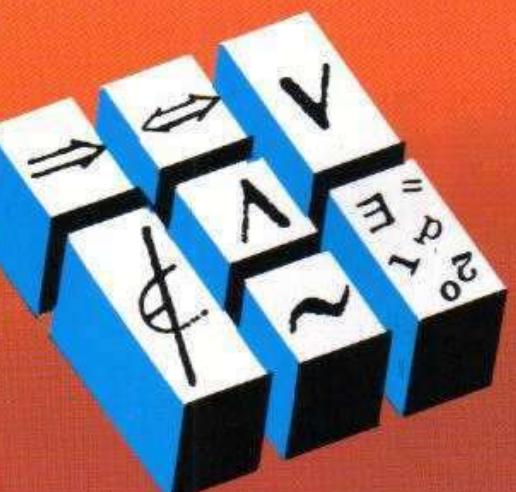


Iniciação à LÓGICA MATEMÁTICA

Edgard de Alencar Filho



Nobel

INICIAÇÃO À LÓGICA MATEMÁTICA

© 1975 Edgard de Alencar Filho

Direitos desta edição reservados à
AMPUB Comercial Ltda.

(Nobel é um selo editorial da AMPUB Comercial Ltda.)

Rua Pedroso Alvarenga 1046 - 9º andar - 04531-004 - São Paulo, SP

Fone: (11) 3706-1466 - Fax: (11) 3706-1462

www.editoranobel.com.br

E-mail: ednobel@editoranobel.com.br

Impressão: Paym Gráfica e Editora Ltda.

Reimpressão: 2003

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

A.3551 Alencar Filho, Edgard de, 1913
Iniciação à lógica matemática / Edgard de Alencar Filho. – São Paulo : Nobel, 2002.

Bibliografia
ISBN 85-213-0403-X

I. Lógica simbólica e matemática. I. Título.

86-0802

CDD-511.3

Índice para catálogo sistemático:
1. Lógica matemática 511.3

É PROIBIDA A REPRODUÇÃO

Nenhuma parte desta obra poderá ser reproduzida, copiada, transcrita ou mesmo transmitida por meios eletrônicos ou gravações, sem a permissão, por escrito, do editor. Os infratores serão punidos pela Lei nº 9.610/98.

Impresso no Brasil/Printed in Brazil

Índice

Capítulo 1 PROPOSIÇÕES, CONECTIVOS

1. Conceito de proposição	11
2. Valores lógicos das proposições	12
3. Proposições simples e proposições compostas	12
4. Conectivos	13
5. Tabela-verdade	13
6. Notação	15
Exercícios	15

Capítulo 2 OPERAÇÕES LÓGICAS SOBRE PROPOSIÇÕES

2. Negação	17
3. Conjunção	18
4. Disjunção	20
5. Disjunção exclusiva	21
6. Condicional	22
7. Bicondicional	23
Exercícios	27

Capítulo 3 CONSTRUÇÃO DE TABELAS-VERDADE

1. Tabela-verdade de uma proposição composta	29
2. Número de linhas de uma tabela-verdade	29

3. Construção da tabela-verdade de uma proposição composta	30
4. Exemplificação	30
5. Valor lógico de uma proposição composta	36
6. Uso de parêntesis	38
7. Outros símbolos para os conectivos	39
Exercícios	39

Capítulo 4 TAUTOLOGIAS, CONTRADIÇÕES E CONTINGÊNCIAS

1. Tautologia	43
2. Princípio de substituição para as tautologias	45
3. Contradição	46
4. Contingência	47
Exercícios	48

Capítulo 5 IMPLICAÇÃO LÓGICA

1. Definição de implicação lógica	49
2. Propriedades da implicação lógica	49
3. Exemplificação	50
4. Tautologias e implicação lógica	52
Exercícios	53

Capítulo 6 EQUIVALÊNCIA LÓGICA

1. Definição de equivalência lógica	55
2. Propriedades da equivalência lógica	55
3. Exemplificação	56
4. Tautologias e equivalência lógica	57
5. Proposições associadas a uma condicional	59
6. Negação conjunta de duas proposições	62
7. Negação disjunta de duas proposições	63
Exercícios	63

Capítulo 7 ÁLGEBRA DAS PROPOSIÇÕES

1. Propriedades da conjunção	67
2. Propriedades da disjunção	69

3. Propriedades da conjunção e da disjunção	71
4. Negação da condicional	74
5. Negação da bicondicional	74
Exercícios	75

**Capítulo 8
MÉTODO DEDUTIVO**

2. Exemplificação	78
3. Redução do número de conectivos	81
4. Forma normal das proposições	82
5. Forma normal conjuntiva	82
6. Forma normal disjuntiva	84
7. Princípio de dualidade	85
Exercícios	85

**Capítulo 9
ARGUMENTOS. REGRAS DE INFERÊNCIA**

1. Definição de argumento	87
2. Validade de um argumento	87
3. Critério de validade de um argumento	88
4. Condicional associada a um argumento	89
5. Argumentos válidos fundamentais	90
6. Regras de inferência	91
7. Exemplos do uso das regras de inferência	92
Exercícios	96

**Capítulo 10
VALIDADE MEDIANTE TABELAS-VERDADE**

2. Exemplificação	99
3. Prova de não-validade	108
Exercícios	110

**Capítulo 11
VALIDADE MEDIANTE REGRAS DE INFERÊNCIA**

2. Exemplificação	112
Exercícios	118

**Capítulo 12
VALIDADE MEDIANTE REGRAS DE INFERÊNCIA E EQUIVALÊNCIAS**

1. Regra de substituição	129
2. Equivalências notáveis	129
3. Exemplificação	131
4. Inconsistência	138
Exercícios	141

**Capítulo 13
• DEMONSTRAÇÃO CONDICIONAL E DEMONSTRAÇÃO INDIRETA**

1. Demonstração condicional	145
2. Exemplificação	146
3. Demonstração indireta	149
4. Exemplificação	150
Exercícios	153

**Capítulo 14
SENTENÇAS ABERTAS**

1. Sentenças abertas com uma variável	156
2. Conjunto-verdade de uma sentença aberta com uma variável	156
3. Sentenças abertas com duas variáveis	158
4. Conjunto-verdade de uma sentença aberta com duas variáveis	159
5. Sentenças abertas com n variáveis	160
6. Conjunto-verdade de uma sentença aberta com n variáveis	161
Exercícios	162

**Capítulo 15
OPERAÇÕES LÓGICAS SOBRE SENTENÇAS ABERTAS**

2. Conjunção	164
3. Disjunção	166
4. Negação	168
5. Condicional	169
6. Bicondicional	170
7. Álgebra das sentenças abertas	171
Exercícios	172

Capítulo 16 QUANTIFICADORES

1. Quantificador universal	175
2. Quantificador existencial	178
3. Variável aparente e variável livre	180
4. Quantificador de existência e unicidade	180
5. Negação de proposições com quantificador	181
6. Contra-exemplo	183
Exercícios	183

Capítulo 17 QUANTIFICAÇÃO DE SENTENÇAS ABERTAS COM MAIS DE UMA VARIÁVEL

1. Quantificação parcial	187
2. Quantificação múltipla	187
3. Comutatividade dos quantificadores	189
4. Negação de proposições com quantificadores	190
Exercícios	190

RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS	193
--------------------------------	-----

BIBLIOGRAFIA	203
--------------------	-----

Capítulo 1

Proposições. Conectivos

1. CONCEITO DE PROPOSIÇÃO

Definição – Chama-se proposição todo o conjunto de palavras ou símbolos que exprimem um pensamento de sentido completo.

As proposições transmitem pensamentos, isto é, afirmam fatos ou exprimem juízos que formamos a respeito de determinados entes.

Assim, p. ex., são proposições:

- (a) A Lua é um satélite da Terra
- (b) Recife é a capital de Pernambuco
- (c) $\pi > \sqrt{5}$
- (d) $\sin \frac{\pi}{2} = 1$

A Lógica Matemática adota como regras fundamentais do pensamento os dois seguintes princípios (ou axiomas):

(I) PRINCIPIO DA NÃO CONTRADIÇÃO: Uma proposição não pode ser verdadeira e falsa ao mesmo tempo.

(II) PRINCIPIO DO TERCEIRO EXCLUÍDO: Toda a proposição ou é verdadeira ou é falsa, isto é, verifica-se sempre um destes casos e nunca um terceiro.

Por virtude deste princípio diz-se que a Lógica Matemática é uma Lógica bivalente.

Por exemplo, as proposições (a), (b), (c) e (d) são todas verdadeiras, mas são falsas as cinco seguintes proposições:

- (a) VASCO DA GAMA descobriu o Brasil
- (b) DANTE escreveu os Lusíadas

- (c) $\frac{3}{5}$ é um número inteiro
- (d) O número π é racional
- (e) $\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 2$

Assim, as proposições são expressões a respeito das quais tem sentido dizer que são verdadeiras ou falsas.

2. VALORES LÓGICOS DAS PROPOSIÇÕES

Definição — Chama-se valor lógico de uma proposição a verdade se a proposição é verdadeira e a falsidade se a proposição é falsa.

Os valores lógicos verdade e falsidade de uma proposição designam-se abreviadamente pelas letras V e F, respectivamente. Assim, o que os princípios da não contradição e do terceiro excluído afirmam é que:

Toda a proposição tem um, e um só, dos valores V, F.

Consideremos, p. ex., as proposições:

- (a) O mercúrio é mais pesado que a água
- (b) O Sol gira em torno da Terra

O valor lógico da proposição (a) é a verdade(V) e o valor lógico da proposição (b) é a falsidade(F).

3. PROPOSIÇÕES SIMPLES E PROPOSIÇÕES COMPOSTAS

As proposições podem ser classificadas em simples ou atómicas e compostas ou moleculares.

Definição 1 — Chama-se proposição simples ou proposição atómica aquela que não contém nenhuma outra proposição como parte integrante de si mesma.

As proposições simples são geralmente designadas pelas letras latinas minúsculas p, q, r, s, ..., chamadas letras proposicionais.

Assim, p. ex., são proposições simples as seguintes:

- p : Carlos é careca
- q : Pedro é estudante
- r : O número 25 é quadrado perfeito

Definição 2 — Chama-se proposição composta ou proposição molecular aquela formada pela combinação de duas ou mais proposições.

As proposições compostas são habitualmente designadas pelas letras latinas maiúsculas P, Q, R, S, ..., também chamadas letras proposicionais.

Assim, p. ex., são proposições compostas as seguintes:

- P : Carlos é careca e Pedro é estudante
- Q : Carlos é careca ou Pedro é estudante
- R : Se Carlos é careca, então é infeliz

visto que cada uma delas é formada por duas proposições simples.

As proposições compostas também costumam ser chamadas fórmulas proposicionais ou apenas fórmulas.

Quando interessa destacar ou explicitar que uma proposição composta P é formada pela combinação das proposições simples p, q, r, ..., escreve-se: P(p, q, r, ...).

As proposições simples e as proposições compostas também são chamadas respectivamente átomos e moléculas.

Observaremos ainda que as proposições componentes de uma proposição composta podem ser, elas mesmas, proposições compostas.

4. CONECTIVOS

Definição — Chamam-se conectivos palavras que se usam para formar novas proposições a partir de outras.

Assim, p. ex., nas seguintes proposições compostas:

- P : O número 6 é par e o número 8 é cubo perfeito
- Q : O triângulo ABC é retângulo ou é isósceles
- R : Não está chovendo
- S : Se Jorge é engenheiro, então sabe Matemática
- T : O triângulo ABC é equilátero se e somente se é equiângulo

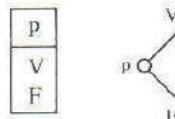
são conectivos usuais em Lógica Matemática as palavras que estão grifadas, isto é:

"e", "ou", "não", "se... então..." "... se e somente se..."

5. TABELA-VERDADE

Segundo o Princípio do terceiro excluído, toda proposição simples p é verdadeira ou é falsa, isto é, tem o valor lógico V(verdade) ou o valor lógico F(falsidade).

Em se tratando de uma proposição composta, a determinação do seu valor lógico, conhecidos os valores lógicos das proposições simples componentes, se faz com base no seguinte princípio:

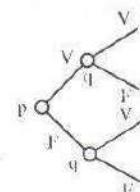


O valor lógico de qualquer proposição composta depende unicamente dos valores lógicos das proposições simples componentes, ficando por eles univocamente determinado.

Admitido este princípio, para aplicá-lo na prática à determinação do valor lógico de uma proposição composta dada, recorre-se quasi sempre a um dispositivo denominado **tabela-verdade**, na qual figuram todos os possíveis valores lógicos da proposição composta correspondentes a todas as possíveis atribuições de valores lógicos às proposições simples componentes.

Assim, p. ex., no caso de uma proposição composta cujas proposições simples componentes são p e q , as únicas possíveis atribuições de valores lógicos a p e a q são:

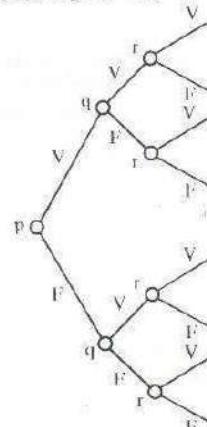
	p	q
1	V	V
2	V	F
3	F	V
4	F	F



Observe-se que os valores lógicos V e F se alternam de **dois em dois** para a primeira proposição p e de **um em um** para a segunda proposição q , e que, além disso, VV, VF, FV e FF são os **arranjos binários com repetição** dos dois elementos V e F.

No caso de uma proposição composta cujas proposições simples componentes são p , q e r , as únicas possíveis atribuições de valores lógicos a p , a q e a r são:

	p	q	r
1	V	V	V
2	V	V	F
3	V	F	V
4	V	F	F
5	F	V	V
6	F	V	F
7	F	F	V
8	F	F	F



Analogamente, observe-se que os valores lógicos V e F se alternam de **quatro em quatro** para a primeira proposição p , de **dois em dois** para a segunda proposição q e de **um em um** para a terceira proposição r , e que, além disso, VVV, VVF, VFV, VFF, FVV, FVF, FFV e FFF são os **arranjos ternários com repetição** dos dois elementos V e F.

6. NOTAÇÃO

- O valor lógico de uma proposição simples p indica-se por $V(p)$. Assim, exprime-se que p é verdadeira(V), escrevendo: $V(p) = V$.

Analogamente, exprime-se que p é falsa(F), escrevendo: $V(p) = F$.

Sejam, p. ex., as proposições simples:

p : O Sol é verde

q : Um hexágono tem 9 diagonais

r : 2 é raiz da equação $x^2 + 3x - 4 = 0$

Temos:

$$V(p) = F, \quad V(q) = V, \quad V(r) = F$$

Do mesmo modo, o valor lógico de uma proposição composta P indica-se por $V(P)$.

EXERCÍCIOS

- Determinar o valor lógico (V ou F) de cada uma das seguintes proposições:

- O número 17 é primo.
- Fortaleza é a capital do Maranhão.
- TIRADENTES morreu afogado.
- $(3+5)^2 = 3^2 + 5^2$
- O valor archimediano de π é $\frac{22}{7}$
- $-1 < -7$
- 0,131313... é uma dízima periódica simples.
- As diagonais de um paralelogramo são iguais.
- Todo polígono regular convexo é inscritível.
- O hexaedro regular tem 8 arestas.

- (k) A expressão $n^2 - n + 41$ ($n \in \mathbb{N}$) só produz números primos.
- (l) Todo número divisível por 5 termina por 5.
- (m) O produto de dois números ímpares é um número ímpar.
- (n) $\sin^2 30^\circ + \sin^2 60^\circ = 2$.
- (o) $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1)^2 = n^2$.
- (p) As raízes da equação $x^3 - 1 = 0$ são todas reais.
- (q) O número 125 é cubo perfeito.
- (r) 0,4 e -4 são as raízes da equação $x^3 - 16x = 0$.
- (s) O cubo é um poliedro regular.
- (t) $\sin(\frac{\pi}{2} + x) = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$.
- (u) $\tan \frac{\pi}{4} < \tan \frac{\pi}{6}$.

Capítulo 2

Operações Lógicas sobre Proposições

1. Quando pensamos, efetuamos muitas vezes certas operações sobre proposições, chamadas **operações lógicas**. Estas obedecem a regras de um cálculo, denominado **cálculo proposicional**, semelhante ao da aritmética sobre números. Estudaremos a seguir as operações lógicas fundamentais.

2. NEGAÇÃO (\sim)

Definição - Chama-se negação de uma proposição p a proposição representada por “não p ”, cujo valor lógico é a verdade(V) quando p é falsa e a falsidade(F) quando p é verdadeira.

Assim, “não p ” tem o valor lógico oposto daquele de p .

Simbolicamente, a negação de p indica-se com a notação “ $\sim p$ ”, que se lê: “não p ”.

O valor lógico da negação de uma proposição é, portanto, definido pela seguinte tabela-verdade muito simples:

p	$\sim p$
V	F
F	V

ou seja, pelas igualdades:

$$\sim V = F, \quad \sim F = V$$

e

$$V(\sim p) = \sim V(p)$$

Exemplos:

$$(1) \quad p : 2 + 3 = 5 \quad (\text{V}) \quad \text{e} \quad \sim p : 2 + 3 \neq 5 \quad (\text{F}) \\ V(\sim p) = \sim V(p) = \sim \text{V} = \text{F}$$

$$(2) \quad q : 7 < 3 \quad (\text{F}) \quad \text{e} \quad \sim q : 7 \leq 3 \quad (\text{V}) \\ V(\sim q) = \sim V(q) = \sim \text{F} = \text{V}$$

$$(3) \quad r : \text{Roma é a capital da França} \quad (\text{F}) \quad \text{e} \quad \sim r : \text{Roma não é a capital da França} \quad (\text{V}) \\ V(\sim r) = \sim V(r) = \sim \text{F} = \text{V}$$

Na linguagem comum a **negação** efetua-se, nos casos mais simples, antepondo o advérbio “não” ao verbo da proposição dada. Assim, p. ex., a negação da proposição:

$p : \text{O Sol é uma estrela}$

$\sim p : \text{O Sol não é uma estrela}$

Outra maneira de efetuar a negação consiste em antepor à proposição dada expressões tais como “não é verdade que”, “é falso que”. Assim, p. ex., a negação da proposição:

$q : \text{Carlos é mecânico}$

$\sim q : \text{Não é verdade que Carlos é mecânico}$

ou

$\sim q : \text{É falso que Carlos é mecânico}$

Observe-se, entretanto, que a negação de “Todos os homens são elegantes” é “Nem todos os homens são elegantes” e a de “Nenhum homem é elegante” é “Algum homem é elegante”!

3. CONJUNÇÃO (\wedge)

Definição — Chama-se conjunção de duas proposições p e q a proposição representada por “ p e q ”, cujo valor lógico é a verdade(V) quando as proposições p e q são ambas verdadeiras e a falsidade(F) nos demais casos.

Simbolicamente, a conjunção de duas proposições p e q indica-se com a notação: “ $p \wedge q$ ”, que se lê: “ p e q ”.

O valor lógico da conjunção de duas proposições é, portanto, definido pela seguinte tabela-verdade:

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

ou seja, pelas igualdades:

$$V \wedge V = V, \quad V \wedge F = F, \quad F \wedge V = F, \quad F \wedge F = F$$

e

$$V(p \wedge q) = V(p) \wedge V(q)$$

Exemplos:

$$(1) \quad \begin{cases} p : \text{A neve é branca} & (\text{V}) \\ q : 2 < 5 & (\text{V}) \end{cases} \\ \underline{p \wedge q : \text{A neve é branca e } 2 < 5} \quad (\text{V}) \\ V(p \wedge q) = V(p) \wedge V(q) = V \wedge V = V$$

$$(2) \quad \begin{cases} p : \text{O enxôfre é verde} & (\text{F}) \\ q : 7 \text{ é um número primo} & (\text{V}) \end{cases} \\ \underline{p \wedge q : \text{O enxôfre é verde e } 7 \text{ é um número primo}} \quad (\text{F}) \\ V(p \wedge q) = V(p) \wedge V(q) = F \wedge V = F$$

$$(3) \quad \begin{cases} p : \text{CANTOR nasceu na Rússia} & (\text{V}) \\ q : \text{FERMAT era médico} & (\text{F}) \end{cases} \\ \underline{p \wedge q : \text{CANTOR nasceu na Rússia e FERMAT era médico}} \quad (\text{F}) \\ V(p \wedge q) = V(p) \wedge V(q) = V \wedge F = F$$

$$(4) \quad \begin{cases} p : \pi > 4 & (\text{F}) \\ q : \text{sen } \frac{\pi}{2} = 0 & (\text{F}) \end{cases} \\ \underline{p \wedge q : \pi > 4 \text{ e } \text{sen } \frac{\pi}{2} = 0} \quad (\text{F}) \\ V(p \wedge q) = V(p) \wedge V(q) = F \wedge F = F$$

4. DISJUNÇÃO (V)

Definição Chama-se **disjunção de duas proposições p e q** a proposição representada por “p ou q”, cujo **valor lógico é a verdade(V)** quando ao menos uma das proposições p e q é verdadeira e a **falsidade(F)** quando as proposições p e q são ambas falsas.

Simbolicamente, a **disjunção de duas proposições p e q** indica-se com a notação: “p V q”, que se lê: “p ou q”.

O valor lógico da **disjunção** de duas proposições é, portanto, **definido** pela seguinte **tabela-verdade**:

p	q	p V q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

ou seja, pelas igualdades:

$$V \vee V = V, \quad V \vee F = V, \quad F \vee V = V, \quad F \vee F = F$$

c

$$V(p \vee q) = V(p) \vee V(q)$$

Exemplos:

$$(1) \begin{cases} p : \text{Paris é a capital da França} & (V) \\ q : 9 - 4 = 5 & (V) \end{cases}$$

$$p \vee q : \text{Paris é a capital da França ou } 9 - 4 = 5 \quad (V)$$

$$V(p \vee q) = V(p) \vee V(q) = V \vee V = V$$

$$(2) \begin{cases} p : \text{CAMÕES escreveu os Lusíadas} & (V) \\ q : \pi = 3 & (F) \end{cases}$$

$$p \vee q : \text{CAMÕES escreveu os Lusíadas ou } \pi = 3 \quad (V)$$

$$V(p \vee q) = V(p) \vee V(q) = V \vee F = V$$

$$(3) \begin{cases} p : \text{Roma é a capital da Rússia} & (F) \\ q : 5/7 \text{ é uma fração própria} & (V) \end{cases}$$

$$p \vee q : \text{Roma é a capital da Rússia ou } 5/7 \text{ é uma fração própria} \quad (V)$$

$$V(p \vee q) = V(p) \vee V(q) = F \vee V = V$$

$$(4) \begin{cases} p : \text{CARLOS GOMES nasceu na Bahia} & (F) \\ q : \sqrt{-1} = 1 & (F) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} p \vee q : \text{CARLOS GOMES nasceu na Bahia ou } \sqrt{-1} = 1 & \quad (F) \\ V(p \vee q) = V(p) \vee V(q) = F \vee F = F & \end{aligned}$$

5. DISJUNÇÃO EXCLUSIVA (V̄)

Na linguagem comum a palavra “ou” tem **dois sentidos**. Assim, p. ex., consideremos as duas seguintes proposições compostas:

$$\begin{aligned} P & : \text{Carlos é médico ou professor} \\ Q & : \text{Mario é alagoano ou gaúcho} \end{aligned}$$

Na proposição P se está a indicar que uma pelo menos das proposições “Carlos é médico”, “Carlos é professor” é verdadeira, podendo ser ambas verdadeiras: “Carlos é médico e professor”. Mas, na proposição Q, se está a precisar que uma e somente uma das proposições “Mario é alagoano”, “Mario é gaúcho” é verdadeira, pois, não é possível ocorrer “Mario é alagoano e gaúcho”.

