalha furiosa entre espaço e tempo”*. Há pelo menos 100 anos, várias idéias alternativas foram investigadas e tratadas, mas nenhuma alcançou o sucesso.

O pneu é um toroide visco-elástico, com modernos refinamentos e otimização de suas propriedades, isto é, um complexo sistema não linear cujo comportamento é difícil de quantificar.

Busca-se proporcionar uma idéia qualitativa e às vezes quantitativa do comportamento do pneu e seus fatores de influência, assim como proporcionar alguns conceitos de modelamento do comportamento do pneu para simulação dinâmica do veículo.

Vários modelos simplificados de pneus foram desenvolvidos na tentativa de aproximar suas propriedades e performances a um sistema não-linear de materiais com características visco-elásticas (Captain *et al.*, 1979).

Este estudo, em questão, será restrito ao entendimento da dinâmica do veículo observando apenas os dados empíricos de modo a quantificar suas propriedades essenciais.

2.2.1 Construção

O modelo de construção do pneu caracteriza-se por uma carcaça moldada em compostos de borracha reforçada por encordoamentos e lonas dispostas em camadas cujas inclinações seguem um ângulo característico em relação ao plano da roda.

A carcaça faz o contato com a roda no costado, Fig. 2.8. A carcaça é inflada com ar a pressão de 120 a 200 kPa para carros, e de 300 a 600 kPa para caminhões. Os cabos são fabricados de *nylon* ou *teryline* que possuindo um módulo de elasticidade maior do que a borracha, e menor escoamento, podem suportar as tensões enquanto a borracha atua como selante do gás. A disposição das lonas é um fator que afeta a qualidade da resposta direcional do veículo. No pneu radial (Fig. 2.9-b) as camadas de lonas são dispostas em ângulos de 90° em relação ao plano do pneu na mesma direção do plano das rodas. Já no pneu diagonal, as camadas são dispostas em ângulos de aproximadamente 40°, alternando camadas angulares à esquerda e à direita da linha de centro do pneu (Fig. 2.9-a).

Um pneu de carro de passageiros moderno tem uma massa de aproximadamente 12 kg, sendo um terço composto realmente de borracha (4 kg de borracha, 2 kg de carbono, 2 kg de óleo, 3 kg de aço e 1 kg de *rayon*).

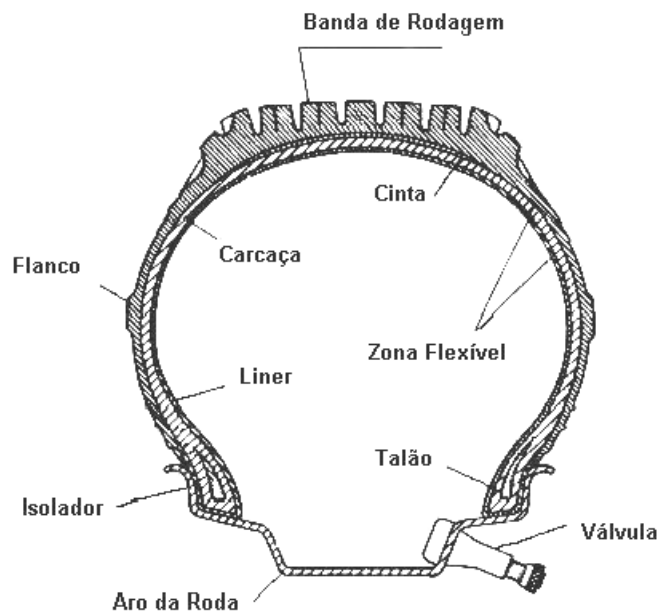


Figura 2.8 – Pneu e principais constituições.

Fonte: Reimpell e Stoll, 1996

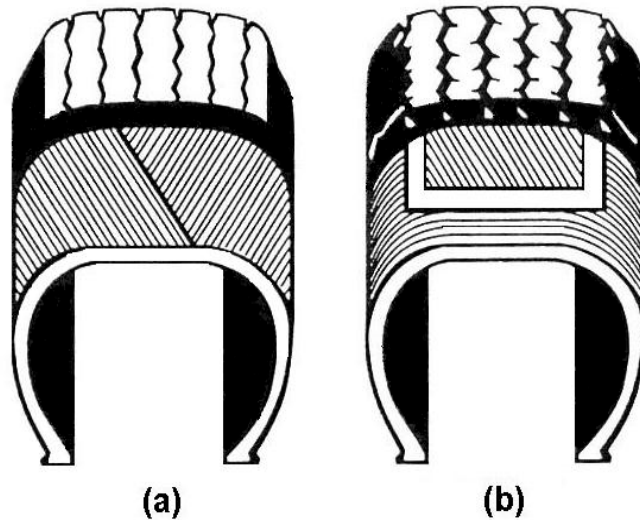


Figura 2.9 – Ilustração do posicionamento das lonas.

Fonte: Gillespie, 1992

2.2.2 Borracha

A borracha do pneu é o resultado de uma incrível combinação de propriedades que proporcionam ao pneu suporte e controle com boa durabilidade em difíceis condições.

A densidade da borracha comercial varia entre 1.100 e 1.200 kg/m³. A borracha do pneu é constituída por outros componentes como carbono e o óleo, que têm a densidade média de 1.200 kg/m³.

A borracha, sintética ou natural, é um material visco-elástico. Essencialmente, isto significa que uma parte da borracha sofre uma deformação. Esta deformação exerce uma resistência que, devido seu efeito elástico, tende a relaxar a borracha e diminuir a força atuante.

Observa-se na Fig. 2.10 um modelo simples que exhibe seu comportamento.

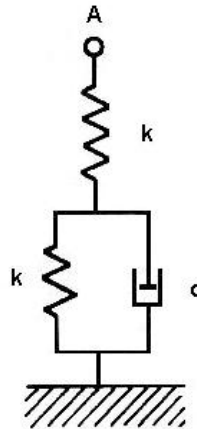


Figura 2.10 – Modelagem mecânica da borracha.

Fonte: Dixon, 1996

Como o centro de gravidade da força vertical não passa através do eixo de rotação gera-se uma resistência ao rolamento. Quando o pneu trafega numa pista, a força de tração e a força lateral são desenvolvidas por uma componente cisalhante. A tensão cisalhante exercida pelo contato da pista sobre a banda de rolagem do pneu se integrada sobre a área de contato é igual a força de tração e/ou a força lateral desenvolvida pelo pneu.

Um fator importante é o componente adesivo do atrito total. Este ocorre devido à união molecular entre o pneu e a pista. O componente de adesão é maior em condições de pista seca, mas é reduzido substancialmente quando a superfície da pista se encontra úmida, ocasionando perda de atrito.

Já o componente histerético representa a perda de energia na borracha, assim como sua deformação quando deslizando sobre o agregado da pista. Mas seu comportamento não é afetado pela água na superfície da pista, então, pode-se considerar que é melhor a tração em pista úmida quando o pneu tem uma borracha de alta histerese na banda de rodagem.

2.2.3 Vibração no Pneu

Devido às considerações de conforto dinâmico, a vibração no pneu possui o comportamento de uma mola que absorve a rugosidade característica da pista e interage com o movimento vertical do corpo das massas não amortecidas. O pneu também é um sistema dinâmico com ressonâncias que afetam a transmissão de vibração para o veículo e que podem interagir com as ressonâncias do veículo (Pitts *et al.*, 1977 citado por Dixon, 1996 e Gillespie, 1992).

Parte da massa do pneu é concentrada na banda de rodagem que é conectada à roda pelas laterais flexíveis. Essa combinação de massa permite a ressonância da banda de rodagem quando excitada pelo perfil da pista.

Observa-se na Fig. 2.11 exemplos das três ressonâncias modais do pneu no plano vertical.

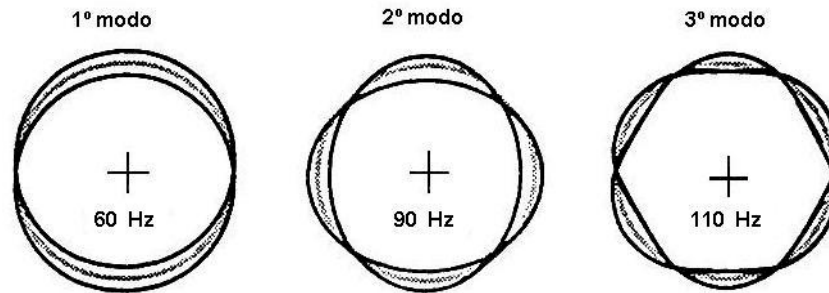


Figura 2.11 – Ressonâncias modais do pneu.

Fonte: Gillespie, 1992

O primeiro modo que ocorre próximo a 60 Hz para pneus de carros de passeio, envolve o movimento vertical simples na banda de rodagem sem sua distorção. O segundo modo contrasta com o primeiro na banda de rodagem com um modelo oscilatório e elíptico sempre permanecendo simétrico em relação ao eixo horizontal e vertical. Como a banda de rodagem move-se fora de fase, nenhuma força vertical é imposta na roda. No terceiro modo as ressonâncias atuam com absorvedores do perfil da pista, sem transmiti-las para a roda ou eixo.

Entre essas ressonâncias modais do pneu existem as anti-ressonâncias que se caracterizam pela distorção assimétrica da banda de rodagem e pela pouca mobilidade na região de contato. Essa assimetria resulta em forças desbalanceadas sendo impostas ao redor da circunferência da roda e a resultante dessas forças é transmitida para a roda.

Observa-se na Fig. 2.12 uma análise experimental do pneu radial em um carro de passeio sendo exposto a excitação vertical na região de contato.

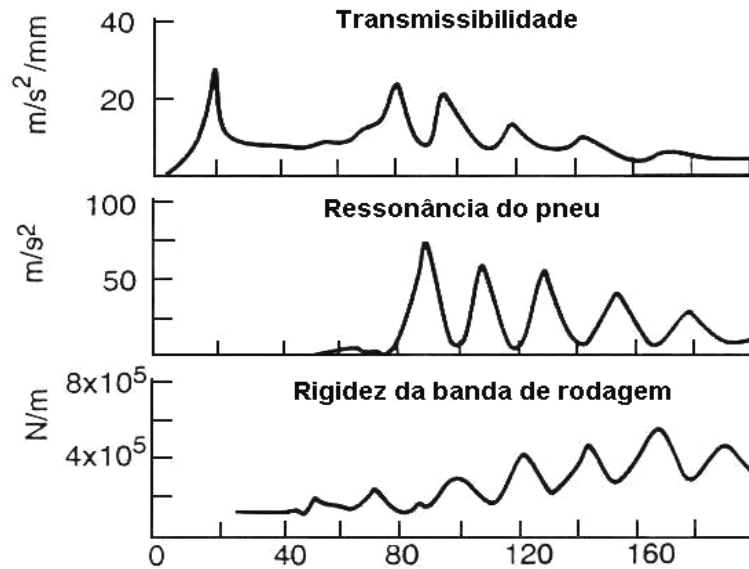


Figura 2.12 – Propriedades de ressonância do pneu medidas no veículo.

Fonte: Gillespie, 1992

O primeiro pico abaixo de 20 Hz que se observa é a frequência de ressonância da massa não suspensa, que é dependente da flexibilidade radial do pneu.

2.2.4 Desenvolvimento do Modelo de Pneu

Na Fig. 2.13 apresenta-se um esquema básico de pneu:

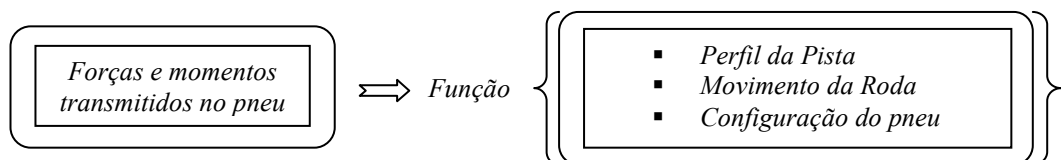


Figura 2.13 – Esquema básico de pneu.

Devido à complexidade, é difícil desenvolver um modelo de pneu que represente em sua totalidade todas as funções e conceitos de operação. Mas, pode-se buscar uma aproximação através de modelos analíticos. Quatro modelos de pneus são descritos apresentando níveis sucessivos de sofisticação.

Modelo de Ponto de Contato

O modelo de pneu ponto de contato é representado pela combinação em paralelo do sistema mola-amortecedor que transmite a força da pista para o veículo conectado a pista através de um ponto, Fig. 2.14.

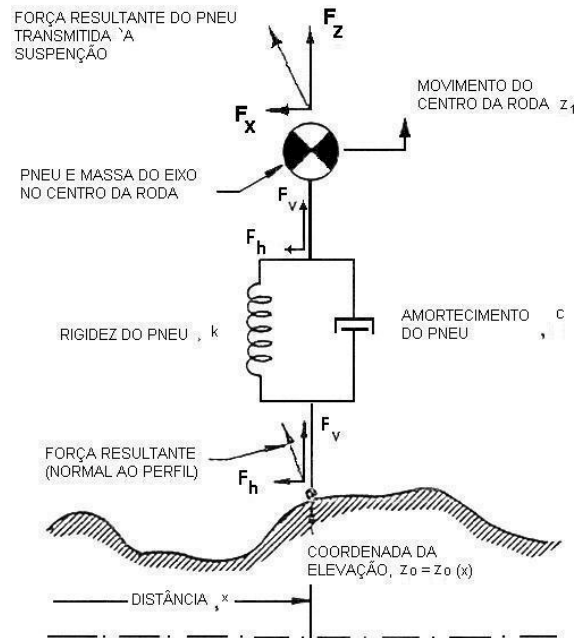


Figura 2.14 – Modelo ponto de contato.

Fonte: Captain et al., 1979

A Fig. 2.14 apresenta o esquema de um modelo de pneu por ponto de contato, onde:

F_v é a força vertical;

z_{st} é a deflexão (m) sofrida em função do carregamento estático W ;

\dot{z}_0 é a velocidade vertical no ponto de contato;

\dot{z}_1 é a velocidade vertical no centro da roda;

z_0 é o deslocamento vertical no ponto de contato;

z_1 é o deslocamento vertical no centro da roda;

k é a rigidez do pneu ;

c é o amortecimento interno do pneu;

F_h é a força horizontal;

F_z é força vertical transmitida ao veículo;

m é a massa não suspensa.

A rigidez da mola é responsável por simular os efeitos de pressão interna e elasticidade da carcaça. O amortecimento é responsável pela dissipação de energia provocada pela deformação da carcaça.

A ação das forças dinâmicas ocorre graças à deflexão da mola e amortecedor que resulta no movimento relativo da roda com a superfície. As forças longitudinais são obtidas considerando que a força no pneu é sempre normal à superfície da pista para veículos trafega em linha reta e a uma velocidade constante. A partir do momento em que o perfil da superfície é inclinado para a horizontal, a força longitudinal é gerada relacionando a força vertical através da tangente do ângulo da superfície no ponto.

Em função da frequência natural da suspensão a que está conectado o pneu e das próprias características do perfil excitado da pista, é indicado prever a possibilidade de perda de contato entre o pneu e a pista.

Para deslocamento vertical (z_0, z_l) e velocidade (\dot{z}_0, \dot{z}_l) , a força total do sistema mola-amortecedor é:

$$F = \int_0^{z_{st} + z_0 - z_l} k \cdot dz + \int_0^{\dot{z}_0 - \dot{z}_l} c \cdot dz \quad (2.8)$$

onde:

z_{st} é a deflexão estática do pneu sobre o peso w ;

\dot{z}_0 é a variação no tempo do perfil de elevação da pista vista pelo ponto de contato devido ao movimento do pneu.

z_{st} e \dot{z}_0 são determinados pelas equações:

$$\int_0^{z_{st}} k \cdot dz = W \quad (2.9)$$

$$\dot{z}_0 = V \left(\frac{dz_0}{dx} \right) \quad (2.10)$$

onde:

V é a velocidade do veículo $\frac{dx}{dt}$;

$\frac{dz_0}{dx}$ é a inclinação da superfície no ponto de contato.

A força vertical F_v será igual a F quando houver contato entre o ponto de contato e a pista ($F > 0$) e F_v será nula quando não houver contato ($F \leq 0$).

$$F_v = F \quad \text{se} \quad F > 0 \quad (2.11)$$

$$F_v = 0 \quad \text{se} \quad F \leq 0 \quad (2.12)$$

A componente da força longitudinal, F_h , é relacionada com a componente vertical F_v pela equação $\frac{F_h}{F_v} = \frac{dz_0}{dx}$. As forças transmitidas do pneu para a suspensão do veículo, F_z e F_x são determinadas pelas seguintes equações:

$$F_z = F_v - m\ddot{z}_I \quad (2.13)$$

$$F_x = F_h \quad (2.14)$$

Modelo de Pneu com Banda de Rodagem Rígida

Similar ao modelo de ponto de contato, porém modificando o ponto de contato pelo rolo de contato de diâmetro igual ao diâmetro do pneu, sua diferença reside no fato do ponto de contato não ocupar apenas uma posição fixa abaixo do centro de gravidade. Este ponto pode ser deslocado para frente e para trás, dependendo da inclinação do perfil da pista.

O centro da roda mostra um movimento que é em geral diferente do perfil gerado pela pista, este fato ocorre devido ao efeito de filtragem da roda em rolamento. Devido à geometria, o modelo é equivalente ao modelo de ponto de contato, operando sobre o perfil modificado pelo centro da roda rígida, quando ele rola sobre o perfil real, causando atenuação das irregularidades da pista.

Apesar da gradual mudança no perfil de elevação, a filtragem o torna insignificante, tanto para o modelo de ponto de contato quanto para o modelo de banda de rolagem rígida que reproduzem resultados equivalentes.

Das equações apresentadas, uma comparação com o modelo de ponto de contato mostra que ele é equivalente ao método de banda de rodagem rígida.

Por determinação, a geometria é dada por:

$$z_0(x) = z_0(x + \bar{x}) + \sqrt{r^2 - \bar{x}^2} \quad (2.15)$$

O critério para determinar \bar{x} é que, no ponto de contato a inclinação da banda de rolagem e da pista necessariamente serão iguais.

$$G = \frac{d}{d\bar{x}} \left[z_0(x + \bar{x}) + \sqrt{r^2 - \bar{x}^2} \right] = 0 \quad (2.16)$$

O critério para roda sem atrito permanece inalterado, a força de contato tende a zero, a medida que perde-se o contato entre o pneu e a roda.

Observa-se na Fig. 2.15 o esquema de um modelo de pneu por banda de rodagem rígida.

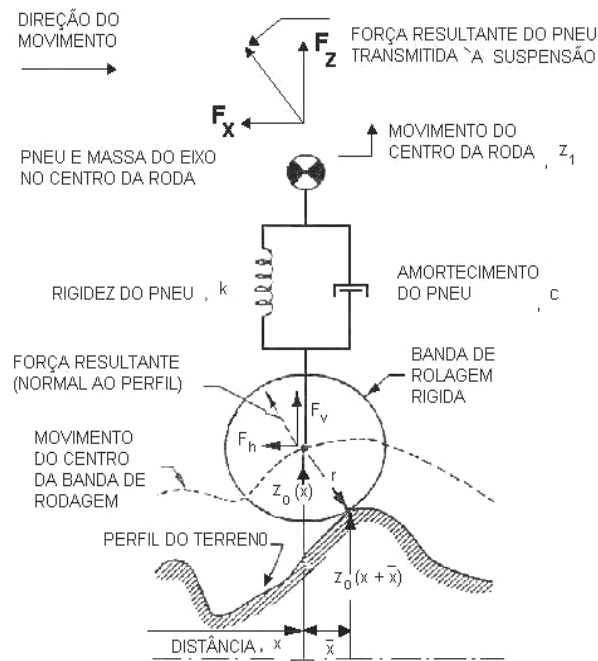


Figura 2.15 – Modelo banda de rodagem rígida.

Fonte: Captain et al., 1979

Modelo Comprimento de Contato Fixo

O modelo de comprimento de contato fixo interage com a pista através de um comprimento ou tamanho constante independente da deflexão do pneu.

A área de comprimento finito proporciona um modelo com a habilidade de envolver pequenas irregularidades através de deformação local dentro do comprimento. O modelo é equivalente aos modelos de ponto de contato, mas a elevação da pista é substituída pela média da elevação da pista tomada através do comprimento do contato.

A equação para o deslocamento vertical e velocidades $z_0(\bar{x})$, z_1 , $\dot{z}_0(\bar{x})$ e \dot{z}_1 a força total e o elemento mola-amortecedor é:

$$F = \int_{-L/2}^{+L/2} \int_0^{z_{st} + z_0(\bar{x}) - z_l} k' dz d\bar{x} + \int_{-L/2}^{+L/2} \int_0^{\dot{z}_0(\bar{x}) - \dot{z}} b' d\dot{z} d\bar{x} \quad (2.17)$$

onde:

z_{st} é a deflexão estática uniforme do comprimento sobre o equilíbrio de carregamento W ;

$z_0(\bar{x})$ é o perfil de elevação com uma função da coordenada do comprimento do contato \bar{x} ;

$\dot{z}_0(\bar{x})$ é a taxa de mudança do perfil de elevação em algumas localidades \bar{x} dentro do comprimento de contato devido ao movimento de avanço.

z_{st} e $\dot{z}_0(\bar{x})$ são dados através das Eq. 2.18 e 2.19, abaixo:

$$\int_0^{z_{st}} k' L dz = W \quad (2.18)$$

$$\dot{z}_0(\bar{x}) = V \frac{dz_0(\bar{x})}{d\bar{x}} \quad (2.19)$$

onde:

V é a velocidade;

$\frac{dz_0(\bar{x})}{d\bar{x}}$ é a inclinação local da estrada no local de comprimento \bar{x} .

$$F_v = F \quad F > 0 \quad (2.20)$$

$$F_v = 0 \quad F \leq 0 \quad (2.21)$$

e

$$\frac{F_h}{F_v} = \frac{dz_0(x)}{dx} \quad (2.22)$$

As Eqs. (2.20), (2.21) e (2.22) determinam as forças de contato F_v e F_h para o comprimento fixo de contato do modelo de pneu.

A Fig. 2.16 apresenta o esquema de um modelo de pneu por comprimento de contato fixo.

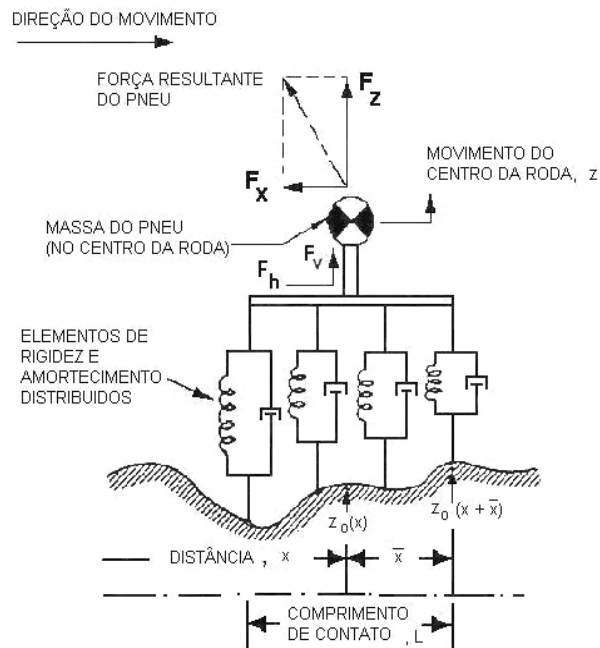


Figura 2.16 – Modelo de comprimento de contato fixo.

Fonte: Captain *et al.*, 1979

Modelo Comprimento de Contato Adaptativo

O modelo adaptativo de pneu consiste de uma banda de rodagem flexível inflada pela pressão interna e ligada ao centro da roda por um conjunto mola-amortecedor distribuído racionalmente em função de um passo angular que simula a carcaça e a banda de rodagem.

A trajetória da roda sobre as irregularidades da pista deforma a banda de rodagem proporcionando a elevação do pneumático, carcaça e componentes da força do pneu.

O somatório de forças remete à resultante do sistema mola-amortecedor no comprimento de contato.

Lessem (1968) citado por Captain *et al.* (1979) desenvolveu um método que determina o sistema mola-amortecedor e as forças na carcaça separadamente sem supor que sua taxa é independente da deformação do pneu.

A resultante de forças não é vertical devido à existência de um comprimento de contato inclinado, e seu cálculo de componente permite determinar a força longitudinal e vertical.

Esse modelo tem a característica de envolver as pequenas irregularidades através da deformação local com o comprimento de contato. A principal característica desse

modelo é que o tamanho do comprimento de contato e a orientação relativa ao deslocamento do centro da roda dependem da deflexão do pneu e do perfil da pista.

O modelo de força-deformação possui características representadas:

- Pela constante de pressão interna atuante sobre a área do comprimento de contato;
- Pela distribuição radial não-linear da rigidez k e amortecimento c para simular a contribuição do carregamento na carcaça.

A Fig. 2.17 apresenta o esquema de um modelo de pneu por contato adaptativo.

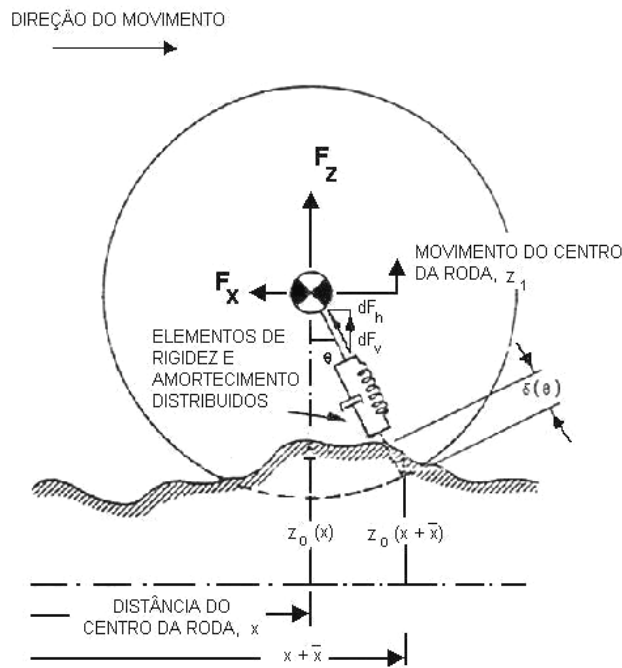


Figura 2.17 – Modelo comprimento contato adaptativo.

Fonte: Captain et al., 1979

As componentes dF_h e dF_v devido à deflexão do elemento da banda de rolagem orientada pelo ângulo θ da componente vertical são dadas em função do deslocamento vertical $z_0(\bar{x})$, z_1 , suas derivadas $\dot{z}_0(\bar{x})$, \dot{z}_1 e por:

$$dF_v(\theta) = dF_c \cdot \cos(\theta) + \frac{Pi \cdot B \cdot r \cdot d\theta}{\sqrt{1 + \left[\frac{dz_0(\bar{x})}{d\bar{x}} \right]^2}} \quad \text{se } dF_c > 0 \quad (2.23)$$

$$dF_v(\theta) = 0 \quad \text{se } dF_c \leq 0$$

$$dF_h(\theta) = dF_c \cdot \sin(\theta) + \frac{Pi \cdot B \cdot [dz_0(\bar{x})/d\bar{x}]r \cdot d\theta}{\sqrt{1 + \left[\frac{dz_0(\bar{x})}{d\bar{x}}\right]^2}} \quad \text{se } dF_c > 0 \quad (2.24)$$

$$dF_c(\theta) = 0 \quad \text{se } dF_c \leq 0$$

onde:

$$dF_c = \left[\int_0^{\delta(\theta)} k'' dz + \int_0^{\dot{\delta}(\theta)} c'' d\dot{z} \right] d\theta \quad (2.25)$$

e

$$\bar{x} = r \cdot \sin(\theta) \quad (2.26)$$

Nas Eqs. (2.23) e (2.24), o primeiro termo representa a contribuição da força na carcaça e o segundo da força devido a pressão interna.

onde:

B é o comprimento efetivo da área de contato;

$\frac{dz_0(\bar{x})}{d(\dot{x})}$ é a inclinação local do perfil da pista no ponto de contato;

$\delta(\theta)$ é a deflexão da banda de rodagem na direção radial em função do ângulo θ com a vertical;

$\dot{\delta}(\theta)$ é a velocidade da banda de rodagem na direção radial ao movimento do pneu.

A deflexão radial $\delta(\theta)$ é a soma das deflexões $\delta_{st}(\theta)$ devido ao peso do veículo da deflexão em função das irregularidades $z_0(\dot{x})$ devido ao movimento no centro da roda z_I .

$$\delta(\theta) = \delta_{st}(\theta) + [z_0(x + \bar{x}) - z_I] / \cos(\theta) \quad (2.27)$$

e

$$\dot{\delta}(\theta) = \left\{ V \left[\frac{dz_0(x + \bar{x})}{d\bar{x}} \right] - \dot{z}_I \right\} / \cos(\theta) \quad (2.28)$$

A deflexão inicial $\delta_{st}(\theta)$ na posição θ sobre o peso do veículo é encontrada pelas seguintes equações:

$$\int_{-\theta_0}^{+\theta_0} \int_b^{\delta_{st}(\theta)} \cos(\theta) k'' dz d\theta + P_i \cdot A = W \quad (2.29)$$

$$\theta_0 = \cos^{-1} \left(\frac{r - z_{st}}{r} \right) \quad (2.30)$$

$$\delta_{st}(\theta) = \frac{z_{st} - r(1 - \cos \theta)}{\cos \theta} \quad (2.31)$$

onde:

z_{st} é o equilíbrio da deflexão do pneu no centro da área de contato ($\theta = 0$);

A é a área de contato efetiva no equilíbrio.

A largura efetiva do pneu B é igual à área efetiva dividida pelo comprimento da área de contato.

$$B = \frac{A}{2 \cdot r \cdot \sin(\theta_0)} \quad (2.32)$$

A força vertical F_v e horizontal F_h podem ser obtidas pelas inclinações das Eqs. (2.33) e (2.34) sobre a metade inferior do pneu, onde o contato é possível.

$$F_v = \int_{\theta = -\pi/2}^{\theta = +\pi/2} dF_v(\theta) \quad (2.33)$$

$$F_h = \int_{\theta = -\pi/2}^{\theta = +\pi/2} dF_h(\theta) \quad (2.34)$$

2.3 Suspensão

No sistema de suspensão, a roda é conectada através de várias barras (braços oscilantes). Estes permitem um movimento vertical da roda em relação à carroceria. Estas barras da suspensão necessitam de buchas que são colocadas entre as conexões para reduzir o choque e o atrito entre as mesmas.

O desenvolvimento de uma suspensão composta de lâminas de aço se deve à facilidade de produção, assim como, os meios tecnológicos disponíveis na época. Na Fig. 2.18 são apresentados modelos de feixes de molas utilizados.

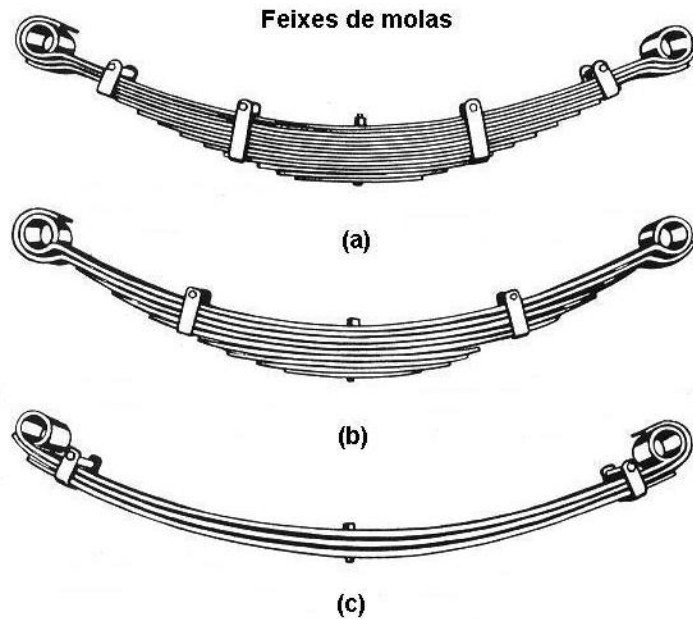


Figura 2.18 – Modelos de feixes de molas utilizados.

Fonte: Captain et al., 1979

Hoje já se sabe que ela apresenta uma produção simples, barata, possui rigidez vertical controlada, rigidez lateral e longitudinal elevada, além de grande capacidade de carga. Em contrapartida alguns pontos negativos podem ser considerados pela instabilidade lateral quando a mola fica macia em virtude do aumento do comprimento, peso elevado, sensibilidade as vibrações no deslocamento devido aos movimentos acentuados das rodas.

Até meados de 1960, o modelo de suspensão traseira por feixes de mola era considerado como padrão para produção em larga escala. Na época, e ainda hoje, este continua sendo o modelo mais comum encontrado em veículos comerciais como vans e caminhões.

2.3.1 Sistema McPherson

Este sistema foi criado por Earle S. McPherson, um engenheiro da Ford Motor em 1956 e rapidamente se tornou o mais utilizado pela indústria automobilística para aplicação em veículos com tração dianteira.



Figura 2.19 – Sistema de suspensão do conceito McPherson.

Fonte: Autozest.com, 2002

A estrutura do sistema McPherson consiste em um membro telescópico incorporando ao amortecedor com a roda rigidamente fixada na sua região inferior, permitindo que a estrutura mantenha a roda com o câmbio adequado.

A parte superior da suspensão é fixa no chassi e a parte inferior é posicionada pelas articulações que suportam as forças laterais e longitudinais.

A partir desse conceito, surgiram várias alternativas de fixação baseadas em um suporte de geometria triangular conectado ao cubo da roda por meio de um pivô.

LEGENDA:

- 1 – Manga de eixo
- 2 – Cilindro do amortecedor
- 3 – Bandeja de apoio inferior
- 4 – Tampão elástico
- 5 – Rolamento da suspensão
- 6 – Bandeja de apoio do rolamento
- 7 – Suporte do amortecedor
- 8 – Plaqueta
- 9 – Fim de curso
- 10 – Junta homocinética e coifa
- 11 – Cubo da roda
- 12 – Junta esférica
- 13 – Balança
- 14 – Barra estabilizadora

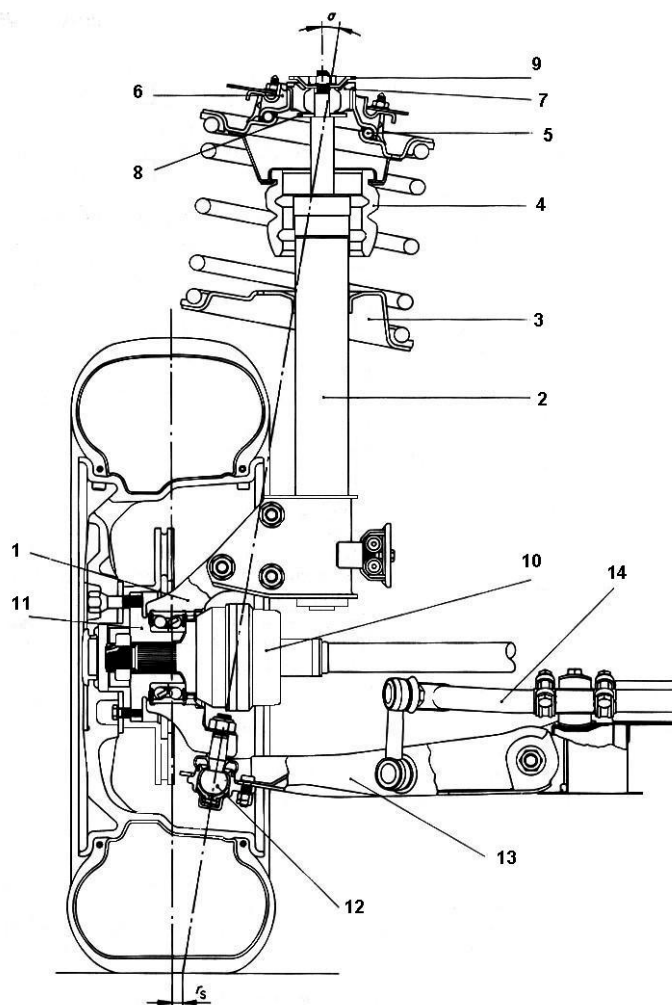


Figura 2.20 – Sistema McPherson dianteiro – veículo Lancia.

Fonte: Reimpell e Stoll, 1996

A opção pelo braço triangular garante um maior controle da cinemática da suspensão, proporcionando ao conjunto uma maior estabilidade em relação ao modelo original.

O sistema possui um tubo onde é colocado um amortecedor telescópico que também é responsável pela sustentação estrutural do sistema.

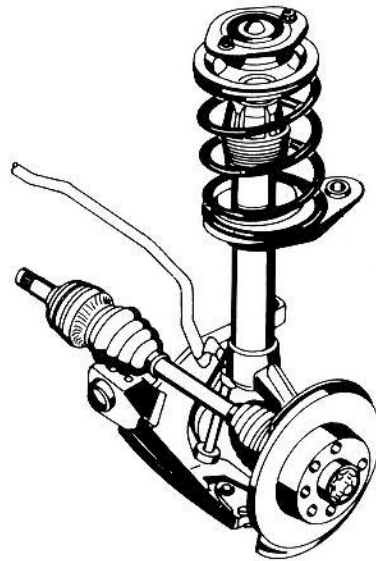


Figura 2.21 – Detalhe do Sistema McPherson dianteiro.

Fonte : Reimpell e Stoll, 1996

A parte inferior do tubo é rigidamente fixa à estrutura do cubo da roda, enquanto que a parte intermediária é soldada ao suporte inferior da mola. A extremidade superior da haste do amortecedor é rosqueada com um suporte que atua como apoio superior da mola e fixação da parte superior do sistema à carroceria do veículo. Para proporcionar a rotação do sistema o apoio superior é composto de rolamentos axial e de contato angular. Esse suporte além de transmitir os esforços entre a suspensão e o veículo, é responsável pela filtragem de parte da vibração proveniente da suspensão dianteira. Essa característica da absorção é condicionada à adição de camadas de borracha que, como descrito anteriormente, possuem capacidade visco-elástica, absorvendo o movimento da haste do amortecedor.

As vantagens do Sistema McPherson podem ser enumeradas tais como:

- A menor distância entre os pontos de fixação possibilita mais espaço para a suspensão e valores menores de reação às forças laterais no esterçamento.
- As partes que possibilitam o controle da suspensão e da roda podem ser combinadas em um conjunto que inclui mola, barra estabilizadora, direção da articulação e amortecedor.
- O uso da direção articulada do sistema McPherson proporciona esforços menores, menor distância entre pontos G e N (Fig.2.22), maior curso da mola,

permitindo um maior espaço para o compartimento do motor e tornando mais fácil o ajuste de motores transversais.

- Número reduzido de peças
- Bom desempenho.
- Boa relação custo benefício.
- Adequada para uso em estrutura monobloco.
- A possibilidade de inclinação da mola de acordo com as posições de ancoragem da suspensão.

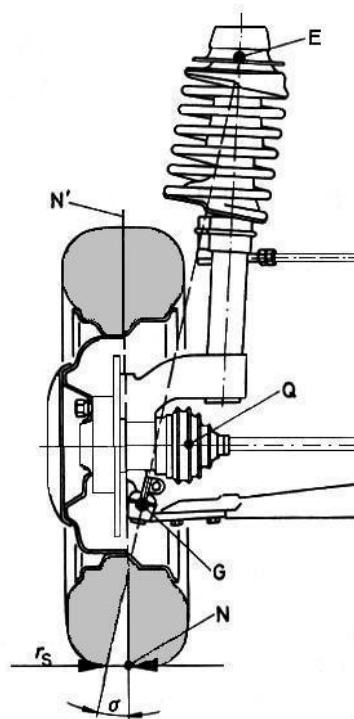


Figura 2.22 – Detalhamento dos esforços do Sistema McPherson dianteiro.