Na proposição P diz-se que “ou” é **inclusivo**, enquanto que, na proposição Q, diz-se que “ou” é **exclusivo**.

Em Lógica Matemática usa-se habitualmente o símbolo “V̄” para “ou” inclusivo e o símbolo “V̄” para “ou” exclusivo.

Assim sendo, a proposição P é a **disjunção inclusiva** ou apenas **disjunção** das proposições simples “Carlos é médico”, “Carlos é professor”, isto é:

$$P : \text{Carlos é médico} \vee \text{Carlos é professor}$$

ao passo que a proposição Q é a **disjunção exclusiva** das proposições simples “Mario é alagoano”, “Mario é gaúcho”, isto é:

$$Q : \text{Mario é alagoano} \vee \text{Mario é gaúcho}$$

De um modo geral, chama-se **disjunção exclusiva de duas proposições p e q** a proposição representada simbolicamente por “p V̄ q”, que se lê: “ou p ou q” ou “p ou q, mas não ambos”, cujo **valor lógico é a verdade(V)** somente quando p é verdadeira ou q é verdadeira, mas não quando p e q são ambas verdadeiras, e a **falsidade(F)** quando p e q são ambas verdadeiras ou ambas falsas.

Logo, o valor lógico da **disjunção exclusiva** de duas proposições é **definido** pela seguinte **tabela-verdade**:

p	q	p V̄ q
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

ou seja, pelas igualdades:

$$V \vee V = F, \quad V \vee F = V, \quad F \vee V = V, \quad F \vee F = F$$

e

$$V(p \vee q) = V(p) \vee V(q)$$

NOTA — A língua latina tem duas palavras diferentes correspondentes aos dois sentidos distintos da palavra “ou” na linguagem comum. A palavra latina “vel” exprime a disjunção no seu sentido débil ou inclusivo, ao passo que a palavra latina “aut” exprime a disjunção no seu sentido forte ou exclusivo.

6. CONDICIONAL (\rightarrow)

Definição — Chama-se proposição condicional ou apenas condicional uma proposição representada por “se p então q ”, cujo valor lógico é a falsidade(F) no caso em que p é verdadeira e q é falsa e a verdade(V) nos demais casos.

Simbolicamente, a condicional de duas proposições p e q indica-se com a notação: “ $p \rightarrow q$ ”, que também se lê de uma das seguintes maneiras:

- (i) p é condição suficiente para q
- (ii) q é condição necessária para p

Na condicional “ $p \rightarrow q$ ”, diz-se que p é o **antecedente** e q o **consequente**. O símbolo “ \rightarrow ” é chamado **símbolo de implicação**.

O valor lógico da condicional de duas proposições é, portanto, definido pela seguinte **tabela-verdade**:

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

ou seja, pelas igualdades:

$$V \rightarrow V = V, \quad V \rightarrow F = F, \quad F \rightarrow V = V, \quad F \rightarrow F = V$$

e

$$V(p \rightarrow q) = V(p) \rightarrow V(q)$$

Portanto, uma condicional é verdadeira todas as vezes que o seu antecedente é uma proposição falsa.

Exemplos:

- (1) $\begin{cases} p : \text{ GALOIS morreu em duelo } & (V) \\ q : \pi \text{ é um número real } & (V) \end{cases}$

$$\begin{aligned} p \rightarrow q : & \text{ Se GALOIS morreu em duelo, então } \pi \text{ é um número real. } (V) \\ V(p \rightarrow q) = V(p) \rightarrow V(q) = V \rightarrow V = V \end{aligned}$$

- (2) $\begin{cases} p : \text{ O mes de Maio tem 31 dias } & (V) \\ q : \text{ A Terra é plana } & (F) \end{cases}$

$$\begin{aligned} p \rightarrow q : & \text{ Se o mes de Maio tem 31 dias, então a Terra é plana. } (F) \\ V(p \rightarrow q) = V(p) \rightarrow V(q) = V \rightarrow F = F \end{aligned}$$

- (3) $\begin{cases} p : \text{ DANTE escreveu os Lusíadas } & (F) \\ q : \text{ CANTOR criou a Teoria dos Conjuntos } & (V) \end{cases}$

$$\begin{aligned} p \rightarrow q : & \text{ Se DANTE escreveu os Lusíadas, então CANTOR criou a Teoria dos Conjuntos. } (V) \\ V(p \rightarrow q) = V(p) \rightarrow V(q) = F \rightarrow V = V \end{aligned}$$

- (4) $\begin{cases} p : \text{ SANTOS DUMONT nasceu no Ceará } & (F) \\ q : \text{ O ano tem 9 meses } & (F) \end{cases}$

$$\begin{aligned} p \rightarrow q : & \text{ Se SANTOS DUMONT nasceu no Ceará, então o ano tem 9 meses. } (V) \\ V(p \rightarrow q) = V(p) \rightarrow V(q) = F \rightarrow F = V \end{aligned}$$

NOTA — Uma condicional $p \rightarrow q$ não afirma que o consequente q se deduz ou é consequência do antecedente p . Assim, p. ex., as condicionais:

$$\begin{aligned} 7 \text{ é um número ímpar} \rightarrow & \text{Brasília é uma cidade} \\ 3 + 5 = 9 \rightarrow & \text{SANTOS DUMONT nasceu no Ceará} \end{aligned}$$

não estão a afirmar, de modo nenhum, que o fato de “Brasília ser uma cidade” se deduz do fato de “7 ser um número ímpar” ou que a proposição “SANTOS DUMONT nasceu no Ceará” é consequência da proposição “ $3 + 5 = 9$ ”. O que uma condicional afirma é unicamente uma relação entre os valores lógicos do antecedente e do consequente de acordo com a tabela-verdade anterior.

7. BICONDICIONAL (\leftrightarrow)

Definição — Chama-se proposição bicondicional ou apenas bicondicional uma proposição representada por “ p se e somente se q ”, cujo valor lógico é a verdade(V) quando p e q são ambas verdadeiras ou ambas falsas, e a falsidade(F) nos demais casos.

Simbolicamente, a bicondicional de duas proposições p e q indica-se com a notação: $p \leftrightarrow q$, que também se lê de uma das seguintes maneiras:

- (i) p é condição necessária e suficiente para q
- (ii) q é condição necessária e suficiente para p

O valor lógico da bicondicional de duas proposições é, portanto, definido pela seguinte **tabela-verdade**:

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

ou seja, pelas igualdades:

$$V \leftrightarrow V = V, \quad V \leftrightarrow F = F, \quad F \leftrightarrow V = F, \quad F \leftrightarrow F = V$$

e

$$V(p \leftrightarrow q) = V(p) \leftrightarrow V(q)$$

Portanto, uma bicondicional é verdadeira somente quando também o são as duas condicionais: $p \rightarrow q$ e $q \rightarrow p$.

Exemplos:

- (1) $\begin{cases} p : \text{Roma fica na Europa} & (V) \\ q : \text{A neve é branca} & (V) \end{cases}$

$p \leftrightarrow q : \text{Roma fica na Europa se e somente se a neve é branca}$ (V)

$$V(p \leftrightarrow q) = V(p) \leftrightarrow V(q) = V \leftrightarrow V = V$$

- (2) $\begin{cases} p : \text{Lisboa é a capital de Portugal} & (V) \\ q : \text{tg } \frac{\pi}{4} = 3 & (F) \end{cases}$

$p \leftrightarrow q : \text{Lisboa é a capital de Portugal se e somente se } \text{tg } \frac{\pi}{4} = 3$ (F)

$$V(p \leftrightarrow q) = V(p) \leftrightarrow V(q) = V \leftrightarrow F = F$$

- (3) $\begin{cases} p : \text{VASCO DA GAMA descobriu o Brasil} & (F) \\ q : \text{TIRADENTES foi enforcado} & (V) \end{cases}$

$p \leftrightarrow q : \text{VASCO DA GAMA descobriu o Brasil se e somente se TIRADENTES foi enforcado}$ (F)

$$V(p \leftrightarrow q) = V(p) \leftrightarrow V(q) = F \leftrightarrow V = F$$

- (4) $\begin{cases} p : \text{A Terra é plana} & (F) \\ q : \sqrt{2} \text{ é um número racional} & (F) \end{cases}$

$$\begin{aligned} p \leftrightarrow q : \text{A Terra é plana se e somente se } \sqrt{2} \text{ é um número racional} & \quad (V) \\ V(p \leftrightarrow q) = V(p) \leftrightarrow V(q) = F \leftrightarrow F = V \end{aligned}$$

EXERCÍCIOS

1. Sejam as proposições p : Está frio e q : Está chovendo. Traduzir para a linguagem corrente as seguintes proposições:

- | | | |
|----------------------------|--------------------------------|-------------------------------------|
| (a) $\sim p$ | (b) $p \wedge q$ | (c) $p \vee q$ |
| (d) $q \leftrightarrow p$ | (e) $p \rightarrow \sim q$ | (f) $p \vee \sim q$ |
| (g) $\sim p \wedge \sim q$ | (h) $p \leftrightarrow \sim q$ | (i) $p \wedge \sim q \rightarrow p$ |

2. Sejam as proposições p : Jorge é rico e q : Carlos é feliz. Traduzir para a linguagem corrente as seguintes proposições:

- | | | |
|----------------------------|---------------------|-------------------------------------|
| (a) $q \rightarrow p$ | (b) $p \vee \sim q$ | (c) $q \leftrightarrow \sim p$ |
| (d) $\sim p \rightarrow q$ | (e) $\sim \sim p$ | (f) $\sim p \wedge q \rightarrow p$ |

3. Sejam as proposições p : Claudio fala inglês e q : Claudio fala alemão. Traduzir para a linguagem corrente as seguintes proposições:

- | | | |
|----------------------------|-------------------|----------------------------------|
| (a) $p \vee q$ | (b) $p \wedge q$ | (c) $p \wedge \sim q$ |
| (d) $\sim p \wedge \sim q$ | (e) $\sim \sim p$ | (f) $\sim(\sim p \wedge \sim q)$ |

4. Sejam as proposições p : João é gaúcho e q : Jaime é paulista. Traduzir para a linguagem corrente as seguintes proposições:

- | | | |
|-----------------------------|-------------------------------------|----------------------------------|
| (a) $\sim(p \wedge \sim q)$ | (b) $\sim \sim p$ | (c) $\sim(\sim p \vee \sim q)$ |
| (d) $p \rightarrow \sim q$ | (e) $\sim p \leftrightarrow \sim q$ | (f) $\sim(\sim q \rightarrow p)$ |

5. Sejam as proposições p : Marcos é alto e q : Marcos é elegante. Traduzir para a linguagem simbólica as seguintes proposições:

- | | |
|--|--|
| (a) Marcos é alto e elegante | (b) Marcos é alto, mas não é elegante |
| (c) Não é verdade que Marcos é baixo ou elegante | (d) Marcos não é nem alto e nem elegante |
| (e) Marcos é alto ou é baixo e elegante | (f) É falso que Marcos é baixo ou que não é elegante |

6. Sejam as proposições p : Suely é rica e q : Suely é feliz. Traduzir para a linguagem simbólica as seguintes proposições:

- (a) Suely é pobre, mas feliz
- (b) Suely é rica ou infeliz
- (c) Suely é pobre e infeliz
- (d) Suely é pobre ou rica, mas é infeliz.

7. Sejam as proposições p : Carlos fala francês, q : Carlos fala inglês e r : Carlos fala alemão. Traduzir para a linguagem simbólica as seguintes proposições:

- (a) Carlos fala francês ou inglês, mas não fala alemão
- (b) Carlos fala francês e inglês, ou não fala francês e alemão
- (c) É falso que Carlos fala francês mas que não fala alemão
- (d) É falso que Carlos fala inglês ou alemão mas que não fala francês

8. Traduzir para a linguagem simbólica as seguintes proposições matemáticas:

- | | |
|----------------------------|-----------------------------------|
| (a) $x = 0$ ou $x > 0$ | (b) $x \neq 0$ e $y \neq 0$ |
| (c) $x > 1$ ou $x + y = 0$ | (d) $x^2 = x \cdot x$ e $x^0 = 1$ |

9. Traduzir para a linguagem simbólica as seguintes proposições matemáticas:

- (a) $(x + y = 0 \text{ e } z > 0)$ ou $z = 0$
- (b) $x = 0$ e $(y + z > x)$ ou $z = 0$
- (c) $x \neq 0$ ou $(x = 0 \text{ e } y < 0)$
- (d) $(x = y \text{ e } z = t)$ ou $(x < y \text{ e } z = 0)$

10. Traduzir para a linguagem simbólica as seguintes proposições matemáticas:

- (a) Se $x > 0$ então $y = 2$
- (b) Se $x + y = 2$ então $z > 0$
- (c) Se $x = 1$ ou $z = 2$ então $y > 1$
- (d) Se $z \geq 5$ então $x \neq 1$ e $x \neq 2$
- (e) Se $x \neq y$ então $x + z > 5$ e $y + z < 5$
- (f) Se $x + y > z$ e $z = 1$ então $x + y > 1$
- (g) Se $x < 2$ então $x = 1$ ou $x = 0$
- (h) $y = 4$ e se $x \leq y$ então $x \leq 5$

11. Simbolizar as seguintes proposições matemáticas:

- (a) x é maior que 5 e menor que 7 ou x não é igual a 6
- (b) Se x é menor que 5 e maior que 3, então x é igual a 4
- (c) x é maior que 1 ou x é menor que 1 e maior que 0

12. Determinar o valor lógico (V ou F) de cada uma das seguintes proposições:

- | | |
|---|--|
| (a) $3 + 2 = 7$ e $5 + 5 = 10$ | (b) $2 + 7 = 9$ e $4 + 8 = 12$ |
| (c) $\operatorname{sen} \pi = 0$ e $\cos \pi = 0$ | (d) $1 > 0 \wedge 2 + 2 = 4$ |
| (e) $0 > 1 \wedge \sqrt{3}$ é irracional | (f) $(\sqrt{-1})^2 = -1 \wedge \pi$ é racional |
| (g) $\sqrt{2} < 1 \wedge \sqrt{5}$ é racional | |

13. Determinar o valor lógico (V ou F) de cada uma das seguintes proposições:

- (a) Roma é a capital da França ou $\operatorname{tg}45^\circ = 1$
- (b) FLEMING descobriu a penicilina ou $\operatorname{sen}30^\circ = \frac{1}{5}$
- (c) $\sqrt{5} < 0$ ou Londres é a capital da Itália
- (d) $2 > \sqrt{5}$ ou Recife é a capital do Ceará
- (e) $\sqrt{3} > 1 \vee \pi$ não é um número real
- (f) $2 = 2 \vee \operatorname{sen}90^\circ \neq \operatorname{tg}45^\circ$
- (g) $5^2 = 10 \vee \pi$ é racional
- (h) $3 \neq 3 \vee 5 \neq 5$
- (i) $\sqrt{-4} = 2\sqrt{-1} \vee 13$ é um número primo
- (j) $-5 < -7 \vee |-2| = -2$
- (k) $| -5 | < 0 \vee \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} < 1$

14. Determinar o valor lógico (V ou F) de cada uma das seguintes proposições:

- (a) Se $3 + 2 = 6$ então $4 + 4 = 9$
- (b) Se $0 < 1$ então $\sqrt{2}$ é irracional
- (c) Se $\sqrt{3} > 1$ então $-1 < -2$
- (d) Se $| -1 | = 0$ então $\operatorname{sen}30^\circ = \frac{1}{2}$
- (e) $\operatorname{tg}60^\circ \approx \sqrt{3} \rightarrow 2 = 2$
- (f) $\sqrt{3} > \sqrt{2} \rightarrow 2^0 = 2$
- (g) $\sqrt{-1} = -1 \rightarrow \sqrt{25} = 5$
- (h) $\pi > 4 \rightarrow 3 > \sqrt{5}$

15. Determinar o valor lógico (V ou F) de cada uma das seguintes proposições:

- (a) $3 + 4 = 7$ se e somente se $5^3 = 125$
- (b) $0^2 = 1$ se e somente se $(1 + 5)^0 = 3$
- (c) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8} = 4$ se e somente se $\sqrt{2} = 0$
- (d) $\operatorname{tg}\pi = 1$ se e somente se $\operatorname{sen}\pi = 0$
- (e) $-1 > -2 \leftrightarrow \pi^2 < 20$
- (f) $-2 > 0 \leftrightarrow \pi^2 < 0$
- (g) $3^2 + 4^2 = 5^2 \leftrightarrow \pi$ é racional
- (h) $1 > \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} \leftrightarrow \cos \frac{\pi}{4} < 1$
- (i) $\operatorname{sen}20^\circ > 1 \leftrightarrow \cos20^\circ > 2$
- (j) $\sqrt{-1} = -1 \leftrightarrow \sqrt{-2} = -2$

16. Determinar o valor lógico (V ou F) de cada uma das seguintes proposições:

- Não é verdade que 12 é um número ímpar
- Não é verdade que Belém é a capital do Pará
- É falso que $2 + 3 = 5$ e $1 + 1 = 3$
- É falso que $3 + 3 = 6$ ou $\sqrt{-1} = 0$
- $\neg(1 + 1 = 2 \leftrightarrow 3 + 4 = 5)$
- $\neg(1 + 1 = 5 \leftrightarrow 3 + 3 = 1)$
- $2 + 2 = 4 \rightarrow (3 + 3 = 7 \leftrightarrow 1 + 1 = 4)$
- $\neg(2 + 2 \neq 4 \text{ e } 3 + 5 = 8)$

17. Determinar o valor lógico (V ou F) de cada uma das seguintes proposições:

- $\neg(\sin 0^\circ = 0 \text{ ou } \cos 0^\circ = 1)$
- $\neg(2^3 \neq 8 \text{ ou } 4^2 \neq 4^3)$
- $\neg(\operatorname{tg} 45^\circ = 2 \text{ se e somente se } \operatorname{ctg} 45^\circ = 3)$
- Brasília é a capital do Brasil, e $2^0 = 0$ ou $3^0 = 1$
- $\neg(3^2 = 9 \rightarrow 3 = 5 \wedge 0^2 = 0)$
- $3^4 = 81 \rightarrow \neg(2 + 1 = 3 \wedge 5 \cdot 0 = 0)$
- $4^3 \neq 64 \rightarrow \neg(3 + 3 = 7 \leftrightarrow 1 + 1 = 2)$

18. Sabendo que os valores lógicos das proposições p e q são respectivamente V e F, determinar o valor lógico (V ou F) de cada uma das seguintes proposições:

- | | | |
|----------------------------|--------------------------|--------------------------------|
| (a) $p \wedge \neg q$ | (b) $p \vee \neg q$ | (c) $\neg p \wedge q$ |
| (d) $\neg p \wedge \neg q$ | (e) $\neg p \vee \neg q$ | (f) $p \wedge (\neg p \vee q)$ |

19. Determinar $V(p)$ em cada um dos seguintes casos, sabendo:

- | | |
|---|---|
| (a) $V(q) = F$ e $V(p \wedge q) = F$ | (b) $V(q) = F$ e $V(p \vee q) = F$ |
| (c) $V(q) = F$ e $V(p \rightarrow q) = F$ | (d) $V(q) = F$ e $V(q \rightarrow p) = V$ |
| (e) $V(q) = V$ e $V(p \leftrightarrow q) = F$ | (f) $V(q) = F$ e $V(q \leftrightarrow p) = V$ |

20. Determinar $V(p)$ e $V(q)$ em cada um dos seguintes casos, sabendo:

- | |
|---|
| (a) $V(p \rightarrow q) = V$ e $V(p \wedge q) = F$ |
| (b) $V(p \rightarrow q) = V$ e $V(p \vee q) = F$ |
| (c) $V(p \leftrightarrow q) = V$ e $V(p \wedge q) = V$ |
| (d) $V(p \leftrightarrow q) = V$ e $V(p \vee q) = V$ |
| (e) $V(p \leftrightarrow q) = F$ e $V(\neg p \vee q) = V$ |

Capítulo 3

Construção de Tabelas-Verdade

1. TABELA-VERDADE DE UMA PROPOSIÇÃO COMPOSTA

Dadas várias proposições simples p , q , r , ..., podemos combina-las pelos conectivos lógicos:

$\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$

e construir proposições compostas, tais como:

$$\begin{aligned} P(p, q) &= \neg p \vee (p \rightarrow q) \\ Q(p, q) &= (p \leftrightarrow \neg q) \wedge q \\ R(p, q, r) &= (p \rightarrow \neg q \vee r) \wedge \neg(q \vee (p \leftrightarrow \neg r)) \end{aligned}$$

Então, com o emprego das tabelas-verdade das operações lógicas fundamentais (Cap. 2):

$\neg p, \quad p \wedge q, \quad p \vee q, \quad p \rightarrow q, \quad p \leftrightarrow q$

é possível construir a tabela-verdade correspondente a qualquer proposição composta dada, tabela-verdade esta que mostrará exatamente os casos em que a proposição composta será verdadeira(V) ou falsa(F), admitindo-se, como é sabido, que o seu valor lógico só depende dos valores lógicos das proposições simples componentes.

2. NÚMERO DE LINHAS DE UMA TABELA-VERDADE

O número de linhas da tabela-verdade de uma proposição composta depende do número de proposições simples que a integram, sendo dado pelo seguinte teorema:

A tabela-verdade de uma proposição composta com n proposições simples componentes contém 2^n linhas.

Dem. Com efeito, toda proposição simples tem dois valores lógicos: V e F, que se excluem. Portanto, para uma proposição composta $P(p_1, p_2, \dots, p_n)$ com n proposições simples componentes p_1, p_2, \dots, p_n há tantas possibilidades de atribuição dos valores lógicos V e F a tais componentes quantos são os arranjos com repetição n a n dos dois elementos V e F, isto é, $A_{2,n} = 2^n$, segundo ensina a Análise Combinatória.

3. CONSTRUÇÃO DA TABELA-VERDADE DE UMA PROPOSIÇÃO COMPOSTA

Para a construção prática da tabela-verdade de uma proposição composta começa-se por contar o número de proposições simples que a integram. Se há n proposições simples componentes: p_1, p_2, \dots, p_n , então a tabela-verdade contém 2^n linhas. Posto isto, à 1^a proposição simples p_1 atribuem-se $2^n/2 = 2^{n-1}$ valores V seguidos de 2^{n-1} valores F; à 2^a proposição simples p_2 atribuem-se $2^{n-1}/4 = 2^{n-2}$ valores V, seguidos de 2^{n-2} valores F, seguidos de 2^{n-2} valores V, seguidos, finalmente, de 2^{n-2} valores F; e assim por diante. De modo genérico, a k-ésima proposição simples p_k ($k \leq n$) atribuem-se alternadamente $2^{n-k}/2 = 2^{n-k}$ valores V seguidos de igual número de valores F.

No caso, p. ex., de uma proposição composta com cinco (5) proposições simples componentes, a tabela-verdade contém $2^5 = 32$ linhas, e os grupos de valores V e F se alternam de 16 em 16 para a 1^a proposição simples p_1 , de 8 em 8 para a 2^a proposição simples p_2 , de 4 em 4 para a 3^a proposição simples p_3 , de 2 em 2 para a 4^a proposição simples p_4 , e, enfim, de 1 em 1 para a 5^a proposição simples p_5 .

4. EXEMPLIFICAÇÃO

(1) Construir a tabela-verdade da proposição:

$$P(p, q) = \sim(p \wedge \sim q)$$

1^a Resolução — Forma-se, em primeiro lugar, o par de colunas correspondentes às duas proposições simples componentes p e q. Em seguida, forma-se a coluna para $\sim q$. Depois, forma-se a coluna para $p \wedge \sim q$. Afinal, forma-se a coluna relativa aos valores lógicos da proposição composta dada.

p	q	$\sim q$	$p \wedge \sim q$	$\sim(p \wedge \sim q)$
V	V	F	F	V
V	F	V	V	F
F	V	F	F	V
F	F	V	F	V

2^a Resolução — Formam-se primeiro as colunas correspondentes às duas proposições simples p e q. Em seguida, à direita, traça-se uma coluna para cada uma dessas proposições e para cada um dos conectivos que figuram na proposição composta dada.

p	q	\sim	$(p$	\wedge	\sim	$q)$
V	V					
V	F					
F	V					
F	F					

Depois, numa certa ordem, completam-se essas colunas, escrevendo em cada uma delas os valores lógicos convenientes, no modo abaixo indicado:

p	q	\sim	$(p$	\wedge	\sim	$q)$
V	V	V	V	F	F	F
V	F	F	V	V	V	F
F	V	V	F	F	F	V
F	F	V	F	F	V	F

Os valores lógicos da proposição composta dada encontram-se na coluna completada em último lugar (coluna 4).

Portanto, os valores lógicos da proposição composta dada correspondentes a todas as possíveis atribuições dos valores lógicos V e F às proposições simples componentes p e q (VV, VF, FV e FF) são V, F, V e V, isto é, simbolicamente:

$$P(VV) = V, \quad P(VF) = F, \quad P(FV) = V, \quad P(FF) = V$$

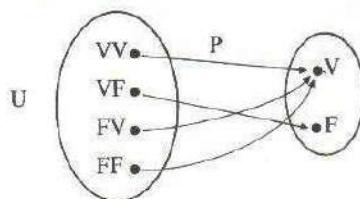
ou seja, abreviadamente:

$$P(VV, VF, FV, FF) = VFVV$$

Observe-se que a proposição $P(p, q)$ associa a cada um dos elementos do conjunto $U = \{VV, VF, FV, FF\}$ um único elemento do conjunto $\{V, F\}$, isto é, $P(p, q)$ outra coisa não é que uma função de U em $\{V, F\}$:

$$P(p, q) : U \rightarrow \{V, F\}$$

cuja representação gráfica por um diagrama sagital é a seguinte:



3^a Resolução — Resulta de suprimir na tabela-verdade anterior as duas primeiras colunas da esquerda relativas às proposições simples componentes p e q , o que dá a seguinte tabela-verdade simplificada para a proposição composta dada:

\sim	(p)	\wedge	\sim	(q)	
V	V	F	F	V	
F	V	V	V	F	
V	F	F	F	V	
V	F	F	V	F	
	4	1	3	2	1

(2) Construir a tabela-verdade da proposição:

$$P(p, q) = \sim(p \wedge q) \vee \sim(q \leftrightarrow p)$$

1^a Resolução:

p	q	$p \wedge q$	$q \leftrightarrow p$	$\sim(p \wedge q)$	$\sim(q \leftrightarrow p)$	$\sim(p \wedge q) \vee \sim(q \leftrightarrow p)$
V	V	V	V	F	F	F
V	F	F	F	V	V	V
F	V	F	V	V	V	V
F	F	F	V	V	F	V

2^a Resolução:

p	q	\sim	(p)	\wedge	(q)	\vee	\sim	(q)	\leftrightarrow	(p)	
V	V	F	V	V	F	F	V	V	V	V	
V	F	V	V	F	V	V	F	F	V	V	
F	V	V	F	V	V	V	V	F	F	F	
F	F	V	F	F	V	F	F	V	F	F	
			3	1	2	1	4	3	1	2	1

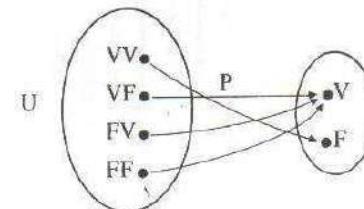
Portanto, simbolicamente:

$$P(VV) = F, \quad P(VF) = V, \quad P(FV) = V, \quad P(FF) = V$$

ou seja, abreviadamente:

$$P(VV, VF, FV, FF) = VVVV$$

Observe-se que $P(p, q)$ outra coisa não é que uma função de $U = \{VV, VF, FV, FF\}$ em $\{V, F\}$, cuja representação gráfica por um diagrama sagital é a seguinte:



3^a Resolução:

\sim	(p)	\wedge	(q)	\vee	\sim	(q)	\leftrightarrow	(p)	
F	V	V	V	F	F	V	V	V	
V	V	F	F	V	V	F	F	V	
V	F	F	V	V	V	V	F	F	
V	F	F	F	V	F	F	V	F	
	3	1	2	1	4	3	1	2	1

(3) Construir a tabela-verdade da proposição:

$$P(p, q, r) = p \vee \sim r \rightarrow q \wedge \sim r$$

1^a Resolução:

p	q	r	$\sim r$	$p \vee \sim r$	$q \wedge \sim r$	$p \vee \sim r \rightarrow q \wedge \sim r$
V	V	V	F	V	F	F
V	V	F	V	V	V	V
V	F	V	F	V	F	F
V	F	F	V	V	F	F
F	V	V	F	F	F	V
F	V	F	V	V	V	V
F	F	V	F	F	F	V
F	F	F	V	V	F	F

2ª Resolução:

p	q	r	p	v	~	r	→	q	Λ	~	r
V	V	V	V	V	F	V	F	V	F	F	V
V	V	F	V	V	V	F	V	V	V	V	F
V	F	V	V	V	F	V	F	F	F	V	V
V	F	F	V	V	V	F	F	F	V	F	V
F	V	V	F	F	F	V	V	F	F	V	V
F	V	F	F	V	V	F	V	V	V	V	F
F	F	V	F	F	V	F	V	F	F	V	V
F	F	F	F	V	F	F	F	V	F	F	F
			1	3	2	1	4	1	3	2	1

Portanto, simbolicamente:

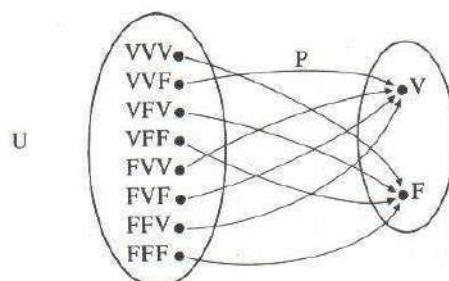
$$P(VVV) = F, \quad P(VVF) = V, \quad P(VFV) = F, \quad P(VFF) = F$$

$$P(FVV) = V, \quad P(FVF) = V, \quad P(FFV) = V, \quad P(FFF) = F$$

ou seja, abreviadamente:

$$P(VVV, VVF, VFV, VFF, FVV, FVF, FFV, FFF) = FVFFVVVF$$

Observe-se que a proposição $P(p, q, r)$ outra coisa não é que uma função de $U = \{VVV, VVF, VFV, VFF, FVV, FVF, FFV, FFF\}$ em $\{V, F\}$, cuja representação gráfica por um diagrama sagital é a seguinte:



3ª Resolução:

p	v	~	r	→	q	Λ	~	r
V	V	F	V	F	V	F	F	V
V	V	V	F	V	V	V	V	F
V	V	F	V	F	F	F	F	V
V	V	V	F	F	F	F	V	V
F	F	F	V	V	V	V	V	F
F	V	V	F	V	V	F	V	V
F	F	F	V	V	F	V	F	V
F	V	V	F	F	F	F	F	F
	1	3	2	1	4	1	3	2

(4) Construir a tabela-verdade da proposição:

$$P(p, q, r) = (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)$$

Resolução:

p	q	r	$(p \rightarrow q)$	\wedge	$(q \rightarrow r)$	\rightarrow	$(p \rightarrow r)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	F	V	F
V	F	V	V	F	F	V	V
V	F	F	V	F	F	V	F
F	V	V	F	V	V	V	V
F	V	F	F	V	F	V	F
F	F	V	F	V	F	V	V
F	F	F	F	V	F	V	F
	1	2	1	3	1	2	1

Portanto, simbolicamente:

$$P(VVV) = V, \quad P(VVF) = V, \quad P(VFV) = V, \quad P(VFF) = V$$

$$P(FVV) = V, \quad P(FVF) = V, \quad P(FFV) = V, \quad P(FFF) = V$$

ou seja, abreviadamente:

$$P(VVV, VVF, VFV, VFF, FVV, FVF, FFV, FFF) = VVVVVVVV$$

Observe-se que a última coluna (coluna 4) da tabela-verdade da proposição $P(p, q, r)$ só encerra a letra V(verdade), isto é, o valor lógico desta proposição é sempre V quaisquer que sejam os valores lógicos das proposições componentes p, q e r.

(5) Construir a tabela-verdade da proposição:

$$P(p, q, r) = (p \rightarrow (\sim q \vee r)) \wedge \sim(q \vee (p \leftrightarrow \sim r))$$

Resolução:

(p	\rightarrow	(\sim	q	\vee	r))	\wedge	\sim	(q	\vee	(p	\leftrightarrow	\sim	r))
V	V	F	V	V	F	F	V	V	V	F	F	V	
V	F	F	V	F	F	F	V	V	V	V	V	F	
V	V	F	V	V	V	V	F	F	V	F	F	V	
V	V	F	V	F	F	F	F	V	V	V	V	F	
F	V	F	V	V	F	F	V	V	F	V	F	V	
F	V	F	V	F	F	F	V	V	F	F	V	F	
F	V	F	V	V	F	F	F	V	V	F	V	V	
F	V	V	F	V	F	V	F	V	F	V	F	V	
1	4	2	1	3	1	6	5	1	4	1	3	2	1

Note-se que é uma tabela-verdade simplificada da proposição $P(p, q, r)$, pois, não encerra as colunas relativas às proposições componentes p, q e r.

Portanto, simbolicamente:

$$P(VVV) = F, \quad P(VVF) = F, \quad P(VFV) = V, \quad P(VFF) = F$$

$$P(FVV) = F, \quad P(FVF) = F, \quad P(FFV) = F, \quad P(FFF) = V$$

ou seja, abreviadamente:

$$P(VVV, VVF, VFV, VFF, FVV, FVF, FFV, FFF) = FPVFFFFF$$

5. VALOR LÓGICO DE UMA PROPOSIÇÃO COMPOSTA

Dada uma proposição composta $P(p, q, r, \dots)$, pode-se sempre determinar o seu valor lógico (V ou F) quando são dados ou conhecidos os valores lógicos respectivos das proposições componentes p, q, r, ...

Exemplos:

- (1) Sabendo que os valores lógicos das proposições p e q são respectivamente V e F, determinar o valor lógico (V ou F) da proposição:

$$P(p, q) = \sim(p \vee q) \leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$$

Resolução – Temos, sucessivamente:

$$V(P) = \sim(V \vee F) \leftrightarrow \sim V \wedge \sim F = \sim V \leftrightarrow F \wedge V = F \leftrightarrow F = V$$

- (2) Sejam as proposições $p : \pi = 3$ e $q : \text{sen } \frac{\pi}{2} = 0$. Determinar o valor lógico (V ou F) da proposição:

$$P(p, q) = (p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow p \wedge q)$$

Resolução – As proposições componentes p e q são ambas falsas, isto é, $V(p) = F$ e $V(q) = F$. Portanto:

$$V(P) = (F \rightarrow F) \rightarrow (F \rightarrow F \wedge F) = V \rightarrow (F \rightarrow F) = V \rightarrow V = V$$

- (3) Sabendo que $V(p) = V$, $V(q) = F$ e $V(r) = F$, determinar o valor lógico (V ou F) da proposição:

$$P(p, q, r) = (q \leftrightarrow (r \rightarrow \sim p)) \vee ((\sim q \rightarrow p) \leftrightarrow r)$$

Resolução – Temos, sucessivamente:

$$\begin{aligned} V(P) &= (F \leftrightarrow (F \rightarrow \sim V)) \vee ((\sim F \rightarrow V) \leftrightarrow F) = \\ &= (F \leftrightarrow (F \rightarrow F)) \vee ((V \rightarrow V) \leftrightarrow F) = \\ &= (F \leftrightarrow V) \vee (V \leftrightarrow F) = F \vee F = F \end{aligned}$$

- (4) Sabendo que $V(r) = V$, determinar o valor lógico (V ou F) da proposição: $p \rightarrow \sim q \vee r$.

Resolução – Como r é verdadeira(V), a disjunção $\sim q \vee r$ é verdadeira(V). Logo, a condicional dada é verdadeira(V), pois, o seu consequente é verdadeiro (V).

- (5) Sabendo que $V(q) = V$, determinar o valor lógico (V ou F) da proposição: $(p \rightarrow q) \rightarrow (\sim q \rightarrow \sim p)$.

Resolução – Como q é verdadeira(V), então $\sim q$ é falsa(F). Logo, a condicional $\sim q \rightarrow \sim p$ é verdadeira(V), pois, o seu antecedente é falso(F). Por consequência, a condicional dada é verdadeira(V), pois, o seu consequente é verdadeiro(V).

(6) Sabendo que as proposições “ $x = 0$ ” e “ $x = y$ ” são verdadeiras e que a proposição “ $y = z$ ” é falsa, determinar o valor lógico (V ou F) da proposição:

$$x \neq 0 \vee x \neq y \rightarrow y \neq z$$

Resolução – Temos, sucessivamente:

$$\sim V \vee \sim V \rightarrow \sim F = F \vee F \rightarrow V = F \rightarrow V = V$$

6. USO DE PARÊNTESIS

É óbvia a necessidade de usar parêntesis na simbolização das proposições, que devem ser colocados para evitar qualquer tipo de ambiguidade. Assim, p. ex., a expressão $p \wedge q \vee r$ dá lugar, colocando parêntesis, às duas seguintes proposições:

$$(i) \quad (p \wedge q) \vee r \quad \text{e} \quad (ii) \quad p \wedge (q \vee r)$$

que não têm o mesmo significado, pois, na (i), o conectivo principal é “ \vee ”, e na (ii), o conectivo principal é “ \wedge ”, isto é, a (i) é uma disjunção e a (ii) é uma conjunção.

Analogamente, a expressão $p \wedge q \rightarrow r \vee s$ dá lugar, colocando parêntesis, às seguintes proposições:

$$((p \wedge q) \rightarrow r) \vee s, \quad p \wedge ((q \rightarrow r) \vee s), \quad (p \wedge (q \rightarrow r)) \vee s, \\ p \wedge (q \rightarrow (r \vee s)), \quad (p \wedge q) \rightarrow (r \vee s)$$

tais que, duas quaisquer delas, não têm o mesmo significado.

Por outro lado, em muitos casos, parêntesis podem ser suprimidos, a fim de simplificar as proposições simbolizadas, desde que, naturalmente, ambiguidade alguma venha a aparecer.

A supressão de parêntesis nas proposições simbolizadas se faz mediante algumas convenções, das quais são particularmente importantes as duas seguintes:

(I) A “ordem de precedência” para os conectivos é:

$$(1) \sim; \quad (2) \wedge \text{ e } \vee; \quad (3) \rightarrow; \quad (4) \leftrightarrow$$

Portanto, o conectivo mais “fraco” é “ \sim ” e o conectivo mais “forte” é “ \leftrightarrow ”.

Assim, p. ex., a proposição:

$$p \rightarrow q \leftrightarrow s \wedge r$$

é uma bicondicional e nunca uma condicional ou uma conjunção. Para convertê-la numa condicional há que usar parêntesis:

$$p \rightarrow (q \leftrightarrow s \wedge r)$$

e, analogamente, para convertê-la numa conjunção:

$$(p \rightarrow q \leftrightarrow s) \wedge r$$

O consequente da condicional é uma bicondicional. Desejando-se converter este consequente numa conjunção cumpre escrever:

$$p \rightarrow ((q \leftrightarrow s) \wedge r)$$

Também são bicondicionais as três seguintes proposições:

$$p \wedge q \leftrightarrow r \vee s; \quad p \rightarrow q \leftrightarrow r \wedge s; \quad p \vee q \leftrightarrow \sim r \rightarrow s$$

(II) Quando um mesmo conectivo aparece sucessivamente repetido, suprimem-se os parêntesis, fazendo-se a associação a partir da esquerda.

Segundo estas duas convenções, as quatro seguintes proposições:

$$((\sim(\sim(p \wedge q))) \vee (\sim p)); \quad ((p \vee (\sim q)) \wedge (r \wedge (\sim p))) \\ (((p \vee (\sim q)) \wedge r) \wedge (\sim p)); \quad ((\sim p) \rightarrow (q \rightarrow (\sim(p \vee r))))$$

escrevem-se mais simplesmente assim:

$$\sim\sim(p \wedge q) \vee \sim p; \quad (p \vee \sim q) \wedge (r \wedge \sim p) \\ (p \vee \sim q) \wedge r \wedge \sim p; \quad \sim p \rightarrow (q \rightarrow \sim(p \vee r))$$

7. OUTROS SÍMBOLOS PARA OS CONECTIVOS

Nos livros de Lógica, usam-se diferentes símbolos para os conectivos. Assim, p. ex., são frequentemente usados os símbolos:

- “ \neg ” para a negação (\sim)
- “ \bullet ” e “ $\&$ ” para a conjunção (\wedge)
- “ \circ ” (ferradura) para a condicional (\rightarrow)

EXERCÍCIOS

1. Construir as tabelas-verdade das seguintes proposições:

- | | |
|--|--|
| (a) $\sim(p \vee \sim q)$ | (b) $\sim(p \rightarrow \sim q)$ |
| (c) $p \wedge q \rightarrow p \vee q$ | (d) $\sim p \rightarrow (q \rightarrow p)$ |
| (e) $(p \rightarrow q) \rightarrow p \wedge q$ | (f) $q \leftrightarrow \sim q \wedge p$ |
| (g) $(p \leftrightarrow \sim q) \leftrightarrow q \rightarrow p$ | (h) $(p \leftrightarrow \sim q) \rightarrow \sim p \wedge q$ |

2. Construir as tabelas-verdade das seguintes proposições:

- (a) $\sim p \wedge r \rightarrow q \vee \sim r$ (b) $p \rightarrow r \leftrightarrow q \vee \sim r$
 (c) $p \rightarrow (p \rightarrow \sim r) \leftrightarrow q \vee r$ (d) $(p \wedge q \rightarrow r) \vee (\sim p \leftrightarrow q \vee \sim r)$

3. Determinar $P(VV, VF, FV, FF)$ em cada um dos seguintes casos:

- (a) $P(p, q) = \sim(\sim p \leftrightarrow q)$
 (b) $P(p, q) = \sim p \vee q \rightarrow p$
 (c) $P(p, q) = (p \vee q) \wedge \sim(p \wedge q)$
 (d) $P(p, q) = (p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge q)$
 (e) $P(p, q) = \sim((p \vee q) \wedge (\sim p \vee \sim q))$
 (f) $P(p, q) = \sim q \vee p \leftrightarrow \sim q \rightarrow \sim p$
 (g) $P(p, q) = (p \vee q) \wedge \sim p \rightarrow (q \rightarrow p)$

4. Determinar $P(VVV, VVF, VFV, VFF, FVV, FVF, FFV, FFF)$ em cada um dos seguintes casos:

- (a) $P(p, q, r) = p \vee (q \wedge r)$
 (b) $P(p, q, r) = (p \wedge \sim q) \vee r$
 (c) $P(p, q, r) = \sim p \vee (q \wedge \sim r)$
 (d) $P(p, q, r) = (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
 (e) $P(p, q, r) = (p \vee \sim r) \wedge (q \vee \sim r)$
 (f) $P(p, q, r) = \sim(p \vee \sim q) \wedge (\sim p \vee r)$

5. Determinar $P(VFV)$ em cada um dos seguintes casos:

- (a) $P(p, q, r) = p \wedge \sim r \rightarrow \sim q$
 (b) $P(p, q, r) = \sim p \wedge (q \vee \sim r)$
 (c) $P(p, q, r) = \sim(p \wedge q) \leftrightarrow \sim(p \vee \sim r)$
 (d) $P(p, q, r) = (r \wedge (p \vee \sim q)) \wedge \sim(\sim r \vee (p \wedge q))$
 (e) $P(p, q, r) = (p \vee q \rightarrow r) \rightarrow q \vee \sim r$
 (f) $P(p, q, r) = (p \vee (q \rightarrow \sim r)) \wedge (\sim p \vee r \leftrightarrow \sim q)$

6. Sabendo que os valores lógicos das proposições p e q são respectivamente F e V , determinar o valor lógico (V ou F) da proposição:

$$(p \wedge (\sim q \rightarrow p)) \wedge \sim((p \leftrightarrow \sim q) \rightarrow q \vee \sim p)$$

7. Sejam as proposições $p : \operatorname{tg}(\pi - x) = \operatorname{ctgx}$ e $q : \pi < 2$. Determinar o valor lógico (V ou F) de cada uma das seguintes proposições:

- (a) $(\sim p \wedge q) \vee (p \wedge \sim q)$ (b) $(p \rightarrow q) \wedge \sim p \rightarrow \sim q$
 (c) $\sim(p \wedge q) \leftrightarrow \sim p \vee \sim q$ (d) $(p \vee (\sim p \vee q)) \vee (\sim p \wedge \sim q)$

8. Sabendo que os valores lógicos das proposições p , q e r são respectivamente V , F e F , determinar o valor lógico (V ou F) de cada uma das seguintes proposições:

- (a) $(p \leftrightarrow p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r)$ (b) $(p \rightarrow \sim q) \leftrightarrow ((p \vee r) \wedge q)$
 (c) $(p \wedge q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow r))$

9. Sabendo que as proposições p e q são verdadeiras e que as proposições r e s são falsas, determinar o valor lógico (V ou F) de cada uma das seguintes proposições:

- | | |
|---|--|
| (a) $p \wedge q \rightarrow r$ | (b) $r \vee s \rightarrow q$ |
| (c) $q \leftrightarrow p \wedge s$ | (d) $p \rightarrow \sim(r \wedge s)$ |
| (e) $(q \rightarrow s) \rightarrow r$ | (f) $\sim r \rightarrow p \wedge q$ |
| (g) $(q \vee r) \wedge (p \vee s)$ | (h) $(r \rightarrow s) \wedge (p \wedge q)$ |
| (i) $(p \wedge \sim q) \vee r$ | (j) $\sim((r \rightarrow p) \vee (s \rightarrow q))$ |
| (k) $(s \leftrightarrow r) \leftrightarrow (p \leftrightarrow q)$ | (l) $r \rightarrow q \leftrightarrow (\sim p \leftrightarrow r)$ |

10. Sabendo que os valores lógicos das proposições p , q , r e s são respectivamente V , V , F e F , determinar o valor lógico (V ou F) de cada uma das seguintes proposições:

- | | |
|---|---|
| (a) $p \rightarrow q \leftrightarrow q \rightarrow p$ | (b) $(r \rightarrow p) \rightarrow (p \rightarrow r)$ |
| (c) $(p \rightarrow r) \rightarrow (\sim p \rightarrow \sim r)$ | (d) $\sim(p \wedge q) \rightarrow \sim p \vee \sim q$ |
| (e) $\sim(p \wedge s) \rightarrow \sim p \wedge \sim s$ | (f) $\sim((p \vee s) \wedge (s \vee r))$ |

11. Sabendo que $V(p) = V(r) = V$ e $V(q) = V(s) = F$, determinar o valor lógico (V ou F) de cada uma das seguintes proposições:

- | | |
|---|--|
| (a) $p \wedge q \leftrightarrow r \wedge \sim s$ | (b) $(p \leftrightarrow q) \rightarrow (s \leftrightarrow r)$ |
| (c) $(\sim p \rightarrow q) \rightarrow (s \rightarrow r)$ | (d) $(p \wedge q) \vee s \rightarrow (p \leftrightarrow s)$ |
| (e) $(q \wedge r) \wedge s \rightarrow (p \leftrightarrow s)$ | (f) $p \rightarrow \sim q \leftrightarrow (p \vee r) \wedge s$ |
| (g) $(p \wedge q) \wedge (r \wedge s) \rightarrow p \vee s$ | (h) $(\sim p \vee s) \vee (\sim s \wedge r)$ |

12. Sabendo que as proposições “ $x = 0$ ” e “ $x = y$ ” são verdadeiras e que as proposições “ $y = z$ ” e “ $y = t$ ” são falsas, determinar o valor lógico (V ou F) de cada uma das seguintes proposições:

- | | |
|--|---|
| (a) $x = 0 \wedge x = y \rightarrow y \neq z$ | (b) $x \neq 0 \vee y = t \rightarrow y = z$ |
| (c) $x \neq y \vee y \neq z \rightarrow y = t$ | (d) $x \neq 0 \vee x \neq y \rightarrow y \neq z$ |
| (e) $x = 0 \rightarrow (x \neq y \vee y \neq t)$ | |

13. Sabendo que a condicional $p \rightarrow q$ é verdadeira (V), determinar o valor lógico (V ou F) das condicionais:

$$p \vee r \rightarrow q \vee r \quad \text{e} \quad p \wedge r \rightarrow q \wedge r$$

14. Determinar o valor lógico (V ou F) de cada uma das seguintes proposições:

- $p \leftrightarrow q \wedge \sim r$, sabendo que $V(p) = V(r) = V$
- $p \wedge q \rightarrow p \vee r$, sabendo que $V(p) = V(r) = V$
- $(p \rightarrow \sim q) \wedge (\sim p \vee r)$, sabendo que $V(q) = F$ e $V(r) = V$

15. Suprimir o maior número possível de parêntesis nas seguintes proposições:

- $((q \leftrightarrow (r \vee q)) \leftrightarrow (p \wedge (\sim(\sim q))))$
- $((p \wedge (\sim(\sim q))) \leftrightarrow (q \leftrightarrow (r \vee q)))$
- $((((p \vee q) \rightarrow (\sim r)) \vee (((\sim q) \wedge r) \wedge q)))$

Capítulo 4

Tautologias, Contradições e Contingências

I. TAUTOLOGIA

Definição Chama-se **tautologia** toda a proposição composta cuja última coluna da sua tabela-verdade encerra somente a letra V(verdade).