Fonte: Reimpell e Stoll, 1996

O Sistema McPherson possui algumas desvantagens, entre elas:

- Permite a alteração de cambagem das rodas (mínima) devido a movimentos verticais de compressão e distensão do sistema;
- Possibilita uma alteração na bitola (mínima) decorrente da movimentação vertical do sistema, possibilitando decréscimos na estabilidade direcional do veículo;

- É de difícil isolamento contra ruídos da pista;
- É mais sensível a pneus desbalanceados e desvios radiais.
- A elevada altura da estrutura telescópica dificulta a obtenção de veículo com a frente afilada.

2.3.2 Suspensão Traseira de Braços Combinados e Travessa

Na década de 1970, o Golf VW foi o primeiro automóvel a utilizar esta suspensão sendo seguido por diversas indústrias automotivas devido à introdução do conceito de veículos de tração dianteira. A vantagem deste sistema sobre os demais é que este desempenha várias atribuições em relação a sistemas mais complexos.

A suspensão é composta por braços oscilantes que suportam os cubos das rodas em uma extremidade, enquanto que na outra extremidade são pivotados. Estes braços são interligados entre si por uma travessa metálica e transferem uma relação de movimentos entre os braços direito e esquerdo da suspensão (Fig. 2.23).

Este sistema é largamente empregado devido à sua facilidade de instalação, manutenção e pelo número reduzido de peças que compõem o conjunto.

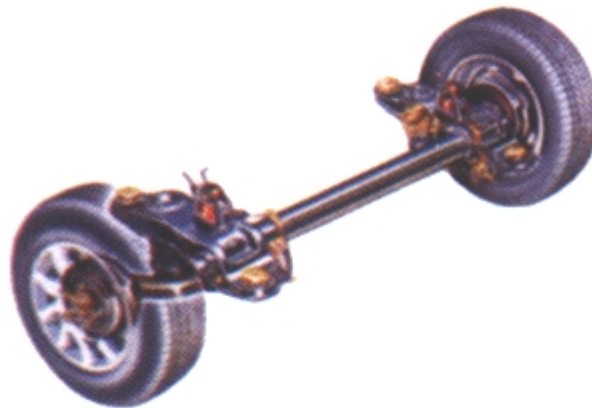


Figura 2.23 – Detalhe da suspensão traseira.

Fonte: Autozest.com, 2002

Reimpell e Stoll (1996) e Rosa Neto (2000) apontam entre as diversas vantagens a existência de apenas dois pontos de fixação que afetam a flexibilidade do sistema, a

diminuição da massa não suspensa traseira e o comportamento da travessa que funciona não só como elemento de ligação do conjunto com a estrutura, mas também como barra estabilizadora.

Mas apesar de todas essas vantagens, a suspensão traseira de braços combinados apresenta problemas associados às tensões cisalhantes e de torção que são condicionadas à travessa em seus reforços e juntas soldadas.

De acordo com Dixon (1996), Reinpell e Stoll (1996) e Rosa Neto (2000), nas curvas as forças laterais atuantes transversalmente são de grau mais elevado, provocando sobre-esterço devido a flexibilidade da bucha de borracha usada nos pontos de fixação do eixo da carroceria. Este problema é contornado usando o rolamento da carroceria para provocar uma tendência sub-esterçante no conjunto.

Para Satchell (1981) e Rosa Neto (2000) a principal variável para análise do comportamento da suspensão é o posicionamento da travessa em relação ao eixo de pivotamento do conjunto. Observa-se na Fig. 2.24 várias possibilidades de ajuste que podem variar a característica do sistema.

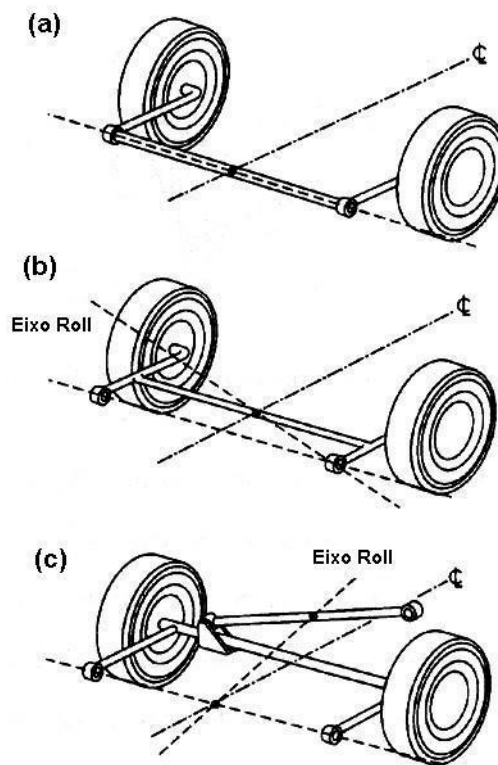


Figura 2.24 – Configurações e posicionamento de travessa.

Fonte: Rosa Neto, 2000

Se for empregada a travessa alinhada ao eixo de pivotamento da suspensão, como representado na Fig. 2.24(a), ela atuará como barra estabilizadora convencional e o sistema trabalhará como um sistema de suspensão por braços paralelos independentes.

Na Fig. 2.24(b) a travessa é posicionada na metade do comprimento do braço da suspensão, configuração utilizada pelo veículo de testes. Neste caso a travessa passa a sofrer esforços combinados de flexão e torção devido ao deslocamento vertical das buchas de fixação.

Devido ao posicionamento da travessa alinhada ao centro da roda, conforme apresentado na Fig. 2.24(c), ocorre a incidência de esforços laterais que o sistema de suspensão original não é capaz de neutralizar, observa-se então a necessidade de um dispositivo que atue absorvendo estes esforços laterais.

Para o perfeito funcionamento deste sistema de suspensão, observa-se uma relação entre o ângulo de inclinação da carroceria ϕ e o ângulo de torção da travessa, definida pela Eq.(2.35):

$$\frac{\phi}{\theta} = \frac{d_a}{d_c} + \frac{d_b}{d_t} \quad (2.35)$$

Rosa Neto (2000) caracteriza a posição da travessa θ adquirindo um valor mínimo quando a travessa se posiciona na mesma paralela as buchas ($d_a = 0$ e $d_b = \text{máx.}$) relacionando d_t como bitola e d_c como distância entre as buchas.

A relação de distância para o veículo em teste é indicada pela Tab. 2.3.

Tabela 2.3 – Características geométricas do eixo traseiro do veículo simulado.

Bitola traseira do veículo	d_t	1378 mm
Distância entre as buchas de fixação	d_c	1097 mm
Distância entre as buchas e o centro da travessa	d_a	207 mm
Distância entre o centro das rodas e o centro da travessa	d_b	197 mm

Fonte: Rosa Neto, 2000

2.4 Amortecedores

Segundo Dixon (1996), os amortecedores são conhecidos como absorvedores de choque. A sua função é dissipar a energia devido ao movimento vertical do corpo ou da roda, originados de um movimento controlado ou de rugosidade da pista. Associadas com as massas e molas, o conjunto de amortecedores precisa, através das rodas do veículo, absorver as vibrações do sistema, prevenindo-o contra aumentos repentinos e diminuindo a influência de ressonâncias indesejáveis. Os amortecedores podem ser classificados como de fricção (elementos sólidos) ou hidráulicos (elementos fluidos). O modelo de fricção é constituído por discos deslocáveis operados por dois braços, *wrapped belt*. Os modelos hidráulicos são braços de alavanca e usam acionamento para operar uma palheta, ou conjunto de pistões. O modelo telescópico é mais usado atualmente e funciona com duplo cilindro ou em cilindro simples pressurizado a gás (nitrogênio). A sua história teve início em 1900 e prosseguiu seu desenvolvimento até 1934 quando Monroe começou a fabricar os modelos telescópicos. Mas foi em 1947 que De Carbon inventou o modelo telescópico simples a gás, fabricado a partir de 1950.

Os amortecedores telescópicos de cilindro duplo não são livres de problemas. Devem ser montados com o seu reservatório na suspensão e são sujeitos a sérias condições e impactos. Para os amortecedores, o maior problema é a perda de pressão que pode ocorrer sobre um período de 20 meses ou mais.

Para os amortecedores hidráulicos, suas principais vantagens são proporcionadas pela força de amortecimento que pode ser projetada em função da velocidade e direção de deslocamento das hastes.

Este controle é proporcionado pelo escoamento através do sistema de válvulas instalado no pistão e na parte inferior do amortecedor.

LEGENDA:

- 1 – Tubo externo
- 2 – Bandeja inferior
- 3 – Alça
- 4 – Suporte do amortecedor
- 5 – Terminal de ligação
- 6 – Borda
- 7 – Disco de parada
- 8 – Escatel
- 9 – Vedação
- 10 – Guia da haste de aço sinterizado
- 11 – Bucha
- 12 – Haste do pistão
- 13 – Parada de retrocesso
- 14 – Tubo cilíndrico
- 15 – Anel de baixa fricção

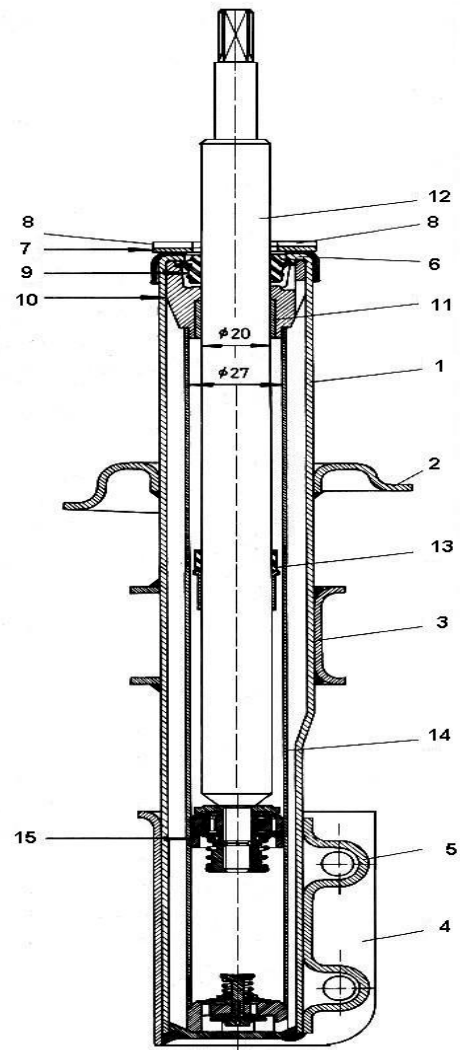


Figura 2.25 – Esquema do amortecedor do FIAT Panda fabricado pela Monroe.

Fonte: Reimpell e Stoll, 1996

Para se almejar uma característica de amortecimento desejável, relação entre força e velocidade, é necessário o uso de um sistema de válvula. Na prática ocorrem escoamentos entre os dois lados do pistão, entre a câmara principal e câmara de equalização. Parte do escoamento é intencional e induzido por pequenos furos passantes posicionados ao lado do pistão. O fluxo referente ao deslocamento em baixa velocidade pelos canais em forma turbulenta resulta em uma variação do amortecimento com o quadrado da velocidade. Quando o fluido passa através do orifício ou tubo, duas características para a queda de pressão podem ocorrer:

- O arrasto viscoso na parede do tubo, que para a turbulência do fluxo é grosseiramente proporcional ao quadrado da taxa de fluxo.

- A dissipação da energia cinética na entrada e na saída, que depende da densidade em vez da viscosidade, sendo portanto proporcional à taxa de fluxo ao quadrado para um dado orifício.

Para Dixon (1996) outra característica é que a força gerada na compressão é geralmente um terço da força gerada na distensão. Maior força na distensão proporciona uma maior proteção das rodas contra quedas em buracos.

Os amortecedores telescópicos de cilindro duplo (Fig. 2.26), diferentemente do modelo desenvolvido por Monroe (Fig. 2.25) possuem uma câmara principal (A), uma câmara de equalização (C), pistão (1), haste de acionamento (6), válvula inferior (4), guia para a haste (8) e selo (9).

LEGENDA:

- 1 – Válvula Superior
- 2 – Câmara “A”
- 3 – Câmara “C”
- 4 – Válvula Inferior
- 5 – Anel de Segmento
- 6 – Haste de Acionamento
- 7 – Guarda-pó
- 8 – Guia da Haste
- 9 - Selo

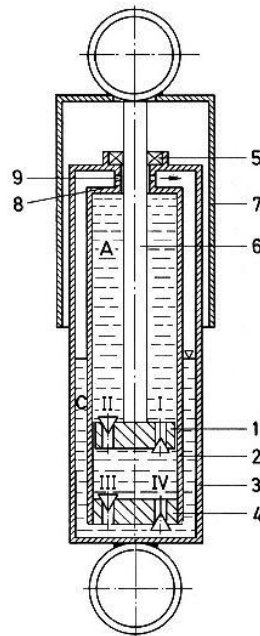


Figura 2.26 – Desenho de um amortecedor de tubo duplo.

Fonte: Reimpell e Stoll, 1996

O reservatório C é ocupado por óleo até a metade de seu volume e o restante é preenchido pelo gás sobre pressão de 0,4 a 0,5 MPa. Em funcionamento o gás cede espaço à expansão térmica do óleo e, segundo Reimpell e Stoll (1996) citado por Rosa Neto (2000), temperaturas de até 200°C podem ser atingidas, além de acomodar o volume do óleo deslocado pela haste quando esta se move para o interior do amortecedor. O ângulo de instalação do amortecedor não deve exceder a 45° na posição de compressão evitando assim a sucção pelo pistão.

À medida que a roda se desloca, a distância entre as extremidades do amortecedor diminui movimentando o pistão para baixo exercendo uma compressão, fazendo com que o óleo que estava na parte inferior da câmara principal se desloque para a parte superior através da válvula II (Fig. 2.26).

Quando o amortecedor adquire esta configuração ele produz uma força de amortecimento transferindo o volume do óleo deslocado pela haste através da válvula IV para a câmara de equalização (Fig. 2.26).

Em análise ao movimento inverso, ocorre um aumento da distância entre as extremidades do amortecedor, a pressão na região superior da câmara principal aumenta provocando o deslocamento do fluido para a parte inferior da câmara através da válvula I. Através da distensão da haste do pistão, o volume da câmara principal aumenta e o óleo é então sugado da câmara de equalização pela válvula III (Fig. 2.26). Devido ao aumento na pressão na parte superior do amortecedor, ocorre um aumento na pressão sobre a selagem da guia da haste, para a região superior da câmara. O volume do óleo deslocado pela haste do pistão flui pela válvula IV para a câmara de equalização, onde os furos de retorno possibilitam a recuperação do óleo que se deposita entre a haste e sua guia (Fig. 2.26).

Segundo Dixon (1996), a Fig. 2.27 apresenta a variação da velocidade para um dado orifício. A adição de um orifício maior para B em paralelo origina a linha $A + B$. Aplicando a B uma válvula que abre progressivamente, essa característica de transição é obtida.

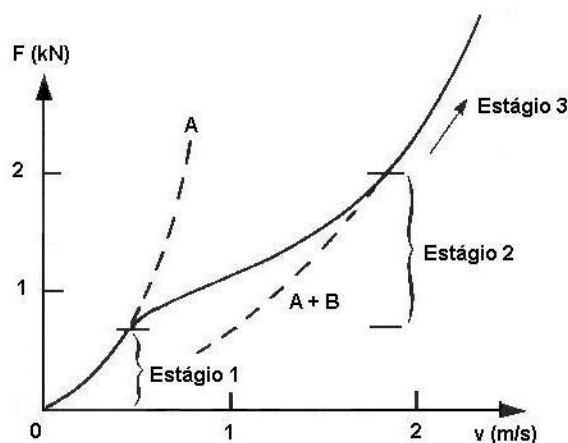


Figura 2.27 – Características da curva de amortecimento progressiva.

Fonte: Dixon, 1996.

A partir de uma combinação controlada de diâmetros A e B em quantidades progressivas, é possível obter curvas de características próximas a linearidade ou da maneira desejada.

Há referencias para os estágios:

- Estágio 1 é a válvula fechada.
- Estágio 2 a válvula é parcialmente aberta.
- Estágio 3 a válvula é totalmente aberta.

Os amortecedores são caracterizados pelos diagramas de amortecimento que relacionam força de amortecimento com o deslocamento da haste, assim como a curva de amortecimento que relaciona força de amortecimento com a velocidade da haste.

Segundo Reimpell e Stoll (1996), pode-se caracterizar três configurações que relacionam o comportamento do amortecedor em funcionamento. A primeira curva de amortecimento apresentada na Fig. 2.28-(a), denominada progressiva, é associada à Eq. (2.36).

Na Fig. 2.28-(b) a curva de amortecimento, denominada linear, é associada à Eq. (2.37).

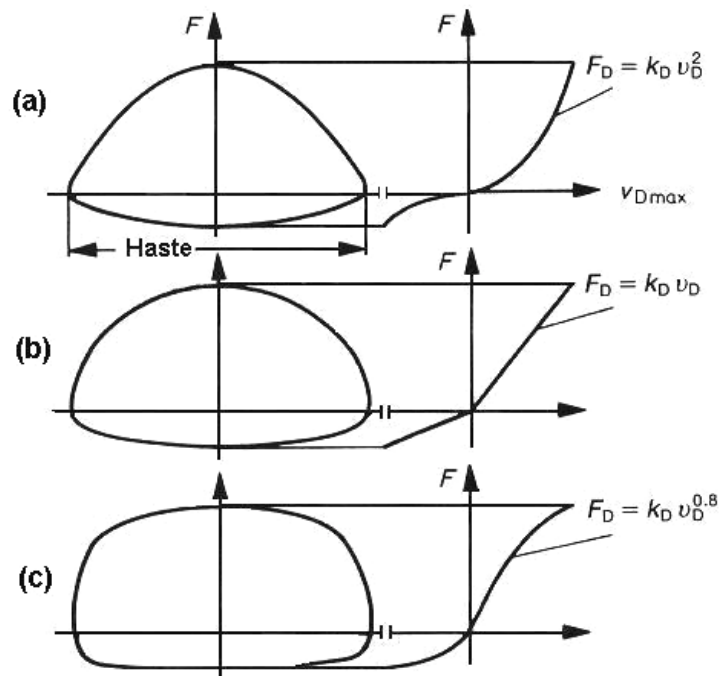


Figura 2.28 – Características da curva de amortecimento decessiva.

Fonte: Reimpell e Stoll, 1996

onde:

F_D é a força de amortecimento;

k_D é o amortecimento;

v_D é a velocidade do pistão.

Na Fig. 2.28-(c) a curva é chamada decessiva, pois sua inclinação diminui na medida em que a velocidade aumenta podendo ser representada pela Eq. (2.38).

$$F_D = k_D \cdot v_D^2 \quad (2.36)$$

$$F_D = k_D \cdot v_D \quad (2.37)$$

$$F_D = k_D \cdot v_D^{0,8} \quad (2.38)$$

2.5 Molas

A mola é um componente projetado para ter uma rigidez relativamente baixa se comparada à rigidez normal de outros componentes, tornado possível exercer uma força que varia de uma maneira controlada com o comprimento do componente.

As molas podem ser classificadas de acordo com o material empregado em sua fabricação e a maneira com que suas forças e tensões ocorrem.

Dixon (1996) considera que o primeiro passo é a escolha do material que a mola seria constituída isto é, sólido, líquido ou gás. Materiais gasosos, como nitrogênio, não necessitam de muita massa de gás para armazenar energia, são usadas as pressões de 2,5 MPa. Este sistema foi desenvolvido por Firestone Rubber Co e continua sendo empregado pela Citroën em modelos de carros de luxo.

Para os líquidos, o óleo é um material relativamente incompressível e é empregado em sistemas aero-derivativos; a água e a mistura água-álcool possuem baixa compressibilidade, portanto, não são muito usados em sistemas automotivos. Na linha dos sólidos, a borracha é empregada como isolante entre as partes da suspensão inibindo o atrito e amortecendo os choques entre os elementos.

Nos metais, a rigidez em compressão e a tensão são muito grandes, portanto esforços de momento e torção sempre estão presentes em sistemas de mola. As molas helicoidais são vistas como uma barra de forma helicoidal e sua grande utilização em automóveis se

deve a uma montagem fácil e pela forma dimensional que ocupa pouco espaço na carroceria monobloco.

A deflexão da mola é referente a um carregamento em compressão ou tração por forças aplicadas pela suspensão. Para este tipo de carregamento, a deflexão em molas helicoidais cilíndricas retas é dada pela Eq. (2.40):

$$x = \frac{8F_m D^3 N_v}{Gd^4} \quad (2.39)$$

onde:

F_m é a magnitude da força (N);

D é o diâmetro da hélice entre centros (mm);

N_v é o número de voltas;

G é o módulo cisalhamento (N/m²);

d é o diâmetro do arame (mm).

Para a rigidez da mola pode-se usar a fórmula da Eq. (2.40) mas, seu comportamento pode ser alterado devido a variação no passo entre espiras, o que provoca na mola um aumento na rigidez:

$$k_m = \frac{Gd^4}{8D^3 N_e} \quad (2.40)$$

onde:

k_m é a rigidez da mola (N/m);

D é diâmetro médio da espira (mm);

N_e é o número de espiras ativas;

G é o Módulo de Cisalhamento do aço (N/m²);

d é o diâmetro do arame (mm).

A rigidez da mola depende das características de *handling* e conforto que se deseja obter. Se com uma mola mais flexível obtêm-se uma frequência natural mais baixa e uma melhor característica de conforto, em compensação, surgem também comportamentos indesejáveis de *pitch*, e *roll*.

No veículo utilizado neste trabalho as molas dianteiras e traseiras são do tipo helicoidal. As dianteiras com flexibilidade constante, e as traseiras com flexibilidade variável ao longo do deslocamento.

2.6 Barras Estabilizadoras

A função da barra estabilizadora é aumentar a rigidez em *roll* fazendo com que o veículo adquira estabilidade no percurso.

A rigidez vertical da suspensão não apresenta alteração quando a oscilação das rodas é simétrica Fig. 2.29(A), mas se o sistema apresenta uma oscilação assimétrica do conjunto das rodas a sua rigidez é aumentada Fig. 2.29(B).

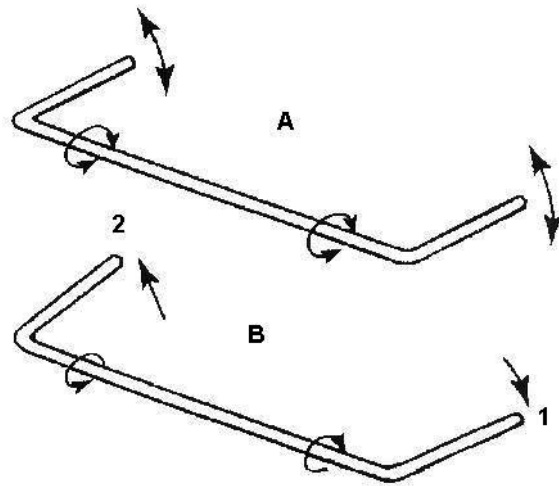


Figura 2.29 – Deslocamentos da barra estabilizadora.

Fonte: Rosa Neto, 2000

Estas barras de aço cilíndricas, cujas extremidades são dobradas, formam os braços de acionamento que torcionam as barras intermediárias. As conexões são isoladas com borrachas que reduzem de 15 a 30% a rigidez em *roll* originada pela barra, devido às flexões no isolamento. A idéia de se usar a barra estabilizadora dianteira é produzir uma tendência ao sub-esterçamento visando melhorar o comportamento do veículo em mudança de trajetória.

Uma das desvantagens do uso de barras estabilizadoras é o aumento do atrito no sistema possibilitando o travamento do sistema através do uso de coxins de fixação, diminuindo as características de conforto do veículo. Um sistema de suspensão mais rígido possibilita oscilações mais acentuadas do motor sobre os apoios, que pode ocasionar vibrações indesejáveis na parte dianteira do veículo. Outro fator degradante ocorre

quando o veículo trafega por pistas ruins e com muitos buracos e ondulações, produzindo deslocamentos desnecessários da barra estabilizadora em conjunto com as molas da suspensão enriquecendo o conjunto e não filtrando as irregularidades.

2.7 Modelos de Suspensões

Desenvolvimento de modelos numéricos Modelos de suspensões para veículos continua sendo responsável por várias pesquisas em desenvolvimento. Estas pesquisas procuram adequar os modelos numéricos aos parâmetros experimentais, procurando tornar cada vez mais próximos os modelos, a fim de se dispor de modelos confiáveis e de baixo custo computacional.

Shabana (1998) dispõe de métodos para análise não linear de sistemas dinâmicos que utilizam métodos de substituição do sistema estudado por um modelo composto por múltiplos corpos interligados que conservam suas propriedades físicas, proporcionando resultados precisos na análise de sistemas.

Cheng (1998) utilizou este método para desenvolver um modelo de suspensão McPherson dianteiro de um veículo Audi usando corpos rígidos e flexíveis.

Em trabalhos publicados, Jolly (1982), citado por Rosa Neto (2000), ressalta diversos modelos de suspensão baseados no sistema massa, mola e amortecedor, onde apresenta um modelo linear usado por De Carbon, Fig. 2.30. Este trabalho serviu de plataforma para o desenvolvimento de modelos mais complexos, considerando efeitos como a fricção e variação da rigidez nos pneumáticos em função da frequência de excitação. Observa-se que o modelo De Carbon apresenta consideráveis características de resposta se comparado com modelos mais complexos.

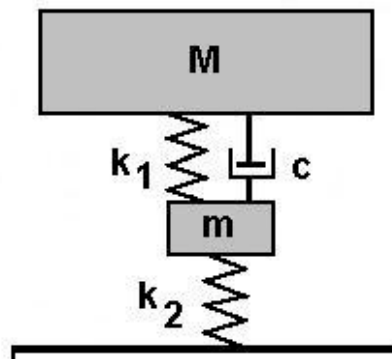


Figura 2.30 – Modelo De Carbon.

Fonte: Rosa Neto, 2000

Stensson (1994) em trabalho mais recente, desenvolveu um modelo complexo de suspensão, Fig. 2.31, onde foram envolvidas as não linearidades devido aos efeitos geométricos do mecanismo de suspensão: a limitação de amplitude devido ao fim de curso elástico progressivo, ponto de fixação elástico da coluna McPherson e as características assimétricas do amortecedor.

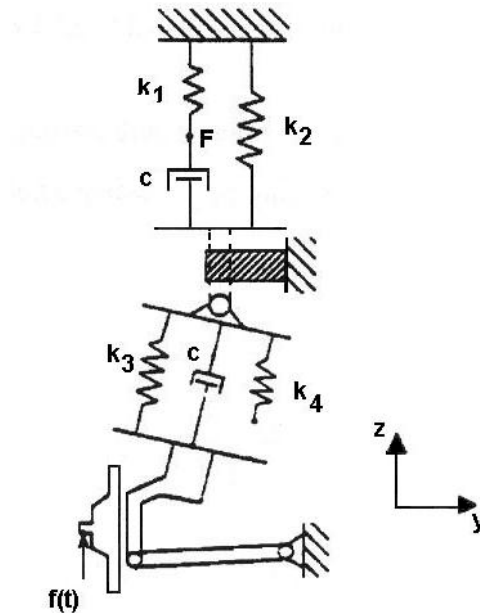


Figura 2.31 – Modelo de Stensson.

Fonte: Rosa Neto, 2000

Neste trabalho, o modelo de Stensson foi simplificado, seguindo as seguintes premissas:

- Se a mudança na cambagem oriunda do deslocamento vertical da massa não suspensa é desprezível, pode-se supor que a energia cinética a rotação pode ser considerada nula;
- Se o ângulo entre a mola e o amortecedor for considerado pequeno, este poderá ser desprezado;
- Se o deslocamento em Y do ponto de conexão entre o braço da suspensão e o suporte do cubo da roda for pequeno, este poderá ser desconsiderado;
- Se o ângulo do amortecedor em comparação à vertical for pequeno, este pode ser desconsiderado.

Portanto a única condição aceitável de deslocamento para a massa não suspensa é o deslocamento vertical (eixo Z). O modelo continua sendo linear em função do amortecimento assimétrico e do fim de curso com flexibilidade progressiva.

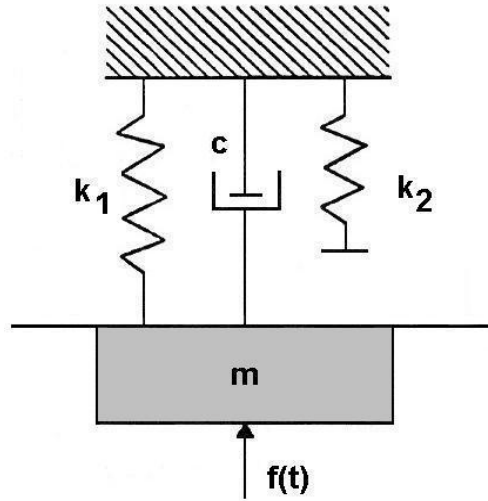


Figura 2.32 – Modelo de Stensson simplificado.

Fonte: Rosa Neto, 2000

O resultado do modelo simplificado de Stensson pode ser visualizado na Fig. 2.32, e se forem comparados os deslocamentos verticais do cubo da roda dos dois modelos com uma fonte de excitação randômica, pode-se observar uma relação bem próxima entre eles. A Fig. 2.33 evidencia uma equiparação de resultados, possibilitando confiança em relação ao modelo simplificado.

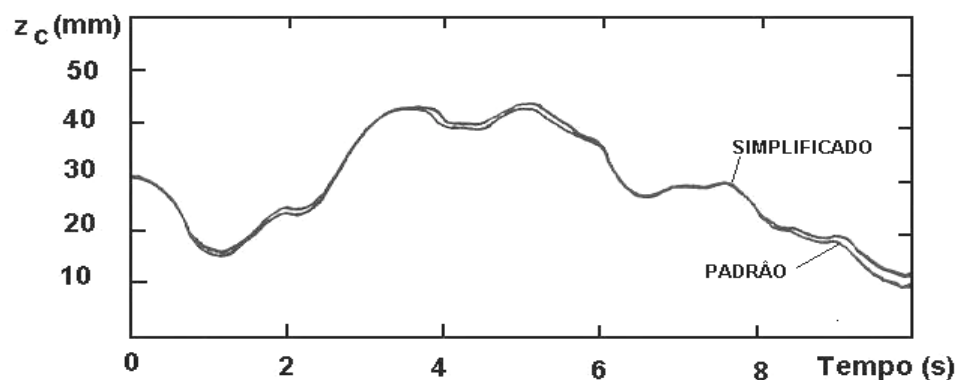


Figura 2.33 – Resultado da simulação comparativa dos modelos de Stensson.

Fonte: Rosa Neto, 2000

2.8 Bancos e Ocupantes

A análise de vibrações sobre o conforto e a saúde do homem é, segundo Griffin (1996), citado por Rosa Neto (2000), na maior parte relacionada à distribuição da vibração pelo corpo humano.

Os elementos responsáveis pelo contato do veículo com os ocupantes são os bancos. Estes apresentam um revestimento flexível que é responsável pela distribuição da pressão do corpo com o banco. O revestimento utilizado é uma espuma, que se comporta como uma mola e ressona a uma frequência específica. Após a ressonância, a natureza viscosa da espuma estabiliza e a transmissibilidade diminui para valores menores que um, proporcionando uma filtragem da fonte de excitação.

A função principal do banco é promover o apoio adequado às regiões lombar, torácica, coluna cervical, cabeça, bacia e parte superior das pernas.

Quanto maiores os picos de ressonância maior será a capacidade de filtragem para as frequências localizadas em torno da ressonância.

Griffin (1996), citado por Rosa Neto (2000), propõe uma série de modelos representativos da biodinâmica do corpo humano. Deste modo, propõe um modelo simplificado composto de duas massas: uma com movimento relativo à base de excitação e outra sem movimento relativo, representando a parte do corpo que permanece em contato com o banco. Uma terceira massa pode ser adicionada ao modelo, representando as pernas quando estas não se movem em fase com o resto do corpo. Uma representação esquemática do modelo é apresentada na Fig. 2.34.

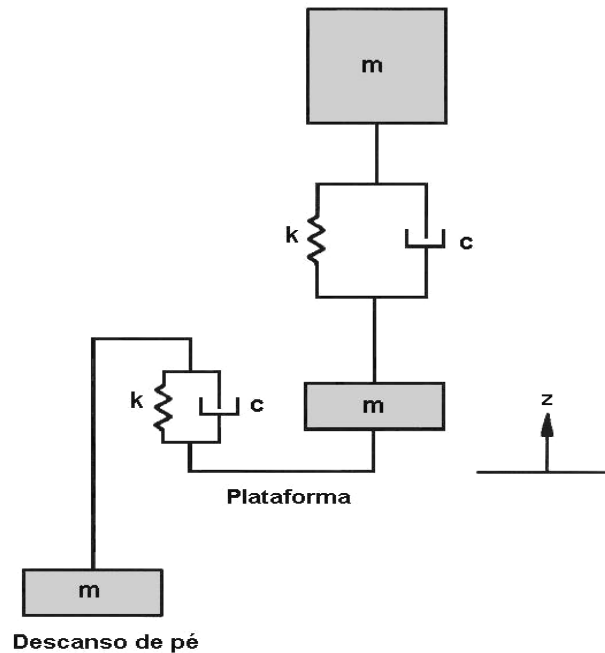


Figura 2.34 – Modelo simplificado da dinâmica do corpo humano sentado.

Fonte: Griffin, 1996

De acordo com Dixon (1996), como a massa do ocupante é menor que a massa do veículo, os modos de vibração dos ocupantes do veículo podem ser analisados por uma aproximação que considera que o corpo do veículo permanece fixo ou com um movimento pré-determinado. Pode-se considerar que o movimento do corpo do veículo influencia o modo de vibração do passageiro no banco alterando minimamente a frequência natural e o amortecimento do modo de vibração. Esta simplificação permite contornar a grande dificuldade de se obter dados de rigidez e amortecimento dos bancos.

Patten e Pang (1998) propõem um modelo de banco não linear que pode ser usado para caracterizar suas propriedades e comportamentos em relação a uma ampla faixa de automóveis. Seus objetivos são combinar as características do banco, amortecimento e rigidez conhecidos, com o modelo vibracional de um ocupante sentado.

Farley e Griffin (1989), citados por Patten e Pang (1998), realizaram testes com pessoas e observaram não-linearidades a características de vibração dos ocupantes no banco. O mesmo resultado pode ser observado por Gurram e Vertiz (1995), citados por Patten e Pang (1998).

2.9 Motor

As principais fontes de excitação em motores quatro cilindros em linha são originárias das forças de segunda ordem. Tal característica tem origens nas forças inerciais oscilatórias não balanceadas que imprimem ao motor uma oscilação vertical cuja frequência é equivalente ao dobro da frequência de rotação do motor.

As forças de segunda ordem manifestam-se sob a forma de ruído no interior do veículo. Medições com nível de ruído interno em veículos equipados com motores de quatro tempos, acusam picos de frequência de segunda ordem e seus múltiplos.

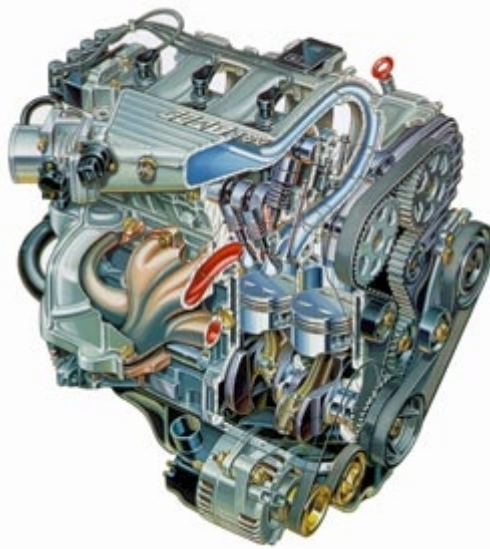


Figura 2.35 –Modelo em corte do motor FIAT.

Fonte: Autozest.com, 2002

Segundo Reimpell e Stoll (1996) os problemas de *front end shake*, ou seja, movimentos oscilatórios verticais do motor, são mais susceptíveis em veículos de tração dianteira e proporcionam consequência mais direta ao conforto. As vibrações poderão ser sentidas no assoalho e na porção dianteira do veículo, principalmente quando a massa do motor apresenta ressonância sobre os coxins. O problema pode ser solucionado com suportes mais rígidos mas, a transferência de ruídos aumentaria no interior do veículo.

Uma boa solução para o problema é a utilização de coxins hidraulicamente amortecidos.

Shi (1998), citado por Rosa Neto (2000), relata que estes coxins possuem uma rigidez mais baixa, mas na ocorrência de ressonâncias, estes são capazes de gerar um amortecimento muito maior que os convencionais.

Capítulo 3

IMPLEMENTAÇÃO DOS MODELOS

Neste capítulo são apresentados os modelos desenvolvidos a partir do programa SIMULINK, visando a aplicação da teoria apresentada no capítulo anterior.

3.1 Implementação do Modelo de Pistas

Para representar o modelo de pista foi utilizado o modelo do MIRA que proporciona uma maior possibilidade de variação dos parâmetros, que se deseja simular.

O modelo do sinal teve como referencia três tipos de pavimento:

- Asfalto liso, o veículo desenvolvendo uma velocidade de 100 Km/h;
- Asfalto irregular, o veículo desenvolvendo uma velocidade de 60 Km/h;
- Travessina, onde na trajetória do veículo em asfalto liso é adicionado um obstáculo transversal, que é transposto pelo veículo desenvolvendo uma velocidade de 30 km/h.

Para análise do modelo, Gillespie (1992) definiu que a velocidade do veículo no percurso é uma função do sinal temporal. Para isso caracterizou-se o espectro da estrada em número de onda (v) entre 0,016 e 1,6 ciclos/metro e obteve-se as frequências a partir da Eq. (3.1).

$$f = v \cdot V \quad (3.1)$$

Considerou-se também, que valores acima de 20 Hz não apresentam confiabilidade, em se tratando de um modelo numérico desenvolvido para representar o comportamento de uma carroceria rígida.

Atribuiu-se ao sinal, uma frequência de amostragem, f_s , duas vezes maior, para eliminar o risco de *aliasing error* do sinal, ou seja, quando sinais discretizados apresentam uma frequência diferente da original.

Finalmente, para dividir o passo de tempo, foi utilizada a seguinte equação:

$$dt = \frac{1}{f_s} \quad (3.2)$$

3.2 Parâmetros do MIRA

Os parâmetros de rugosidade característica do trajeto, $G(v_0)$, foram ajustados comparando-se os valores da aceleração (RMS) obtidos experimentalmente com os valores simulados pelo MIRA. Na Tab. 3.1 são associados o tipo de pista e o modelo de pneu, através do parâmetro de rugosidade característico do trajeto, adotado neste trabalho.

Tabela 3.1 – Parâmetros aplicados ao modelo do MIRA (Gillespie, 1980).

Tipo de Pista	$G(v_0)$ - m³/ciclo/m	Modelo de Pneu
Asfalto Liso	16×10^{-6}	Comprimento de Contato
	14×10^{-6}	Ponto de Contato
Asfalto Irregular	1300×10^{-6}	Comprimento de Contato
	1200×10^{-6}	Ponto de Contato

Para parâmetros de controle de número de onda, w_1 e w_2 , utilizou-se o mesmo processo de ajuste descrito anteriormente, respeitando-se a faixa de desvio do parâmetro em sua classificação na Tab. 3.2. Observa-se na Tab. 3.2 o valor adotado para os parâmetros de w_1 e w_2 nesse trabalho.

Tabela 3.2 – Valores w_1 e w_2 utilizados neste trabalho.

Tipo de Pista	w_1	w_2
Asfalto Liso	2,50	1,45
Asfalto Irregular	2,28	1,43

3.3 Intervalo de Frequência

O método empregado para gerar um sinal de pista randômico combina um gerador uniforme randômico e uma função de transferência que trabalha como filtro do sinal randômico (Costa Neto, *et al.*, 1998). A Fig. 3.1 está representando o modelo de sinal randômico através do sistema de diagrama de blocos do SIMULINK.

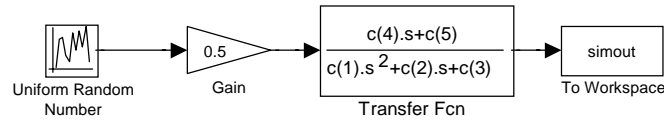


Figura 3.1 – Gerador de sinais randômicos de pistas.