Em outros termos, **tautologia** é toda proposição composta $P(p, q, r, \dots)$ cujo valor lógico é sempre V(verdade), quaisquer que sejam os valores lógicos das proposições simples componentes p, q, r, \dots

As tautologias são também denominadas **proposições tautológicas** ou **proposições logicamente verdadeiras**.

É imediato que as proposições $p \rightarrow p$ e $p \leftrightarrow p$ são tautológicas (**Princípio de identidade para as proposições**).

Exemplos:

(1) A proposição “ $\sim(p \wedge \sim p)$ ” (**Princípio da não contradição**) é tautológica, conforme se vê pela sua tabela-verdade:

p	$\sim p$	$p \wedge \sim p$	$\sim(p \wedge \sim p)$
V	F	F	V
F	V	F	V

Portanto, dizer que uma proposição não pode ser simultaneamente verdadeira e falsa é sempre verdadeiro.

(2) A proposição “ $p \vee \neg p$ ” (Princípio do terceiro excluído) é tautológica, como imediatamente se vê pela sua tabela-verdade:

p	$\neg p$	$p \vee \neg p$
V	F	V
F	V	V

Portanto, dizer que uma proposição ou é verdadeira ou é falsa é sempre verdadeiro.

(3) A proposição “ $p \vee \neg(p \wedge q)$ ” é tautológica, conforme se vê pela sua tabela-verdade:

p	q	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	$p \vee \neg(p \wedge q)$
V	V	V	F	V
V	F	F	V	V
F	V	F	V	V
F	F	F	V	V

(4) A proposição “ $p \wedge q \rightarrow (p \leftrightarrow q)$ ” é tautológica, conforme mostra a sua tabela-verdade:

p	q	$p \wedge q$	$p \leftrightarrow q$	$p \wedge q \rightarrow (p \leftrightarrow q)$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	F	F	V
F	F	F	V	V

(5) A proposição “ $p \vee (q \wedge \neg q) \leftrightarrow p$ ” é tautológica, conforme mostra a sua tabela-verdade:

p	q	$\neg q$	$q \wedge \neg q$	$p \vee (q \wedge \neg q)$	$p \vee (q \wedge \neg q) \leftrightarrow p$
V	V	F	F	V	V
V	F	V	F	V	V
F	V	F	F	V	V
F	F	V	F	V	V

(6) A proposição “ $p \wedge r \rightarrow \neg q \vee r$ ” é tautológica, conforme se vê pela sua tabela-verdade:

p	q	r	$\neg q$	$p \wedge r$	$\neg q \vee r$	$p \wedge r \rightarrow \neg q \vee r$
V	V	V	F	V	V	V
V	V	F	F	F	V	V
V	F	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	V	V
F	V	V	F	F	V	V
F	V	F	F	F	F	V
F	F	V	V	F	V	V
F	F	F	V	F	V	V

(7) A proposição “ $((p \rightarrow q) \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow r))$ ” é tautológica, conforme mostra a sua tabela-verdade:

$((p \rightarrow q) \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow r))$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
($(p \rightarrow q) \rightarrow r$)	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V
\rightarrow	V	V	F	F	V	V	F	V	F	V
$(p \rightarrow (q \rightarrow r))$	V	F	V	V	V	V	V	F	V	V
\rightarrow	V	F	V	F	V	V	V	V	V	V
$(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow r)$	V	F	V	F	V	V	V	V	V	V
\rightarrow	V	V	V	F	V	V	F	V	V	F
$(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow r)$	V	V	V	F	V	V	V	V	V	V
\rightarrow	V	V	V	F	V	V	F	V	V	V
$(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow r)$	V	V	V	F	V	V	V	V	V	V
\rightarrow	V	V	V	F	V	V	F	V	V	V

2. PRINCÍPIO DE SUBSTITUIÇÃO PARA AS TAUTOLOGIAS

Seja $P(p, q, r, \dots)$ uma tautologia e sejam $P_0(p, q, r, \dots)$, $Q_0(p, q, r, \dots)$, $R_0(p, q, r, \dots)$, ... proposições quaisquer.

Como o valor lógico de $P(p, q, r, \dots)$ é sempre V(verdade), quaisquer que sejam os valores lógicos das proposições simples componentes p, q, r, \dots , é óbvio que, substituindo p por P_0 , q por Q_0 , r por R_0 , ... na tautologia $P(p, q, r, \dots)$, a nova proposição $P(P_0, Q_0, R_0, \dots)$ que assim se obtém também é uma tautologia. Subsiste, pois, para as tautologias o chamado “Princípio de substituição” seguinte:

Se $P(p, q, r, \dots)$ é uma tautologia, então $P(P_0, Q_0, R_0, \dots)$ também é uma tautologia, quaisquer que sejam as proposições P_0, Q_0, R_0, \dots .

3. CONTRADIÇÃO

Definição — Chama-se **contradição** toda a proposição composta cuja última coluna da sua tabela-verdade encerra somente a letra F(falsidade).

Em outros termos, **contradição** é toda proposição composta $P(p, q, r, \dots)$ cujo valor lógico é sempre F(falsidade), quaisquer que sejam os valores lógicos das proposições simples componentes p, q, r, \dots

Como uma tautologia é sempre verdadeira(V), a negação de uma tautologia é sempre falsa(F), ou seja, é uma contradição, e vice-versa.

Portanto, $P(p, q, r, \dots)$ é uma tautologia se e somente se $\sim P(p, q, r, \dots)$ é uma contradição, e $P(p, q, r, \dots)$ é uma contradição se e somente se $\sim P(p, q, r, \dots)$ é uma tautologia.

As contradições são também denominadas **proposições contraválidas** ou **proposições logicamente falsas**.

Para as contradições vale um “**Princípio de substituição**” análogo ao que foi dado para as tautologias:

Se $P(p, q, r, \dots)$ é uma contradição, então $P(P_0, Q_0, R_0, \dots)$ também é uma contradição, quaisquer que sejam as proposições P_0, Q_0, R_0, \dots

Exemplos:

(1) A proposição “ $p \wedge \sim p$ ” é uma contradição, conforme se vê pela sua tabela-verdade:

p	$\sim p$	$p \wedge \sim p$
V	F	F
F	V	F

Portanto, dizer que uma proposição pode ser simultaneamente verdadeira e falsa é sempre falso.

(2) A proposição “ $p \leftrightarrow \sim p$ ” é uma contradição, conforme mostra a sua tabela-verdade:

p	$\sim p$	$p \leftrightarrow \sim p$
V	F	F
F	V	F

(3) A proposição “ $(p \wedge q) \wedge \sim(p \vee q)$ ” é uma contradição, conforme se vê pela sua tabela-verdade:

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$\sim(p \vee q)$	$(p \wedge q) \wedge \sim(p \vee q)$
V	V	V	V	F	F
V	F	F	V	F	F
F	V	F	V	F	F
F	F	F	F	V	F

(4) A proposição “ $\sim p \wedge (p \wedge \sim q)$ ” é uma contradição, conforme mostra a sua tabela-verdade:

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \wedge \sim q$	$\sim p \wedge (p \wedge \sim q)$
V	V	F	F	F	F
V	F	F	V	V	F
F	V	V	F	F	F
F	F	V	V	F	F

4. CONTINGÊNCIA

Definição — Chama-se **contingência** toda a proposição composta em cuja última coluna da sua tabela-verdade figuram as letras V e F cada uma pelo menos uma vez.

Em outros termos, **contingência** é toda proposição composta que não é tautologia nem contradição.

As contingências são também denominadas **proposições contingentes** ou **proposições indeterminadas**.

Exemplos:

(1) A proposição “ $p \rightarrow \sim p$ ” é uma contingência, conforme se vê pela sua tabela verdade:

p	$\sim p$	$p \rightarrow \sim p$
V	F	F
F	V	V

(2) A proposição “ $p \vee q \rightarrow p$ ” é uma contingência, conforme mostra a sua tabela-verdade:

p	q	$p \vee q$	$p \vee q \rightarrow p$
V	V	V	V
V	F	V	V
F	V	V	F
F	F	F	V

(3) A proposição “ $x = 3 \wedge (x \neq y \rightarrow x \neq 3)$ ” é uma contingência, conforme mostra a sua tabela-verdade:

$x = 3$	$x = y$	$x \neq 3$	$x \neq y$	$x \neq y \rightarrow x \neq 3$	$x = 3 \wedge (x \neq y \rightarrow x \neq 3)$
V	V	F	F	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	F
F	F	V	V	V	F

EXERCÍCIOS

1. Mostrar que as seguintes proposições são tautológicas:

- | | |
|--|--|
| (a) $(p \rightarrow p) \vee (p \rightarrow \neg p)$ | (b) $(p \leftrightarrow p \wedge \neg p) \leftrightarrow \neg p$ |
| (c) $(p \rightarrow q) \wedge p \rightarrow q$ | (d) $p \vee (q \vee \neg p)$ |
| (e) $(p \rightarrow q) \wedge \neg q \rightarrow \neg p$ | (f) $(p \vee q) \wedge \neg p \rightarrow q$ |
| (g) $p \leftrightarrow p \wedge (p \vee q)$ | (h) $\neg(p \vee \neg p) \vee (q \vee \neg q)$ |
| (i) $\neg(p \wedge \neg p) \vee (q \rightarrow \neg q)$ | (j) $p \vee (p \wedge q) \leftrightarrow p$ |
| (k) $\neg(p \vee q) \rightarrow (p \leftrightarrow q)$ | (l) $(p \leftrightarrow q) \wedge p \rightarrow q$ |

2. Mostrar que as seguintes proposições são tautológicas:

- | | |
|---|---|
| (a) $(p \rightarrow q) \rightarrow (p \wedge r \rightarrow q)$ | (b) $(p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow q \vee r)$ |
| (c) $(p \rightarrow q) \rightarrow (p \wedge r \rightarrow q \wedge r)$ | (d) $(p \rightarrow q) \rightarrow (p \vee r \rightarrow q \vee r)$ |

3. Mostrar que as seguintes proposições são contingentes:

- | | |
|---|---|
| (a) $p \vee q \rightarrow p \wedge q$ | (b) $(q \rightarrow p) \rightarrow (p \rightarrow q)$ |
| (c) $(p \rightarrow (p \rightarrow q)) \rightarrow q$ | (d) $p \rightarrow (p \rightarrow q \wedge \neg q)$ |

4. Determinar quais das seguintes proposições são tautológicas, contraválidas, ou contingentes:

- | | |
|--|---|
| (a) $p \rightarrow (\neg p \rightarrow q)$ | (b) $\neg p \vee q \rightarrow (p \rightarrow q)$ |
| (c) $p \rightarrow (q \rightarrow (q \rightarrow p))$ | (d) $((p \rightarrow q) \leftrightarrow q) \rightarrow p$ |
| (e) $p \vee \neg q \rightarrow (p \rightarrow \neg q)$ | (f) $\neg p \vee \neg q \rightarrow (p \rightarrow q)$ |
| (g) $p \rightarrow (p \vee q) \vee r$ | (h) $p \wedge q \rightarrow (p \leftrightarrow q \vee r)$ |

Capítulo 5

Implicação Lógica

1. DEFINIÇÃO DE IMPLICAÇÃO LÓGICA

Definição – Diz-se que uma proposição $P(p, q, r, \dots)$ implica logicamente ou apenas implica uma proposição $Q(p, q, r, \dots)$, se $Q(p, q, r, \dots)$ é verdadeira(V) todas as vezes que $P(p, q, r, \dots)$ é verdadeira(V).

Em outros termos, uma proposição $P(p, q, r, \dots)$ implica logicamente ou apenas implica uma proposição $Q(p, q, r, \dots)$ todas as vezes que nas respectivas tabelas-verdade dessas duas proposições não aparece V na última coluna de $P(p, q, r, \dots)$ e F na última coluna de $Q(p, q, r, \dots)$, com V e F em uma mesma linha, isto é, não ocorre $P(p, q, r, \dots) \wedge Q(p, q, r, \dots)$ com valores lógicos simultâneos respectivamente V e F.

Indica-se que a proposição $P(p, q, r, \dots)$ implica a proposição $Q(p, q, r, \dots)$ com a notação:

$$P(p, q, r, \dots) \Rightarrow Q(p, q, r, \dots)$$

Em particular, toda proposição implica uma tautologia e somente uma contradição implica uma contradição.

2. PROPRIEDADES DA IMPLICAÇÃO LÓGICA

É imediato que a relação de implicação lógica entre proposições goza das propriedades reflexiva(R) e transitiva(T), isto é, simbolicamente:

- (R) $P(p, q, r, \dots) \Rightarrow P(p, q, r, \dots)$
- (T) Se $P(p, q, r, \dots) \Rightarrow Q(p, q, r, \dots)$ e $Q(p, q, r, \dots) \Rightarrow R(p, q, r, \dots)$, então $P(p, q, r, \dots) \Rightarrow R(p, q, r, \dots)$

3. EXEMPLIFICAÇÃO

(1) As tabelas-verdade das proposições:

$$p \wedge q, \quad p \vee q, \quad p \leftrightarrow q$$

são:

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \leftrightarrow q$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	F	V	F
F	F	F	F	V

A proposição “ $p \wedge q$ ” é verdadeira(V) somente na linha 1 e, nesta linha, as proposições “ $p \vee q$ ” e “ $p \leftrightarrow q$ ” também são verdadeiras(V). Logo, a primeira proposição implica cada uma das outras duas proposições, isto é:

$$p \wedge q \Rightarrow p \vee q \quad \text{e} \quad p \wedge q \Rightarrow p \leftrightarrow q$$

As mesmas tabelas-verdade também demonstram as importantes Regras de inferência:

- (i) $p \Rightarrow p \vee q$ e $q \Rightarrow p \vee q$ (Adição)
- (ii) $p \wedge q \Rightarrow p$ e $p \wedge q \Rightarrow q$ (Simplificação)

(2) As tabelas-verdade das proposições:

$$p \leftrightarrow q, \quad p \rightarrow q, \quad q \rightarrow p$$

são:

p	q	$p \leftrightarrow q$	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	F	V	F
F	F	V	V	V

A proposição “ $p \leftrightarrow q$ ” é verdadeira(V) nas linhas 1 e 4 e, nestas linhas, as proposições “ $p \rightarrow q$ ” e “ $q \rightarrow p$ ” também são verdadeiras. Logo, a primeira proposição implica cada uma das outras duas proposições, isto é:

$$p \leftrightarrow q \Rightarrow p \rightarrow q \quad \text{e} \quad p \leftrightarrow q \Rightarrow q \rightarrow p$$

(3) A tabela-verdade da proposição: “ $(p \vee q) \wedge \neg p$ ” é:

p	q	$p \vee q$	$\neg p$	$(p \vee q) \wedge \neg p$
V	V	V	F	F
V	F	V	F	F
F	V	V	V	V
F	F	F	V	F

Esta proposição é verdadeira(V) somente na linha 3 e, nesta linha, a proposição “ q ” também é verdadeira(V). Logo, subsiste a implicação lógica:

$$(p \vee q) \wedge \neg p \Rightarrow q$$

denominada Regra do Silogismo disjuntivo.

Outra forma desta importante Regra de inferência é:

$$(p \vee q) \wedge \neg q \Rightarrow p$$

(4) A tabela-verdade da proposição “ $(p \rightarrow q) \wedge p$ ” é:

p	q	$p \rightarrow q$	$(p \rightarrow q) \wedge p$
V	V	V	V
V	F	F	F
F	V	V	F
F	F	V	F

Esta proposição é verdadeira(V) somente na linha 1 e, nesta linha, a proposição “ q ” também é verdadeira(V). Logo, subsiste a implicação lógica:

$$(p \rightarrow q) \wedge p \Rightarrow q$$

denominada Regra Modus ponens.

(5) As tabelas-verdade das proposições “ $(p \rightarrow q) \wedge \neg q$ ” e “ $\neg p$ ” são:

p	q	$p \rightarrow q$	$\neg q$	$(p \rightarrow q) \wedge \neg q$	$\neg p$
V	V	V	F	F	F
V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	F	V
F	F	V	V	V	V

A proposição “ $(p \rightarrow q) \wedge \sim q$ ” é verdadeira(V) somente na linha 4, e nesta linha, a proposição “ $\sim p$ ” também é verdadeira(V). Logo, subsiste a implicação lógica:

$$(p \rightarrow q) \wedge \sim q \Rightarrow \sim p$$

denominada **Regra Modus tollens**.

As mesmas tabelas-verdade também mostram que “ $\sim p$ ” implica “ $p \rightarrow q$ ”, isto é: $\sim p \Rightarrow p \rightarrow q$.

4. TAUTOLOGIAS E IMPLICAÇÃO LÓGICA

Teorema — A proposição $P(p, q, r, \dots)$ implica a proposição $Q(p, q, r, \dots)$, isto é:

$$P(p, q, r, \dots) \Rightarrow Q(p, q, r, \dots)$$

se e somente se a condicional:

$$P(p, q, r, \dots) \rightarrow Q(p, q, r, \dots) \quad (1)$$

é tautológica.

Dem. — (i) Se $P(p, q, r, \dots)$ implica $Q(p, q, r, \dots)$, então, não ocorre que os valores lógicos simultâneos destas duas proposições sejam respectivamente V e F, e por conseguinte a última coluna da tabela-verdade da condicional (1) encerra somente a letra V, isto é, esta condicional é tautológica.

(ii) Reciprocamente, se a condicional (1) é tautológica, isto é, se a última coluna da sua tabela-verdade encerra somente a letra V, então, não ocorre que os valores lógicos simultâneos das proposições $P(p, q, r, \dots)$ e $Q(p, q, r, \dots)$ sejam respectivamente V e F, e por conseguinte a primeira proposição implica a segunda.

Portanto, a toda implicação lógica corresponde uma condicional tautológica, e vice-versa.

Corolário — Se $P(p, q, r, \dots) \Rightarrow Q(p, q, r, \dots)$, então, também se tem:

$$P(P_0, Q_0, R_0, \dots) \Rightarrow Q(P_0, Q_0, R_0, \dots)$$

quaisquer que sejam as proposições P_0, Q_0, R_0, \dots

NOTA — Os símbolos \rightarrow e \Rightarrow são distintos, pois, o primeiro é de operação lógica (aplicado, p. ex., às proposições p e q dá a nova proposição $p \rightarrow q$), enquanto que o segundo é de relação (estabelece que a condicional $P(p, q, r, \dots) \Rightarrow Q(p, q, r, \dots)$ é tautológica).

Exemplos:

- (1) A condicional “ $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)$ ” é tautológica, pois, a última coluna da sua tabela-verdade encerra somente a letra V (Cap. 3, § 4, Ex. 4). Logo, subsiste a implicação lógica:

$$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \Rightarrow p \rightarrow r$$

denominada **Regra do Silogismo hipotético**.

- (2) A condicional “ $p \wedge \sim p \rightarrow q$ ” é tautológica, pois, a última coluna da sua tabela-verdade encerra somente a letra V:

p	q	$\sim p$	$p \wedge \sim p$	$p \wedge \sim p \rightarrow q$
V	V	F	F	V
V	F	F	F	V
F	V	V	F	V
F	F	V	F	V

Logo, subsiste a implicação lógica: $p \wedge \sim p \Rightarrow q$. Assim, de uma contradição $p \wedge \sim p$ se deduz qualquer proposição q (Princípio da inconsistência).

- (3) A proposição “ $(p \leftrightarrow q) \wedge p$ ” implica a proposição “ q ”, pois, a condicional “ $(p \leftrightarrow q) \wedge p \rightarrow q$ ” é tautológica conforme se vê pela sua tabela-verdade:

p	q	$p \leftrightarrow q$	$(p \leftrightarrow q) \wedge p$	$(p \leftrightarrow q) \wedge p \rightarrow q$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	F	F	V
F	F	V	F	V

Portanto, simbolicamente: $(p \leftrightarrow q) \wedge p \Rightarrow q$.

EXERCÍCIOS

1. Mostrar que a proposição p implica a proposição $q(p \Rightarrow q)$ em cada um dos seguintes casos:

- (a) $p : \pi > 3; \quad q : \operatorname{tg} 45^\circ = 1$
- (b) $p : \operatorname{sen} 30^\circ = 1; \quad q : \sqrt{2} > \sqrt{3}$
- (c) $p : ABCD \text{ é um losango}; \quad q : ABCD \text{ é um paralelogramo}$

- (d) p : O polígono ABCDE... é regular; q : O polígono ABCDE... é inscritível
 (e) p : O número inteiro x termina por 0; q : O número inteiro x é divisível por 5
 (f) p : ABC é um triângulo; q : A soma dos ângulos internos A, B e C é igual a 180°
 (g) p : $\operatorname{tg} \frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$; q : $\operatorname{sen} \frac{\pi}{6} = \cos \frac{\pi}{3}$

2. Mostrar: (a) $q \Rightarrow p \rightarrow q$; (b) $q \Rightarrow p \wedge q \leftrightarrow p$

3. Mostar que $p \leftrightarrow \neg q$ não implica $p \rightarrow q$.

Resolução — As tabelas-verdade das duas proposições dadas são:

p	q	$\neg q$	$p \leftrightarrow \neg q$	$p \rightarrow q$
V	V	F	F	V
V	F	V	V	F
F	V	F	V	V
F	F	V	F	V

A proposição “ $p \leftrightarrow \neg q$ ” é verdadeira(V) na linha 2 e, nesta linha, a proposição “ $p \rightarrow q$ ” é falsa(F). Logo, a primeira proposição não implica a segunda.

4. Mostrar que p não implica $p \wedge q$ e que $p \vee q$ não implica p .

5. Mostrar: $(x = y \vee x < 4) \wedge x < 4 \Rightarrow x = y$.

6. Mostrar: $(x \neq 0 \rightarrow x = y) \wedge x \neq y \Rightarrow x = 0$.

Capítulo 6

Equivalência Lógica

1. DEFINIÇÃO DE EQUIVALÊNCIA LÓGICA

Definição — Diz-se que uma proposição $P(p, q, r, \dots)$ é logicamente equivalente ou apenas equivalente a uma proposição $Q(p, q, r, \dots)$, se as tabelas-verdade destas duas proposições são idênticas.

Indica-se que a proposição $P(p, q, r, \dots)$ é equivalente a proposição $Q(p, q, r, \dots)$ com a notação:

$$P(p, q, r, \dots) \Leftrightarrow Q(p, q, r, \dots)$$

Em particular, se as proposições $P(p, q, r, \dots)$ e $Q(p, q, r, \dots)$ são ambas tautologias ou são ambas contradições, então são equivalentes.

2. PROPRIEDADES DA EQUIVALÊNCIA LÓGICA

É imediato que a relação de equivalência lógica entre proposições goza das propriedades reflexiva(R), simétrica(S) e transitiva(T), isto é, simbolicamente:

- (R) $P(p, q, r, \dots) \Leftrightarrow P(p, q, r, \dots)$
- (S) Se $P(p, q, r, \dots) \Leftrightarrow Q(p, q, r, \dots)$, então $Q(p, q, r, \dots) \Leftrightarrow P(p, q, r, \dots)$
- (T) Se $P(p, q, r, \dots) \Leftrightarrow Q(p, q, r, \dots)$ e $Q(p, q, r, \dots) \Leftrightarrow R(p, q, r, \dots)$, então $P(p, q, r, \dots) \Leftrightarrow R(p, q, r, \dots)$

3. EXEMPLIFICAÇÃO

(1) As proposições “ $\sim\sim p$ ” e “ p ” são equivalentes, isto é, simbolicamente: $\sim\sim p \leftrightarrow p$ (Regra da dupla negação). Realmente, é o que demonstra a tabela-verdade:

p	$\sim p$	$\sim\sim p$
V	F	V
F	V	F

Portanto, a dupla negação equivale à afirmação.

(2) As proposições “ $\sim p \rightarrow p$ ” e “ p ” são equivalentes, isto é, simbolicamente: $\sim p \rightarrow p \leftrightarrow p$ (Regra de CLAVIUS). Realmente, é o que demonstra a tabela-verdade:

p	$\sim p$	$\sim p \rightarrow p$
V	F	V
F	V	F

(3) As condicionais “ $p \rightarrow p \wedge q$ ” e “ $p \rightarrow q$ ” têm tabelas-verdade idênticas:

p	q	$p \wedge q$	$p \rightarrow p \wedge q$	$p \rightarrow q$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	F
F	V	F	V	V
F	F	F	V	V

Por consequência, estas condicionais são equivalentes, isto é, subsiste a equivalência lógica:

$$p \rightarrow p \wedge q \leftrightarrow p \rightarrow q$$

denominada Regra de absorção.

(4) A condicional “ $p \rightarrow q$ ” e a disjunção “ $\sim p \vee q$ ” têm tabelas-verdade idênticas:

p	q	$p \rightarrow q$	$\sim p$	$\sim p \vee q$
V	V	V	F	V
V	F	F	F	F
F	V	V	V	V
F	F	V	V	V

Por consequência, estas duas proposições são equivalentes, isto é, subsiste a importante equivalência lógica:

$$p \rightarrow q \leftrightarrow \sim p \vee q$$

(5) A bicondicional “ $p \leftrightarrow q$ ” e a conjunção “ $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ ” têm tabelas-verdade idênticas:

p	q	$p \leftrightarrow q$	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F
F	V	F	V	F	F
F	F	V	V	V	V

Por consequência, estas duas proposições são equivalentes, isto é, subsiste a importante equivalência lógica:

$$p \leftrightarrow q \leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$$

(6) A bicondicional “ $p \leftrightarrow q$ ” e a disjunção “ $(p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$ ” têm tabelas-verdade idênticas:

p	q	$p \leftrightarrow q$	$(p \wedge q)$	\vee	$(\sim p \wedge \sim q)$
V	V	V	V	V	F
V	F	F	F	F	F
F	V	F	F	V	F
F	F	V	F	V	V

Por consequência, estas duas proposições são equivalentes, isto é, subsiste a importante equivalência lógica:

$$p \leftrightarrow q \leftrightarrow (p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$$

4. TAUTOLOGIAS E EQUIVALÊNCIA LÓGICA

Teorema – A proposição $P(p, q, r, \dots)$ é equivalente à proposição $Q(p, q, r, \dots)$, isto é:

$$P(p, q, r, \dots) \leftrightarrow Q(p, q, r, \dots)$$

se e somente se a bicondicional:

$$P(p, q, r, \dots) \leftrightarrow Q(p, q, r, \dots) \quad (1)$$

é tautológica.

Dem. – (i) Se as proposições $P(p, q, r, \dots)$ e $Q(p, q, r, \dots)$ são equivalentes, então, têm tabelas-verdade idênticas, e por conseguinte o valor lógico da bicondicional (1) é sempre V(verdade), isto é, (1) é tautológica.

(ii) Reciprocamente, se a bicondicional (1) é tautológica, então, a última coluna da sua tabela-verdade encerra somente a letra V(verdade), e por conseguinte os valores lógicos respectivos das proposições $P(p, q, r, \dots)$ e $Q(p, q, r, \dots)$ são ambos V(verdade) ou são ambos F(falsidade), isto é, estas duas proposições são equivalentes.

Portanto, a toda equivalência lógica corresponde uma bicondicional tautológica, e vice-versa.

Corolário – Se $P(p, q, r, \dots) \Leftrightarrow Q(p, q, r, \dots)$, então, também se tem:

$$P(P_0, Q_0, R_0, \dots) \Leftrightarrow Q(P_0, Q_0, R_0, \dots)$$

quaisquer que sejam as proposições P_0, Q_0, R_0, \dots

NOTA – Os símbolos \leftrightarrow e \Leftrightarrow são distintos, pois, o primeiro é de operação lógica (aplicado, p. ex., às proposições p e q dá a nova proposição $p \leftrightarrow q$), enquanto que o segundo é de relação (estabelece que a bicondicional $P(p, q, r, \dots) \leftrightarrow Q(p, q, r, \dots)$ é tautológica).

Exemplos:

(1) A bicondicional “ $(p \wedge \neg q \rightarrow c) \leftrightarrow (p \rightarrow q)$ ”, onde c é uma proposição cujo valor lógico é F(falsidade), é tautológica, pois, a última coluna da sua tabela-verdade encerra somente a letra V(verdade):

p	q	$(p \wedge \neg q \rightarrow c) \leftrightarrow (p \rightarrow q)$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V
		1 3 2 4 1 5 1 2 1

Portanto, as proposições “ $p \wedge \neg q \rightarrow c$ ” e “ $p \rightarrow q$ ” são equivalentes, isto é, simbolicamente:

$$p \wedge \neg q \rightarrow c \Leftrightarrow p \rightarrow q$$

Nesta equivalência consiste o “Método de demonstração por absurdo”.

(2) A bicondicional “ $(p \wedge q \rightarrow r) \leftrightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow r))$ ” é tautológica, pois, a última coluna da sua tabela-verdade encerra somente a letra V(verdade):

$(p \wedge q \rightarrow r) \leftrightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow r))$	$(p \wedge q \rightarrow r)$	$(p \rightarrow (q \rightarrow r))$	(p)	\wedge	q	\rightarrow	r	\leftrightarrow	$(p \rightarrow (q \rightarrow r))$	(p)	\rightarrow	$(q \rightarrow r)$	\rightarrow	r
V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	V	F	F	V	V	F	V	F	V	F	F
V	F	F	V	V	V	V	V	V	V	V	F	V	V	V
V	F	F	V	F	V	F	V	V	V	V	F	V	F	F
F	F	V	V	V	V	V	V	F	V	V	V	V	V	V
F	F	V	V	F	V	F	V	F	V	V	F	V	F	F
F	F	F	V	V	V	V	F	V	F	V	F	V	V	V
F	F	F	V	F	V	F	V	F	V	F	V	V	F	F
1	2	1	3	1	4	1	3	1	2	1				

Portanto, as condicionais “ $p \wedge q \rightarrow r$ ” e “ $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ ” são equivalentes, isto é, simbolicamente:

$$p \wedge q \rightarrow r \Leftrightarrow p \rightarrow (q \rightarrow r)$$

Esta importante equivalência lógica é denominada “Regra de Exportação-Importação”.

(3) As proposições “ $x = 1 \vee x < 3$ ” e “ $\sim(x < 3 \wedge x = 1)$ ” não são equivalentes, pois, a bicondicional:

$$(x = 1 \vee x < 3) \leftrightarrow \sim(x < 3 \wedge x = 1)$$

não é tautológica, conforme se vê pela sua tabela-verdade:

$(x = 1 \vee x < 3) \leftrightarrow \sim(x < 3 \wedge x = 1)$	$(x = 1)$	\vee	$x < 3$	\leftrightarrow	\sim	$(x < 3 \wedge x = 1)$	$(x < 3)$	\wedge	$x = 1$
V	V	F	F	F	V	V	V	V	V
V	V	V	V	V	F	F	F	V	V
F	F	F	F	F	V	V	F	F	F
F	V	V	V	V	V	F	F	F	F

5. PROPOSIÇÕES ASSOCIADAS A UMA CONDICIONAL

Definição – Dada a condicional $p \rightarrow q$, chamam-se proposições associadas a $p \rightarrow q$ as três seguintes proposições condicionais que contêm p e q :

- (a) Proposição recíproca de $p \rightarrow q$: $q \rightarrow p$
- (b) Proposição contrária de $p \rightarrow q$: $\sim p \rightarrow \sim q$
- (c) Proposição contrapositiva de $p \rightarrow q$: $\sim q \rightarrow \sim p$

As tabelas-verdade destas quatro proposições são:

p	q	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$\sim p \rightarrow \sim q$	$\sim q \rightarrow \sim p$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	V	F
F	V	V	F	F	V
F	F	V	V	V	V

e demonstram as duas importantes propriedades:

(I) A condicional $p \rightarrow q$ e a sua contrapositiva $\sim q \rightarrow \sim p$ são equivalentes, isto é, simbolicamente:

$$p \rightarrow q \Leftrightarrow \sim q \rightarrow \sim p$$

(II) A recíproca $q \rightarrow p$ e a contrária $\sim p \rightarrow \sim q$ da condicional $p \rightarrow q$ são equivalentes, isto é, simbolicamente:

$$q \rightarrow p \Leftrightarrow \sim p \rightarrow \sim q$$

As mesmas tabelas-verdade também demonstram que a condicional $p \rightarrow q$ e a sua recíproca $q \rightarrow p$ ou a sua contrária $\sim p \rightarrow \sim q$ não são equivalentes.

A contrária de $p \rightarrow q$ também é denominada a inversa de $p \rightarrow q$ e a contrapositiva de $p \rightarrow q$ outra coisa não é que a contrária da recíproca de $p \rightarrow q$, e por isso também é denominada contra-recíproca de $p \rightarrow q$. Também se diz que $p \rightarrow q$ é a direta em relação às associadas.

Exemplos:

(1) Seja a condicional relativa a um triângulo T:

$$p \rightarrow q : \text{Se } T \text{ é equilátero, então } T \text{ é isósceles}$$

A recíproca desta proposição é:

$$q \rightarrow p : \text{Se } T \text{ é isósceles, então } T \text{ é equilátero}$$

Aqui, a condicional $p \rightarrow q$ é verdadeira(V), mas a sua recíproca $q \rightarrow p$ é falsa(F).

(2) A contrapositiva da condicional:

$$p \rightarrow q : \text{Se Carlos é professor, então é pobre}$$

é

$$\sim q \rightarrow \sim p : \text{Se Carlos não é pobre, então não é professor}$$

(3) Seja achar a contrapositiva da condicional: "Se x é menor que zero, então x não é positivo".

Representando por p a proposição " x é menor que zero" e por q a proposição " x é positivo", a condicional dada sob forma simbólica escreve-se: $p \rightarrow \sim q$, e por conseguinte a sua contrapositiva é:

$$\sim \sim q \rightarrow \sim p \Leftrightarrow q \rightarrow \sim p$$

isto é, em linguagem corrente: "Se x é positivo, então x não é menor que zero".

(4) Seja demonstrar a proposição condicional:

$$p \rightarrow q : \text{Se } x^2 \text{ é ímpar, então } x \text{ é ímpar}$$

A contrapositiva desta condicional é:

$$\sim q \rightarrow \sim p : \text{Se } x \text{ é par, então } x^2 \text{ é par}$$

que vamos demonstrar ser verdadeira.

Com efeito, suponhamos x par, isto é, $x = 2n (n \in \mathbb{Z})$. Como $x^2 = 2 \cdot 2n^2$, segue-se que x^2 é par. Logo, a contrapositiva é verdadeira, e por conseguinte a proposição condicional dada $p \rightarrow q$ também é verdadeira.

(5) Determinar:

- (a) A contrapositiva da contrapositiva de $p \rightarrow q$
- (b) A contrapositiva da recíproca de $p \rightarrow q$
- (c) A contrapositiva da contrária de $p \rightarrow q$

Resolução – (a) A contrapositiva de $p \rightarrow q$ é $\sim q \rightarrow \sim p$. E a contrapositiva de $\sim q \rightarrow \sim p$ é: $\sim \sim p \rightarrow \sim \sim q \Leftrightarrow p \rightarrow q$.

(b) A recíproca de $p \rightarrow q$ é $q \rightarrow p$. E a contrapositiva de $q \rightarrow p$ é: $\sim p \rightarrow \sim q$.

(c) A contrária de $p \rightarrow q$ é $\sim p \rightarrow \sim q$. E a contrapositiva de $\sim p \rightarrow \sim q$ é: $\sim \sim q \rightarrow \sim \sim p \Leftrightarrow q \rightarrow p$.

Observe-se que a recíproca e a contrária são cada uma a contrapositiva da outra e que a condicional e a contrapositiva são cada uma a contrapositiva da outra.

(6) Determinar:

- (a) A contrapositiva de $p \rightarrow \sim q$
- (b) A contrapositiva de $\sim p \rightarrow q$
- (c) A contrapositiva da recíproca de $p \rightarrow \sim q$
- (d) A recíproca da contrapositiva de $\sim p \rightarrow \sim q$

Resolução – (a) A contrapositiva de $p \rightarrow \sim q$ é:

$$\sim\sim q \rightarrow \sim p \Leftrightarrow q \rightarrow \sim p$$

(b) A contrapositiva de $\sim p \rightarrow q$ é:

$$\sim q \rightarrow \sim\sim p \Leftrightarrow \sim q \rightarrow p$$

(c) A recíproca de $p \rightarrow \sim q$ é $\sim q \rightarrow p$. E a contrapositiva de $\sim q \rightarrow p$ é:

$$\sim p \rightarrow \sim\sim q \Leftrightarrow \sim p \rightarrow q$$

(d) A contrapositiva de $\sim p \rightarrow \sim q$ é:

$$\sim\sim q \rightarrow \sim\sim p \Leftrightarrow q \rightarrow p$$

E a recíproca de $q \rightarrow p$ é $p \rightarrow q$.

(7) Determinar:

- (a) A contrapositiva da recíproca de $x = 0 \rightarrow x < 1$
- (b) A contrapositiva da contrária de $x < 1 \rightarrow x < 3$

Resolução – (a) A recíproca de $x = 0 \rightarrow x < 1$ é $x < 1 \rightarrow x = 0$. E a contrapositiva desta recíproca é $x \neq 0 \rightarrow x \leq 1$.

(b) A contrária de $x < 1 \rightarrow x < 3$ é $x \leq 1 \rightarrow x \leq 3$. E a contrapositiva desta contrária é $x \geq 3 \rightarrow x < 1$.

6. NEGAÇÃO CONJUNTA DE DUAS PROPOSIÇÕES

Definição – Chama-se negação conjunta de duas proposições p e q a proposição “não p e não q ”, isto é, simbolicamente “ $\sim p \wedge \sim q$ ”.

A negação conjunta de duas proposições p e q também se indica pela notação “ $p \downarrow q$ ”. Portanto, temos:

$$p \downarrow q \Leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$$

Como a proposição “ $\sim p \wedge \sim q$ ” é verdadeira somente no caso em que p e q são ambas falsas, então, a tabela-verdade de “ $p \downarrow q$ ” é a seguinte:

p	q	$p \downarrow q$
V	V	F
V	F	F
F	V	F
F	F	V

7. NEGAÇÃO DISJUNTA DE DUAS PROPOSIÇÕES

Definição – Chama-se negação disjunta de duas proposições p e q a proposição “não p ou não q ”, isto é, simbolicamente “ $\sim p \vee \sim q$ ”.

A negação disjunta de duas proposições p e q também se indica pela notação “ $p \uparrow q$ ”. Portanto, temos:

$$p \uparrow q \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q$$

Como a proposição “ $\sim p \vee \sim q$ ” é falsa somente no caso em que p e q são ambas verdadeiras, então, a tabela-verdade de “ $p \uparrow q$ ” é a seguinte:

p	q	$p \uparrow q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	V

Os símbolos “ \downarrow ” e “ \uparrow ” são chamados “conectivos de SCHEFFER”.

EXERCÍCIOS

1. Mostrar que as proposições p e q são equivalentes ($p \Leftrightarrow q$) em cada um dos seguintes casos:

- (a) $p : 1 + 3 = 4$; $q : (1 + 3)^2 = 16$
- (b) $p : \text{sen}0^\circ = 1$; $q : \cos 0^\circ = 0$
- (c) $p : 2^0 = 1$; $q : \pi < 4$
- (d) $p : x = y$; $q : x + z = y + z$ ($x, y, z \in \mathbb{R}$)
- (e) $p : x$ é par; $q : x + 1$ é ímpar ($x \in \mathbb{Z}$)
- (f) $p : \text{O triângulo } ABC \text{ é isósceles } (AB = AC)$; $q : \text{Os ângulos } \hat{B} \text{ e } \hat{C} \text{ são iguais}$
- (g) $p : a \perp b$; $q : b \perp a$
- (h) $p : a \parallel b$; $q : b \parallel a$
- (i) $p : \text{O triângulo } ABC \text{ é retângulo em } A$; $q : a^2 = b^2 + c^2$
- (j) $p : x \in \{a\}$; $q : x = a$

2. Exprimir a bicondicional $p \leftrightarrow q$ em função dos três conectivos: \wedge , \vee e \sim .

Resolução Temos:

$$p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$$

$$p \rightarrow q \Leftrightarrow \sim p \vee q$$

$$q \rightarrow p \Leftrightarrow \sim q \vee p$$

$$\text{Portanto: } p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee p).$$

3. Demonstrar por tabelas-verdade as seguintes equivalências:

$$(a) p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$$

$$(b) p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$$

$$(c) p \leftrightarrow p \wedge q \Leftrightarrow p \rightarrow q$$

$$(d) q \leftrightarrow p \vee q \Leftrightarrow p \rightarrow q$$

$$(e) (p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r) \Leftrightarrow p \rightarrow q \wedge r$$

$$(f) (p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r) \Leftrightarrow p \rightarrow q \vee r$$

$$(g) (p \rightarrow q) \rightarrow r \Leftrightarrow p \wedge \sim r \rightarrow \sim q$$

4. Mostrar que as proposições “ $x = 1 \vee x < 3$ ” e “ $\sim(x < 3 \wedge x = 1)$ ” não são equivalentes.

5. Demonstrar que o conectivo “ $\underline{\vee}$ ” (“ou” exclusivo) exprime-se em função dos três conectivos \sim , \wedge e \vee do seguinte modo:

$$p \underline{\vee} q \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge \sim(p \wedge q)$$

Dem. Com efeito, as tabelas-verdade de “ $p \underline{\vee} q$ ” e “ $(p \vee q) \wedge \sim(p \wedge q)$ ” são idênticas:

p	q	$p \underline{\vee} q$	(p	\vee	q)	\wedge	\sim	(p	\wedge	q)
V	V	F	V	V	V	F	F	V	V	V
V	F	V	V	V	F	V	V	V	F	F
F	V	V	F	V	V	V	F	F	F	V
F	F	F	F	F	F	F	V	F	F	F
			1	2	1	4	3	1	2	1

6. Demonstrar que os três conectivos \sim , \vee e \wedge exprimem-se em função do conectivo “ \downarrow ” de SCHEFFER do seguinte modo:

$$(a) \sim p \Leftrightarrow p \uparrow p$$

$$(b) p \vee q \Leftrightarrow (p \downarrow q) \downarrow (p \downarrow q)$$

$$(c) p \wedge q \Leftrightarrow (p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q)$$

Dem. – Realmente, é o que demonstram as três tabelas-verdade seguintes:

(a)	p	$\sim p$	$p \downarrow p$
V	F	F	
F	V	V	

(b)	p	q	$p \vee q$	$p \downarrow q$	$(p \downarrow q) \downarrow (p \downarrow q)$
V	V	V	V	F	V
V	F	V	V	F	V
F	V	V	V	F	V
F	F	F	F	V	F

(c)	p	q	$p \wedge q$	$p \downarrow p$	$q \downarrow q$	$(p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q)$
V	V	V	V	F	F	V
V	F	F	F	F	V	F
F	V	F	F	V	F	F
F	F	F	F	V	V	F

7. Demonstrar por tabelas-verdade que os três conectivos \sim , \vee e \wedge exprimem-se em função do conectivo “ \downarrow ” de SCHEFFER do seguinte modo:

$$(a) \sim p \Leftrightarrow p \uparrow p$$

$$(b) p \vee q \Leftrightarrow (p \uparrow p) \downarrow (q \uparrow q)$$

$$(c) p \wedge q \Leftrightarrow (p \uparrow q) \downarrow (p \uparrow q)$$

8. Sabendo que as proposições p e q são verdadeiras e que a proposição r é falsa, determinar o valor lógico (V ou F) das seguintes proposições:

$$(a) (\sim p \downarrow q) \wedge (q \uparrow \sim r)$$

$$(b) ((p \uparrow q) \vee (q \downarrow r)) \downarrow (r \downarrow p)$$

$$(c) (\sim p \uparrow \sim q) \Leftrightarrow ((q \downarrow r) \downarrow p)$$

$$(d) ((p \uparrow \sim p) \vee q) \downarrow (q \wedge r)$$

9. Demonstrar que o conectivo “ \vee ” exprime-se em função **unicamente** de “ \rightarrow ” pela equivalência: $p \vee q \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \rightarrow p$.
10. Demonstrar que a negação conjunta e a negação disjunta gozam da propriedade **comutativa**, isto é:

$$p \downarrow q \Leftrightarrow q \downarrow p \quad \text{e} \quad p \uparrow q \Leftrightarrow q \uparrow p$$

11. Demonstrar: $((p \uparrow \sim p) \uparrow (p \uparrow \sim p)) \Leftrightarrow p \wedge \sim p$
12. Demonstrar que as seguintes proposições são **contingentes**:

- (a) $(p \downarrow q) \vee (\sim q \uparrow p)$
- (b) $(p \uparrow (q \vee r)) \rightarrow \sim r$
- (c) $((p \downarrow \sim p) \vee q) \downarrow (\sim q \wedge \sim r)$

Capítulo 7

Álgebra das Proposições

1. PROPRIEDADES DA CONJUNÇÃO

Sejam p , q e r proposições simples quaisquer e sejam t e c proposições também simples cujos valores lógicos respectivos são **V**(verdade) e **F**(falsidade).