O objetivo é gerar um perfil de pista que se aproxime do perfil médio gerado pelo modelo do MIRA (Fig. 3.2).

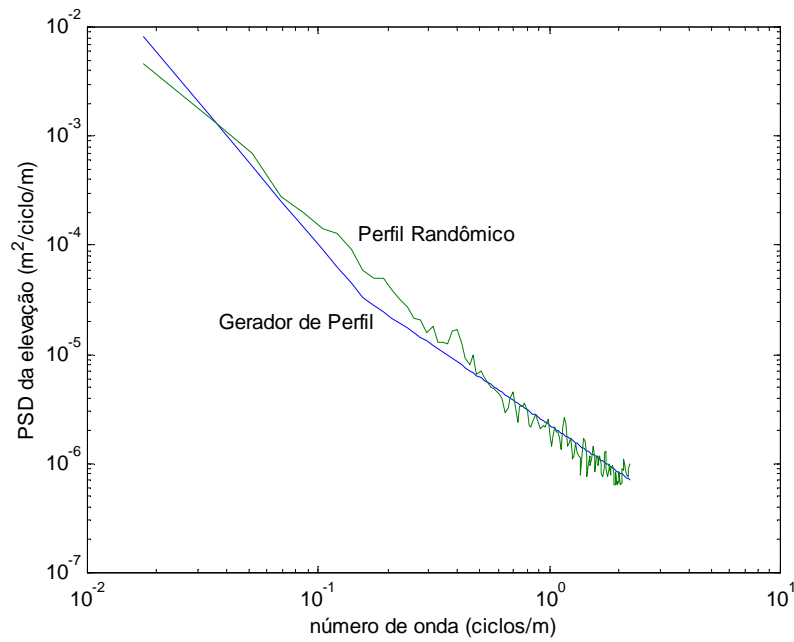


Figura 3.2 – Aproximação do perfil de pista.

O ajuste é alcançado através dos parâmetros de $C(n)$, $n = 1, \dots, 5$ da função de transferência na Fig. (3.1), que realiza um trabalho de filtragem do sinal randômico, condicionando-o ao perfil médio gerado pelo modelo do MIRA. Através de processos matemáticos de mínimos quadrados e otimização, busca-se alternativas de aproximação do sinal randômico em relação ao perfil médio do MIRA.

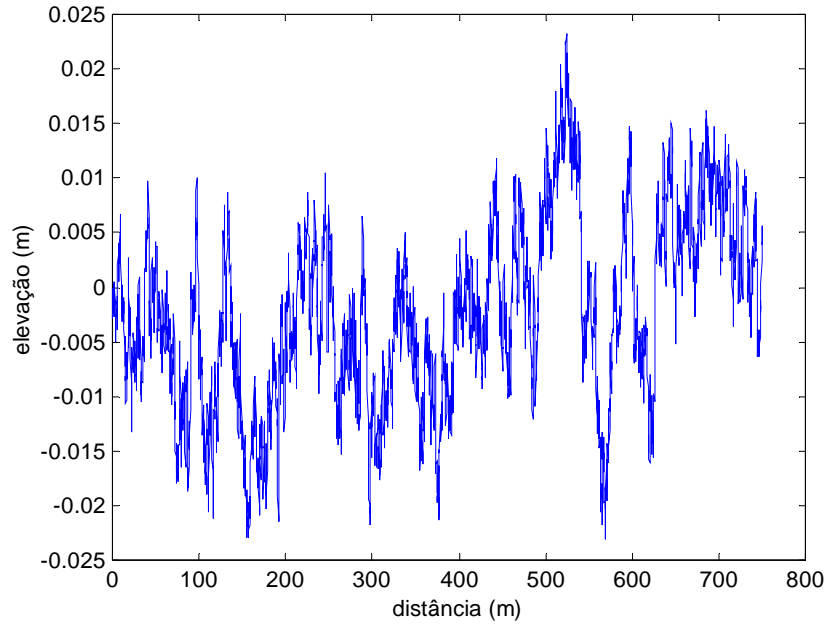


Figura 3.3 – Elevação do perfil da pista.

3.4 Implementação dos Modelos de Pneus

Rosa Neto (2000) desenvolveu os modelos de pneu por ponto de contato e pneu por comprimento de contato. Esses foram compostos por um sistema massa-mola-amortecedor conectado à estrada e ao corpo do veículo pelo sistema de suspensão.

O modelo foi implementado através de um diagrama de blocos, que possui como dados de entrada o deslocamento vertical da estrada, z_0 , e a força vertical gerada na suspensão dianteira esquerda, Fz_susp_de ; e como dados de saída os valores totais de deslocamento, velocidade, aceleração de massa não suspensa.

A aceleração vertical do sistema é apresentada na Eq. (3.3) abaixo:

$$\frac{d^2 z_1}{dt^2} = (z_0 - z_1) \cdot \frac{Kt}{mde} + \left(\frac{dz_0}{dt} - \frac{dz_1}{dt} \right) \cdot \frac{Ct}{mde} - \frac{Fz_susp_de}{mde} + g \quad (3.3)$$

onde:

$\frac{d^2 z_1}{dt^2}$ é a aceleração vertical da massa não suspensa (m/s^2);

$\frac{dz_1}{dt}$ é a velocidade vertical da massa não suspensa (m/s);

- $\frac{dz_0}{dt}$ é a velocidade vertical da estrada (m/s);
- K_t é a rigidez vertical do pneu (134099 N/m);
- C_t é o amortecimento vertical do pneu (700 N.s/m);
- m_{de} é a massa não suspensa dianteira esquerda (30,6 kg);
- g é a aceleração da gravidade ($-9,81 \text{ m/s}^2$).

Os outros valores permaneceram constantes para os outros pneus, exceto os valores da massa.

Na Fig. 3.4 é apresentado o diagrama de blocos de acordo com a Eq. (3.3). Após o cálculo da força de contato há um chaveamento que possibilita a perda de contato entre o pneu e a pista.

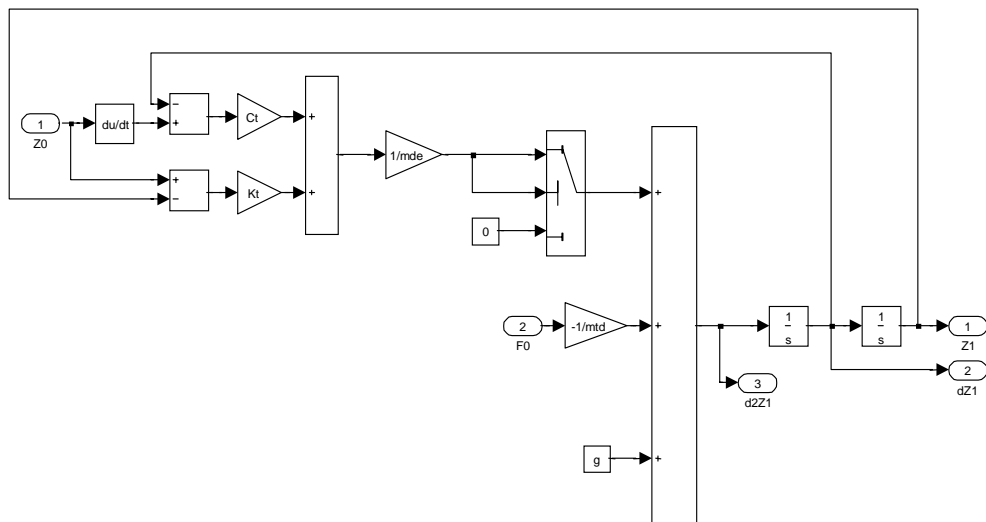


Figura 3.4 – Diagrama de blocos do modelo ponto de contato do pneu dianteiro esquerdo.

Na Fig. 3.5 é mostrado o modelo do pneu por comprimento de contato, o qual também utiliza a Eq. (3.3).

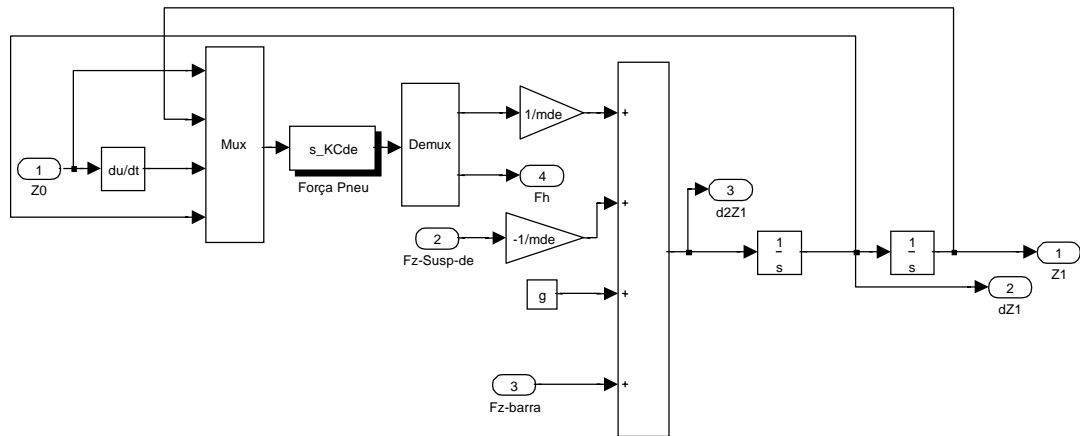


Figura 3.5 – Diagrama de blocos do modelo comprimento de contato do pneu dianteiro esquerdo.

3.5 Implementação dos Modelos para Suspensões

3.5.1 Suspensão Dianteira

O modelo adotado por Rosa Neto (2000) considera apenas os movimentos verticais do conjunto. Este modelo utiliza uma mola linear e um amortecedor de comportamento linear na compressão bi-linear na tração.

Os dados de entrada do modelo implementado foram: deslocamento vertical da massa não suspensa z_1 , a velocidade vertical de massa não suspensa dz_1/dt , deslocamento vertical z_2 , a velocidade vertical dz_2/dt , o ângulo de *pitch* θ , a velocidade angular de *pitch* $d\theta/dt$, o ângulo de *roll* α e a velocidade angular de *roll* $d\alpha/dt$ referentes aos três graus de liberdade da massa suspensa.

Os dados de saída da simulação são o deslocamento e a velocidade entre a massa suspensa e a massa não suspensa.

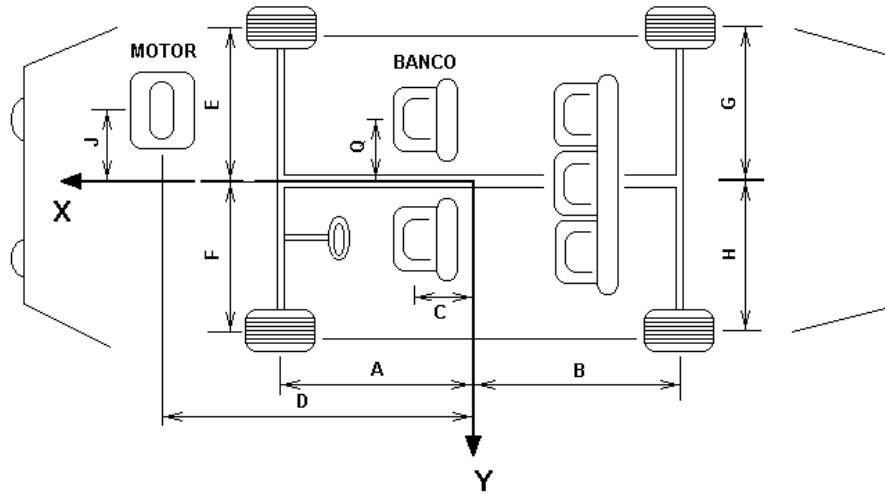


Figura 3.6 – Sistema de coordenadas e distâncias.

Observa-se nas Eqs. (3.4) e (3.5) o deslocamento vertical ΔZ e a velocidade relativa $\Delta dZ/dt$. Adotou-se como convenção que sinais positivos para deslocamento e velocidade representem a compressão do sistema.

$$\Delta Z = Z_1 - Z_2 + \theta \cdot A - \alpha \cdot F \quad (3.4)$$

$$\frac{\Delta dZ}{dt} = \frac{dZ_1}{dt} - \frac{dZ_2}{dt} + \frac{d\theta}{dt} \cdot A - \frac{d\alpha}{dt} \cdot F \quad (3.5)$$

onde:

A é o valor da distância longitudinal entre o eixo dianteiro e o eixo X da massa suspensa (0,883 m);

F é a distância transversal entre o centro das rodas e o eixo Y da massa suspensa (0,693 m);

Na suspensão dianteira a letra F é trocada por E e seu sinal passa a ser negativo.

Desta forma, Rosa Neto (2000) escolheu as Eqs. (3.6) e (3.7) de representação bi-linear da curva de amortecimento para tração.

$$FZ = \frac{\Delta dZ}{dt} \cdot 4807 \Rightarrow 0 > \frac{\Delta dZ}{dt} \geq -0,260 \frac{m}{s} \quad (3.6)$$

$$FZ = -801 + 1231,5 \cdot \frac{\Delta dZ}{dt} \Rightarrow \frac{\Delta dZ}{dt} < -0,260 \frac{m}{s} \quad (3.7)$$

$$FZ = \frac{\Delta dz}{dt} \cdot 1097,1 \Rightarrow \frac{\Delta dz}{dt} \geq 0 \quad (3.8)$$

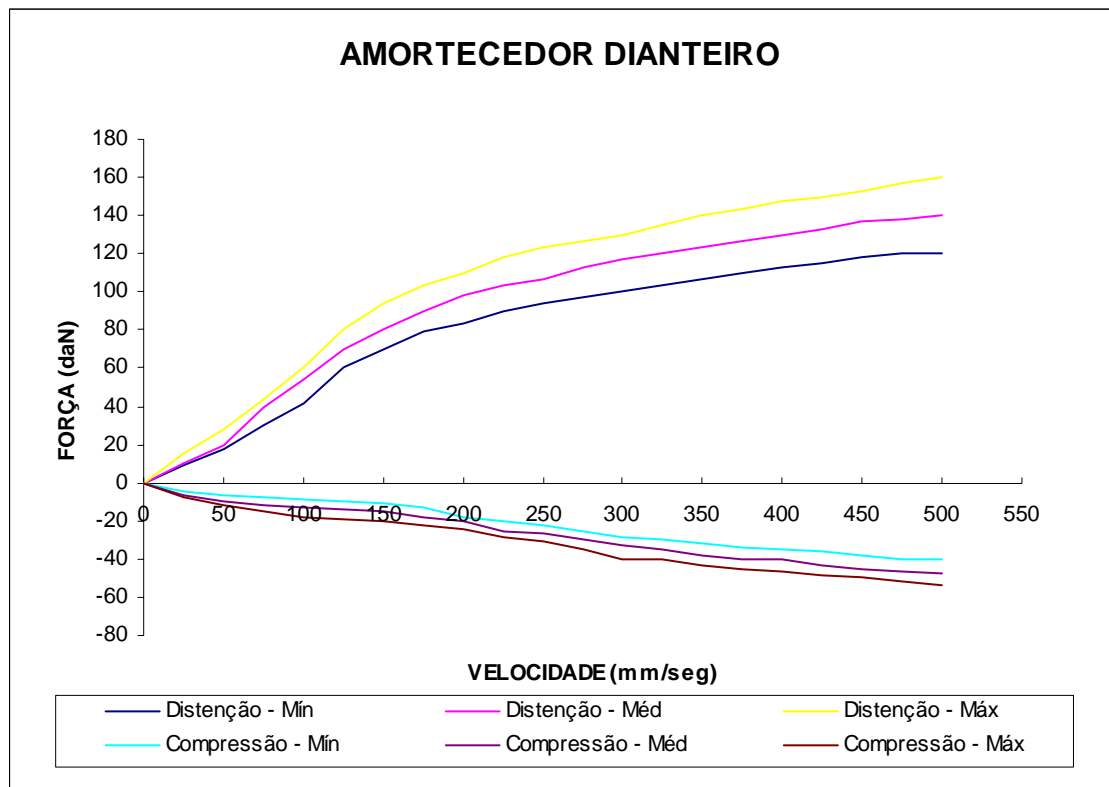


Figura 3.7 – Representação gráfica do amortecedor dianteiro.

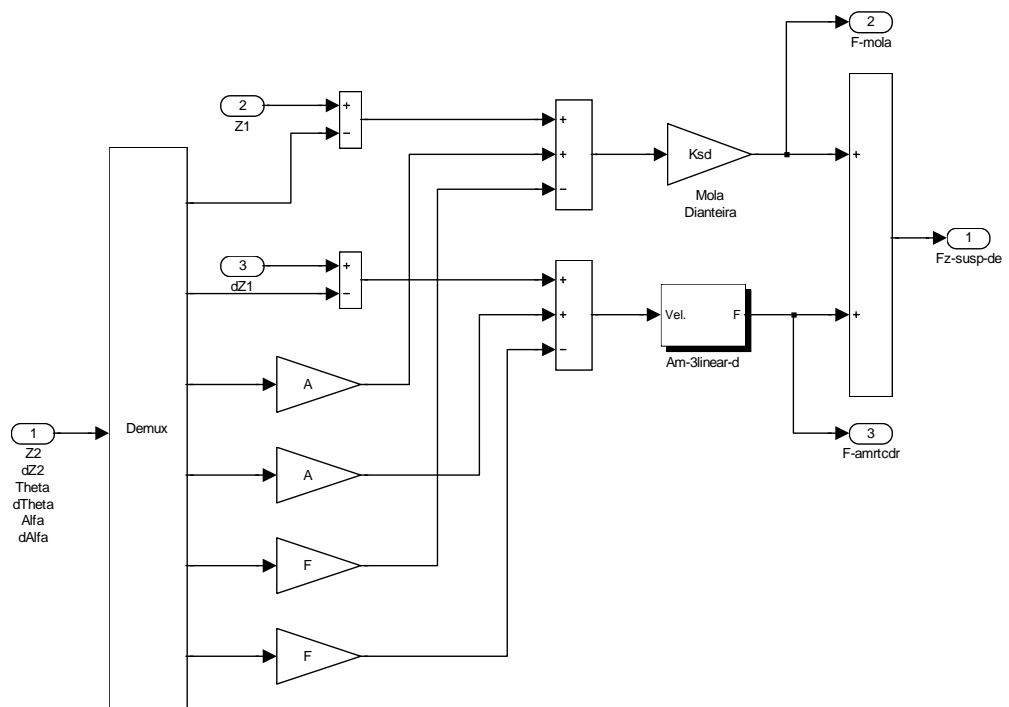


Figura 3.8 – Diagrama de blocos da suspensão dianteira esquerda.

A Fig. 3.8 apresenta o diagrama de blocos utilizado para implementação do sistema de suspensão dianteiro esquerdo.

O dado de entrada 1 é a velocidade relativa previamente calculada. A Eq. (3.8) refere-se ao cálculo da força exercida pelo amortecedor, a qual foi implementada no bloco *Compr* se a velocidade for maior ou equivalente a zero. O bloco *Trac*, Eqs. (3.7) e (3.6), é utilizado para forças inferiores a zero. Os blocos *Trac* e *Compr* são chaveados e possuem saídas de acordo com a utilização equivalentes a unidade ou zero.

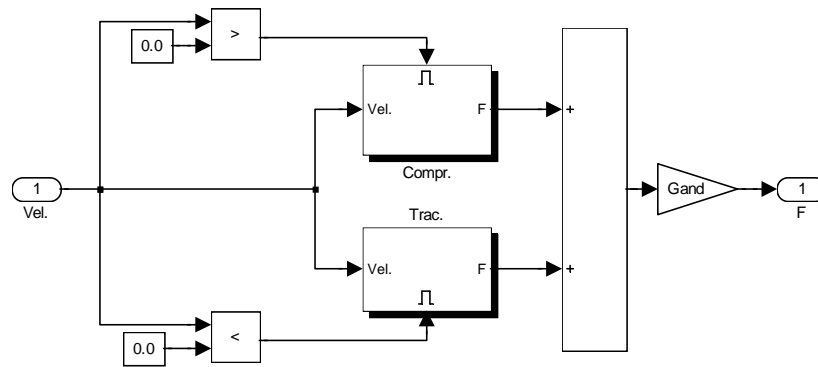


Figura 3.9 – Diagrama de blocos do amortecedor dianteiro.

3.5.2 Suspensão Traseira

Foram utilizados apenas os movimentos verticais do conjunto para implementação do modelo da suspensão traseira. O sistema de suspensão traseira independente foi modelado como sendo semi-independente. O modelo possui como dados de entrada Z_1 , dz_1/dt , Z_2 , dZ_2/dt , θ , $d\theta/dt$, α e $d\alpha/dt$ referentes aos três graus de liberdade da massa suspensa.

Rosa Neto (2000) utilizou a Eq. (3.10) para o cálculo dos deslocamentos verticais ΔZ e as velocidades relativas $\Delta dZ/dt$.

$$\frac{\Delta dZ}{dt} = \frac{dZ_1}{dt} - \frac{dZ_2}{dt} - \frac{d\theta}{dt} \cdot B - \frac{d\alpha}{dt} \cdot H \quad (3.9)$$

onde:

B é a distância longitudinal entre o eixo traseiro e o eixo Y da massa suspensa (1,447 m);

H é a distância transversal entre o centro das rodas e o eixo X da massa suspensa (0,689 m).

Na suspensão traseira direita a letra H é substituída pela G e seu sinal passa a ser negativo.

Na Fig. 3.10 é apresentado o diagrama de blocos utilizado no modelo de suspensão traseiro implementado.

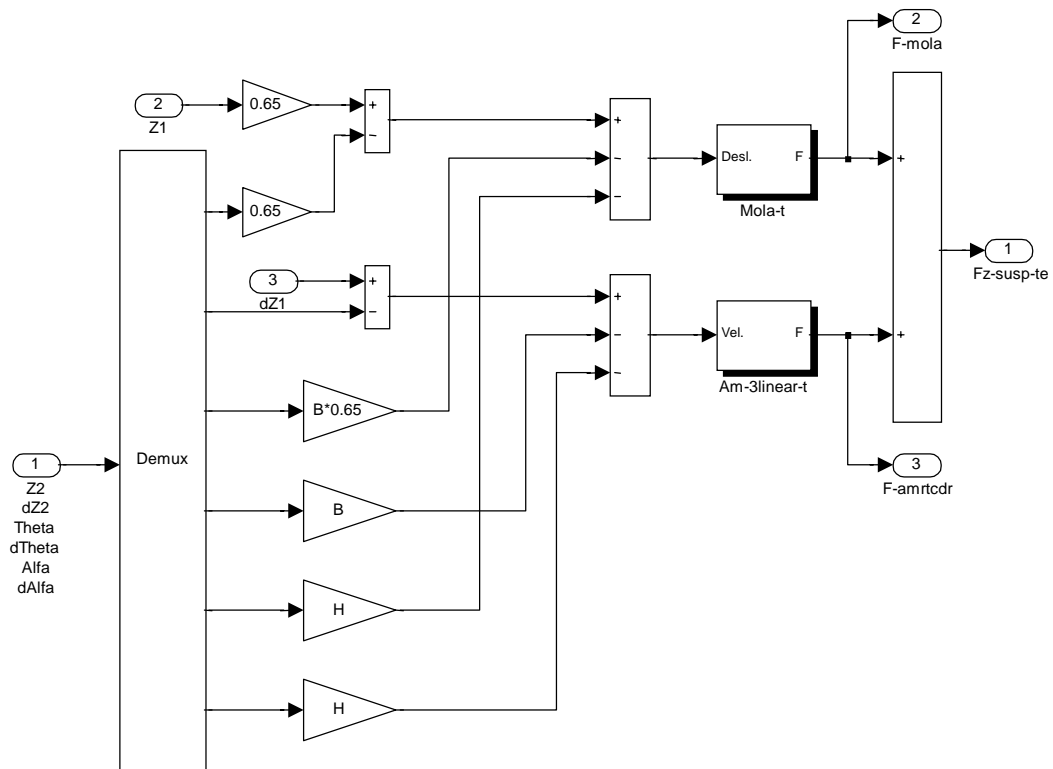


Figura 3.10 – Diagrama de blocos da suspensão traseira esquerda.

O modelo da suspensão traseira é composto por uma mola de rigidez variável e por um amortecedor de comportamento linear na compressão e bi-linear na tração.

As Eqs. (3.10) e (3.11) foram escolhidas para representação bi-linear da curva de amortecimento do amortecedor traseiro.

$$FZ = \frac{dZ}{dt} \cdot 1937 \Rightarrow 0 > \frac{\Delta dZ}{dt} \geq -0,175 \frac{m}{s} \quad (3.10)$$

$$FZ = 190,8 + 1690 \cdot \frac{dZ}{dt} \Rightarrow \frac{\Delta dZ}{dt} < -0,175 \frac{m}{s} \quad (3.11)$$

$$FZ = \frac{\Delta dZ}{dt} \cdot 453 \Rightarrow \frac{\Delta dZ}{dt} \geq 0 \quad (3.12)$$

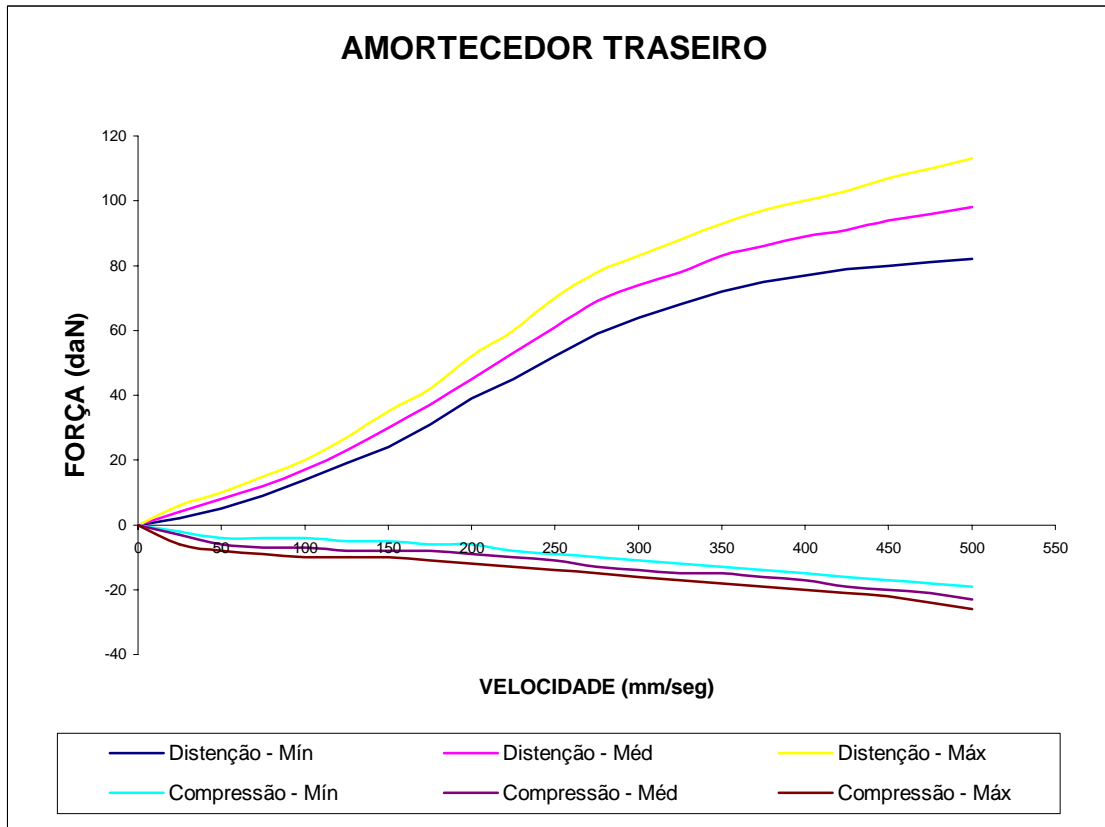


Figura 3.11 – Representação gráfica do amortecedor traseiro.

O cálculo da força correspondente à rigidez foi realizado segundo a Eq. (3.13).

$$F_z = Desl \cdot \left(Kst1 + \left(\frac{Kst1 - Kst2}{0,103 - 0,138} \right) \cdot (Desl - 0,103) \right) \quad (3.13)$$

Na Fig. 3.12 é apresentado o diagrama de blocos referentes ao funcionamento das molas traseiras.

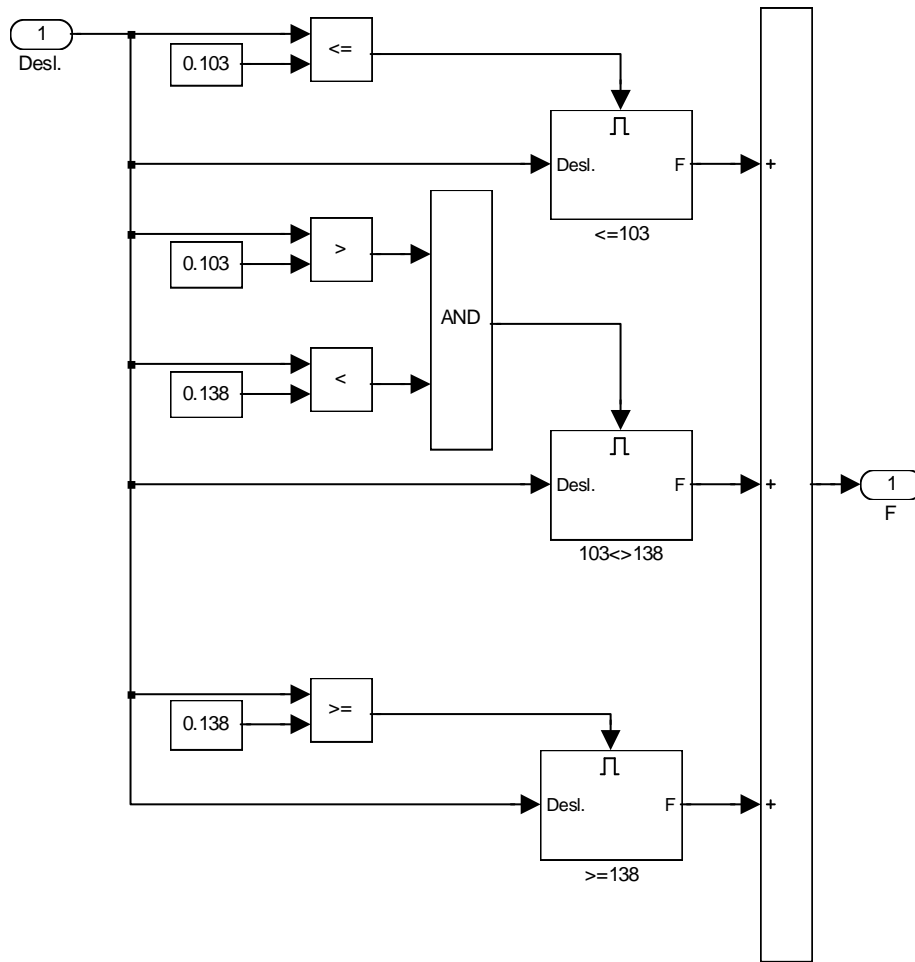


Figura 3.12 – Diagrama de blocos das molas traseiras.

3.6 Implementação do Modelo para Bancos dos Ocupantes

Apesar do modelo implementado ser de apenas um grau de liberdade, foi possível o acesso às principais características de vibração do sistema.

A implementação do modelo iniciou-se através da determinação das características de rigidez e amortecimento do conjunto. A razão de amortecimento utilizada para os cálculos foi equivalente a $\zeta = 0,15$.

Os dados de entrada do modelo foram Z_2 , dZ_2/dt , θ , $d\theta/dt$, α e $d\alpha/dt$ referentes aos três graus de liberdade da massa suspensa.

A aceleração vertical do sistema é dada pela Eq. (3.14).

$$\frac{d^2 Z_m}{dt^2} = \frac{K_{se}}{md} \cdot (\alpha \cdot Q \cdot \theta \cdot C + (Z_2 - Z_m)) + \frac{C_{se}}{md} \cdot \left(\frac{d\alpha}{dt} \cdot Q \cdot \frac{d\theta}{dt} \cdot C + \left(\frac{dZ_2}{dt} - \frac{dZ_m}{dt} \right) \right) \quad (3.14)$$

onde:

$\frac{d^2 Z_m}{dt^2}$ é a aceleração vertical do motorista (m/s^2);

K_{se} é a rigidez vertical do conjunto (230.206 N/m);

C_{se} é o amortecimento vertical do conjunto (1.087 N.s/m);

md é a massa do motorista suportada pelo banco (57 kg);

g é a aceleração da gravidade ($-9,81 \text{ m/s}^2$);

C é a distância longitudinal entre o centro do banco do motorista e o eixo Y (0,273m);

Q é a distância transversal entre o centro do banco do motorista e o eixo X da massa suspensa (0,33 m).

Na Fig. 3.13 verifica-se a implementação da Eq. (3.14) na forma de diagrama de blocos.

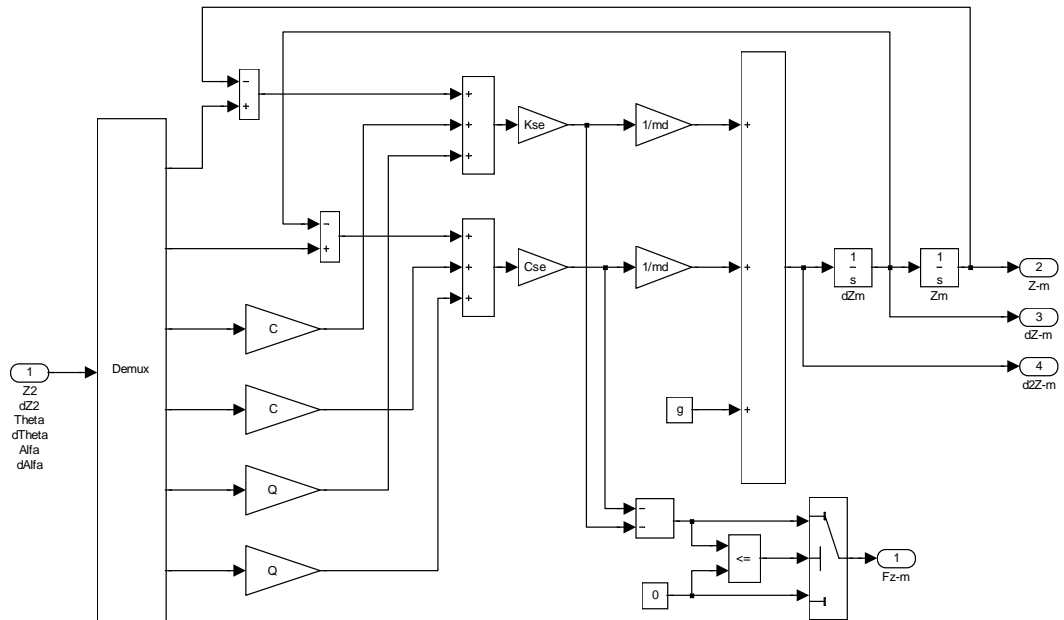


Figura 3.13 – Diagrama de blocos do sistema banco/motorista.

3.7 Implementação do Modelo para Motor

O mesmo modelo utilizado para ocupantes foi implementado para o modelo de motor, alternando-se apenas o peso do conjunto, suas coordenadas de localização sobre a massa suspensa e as características de rigidez e amortecimento dos apoios.

O valor da rigidez atribuído foi $k = 470.000$ (N/m), a razão de amortecimento utilizada foi equivalente a $\zeta = 0,20$, a massa do conjunto motor/câmbio foi considerada 203 kg e o valor da frequência natural amortecida do conjunto como $f_a = 8,4$ Hz.

Os dados de entrada do modelo foram Z_2 , dZ_2/dt , θ , $d\theta/dt$, α e $d\alpha/dt$ referentes aos três graus de liberdade da massa suspensa.

A Eq. (3.15) abaixo define a aceleração vertical do sistema (Rosa Neto 2000).

$$\begin{aligned} \frac{d^2 Z_{motor}}{dt^2} = & \frac{Ke}{md} ((Z_2 - Z_{motor}) - \alpha \cdot J - \theta \cdot D) + \\ & + \frac{Ce}{md} \left(\left(\frac{dZ_2}{dt} - \frac{dZ_{motor}}{dt} \right) - \frac{d\alpha}{dt} \cdot J - \frac{d\theta}{dt} \cdot D \right) + g \end{aligned} \quad (3.15)$$

onde:

$\frac{d^2 Z_{motor}}{dt^2}$	é a aceleração vertical do motor (m/s ²);
Ke	é a rigidez vertical do conjunto (470.000 N/m);
Ce	é o amortecimento vertical do conjunto (3.500 N.s/m);
me	é a massa do conjunto motor/câmbio (203 kg);
g	é a aceleração da gravidade (- 9,81 m/s ²);
D	é a distância longitudinal entre o CG do motor e o eixo Y da massa suspensa (1,037 m);
J	é a distância transversal entre o CG do motor e o eixo X da massa suspensa (0,056 m).

A Fig. 3.14 apresenta a implementação da Eq. (3.15) na forma de diagrama de blocos, representando o comportamento dinâmico vertical do motor.

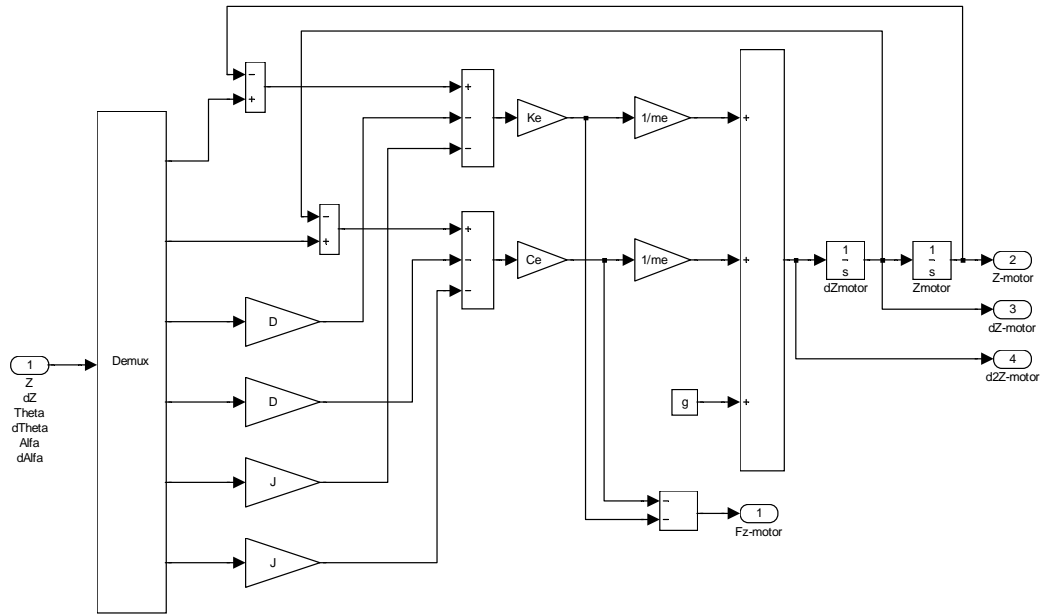


Figura 3.14 – Diagrama de blocos do sistema do motor.

3.8 Implementação do Modelo da Carroceria

Rosa Neto (2000) implementou um modelo de carroceria composto por um corpo rígido com três graus de liberdade: translação ao longo do eixo vertical Z, rotação em torno do eixo longitudinal X e rotação em torno do eixo transversal Y.

A Eq. (3.16) define a aceleração vertical do sistema.

$$\frac{d^2 Z}{dt^2} = \frac{(F_{zmotor} + \sum F_{zocupantes} + \sum F_{zsusp})}{m} + g \quad (3.16)$$

onde:

$\frac{d^2 Z}{dt^2}$ é a aceleração vertical da carroceria (m/s^2);

F_{zmotor} é a força vertical exercida pelo motor (N);

$F_{zocupantes}$ é a força vertical exercida pelo motorista e passageiro (N);

F_{zsusp} são as forças verticais exercidas pelas quatro suspensões (N);

m é a massa suspensa descontada a massa do motor (885 kg).

A Eq. (3.17) define a aceleração angular em torno do eixo X.