- (a) **Idempotente:** $p \wedge p \Leftrightarrow p$

Dem. — Com efeito, são **idênticas** as tabelas-verdade das proposições $p \wedge p$ e p , ou seja, a bicondicional $p \wedge p \Leftrightarrow p$ é **tautológica**:

p	$p \wedge p$	$p \wedge p \Leftrightarrow p$
V	V	V
F	F	V

Assim, p. ex., temos:

- (i) $x \neq 1 \wedge x \neq 1 \Leftrightarrow x \neq 1$
- (ii) $x < 0 \wedge x < 0 \Leftrightarrow x < 0$

- (b) **Comutativa:** $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$

Dem. — Com efeito, são **idênticas** as tabelas-verdade das proposições $p \wedge q$ e $q \wedge p$, ou seja, a bicondicional $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$ é **tautológica**:

p	q	$p \wedge q$	$q \wedge p$	$p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	F	F	V
F	F	F	F	V

Assim, p. ex., temos:

- (i) $x \neq 1 \wedge x > 0 \iff x > 0 \wedge x \neq 1$
- (ii) $\pi > 3 \wedge \pi < 4 \iff \pi < 4 \wedge \pi > 3$
- (iii) $\sqrt{2} > 1 \wedge \sqrt{5} < 3 \iff \sqrt{5} < 3 \wedge \sqrt{2} > 1$

(c) **Associativa:** $(p \wedge q) \wedge r \iff p \wedge (q \wedge r)$

Dem. Com efeito, são idênticas as tabelas-verdade das proposições $(p \wedge q) \wedge r$ e $p \wedge (q \wedge r)$:

p	q	r	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \wedge r$	$q \wedge r$	$p \wedge (q \wedge r)$
V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F
V	F	V	F	F	F	F
V	F	F	F	F	F	F
F	V	V	F	V	F	F
F	V	F	F	F	F	F
F	F	V	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F

Observa-se que a bicondicional $(p \wedge q) \wedge r \iff p \wedge (q \wedge r)$ é tautológica.

Assim, p. ex., temos:

- (i) $(a \geq b \wedge b \neq c) \wedge c < d \iff a \geq b \wedge (b \neq c \wedge c < d)$
- (ii) $(x \neq 0 \wedge x \geq 1) \wedge x < 3 \iff x \neq 0 \wedge (x \geq 1 \wedge x < 3)$

(d) **Identidade:** $p \wedge t \iff p$ e $p \wedge c \iff c$

Dem. — Com efeito, são idênticas as tabelas-verdade das proposições $p \wedge t$ e p , $p \wedge c$ e c , ou seja, as bicondicionais $p \wedge t \iff p$ e $p \wedge c \iff c$ são tautológicas:

p	t	c	$p \wedge t$	$p \wedge c$	$p \wedge t \iff p$	$p \wedge c \iff c$
V	V	F	V	F	V	V
F	V	F	F	F	F	F

Estas propriedades exprimem que t e c são respectivamente elemento neutro e elemento absorvente da conjunção.

Assim, p. ex., temos:

- (i) $x \neq 1 \wedge |x| \geq 0 \iff x \neq 1$
- (ii) $x \neq 1 \wedge |x| < 0 \iff |x| < 0$

2. PROPRIEDADES DA DISJUNÇÃO

Sejam p , q e r proposições simples e sejam t e c proposições também simples cujos valores lógicos respectivos são V(verdade) e F(falsidade).

(a) **Idempotente:** $p \vee p \iff p$

Dem. — Com efeito, são idênticas as tabelas-verdade das proposições $p \vee p$ e p , ou seja, a bicondicional $p \vee p \iff p$ é tautológica:

p	$p \vee p$	$p \vee p \iff p$
V	V	V
F	F	V

Assim, p. ex., temos:

- (i) $x \neq 0 \vee x \neq 0 \iff x \neq 0$
- (ii) $x \leq 1 \vee x \leq 1 \iff x \leq 1$

(b) **Comutativa:** $p \vee q \iff q \vee p$

Dem. — Com efeito, são idênticas as tabelas-verdade das proposições $p \vee q$ e $q \vee p$, ou seja, a bicondicional $p \vee q \iff q \vee p$ é tautológica:

p	q	$p \vee q$	$q \vee p$	$p \vee q \iff q \vee p$
V	V	V	V	V
V	F	V	V	V
F	V	V	V	V
F	F	F	F	V

Assim, p. ex., temos:

- (i) $x \neq 1 \vee x \leq 0 \iff x \leq 0 \vee x \neq 1$
- (ii) $a > b \vee b < c \iff b < c \vee a > b$

(c) Associativa: $(p \vee q) \vee r \leftrightarrow p \vee (q \vee r)$

Dem. — Com efeito, são idênticas as tabelas-verdade das proposições $(p \vee q) \vee r$ e $p \vee (q \vee r)$:

p	q	r	$p \vee q$	$(p \vee q) \vee r$	$q \vee r$	$p \vee (q \vee r)$
V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V	V
V	F	V	V	V	V	V
V	F	F	V	V	F	V
F	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	V	V	V
F	F	V	F	V	V	V
F	F	F	F	F	F	F

Observe-se que a bicondicional $(p \vee q) \vee r \leftrightarrow p \vee (q \vee r)$ é tautológica.

Assim, p. ex., temos:

- (i) $(x \neq 1 \vee x \geq 2) \vee x < 4 \leftrightarrow x \neq 1 \vee (x \geq 2 \vee x < 4)$
- (ii) $(a \neq b \vee b \leq c) \vee c < d \leftrightarrow a \neq b \vee (b \leq c \vee c < d)$

(d) Identidade: $p \vee t \leftrightarrow t$ e $p \vee c \leftrightarrow p$

Dem. — Com efeito, são idênticas as tabelas-verdade das proposições $p \vee t$ e t , $p \vee c$ e c , ou seja, as bicondicionais $p \vee t \leftrightarrow t$ e $p \vee c \leftrightarrow p$ são tautológicas:

p	t	c	$p \vee t$	$p \vee c$	$p \vee t \leftrightarrow t$	$p \vee c \leftrightarrow p$
V	V	F	V	V	V	V
F	V	F	V	F	V	V

Estas propriedades exprimem que t e c são respectivamente elemento absorvente e elemento neutro da disjunção.

Assim, p. ex., temos:

- (i) $x \neq 1 \vee |x| \geq 0 \leftrightarrow |x| \geq 0$
- (ii) $x \neq 1 \vee |x| < 0 \leftrightarrow x \neq 1$
- (iii) $x \neq 0 \vee x^2 < 0 \leftrightarrow x \neq 0$

3. PROPRIEDADES DA CONJUNÇÃO E DA DISJUNÇÃO

Sejam p , q e r proposições simples quaisquer.

(a) Distributivas:

- (i) $p \wedge (q \vee r) \leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
- (ii) $p \vee (q \wedge r) \leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

Dem. — (i) Com efeito, são idênticas as tabelas-verdade das proposições $p \wedge (q \vee r)$ e $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$:

p	q	r	$q \vee r$	$p \wedge (q \vee r)$	$p \wedge q$	$p \wedge r$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V	F	V
V	F	V	V	V	F	V	V
V	F	F	F	F	F	F	F
F	V	V	V	F	F	F	F
F	V	F	V	F	F	F	F
F	F	V	V	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F

Observe-se que a bicondicional $p \wedge (q \vee r) \leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ é tautológica.

(ii) Analogamente, são idênticas as tabelas-verdade das proposições $p \vee (q \wedge r)$ e $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$:

p	q	r	$q \wedge r$	$p \vee (q \wedge r)$	$p \vee q$	$p \vee r$	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	V	V	V	V
V	F	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	V	V	V	V
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	F	F	V	F	F
F	F	V	F	F	F	V	F
F	F	F	F	F	F	F	F

Observe-se que a bicondicional $p \vee (q \wedge r) \leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ é tautológica.

A equivalência (i) exprime que a conjunção é distributiva em relação à disjunção e a equivalência (ii) exprime que a disjunção é distributiva em relação à conjunção.

Assim, p. ex., segundo (i), a proposição:

“Carlos estuda e Jorge ouve música **ou** lê”

é equivalente à seguinte proposição:

“Carlos estuda e Jorge ouve música” ou “Carlos estuda e Jorge lê”

Segundo (ii), a proposição:

“Chove ou faz vento e frio”

é equivalente à seguinte proposição:

“Chove ou faz vento” e “Chove **ou** faz frio”

(b) Absorção:

$$(i) \quad p \wedge (p \vee q) \leftrightarrow p$$

$$(ii) \quad p \vee (p \wedge q) \leftrightarrow p$$

Dem. – (i) Com efeito, são **idênticas** as tabelas-verdade das proposições $p \wedge (p \vee q)$ e p , ou seja, a bicondicional $p \wedge (p \vee q) \leftrightarrow p$ é tautológica:

p	q	$p \vee q$	$p \wedge (p \vee q)$	$p \wedge (p \vee q) \leftrightarrow p$
V	V	V	V	V
V	F	V	V	V
F	V	V	F	V
F	F	F	F	V

(ii) Analogamente, são **idênticas** as tabelas-verdade das proposições $p \vee (p \wedge q)$ e p , ou seja, a bicondicional $p \vee (p \wedge q) \leftrightarrow p$ é tautológica:

p	q	$p \wedge q$	$p \vee (p \wedge q)$	$p \vee (p \wedge q) \leftrightarrow p$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	V
F	V	F	F	V
F	F	F	F	V

(c) Regras de DE MORGAN (1806-1871):

$$(i) \quad \sim(p \wedge q) \leftrightarrow \sim p \vee \sim q$$

$$(ii) \quad \sim(p \vee q) \leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$$

Dem. – (i) Com efeito, são **idênticas** as tabelas-verdade das proposições $\sim(p \wedge q)$ e $\sim p \vee \sim q$:

p	q	$p \wedge q$	$\sim(p \wedge q)$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \vee \sim q$
V	V	V	F	F	F	F
V	F	F	V	F	V	V
F	V	F	V	V	F	V
F	F	F	V	V	V	V

Observe-se que a bicondicional $\sim(p \wedge q) \leftrightarrow \sim p \vee \sim q$ é tautológica.

(ii) Analogamente, são **idênticas** as tabelas-verdade das proposições $\sim(p \vee q)$ e $\sim p \wedge \sim q$:

p	q	$p \vee q$	$\sim(p \vee q)$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \wedge \sim q$
V	V	V	F	F	F	F
V	F	V	F	F	V	F
F	V	V	F	V	F	F
F	F	F	V	V	V	V

Observe-se que a bicondicional $\sim(p \vee q) \leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$ é tautológica.
As Regras de DE MORGAN ensinam:

- Negar que duas dadas proposições são ao mesmo tempo verdadeiras equivale a afirmar que uma pelo menos é falsa.
- Negar que uma pelo menos de duas proposições é verdadeira equivale a afirmar que ambas são falsas.

Estas Regras de DE MORGAN podem exprimir-se ainda dizendo que a negação transforma a conjunção em disjunção e a disjunção em conjunção.
Assim, p. ex., segundo (i), a negação da proposição:

“É inteligente e estuda”

é a proposição:

“Não é inteligente ou não estuda”

Segundo (ii), a negação da proposição:

“É médico ou professor”

é a proposição:

“Não é médico e não é professor”

NOTA — As Regras de DE MORGAN mostram como é possível definir a disjunção a partir da conjunção e da negação, ou a conjunção a partir da disjunção e da negação:

$$\begin{aligned} p \vee q &\iff \sim(\sim p \wedge \sim q) \\ p \wedge q &\iff \sim(\sim p \vee \sim q) \end{aligned}$$

4. NEGAÇÃO DA CONDICIONAL

Como $p \rightarrow q \iff \sim p \vee q$ (Cap. 6, §3, Ex. 4), temos:

$$\sim(p \rightarrow q) \iff \sim(\sim p \vee q) \iff \sim\sim p \wedge \sim q$$

ou seja:

$$\sim(p \rightarrow q) \iff p \wedge \sim q$$

Esta equivalência também é demonstrada pelas tabelas-verdade das proposições $\sim(p \rightarrow q)$ e $p \wedge \sim q$, que são **idênticas**:

p	q	$p \rightarrow q$	$\sim(p \rightarrow q)$	$\sim q$	$p \wedge \sim q$
V	V	V	F	F	F
V	F	F	V	V	V
F	V	V	F	F	F
F	F	V	F	V	F

NOTA — A condicional $p \rightarrow q$ não goza das propriedades **idempotente**, **comutativa** e **associativa**, pois, as tabelas-verdade das proposições $p \rightarrow p$ e p , $p \rightarrow q \wedge q$ e $q \rightarrow p$, $(p \rightarrow q) \rightarrow r$ e $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ não são **idênticas**.

5. NEGAÇÃO DA BICONDICIONAL

Como $p \leftrightarrow q \iff (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ (Cap. 6, §3, Ex. 5), temos:

$$p \leftrightarrow q \iff (\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee p)$$

e, portanto:

$$\begin{aligned} \sim(p \leftrightarrow q) &\iff \sim(\sim p \vee q) \vee \sim(\sim q \vee p) \\ \sim(p \leftrightarrow q) &\iff (\sim\sim p \wedge \sim q) \vee (\sim\sim q \wedge \sim p) \end{aligned}$$

ou seja:

$$\sim(p \leftrightarrow q) \iff (p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge q)$$

Esta equivalência também é demonstrada pelas tabelas-verdade das proposições $\sim(p \leftrightarrow q)$ e $(p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge q)$, que são **idênticas**:

\sim	(p	\iff	q)	(p	\wedge	$\sim q$)	\vee	($\sim p$	\wedge	q)
F	V	V	V	V	F	F	F	F	F	V
V	V	F	F	V	V	V	V	F	F	F
V	F	F	V	F	F	F	V	V	V	V
F	F	V	F	F	F	V	F	V	F	F

As tabelas-verdade das proposições $\sim(p \leftrightarrow q)$, $p \leftrightarrow \sim q$ e $\sim p \leftrightarrow q$ são **idênticas**:

p	q	$p \leftrightarrow q$	$\sim(p \leftrightarrow q)$	$\sim q$	$p \leftrightarrow \sim q$	$\sim p$	$\sim p \leftrightarrow q$
V	V	V	F	F	F	F	F
V	F	F	V	V	V	F	V
F	V	F	V	F	V	V	V
F	F	V	F	V	F	V	F

Portanto, subsistem as equivalências:

$$\sim(p \leftrightarrow q) \iff p \leftrightarrow \sim q \iff \sim p \leftrightarrow q$$

NOTA — A bicondicional $p \leftrightarrow q$ não goza da propriedade **idempotente**, pois, é imediato que **não são idênticas** as tabelas-verdade das proposições $p \leftrightarrow p$ e p , mas goza das propriedades **comutativa** e **associativa**.

EXERCÍCIOS

1. Demonstrar as propriedades **comutativa** e **associativa** da bicondicional, isto é:

$$(a) \quad p \leftrightarrow q \iff q \leftrightarrow p \quad (b) \quad (p \leftrightarrow q) \leftrightarrow r \iff p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r)$$

2. Demonstrar por tabelas-verdade as equivalências:

$$(a) \ p \rightarrow q \wedge r \iff (p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r) \quad (b) \ p \rightarrow q \vee r \iff (p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r)$$

Dem. – (a) Com efeito, são **idênticas** as tabelas-verdade das proposições $p \rightarrow q \wedge r$ e $(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)$:

p	\rightarrow	q	\wedge	r	$(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)$
V	\checkmark	V	V	V	V
V	F	V	F	F	F
V	F	F	V	V	V
V	F	F	F	F	F
F	V	V	V	F	V
F	V	V	F	F	F
F	V	F	V	F	F
F	V	F	F	F	F

(b) Analogamente, são **idênticas** as tabelas-verdade das proposições $p \rightarrow q \vee r$ e $(p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r)$:

p	\rightarrow	q	\vee	r	$(p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r)$
V	\checkmark	V	V	V	V
V	V	V	F	F	F
V	V	F	V	V	V
V	F	F	F	F	F
F	V	V	V	F	V
F	V	V	F	F	F
F	V	F	V	F	F
F	V	F	F	F	F

A equivalência (a) exprime que a condicional é distributiva à esquerda em relação à conjunção e a equivalência (b) exprime que a condicional é distributiva à esquerda em relação à disjunção.

A condicional não é distributiva à direita em relação a nenhuma dessas duas operações (conjunção e disjunção).

3. Dar a negação em linguagem corrente da proposição: "Rosas são vermelhas e violetas são azuis".

Resolução – Denotando por p a proposição "Rosas são vermelhas" e por q a proposição "Violetas são azuis", a proposição dada sob forma simbólica escreve-se " $p \wedge q$ ", cuja negação é " $\sim(p \wedge q) \iff \sim p \vee \sim q$ ". Logo, a negação da proposição dada em linguagem corrente é:

"Rosas não são vermelhas ou violetas não são azuis"

4. Dar a negação em linguagem corrente de cada uma das seguintes proposições:

- (a) É falso que não está frio ou que está chovendo.
- (b) Não é verdade que o pai de Marcos é pernambucano ou que a mãe é gaúcha.
- (c) Não é verdade que as vendas estão diminuindo e que os preços estão aumentando.
- (d) Não é verdade que Jorge estuda Física, mas não Química.

5. Demonstrar as seguintes Regras de DE MORGAN para três componentes:

- (a) $\sim(p \wedge q \wedge r) \iff \sim p \vee \sim q \vee \sim r$
- (b) $\sim(p \vee q \vee r) \iff \sim p \wedge \sim q \wedge \sim r$

6. Demonstrar por "Indução matemática" as seguintes "Propriedades distributivas generalizadas":

- (a) $p \wedge (q_1 \vee q_2 \vee \dots \vee q_n) \iff (p \wedge q_1) \vee (p \wedge q_2) \vee \dots \vee (p \wedge q_n)$
- (b) $p \vee (q_1 \wedge q_2 \wedge \dots \wedge q_n) \iff (p \vee q_1) \wedge (p \vee q_2) \wedge \dots \wedge (p \vee q_n)$

Capítulo 8

Método Dedutivo

1. Todas as implicações e equivalências foram demonstradas até aqui pelo “Método das tabelas-verdade”. Vamos agora exemplificar a demonstração de implicações e equivalências por um método mais eficiente, denominado “Método dedutivo”.

No emprego do “Método dedutivo” desempenham papel importante as equivalências relativas à “Álgebra das Proposições”, que, observamos, subsistem quando as proposições simples p , q , r , t (verdadeira) e c (falsa), que nelas figuram, são substituídas respectivamente por proposições compostas P , Q , R , T (tautologia) e C (contradição).

2. EXEMPLIFICAÇÃO

(1) Demonstrar as implicações:

$$(i) c \Rightarrow p$$

$$(ii) p \Rightarrow t$$

onde p é uma proposição qualquer e c e t são proposições cujos valores lógicos respectivos são F (falsidade) e V (verdade).

Dem. — Temos, sucessivamente:

$$(i) c \Rightarrow p \Leftrightarrow \neg c \vee p \Leftrightarrow t \vee p \Leftrightarrow t$$

$$(ii) p \Rightarrow t \Leftrightarrow \neg p \vee t \Leftrightarrow t$$

Observe-se que as tabelas-verdade de $c \Rightarrow p$ e $p \Rightarrow t$ mostram que estas condicionais são tautológicas:

p	c	t	$c \Rightarrow p$	$p \Rightarrow t$
V	F	V	V	V
F	F	V	V	V

INICIAÇÃO À LÓGICA MATEMÁTICA

79

(2) Demonstrar a implicação: $p \wedge q \Rightarrow p$ (Simplificação)

Dem. — Temos, sucessivamente:

$$\begin{aligned} p \wedge q \Rightarrow p &\Leftrightarrow \neg(p \wedge q) \vee p \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q) \vee p \Leftrightarrow (\neg p \vee p) \vee \neg q \\ &\Leftrightarrow T \vee \neg q \Leftrightarrow T \end{aligned}$$

(3) Demonstrar a implicação: $p \Rightarrow p \vee q$ (Adição)

Dem. — Temos, sucessivamente:

$$p \Rightarrow p \vee q \Leftrightarrow \neg p \vee (p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p \vee p) \vee q \Leftrightarrow T \vee q \Leftrightarrow T$$

(4) Demonstrar a implicação: $(p \rightarrow q) \wedge p \Rightarrow q$ (Modus ponens)

Dem. — Temos, sucessivamente:

$$\begin{aligned} (p \rightarrow q) \wedge p &\Leftrightarrow p \wedge (\neg p \vee q) \Leftrightarrow (p \wedge \neg p) \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow C \vee (p \wedge q) \\ &\Leftrightarrow p \wedge q \Rightarrow q \end{aligned}$$

(5) Demonstrar a implicação: $(p \rightarrow q) \wedge \neg q \Rightarrow \neg p$ (Modus tollens)

Dem. — Temos, sucessivamente:

$$\begin{aligned} (p \rightarrow q) \wedge \neg q &\Leftrightarrow (\neg p \vee q) \wedge \neg q \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q) \vee (q \vee \neg q) \\ &\Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q) \vee C \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q \Rightarrow \neg p \end{aligned}$$

(6) Demonstrar a implicação: $(p \vee q) \wedge \neg p \Rightarrow q$ (Sílogismo disjuntivo)

Dem. — Temos, sucessivamente:

$$(p \vee q) \wedge \neg p \Leftrightarrow (p \wedge \neg p) \vee (q \wedge \neg p) \Leftrightarrow C \vee (q \wedge \neg p) \Leftrightarrow q \wedge \neg p \Rightarrow q$$

(7) Demonstrar a implicação: $p \wedge q \Rightarrow p \vee q$

Dem. — Temos, sucessivamente:

$$\begin{aligned} p \wedge q \Rightarrow p \vee q &\Leftrightarrow \neg(p \wedge q) \vee (p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q) \vee (p \vee q) \\ &\Leftrightarrow (\neg p \vee p) \vee (\neg q \vee q) \Leftrightarrow T \vee T \Leftrightarrow T \end{aligned}$$

(8) Demonstrar a implicação: $p \Rightarrow q \Rightarrow p$

Dem. — Temos, sucessivamente:

$$\begin{aligned} p \Rightarrow (q \Rightarrow p) &\Leftrightarrow \neg p \vee (q \Rightarrow p) \Leftrightarrow \neg p \vee (\neg q \vee p) \Leftrightarrow (\neg p \vee p) \vee \neg q \\ &\Leftrightarrow T \vee \neg q \Leftrightarrow T \end{aligned}$$

(9) Demonstrar a implicação: $p \Rightarrow \neg p \Rightarrow q$

Dem. — Temos, sucessivamente:

$$\begin{aligned} p \Rightarrow (\neg p \Rightarrow q) &\Leftrightarrow \neg p \vee (\neg p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \neg p \vee (\neg \neg p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \vee (p \vee q) \\ &\Leftrightarrow (\neg p \vee p) \vee q \Leftrightarrow T \vee q \Leftrightarrow T \end{aligned}$$

(10) Demonstrar a implicação: $p \rightarrow q \Rightarrow p \wedge r \rightarrow q$

Dem. — Temos, sucessivamente:

$$\begin{aligned} (p \rightarrow q) \rightarrow (p \wedge r \rightarrow q) &\Leftrightarrow \sim(p \rightarrow q) \vee (p \wedge r \rightarrow q) \\ &\Leftrightarrow \sim(\sim p \vee q) \vee (\sim(p \wedge r) \vee q) \\ &\Leftrightarrow (\sim\sim p \wedge \sim q) \vee ((\sim p \vee \sim r) \vee q) \\ &\Leftrightarrow (p \wedge \sim q) \vee ((\sim p \vee q) \vee \sim r) \\ &\Leftrightarrow (p \wedge \sim q) \vee \sim(p \wedge \sim q) \vee \sim r \\ &\Leftrightarrow T \vee \sim r \Leftrightarrow T \end{aligned}$$

• (11) Demonstrar a equivalência: $p \rightarrow q \Leftrightarrow p \wedge \sim q \rightarrow c$ (Redução a absurdo)

Dem. — Temos, sucessivamente:

$$\begin{aligned} p \wedge \sim q \rightarrow c &\Leftrightarrow \sim(p \wedge \sim q) \vee c \Leftrightarrow \sim(p \wedge \sim q) \Leftrightarrow (\sim p \vee \sim\sim q) \\ &\Leftrightarrow \sim p \vee q \Leftrightarrow p \rightarrow q \end{aligned}$$

(12) Demonstrar a equivalência: $p \rightarrow q \Leftrightarrow p \vee q \rightarrow q$

Dem. — Temos, sucessivamente:

$$\begin{aligned} p \vee q \rightarrow q &\Leftrightarrow \sim(p \vee q) \vee q \Leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q) \vee q \Leftrightarrow (\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee q) \\ &\Leftrightarrow (\sim p \vee q) \wedge T \Leftrightarrow \sim p \vee q \Leftrightarrow p \rightarrow q \end{aligned}$$

(13) Demonstrar a equivalência: $(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow \sim q) \Leftrightarrow \sim p$

Dem. — Temos, sucessivamente:

$$\begin{aligned} (p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow \sim q) &\Leftrightarrow (\sim p \vee q) \wedge (\sim p \vee \sim q) \Leftrightarrow \sim p \vee (q \wedge \sim q) \\ &\Leftrightarrow \sim p \vee C \Leftrightarrow \sim p \end{aligned}$$

(14) Demonstrar a equivalência: $p \wedge q \rightarrow r \Leftrightarrow p \rightarrow (q \rightarrow r)$ (Exportação-Importação)

Dem. — Temos, sucessivamente:

$$\begin{aligned} p \rightarrow (q \rightarrow r) &\Leftrightarrow \sim p \vee (q \rightarrow r) \Leftrightarrow \sim p \vee (\sim q \vee r) \Leftrightarrow (\sim p \vee \sim q) \vee r \\ &\Leftrightarrow \sim(p \wedge q) \vee r \Leftrightarrow p \wedge q \rightarrow r \end{aligned}$$

(15) Demonstrar a equivalência: $(p \rightarrow i) \wedge (q \rightarrow r) \Leftrightarrow p \vee q \rightarrow r$

Dem. — Temos, sucessivamente:

$$\begin{aligned} (p \rightarrow i) \wedge (q \rightarrow r) &\Leftrightarrow (\sim p \vee i) \wedge (\sim q \vee r) \Leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q) \vee r \\ &\Leftrightarrow \sim(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee q \rightarrow r \end{aligned}$$

(16) Demonstrar a equivalência: $(p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r) \Leftrightarrow p \rightarrow q \vee r$

Dem. — Temos, sucessivamente:

$$\begin{aligned} (p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r) &\Leftrightarrow (\sim p \vee q) \vee (\sim p \vee r) \Leftrightarrow (\sim p \vee \sim p) \vee (q \vee r) \\ &\Leftrightarrow \sim p \vee (q \vee r) \Leftrightarrow p \rightarrow q \vee r \end{aligned}$$

(17) Demonstrar a equivalência: $(p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow s) \Leftrightarrow p \wedge q \rightarrow r \vee s$

Dem. — Temos, sucessivamente:

$$\begin{aligned} (p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow s) &\Leftrightarrow (\sim p \vee r) \vee (\sim q \vee s) \Leftrightarrow (\sim p \vee \sim q) \vee (r \vee s) \\ &\Leftrightarrow \sim(p \wedge q) \vee (r \vee s) \Leftrightarrow p \wedge q \rightarrow r \vee s \end{aligned}$$

(18) Demonstrar as equivalências:

- (a) $\sim p \Leftrightarrow p \downarrow p$
- (b) $p \wedge q \Leftrightarrow (p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q)$
- (c) $p \vee q \Leftrightarrow (p \downarrow q) \downarrow (p \downarrow q)$
- (d) $p \rightarrow q \Leftrightarrow ((p \downarrow p) \downarrow q) \downarrow ((p \downarrow p) \downarrow q)$

Dem. — Temos, sucessivamente:

$$\begin{aligned} (a) \quad \sim p &\Leftrightarrow \sim p \wedge \sim p \Leftrightarrow p \downarrow p \\ (b) \quad p \wedge q &\Leftrightarrow \sim \sim p \wedge \sim \sim q \Leftrightarrow \sim p \downarrow \sim q \Leftrightarrow (p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q) \\ (c) \quad p \vee q &\Leftrightarrow \sim(\sim p \wedge \sim q) \Leftrightarrow \sim(p \downarrow q) \Leftrightarrow (p \downarrow q) \downarrow (p \downarrow q) \\ (d) \quad p \rightarrow q &\Leftrightarrow \sim p \vee q \Leftrightarrow \sim(p \wedge \sim q) \Leftrightarrow \sim(\sim p \wedge \sim q) \Leftrightarrow \sim(\sim p \downarrow q) \\ &\Leftrightarrow (\sim p \downarrow q) \downarrow (\sim p \downarrow q) \Leftrightarrow ((p \downarrow p) \downarrow q) \downarrow ((p \downarrow p) \downarrow q) \end{aligned}$$

(19) Demonstrar as equivalências:

- (a) $\sim p \Leftrightarrow p \uparrow p$
- (b) $p \wedge q \Leftrightarrow (p \uparrow q) \uparrow (p \uparrow q)$
- (c) $p \vee q \Leftrightarrow (p \uparrow p) \uparrow (q \uparrow q)$
- (d) $p \rightarrow q \Leftrightarrow p \uparrow (q \uparrow q)$

Dem. — Temos, sucessivamente:

$$\begin{aligned} (a) \quad \sim p &\Leftrightarrow \sim p \vee \sim p \Leftrightarrow p \uparrow p \\ (b) \quad p \wedge q &\Leftrightarrow \sim(\sim p \vee \sim q) \Leftrightarrow \sim(p \uparrow q) \Leftrightarrow (p \uparrow q) \uparrow (p \uparrow q) \\ (c) \quad p \vee q &\Leftrightarrow \sim \sim p \vee \sim \sim q \Leftrightarrow \sim p \uparrow \sim q \Leftrightarrow (p \uparrow p) \uparrow (q \uparrow q) \\ (d) \quad p \rightarrow q &\Leftrightarrow \sim p \vee q \Leftrightarrow \sim p \vee \sim \sim q \Leftrightarrow p \uparrow \sim q \Leftrightarrow p \uparrow (q \uparrow q) \end{aligned}$$

3. REDUÇÃO DO NÚMERO DE CONECTIVOS

Teorema — Entre os cinco conectivos fundamentais (\sim , \wedge , \vee , \rightarrow , \leftrightarrow), três exprimem-se em termos de apenas dois dos seguintes pares:

$$(1) \sim \text{ e } \vee \quad (2) \sim \text{ e } \wedge \quad (3) \sim \text{ e } \rightarrow$$

Dem. — Com efeito:

(1) \wedge , \rightarrow , \leftrightarrow \Leftrightarrow exprimem-se em termos de \sim e \vee :

$$p \wedge q \Leftrightarrow \sim \sim p \wedge \sim \sim q \Leftrightarrow \sim(\sim p \vee \sim q)$$

$$p \rightarrow q \Leftrightarrow \sim p \vee q$$

$$p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p) \Leftrightarrow \sim(\sim p \vee q) \vee \sim(\sim q \vee p)$$

(2) \vee , \rightarrow e \leftrightarrow exprimem-se em termos de \sim e \wedge :

$$p \vee q \Leftrightarrow \sim \sim p \vee \sim \sim q \Leftrightarrow \sim(\sim p \wedge \sim q)$$

$$p \rightarrow q \Leftrightarrow \sim p \vee q \Leftrightarrow \sim(p \wedge \sim q)$$

$$p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p) \Leftrightarrow \sim(p \wedge \sim q) \wedge \sim(\sim p \wedge q)$$

(3) \wedge , \vee e \rightarrow exprimem-se em termos de \sim e \rightarrow :

$$p \wedge q \Leftrightarrow \sim(\sim p \vee \sim q) \Leftrightarrow \sim(p \rightarrow \sim q)$$

$$p \vee q \Leftrightarrow \sim \sim p \vee q \Leftrightarrow \sim p \rightarrow q$$

$$p \rightarrow q \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p) \Leftrightarrow \sim((p \rightarrow q) \rightarrow \sim(q \rightarrow p))$$

Os conectivos \wedge , \vee e \rightarrow não se exprimem em termos de \sim e \leftrightarrow .

O conectivo \wedge exprime-se em função **única** de \rightarrow pela equivalência:
 $p \wedge q \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \rightarrow q$.

Todos os conectivos exprimem-se em termos de um único: \downarrow ou \uparrow , conforme mostrou A. M. SCHEFFER em 1913 (§2, Ex. 18 e 19).

4. FORMA NORMAL DAS PROPOSIÇÕES

Definição — Diz-se que uma proposição está na forma normal (FN) se e somente se, quando muito, contém os conectivos \sim , \wedge e \vee .

Exemplificando, estão na forma normal (FN) as seguintes proposições:

$$\sim p \wedge \sim q, \quad \sim(\sim p \vee \sim q), \quad (p \wedge q) \vee (\sim q \vee r)$$

Toda a proposição pode ser levada para uma FN equivalente pela eliminação dos conectivos \rightarrow e \leftrightarrow , se existirem, isto é, pela substituição de $p \rightarrow q$ por $\sim p \vee q$ e de $p \leftrightarrow q$ por $(\sim p \vee q) \wedge (p \vee \sim q)$.

Há duas espécies de FN para uma proposição: a forma normal conjuntiva (FNC) e a forma normal disjuntiva (FND), que a seguir vamos definir e exemplificar.

5. FORMA NORMAL CONJUNTIVA

Definição — Diz-se que uma proposição está na forma normal conjuntiva (FNC) se e somente se são verificadas as seguintes condições:

- (1) Contém, quando muito, os conectivos \sim , \wedge e \vee ;
- (2) \sim não aparece repetido (como $\sim\sim$) e não tem alcance sobre \wedge e \vee (isto é, só incide sobre letras proposicionais);
- (3) \vee não tem alcance sobre \wedge (isto é, não há componentes do tipo $p \vee (q \wedge r)$).

Exemplificando, estão na FNC as seguintes proposições:

$$\sim p \vee \sim q, \quad \sim p \wedge q \wedge r, \quad (\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee \sim r)$$

Para toda proposição pode-se determinar uma FNC equivalente mediante as seguintes transformações:

- (1) Eliminando os conectivos \rightarrow e \leftrightarrow mediante a substituição de $p \rightarrow q$ por $\sim p \vee q$ e de $p \leftrightarrow q$ por $(\sim p \vee q) \wedge (p \vee \sim q)$;
- (2) Eliminando negações repetidas e parêntesis precedidos de \sim pelas regras da “Dupla negação” e de “DE MORGAN”;
- (3) Substituindo $p \vee (q \wedge r)$ e $(p \wedge q) \vee r$ pelas suas equivalentes respectivas $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$ e $(p \vee r) \wedge (q \vee r)$.

Exemplos:

- (1) Determinar a FNC da proposição $\sim(((p \vee q) \wedge \sim q) \vee (q \wedge r))$

Resolução — Temos, sucessivamente:

$$\begin{aligned} \sim((p \vee q) \wedge \sim q) \wedge \sim(q \wedge r) &\Leftrightarrow (\sim(p \vee q) \vee \sim\sim q) \wedge (\sim q \vee \sim r) \Leftrightarrow \\ ((\sim p \wedge \sim q) \vee q) \wedge (\sim q \vee \sim r) &\Leftrightarrow (\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee q) \wedge (\sim q \vee \sim r) \end{aligned}$$

Observe-se que uma outra FNC da proposição dada é:

$$(\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee \sim r)$$

equivalente à anterior. Assim sendo, uma mesma proposição pode ter mais de uma FNC, mas equivalentes.

- (2) Determinar a FNC da proposição: $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\sim q \rightarrow \sim p)$

Resolução — Temos, sucessivamente:

$$\begin{aligned} (\sim p \vee q) \leftrightarrow (\sim \sim q \vee \sim p) &\Leftrightarrow (\sim p \vee q) \leftrightarrow (q \vee \sim p) \Leftrightarrow \\ ((\sim(\sim p \vee q) \vee (q \vee \sim p)) \wedge ((\sim p \vee q) \vee \sim(q \vee \sim p))) &\Leftrightarrow \\ (((\sim \sim p \wedge \sim q) \vee (q \vee \sim p)) \wedge ((\sim p \vee q) \vee (\sim q \wedge \sim p))) &\Leftrightarrow \\ ((p \wedge \sim q) \vee (q \vee \sim p)) \wedge ((\sim p \vee q) \vee (\sim q \wedge p)) &\Leftrightarrow \\ (p \vee q \vee \sim p) \wedge (\sim q \vee q \vee \sim p) \wedge (\sim p \vee q \vee \sim q) \wedge (\sim p \vee q \vee p) & \end{aligned}$$

Observe-se que a proposição dada é tautológica, pois, cada elemento da sua FNC é tautológico. Realmente, o 1º elemento contém p e $\sim p$, o 2º elemento contém q e $\sim q$, o 3º elemento contém q e $\sim q$, e, finalmente, o 4º elemento contém p e $\sim p$.

De modo geral, é tautológica toda a proposição cujos elementos da sua FNC encerram, cada um deles, uma proposição e a sua negação, isto é, cujos elementos são todos tautológicos.

- (3) Determinar a FNC da proposição: $p \leftrightarrow q \vee \sim r$

Resolução – Temos, sucessivamente:

$$\begin{aligned} & (p \rightarrow (q \vee \sim r)) \wedge ((q \vee \sim r) \rightarrow p) \\ \Leftrightarrow & (\sim p \vee q \vee \sim r) \wedge (\sim(q \vee \sim r) \vee p) \\ \Leftrightarrow & (\sim p \vee q \vee \sim r) \wedge ((\sim q \wedge r) \vee p) \\ \Leftrightarrow & (\sim p \vee q \vee \sim r) \wedge (p \vee \sim q) \wedge (p \vee r) \end{aligned}$$

6. FORMA NORMAL DISJUNTIVA

Definição – Diz-se que uma proposição está na **forma normal disjuntiva** (FND) se e somente se são verificadas as seguintes condições:

- (1) Contém, quando muito, os conectivos \sim , \wedge e \vee ;
- (2) \sim não aparece repetido (como $\sim\sim$) e não tem alcance sobre \wedge e \vee (isto é, só incide sobre letras proposicionais);
- (3) \wedge não tem alcance sobre \vee (isto é, não há componentes do tipo $p \wedge (q \vee r)$).

Exemplificando, estão na FND as seguintes proposições:

$$\sim p \vee q, \quad p \vee (\sim q \wedge r), \quad (p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge \sim q \wedge r)$$

Para toda proposição pode-se determinar uma FND equivalente mediante as seguintes transformações:

- (1) Eliminando os conectivos \rightarrow e \leftrightarrow mediante a substituição de $p \rightarrow q$ por $\sim p \vee q$ e de $p \leftrightarrow q$ por $(\sim p \vee q) \wedge (p \vee \sim q)$;
- (2) Eliminando negações repetidas e parêntesis precedidos de \sim pelas regras da “Dupla negação” e de “DE MORGAN”;
- (3) Substituindo $p \wedge (q \vee r)$ e $(p \vee q) \wedge r$ pelas suas equivalentes respectivas $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ e $(p \wedge r) \vee (q \wedge r)$.

Exemplos:

- (1) Determinar a FND da proposição: $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

Resolução – Temos, sucessivamente:

$$\begin{aligned} & (\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee p) \Leftrightarrow ((\sim p \vee q) \wedge \sim q) \vee ((\sim p \vee q) \wedge p) \Leftrightarrow \\ & (\sim p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge p) \vee (p \wedge q) \end{aligned}$$

Observe-se que uma outra FND da proposição dada é $(\sim p \wedge \sim q) \vee (p \wedge q)$, equivalente à anterior. Portanto, uma mesma proposição pode ter mais de uma FND, mas equivalentes.

- (2) Determinar a FND da proposição: $\sim(((p \vee q) \wedge \sim q) \vee (q \wedge r))$

Resolução – Temos, sucessivamente:

$$\begin{aligned} & \sim((p \vee q) \wedge \sim q) \wedge \sim(q \wedge r) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow & (\sim(p \vee q) \vee \sim\sim q) \wedge (\sim q \vee \sim r) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow & ((\sim p \wedge \sim q) \vee q) \wedge (\sim q \vee \sim r) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow & (((\sim p \wedge \sim q) \vee q) \wedge \sim q) \vee (((\sim p \wedge \sim q) \vee q) \wedge \sim r) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow & (\sim p \wedge \sim q \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge \sim q \wedge \sim r) \vee (q \wedge \sim r) \end{aligned}$$

Observe-se que uma outra FND da proposição dada é:

$$(\sim p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge \sim q \wedge \sim r) \vee (q \wedge \sim r)$$

equivalente à anterior.

Importa notar que é contraválida toda a proposição cujos elementos da sua FND encerram, cada um deles, uma proposição e a sua negação, isto é, cujos elementos são todos contraválidos.

7. PRINCÍPIO DE DUALIDADE

Seja P uma proposição que só contém os conectivos \sim , \wedge e \vee . A proposição que resulta de P trocando cada símbolo \wedge por \vee e cada símbolo \vee por \wedge chama-se a dual de P . Assim, p. ex., a dual de $\sim((p \wedge q) \vee \sim r)$ é $\sim((p \vee q) \wedge \sim r)$.

Princípio de dualidade: Se P e Q são proposições equivalentes que só contêm os conectivos \sim , \wedge e \vee , então as suas duals respectivas P_1 e Q_1 também são equivalentes.

Assim, p. ex., da equivalência $p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$ deduz-se, pelo Princípio de dualidade, a equivalência $p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$.

Analogamente, a partir de $(p \wedge \sim p) \vee q \Leftrightarrow q$ deduz-se, pelo Princípio de dualidade: $(p \vee \sim p) \wedge q \Leftrightarrow q$.

EXERCÍCIOS

1. Demonstrar as equivalências:

$$(a) \quad p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p \quad (b) \quad p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$$

Dem. – Temos, sucessivamente:

$$\begin{aligned} (a) \quad p \wedge (p \vee q) &\Leftrightarrow (p \vee c) \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p \vee (c \wedge q) \Leftrightarrow p \vee c \Leftrightarrow p \\ (b) \quad p \vee (p \wedge q) &\Leftrightarrow (p \wedge t) \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p \wedge (t \vee q) \Leftrightarrow p \wedge t \Leftrightarrow p \end{aligned}$$

2. Simplificar as proposições:

$$(a) \sim(\sim p \rightarrow \sim q) \quad (b) \sim(p \vee q) \vee (\sim p \wedge q)$$

Resolução – Temos, sucessivamente:

$$\begin{aligned} (a) \sim(\sim p \rightarrow \sim q) &\iff \sim(\sim\sim p \vee \sim q) \iff \sim(p \vee \sim q) \iff \sim p \wedge q \\ (b) \sim(p \vee q) \vee (\sim p \wedge q) &\iff (\sim p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge q) \iff \sim p \wedge (\sim q \vee q) \\ &\iff \sim p \wedge T \iff \sim p \end{aligned}$$

3. Simplificar as proposições:

(a) $\sim(p \vee \sim q)$	(b) $\sim(\sim p \wedge q)$
(c) $\sim(\sim p \vee \sim q)$	(d) $(p \vee q) \wedge \sim p$
(e) $(p \rightarrow q) \wedge (\sim p \rightarrow q)$	(f) $p \wedge (p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow \sim q)$

4. Demonstrar a equivalência: $p \rightarrow q \iff ((p \uparrow p) \uparrow (p \uparrow p)) \uparrow (q \uparrow q)$

5. Usar o “Método dedutivo” para demonstrar:

(a) $p \wedge \sim p \Rightarrow q$	(b) $\sim p \rightarrow p \iff p$
(c) $p \rightarrow p \wedge q \iff p \rightarrow q$	(d) $(p \rightarrow q) \rightarrow q \iff p \vee q$
(e) $(p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r) \iff p \wedge q \rightarrow r$	
(f) $(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r) \iff p \rightarrow q \wedge r$	

6. Demonstrar: $p \uparrow q \iff ((p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q)) \downarrow ((p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q))$

7. Determinar uma forma normal conjuntiva (FNC) equivalente para cada uma das seguintes proposições:

(a) $p \rightarrow q$	(b) $p \rightarrow \sim p$
(c) $p \leftrightarrow \sim p$	(d) $p \vee \sim p$
(e) $p \uparrow q$	(f) $p \uparrow p$
(g) $p \uparrow \sim p$	(h) $p \downarrow q$
(i) $(p \wedge \sim p) \downarrow (q \wedge \sim q)$	(j) $(\sim p \wedge q) \vee q$
(k) $(p \uparrow q) \leftrightarrow p$	(l) $\sim p \downarrow (q \vee p)$
(m) $p \uparrow \sim(q \vee r)$	(n) $(\sim(\sim p \uparrow \sim q)) \downarrow (r \rightarrow \sim p)$

8. Determinar uma forma normal disjuntiva (FND) equivalente para cada uma das seguintes proposições:

(a) $\sim(\sim p \vee \sim q)$	(b) $\sim(p \rightarrow q)$
(c) $(p \rightarrow q) \wedge \sim p$	(d) $\sim(p \vee q)$
(e) $(p \rightarrow q) \vee \sim p$	(f) $\sim(p \wedge q)$
(g) $p \vee \sim p$	(h) $p \leftrightarrow \sim p$
(i) $p \uparrow q$	(j) $p \downarrow q$
(k) $p \uparrow p$	(l) $p \uparrow \sim p$

Capítulo 9

Argumentos. Regras de Inferência

1. DEFINIÇÃO DE ARGUMENTO

Sejam P_1, P_2, \dots, P_n ($n \geq 1$) e Q proposições quaisquer, simples ou compostas.

Definição – Chama-se argumento toda a afirmação de que uma dada sequência finita P_1, P_2, \dots, P_n ($n \geq 1$) de proposições tem como consequência ou acarreta uma proposição final Q .

As proposições P_1, P_2, \dots, P_n dizem-se as premissas do argumento, e a proposição final Q diz-se a conclusão do argumento.

Um argumento de premissas P_1, P_2, \dots, P_n e de conclusão Q indica-se por:

$$P_1, P_2, \dots, P_n \vdash Q$$

e se lê de uma das seguintes maneiras:

- (i) “ P_1, P_2, \dots, P_n acarretam Q ”
- (ii) “ Q decorre de P_1, P_2, \dots, P_n ”
- (iii) “ Q se deduz de P_1, P_2, \dots, P_n ”
- (iv) “ Q se infere de P_1, P_2, \dots, P_n ”

Um argumento que consiste em duas premissas e uma conclusão chama-se silogismo.