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{\sum F_{zocupantes} \cdot C + \sum F_{zsusp_t} \cdot B - \sum F_{zsusp_d} \cdot A - F_{zmotor} \cdot d}{I_{yy}} \quad (3.17)$$

onde:

F_{zsusp_t} é a força vertical exercida pelas suspensões traseiras (N);

F_{zsusp_d} é a força exercida pelas suspensões dianteiras (N);

I_{yy} é a inércia a rotação em torno do eixo Y (356 kgm²);

A Eq. (3.18) define as acelerações angulares em torno de Y.

$$\begin{aligned} \frac{d^2\alpha}{dt^2} = & \frac{Q \cdot (F_{zocupantes_m} - F_{zocupantes_p}) - F_{zmotor} \cdot J + F_{zsusp_te} \cdot H}{I_{xx}} \\ & + \frac{(F_{zsusp_te} \cdot H - F_{zsusp_td} \cdot G - F_{zsusp_de} \cdot F)}{I_{xx}} \end{aligned} \quad (3.18)$$

onde:

$F_{zocupantes_m}$ é a força vertical exercida pelo motorista [N];

$F_{zocupantes_p}$ é a força vertical exercida pelo passageiro [N];

F_{zsusp_de} é a força vertical exercida pela suspensão dianteira esquerda [N];

F_{zsusp_dd} é a força vertical exercida pela suspensão traseira direita (N);

F_{zsusp_te} é a força vertical exercida pela suspensão traseira esquerda (N);

F_{zsuspe_td} é a força vertical pela suspensão traseira esquerda (N);

I_{xx} é a inércia à rotação em torno do eixo X (1.536 kgm²).

Na Fig. 3.15 as Eqs. (3.16), (3.17) e (3.18) são apresentadas na forma de diagrama de blocos.

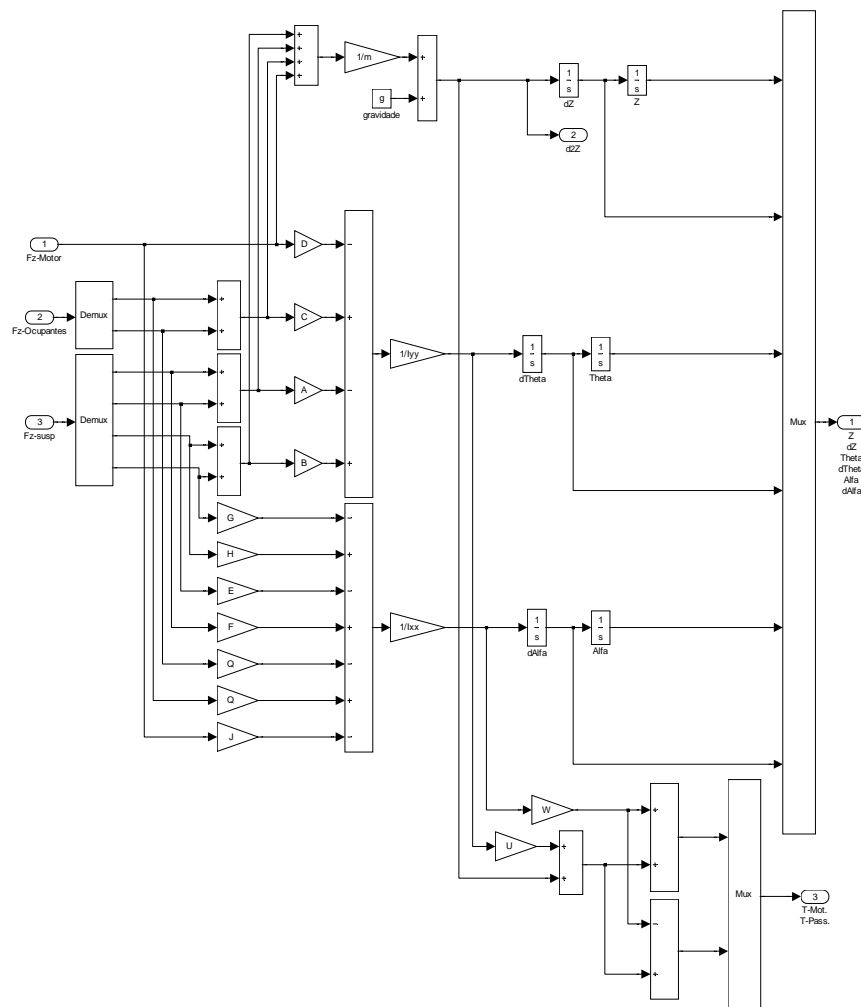


Figura 3.15 – Diagrama de blocos do modelo da carroceria.

3.9 Implementação do Modelo Numérico Completo

Rosa Neto (2000) implementou o modelo final interconectando os modelos descritos anteriormente: Pneus, Suspensões, Motor, Ocupantes e Carroceria; conforme apresentado na Fig. 3.16. Desta forma, a entrada foi apenas o deslocamento vertical de suas rodas e as saídas as mesmas anteriormente apresentadas.

O algoritmo de solução utilizado foi o Runge-Kutta de 4ª ordem com passo fixo de 0,0125 s e de 0,004 s para os testes em travessia.

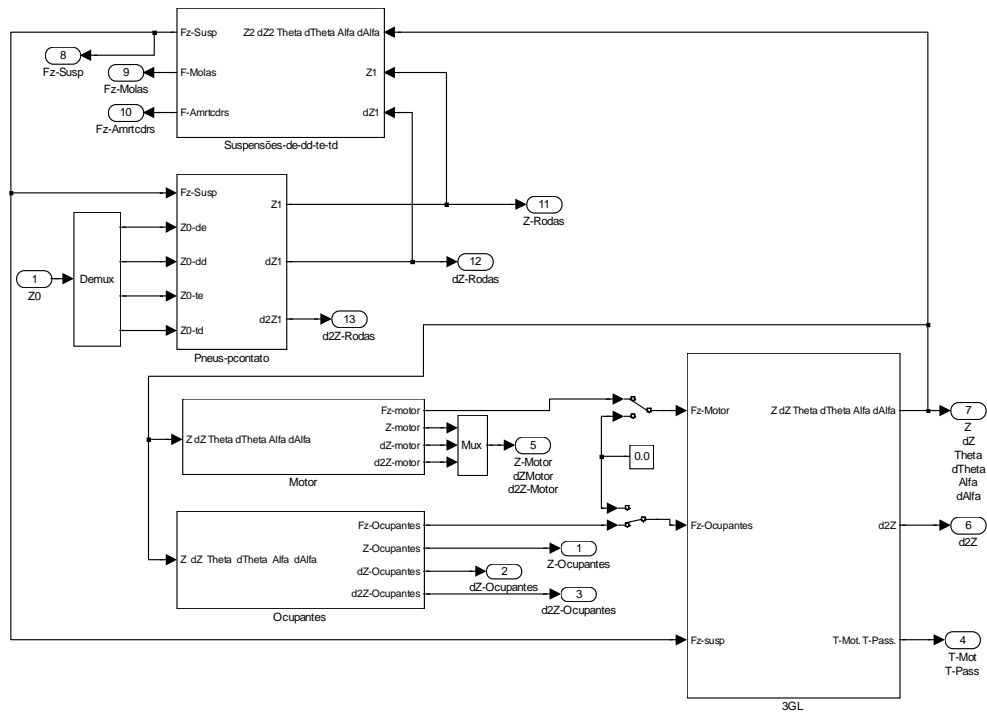


Figura 3.16 – Diagrama de blocos do modelo numérico completo com dez graus de liberdade.

Os resultados e os dados experimentais constam nos Apêndices 1 e 2.

Capítulo 4

AVALIAÇÃO PRELIMINAR DO MODELO

Neste capítulo são apresentados os valores obtidos por Rosa Neto (2000) a partir do modelo matemático desenvolvido. Neste capítulo estão identificadas as variações apresentadas do modelo assim como os resultados encontrados.

4.1 Comparativo dos Resultados

Nas Figs. 4.1 a 4.8 são apresentados os resultados obtidos por Rosa Neto (2000) sem qualquer alteração de parâmetros. A Fig. 4.1 apresenta os resultados da densidade espectral de potência das rodas dianteiras e traseiras do veículo no domínio da frequência. A figura compara o modelo numérico com os dados experimentais originados do veículo de testes na configuração padrão, o qual trafega em uma pista de asfalto liso utilizando o modelo de pneu ponto de contato.

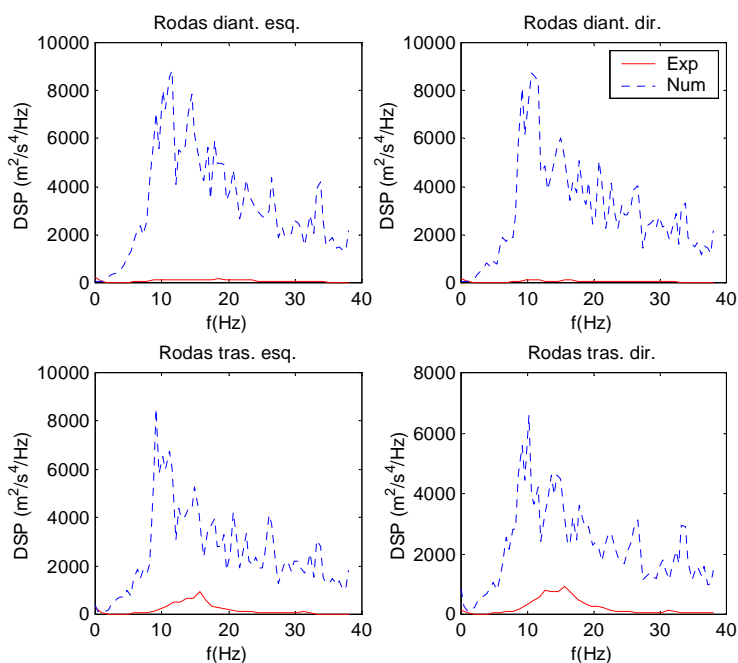


Figura 4.1 – Comparativo das rodas, utilizando os modelos de pista lisa e pneu ponto de contato.

Na figura 4.2, os resultados da densidade espectral de potência em relação ao domínio da frequência no trilho do banco e no assento do banco do motorista possuem a mesma característica. Foi utilizada a configuração padrão no modelo de pista lisa e no modelo de pneu ponto de contato.

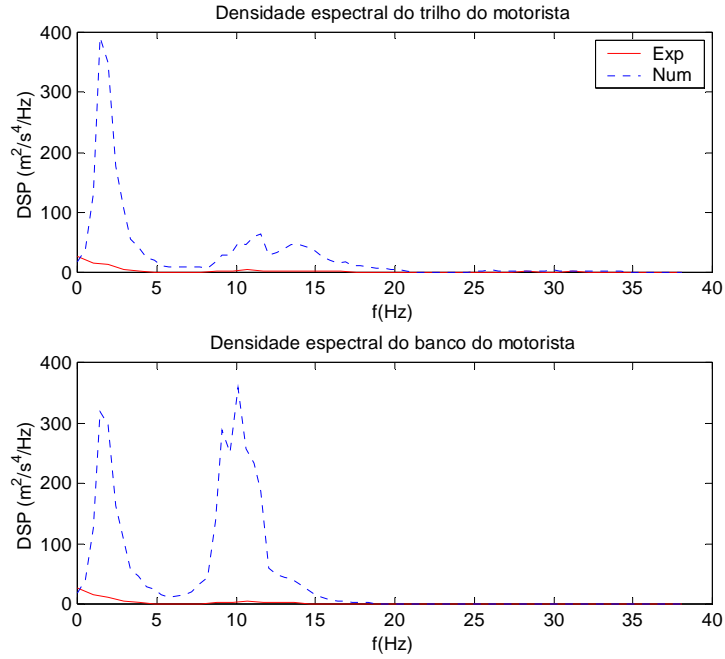


Figura 4.2 – Comparativo do trilho e banco, utilizando os modelos de pista lisa e pneu ponto de contato.

Observa-se a diferença de amplitude entre os sinais, o resultado não permite identificar a fonte do problema.

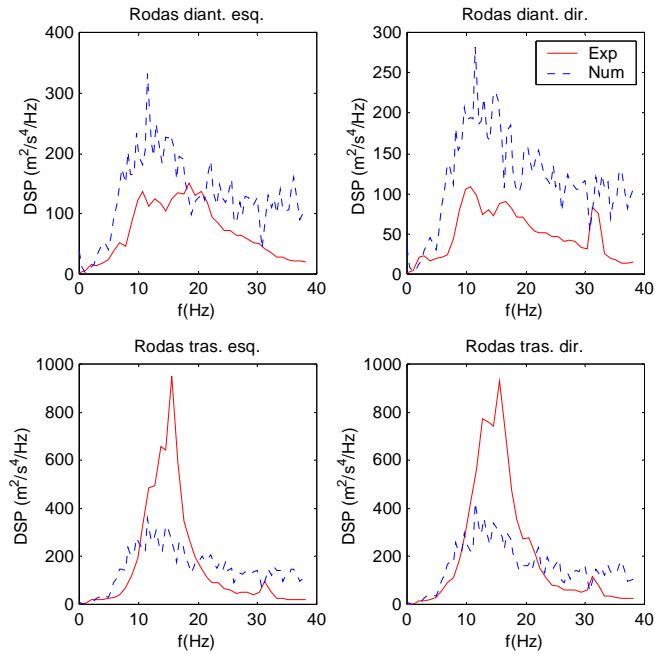


Figura 4.3 – Comparativo das rodas, utilizando os modelos de pista lisa e pneu comprimento de contato.

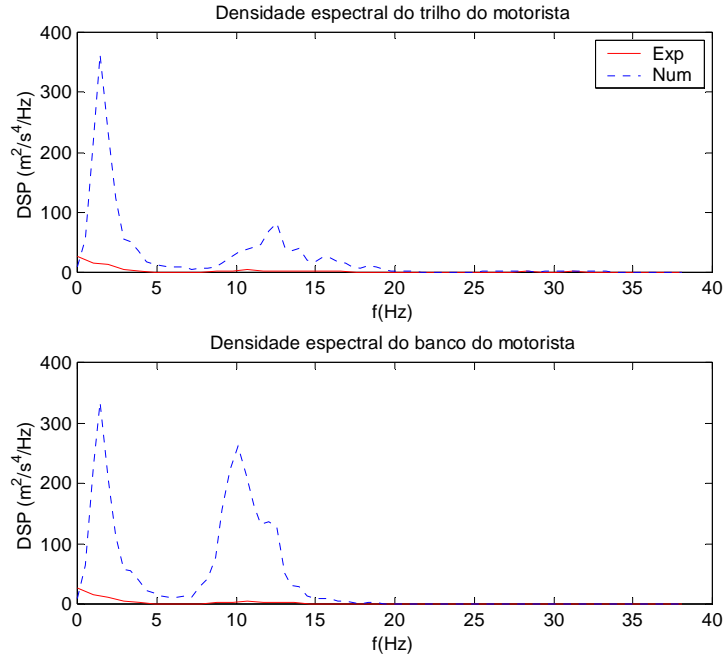


Figura 4.4 – Comparativo do trilho e banco, utilizando os modelos de pista lisa e pneu comprimento de contato.

As Figs. 4.3 e 4.4 apresentam os mesmos parâmetros descritos anteriormente, apenas alterando para o modelo de pneu de comprimento de contato. Resultados semelhantes às Figs. 4.1 e 4.2 podem ser identificados, a diferença de amplitude entre os sinais também ocorre no modelo de pneu comprimento de contato.

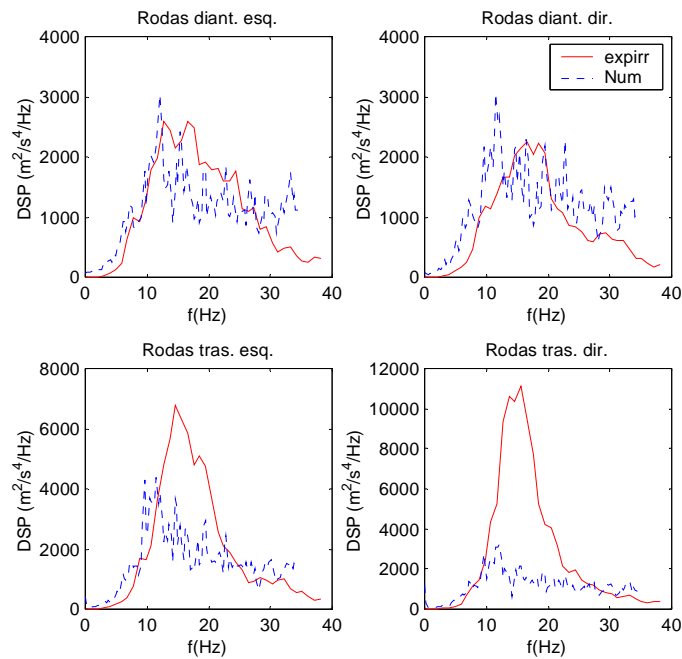


Figura 4.5 Comparativo das rodas, utilizando os modelos de pista irregular e pneu ponto de contato

As figuras analisadas anteriormente apresentam informações de um veículo trafegando em pista lisa, nas Fig. 4.5 e 4.6 alterou-se o modelo de pista para irregular e utilizou-se o modelo de pneu ponto de contato, sem alteração dos outros parâmetros.

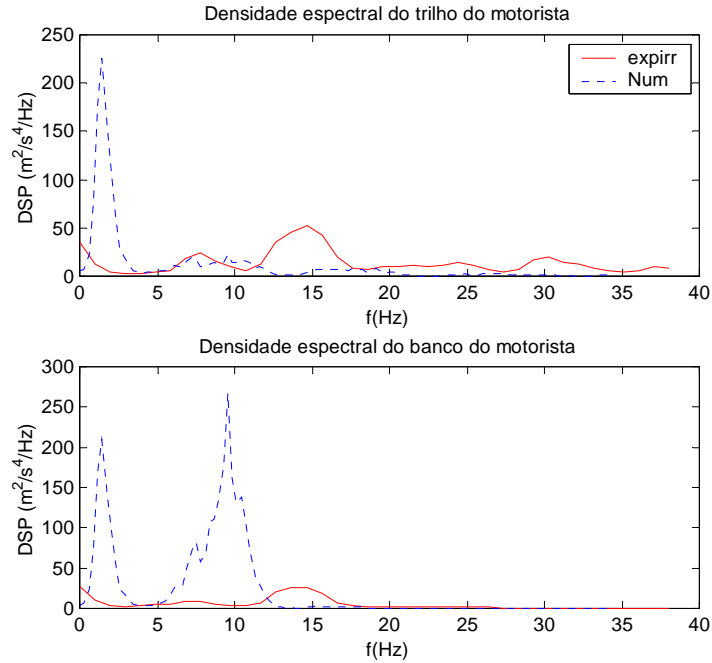


Figura 4.6 – Comparativo do trilho e banco, utilizando os modelos de pista irregular e pneu ponto de contato.

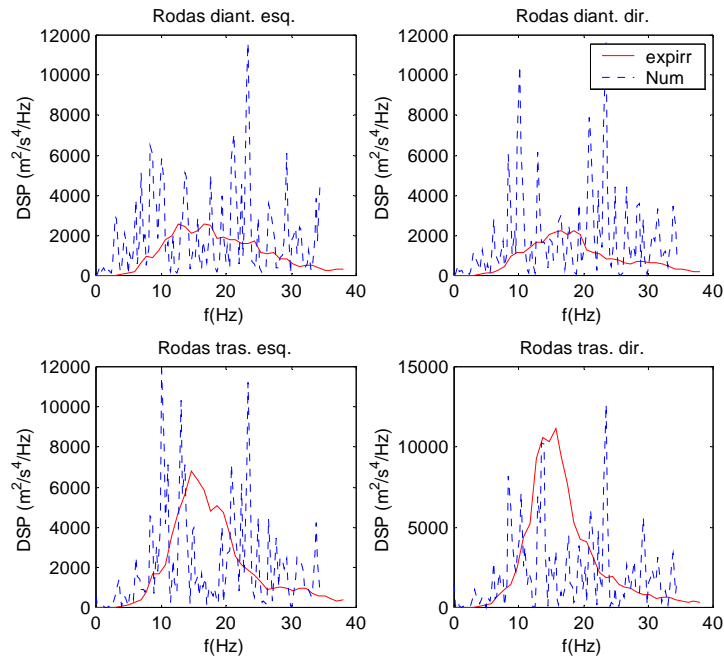


Figura 4.7 - Comparativo das rodas, utilizando os modelos de pista irregular e pneu comprimento de contato.

Nas Figs. 4.7 e 4.8 foi mantido o modelo de pista irregular, alterou-se o modelo de pneu para comprimento de contato e os outros parâmetros se mantiveram inalterados.

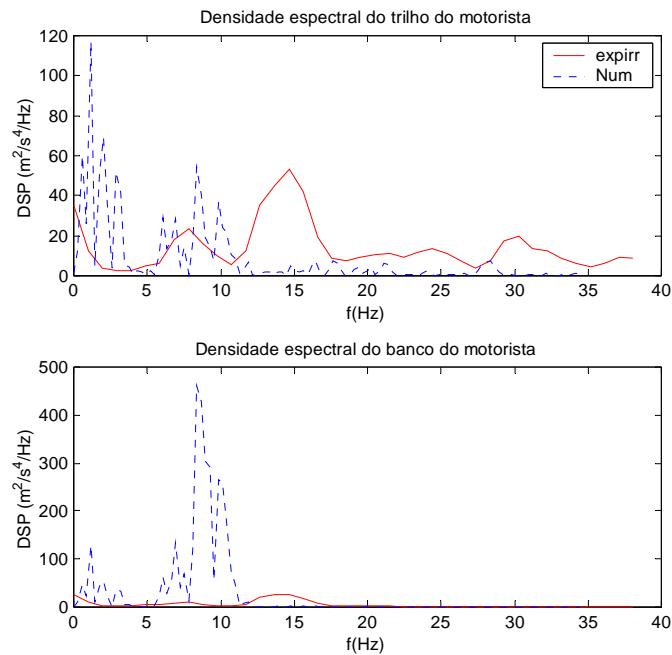


Figura 4.8 – Comparativo do trilho e banco, utilizando os modelos de pista irregular e pneu comprimento de contato.

Das Figs. 4.5 a 4.8 a diferença de amplitude entre os sinais para a pista irregular apresentou uma melhora considerável. Em uma análise preliminar, pode-se considerar que a amplitude do sinal numérico para pista lisa se apresenta muito elevado.

A princípio, as variações indicadas nas Figs. 4.7 e 4.8 não partem de um problema numérico. Como se pode observar, tal comportamento não é compartilhado pelas Figs 4.3 e 4.4, que apresentam o mesmo modelo de pneu, comprimento de contato, trafegando em pista lisa.

Nas Figs. 4.1 a 4.8 observa-se que a amplitude do sinal do modelo numérico amostrado não representa os mesmos resultados dos sinais experimentais. A diferença na amplitude do sinal pode ser atribuída a diversos fatores. Para Rosa Neto (2000) o posicionamento do eixo de *roll* do veículo ou a distribuição assimétrica de peso do veículo sobre as rodas, pode ser o causador deste comportamento.

Percebe-se nas Figs. 4.2 e 4.4, na frequência de 10 Hz, a divergência entre o sinal experimental e numérico. Nas Figs. 4.6 e 4.8 são visualizados uma frequência em torno de 1,7 Hz relacionada ao modelo numérico, que não é representada pelo sinal experimental.

Capítulo 5

ANÁLISE DE SENSIBILIDADE

Este capítulo tem como objetivo retratar a análise de sensibilidade como ferramenta essencial para desenvolvimento de estudos de otimização e identificar os parâmetros de maior influência dentre as variáveis do modelo. Apresenta um amplo estudo sobre análise de sensibilidade, onde apresenta os mais variados métodos e aplicações.

5.1 Conceitos

Modelos matemáticos são utilizados para aplicações complexas em diversas áreas da ciência. O modelo deve consistir de vários passos, dentre eles a determinação dos parâmetros que mais influenciam em seu desempenho.

Para exemplificar, considera-se a idéia básica da análise de sensibilidade como um modelo abstrato na forma de um bloco simples, Fig. 5.1.

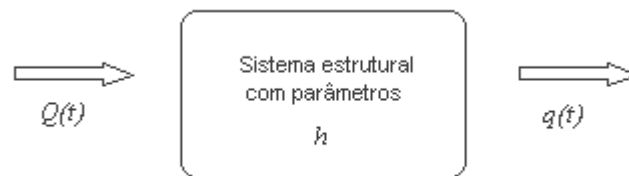


Figura 5.1 – Sistema abstrato.

Este sistema é simplesmente um conjunto de equações que define a relação entre um sinal de entrada $Q(t)$ e um sinal de saída $q(t)$, onde t é variável temporal. O sistema pode representar um modelo estático contínuo, um modelo dinâmico contínuo, um modelo estático discretizado ou um modelo de estrutura dinâmica discretizada. As propriedades do sistema são caracterizadas por alguns parâmetros h , chamados de parâmetros dos modelos.

Entretanto, a análise da sensibilidade consiste em estudar o comportamento do sistema como uma função dos parâmetros dos modelos. Para um dado vetor $Q(t)$, varia-se o parâmetro h , afim de, analisar a influência desta variação no sinal de saída $q(t)$.

A modelagem pode direcionar a análise de sensibilidade para:

- Identificar os parâmetros que requerem um maior conhecimento, na busca de fortalecer a base de informações e reduzir as incertezas;
- Identificar quais parâmetros que não alteram significativamente o modelo e possivelmente podem ser eliminados;
- Caracterizar as variáveis de entrada do modelo que contribuem para possíveis variações na saída do modelo;
- Caracterizar quais os parâmetros são mais correlacionados com a saída do modelo;
- Depois de modelado, que influências podem ser obtidas no resultado através da mudança nos parâmetros de entrada do modelo.

As diversas técnicas desenvolvidas para análise de sensibilidade se distinguem, principalmente, pela eficiência numérica e seus aspectos de implementação.

Na maioria das vezes, a análise de sensibilidade é conduzida pela:

- Definição do modelo e suas variáveis dependentes e independentes;
- Determinação das funções (*Probability density functions*) para cada parâmetro de entrada do modelo;
- Geração de uma matriz de dados de entrada, através de um apropriado método de amostragem aleatória;
- Cálculo de um vetor na saída do modelo;
- Imposição das influências e importâncias relativas de cada parâmetros de entrada e saída (Iman *et al.*, 1981a; Iman *et al.*, 1981b; Helton e Iman, 1982; Helton *et al.*, 1985; Helton *et al.*, 1986 e Hamby, 1994).

Deve-se enfatizar que a análise de sensibilidade dos parâmetros não é determinante para a validação do modelo, mas atua como um guia para aperfeiçoamentos futuros nas pesquisas.

5.2 Métodos

Crick *et al.* (1987) e Hamby (1994) distinguem como “importantes” os parâmetros cuja incerteza contribui substancialmente para a incerteza dos resultados e como “sensíveis” os parâmetros que influenciam significativamente nos resultados impostos.

Um consenso entre autores revela que os modelos são sensíveis aos parâmetros de entrada de dois modos distintos:

- A incerteza associada aos parâmetros de sensibilidade na entrada do modelo é propagada através do modelo resultando em uma grande contribuição para toda a variabilidade da resposta;
- A resposta do modelo pode ser altamente correlacionada com um parâmetro de entrada, assim como, variações na entrada resultam em significativas mudanças na saída do modelo.

O modelo é generalizado utilizando várias restrições de variáveis independentes, $X = (X_1, \dots, X_n)$ e uma variável dependente Y , onde $Y = f(X)$.

Os métodos de sensibilidade podem ser classificados em três grupos:

- Os que utilizam variação no tempo;
- Os que associam a matriz de entrada a um vetor de saída;
- Os que requerem particionamento do vetor de entrada baseada no resultado do vetor de saída.

5.2.1 Análise Diferencial

Dentre as técnicas de análise de sensibilidade, as mais fundamentais utilizam diferenciais parciais. Entretanto, as aplicações mais empregadas utilizam parâmetros de sensibilidade variáveis no tempo.

A análise de sensibilidade pode ser dividida em duas diferentes aproximações: a aproximação contínua e a aproximação discreta.

Na aproximação contínua, as equações diferenciais são diferenciadas para formar um conjunto separado de equações adjuntas contínuas. Na aproximação discreta, cria-se um sistema de equações $W(Q) = 0$. Estas equações discretizadas são diferenciadas para

formar um sistema de equações adjuntas discretas. As formulações adjuntas de análise de sensibilidade contínua e discreta são usadas devido à sua facilidade para processar um grande o número de variáveis do modelo. Observa-se na Fig. 5.2 um organograma das formulações dentro da análise de sensibilidade (O’neill, 1998).

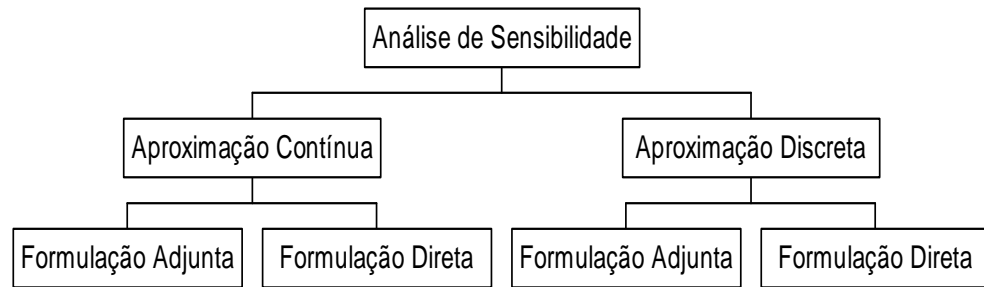


Figura 5.2 – Organograma das formulações dentro da análise de sensibilidade

Com a finalidade de consolidar a noção de sensibilidade é introduzida uma breve descrição de funções implícitas e explícitas. Define-se a função $f(h)$ como sendo explicitamente dependente no argumento h se, dado um valor numérico de h , for possível calcular diretamente o valor de $f(h)$. Por exemplo:

$$f(h) = h^2, \quad f(h) = \sin(h), \quad \text{etc.}$$

Por outro lado, a função $f(h)$ é implicitamente dependente do argumento h se, dado um valor numérico de h , o cálculo do valor de $f(h)$, depende de uma segunda variável dependente do argumento h . Por exemplo:

$$\frac{df}{dh} = \frac{\partial f}{\partial h} + \frac{\partial f}{\partial q_\alpha} \frac{dq_\alpha}{dh}$$

Estes cálculos são muitas vezes tediosos no contexto da análise de sensibilidade, onde é inevitável a busca de um valor de contorno para a solução do problema.

Cada formulação pode ser implementada por funções explícitas ou implícitas. Entretanto, tradicionalmente a análise de sensibilidade discreta tem sido empregada para funções implícitas, enquanto que análise de sensibilidade contínua tem sido usada para funções explícitas.

Assim sendo, aplicando-se a regra da cadeia para a função G obtém-se:

$$\frac{dG}{dh} = \frac{\partial G}{\partial h} + \frac{\partial G}{\partial q_\alpha} \frac{dq_\alpha}{dh} \quad (5.1)$$

onde: $\partial G/\partial h$ e $\partial G/\partial q_\alpha$ para $\alpha = 1, 2, \dots, N$, são fáceis de serem calculadas, visto que G é explicitamente encontrado em função de ambos os argumentos q_α e h . Portanto, o problema fica concentrado na escolha de uma técnica para o cálculo dos gradientes implícitos dq_α/dh para $\alpha = 1, 2, \dots, N$.

Para tal, em geral opta-se pelo uso da aproximação por diferenças finitas diretas por ser provavelmente a mais simples. Através da Eq. (5.2), a variável $q(h)$ utiliza um valor pré-determinado de h , repetindo-se então o cálculo para $h + \Delta h$ para obter $q(h + \Delta h)$. A aproximação diferencial de primeira ordem $\Delta q/\Delta h$ para a derivada dq/dh pode ser escrita como:

$$\frac{\Delta q}{\Delta h} = \frac{q(h + \Delta h) - q(h)}{\Delta h} \quad (5.2)$$

Sendo:

$$\frac{dq}{dh} = \frac{\Delta q}{\Delta h} + O(\Delta h) \quad (5.3)$$

O último termo da Eq. (5.3) indica a ordem de truncamento da aproximação. Também é possível usar a aproximação diferencial central de segunda ordem:

$$\frac{\Delta q}{\Delta h} = \frac{q(h + \Delta h) - q(h - \Delta h)}{2\Delta h} + O(\Delta h^2) \quad (5.4)$$

O problema mais sério de aproximação por diferenças finitas é a necessidade de seleccionar um bom passo Δh para o modelo de perturbação. O valor de Δh precisa ser pequeno o suficiente para reduzir o erro de aproximação e grande o suficiente para reduzir o erro de truncamento, isto é, corre-se o risco da condição de erro (*numerical round-off*) se tornar excessiva. À priori, não se dispõe de uma boa estimativa para um Δh ideal e, em alguns casos, não há possibilidade de dimensionar-se um Δh que gere um erro aceitável. Em suma, o método de diferenças finitas é de fácil implementação, mas sofre de ineficiência computacional que pode aumentar os possíveis erros. Felizmente existem outros métodos que são geralmente mais confiáveis.

5.2.1.1 Sistemas Discretizados Estáticos

A estática de alguns problemas de mecânica linear é descrita por sistemas de equações algébricas lineares da forma:

$$K(h)q(h) = Q(h) \quad (5.5)$$

onde tanto a matriz de rigidez $K = [K_{\alpha\beta}]$, com $\alpha, \beta = 1, 2, \dots, N$, como o vetor carregamento nodal externo $Q = \{Q_\alpha\}$ são considerados explicitamente dependentes do parâmetro do modelo h . Conseqüentemente, o vetor deslocamento nodal $q = \{q_\alpha\}$ também dependerá de h , cuja dependência é implícita na origem. Pode-se observar que na prática, a maioria dos problemas requer a definição das restrições na forma de funcionais em detrimento das funções.

Método da Diferenciação Direta – (MDD)

Para aplicar este método, deve-se inicialmente diferenciar a Eq. (5.5) em função de h . Reordenando-se os termos obtidos nesta diferenciação, obtém-se:

$$K \frac{dq}{dh} = \frac{dQ}{dh} - \frac{dK}{dh} q \quad (5.6)$$

O lado direito da Eq. (5.6) pode ser facilmente calculado desde que seja dada a solução do vetor q pois, a dependência de K e Q em h é explicável. Assim, a Eq. (5.6) pode ser diretamente utilizada para calcular a derivada dq/dh . A sensibilidade da função resposta G é obtida através da Eq. (5.1).

A vantagem deve-se à simplicidade no conceito, onde a matriz do sistema na condição de derivada do deslocamento é a matriz de rigidez do sistema original. Assim, para se obter dq/dh deve-se:

- Resolver a Eq. (5.5) para q ;
- Calcular o lado direito da Eq. (5.6), o chamado pseudo-carregamento;
- Resolver a Eq. (5.6) para dq/dh , usando a já decomposta matriz de rigidez, só que efetivamente somente uma substituição precisa ser executada com o vetor pseudo-carregado.

Observa-se que o método é relativamente insensível quanto ao número de restrições impostas ao problema. Tendo sido calculado dq/dh , o gradiente de sensibilidade para cada restrição pode facilmente ser determinado pela Eq. (5.1), na maioria das vezes, sem custo computacional adicional. Entretanto, o método apresenta um inconveniente: requer o cálculo de cada parâmetro independentemente dos outros parâmetros, o número de parâmetros pode ser muito significativo na prática, ou seja, inviabilizando sua utilização.

Método do Sistema Adjunto – (MSA)

Uma técnica alternativa para o MDD, é o método do sistema adjunto (MSA). Este método baseia-se na introdução de um vetor variável adjunto N-dimensional $\lambda = \lambda(h)$, definido como um conjunto de equações lineares de forma:

$$K(h)\lambda(h) = \left(\frac{\partial G}{\partial q} \right)^T \quad (5.7)$$

ou

$$\lambda(h) = K^{-1}(h) \left(\frac{\partial G}{\partial q} \right)^T \quad (5.8)$$

onde: G é a função de restrição.

Usando a simetria da matriz de rigidez e substituindo $\partial G/\partial q$ da Eq. (5.7), a Eq. (5.1) pode ser rescrita como:

$$\frac{dG}{dh} = \frac{\partial G}{\partial h} + \lambda^T K \frac{dq}{dh} \quad (5.9)$$

ou

$$\frac{dG}{dh} = \frac{\partial G}{\partial h} + \lambda^T \left(\frac{dQ}{dh} - \frac{dK}{dh} q \right) \quad (5.10)$$

As equações descrevem a base para o procedimento MSA computacional que consiste nas seguintes etapas:

- Resolver a Eq. (5.5) para q ;

- Resolver a Eq. (5.7) para λ . A Eq. (5.7) define o problema adjunto, que é estritamente similar ao primeiro problema (5.5). A diferença está no vetor carregamento Q da Eq. (5.5) usado pelo pseudo-carregamento $\partial G/\partial q$;
- A Eq. (5.10) é usada diretamente para encontrar a resposta da sensibilidade $\partial G/\partial h$, sem ser necessário o cálculo de dq/dh .

À primeira vista há pouca diferença entre o MDD e o MSA. Entretanto, para problemas reais, a performance computacional de ambos os métodos pode divergir consideravelmente (Kleiber *et al.*, 1997). Ao contrário do MDD, a eficiência do MSA é negativamente influenciada pelo acréscimo do número de restrições do problema (R), e sendo amplamente insensíveis às variáveis do modelo (V) e ao número de carregamentos (C). A eficiência computacional do MDD versus o MSA depende da taxa de R para $V \times C$. Para o caso de $V \times C < R$, o MDD é mais indicado, enquanto que na situação oposta, $V \times C > R$, o MSA é mais indicado.

Para se obter uma outra visão da teoria empregada, deve-se retornar às instruções e repetir as deduções das equações MSA, apenas empregando uma técnica mais geral de multiplicadores de Lagrange.

Considera-se o estado geral da equação no presente contexto como:

$$R = Q(h) - K(h)q(h) = 0 \quad (5.11)$$

O vetor N-dimensional dos multiplicadores de Lagrange, λ , é introduzido apenas considerando uma função de restrição modificada na forma:

$$G^*[\lambda(h), q(h); h] = G[q(h); h] + \lambda^T(h)R(q(h); h) \quad (5.12)$$

Após diferenciação em função de h , Eq. (5.12) transforma-se em:

$$\frac{dG^*}{dh} = \underbrace{\frac{\partial G}{\partial h} + \frac{\partial G}{\partial q} \frac{dq}{dh}}_{\frac{dG}{dh}} + \frac{d\lambda^T}{dh} \underbrace{(Q - Kq)}_R + \lambda^T \underbrace{\left(\frac{dQ}{dh} - \frac{dK}{dh} q - K \frac{dq}{dh} \right)}_{\frac{dR}{dh}} \quad (5.13)$$

Se R for nulo, a Eq. (5.13) pode também ser rescrita como:

$$\frac{dG^*}{dh} = \frac{\partial G}{\partial h} + \lambda^T \left(\frac{dQ}{dh} - \frac{dK}{dh} q \right) + \left(\frac{\partial G}{\partial q} - \lambda^T K \right) \frac{dq}{dh} \quad (5.14)$$

Pode-se supor que os multiplicadores de Lagrange sejam semelhantes e que a função G seja estacionária com respeito à primeira variável q . Assim:

$$\delta G^* = \frac{\partial G^*}{\partial q} \delta q = \left(\frac{\partial G}{\partial q} - \lambda^T K \right) \delta q = 0 \quad (5.15)$$

Em outras palavras, seleciona-se λ para eliminar da Eq. (5.14) o coeficiente $d q / d h$:

$$\frac{d G^*}{d h} = \frac{\partial G}{\partial h} + \lambda^T \left(\frac{d Q}{d h} - \frac{d K}{d h} q \right) \quad (5.16)$$

No caso mais geral descrito pela Eq. (5.13):

$$\frac{d G^*}{d h} = \frac{\partial G}{\partial h} + \frac{\partial G}{\partial q} \frac{d q}{d h} + \frac{d \lambda^T}{d h} R + \lambda^T \left(\frac{\partial R}{\partial h} + \frac{\partial R}{\partial q} \frac{d q}{d h} \right) \quad (5.17)$$

Observa-se que a Eq. (5.17) também implica na relação:

$$\frac{d G^*}{d h} = \frac{d G}{d h} \quad (5.18)$$

Obtendo-se assim uma relação fundamental MSA:

$$\frac{d G}{d h} = \frac{\partial G}{\partial h} + \lambda^T \frac{\partial R}{\partial h} \quad (5.19)$$

equivalente a:

$$\frac{d G}{d h} = \frac{\partial G^*}{\partial h} \quad (5.20)$$

Para uma dada função de restrição $G(q(h); h)$ e função de estado $R(q(h); h) = 0$, o gradiente de sensibilidade pode ser obtido como:

$$\frac{d G}{d h} = \frac{\partial G^*}{\partial h} \quad (5.21)$$

onde:

$$G^* = G + \lambda^T R \quad (5.22)$$

e λ satisfaz a equação:

$$\frac{\partial G}{\partial q} + \lambda^T \frac{\partial R}{\partial q} = 0 \quad (5.23)$$

O modelo de derivada dG/dh da função original G é substituído pelo modelo de derivada explícita, $\partial G^*/\partial h$, do funcional estendido G^* . Desta forma, torna-se necessário calcular o multiplicador de Lagrange, λ , ou “variável adjunta”.

5.2.1.2 Sistemas Discretizados Dinâmicos

O comportamento dinâmico do sistema estrutural linear semi-discretizado é descrito pelo conjunto de equações ordinárias de segunda ordem na forma:

$$\mathbf{M}(h)\ddot{\mathbf{q}}(\tau;h) + \mathbf{C}(h)\dot{\mathbf{q}}(\tau;h) + \mathbf{K}(h)\mathbf{q}(\tau;h) = \mathbf{Q}(\tau;h) \quad \tau \in [0, \infty] \quad (5.24)$$

onde tanto a massa, M , o amortecimento, C , e a matriz de rigidez, K , assim como os vetores carregamento externos, Q , são funções explícitas do parâmetro modelo h , enquanto o vetor deslocamento modal, q , depende de h somente implicitamente. O sistema de equações (5.24) é completado pelas condições iniciais homogêneas:

$$q(0;h) = 0 \quad (5.25)$$

$$\dot{q}(0;h) = 0$$

A forma simples das condições iniciais deve-se ao significado não restritivo. Outras formas de condição inicial, por exemplo:

$$q(0;h) = {}^0q(h) \quad (5.26)$$

$$\dot{q}(0;h) = {}^0\dot{q}(h)$$

podem ser reduzidas à Eq. (5.25). Para isto, define-se uma solução particular de problemas de valor inicial Eq.(5.24) e Eq.(5.26) na forma:

$$q^*(\tau;h) = {}^0q(h) - {}^0\dot{q}(h)\tau \quad (5.27)$$

empregando-se uma nova variável:

$$r(\tau;h) = q(\tau;h) - q^*(\tau;h) \quad (5.28)$$

e substituindo-se a Eq. (5.28) na Eq. (5.24) e Eq. (5.26) obtendo-se:

$$\begin{aligned} M(h)\ddot{r}(\tau;h) + C(h)\dot{r}(\tau;h) + K(h)r(\tau;h) \\ = Q(\tau;h) - C(h)\dot{q}^*(\tau;h) + K(h)q^*(\tau;h) \end{aligned} \quad (5.29)$$

com:

$$r(0;h)=0 \quad (5.30)$$

$$\dot{r}(0;h)=0$$

Método da Diferenciação Direta – (MDD)

Uma classe de restrições apropriada, encontrada tipicamente em modelos práticos envolvendo análise dinâmica, pode ser representada de maneira única como:

$$g(h) = G[q(\tau;h);h] = g[q(\bar{t};h);h] + \int_0^{\bar{t}} \tilde{g}(q(\tau;h);h) d\tau \quad (5.31)$$

O objetivo da análise de sensibilidade é avaliar a primeira derivada da funcional G com respeito ao parâmetro h . A regra da cadeia da diferenciação leva à expressão:

$$\frac{d g}{d h} = \frac{\partial \bar{g}}{\partial h} + \frac{\partial \bar{g}}{\partial q} \frac{d \bar{q}}{d h} + \int_0^{\bar{t}} \left(\frac{\partial \tau \tilde{g}}{\partial h} + \frac{\partial \tau \tilde{g}}{\partial q} \frac{\partial \tau q}{d h} \right) d \tau \quad (5.32)$$

em que a notação compacta também foi empregada:

$$q(\tau,\cdot) \equiv^{\tau} q \quad (5.33)$$

Diferenciando-se a Eq. (5.24) com respeito à h até o final do tempo decorrido no $\tau = t + \Delta t$:

$$\begin{aligned} & M \frac{d^{t+\Delta t} \ddot{q}}{d h} + C \frac{d^{t+\Delta t} \dot{q}}{d h} + K \frac{d^{t+\Delta t} q}{d h} \\ &= \frac{d^{t+\Delta t} Q}{d h} - \frac{d M}{d h} t + \Delta t \ddot{q} - \frac{d C}{d h} t + \Delta t \dot{q} - \frac{d K}{d h} t + \Delta t q \end{aligned} \quad (5.34)$$

Redefinindo o MDD para problemas de estática, a aproximação anterior pode ser logicamente chamada de método da diferenciação direta para problemas de dinâmica linear.

Método do Sistema Adjunto – (MSA)

Analogamente, ao caso estático, existe uma aproximação alternativa para problemas de sensibilidade dinâmica. Para derivar a equação apropriada, inicia-se através da definição de um funcional estendido.

$$\begin{aligned} g^*(h) &= G^*[q(\tau; h); \lambda(\tau; h); h] \\ &= G[q(\tau; h); h] + \int_0^{\bar{t}} \lambda^T(\tau; h) R(q(\tau; h); h) d\tau \end{aligned} \quad (5.35)$$

onde $\lambda(\tau; h)$ é o vetor adjunto (ou multiplicador de Lagrange) e R é o resíduo:

$$R(q(\tau; h); h) = Q(\tau; h) - M(h)\ddot{q}(\tau; h) - C(h)\dot{q}(\tau; h) - K(h)q(\tau; h) \quad (5.36)$$

A substituição da equação de estado na forma fundamental, Eq. (5.24), pela Eq. (5.36) resulta, em:

$$R = 0 \quad (5.37)$$

Seja G é um funcional da forma da Eq. (5.35), tem-se que:

$$\frac{dG^*}{dh} = \frac{dG}{dh} + \int_0^{\bar{t}} \left(\frac{d\lambda^T}{dh} R + \lambda^T \frac{dR}{dh} \right) d\tau \quad (5.38)$$

$$\frac{d^\tau R}{dh} = 0 \quad (5.39)$$

$$\frac{dG^*}{dh} = \frac{dG}{dh} \quad (5.40)$$

Supondo-se que o vetor adjunto é selecionado de modo semelhante para fazer a funcional estendida G^* estacionária com respeito às variáveis primárias $q(\tau; h)$:

$$\frac{\partial G^*}{\partial q} \circ \delta q = \frac{\partial G}{\partial h} \circ \delta q + \int_0^{\bar{t}} \lambda^T \frac{\partial^\tau R}{\partial q} \delta^\tau q d\tau = 0 \quad (5.41)$$

Onde o símbolo “ \circ ” é definido pela relação:

$$\frac{\partial G}{\partial q} \circ \delta q = \frac{\partial^{\bar{t}} g}{\partial q} \delta^{\bar{t}} q + \int_0^{\bar{t}} \frac{\partial^\tau \tilde{g}}{\partial q} \delta^\tau q d\tau = 0 \quad (5.42)$$

$$\begin{aligned} \frac{dG^*}{dh} &= \frac{\partial G^*}{\partial h} + \frac{\partial G^*}{\partial q} \circ \frac{dq}{dh} + \frac{\partial G^*}{\partial \lambda} \circ \frac{\partial \lambda}{\partial h} \\ &= \frac{\partial G^*}{\partial h} + \frac{\partial G^*}{\partial q} \circ \frac{dq}{dh} + \int_0^{\bar{t}} \frac{d^\tau \lambda^T}{dh} \tau R d\tau \end{aligned} \quad (5.43)$$

Em que o segundo termo desaparece por causa da Eq. (5.41) e o terceiro termo desaparece por causa do ${}^\tau R = 0$ para todo $\tau \in [0, \bar{t}]$, na relação:

$$\frac{dG^*}{dh} = \frac{\partial G^*}{\partial h} \quad (5.43)$$

$$\frac{dG}{dh} = \frac{\partial G^*}{\partial h} \quad (5.44)$$

Esta é a expressão crucial para computar o gradiente de sensibilidade dG/dh , uma vez que seu lado direito envolve somente o modelo de derivada parcial, que é, pela definição, explicitamente dado em função de h .

$$\frac{dG}{dh} = \frac{\partial \bar{g}}{\partial h} + \int_0^{\bar{t}} \frac{\partial {}^\tau \tilde{g}}{\partial h} d\tau + \int_0^{\bar{t}} {}^\tau \lambda^T \frac{\partial {}^\tau R}{\partial h} d\tau \quad (5.45)$$

onde:

$$\frac{\partial {}^\tau R}{\partial h} = \frac{d {}^\tau R}{dh} - \left(\frac{dM}{dh} \ddot{q} + \frac{dC}{dh} \dot{q} + \frac{dK}{dh} q \right) \quad (5.46)$$

Quando \bar{g} , ${}^\tau \tilde{g}$, ${}^\tau Q$, M , C e K são todas funções explícitas de h , então suas derivadas com relação a h podem ser rapidamente calculadas. As duas primeiras oriundas da solução primária do vetor q conhecido. Reescrevendo-se a Eq. (5.43):

$$\begin{aligned} \frac{\partial G^*}{\partial q} \circ \delta q &= \frac{\partial \bar{g}}{\partial q} \delta \bar{q} + \int_0^{\bar{t}} \frac{\partial {}^\tau \tilde{g}}{\partial q} \delta {}^\tau q d\tau \\ &+ \int_0^{\bar{t}} {}^\tau \lambda^T \left(M \delta {}^\tau \ddot{q} + C \delta {}^\tau \dot{q} + K \delta {}^\tau q \right) \delta {}^\tau q d\tau = 0 \end{aligned} \quad (5.47)$$

Integrando-se por partes os termos inercial e amortecido do lado direito da equação, obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial G^*}{\partial q} \circ \delta q &= -\bar{\lambda}^T M \delta \bar{q} + \left(\frac{\partial \bar{g}}{\partial q} + \bar{\lambda}^T M - \bar{\lambda}^T C \right) \delta \bar{q} \\ &+ \int_0^{\bar{t}} \left[\frac{\partial {}^\tau \tilde{g}}{\partial q} - \left({}^\tau \ddot{\lambda}^T M - {}^\tau \dot{\lambda}^T C + {}^\tau \lambda^T K \right) \right] \delta {}^\tau q d\tau = 0 \end{aligned} \quad (5.48)$$

A Eq. (5.48) será sempre satisfeita caso o vetor adjunto ${}^{\tau}\lambda$ satisfaça a equação diferencial de segunda ordem:

$$M{}^{\tau}\ddot{\lambda} - C{}^{\tau}\dot{\lambda} + K{}^{\tau}\lambda = \left(\frac{\partial {}^{\tau}\mathbf{g}}{\partial q} \right)^T \quad \tau \in [0, \bar{t}] \quad (5.49)$$

Com as condições em função do tempo no $\tau = t$ dados como:

$${}^{\bar{t}}\dot{\lambda} = M^{-1} \left[C{}^{\bar{t}}\lambda - \left(\frac{\partial {}^{\bar{t}}\mathbf{g}}{\partial q} \right)^T \right] \quad {}^{\bar{t}}\lambda = 0 \quad (5.50)$$

Para encontrar o valor do dG/dh , último passo para encontrar a análise de sensibilidade em resposta dinâmica, deve-se:

- Resolver para $q(\tau; h)$ o problema de valor inicial consistindo de equações de equilíbrio dinâmico, Eq. (5.25), em $[0, \bar{t}]$ e, pelas condições iniciais, Eq. (5.24);
- Resolver para $\lambda(\tau; h)$ o problema de valor final formando pelo sistema de equações adjuntas (co-estado) Eq. (5.49) no $[0, \bar{t}]$ e condições finais, Eq. (5.50);
- Substituir as funções obtidas, $q(\tau; h)$ e $\lambda(\tau; h)$, na Eq. (5.45).

Pode-se observar que a teoria básica de MSA apresentada no item anterior aplica-se a problemas aqui discutidos e emprega as mesmas equações de sensibilidade.

No Apêndice 3 estão apresentados vários outros métodos de análise de sensibilidade. Métodos que utilizam variação do tempo, que associam a matriz de entrada a um vetor de saída, análise estatísticas e problemas aplicados que podem ser utilizados em diversas áreas da ciência.

Capítulo 6

ANÁLISE DE SENSIBILIDADE APLICADA AO MODELO

6.1 Metodologia Proposta

Este capítulo se propõe a analisar o comportamento dos sinais do modelo numérico desenvolvido, a fim de buscar alternativas para sua validação como ferramenta para estudo de conforto vibracional em automóveis.

De posse das informações obtidas através do comparativo entre o modelo numérico e os dados experimentais, partiu-se em busca de uma metodologia que pudesse simplificar e facilitar esta fase de estudo e pesquisa.

A análise de sensibilidade foi utilizada como ferramenta para estudar e estimar as variações apresentadas no modelo numérico e simultaneamente identificar os parâmetros mais susceptíveis a alterações no modelo numérico. Para isto utilizou-se o Método das Diferenças Finitas apresentado no Capítulo 5. Este método foi escolhido por apresentar maior facilidade de implementação e compatibilidade ao modelo numérico desenvolvido apesar deste apresentar um tempo maior de processamento (Burg, 2000).

6.2 Desenvolvimento da Análise de Sensibilidade

A primeira parte da análise foi desenvolvida a partir do modelo de pista lisa na configuração padrão do veículo e analisado após alteração de alguns parâmetros, em seguida todos os parâmetros em conjunto foram avaliados.

As Figs. 6.1 e 6.2 caracterizam o parâmetro amortecimento do pneu (C_t) através da densidade espectral das rodas dianteiras e traseiras. Identifica-se entre 3 e 17 Hz, a faixa de atuação do amortecimento dos pneus na DSP das rodas.

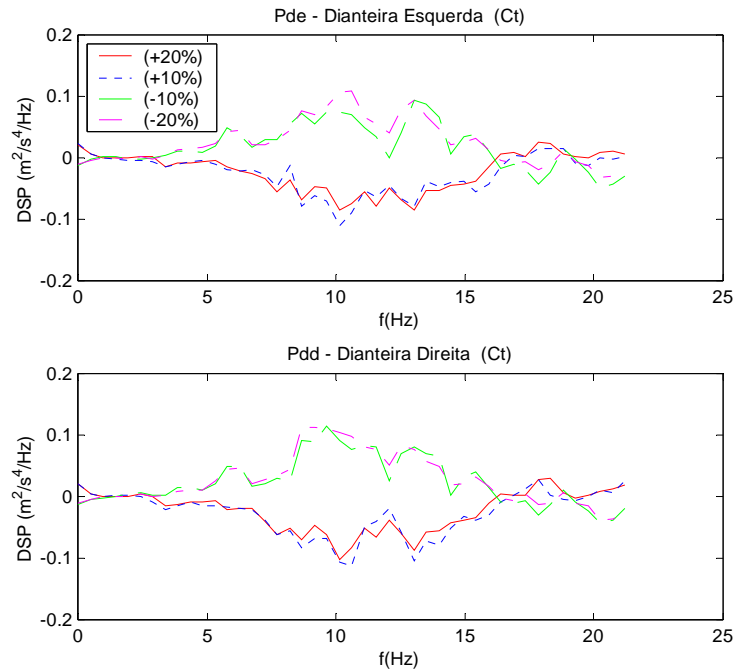


Figura 6.1 – Sensibilidade das DSP das rodas dianteiras em função do parâmetro amortecimento do pneu (C_t) em pista lisa.

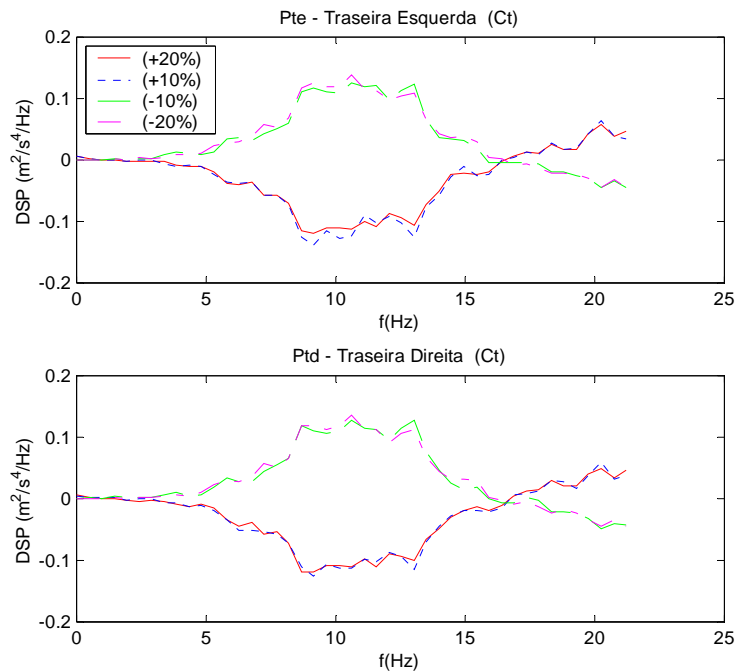


Figura 6.2 – Sensibilidade das DSP das rodas traseiras em função do parâmetro amortecimento do pneu (C_t) em pista lisa.

O parâmetro amortecimento do pneu (C_t) proporciona a elevação da amplitude da DSP das rodas quando este diminui seu valor nominal e vice-versa.

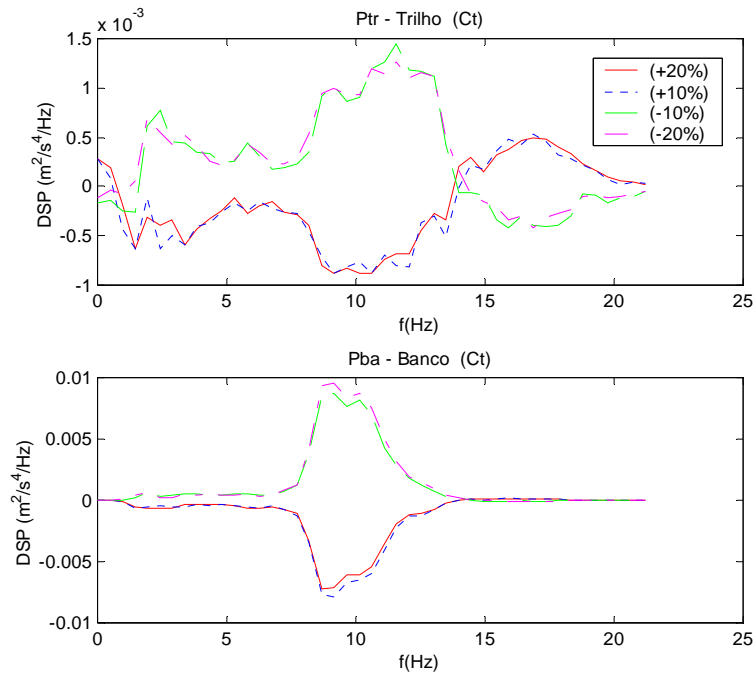


Figura 6.3 – Sensibilidade das DSP do trilho e do banco em função do parâmetro amortecimento do pneu (C_t) em pista lisa.

Na Fig. 6.3 observa-se uma frequência em torno de 2 Hz na DSP do trilho do banco, esta frequência não é totalmente amortecida pela suspensão do veículo. O modelo apresenta uma variação de 1 a 5 Hz e pelas suas características pode-se observar um *leakage* (vazamento) nas frequências próximas de 10 Hz. Um detalhe importante é que o pneu com constante de amortecimento maior atenua frequências de 1 a 15 Hz, a partir desta frequência o pneu atua de maneira contrária acentuando as frequência de 15 a 20 Hz. Pode-se concluir que pneus com constante de amortecimento maior oferecem mais conforto aos ocupantes do veículo.

A DSP do trilho e banco do motorista é apresentada na Fig. 6.4, na qual houve uma variação significativa na amplitude do sinal na frequência de 10 Hz. O resultado da análise indica um amortecimento maior da frequência de 10 Hz quando se incrementa o amortecimento do Banco (C_{se}), e vice-versa.

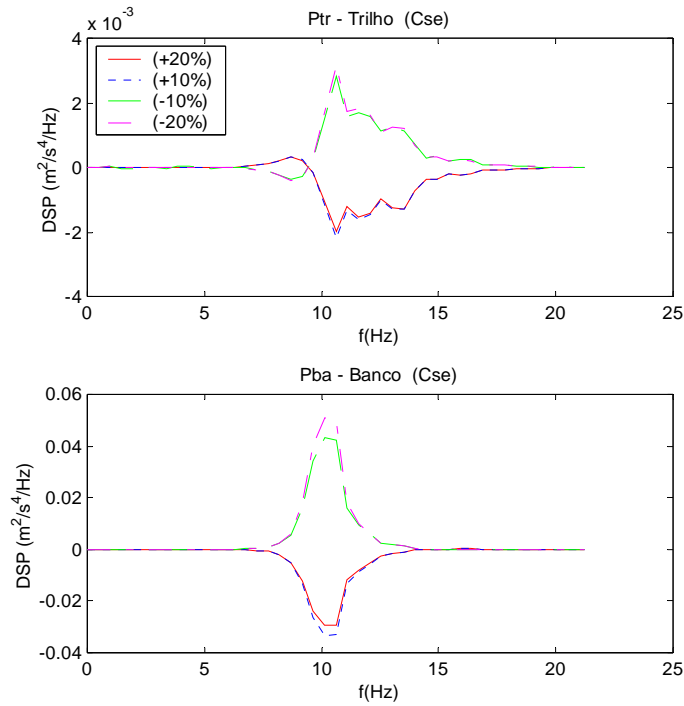


Figura 6.4 – Sensibilidade das DSP do trilho e do banco em função do parâmetro amortecimento do banco (C_{se}) em pista lisa.

A análise de cada parâmetro pode ser considerada um bom indicativo, mas as diferenças na amplitude dos sinais podem mascarar os resultados se os parâmetros forem analisados em separado. Portanto, um bom indicativo é apresentar uma análise de todos os parâmetros em conjunto.

Nas Figs. 6.5, 6.6 e 6.7 são representados os principais parâmetros de amortecimento e rigidez do modelo analisado em conjunto, a fim de identificar quais parâmetros são mais sensíveis ao modelo.

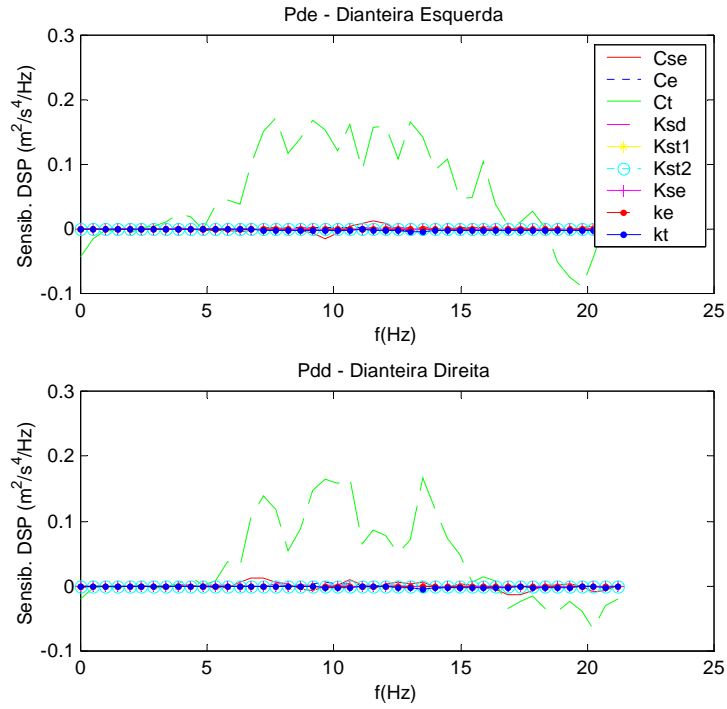


Figura 6.5 – Influência de cada parâmetro nas rodas dianteiras, utilizando os modelos de pista lisa e pneu ponto de contato.

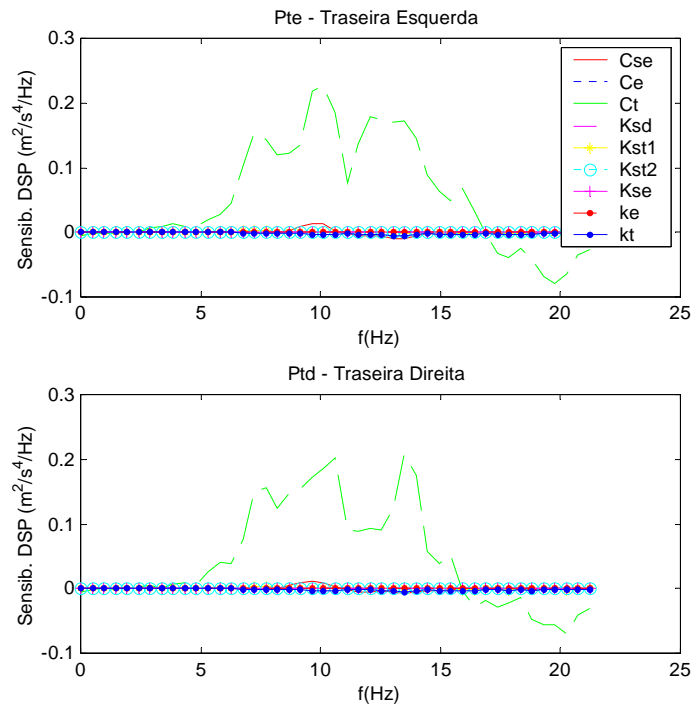


Figura 6.6 – Influência de cada parâmetro nas rodas traseiras, utilizando os modelos de pista lisa e pneu ponto de contato.

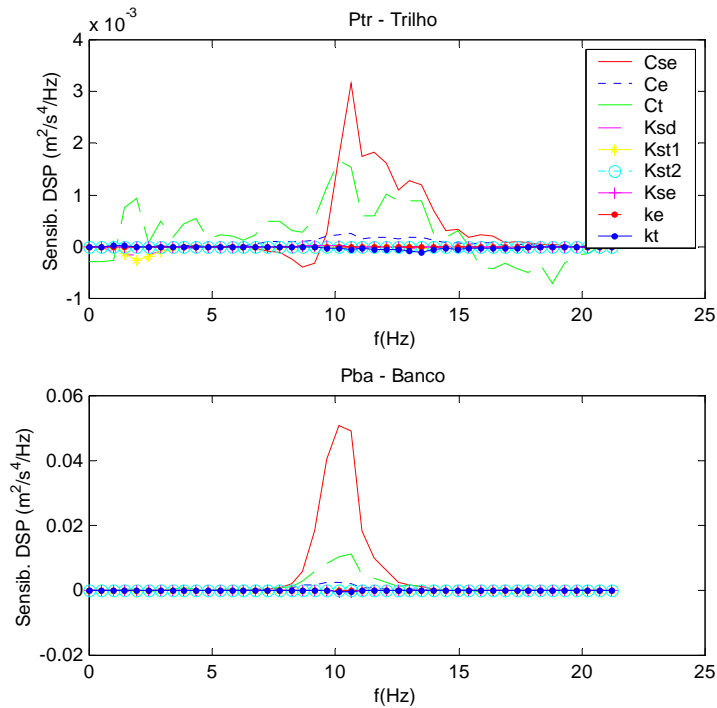


Figura 6.7 – Influência de cada parâmetro no trilho e banco, utilizando os modelos de pista lisa e pneu ponto de contato.

O parâmetro de amortecimento do pneu (C_t), apresentado nas Figs. 6.5 e 6.6, reduzido a uma taxa relativa de 20% é o parâmetro que mais influencia o comportamento da DSP das rodas dianteiras e traseiras. Esta influência ocorre de 5 Hz até aproximadamente 18 Hz, no modelo numérico do trilho do banco ocorre na faixa entre 2 Hz e 17 Hz, sendo responsável também, por uma frequência de 10 Hz de menor amplitude no banco do motorista.

No modelo do trilho e banco do motorista destaca-se a contribuição do parâmetro amortecimento (C_{se}) para a frequência de 10 Hz, conforme observado na Fig. 6.7.

A frequência de 10 Hz é originária da frequência natural da suspensão dianteira ou devido a frequência natural do banco do motorista, a qual, situa-se próxima dos 10 Hz. Assim, seria necessário um ajuste no parâmetro amortecimento do banco do motorista, o que não foi realizado. Na verdade suas hipóteses estavam corretas, porém suas conclusões não permitiram determinar se as duas situações anteriormente descritas eram responsáveis pela diferença na amplitude mostrada no comparativo da DSP do banco do motorista.

Os testes agora apontam para a análise de sensibilidade em pista irregular, veículo de testes na configuração padrão e modelo de pneu ponto de contato.

O procedimento será o mesmo, segue-se apenas uma caracterização de algum dos parâmetros e logo em seguida um comparativo entre todos os parâmetros.

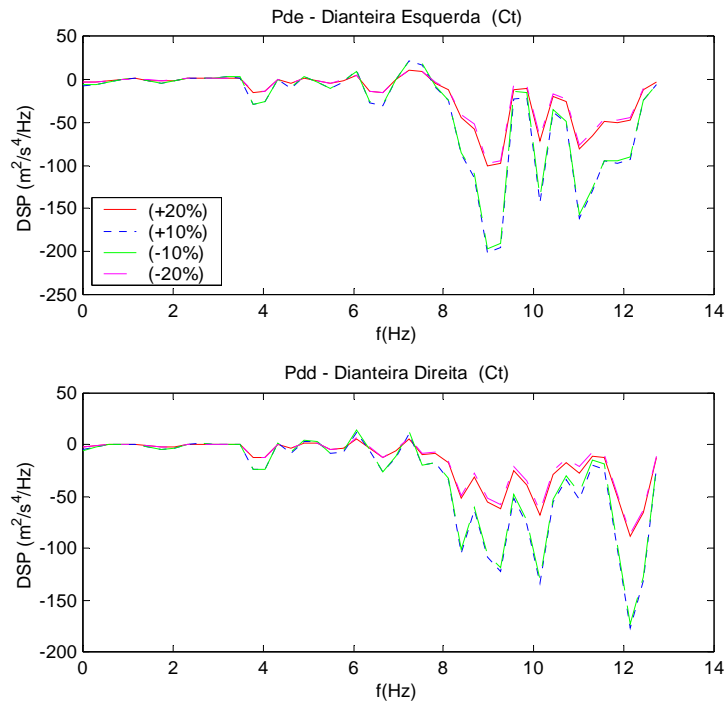


Figura 6.8 – Sensibilidade das DSP das rodas dianteiras em função do parâmetro amortecimento do pneu (C_t) em pista irregular.

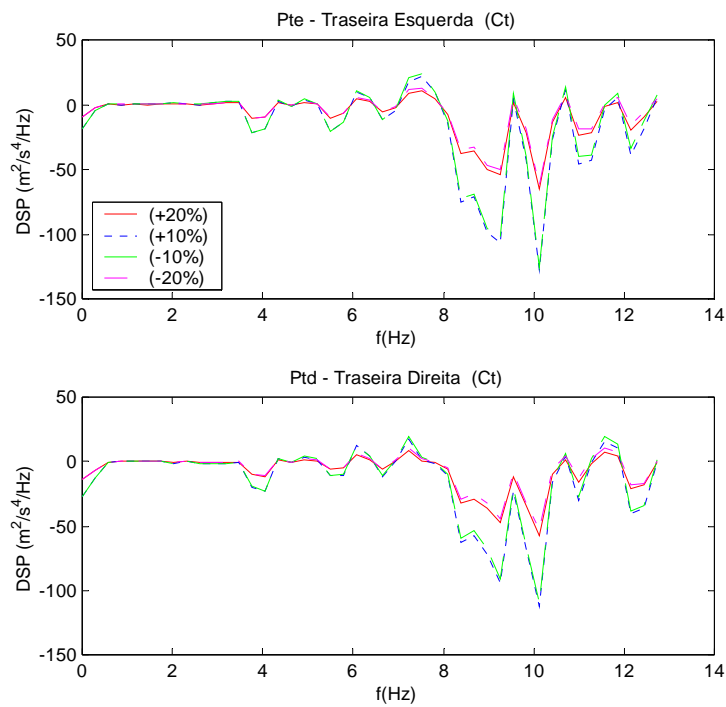


Figura 6.9 – Sensibilidade das DSP das rodas traseiras em função do parâmetro amortecimento do pneu (C_t) em pista irregular.

As Figs. 6.8 e 6.9 apresentam uma característica pouco peculiar, pois as alterações no valor nominal do amortecimento do pneu (C_t) não informam de maneira clara o comportamento do parâmetro. Nota-se que a DSP das rodas apresentam pouca sensibilidade quando se varia o amortecimento do pneu.

Na Fig. 6.10 comportamentos semelhantes ocorrem na DSP do trilho e banco dos ocupantes. Até o momento não se pode fazer uma referência concreta sobre o comportamento da análise de sensibilidade.

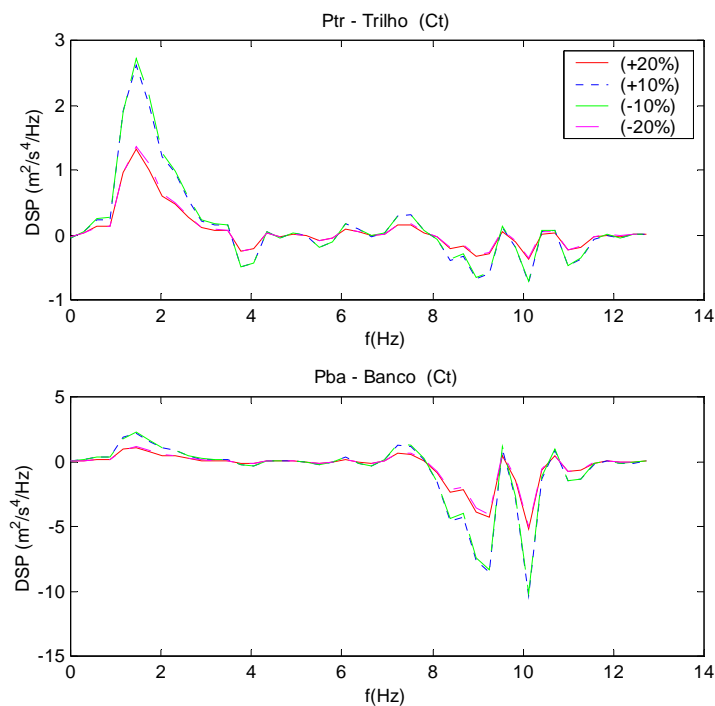


Figura 6.10 – Sensibilidade das DSP do trilho e banco em função do parâmetro amortecimento do pneu (C_t) em pista irregular.

A Fig. 6.11 apresenta o parâmetro amortecimento do banco que possui as mesmas características do parâmetro anterior.

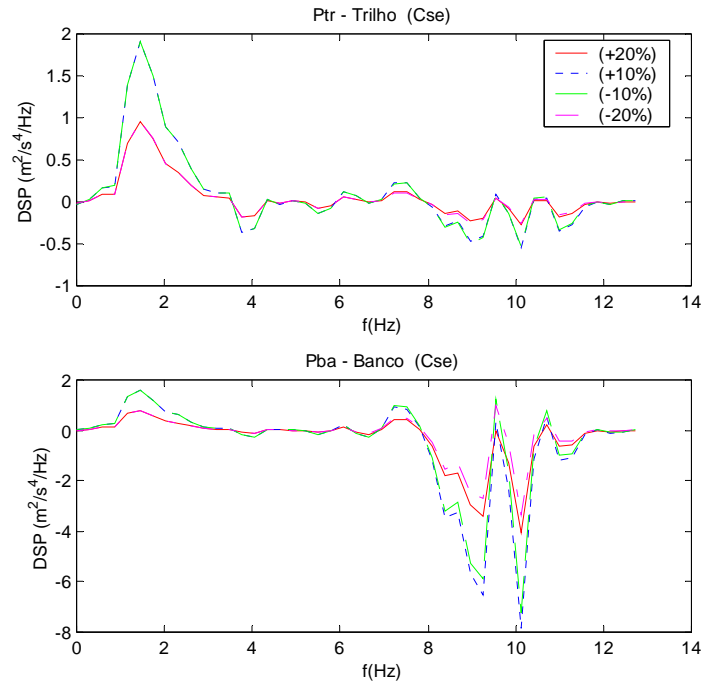


Figura 6.11 – Sensibilidade das DSP do trilho e banco em função do parâmetro amortecimento do banco (C_{se}) em pista irregular.

Para compreender melhor os resultados buscou-se agregar a todos os parâmetros, o mesmo procedimento descrito no modelo pista lisa.

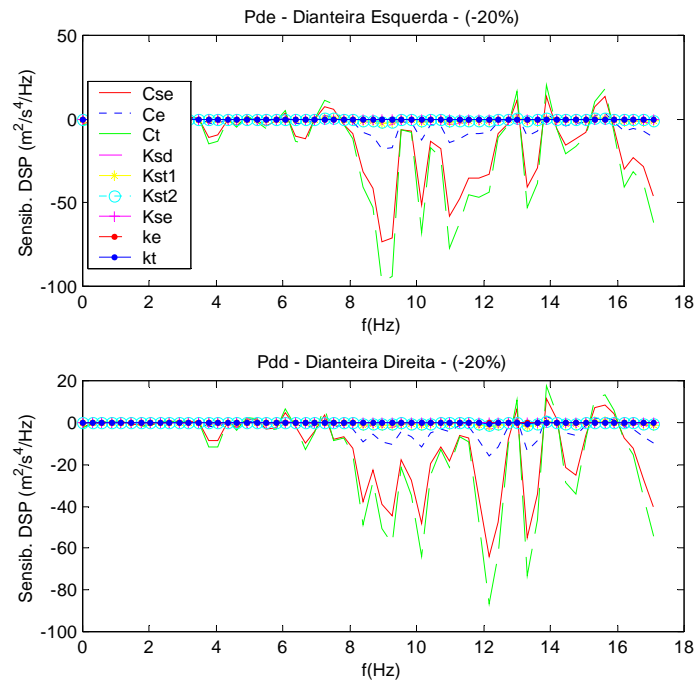


Figura 6.12 – Influência de cada parâmetro nas rodas dianteiras, utilizando os modelos de pista irregular e pneu ponto de contato.

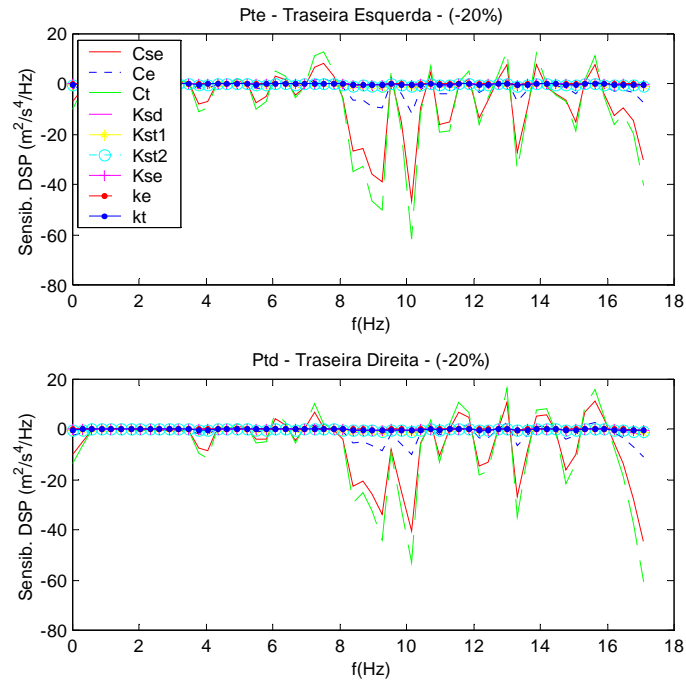


Figura 6.13 – Influência de cada parâmetro nas rodas traseiras, utilizando os modelos de pista irregular e pneu ponto de contato.

Da análise das Figs. 6.12 e 6.13, referente a DSP das rodas dianteiras e traseiras, percebe-se que os amortecimentos do pneu e do banco são os parâmetros mais representativos.

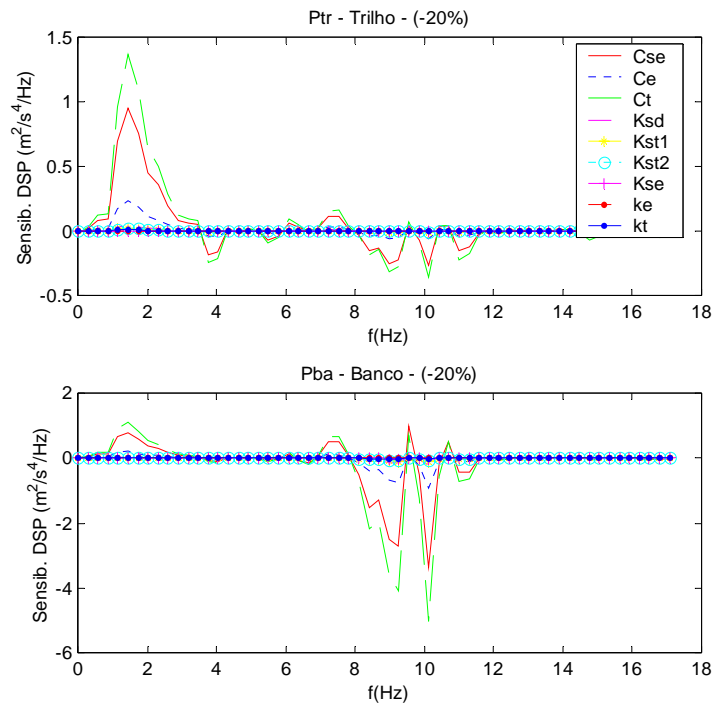


Figura 6.14 – Influência de cada parâmetro no trilho e banco, utilizando os modelos de pista irregular e pneu ponto de contato.

Estes apresentam pouca sensibilidade quando se altera seu valor nominal, fato que pode ser confirmado nas Figs. 6.8 e 6.9.

Na Fig. 6.14, a análise de sensibilidade torna-se inoperante nestes casos. Porque as variações apresentadas apontam para a baixa sensibilidade do parâmetro amortecimento do pneu. Das figuras apresentadas pode-se somente ressaltar as informações referentes à sensibilidade da frequência em função dos parâmetros.

Pode-se concluir que o motivo para a baixa amplitude da sensibilidade do parâmetro amortecimento do pneu e banco deve-se ao modelo de pista irregular gerada.

A partir de características particulares da pista irregular, algumas considerações podem ser feitas, como exemplo:

- As excitações operam em frequências mais baixas;
- O movimento dominante ocorre nas suspensões;
- Análises inconclusivas devido ao fato das propriedades dos pneus e banco não serem capazes de influenciar fortemente os movimentos dominantes.
- Em velocidade mais baixa, maior transmissibilidade através dos pneus (rigidez elevada).

O modelo de pista irregular pode ter amplificado as irregularidades da pista e transmitido o sinal amplificado para o amortecimento da suspensão. Desta forma, pode-se constatar, a primeira vista, que o modelo possui uma grande influência a um fator não analisado no modelo. O amortecimento da suspensão não foi avaliado por se tratar de uma equação desenvolvida numericamente em função da velocidade do deslocamento.

Pode-se considerar que nesta análise de sensibilidade, somente os parâmetros de amortecimento apresentam elevados índices de sensibilidade. Não se pode levar como uma regra, neste estudo de caso, os parâmetros de rigidez foram suprimidos pelos amortecimentos que tiveram maior influência e possuem características não-lineares.

Conclui-se também que após o ajuste do modelo de ponto de contato, automaticamente está sendo corrigido o modelo de pneu comprimento de contato, a menos que este apresente falhas na simulação.

Capítulo 7

RESULTADOS

No Capítulo 6 a análise de sensibilidade foi utilizada como ferramenta para solucionar o modelo numérico proposto.

Após analisar em separado a influência de cada tipo de pista e modelo de pneu, pode-se então considerar a influência de cada parâmetro com o intuito de condicionar melhor o modelo às condições experimentais e, se possível, validar o modelo às condições de conforto.

O que se busca é reduzir o efeito da frequência natural, de 10 Hz, da suspensão dianteira na DSP do trilho e banco dos ocupantes, analisar e procurar reduzir a frequência de corpo rígido da carroceria que trabalha próxima a 2 Hz na DSP do trilho e banco dos ocupantes e provavelmente reduzir a diferença de amplitude do sinal numérico e experimental.

Através de conclusões preliminares, pode-se indicar como fontes responsáveis pela diferença entre os sinais numéricos e experimentais os seguintes fatores:

- Modelo de pista;
- Amortecimento de banco;
- Amortecimento do pneu.

Conclui-se, portanto, que o modelo apresenta imprecisões em características fundamentais.

O próximo passo foi agir corretivamente nos pontos indicados. No modelo de pista lisa foi analisado o perfil gerado e constatou-se que apresentava irregularidades no seu desenvolvimento, implementou-se então alguns ajustes. Primeira alteração se deve ao gerador de perfil randômico, ele apresentava erros de modelamento que alterava o perfil da pista amplificado das irregularidades e descaracterizando o modelo matemático.

Em primeira análise pode-se constatar uma aproximação entre os sinais, como se pode observar na Fig. 7.1 e 7.2.

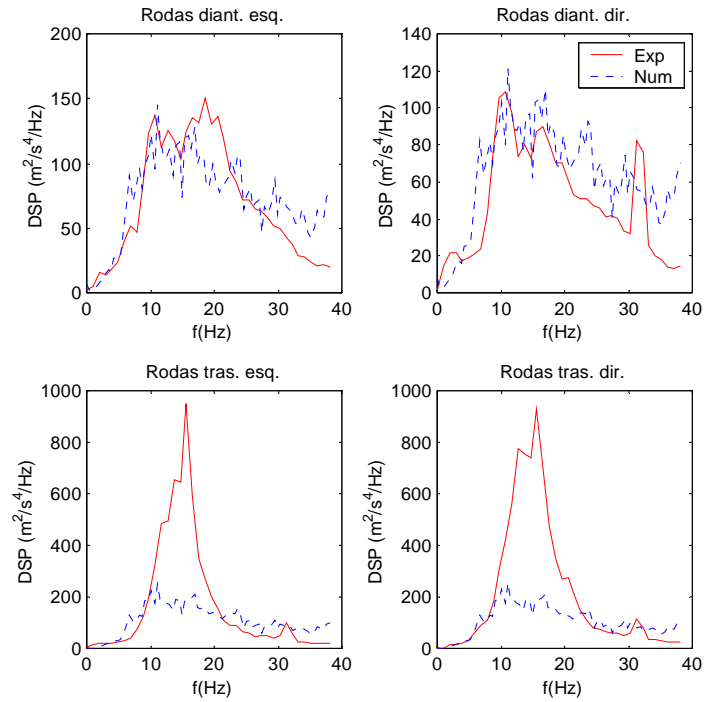


Figura 7.1 – Comparativo da DSP das rodas, utilizando pista lisa, após ajuste do modelo de pista.

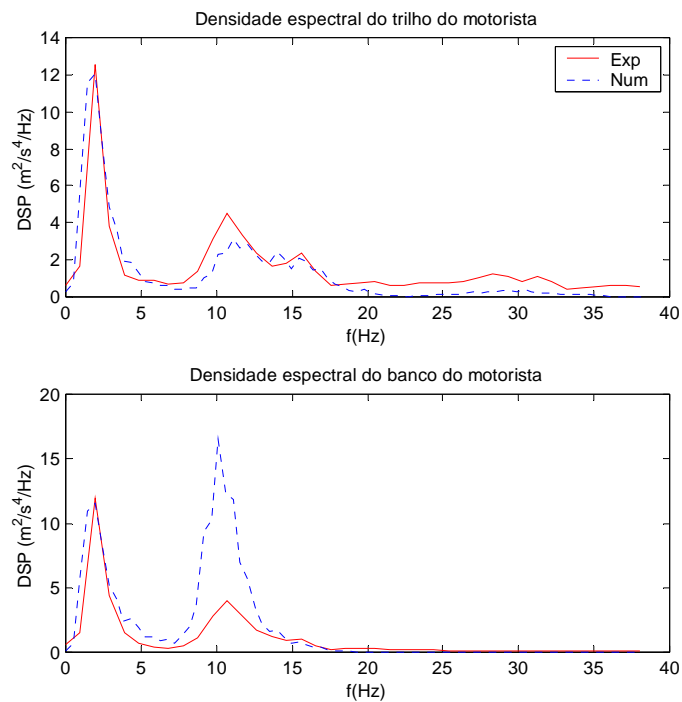


Figura 7.2 – Comparativo da DSP do trilho e banco, utilizando pista lisa, após ajuste do modelo de pista.

Na etapa seguinte foi necessária uma intervenção mais profunda no modelo numérico. O modelo apresenta uma simplificação do modelo do banco, Fig. 7.3-(a), é um modelo simplificado de apenas um grau de liberdade com rigidez e amortecimento do banco mais a massa do ocupante. Um modelo mais elaborado que apresentava três graus de liberdade foi proposto como apresentado na Fig.7.3-(b). Este modelo caracterizava a massa do banco e a massa do corpo dos ocupantes, dividida entre cabeça e tronco, e suas rigidez e amortecimento.

A proposta neste trabalho é utilizar um modelo de dois graus de liberdade, modelo semelhante ao adotado pela ISO 5982-1981.

O modelo utilizado é apresentado pela Fig. 7.3 (b).

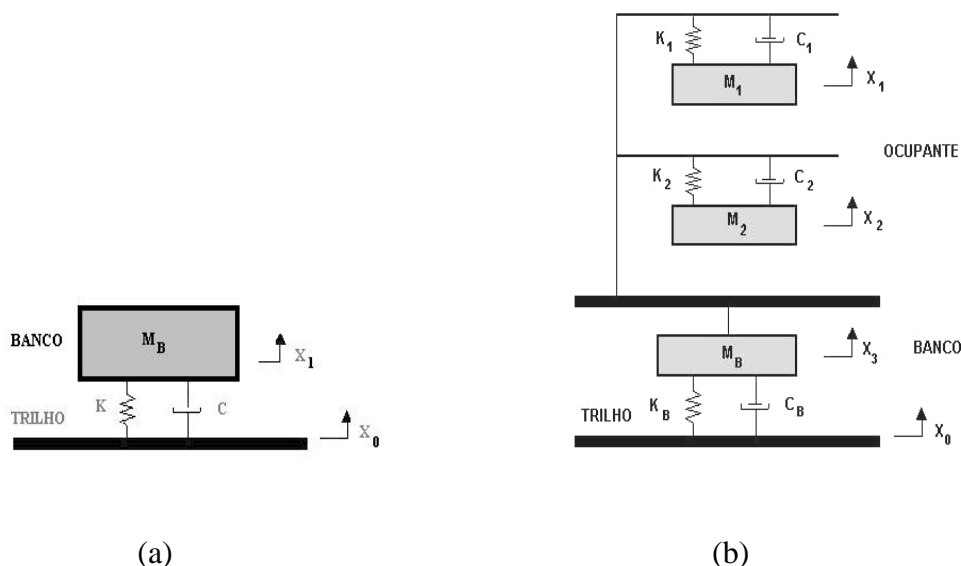


Figura 7.3 – Modelo adotado da dinâmica do corpo humano sentado.

Para caracterizar os parâmetros do corpo humano utilizou-se o valor adotado pela norma ISO 5982-1981, Tab. 7.1.

Tabela 7.1 – Parâmetros do corpo humano – ISO 5982-1981.

PARÂMETRO	UNIDADE	VALOR
K_1	N/m	24.000
K_2	N/m	68.000
C_1	N·s/m	190
C_2	N·s/m	1.540

Considera-se que 70% da massa humana é suportada pelo banco, o restante é condicionado ao contato entre os pés e o assoalho do veículo. Em relação a massa suportada pelo banco, considera-se que a massa da cabeça e pescoço represente 17% e a massa da região torácica (tronco) representa 83%.

A frequência natural do sistema ocupante + banco está próxima de 4 Hz. Isto permite a obtenção de um bom isolamento na região mais crítica de vibrações verticais para o corpo humano (a partir de 5 Hz).

Após as modificações, o resultado pode ser visto nas Figs. 7.4 e 7.5.

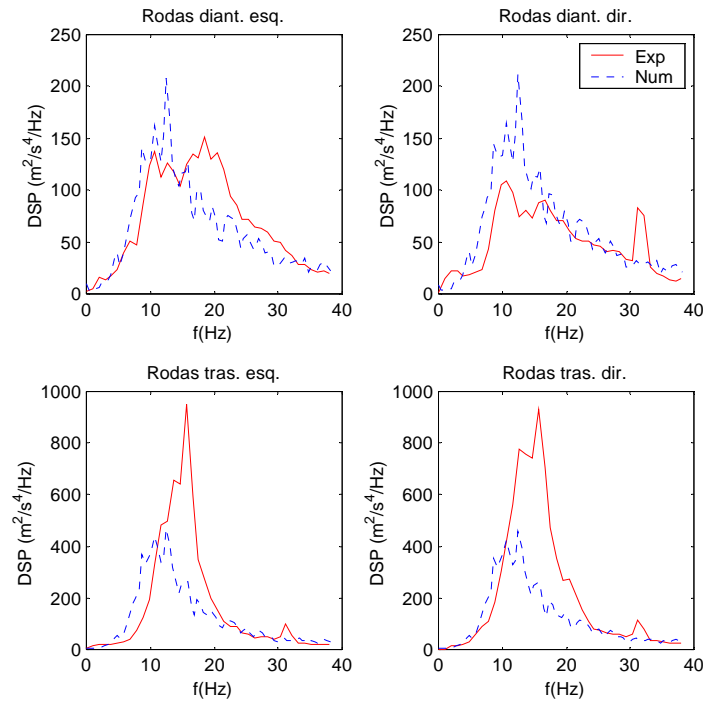


Figura 7.4 – Comparativo da DSP das rodas, utilizando pista lisa, após a implementação de um novo modelo de banco.

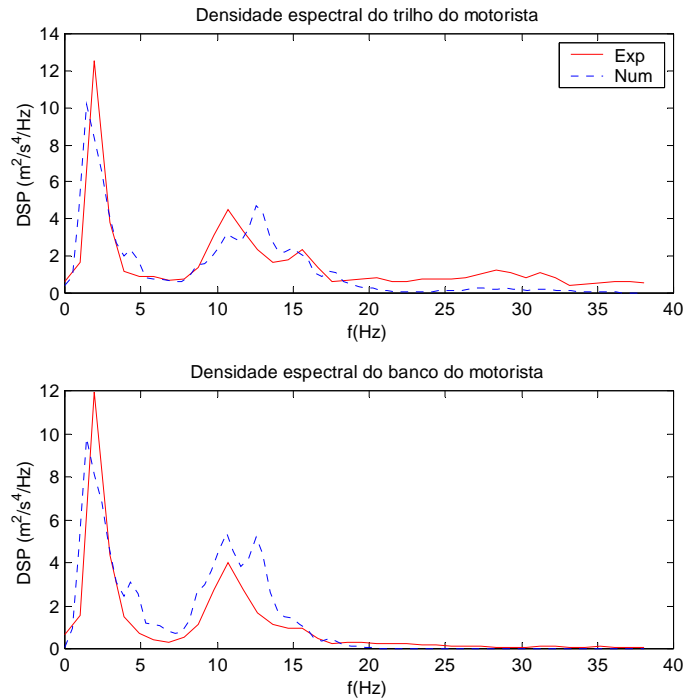


Figura 7.5 – Comparativo da DSP do trilho e banco, utilizando pista lisa, após a implementação de um novo modelo de banco.

O modelo de banco apresentou melhorias, se considerar as diferenças entre os picos de frequência como plausíveis de aceitação devido às características deste modelo matemático, pode-se dizer que ocorreu um bom ajuste entre os dados numéricos e experimentais nas Figs. 7.4 e 7.5.

Na Fig. 7.4 observa-se que a amplitude do sinal das rodas traseiras apresenta uma certa discrepância entre os sinais.

A princípio, o problema refere-se à necessidade de se reduzir a força na suspensão em detrimento ao movimento da suspensão dianteira que estão relacionadas ao centro de gravidade do veículo. Possivelmente esta diferença representa apenas 20% da força da suspensão traseira.

Após a alteração da força na suspensão traseira o resultado pode ser avaliado pelas Figs. 7.6 e 7.7.

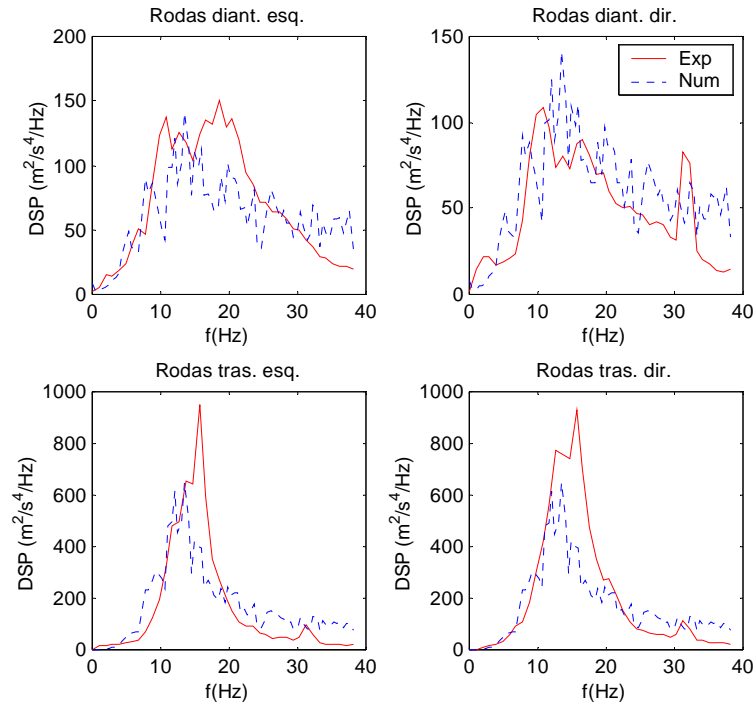


Figura 7.6 – Comparativo da DSP das rodas, utilizando pista lisa, após ajuste final do modelo numérico.

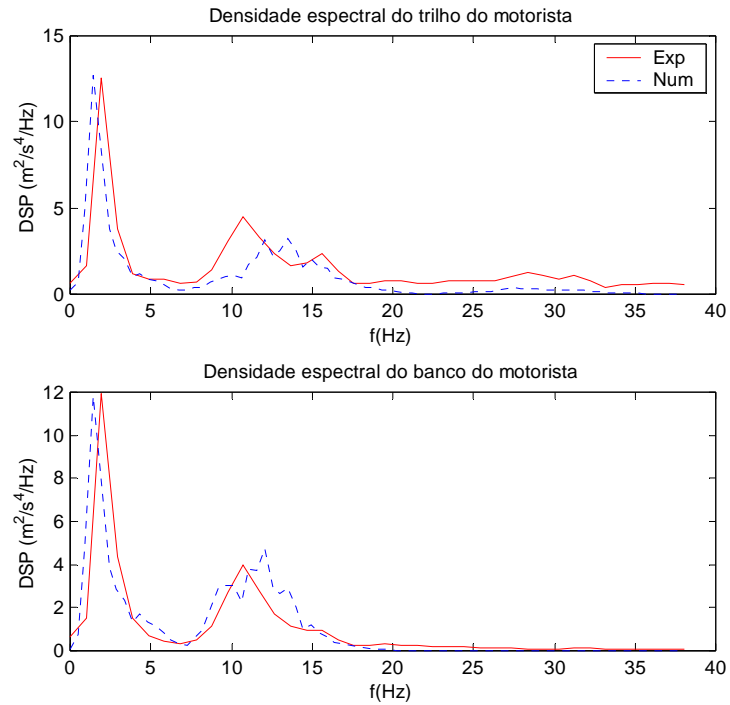


Figura 7.7 – Comparativo da DSP do trilho e banco, utilizando pista lisa, após ajuste final do modelo numérico.

Considerando que a aproximação entre os sinais numéricos e experimentais apresenta momentaneamente um comportamento satisfatório, dirigiu-se as atenções ao modelo de pista irregular.

Para analisar o modelo, primeiro optou-se por reavaliar o modelo de pista irregular gerado. Como o modelo de pista irregular possuía uma diferença que alterava as características de conforto do modelo, após as mesmas correções feitas no modelo de pista lisa, o resultado pode ser observado nas Figs. 7.8 e 7.9.

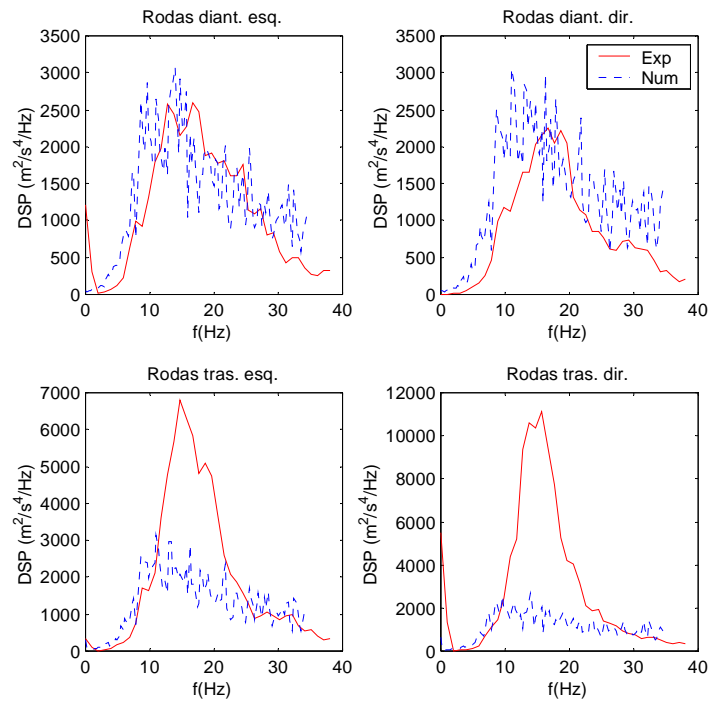


Figura 7.8 – Comparativo da DSP das rodas, utilizando pista irregular, após ajuste no modelo de pista.

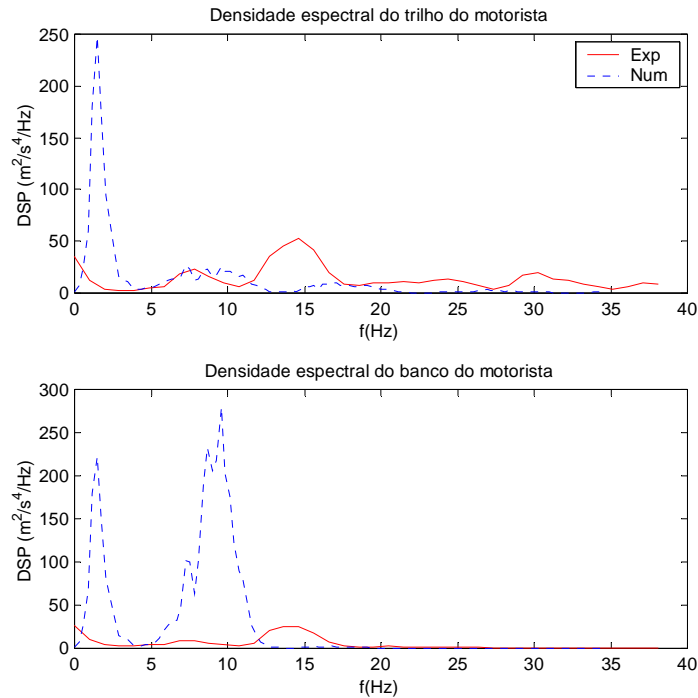


Figura 7.9 – Comparativo da DSP das rodas, utilizando pista irregular, após ajuste no modelo de pista.

O modelo conforto em pista irregular apresenta as mesmas características do modelo de conforto para pista lisa, a frequência de 10 Hz de elevada amplitude, acompanhada da frequência natural de corpo rígido 1,7 Hz da carroceria, que neste caso não foi captada pelos testes experimentais.

Para diminuir a amplitude do sinal de 10 Hz da DSP do banco, optou-se por modificar o modelo do banco. O resultado é apresentado pela Fig. 7.10 e 7.11.

O modelo numérico absorve parte da frequência de 10 Hz, mas não apresenta as mesmas frequências dos dados experimentais. Com relação à frequência de 15 Hz da massa não suspensa da suspensão traseira, o modelo simplesmente ignora a frequência ou representa uma amplitude muito reduzida.

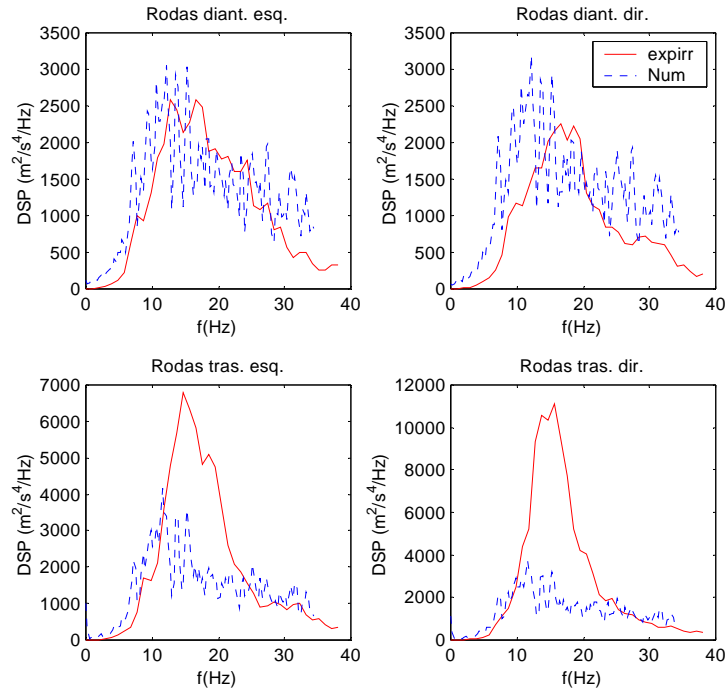


Figura 7.10 – Comparativo da DSP das rodas, utilizando pista irregular, após ajuste no modelo do banco.

Os parâmetros anteriores também foram utilizados na pista irregular, sendo assim, a força exercida na suspensão traseira do modelo foi reduzida, Fig. 7.12 e 7.13.

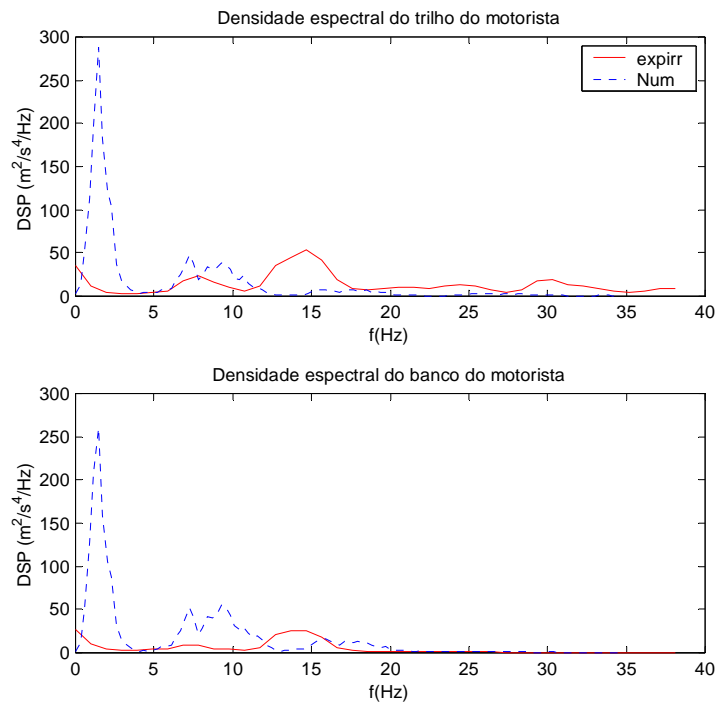


Figura 7.11– Comparativo da DSP do trilho e banco, utilizando pista irregular, após ajuste no modelo do banco.

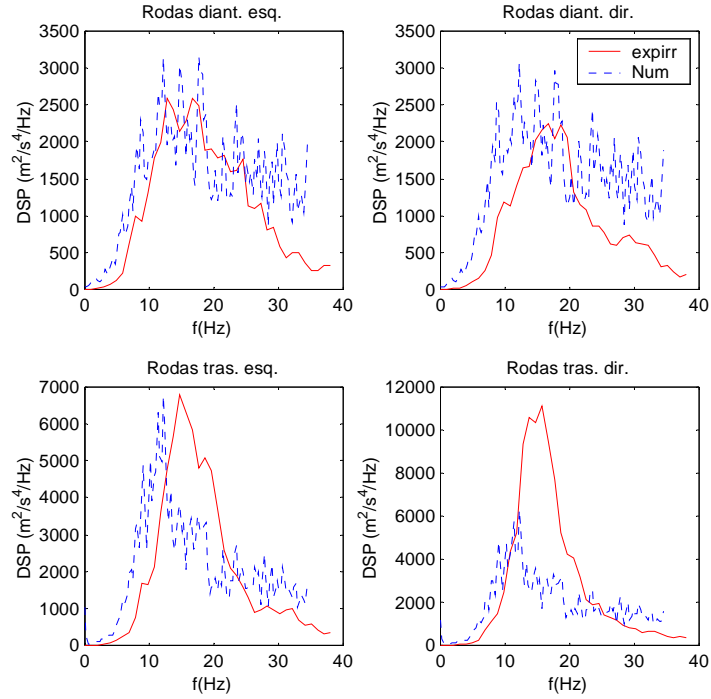


Figura 7.12 – Comparativo da DSP das rodas, utilizando pista irregular, após ajuste final do modelo numérico.

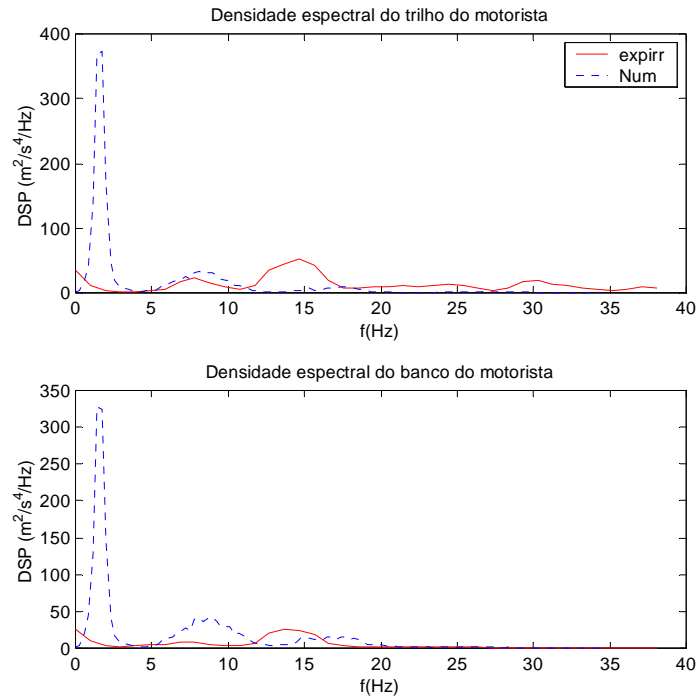


Figura 7.13 – Comparativo da DSP do trilho e banco, utilizando pista irregular, após ajuste final do modelo numérico.

Como descrito no Capítulo 4, o modelo de pista irregular apresentava uma análise de sensibilidade indefinida e descaracterizada devido à influência do modelo de pista irregular gerado. Após as alterações realizadas, o modelo apresenta melhorias mas não demonstra uma paridade entre os dados numéricos e experimentais.

Para prosseguir no estudo proposto, optou-se por reavaliar o modelo numérico, para então estimar com mais clareza a sensibilidade do modelo a possíveis alterações nos parâmetros.

Para simplificar esta análise representa-se somente a variação de todos os parâmetros em redução de 20 % do valor nominal.

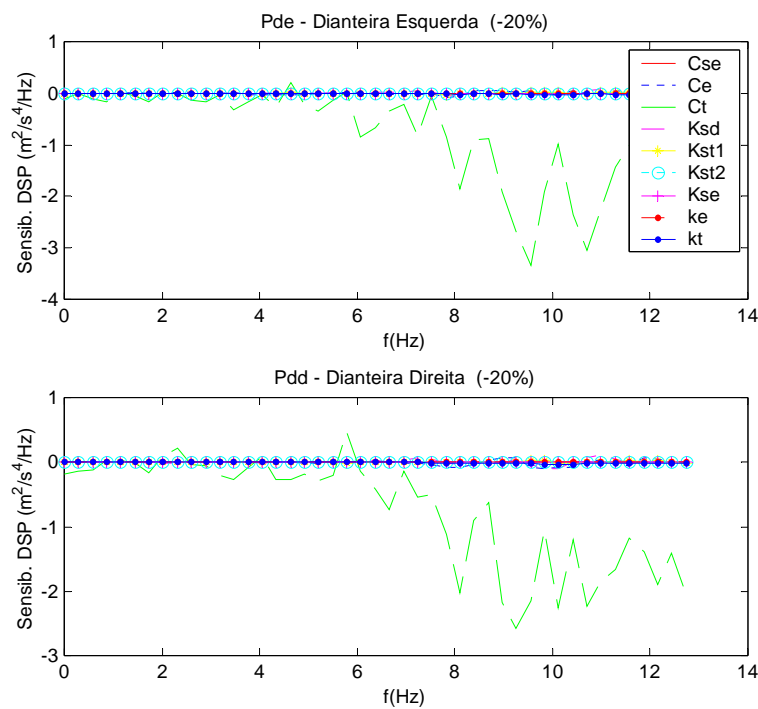


Figura 7.14 – Influência de cada parâmetro nas rodas dianteiras, após a reavaliação do modelo de pista irregular.

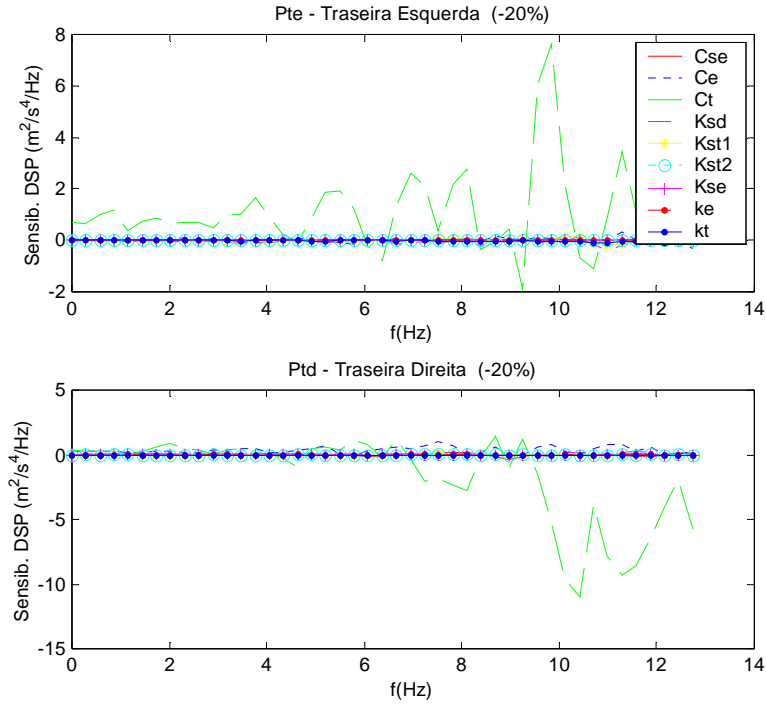


Figura 7.15 – Influência de cada parâmetro nas rodas traseiras, após a reavaliação do modelo de pista irregular.

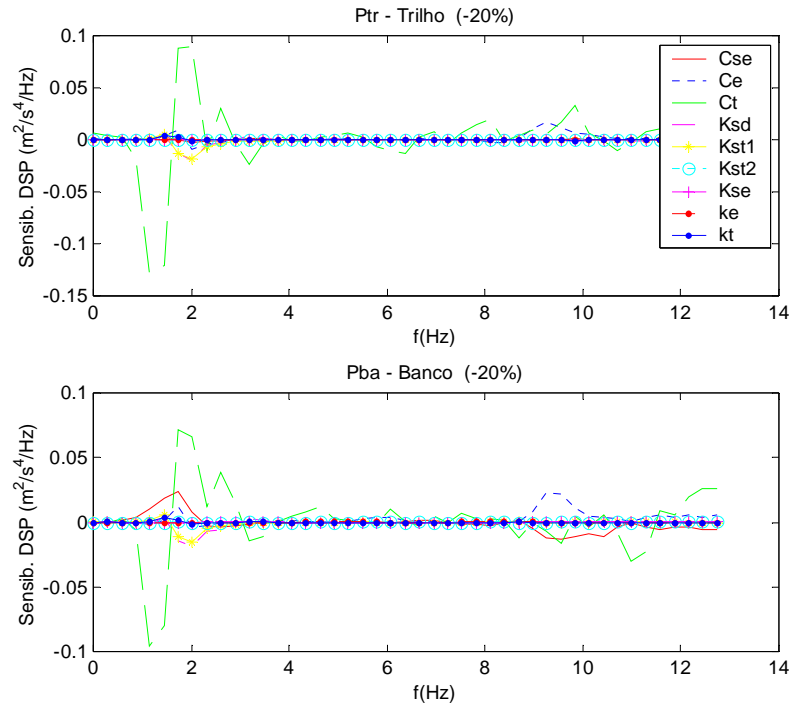


Figura 7.16 – Influência de cada parâmetro no trilho e banco, após a reavaliação do modelo de pista irregular.

Após a reavaliação, Figs. 7.14, 7.15 e 7.16, somente o parâmetro amortecimento do pneu (C_t) se apresentou como o parâmetro que exerce influência no modelo, as alterações na ordem de (-20%) do valor nominal afetam muito pouco as frequências próximas a 10 Hz, possui um comportamento instável, apresentando uma ressonância em torno de 2 Hz na DSP do trilho e banco dos ocupantes.

No modelo de pista lisa, o parâmetro amortecimento do pneu não apresentou comportamento semelhante devido às características da pista lisa não apresentarem grandes variações. O comportamento do veículo em pista irregular sofre com as oscilações da pista e possivelmente pela incapacidade do sistema pneumático de absorver tais variações e com propriedade transmiti-las para a suspensão.

De maneira análoga é apresentada a DSP das rodas, trilho e banco, quando se utiliza o modelo de pneu comprimento de contato, Figs. 7.17 e 7.18.

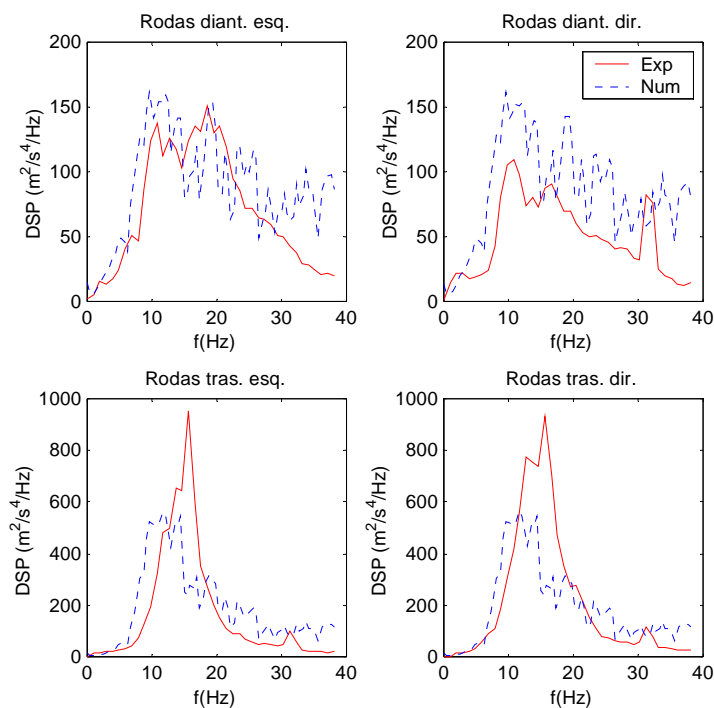


Figura 7.17 – Comparativo da DSP das rodas, utilizando pista lisa, modelo de pneu comprimento de contato, após ajuste final do modelo numérico.

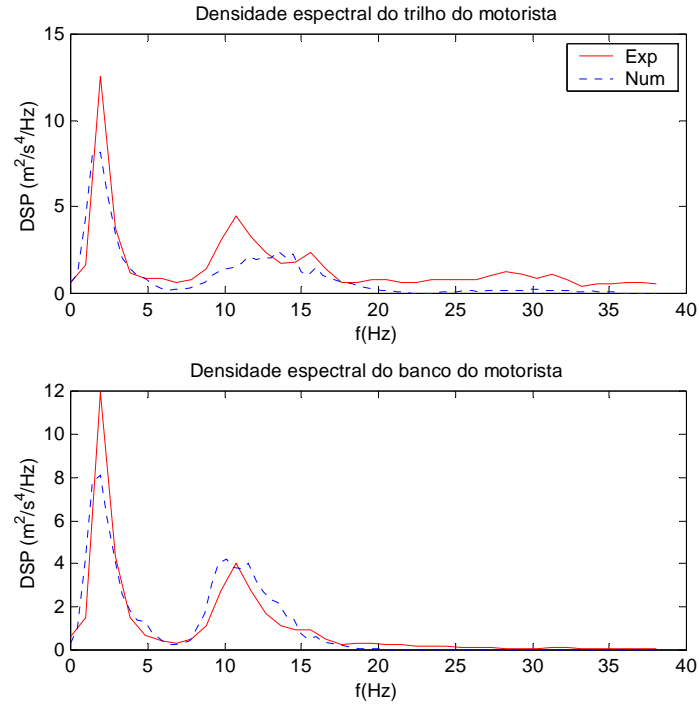


Figura 7.18 – Comparativo da DSP do trilho e banco, utilizando pista lisa, modelo de pneu comprimento de contato, após ajuste final do modelo numérico.

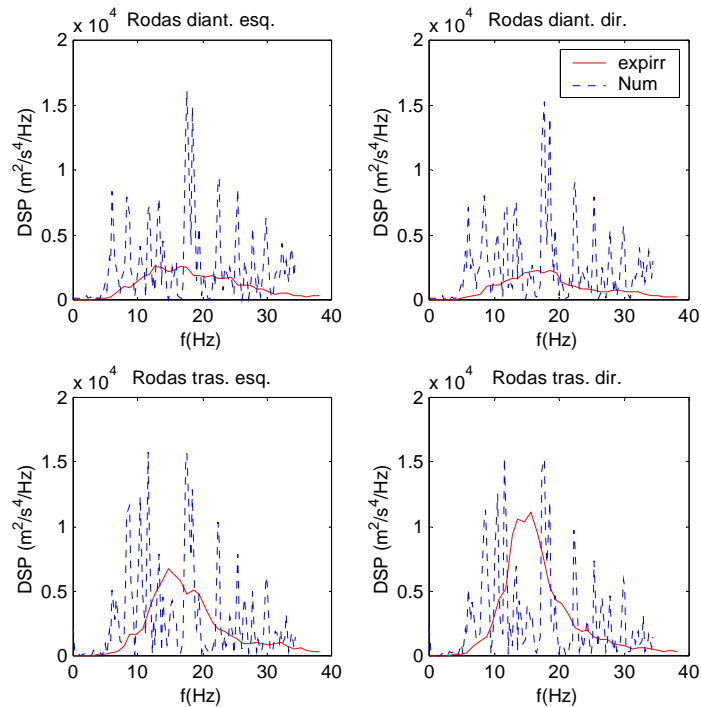


Figura 7.19 – Comparativo da DSP das rodas, utilizando pista irregular, modelo de pneu comprimento de contato, após ajuste final do modelo numérico.

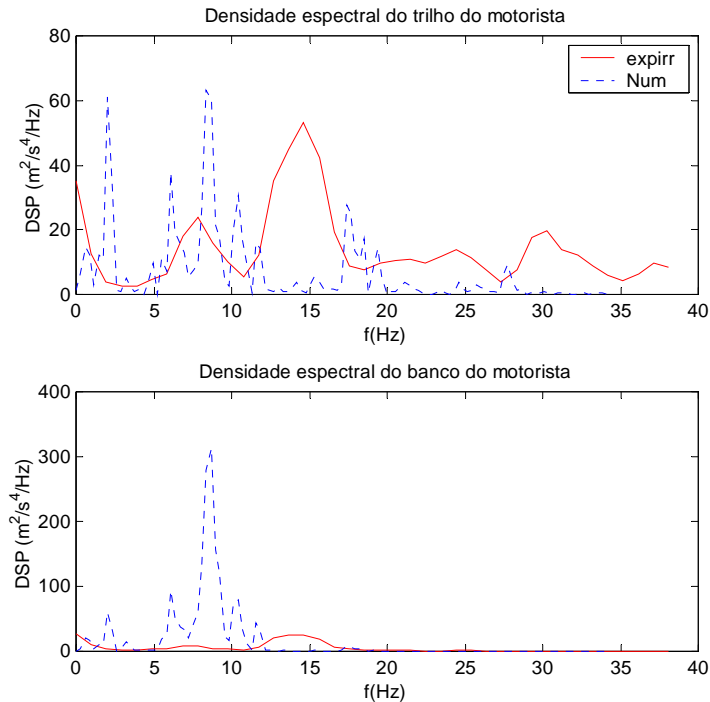


Figura 7.20 – Comparativo da DSP do trilho e banco, utilizando pista irregular, modelo de pneu comprimento de contato, após ajuste final do modelo numérico.

Como descrito no Capítulo 2, o modelo de pneu comprimento de contato, Figs. 7.17 e 7.18, apresenta-se como um filtro. Nas Figs. 7.19 e 7.20, foram apresentadas alterações de amplitude que denotam a incapacidade deste modelo de pneu em representar grandes irregularidades da pista.

Prováveis conclusões para os resultados obtidos para pista irregular:

- Apesar da análise de sensibilidade se mostrar inconclusiva, deve haver uma grande imprecisão em parâmetros associados à suspensão e que são dominantes sob estas condições de operação;
- O modelo pode estar comprometido em virtude das simplificações incorporadas em virtude da geometria da suspensão. Desta forma suas respostas não correspondem à realidade física, podendo também mascarar os resultados da análise de sensibilidade. Este fato provavelmente ocorreu na condição de pista irregular, pois esta promove movimentos de maior amplitude não representada nas aproximações linear.

Neste capítulo buscou-se ajustar o modelo aos sinais experimentais, devido às circunstâncias e após as alterações propostas, observou-se que o perfeito ajuste tornou-se impraticável. O modelo apresenta problemas de desenvolvimento computacional, o que não elimina em nada a metodologia e o trabalho entregue ao seu desenvolvimento. Este modelo foi desenvolvido através do software SIMULINK®, o qual apresenta uma maneira simplificada e visual de modelamento matemático das ciências físicas e dinâmicas.

Identificadas as variáveis mais sensíveis a alterações no modelo, o amortecimento do pneu (C_l), o amortecimento do banco (C_{se}) e o gerador de pista, a proposta é buscar modelos e trabalhos desenvolvidos que possam agregar qualidade e tecnologia, auxiliando no ajuste do modelo.

O objetivo principal foi: determinar os parâmetros que mais influenciam o modelo, desenvolver alterações e propor soluções ao seu aprimoramento.

Capítulo 8

CONCLUSÕES

A metodologia proposta de análise de sensibilidade se mostrou capaz de desenvolver e determinar com eficiência e precisão o comportamento de sistemas dinâmicos, indiferente ao nível de complexidade e exatidão do modelo. A implementação desta metodologia apresenta-se como uma valiosa ferramenta para se determinar as variáveis que o modelo está sujeito, indicando o caminho para ajustes futuros.

O método de diferenças finitas aplicadas à sensibilidade apresenta objetividade nas respostas simplificando o trabalho de avaliação dos parâmetros em relação às frequências. A avaliação direta dos gráficos aliada ao conhecimento técnico do campo da dinâmica de veículos, direciona o entendimento e compreensão dos resultados. A busca por respostas objetivas expõe as possibilidades de ajustes e condicionamento às características de conforto.

Em todos os pontos abordados, considera-se satisfatória a correção do modelo de pista, do modelo de banco adotado, e as tentativas de ajuste do modelo. Mas alterações mais profundas seriam validas de forma a garantir dados mais confiáveis e precisos ao modelo. A indicação de um modelo de suspensão simplificado também não seria a conduta a ser seguida, optar por modelos mais elaborados seria a melhor escolha. Devem ser obtidos dados precisos e confiáveis, aplicados a um modelo que respeite a geometria real do sistema de suspensão.

O modelo de amortecimento da suspensão não foi alvo da análise de sensibilidade, devido ao modelamento matemático da força absorvida pelo amortecedor ser representada a partir de uma equação. Seria incoerente alterar os parâmetros sem que se conhecesse a real relação da força versus velocidade da haste do amortecedor, após alterações na capacidade de amortecimento.

Quanto ao modelo de amortecimento da suspensão e sua representação de força exercida através da velocidade de deslocamento da roda, talvez merecesse mais desenvolvimento e estudo.

Para obter validação do modelo matemático a partir de medições experimentais em veículos reais (com elevado nível de sofisticação tecnológico) deve-se:

- Implementar modelos matemáticos refinados (geometricos, restrições de movimento entre as partes, orientação dos eixos principais de inércia, consideração dos revestimentos e acessórios, buchas, etc...);
- Obtenção de parâmetros confiáveis e precisos para fazer a caracterização do modelo.

O grande trunfo do trabalho foi expor parâmetros, que a princípio não se imaginava que representassem as variações indesejáveis no modelo proposto.

Para estudos futuros, além da correção dos parâmetros apontados neste trabalho, poderia-se citar o estudo e implementação de outros tipos de modelo de pneus, como o de comprimento de contato adaptativo.

A utilização de outros métodos de análise de sensibilidade possibilitaria o aprendizado e o aperfeiçoamento de profissionais que buscam reduzir o tempo de execução e desenvolvimento de projetos.

Sugestão para seqüência do trabalho seria um processo de otimização para implementação efetiva do modelo aos estudos e aperfeiçoamentos do conforto vibracional..

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Bibliografia Citada

Atherton, R.W., Schainker, R.B., e Ducot, E.R., 1975, “On the Statistical Sensitivity Analysis of Models for Chemical Kinetics”, *AichE*, vol. 21, pág. 441-448.

Bauer, L.R., e Hamby, D.M., 1991, “Relative Sensitivities of Existing and Novel Model Parameters in Atmospheric Tritium Dose Estimates”, *Rad. Prot. Dosimetry*, vol. 37, pág. 253-260.

Breshears, D.D., 1987, “Uncertainty and Sensitivity Analyses of Simulated Concentrations of Radionuclides in milk. Fort Collins”, CO: *Colorado State University*, MS Thesis, pág. 1-69.

Burg, C.O.E., 2000, “Use of Discrete Sensitivity Analysis to transform Explicit Simulation Codes into Design Optimization Codes”, Fourth Mississippi State Conference on Differential Equations and Computational Simulations, *Electronic Journal of Differential Equations*, 76N25, 49Q12, pág. 13-27.

Butkunas, A.A., 1966, “Power Spectral Density and Ride Evaluation”, *Society of Automotive Engineers*, 660138, pág. 681-687.

Captain, K.M., Boghani, A.B. e Wormley, D.N., 1979, “Analitical Tire Models for Dynamic Vehicle Simulations”, *Vehicle System Dynamics*, v. 8, pág. 1-32.

Cheng, X., Lin, Y., 1998, “Research on Dynamics of Flexible Multibody System of Passenger Car Suspension”, *Society of Automotive Engineers*, Warrendable, SP-1338, pág. 103-112.

Costa Neto, A., Ferraro, L.C., Veissid, V.L., Freitas, C.A.M., Argentino, M.A., Ripoli, R.R., Persequim, O.T., 1998, “A Study of Vibrational Behavior of a Medium Sized Truck Considering Frame Flexibility with the Use of ADAMS”, International ADAMS User Conference.

- Crick, M.J., Hill, M.D., e Charles, D., 1987, "The Role of Sensitivity Analysis in Assessing Uncertainty. In: Proceedings of an NEA Workshop on Uncertainty Analysis for Performance Assessments of Radioactive Waste Disposal Systems", Paris, OECD, pág. 1-258. Dixon, J.C., 1996, "Tires Suspension and Handling", *Society of Automotive Engineers*, Warrendable, 2a ed.
- Downing, D.J., Gardner, R.H., e Hoffman, F.O., 1985, "An Examination of Response-Surface Methodologies for Uncertainty Analysis in Assessment Models", *Technometrics*, vol. 27, pág. 151-163.
- El Beheiry, E.M. e Karnopp, D.C., 1996, "Optimization of Active and Passive Suspensions Based on a Full Car Model, New Developments in Vehicle Dynamics, Simulation, and Suspension Systems", *Society of Automotive Engineers*, Warrendable, SP-1074, pág. 263-274.
- Ewins, D.J., 1984, "Modal Testing: Theory and Practice", Research Studies Press, Letchworth.
- Fox, R.L. e Kapoor, M.P., 1968, "Rates of Change of Eigenvalues and Eigenvectors", *AIAA Journal*, 6(12), pág. 2426-2429.
- Gardner, R.H., Huff, D.D., O'Neill, R.V., Mankin, J.B., Carney, J., e Jones, J., 1980, "Application of Error Analysis to a Marsh Hydrology Model", *Water Resources Res.*, vol. 16, pág. 659-664.
- Gillespie, T.D., Sayers, M. e Segel, L., 1980, "Calibration of Response Type Road Roughness Measuring Systems", Final Report, NCHRP Rept. No. 228, 70 pág..
- Gillespie, T.D., 1992, "Fundamentals of Vehicle Dynamics", *Society of Automotive Engineers*, Warrendable.
- Hamby, D.M., 1994, "A Review for Parameter Sensitivity Analysis of Environmental Models", *Environmental Monitoring and Assessment*, vol. 32, pág. 135-154.
- Helton, J.C. e Iman, R.L., 1982, "Sensitivity Analysis of a Model for the Environmental Movement of Radionuclides", *Health Phys.*, vol. 42, pág. 565-584.
- Helton, J.C., Iman, R.L. e Brown, J.B., 1985, "Sensitivity Analysis of the Asymptotic Behavior of a Model for the Environmental Movement of Radionuclides", *Ecol. Modelling.*, vol. 28, pág. 243-278.

Helton, J.C., Iman, R.L., Johnson, J.D., e Leigh, C.D., 1986, “Uncertain and Sensitivity Analysis of a Model for Multicomponent Aerosol Dynamics”, *Nuc. Technol.*, vol. 73, pág. 320-342.

Hoffman e Gardner, 1993 Iman, R.L., e Campbell, J.E., 1981a, “An Approach to Sensitivity Analysis of Computer Models: Part I – Introduction, Input Variable Selection and Preliminary Assesment”, *J. Qual. Technol.*, vol. 13, pág. 174-183.

Iman, R.L., Helton, J.C., and Campbell, J.E., 1981b, “An Approach to Sensitivity Analysis of Computer Models: Part II – Ranking of Input Variables, Response Surface Validation, Distribution Effect and Technique Synopsis”, *J. Qual. Technol.*, vol. 13, pág. 232-240.

Kleiber, M., Antúnez H., Hien, T.D. e Kowalczyk, P., 1997, *Parameter Sensitivity in Nonlinear Mechanics Theory and Finite Element Computations*, 1 ed., Chichester, John Wiley & Sons.

Koda, M., Dogru, A.H., 1979, “Sensitivity Analysis of Partial Differential Equations with Appliacion to Reaction and Diffusion Processes”, *J. Computacional Phys.*, vol. 30, pág. 259-282.

Krieger, T.J., Durston, C., e Albright, D.C., 1977, “Statistical determination of Effective Variables in Sensitivity Analysis”, *Trans. Am. Nuc. Soc.*, vol. 28, pág. 515-516.

Milliken, W.F., Milliken, D. L., 1995 “Race Car Vehicle Dynamics”, *Society of Automotive Engineers*, Warrendable.

MIRA, 1965, Defininition of Handling terms.

Nelson, R.B., 1976 “Simplified Calculation of Eigenvector Derivates”, *AIAA Journal*, 14(9), pág. 1201-1205.

O’Neill, R.V., Gardner, R.H., e Mankin, J.B., 1980, “Analysis of Parameter Error in a Nonlinear Model”, *Ecol. Modelling.*, vol. 8, pág. 297-311.

Reimpell, J., e Stoll H., 1996, “The Automotive Chassis: Engineering Principles, *Society of Automotive Engineers*, Warrendable.

Rosa Neto, A., 2000, *Implementação de um Modelo Numérico para Estudos de Conforto Vibracional em Automóveis*, Dissertação de Mestrado, Departamento de Engenharia Mecânica, PUC Minas, Belo Horizonte, MG, Brasil.

SAE J670e, 1976, “Vehicle Dynamics Terminology”, *Society of Automotive Engineers*, Warrendable.

Satchell, T.L., 1981, “The Design of Talling Twist Axles”, *Society of Automotive Engineers*, Warrendable, paper No 810420.

Sayers, M.W. e Karamihas, S.M., 1998, *The Little Book of Profiling – Basic Information about Measuring and Interpreting Road Profiles*, University of Michigan.

Shabana, A.A., 1998, “Dynamics of Multibody Systems”, Cambridge University Press, Cambridge UK, 2a ed..

Stensson, A.A., Asplund, C., Karlsson, L., 1994, “The Nonlinear Behavior of McPherson Strut Wheel Suspension”, *Vehicle System Dynamics*, 23, pág. 85-106.

Wittrick W.H., 1962, “Rates of Change of Eingenvalues with Reference to Buckling and Vibration Problems”, *Journal of the Royal Aeronautical Society*, 66, pág. 590-591.

Yu, C. Cheng, J-J., e Zielen, A-J., 1991, “Sensitivity Analysis of the RESRAD, a Dose Assesment Code”, *Trans. Am. Nuc. Soc.*, vol. 64, pág. 73-74.

Bibliografia Complementar

Bae, D., Cho, H., Lee, S., e Moon, W., “Recursive Formulas for Design Sensitivity Analysis of Mechanical Systems”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, pág. 3866-3879.

Barbieri, F.A.A., Costa Neto, A., Steidl, M., 1999, “Análise de Conforto Vibracional em Veículos”, *Society of Automotive Engineers*, São Paulo.

Bolton, W., 1993, *Engenharia de controle*, São Paulo, Makron Books.

Cafferty, S., Giacomini, J., e Worden, K., 1997, “Simple Nonlinear Models for Automotive Shock Absorbers”, *6th Int. Conf. On Recent Advances in Structural Dynamics ISVR*, Southampton.

Cardoso, M.A., e Marczak, R.J., 1995, “Simulação Dinâmica e Análise Estrutural de Chassis de Veículos de Pequeno Porte”, *Society of Automotive Engineers*, São Paulo.

Costa Neto, A., 1994, “Application of Multibody Systems (MBS) Techniques to Vehicle Modelling”, pág. 1-13.

Eberhard, P., Piram, U., e Bestle, D., 1999, "Optimization of Damping Characteristics in Vehicle Dynamics", *Eng. Opt.*, vol. 31, pág. 435-455.

Friswell, M.I., e Mottershead, J.E., 1996, *Finite Element Model Updating in Structural Dynamics*, 1 ed., Netherlands, Kluwer Academic Publishers.

Greco Jr., P.C., Barcellos, S.C., Rosa Neto, A., 2001, "A Numerical Model for Passenger Car Ride Comfort Studies", *Society of Automotive Engineers*, São Paulo.

Kleijnen, J.P.C., 2001, "Experimental Designs for Sensitivity Analysis of Simulation Models", *Center for Economic Research*, 0924-7815, n° 2001-15.

Michaleris, P., Tortorelli, D.A., e Vidal, C.A., 1994, "Tangent Operators and Design Sensitivity Formulations, for Transient Non-Linear Coupled Problems with Applications to Elastoplasticity", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 37, pág. 2471-2499.

Ewins, D.J., 1984, *Modal testing: Theory and Practice*, Research Studies Press Ltd, John Wiley & Sons Inc.

Mottershead, J.E., 1998, "On the Zeros of Structural Frequency Response Functions and their Sensitivities", *Mechanical Systems and Signal Processing*, n° pg980167, pág. 591-597.

Inman, D.J., 1996, *Engineering Vibration*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.

Serban, R. e Freeman, S., 1999, "Direct Differentiation Methods for the Design Sensitivity of Multibody Dynamic Systems", *Department of Mechanical Engineering, and Center for Computer-Aided Design*, The University of Iowa, Iowa City, Iowa. 52242-1000.

Tiller, M.M., e Dantzig, J.A., 1996, "Implementation of Design Sensitivity Analysis and Numerical Optimization in Engineering Analysis", *Applied Mathematical Modelling*, vol. 20, pág. 792-799.

Tortorelli, D.A., Lu, S.C., 1990, "Design Sensitivity Analysis for Elastodynamic Systems", *Mech. Struct. & Mach.*, vol. 18, pág-77-106.

Tortorelli, D.A., 1993, "Sensitivity Analysis for the Steady-State Response of Damped Linear Elastodynamic Systems Subject to Periodic Loads", *Journal of Mechanical Design*, vol. 115, pág. 822-828.

Apêndice A

MÉTODO EXPERIMENTAL

Neste capítulo, apresentam-se as etapas de desenvolvimento experimental utilizadas para a aquisição dos dados e submetidas ao diagnóstico posterior.

Os instrumentos utilizados foram acelerômetros para as medidas de aceleração e um *encoder* para as medidas indiretas de velocidade. Dentre os acelerômetros três modelos foram empregados:

- Para a parte externa foi utilizado o acelerômetro piezoelétrico 4384 fabricado pela Brüel & Kjaer;
- Na parte interna foram utilizados o acelerômetro capacitivo 7290 A fabricado pela ENDEVCO e o acelerômetro piezoelétrico para bancos 4322 fabricado pela Brüel & Kjaer.

O próximo passo foi condicionar o sinal analógico gerado pelos transdutores, para que fosse possível convertê-lo em um sinal digital. Este procedimento foi necessário devido às saídas de sinais possuírem níveis extremamente baixos. O condicionamento foi realizado por meio de dois amplificadores, um para os transdutores capacitivos e outro para os acelerômetros piezoelétricos. Durante este processo os sinais foram amplificados e filtrados em filtros do tipo passa-baixa.

O passo seguinte foi o uso do conversor A/D que possui uma conversão de 12 bits.

O sinal convertido para o domínio digital era então enviado para um computador *lap top* 486 de 50 MHz que armazenava e processava os dados, este computador acompanhava os testes dentro do veículo.

Buscou-se então os trechos de estrada compatíveis com o exigido para os testes.

Um dos trechos de asfalto necessitava ter o piso liso e apresentar as melhores condições de conservação possível. O outro, deveria ter o piso muito ruim com buracos trincas e algumas ondulações de baixa amplitude. Estes trechos teriam que ser planos e retilíneos.

A prova em asfalto liso seria efetuada a 100 Km/h e cujo comprimento aproximado fosse de 2000 m. Para o asfalto irregular seria efetuada a 60 Km/h e necessitava-se de um comprimento de aproximadamente de 650 m.

A escolha da pista em asfalto liso foi a pista de acesso do aeroporto de Confins, que possui um trecho de aproximadamente 1500 m retilíneo e plano. Para o asfalto irregular optou-se por um trecho de estrada secundária (BR-494) entre as cidades de Cláudio e Oliveira, que se apresentava degradada e sem qualquer manutenção.

Um terceiro teste foi realizado em uma pista denominada travessina, composta de um trecho de asfalto liso, plano e retilíneo de aproximadamente 100 m de comprimento e 4 m de largura, onde um obstáculo metálico com 25 mm de altura, 100 mm de largura é fixado transversalmente à pista em um ponto intermediário do trecho, neste teste a velocidade de percurso foi de 30 km/h.

A última etapa do processo constituiu-se na execução dos testes com o veículo instrumentado nas pistas escolhidas e na travessina.

Os acelerômetros foram montados segundo a orientação vertical, eixo Z, nas quatro rodas e nos quatro pontos de fixação à carroceria dos amortecedores. Para identificar o modo de corpo rígido do motor, montou-se um acelerômetro orientado verticalmente na parte superior do cabeçote do motor. No interior do veículo foram montados acelerômetros na posição vertical de assoalho, guia do banco e banco do motorista, constituindo de 12 sinais de aceleração vertical, mais os instrumentos necessários à aquisição da velocidade do veículo e rotação do motor.

Os acelerômetros nas rodas dianteiras foram instalados no parafuso de fixação inferior do sistema de suspensão *McPherson*, na suspensão traseira os acelerômetros foram instalados nos parafusos de fixação dos amortecedores.

Para manter a velocidade constante o *encoder* fornecia o sinal de velocidade para o sistema de aquisição ao mesmo tempo em que fornecia em um *display* digital a velocidade do veículo.

Para a composição dos dados foram utilizadas três passagens em cada pista, após a gravação dos dados, eles eram checados e na ocorrência de quaisquer divergências, eram descartados em prol de uma nova leitura. Em seqüência o sinal era concatenado, originando um novo sinal visando melhorar as propriedades estatísticas do sinal.

Apêndice B

RESULTADOS E DISCUSSÃO

A análise espectral dos sinais no domínio da frequência fornece o comportamento e a resposta do veículo para cada frequência da fonte de excitação.

Os dados numéricos e experimentais foram avaliados no domínio do tempo e da frequência.

O software MATLAB® foi utilizado para o desenvolvimento deste trabalho, atribuído pela sua facilidade de operação e seu pacote de processamento de sinais.

Análise dos Resultados

A densidade espectral de potência (PSD) dos sinais da aceleração das rodas dianteiras e traseiras, lado direito e esquerdo, trafegando em uma pista lisa a uma velocidade de 100 km/h, pode ser analisada pela Fig B.1.

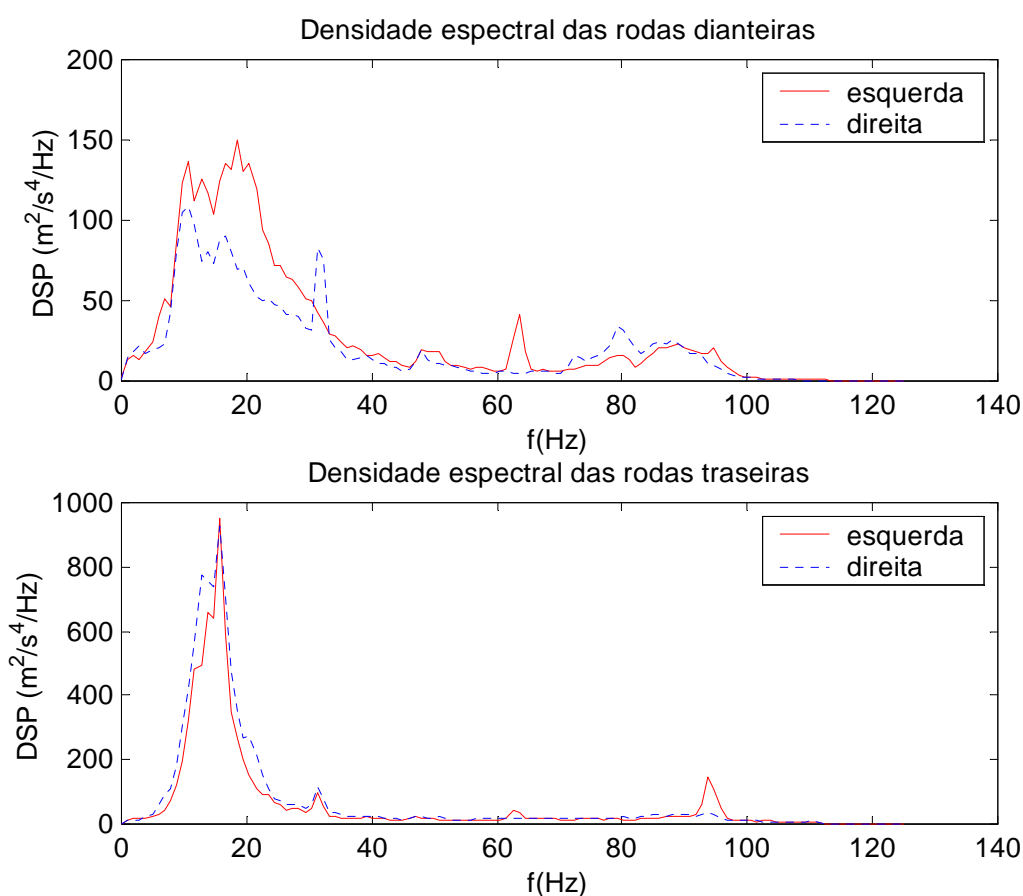


Figura B.1 – Densidade espectral das rodas.

Percebe-se as frequências naturais das rodas dianteira esquerda de 10,5 Hz e dianteira direita de 10,7 Hz, e ainda um pico mais acentuado na frequência de 18 Hz. As demais frequências podem ser atribuídas aos pneus.

Nas rodas traseiras identifica-se a frequência de 15 Hz originária da massa não suspensa traseira.

A Fig. B.2 compara a densidade espectral da aceleração da roda dianteira esquerda com a densidade espectral de potência no ponto de fixação da haste do amortecedor. Este ponto refere-se ao suporte de isolamento da carroceria, que na Fig. B.2, filtra as frequências na faixa de 40 Hz.

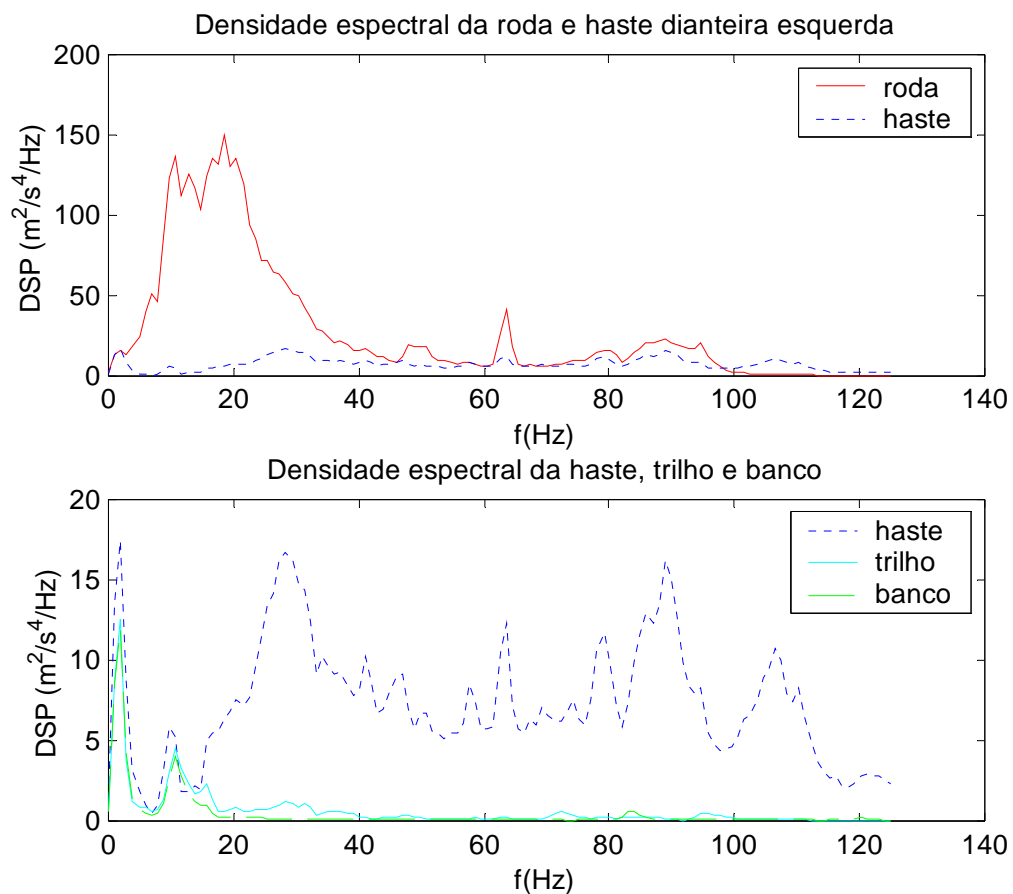


Figura B.2 – Densidade espectral dos pontos em asfalto liso.

Na Fig. B.2 observa-se a resposta da densidade espectral de potência na guia do banco e no assento do banco do motorista. A frequência natural de corpo rígido da carroceria 1,5 Hz é identificada e representa uma elevada amplitude em relação a demais frequências. Nota-se o aparecimento de uma frequência de 10 Hz que será discutida mais adiante.

Representou-se na Fig. B.3 as densidades espectrais das rodas dianteiras e traseiras do veículo, com o veículo trafegando em pista de asfalto irregular. O que se observa é que a suspensão traseira exerce uma influência maior como fonte de vibração para os ocupantes do veículo, atribuído pelos deslocamentos a que ficam sujeita a suspensão em pisos irregulares.

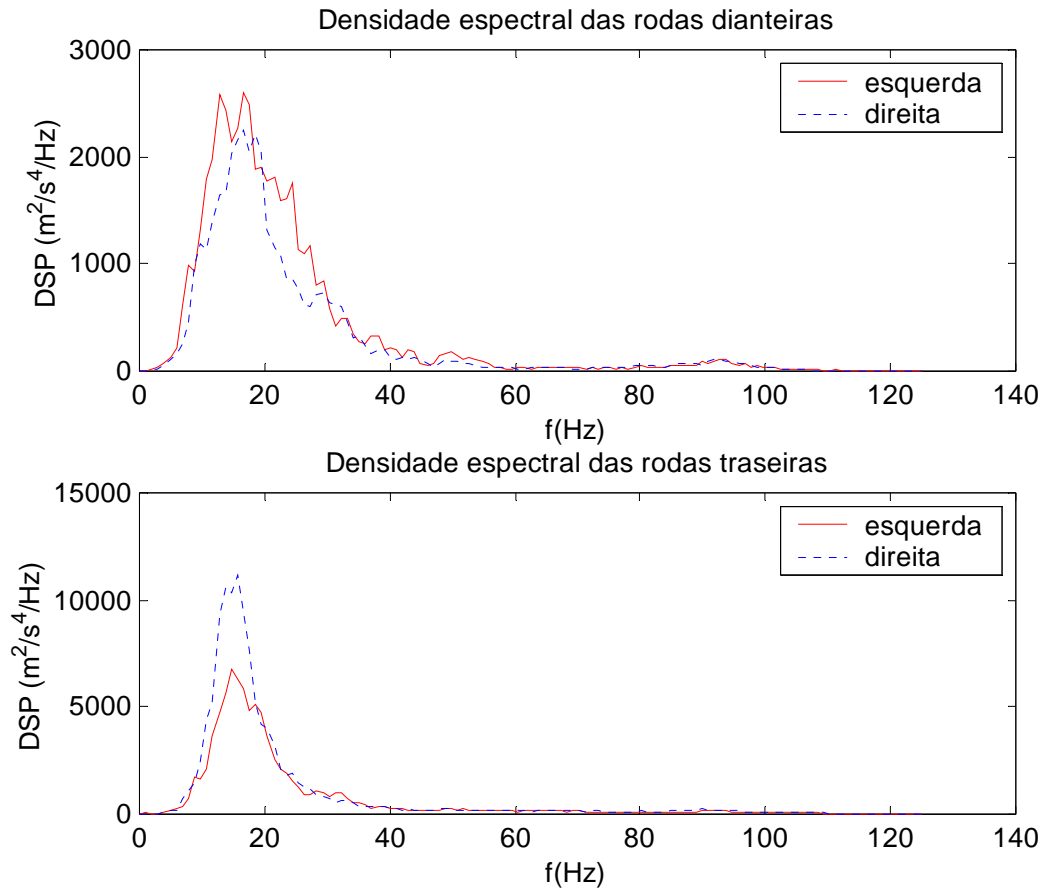


Figura B.3 – Densidade espectral em pista de asfalto irregular.

A Fig. B.4 representa as densidades espectrais do trilho do banco, haste do amortecedor e assento do motorista, com o veículo trafegando em pista de asfalto irregular. Observa-se que devido às irregularidades do asfalto a amplitude do sinal é mais elevada, isto significa que o motorista e os passageiros perceberão um desconforto causado pelas trepidações do veículo na pista. Se o percurso for longo ou repetitivo este desconforto pode se agravar e provocar problemas de saúde na região lombar dos ocupantes do veículo.

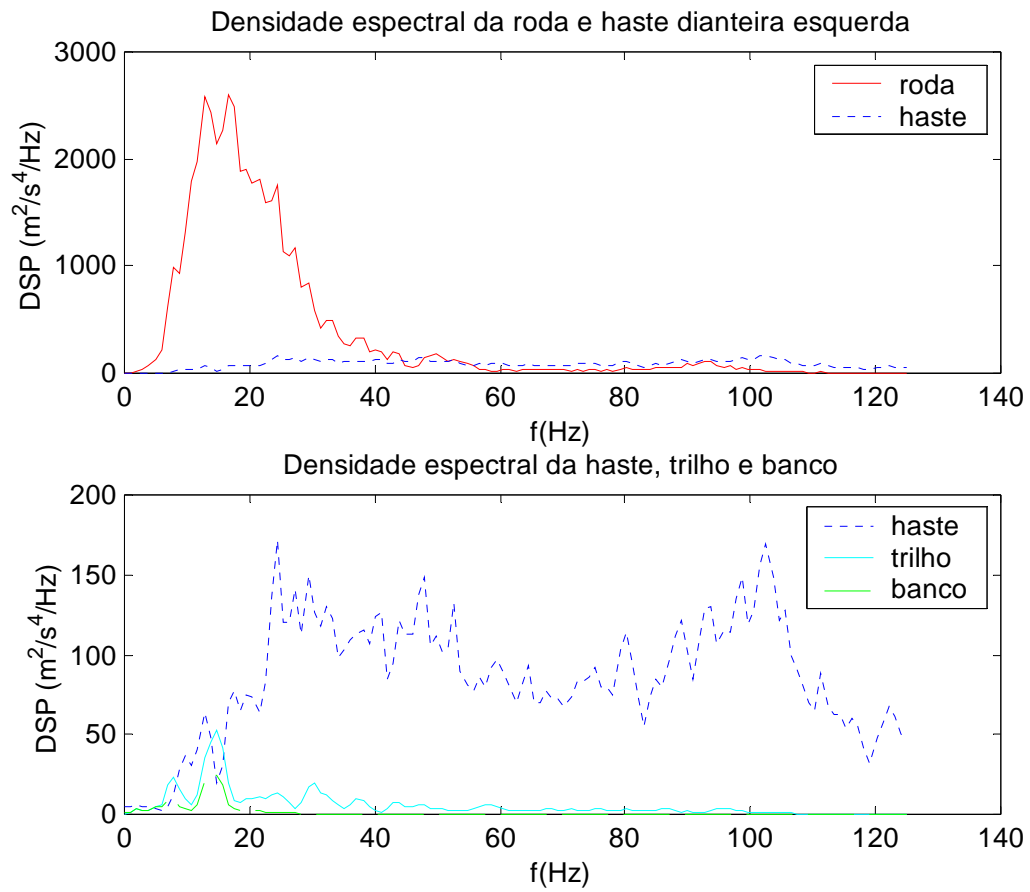


Figura B.4 – Densidade espectral em pista de asfalto irregular.

Apêndice C

MÉTODOS COMPLEMENTARES DE ANÁLISE DE SENSIBILIDADE

Análise de Sensibilidade Diferencial

É referido como o método direto e considerado a espinha dorsal de aproximadamente todas outras técnicas de análise de sensibilidade.

O coeficiente de sensibilidade é basicamente a taxa de mudança na saída para a mudança na entrada, enquanto todos os parâmetros permanecem constantes (Krieger *et al.*, 1977 e Hamby, 1994).

A análise diferencial dos parâmetros da sensibilidade é baseada na diferenciação parcial do modelo de forma agregada. A primeira ordem da série de Taylor aproximada é aplicada para variável dependente Y , como uma função de variáveis independentes $X = (X_1, \dots, X_n)$. A variância de Y , $V(Y)$, é calculada usando a Eq. (C.1), equação geral da propagação do erro:

$$V(Y) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial Y}{\partial X_i} \right)^2 V(X_i) \quad (\text{C.1})$$

A variância em Y é utilizada como uma medida de incerteza na predição do modelo, enquanto que a variância em X_i , proporciona uma medida de sensibilidade do modelo para a variável X_i (Helton *et al.*, 1985). O método é uma teoria linearizada é válida somente para pequenos parâmetros de incerteza (Koda *et al.*, 1979).

Uma análise de sensibilidade estatística calcula a variância e o resultado esperado de cada parâmetro na saída do modelo posicionando as contribuições para a variância (Atherton *et al.*, 1975).

Já a análise de sensibilidade usa técnicas de diferenciação parcial que são computacionalmente eficientes (Helton *et al.*, 1985).

À medida que equações algébricas explícitas descrevem a relação entre variáveis dependentes e independentes, o coeficiente de sensibilidade ϕ_i para uma variável particular independente, pode ser calculado de uma derivada parcial de variável dependente em relação a variável independente. Este conceito pode ser demonstrado através da Eq. (C.2), isto é:

$$\phi_i = \frac{\partial Y}{\partial X_i} \left(\frac{X_i}{Y} \right) \quad (\text{C.2})$$

onde o quociente X_i/Y , é introduzido para normalizar os coeficientes apenas removendo os efeitos das unidades.

Para um conjunto de várias equações, a derivada parcial pode ser aproximada através do método de diferenças finitas, assim se as não-linearidades são negligenciadas, a derivada parcial pode ser aproximada pela da Eq. (C.3) como:

$$\phi_i = \frac{\% \Delta Y}{\% \Delta X_i} \quad (\text{C.3})$$

A análise diferencial é tipicamente muito mais exigente em sua implementação do que outros métodos de análise de sensibilidade e, ainda proporciona somente resultados semelhantes.

Medida de Sensibilidade no Tempo

Conceitualmente, o método mais simples de análise de sensibilidade é repetidamente varrer um parâmetro no tempo, enquanto se mantêm os outros fixos (Gardner *et al.*, 1980; O'Neill *et al.*, 1980; Downing *et al.*, 1985; Breshears, 1987; Crick *et al.*, 1987; Yu *et al.*, 1991 e Hamby, 1994). Uma classificação de sensibilidade pode ser obtida rapidamente pelo acréscimo de cada parâmetro por uma porcentagem. Despreza-se todas as outras constantes e quantifica-se as mudanças nos parâmetros de saída do modelo. Este tipo de análise pode ser definido como uma análise de sensibilidade “local” (Crick *et al.*, 1987 e Hamby, 1994) desde que ele somente utilize a sensibilidade relativa para estimar o ponto escolhido e não para completar a distribuição dos parâmetros.

Modelo fatorial

Uma análise fatorial envolve a escolha de um dado número de amostras de cada parâmetro, simulando o modelo para todas as combinações de amostras (Box *et al.*, 1978; Rose, 1993 e Hamby, 1994).

Os resultados obtidos neste modelo são então utilizados para estimar os parâmetros de sensibilidade.

Índice de sensibilidade

Método que determina os parâmetros de sensibilidade, através do cálculo da diferença de porcentagem nos parâmetros na saída, enquanto se varia um parâmetro de entrada de um valor mínimo até um valor máximo (Hoffman e Gardner, 1993; Bauer e Hamby, 1991).

O índice de sensibilidade (SI) é calculado usando a Eq. (C.4) como exemplo,

$$SI = \frac{D_{\max} - D_{\min}}{D_{\max}} \quad (C.4)$$

onde D_{\min} e D_{\max} representam o valor mínimo e o valor máximo dos parâmetros da saída do modelo (Hoffman e Gardner, 1983).

Fatores de importância

Downing *et al.* (1985) introduziu três fatores de importância:

- O primeiro fator de importância é definido como parâmetro de incerteza multiplicado pelo parâmetro de sensibilidade;
- O segundo trata da diferença positiva entre o valor máximo e mínimo da saída;
- O terceiro avalia a importância utilizando a variância da amostragem na saída.

Análise de sensibilidade subjetiva

O método é bastante simples e somente quantitativo, uma vez que ele auxilia na determinação *à priori*, de qual parâmetro pode ser descartado devido a gama de influência no resultado do modelo, utilizando como base a experiência e a opinião dos pesquisadores.

Diferenciação Automática

Método baseado no cálculo das derivadas. Dois métodos básicos de diferenciação automática têm sido empregados, o modo avançado e o modo reverso. Esses métodos são distinguidos pela maneira como a regra da cadeia é usada para propagar derivadas através da computação.

O modo avançado propaga derivadas de variáveis intermediárias com relação a variáveis independentes e segue o fluxo do programa original. Explorando a linearidade da diferenciação, o modo avançado permite calcular combinações lineares arbitrárias $J \cdot S$ de colunas da matriz Jacobiana:

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial y(1)}{\partial x(1)} & \dots & \frac{\partial y(1)}{\partial x(n)} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial y(m)}{\partial x(1)} & \dots & \frac{\partial y(m)}{\partial x(n)} \end{pmatrix} \quad (C.5)$$

Para uma matriz S , o cálculo $n \times p$ exige muito mais do processamento e da memória do programa. Em particular, quando S é um vetor s , calcula-se a derivada direcional através da Eq. (C.6):

$$J \cdot s = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h * s) - f(x)}{h} \quad (C.6)$$

O modo reverso da diferenciação automática propaga derivadas do resultado final com relação a uma quantidade intermediária. Este precisa ser capaz de reverter o fluxo do programa e recalculer um valor intermediário que atua em uma não-linearidade do resultado final.

Em suma, precisa armazenar os valores intermediários que tinham sido envolvidos anteriormente em operações não-lineares. O modo reverso é particularmente mais

atrativo para a computação de longos gradientes, pois suas operações não dependem do número de variáveis independentes. As técnicas de diferenciação automáticas são diretamente aplicadas para calcular programas de comprimentos arbitrários que contenham parênteses, *loops* e sub-rotinas.

Análise de Perturbação

Análise de perturbação calcula quais as variações podem ser produzidas na simulação, tendo sido uma variável alterada por um pequeno acréscimo, de modo semelhante ao método clássico de trabalho virtual.

Há um enorme acréscimo de informação que permanece sem alteração em ambos os termos. Através da análise de perturbação pode-se obter uma estimativa da derivada sem problemas numéricos, apenas deixando que as mudanças se aproximem de zero. Mas, a ordem dos eventos terá que ser mantida.

A perturbação será tão pequena que somente o tempo de processamento, não as ordens, dos estados serão afetadas.

Análise Harmônica

Uma outra estratégia para estimar o gradiente da simulação é baseada no método do domínio da frequência, em que os parâmetros de entrada são deterministicamente variados no padrão senoidal durante a execução da simulação. A faixa de possíveis valores de cada fator de entrada poderá ser identificado. Então os valores de cada entrada são definidos dentro de uma faixa que poderá ser mudada durante a simulação.

Os experimentos simulados no domínio da frequência identificam os termos significativos do polinômio que aproxima as relações entre os parâmetros de entrada e saída da simulação.

Análise de Sensibilidade por Amostragem Aleatória

A sensibilidade tem sido avaliada em parâmetros individuais sem considerar a variabilidade combinada dos parâmetros de entrada simultaneamente.

A amostragem aleatória dos parâmetros de entrada gerados nas distribuições de entrada e saída, onde usualmente na avaliação do modelo e incertezas dos parâmetros em um

sentido “global” (McKay *et al.*, 1979) citado por (Hamby, 1994) se referem a estudos dos parâmetros de sensibilidade do mesmo tipo que a análise de erro dos parâmetros.

A influência de outros parâmetros na entrada é significativa para considerar na incerteza e na análise de sensibilidade de toda a performance do modelo e sua importância são dependentes das interações e influências de todos os outros parâmetros.

Os parâmetros podem ser determinados quantitativamente através de um gráfico dos valores de entrada x saída, ou quantitativamente pelos cálculos do coeficiente de correlação ou pela análise de regressão.

Índice de Importância

Hoffman e Gardner (1993) citado por Hamby (1994) também introduziu um índice de importância I_i , que é igual a variância dos valores do parâmetros, S_x^2 , dividido pela variância do valores dependentes S_y^2 , e mostrado pela Eq. (C.7);

$$I_i = \frac{S_{x_i}^2}{S_y^2} \quad (C.7)$$

Para Cuminghan *et al.* (1980), citado por (Hamby, 1994), importância das variáveis podem ser estimadas pelo uso de uma combinação de frações contribuindo para variabilidade da saída.

Método do Desvio Relativo

Este método utiliza técnicas de amostragem aleatória, calcula a soma da variabilidade introduzida na saída do modelo, enquanto se altera, no tempo, cada parâmetro na entrada do modelo.

Taxa de Desvio Relativo

Dadas duas distribuições de parâmetros na entrada do modelo, uma mais estreita e a outra mais larga, mas, produzindo uma saída idêntica, o modelo será mais sensível aos parâmetros de distribuição mais estreita.

Um valor maior da TDR indica que cada distribuição na saída do modelo varia amplamente ou que a distribuição dos parâmetros de entrada do modelo é relativamente estreito.

O valor maior que uma unidade indica que incerteza propaga através do modelo, sendo aumentada devida estrutura do modelo e sua alta sensibilidade em relação a variável em questão. A TDR de uma unidade indica que toda a incerteza na entrada é repassada para a saída do modelo, enquanto que valores menores que uma unidade, indica que o modelo é menos sensível para os parâmetros de saída do modelo.

***r*. de Pearson**

Uma quantidade estimada da correlação linear pode ser determinada pelo cálculo de um simples coeficiente de correlação para os valores dos parâmetros na entrada e na saída do modelo.

O resultado do coeficiente de correlação de Pearson é denominado por r e definido pela Eq. (C.8) como:

$$r = \frac{\sum_{j=1}^n (X_{ij} - \bar{X}_i)(Y_j - \bar{Y})}{\left[\sum_{j=1}^n (X_{ij} - \bar{X}_i)^2 \sum_{j=1}^n (Y_j - \bar{Y})^2 \right]^{1/2}} \quad (\text{C.8})$$

para a correção entre X_i e Y (Conover, 1980 citado por Hamby, 1994).

Quanto maior o valor absoluto de r , maior será a relação linear entre os valores de entrada e saída do modelo IAEA, (1989) citado por Hamby, (1994).

Um valor negativo de r indica que a variável é inversamente relacionada com a entrada do modelo.

Transformação da Classificação (Posição)

Um método de reduzir os efeitos dos dados não-lineares nos cálculos estatísticos é a transformação da classificação (*rank transformation*), (Iman e Conover, 1979 citado por Hamby, 1994).

A transformação da posição (*rank transformation*) lineariza as relações não-lineares monotônicas entre as variáveis e reduz os efeitos dos valores extremos (Helton e Iman, 1992 citado por Hamby, 1994).

ρ . de Sperman

Se a entrada/saída associada ao modelo são monotônicas, então as transformações da posição dos valores resultam em relações lineares através do coeficiente de correlação na posição. Deve-se identificá-los e determinar o grau de monotonicidade entre os valores de entrada e saída do modelo (IAEA, 1989 citado por Hamby, 1994).

Sperman pode ser calculado usando a equação para Pearson r , com excessão dos dados da transformada da posição (*rank transformation*) da operação (Iman e Conover, 1979 citado por Hamby, 1994).

Coeficiente de Correlação Parcial

Coeficientes de correlação parcial (CCP) são calculados considerando as correlações entre variáveis de entrada do modelo, as variáveis de entrada aleatórias X_1 e X_2 e a variável de saída Y , onde um coeficiente de correlação parcial é a medida correlação entre X_1 e Y . O CCP é definido por Conover (1980) citado por Hamby (1994) pela Eq. (C.9) como:

$$r_{X_1 Y | X_2} = \frac{r_{X_1 Y} - r_{X_1 X_2} r_{X_2 Y}}{\sqrt{(1 - r_{X_2 Y}^2)}} \quad (C.9)$$

onde a notação $r_{X_1 Y | X_2}$ representa o coeficiente de correlação parcial para X_1 e Y quando contabilizado para os efeitos de X_2 .

Posições de sensibilidade baseadas em valores relativos dos coeficientes de correlação, não mudarão as posições determinadas, baseados em simples coeficientes de correlação.

Técnicas de Regressão

Os métodos de regressão são usados freqüentemente para substituir um modelo complexo por uma superfície de resposta simplificada que é simplesmente a equação de regressão que aproxima a saída do modelo usando somente o parâmetro de entrada mais sensível do modelo.

Coeficientes de regressão proporcionam um modo de aplicação de sensibilidade de posição (*rank*) para parâmetros de entrada do modelo, e objeto de varias investigações (Iman e Conover, 1980 citado por Hamby, 1994).

A forma generalizada de uma simples equação de regressão é apresentada pela Eq. (C.10) como:

$$\hat{Y} = b_0 + \sum_k b_k Z_k \quad (C.10)$$

onde cada Z_k é uma variável pré-determinada e função de (X_1, \dots, X_n) e cada b_k é um coeficiente de regressão.

O uso da técnica de regressão permite que o índice da sensibilidade seja determinado baseado na magnitude relativa do coeficiente de regressão.

Técnica de Regressão Padronizada

A padronização adquiriu seu espaço na forma de transformação por posições ou pela taxa de desvio padrão dos parâmetros e sua média. Sua função é remover a influência da unidade e colocar todos os parâmetros em um mesmo patamar (Helton *et al.*, 1985; Iman e Helton, 1998, 1991, citado por Hamby, 1994).

O cálculo do coeficiente de regressão da posição CRP é um procedimento simples e requer menos tempo computacional. O CRP é sensivelmente mais rigoroso e pode ser determinado pela Eq. (C.11) como:

$$\frac{(\hat{Y} - \bar{Y})}{s} = \sum_k \left[\frac{b_k s_k}{s} \right] \frac{(Z_k - \bar{Z}_k)}{s_k} \quad (C.11)$$

onde cada Z_k é uma função de (X_1, \dots, X_n) , s é o desvio padrão dos parâmetros na saída e s_k é o desvio padrão na entrada do modelo. Se cada Z_k é uma função de somente um parâmetro em X , então o valor de $b_k s_k \cdot s$ é o coeficiente de regressão padronizado para o parâmetro X_k , onde $k = 1, \dots, n$.

Teste de sensibilidade envolvendo distribuição segmentada

Esses testes estatísticos envolvem divisão ou segmentação dos parâmetros de entrada do modelo em duas ou mais distribuições empíricas, baseadas no particionamento dos parâmetros na saída do modelo.

Teste de Smirnov

O teste de Smirnov trabalha com duas distribuições empíricas $S_1(X)$ e $S_2(X)$ gerados como resultado do particionamento dos parâmetros de entrada. O grau de similaridade entre as distribuições medidas pelos testes estatísticos é usado para indicar o grau de sensibilidade entre os valores de entrada e saída do modelo.

O teste estatístico de Smirnov pode ser medido diretamente como a maior distância vertical entre duas distribuições plotadas em um mesmo gráfico (Fig. C.1), ou através da Eq. (C.12) como,

$$T_1 = \sup |S_1(x) - S_2(x)| \quad (C.12)$$

onde \sup representa o maior valor das diferenças absolutas entre $S_1(x)$ e $S_2(x)$.

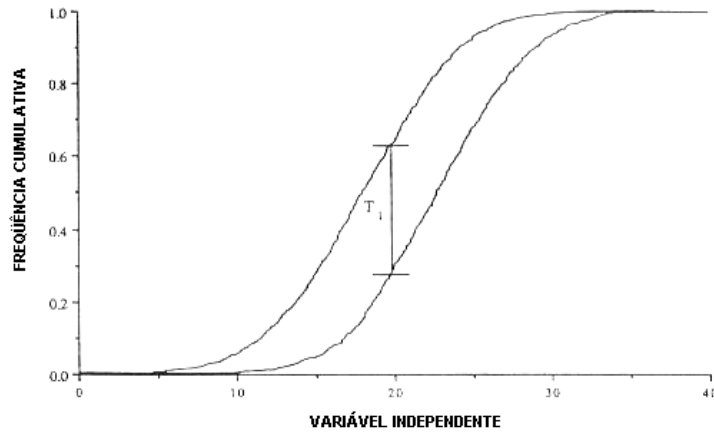


Figura C.1 – Exemplo do teste de Smirnov.

Fonte : Hamby, 1994

Teste de Cramer-von Mises

O teste de Cramer-von Mises tem o propósito de determinar se duas distribuições empíricas são estatisticamente idênticas. A estatística de Cramer-von Mises, T_2 é a soma dos quadrados de toda a distância vertical entre as duas distribuições empíricas, como mostra a Eq. (C.13):

$$T_2 = \frac{m \cdot n}{(m + n)^2} \sum [S_1(x) - S_2(x)]^2 \quad (C.13)$$

onde os valores de m e n são os números de amostras utilizadas para estimar a distribuição. É esperado que os parâmetros baseados nos testes de Smirnov e Cramer-von Mises sejam similares, se os testes mostrarem pouca diferença em suas energias estatísticas.

Teste de Mann-Whitney

É utilizado para comparar a média de duas amostragens independentes (Conover, 1980 citado por Hamby, 1994). As funções de distribuição X e Y são ordenadas como uma amostragem simples e posições são designadas ordenadamente.

O teste estatístico T é a soma dos dados da distribuição X resultando na Eq. (C.14) mostrado como,

$$T = \sum_{i=1}^n R(X_i) \quad (C.14)$$

onde $R(X_i)$ é referente a posição de X_i . Na teoria, se a soma de uma das amostragens for maior que a outra, a media das amostragens serão diferentes (Conover, 1980 citado por Hamby, 1994).

Teste Squared-Ranks (Arranjo)

A variância de duas amostragens independentes X_i e Y pode ser comparada usando o teste do arranjo ao quadrado (Squared-Ranks). Os arranjos não são baseados em dados puros, mas preferem a diferença absoluta entre a amostragem aleatória X_i e a amostragem média μ_x . Os arranjos são elevados ao quadrado para proporcionar mais energia estatística (Conover, 1980) citado por (Hamby, 1994).

O teste estatístico T , como mostra a Eq. (C.15) e (C.16), é igual a

$$T = \sum_{i=1}^n [R(U_i)]^2 \quad (C.15)$$

onde:

$$U_i = |X_i - \mu_x| \quad (C.16)$$

Baseado em testes preliminares e comparações numéricas com outros testes de sensibilidade, o (*Squared-Ranks*) não parece ser de muita utilidade para arranjos (ranking) dos parâmetros de sensibilidade.

Geralmente o propósito da análise de sensibilidade é determinar qual parâmetro de entrada exerce maior influenciando a resposta do modelo.

De posse desta informação pode-se eliminar os parâmetros sem importância do modelo, identificar a direção de avanço das pesquisas, trabalhar a incerteza do parâmetro e aumentar a precisão do modelo.

Problemas Aplicados

Autovalores e Autovetores

A representação discretizada de uma estrutura, leva para um sistema de n equações diferenciais de segunda ordem, que são acopladas estaticamente e dinamicamente. As equações lineares podem ser mostradas matricialmente na forma de sistemas não amortecidos, assim como:

$$M\ddot{x} + Kx = f(t) \quad (C.17)$$

onde M e K são as matrizes $n \times n$ contendo os termos de massa e rigidez do elemento que são formadas de matrizes de elementos individuais. O sistema de excitação é agrupando no vetor, $f(t)$, e o problema usual é determinar a resposta do desconhecido.

Apenas considerando a parte homogênea da Eq. (C.17) e supondo-se que a resposta ao deslocamento é harmônica:

$$x(t) = x(\omega)e^{i\omega t} \quad (C.18)$$

o autop problema pode ser escrito na forma:

$$K\phi_j = \lambda_j M\phi_j \quad j = 1, \dots, n \quad (C.19)$$

onde $\lambda_j = \omega_j^2$ é o j -ésimo autovalor e ϕ_j é o j -ésimo autovetor. Os autovetores e autovalores podem ser interpretados fisicamente como o quadrado da frequência natural de vibração e o modo de forma respectivamente.

A propriedade mais importante dos modos de vibração não amortecidos é sua ortogonalidade com respeito à massa. Pré-multiplicando a Eq. (C.20) por ϕ_k^T , tem-se:

$$\phi_k^T K \phi_j = \lambda_j \phi_k^T M \phi_j \quad (C.20)$$

intercambiando os subscritos j e k , e transpondo-os, encontra-se:

$$\phi_k^T K \phi_j = \lambda_k \phi_k^T M \phi_j \quad (C.21)$$

Se os autovalores são distintos $(\lambda_j \neq \lambda_k)$ então pela subtração da Eq. (C.20) na Eq. (C.21), obtém-se

$$\phi_j^T M \phi_k = 0 \quad j \neq k \quad (C.22)$$

$$\phi_j^T M \phi_j = m_j \quad (C.23)$$

onde m_j é conhecido como a j -ésima massa generalizada. A Eq. (C.23) define a ortogonalidade do autovetor não amortecido com respeito à massa.

No j -ésimo autovalor $\det[K - \lambda_j M] = 0$, do qual se verifica que a matriz $[K - \lambda_j M]$ é singular. Se a multiplicidade do autovalor λ_j é p , então $\text{null}[K - \lambda_j M] = p$. A equação do autovalor pode ser escrita na forma particionada:

$$\begin{bmatrix} [K - \lambda_j M]_{aa} & [K - \lambda_j M]_{ab} \\ [K - \lambda_j M]_{ba} & [K - \lambda_j M]_{bb} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\phi_j\}_a \\ \{\phi_j\}_b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (C.24)$$

onde $[K - \lambda_j M]_{bb}$ é uma matriz não-singular $(n-p) \times (n-p)$, $\{\phi_j\}_a$ é um vetor, e $\{\phi_j\}_b$ é um vetor $(n-p)$. A parte mais baixa pode ser resolvida para $\{\phi_j\}_b$ em termos de $\{\phi_j\}_a$.

$$\{\phi_j\}_b = -[K - \lambda_j M]_{bb}^{-1} [K - \lambda_j M]_{ba} \{\phi_j\}_a \quad (C.25)$$

Se p vetores linearmente independentes $\{\phi_j\}_a, \{\phi_{j+1}\}_a, \dots, \{\phi_{j+p-1}\}_a$ são conhecidos, então os componentes remanescentes $\{\phi_j\}_b, \{\phi_{j+1}\}_b, \dots, \{\phi_{j+p-1}\}_b$ podem ser determinados pela Eq. (C.25). Os autovetores dos repetidos autovalores λ_j não são únicos já que qualquer combinação de autovetores $\phi_j, \phi_{j+1}, \dots, \phi_{j+p-1}$ é também um autovetor.

O resultado é que o produto de um autovetor com um múltiplo escalar é também um autovetor, o que conduz para a importante formulação do escalonamento ou normalização de autovetores. Um procedimento usual é normalizar os autovetores, como:

$$\phi^T M \phi = I_{n \times n} \quad (C.26)$$

$$\varphi = [\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_j, \dots, \phi_n] \quad (C.27)$$

Isto significa que as n massas generalizadas são todas matrizes unitárias e tem o efeito que:

$$\varphi^T K \varphi = \Lambda \quad (C.28)$$

$$\Lambda = \text{diag}(\lambda_j) \quad (C.29)$$

que pode ser facilmente provado seguindo a análise através da Eq. (C.20) - (C.24).

Os vetores modais aparecem após processo de normalização e são geralmente chamados de modos normais.

Em problemas dinâmicos estruturais, mecanismos precisos de amortecimento não são bem compreendidos. Conseqüentemente, formulações quadráticas similares aquelas para massa e rigidez, baseadas em parâmetros físicos claramente definidos, não são avaliados para amortecimento. Afortunadamente, o nível de amortecimento é na maioria das vezes suficientemente baixo para que ele possa ser desprezado ou os modelos podem ser simplificados para manter o real comportamento do vetor forma modal dos sistemas amortecidos.

Nos modelos de amortecimento viscoso, a característica ao amortecimento é dada pelo produto de um coeficiente de amortecimento, C , e a velocidade através do amortecedor. Assim em um sistema de simples grau de liberdade a equação dinâmica pode ser escrita:

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = f(t) \quad (C.30)$$

onde x representa a resposta ao deslocamento para o dinâmico sistema de forças f .

A taxa de amortecimento viscoso é definida como:

$$\zeta = \frac{c}{2\sqrt{km}} \quad (C.31)$$

Amortecimento crítico ocorre quando $\zeta = 1$ e marca a transição da resposta oscilatória de um sistema sub-amortecido, para a resposta não-oscilatória de um sistema super-amortecido, para um passo ou força de impulso. A energia dissipada pela vazão do fluido, ou pela radiação acústica, pode ser representada por um modelo de amortecimento viscoso. Uma vantagem dos modelos viscosos é sua larga aplicabilidade

para diferentes formas de excitação, e, em seu aspecto, ele difere de amortecimento histerético.

O modelo de amortecimento histerético pode ser escrito da seguinte forma,

$$m\ddot{x} + \left(\frac{\eta k}{\omega}\right)\dot{x} + kx = fe^{i\omega t} \quad (C.32)$$

ou alternativamente como,

$$m\ddot{x} + k(1 + i\eta)x = fe^{i\omega t} \quad (C.33)$$

Desde que ele é válido somente para excitação harmônica. O termo η é conhecido como o fator perda de amortecimento e rigidez complexa $k(1 + i\eta)$ podem ser relacionados para o complexo Módulo de Young que é medido, especificamente em materiais plásticos semelhantes à borracha. A principal diferença entre viscosidade e modelo histerético é que, para o sistema viscoso, a dissipação de energia por ciclo depende linearmente sobre a frequência de oscilação, enquanto que para o caso histerético ele é independente da frequência.

Para a análise de modelos linearizados, com n graus de liberdade, as Eq. (C.30) e (C.33) podem ser generalizadas para obter:

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = f \quad (C.34)$$

e

$$M\ddot{x} + (K + iC)x = fe^{i\omega t} \quad (C.35)$$

onde M , C e K são as matrizes de massa $n \times n$, coeficiente de amortecimento e rigidez e x é o vetor dos n respostas dos deslocamentos.

Nas soluções das Eq. (C.34) e (C.35) é vantajoso usar a aproximação do amortecimento proporcional.

$$C = \alpha M + \beta K \quad (C.36)$$

Não há uma justificativa física para esta aplicação, mas aparenta não ser significativamente o melhor modelo quando nível de amortecimento é abaixo ($< 10\%$ do crítico). A vantagem matemática é que os modos normais não amortecidos podem ser usados para diagnosticar a matriz amortecimento apenas usando a propriedade da ortogonalidade dos autovetores. Se a matriz $n \times n$ dos modos de forma não amortecidos

é definida de acordo com a Eq. (C.37) e desde que o n-espaco representados pelos modos vibraçao:

$$x = \Phi \gamma \quad (C.37)$$

onde γ é o vetor agente de participação modal. Apenas combinando Eq. (C.37) com as Eq. (C.34) e (C.35), mostra-se que:

$$\ddot{\gamma} + Z\dot{\gamma} + \Lambda\gamma = \Phi^T f \quad (C.38)$$

e

$$\ddot{\gamma} + \Lambda(I + iN)\gamma = \Phi^T f e^{i\omega t} \quad (C.39)$$

respectivamente:

$$Z = \text{diag}(2\zeta_j \omega_j) \quad N = \text{diag}(\eta_j) \quad (C.40, C.41)$$

$$\zeta_j = \frac{\alpha}{2\omega_j} + \frac{\beta\omega_j}{2} \quad \eta_j = \frac{\alpha}{\omega_j^2} + \beta \quad j = 1, \dots, n \quad (C.42, C.43)$$

e o vetor de modo de forma estiver sido normalizado pela massa.

Isto pode ser visto que ambas Eq. (C.38) e (C.39) representam sistemas de n equações diferenciais de segunda ordem desacopladas em γ_j , $j = 1, \dots, n$. A soluçao, x , para Eq. (C.34) e (C.35) pode ser obtida de soluçoes independentes γ_j pela aplicaçao da Eq. (C.38).

Uma outra aproximaçao do amortecimento bastante utilizada é o amortecimento modal. Assim como o amortecimento proporcional, a aproximaçao do amortecimento modal pode ser aplicada para modelos viscosos e histeretico, mas ele é somente aplicado quando as equações dinâmicas são arranjadas no domínio modal.

Entao, para o j -ésimo modo, com amortecimento viscoso:

$$\ddot{\gamma} + 2\zeta_j \omega_j \dot{\gamma}_j + \omega_j^2 \gamma_j = \phi_j^T f \quad (C.35)$$

e com amortecimento histeretico:

$$\ddot{\gamma} + \omega_j^2 (I + i\eta_j) \gamma_j = \phi_j^T f e^{i\omega t} \quad (C.36)$$

A frequencia natural e modos de forma são determinados pelos autovetores e autovalores não amortecidos do sistema de elementos finitos. As taxas de

amortecimento, fator de perda, são usualmente determinadas experimentalmente (Ewins, 1984) e inseridos nas Eq. (C.34) e (C.35).

Para problemas de autovalores estruturais não amortecidos, deduziu-se expressões para a primeira derivada dos autovalores por (Wittrick, 1962) e os autovetores por (Fox e Kapoor, 1968). Diferenciando a Eq. (C.19) com respeito a um parâmetro, θ , nós podemos facilmente mostrar que:

$$[K - \lambda_j M] \frac{\partial \phi_j}{\partial \theta} = - \left[\frac{\partial K}{\partial \theta} - \lambda_j \frac{\partial M}{\partial \theta} - \frac{\partial \lambda_j}{\partial \theta} M \right] \phi_j \quad (C.37)$$

Pré-multiplicando pela massa normalizada ϕ_j^T , e notando que M e K são simétricos, obtém-se uma expressão para a sensibilidade do autovalor.

$$\frac{\partial \lambda_j}{\partial \theta} = \phi_j^T \left[\frac{\partial K}{\partial \theta} - \lambda_j \frac{\partial M}{\partial \theta} \right] \phi_j \quad (C.38)$$

E poderia ser notado que somente o j -ésimo autovalor e autovetor são necessários para calcular a sensibilidade do j -ésimo autovalor.

Foi desenvolvida (Nelson, 1976) uma técnica para a avaliação da sensibilidade do j -ésimo autovetor que novamente necessitava somente do j -ésimo autovalor e autovetor. Combinando Eq. (C.35) e (C.36), obtém-se:

$$[K - \lambda_j M] \frac{\partial \phi_j}{\partial \theta} = f_j \quad (C.39)$$

onde o lado direito, f_j , é dado por:

$$f_j = \left[\frac{\partial K}{\partial \theta} - \lambda_j \frac{\partial M}{\partial \theta} - \phi_j^T \left[\frac{\partial K}{\partial \theta} - \lambda_j \frac{\partial M}{\partial \theta} \right] \phi_j M \right] \phi_j \quad (C.40)$$

A derivada do autovetor completa é dada em duas partes:

$$\frac{\partial \phi_j}{\partial \theta} = v_j + c_j \phi_j \quad (C.41)$$

O primeiro vetor, quando substituído em (C.38), dá f_j e o segundo é a solução homogênea. Quando a equação de normalização da massa:

$$\phi_j^T M \phi_j = 1 \quad (C.42)$$

É diferente com respeito à θ e o resultado da equação é combinado com Eq. (C.41), para eliminar $\partial\theta_j/\partial\theta$ de ambos, então uma expressão para a participação do fator c_j é obtido na forma:

$$c_j = -\phi_j^T M v_j - \frac{1}{2} \phi_j^T \frac{\partial M}{\partial \theta} \phi_j \quad (C.43)$$

Um problema aparece no cálculo de v_j da Eq. (C.39), para o autovalor j -ésimo, $\text{rank}[K - \lambda_j M] = n - 1$. A solução de Nelson para o problema foi atribuir o k -ésimo termo em v_j o valor zero. Assim, uma matriz particionada de equações arranjadas pode ser formada como:

$$\begin{bmatrix} [K - \lambda_j M]_{11} & 0 & [K - \lambda_j M]_{13} \\ 0 & 1 & 0 \\ [K - \lambda_j M]_{31} & 0 & [K - \lambda_j M]_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ 0 \\ f_3 \end{Bmatrix} \quad (C.44)$$

O pivô, k , é escolhido na localização onde $|\{\theta_j\}_k|$ é um máximo, na base que a equação correspondente poderá ser fortemente acopladas para a redundância, e pode entretanto ser removida. A solução completa para $\partial\theta_j/\partial\theta$ é finalmente obtida da Eq. (C.41), e isto pode ser notado que a transformação arbitrária de $v_k = 0$ é compensado no cálculo de c_j na Eq. (C.43).

A sensibilidade das funções de resposta em frequência pode ser obtida de,

$$\frac{\partial H(\omega)}{\partial \theta} = -H(\omega) \frac{\partial B(\omega)}{\partial \theta} H(\omega) \quad (C.45)$$

onde:

$$B(\omega) = [-\omega^2 M + i\omega C + K] \quad (C.46)$$

e

$$H(\omega) = B^{-1}(\omega) \quad (C.47)$$

Sensibilidade de resposta em frequência não é geralmente avaliada para modelos com amortecimento modal.

Excitação Adaptativa

Um meio de reduzir o número de parâmetros é aplicar excitações que produzem fortes sensibilidades para um subconjunto de parâmetros, fazendo com que a sensibilidade de outros parâmetros desapareçam. O método de sensibilidade seletiva requer a predição da resposta para um número relativamente grande de forças de excitação. Algum método subsequente de atualização precisa, contudo, usar dados da resposta em frequência. Continuando, para proporcionar outras informações, os trabalhos de Ben-Haim serão seguidos (Ben-Haim, 1992-1994, Ben-Haim e Prells, 1993, Prells e Ben-Haim, 1993). Suponha que a equação do movimento possa ser escrita na forma geral dada por:

$$B(\omega)x = (-\omega^2 M + K)x = Hf \quad (C.48)$$

a saída passa a ser expressa em termos do deslocamento assim como:

$$y = Gx \quad (C.49)$$

onde G e H são matrizes retangulares que estabelecem as saídas e os carregamento respectivamente. Uma sensibilidade de saída, mudados nos parâmetros de rigidez θ_j , pode ser escrita na frequência e na forma:

$$S_j(f) = \left\{ \frac{\partial y}{\partial \theta_j} \right\}^T \left\{ \frac{\partial y}{\partial \theta_j} \right\} \quad (C.50)$$

Pela combinação das Eq. (C.46) para (C.47) a sensibilidade pode ser expressa como:

$$S_j(f) = f^T H^T \left[F \frac{\partial B}{\partial \theta_j} F \right]^T G^T G \left[F \frac{\partial B}{\partial \theta_j} F \right] Hf \quad (C.51)$$

onde F é a matriz $n \times n$ de flexibilidade dinâmica e seu uso tem sido feito pela identidade, $\frac{\partial A^{-1}}{\partial \theta} = -A^{-1} \frac{\partial A}{\partial \theta} A^{-1}$, para uma matriz não-singular A . A Eq. (C.51) pode ser simplificada:

$$S_j(f) = f^T H^T [FB_j F]^T G^T G [FB_j F] Hf \quad (C.52)$$

onde $B_j = K_j - \omega^2 M_j$. Esta pode ser simplificada mais adiante apenas escrevendo:

$$S_j(f) = f^T D_j f \quad (C.53)$$

O objetivo da sensibilidade seletiva é adaptar o sistema como:

$$S_j(\mathbf{f}) \begin{cases} = 0 & \text{se } j \in \overline{\mathfrak{I}} \\ \neq 0 & \text{se } j \in \mathfrak{I} \end{cases} \quad (\text{C.54})$$

onde $\overline{\mathfrak{I}} = \{1, 2, \dots, m\}$ é um subconjunto de m índices representando parâmetros que não requer atualização e $\mathfrak{I} = \{m+1, m+2, \dots, l\}$ representando os parâmetros que serão atualizados. Um procedimento para determinação de um sistema de carregamento para satisfazer a Eq. (C.54) é descrito a seguir.

Passo 1

Em cada frequência, seleciona-se x tal que:

$$\mathbf{B}_j \mathbf{x} \begin{cases} = 0 & \text{se } j \in \overline{\mathfrak{I}} \\ \neq 0 & \text{se } j \in \mathfrak{I} \end{cases} \quad (\text{C.55})$$

Isto não é muito difícil devido à estrutura da matriz de rigidez, K_j , elas são muito esparsas e possuem deficiência de arranjo. Isto poderá ser notado, devido à determinação da variável x da Eq. (C.54) que não depende da incerteza do parâmetro θ_j . A existência de uma variável x que satisfaça a Eq. (C.54) é uma condição necessária para sensibilidade seletiva.

Passo 2

Determinar f da relação:

$$Hf = \left[B_0 + \sum_{j=1}^l \theta_j B_j \right] x \quad (\text{C.56})$$

Onde $B_0 = K_0 - \omega^2 M_0$, que quando combinado com a Eq. (C.54) fornece:

$$Hf = \left[B_0 + \sum_{j=1}^l \theta_j B_j \right] x \quad (\text{C.57})$$

Note-se que somente os parâmetros do modelo indicados na escolha dos dados de entrada são aqueles que, nas medições, serão sensibilizados seletivamente. Se um f pode ser encontrado da Eq. (C.58), enquanto x satisfaça às condições da Eq. (C.54), então aquele mesmo f poderá satisfazer às condições de sensibilidade seletiva

expressadas na Eq. (C.53). A solução da Eq. (C.57) somente existirá se o lado direito da equação está expandido no espaço pelas colunas de H . Se Eq. (C.57) não tem solução então considerações poderão ser dadas para alterar a localização dos carregamentos aplicados, representados por H . Assim que os valores de θ_j são desconhecidos, uma solução iterativa é procurada que resulta na convergência simultânea nos dados de entrada f e os parâmetros θ_j atualizados.

Se o vetor força não pode ser encontrado pelo procedimento acima, então uma alternativa é relaxar o critério de sensibilidade seletiva e maximizar a sensibilidade do parâmetro desejado para um dado nível de força. Suponhamos que nós desejamos somente fazer o parâmetro θ_i sensível para a excitação. Apenas restringindo a magnitude do vetor força para uma esfera de raio R , então a força f pode ser determinada no qual maximize o custo da função:

$$J_i = S_i(f) + \lambda(f^T f - R^2) \quad (C.58)$$

Onde λ denota um multiplicador de Lagrange. Diferenciando a Eq. (C.58) em função de f e equacionando os resultados zero em uma equação de autovalor:

$$D_i f = -\lambda f \quad (C.59)$$

Que mostra que o extremo de S_i ocorre quando $-\lambda$ é um autovalor e f é um autovetor de D_i . Já que deve-se maximizar a sensibilidade $S_i(f)$ o maior autovalor de D_i e seu associado autovetor são escolhidos.

Uma alternativa para minimizar a sensibilidade dos parâmetros não requeridos, enquanto mantemos a sensibilidade com respeito para o i -ésimo parâmetro como:

$$S_i(f) = \alpha_i \quad (C.60)$$

A vetor força requerida é dado apenas minimizando o custo da função:

$$J_i = \sum_{j \in \bar{\mathfrak{S}}} S_j(f) + \lambda(f^T D_i f - \alpha_i) \quad (C.61)$$

Que leva para o auto-problema:

$$E f = -\lambda D_i f \quad (C.62)$$

onde $E = \sum_{j \in \mathcal{S}} D_j$. Já que o objetivo é minimizar o custo da função definida pela Eq.

(C.62), o menor autovalor e seu associado autovetor escolhido. Somente um parâmetro foi sensibilizado.