2. VALIDADE DE UM ARGUMENTO

Definição – Um argumento $P_1, P_2, \dots, P_n \vdash Q$ diz-se válido se e somente se a conclusão Q é verdadeira todas as vezes que as premissas P_1, P_2, \dots, P_n são verdadeiras.

Em outros termos, um argumento $P_1, P_2, \dots, P_n \vdash Q$ é válido se e somente se, para V o valor lógico da conclusão Q , todas as vezes que as premissas P_1, P_2, \dots, P_n tiverem o valor lógico V .

Portanto, todo argumento válido goza da seguinte propriedade característica: **A verdade das premissas é incompatível com a falsidade da conclusão.**

Um argumento não-válido diz-se um **sofisma**.

Deste modo, todo argumento tem um valor lógico, digamos V se é válido (correto, legítimo) ou F se é um sofisma (incorrecto, ilegítimo).

As premissas dos argumentos são verdadeiras ou, pelo menos admitidas como tal. Aliás, a Lógica só se preocupa com a **validade** dos argumentos e não com a **verdade** ou a **falsidade** das premissas e das conclusões.

A validade de um argumento depende exclusivamente da relação existente entre as premissas e a conclusão. Portanto, afirmar que um dado argumento é válido significa afirmar que as premissas estão de tal modo relacionadas com a conclusão que não é possível ter a conclusão falsa se as premissas são verdadeiras.

3. CRITÉRIO DE VALIDADE DE UM ARGUMENTO

Teorema — Um argumento $P_1, P_2, \dots, P_n \vdash Q$ é válido se e somente se a condicional:

$$(P_1 \wedge P_2 \wedge \dots \wedge P_n) \rightarrow Q \quad (1)$$

é tautológica.

Dem. — Com efeito, as premissas P_1, P_2, \dots, P_n são todas verdadeiras se e somente se a proposição $P_1 \wedge P_2 \wedge \dots \wedge P_n$ é verdadeira. Logo, o argumento $P_1, P_2, \dots, P_n \vdash Q$ é válido se e somente se a conclusão Q é verdadeira todas as vezes que a proposição $P_1 \wedge P_2 \wedge \dots \wedge P_n$ é verdadeira, ou seja, se e somente se a proposição $P_1 \wedge P_2 \wedge \dots \wedge P_n$ implica logicamente a conclusão Q : $P_1 \wedge P_2 \wedge \dots \wedge P_n \rightarrow Q$ ou, o que é equivalente, se a condicional (1) é tautológica.

NOTA — Se o argumento

$$P_1(p, q, r, \dots), \dots, P_n(p, q, r, \dots) \vdash Q(p, q, r, \dots)$$

é válido, então o argumento da “mesma forma”:

$$P_1(R, S, T, \dots), \dots, P_n(R, S, T, \dots) \vdash Q(R, S, T, \dots)$$

também é válido, quaisquer que sejam as proposições R, S, T, \dots

Exemplificando, do argumento válido $p \vdash p \vee q$ (1) segue-se a validade dos argumentos:

$$\begin{aligned} (\sim p \wedge r) &\vdash (\sim p \wedge r) \vee (\sim s \rightarrow r); \\ (p \rightarrow r \vee s) &\vdash (p \rightarrow r \vee s) \vee (\sim r \wedge s) \end{aligned}$$

pois, ambos têm a mesma forma de (1).

Portanto, a validade ou não-validade de um argumento depende apenas da sua **forma** e não de seu conteúdo ou da verdade e falsidade das proposições que o integram. Argumentos diversos podem ter a mesma forma, e como é a forma que

- determina a validade, é lícito falar da validade de uma dada forma ao invés de falar da validade de um dado argumento. E afirmar que uma dada forma é válida equivale a asseverar que não existe argumento algum dessa forma com premissas verdadeiras e uma conclusão falsa, isto é, todo argumento de forma válida é um argumento válido. Vice-versa, dizer que um argumento é válido equivale a dizer que tem forma válida.

4. CONDICIONAL ASSOCIADA A UM ARGUMENTO

Consoante o Teorema anterior (§3), dado um argumento qualquer:

$$P_1, P_2, \dots, P_n \vdash Q$$

a este argumento corresponde a condicional:

$$(P_1 \wedge P_2 \wedge \dots \wedge P_n) \rightarrow Q$$

cujo antecedente é a conjunção das premissas e cujo consequente é a conclusão, denominada “condicional associada” ao argumento dado.

Reciprocamente, a toda condicional corresponde um argumento cujas premissas são as diferentes proposições cuja conjunção formam o antecedente e cuja conclusão é o consequente.

Exemplificando, a “condicional associada” ao argumento:

$$p \wedge \sim q, \quad p \rightarrow \sim r, \quad q \vee \sim s \vdash \sim(r \vee s)$$

é

$$(p \wedge \sim q) \wedge (p \rightarrow \sim r) \wedge (q \vee \sim s) \rightarrow \sim(r \vee s)$$

e o “argumento correspondente” à condicional:

$$(p \rightarrow q \vee r) \wedge \sim s \wedge (q \vee r \rightarrow s) \rightarrow (s \rightarrow p \wedge \sim q)$$

é

$$p \rightarrow q \vee r, \quad \sim s, \quad q \vee r \rightarrow s \vdash s \rightarrow p \wedge \sim q$$

5. ARGUMENTOS VÁLIDOS FUNDAMENTAIS

São argumentos válidos fundamentais ou básicos (de uso corrente) os constantes da seguinte lista:

I. Adição (AD):

$$(i) \ p \vdash p \vee q; \quad (ii) \ p \vdash q \vee p$$

II. Simplificação (SIMP):

$$(i) \ p \wedge q \vdash p; \quad (ii) \ p \wedge q \vdash q$$

III. Conjunção (CONJ):

$$(i) \ p, q \vdash p \wedge q; \quad (ii) \ p, q \vdash q \wedge p$$

IV. Absorção (ABS):

$$p \rightarrow q \vdash p \rightarrow (p \wedge q)$$

V. Modus ponens (MP):

$$p \rightarrow q, \quad p \vdash q$$

VI. Modus tollens (MT):

$$p \rightarrow q, \quad \neg q \vdash \neg p$$

VII. Silogismo disjuntivo (SD):

$$(i) \ p \vee q, \ \neg p \vdash q; \quad (ii) \ p \vee q, \ \neg q \vdash p$$

VIII. Silogismo hipotético (SH):

$$p \rightarrow q, \quad q \rightarrow r \vdash p \rightarrow r$$

IX. Dilema construtivo (DC):

$$p \rightarrow q, \quad r \rightarrow s, \quad p \vee r \vdash q \vee s$$

X. Dilema destrutivo (DD):

$$p \rightarrow q, \quad r \rightarrow s, \quad \neg q \vee \neg s \vdash \neg p \vee \neg r$$

A validade destes dez argumentos é consequência imediata das tabelas-verdade construídas no Capítulo 5 e do Teorema anterior.

6. REGRAS DE INFERÊNCIA

Os argumentos básicos da lista anterior são usados para fazer “inferências”, isto é, executar os “passos” de uma dedução ou demonstração, e por isso chamam-se, também, regras de inferência, sendo habitual escrevê-los na forma padronizada abaixo indicada — colocando as premissas sobre um traço horizontal e, em seguida, a conclusão sob o mesmo traço.

I. Regra da Adição (AD):

$$(i) \frac{p}{p \vee q} \quad (ii) \frac{p}{q \vee p}$$

II. Regra de Simplificação (SIMP):

$$(i) \frac{p \wedge q}{p} \quad (ii) \frac{p \wedge q}{q}$$

III. Regra da Conjunção (CONJ):

$$(i) \frac{p}{\frac{q}{p \wedge q}} \quad (ii) \frac{p}{\frac{q}{q \wedge p}}$$

IV. Regra da Absorção (ABS):

$$\frac{p \rightarrow q}{p \rightarrow (p \wedge q)}$$

V. Regra Modus ponens (MP):

$$\frac{p \rightarrow q}{\frac{p}{q}}$$

VI. Regra Modus tollens (MT):

$$\frac{p \rightarrow q}{\begin{array}{c} \neg q \\ \hline \neg p \end{array}}$$

VII. Regra do Sílogismo disjuntivo (SD):

$$\frac{\begin{array}{c} (i) \quad p \vee q \\ \neg p \end{array}}{q}$$

$$\frac{\begin{array}{c} (ii) \quad p \vee q \\ \neg q \end{array}}{p}$$

VIII. Regra do Sílogismo hipotético (SH):

$$\frac{\begin{array}{c} p \rightarrow q \\ q \rightarrow r \end{array}}{p \rightarrow r}$$

IX. Regra do Dilema construtivo (DC):

$$\frac{\begin{array}{c} p \rightarrow q \\ r \rightarrow s \\ p \vee r \end{array}}{q \vee s}$$

X. Regra do Dilema destrutivo (DD):

$$\frac{\begin{array}{c} p \rightarrow q \\ r \rightarrow s \\ \neg q \vee \neg s \end{array}}{\neg p \vee \neg r}$$

Com o auxílio destas dez regras de inferência pode-se demonstrar a validade de um grande número de argumentos mais complexos.

7. EXEMPLOS DO USO DAS REGRAS DE INFERÊNCIA

Damos a seguir exemplos simples do uso de cada uma das regras de inferência na dedução de conclusões a partir de premissas dadas.

I. Regra da Adição — Dada uma proposição p , dela se pode deduzir a sua disjunção com qualquer outra proposição, isto é, deduzir $p \vee q$, ou $p \vee r$, ou $s \vee p$, ou $t \vee p$, etc.

Exemplos:

$$(a) \frac{\begin{array}{c} (1) \quad p \quad P \\ (2) \quad p \vee \neg q \end{array}}{(2)}$$

$$(b) \frac{\begin{array}{c} (1) \quad \neg p \quad P \\ (2) \quad q \vee \neg p \end{array}}{(2)}$$

$$(c) \frac{\begin{array}{c} (1) \quad p \wedge q \quad P \\ (2) \quad (p \wedge q) \vee r \end{array}}{(2)}$$

$$(d) \frac{\begin{array}{c} (1) \quad p \vee q \quad P \\ (2) \quad (r \wedge s) \vee (p \vee q) \end{array}}{(2)}$$

$$(e) \frac{\begin{array}{c} (1) \quad x \neq 0 \quad P \\ x \neq 0 \vee x \neq 1 \end{array}}{(2)}$$

$$(f) \frac{\begin{array}{c} (1) \quad x < 1 \quad P \\ (2) \quad x = 2 \vee x < 1 \end{array}}{(2)}$$

II. Regra da Simplificação — Da conjunção $p \wedge q$ de duas proposições se pode deduzir cada uma das proposições, p ou q .

Exemplos:

$$(a) \frac{\begin{array}{c} (1) \quad (p \vee q) \wedge r \quad P \\ (2) \quad p \vee q \end{array}}{(2)}$$

$$(b) \frac{\begin{array}{c} (1) \quad p \wedge \neg q \quad P \\ (2) \quad \neg q \end{array}}{(2)}$$

$$(c) \frac{\begin{array}{c} (1) \quad x > 0 \wedge x \neq 1 \quad P \\ (2) \quad x \neq 1 \end{array}}{(2)}$$

$$(d) \frac{\begin{array}{c} (1) \quad x \in A \wedge x \in B \quad P \\ (2) \quad x \in A \end{array}}{(2)}$$

III. Regra da Conjunção — Permite deduzir de duas proposições dadas p e q (premissas) a sua conjunção $p \wedge q$ ou $q \wedge p$ (conclusão).

Exemplos:

$$(a) \frac{\begin{array}{c} (1) \quad p \vee q \quad P \\ (2) \quad \neg r \quad P \\ (3) \quad (p \vee q) \wedge \neg r \end{array}}{(3)}$$

$$(b) \frac{\begin{array}{c} (1) \quad p \vee q \quad P \\ (2) \quad q \vee r \quad P \\ (3) \quad (p \vee q) \wedge (q \vee r) \end{array}}{(3)}$$

$$(c) \frac{\begin{array}{c} (1) \quad x < 5 \quad P \\ (2) \quad x > 1 \quad P \\ (3) \quad x > 1 \wedge x < 5 \end{array}}{(3)}$$

$$(d) \frac{\begin{array}{c} (1) \quad x \in A \quad P \\ (2) \quad x \notin B \quad P \\ (3) \quad x \notin B \wedge x \in A \end{array}}{(3)}$$

IV. Regra da Absorção — Esta regra permite, dada uma condicional $p \rightarrow q$ como premissa, dela deduzir como conclusão uma outra condicional com o mesmo antecedente p e cujo consequente é a conjunção $p \wedge q$ das duas proposições que integram a premissa, isto é, $p \rightarrow p \wedge q$.

Exemplos:

$$(a) \frac{(1) \quad x = 2 \rightarrow x < 3 \quad P}{(2) \quad x = 2 \rightarrow x = 2 \wedge x < 3}$$

$$(b) \frac{(1) \quad x \in A \rightarrow x \in A \cup B \quad P}{(2) \quad x \in A \rightarrow x \in A \wedge x \in A \cup B}$$

V. Regra Modus ponens — Também é chamada **Regra de separação** e permite deduzir q (conclusão) a partir de $p \rightarrow q$ e p (premissas).

Exemplos:

$$(a) \frac{(1) \quad \neg p \rightarrow \neg q \quad P}{(2) \quad \neg p \quad P}$$

$$(b) \frac{(1) \quad p \wedge q \rightarrow r \quad P}{(2) \quad p \wedge q \quad P}$$

$$(3) \quad r$$

$$(c) \frac{(1) \quad p \rightarrow q \wedge r \quad P}{(2) \quad p \quad P}$$

$$(d) \frac{(1) \quad \neg p \vee r \rightarrow s \wedge \neg q \quad P}{(2) \quad \neg p \vee r \quad P}$$

$$(3) \quad s \wedge \neg q$$

$$(e) \frac{(1) \quad x \neq 0 \rightarrow x + y > 1 \quad P}{(2) \quad x \neq 0 \quad P}$$

$$(f) \frac{(1) \quad x \in A \cap B \rightarrow x \in A \quad P}{(2) \quad x \in A \cap B \quad P}$$

$$(3) \quad x \in A$$

VI. Regra Modus tollens — Permite, a partir das premissas $p \rightarrow q$ (condicional) e $\neg q$ (negação do consequente), deduzir como conclusão $\neg p$ (negação do antecedente).

Exemplos:

$$(a) \frac{(1) \quad q \wedge r \rightarrow s \quad P}{(2) \quad \neg s \quad P}$$

$$(b) \frac{(1) \quad p \rightarrow \neg q \quad P}{(2) \quad \neg \neg q \quad P}$$

$$(3) \quad \neg p$$

$$(c) \frac{(1) \quad p \rightarrow q \vee r \quad P}{(2) \quad \neg(q \vee r) \quad P}$$

$$(d) \frac{(1) \quad x \neq 0 \rightarrow x = y \quad P}{(2) \quad x \neq y \quad P}$$

$$(3) \quad x = 0$$

VII. Regra do Silogismo disjuntivo — Permite deduzir da disjunção $p \vee q$ de duas proposições e da negação $\neg p$ (ou $\neg q$) de uma delas a outra proposição q (ou p).

Exemplos:

$$(a) \frac{\begin{array}{l} (1) \quad (p \wedge q) \vee r \quad P \\ (2) \quad \neg r \quad P \end{array}}{(3) \quad p \wedge q \quad P}$$

$$(b) \frac{\begin{array}{l} (1) \quad \neg p \vee \neg q \quad P \\ (2) \quad \neg \neg p \quad P \end{array}}{(3) \quad \neg q \quad P}$$

$$(c) \frac{\begin{array}{l} (1) \quad x = 0 \vee x = 1 \quad P \\ (2) \quad x \neq 1 \quad P \end{array}}{(3) \quad x = 0 \quad P}$$

$$(d) \frac{\begin{array}{l} (1) \quad \neg(p \rightarrow q) \vee r \quad P \\ (2) \quad \neg \neg(p \rightarrow q) \quad P \end{array}}{(3) \quad r \quad P}$$

VIII. Regra do Silogismo hipotético — Esta regra permite, dadas duas condicionais: $p \rightarrow q$ e $q \rightarrow r$ (premissas), tais que o consequente da primeira coincide com o antecedente da segunda, deduzir uma terceira condicional $p \rightarrow r$ (conclusão) cujo antecedente e consequente são respectivamente o antecedente da premissa $p \rightarrow q$ e o consequente da outra premissa $q \rightarrow r$ (transitividade da seta \rightarrow).

Exemplos:

$$(a) \frac{\begin{array}{l} (1) \quad \neg p \rightarrow \neg q \quad P \\ (2) \quad \neg q \rightarrow \neg r \quad P \end{array}}{(3) \quad \neg p \rightarrow \neg r \quad P}$$

$$(b) \frac{\begin{array}{l} (1) \quad \neg p \rightarrow q \vee r \quad P \\ (2) \quad q \vee r \rightarrow \neg s \quad P \end{array}}{(3) \quad \neg p \rightarrow \neg s \quad P}$$

$$(c) \frac{\begin{array}{l} (1) \quad (p \rightarrow q) \rightarrow r \quad P \\ (2) \quad r \rightarrow (q \wedge s) \quad P \end{array}}{(3) \quad (p \rightarrow q) \rightarrow (q \wedge s) \quad P}$$

$$(d) \frac{\begin{array}{l} (1) \quad |x| = 0 \rightarrow x = 0 \quad P \\ (2) \quad x = 0 \rightarrow x + 1 = 1 \quad P \end{array}}{(3) \quad |x| = 0 \rightarrow x + 1 = 1 \quad P}$$

IX. Regra do Dilema construtivo — Nesta regra, as premissas são duas condicionais e a disjunção dos seus antecedentes, e a conclusão é a disjunção dos consequentes destas condicionais.

Exemplos:

$$(a) \frac{\begin{array}{l} (1) \quad (p \wedge q) \rightarrow \neg r \quad P \\ (2) \quad s \rightarrow t \quad P \\ (3) \quad (p \wedge q) \vee s \quad P \end{array}}{(4) \quad \neg r \vee t \quad P}$$

$$(b) \frac{\begin{array}{l} (1) \quad x < y \rightarrow x = 2 \quad P \\ (2) \quad x \leq y \rightarrow x > 2 \quad P \\ (3) \quad x < y \vee x \leq y \quad P \end{array}}{(4) \quad x = 2 \vee x > 2 \quad P}$$

X. **Regra do Dilema destrutivo** — Nesta regra, as premissas são duas condicionais e a disjunção da negação dos seus consequentes, e a conclusão é a disjunção da negação dos antecedentes destas condicionais.

Exemplos:

$$\begin{array}{l} \text{(a)} \quad \begin{array}{l} (1) \quad \sim q \rightarrow r \quad P \\ (2) \quad p \rightarrow \sim s \quad P \\ (3) \quad \sim r \vee \sim \sim s \quad P \end{array} \\ \hline (4) \quad \sim \sim q \vee \sim p \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{(b)} \quad \begin{array}{l} (1) \quad x + y = 7 \rightarrow x = 2 \quad P \\ (2) \quad y - x = 2 \rightarrow x = 3 \quad P \\ (3) \quad x \neq 2 \vee x \neq 3 \quad P \end{array} \\ \hline (4) \quad x + y \neq 7 \vee y - x \neq 2 \end{array}$$

EXERCÍCIOS

1. Construir a “condicional associada” a cada um dos seguintes argumentos:

- (a) $\sim p, \sim q \rightarrow p \vdash q$
- (b) $p \rightarrow q \vdash \sim(p \wedge \sim q)$
- (c) $p, p \rightarrow q, \sim q \vee(r \wedge s) \vdash r \wedge s$
- (d) $x = y \rightarrow x = 5, x = 5 \rightarrow x < z \vdash x = y \rightarrow x < z$

2. Construir o argumento (premissas e conclusão) correspondente a cada uma das seguintes condicionais:

- (a) $p \wedge (q \vee \sim p) \rightarrow q$
- (b) $(p \rightarrow q) \wedge (p \wedge \sim q) \rightarrow s$
- (c) $\sim(x < 0 \wedge y \neq x) \rightarrow x \leq 0 \vee y = x$

3. Indicar a Regra de inferência que justifica a validade dos seguintes argumentos:

- (a) $p \rightarrow q \vdash (p \rightarrow q) \vee \sim r$
- (b) $\sim p \wedge (q \rightarrow r) \vdash \sim p$
- (c) $p \rightarrow q, q \rightarrow \sim r \vdash p \rightarrow \sim r$
- (d) $p \rightarrow (q \rightarrow r), p \vdash q \rightarrow r$
- (e) $(q \vee r) \rightarrow \sim p, \sim \sim p \vdash \sim(q \vee r)$
- (f) $p \rightarrow q, r \rightarrow \sim s \vdash (p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow \sim s)$
- (g) $(p \wedge q) \vee (\sim p \wedge r), \sim(\sim p \wedge r) \vdash p \wedge q$
- (h) $p \rightarrow q \vee r \vdash p \rightarrow p \wedge (q \vee r)$
- (i) $x + y = z \rightarrow y + x = z; x + y = z \vdash y + x = z$
- (j) $x, y \in \mathbb{R} \rightarrow x + y \in \mathbb{R}, x + y \notin \mathbb{R} \vdash x, y \notin \mathbb{R}$
- (k) $x \neq 0, x \neq 1 \vdash x \neq 0 \wedge x \neq 1$

- (l) $3 < 5 \vdash 3 < 5 \vee 3 < 2$
- (m) $x < 0 \vee x = 1, x \neq 1 \vdash x < 0$
- (n) $x = 1 \rightarrow x < 3, x < 3 \rightarrow x + y < 5 \vdash x = 1 \rightarrow x + y < 5$
- (o) $\pi > 3 \wedge \pi < 4 \vdash \pi < 4$

4. Usar a regra “Modus ponens” para deduzir a conclusão de cada um dos seguintes pares de premissas:

- | | |
|--|---|
| (a) (1) $x = y \wedge y = z$ | (b) (1) $x, y \in \mathbb{R} \rightarrow xy \in \mathbb{R}$ |
| (2) $(x = y \wedge y = z) \rightarrow x = z$ | (2) $x, y \in \mathbb{R}$ |
| (c) (1) $(x > y \wedge y > z) \rightarrow x > z$ | (d) (1) $2 > 1 \rightarrow 3 > 1$ |
| (2) $x > y \wedge y > z$ | (2) $2 > 1$ |
| (e) (1) $x + 1 = 2$ | (f) (1) $x + 0 = y \rightarrow x = y$ |
| (2) $x + 1 = 2 \rightarrow y + 1 = 2$ | (2) $x + 0 = y$ |

5. Usar a regra “Modus tollens” para deduzir a conclusão de cada um dos seguintes pares de premissas:

- | | |
|--|-----------------------------------|
| (a) (1) $x \neq 0 \rightarrow x + y \neq y$ | (b) (1) $x = z \rightarrow x = 6$ |
| (2) $x + y = y$ | (2) $x \neq 6$ |
| (c) (1) $(p \leftrightarrow q) \rightarrow \sim(r \wedge s)$ | (d) (1) $x > 3 \rightarrow x > y$ |
| (2) $\sim\sim(r \wedge s)$ | (2) $x \geq y$ |

6. Usar a regra do “Sílogismo disjuntivo” para deduzir a conclusão de cada um dos seguintes pares de premissas:

- | | |
|------------------------------------|---------------------------------|
| (a) (1) $x + 8 = 12 \vee x \neq 4$ | (b) (1) $y < 6 \vee x + y < 10$ |
| (2) $x + 8 \neq 12$ | (2) $x + y \leq 10$ |
| (c) (1) $s \vee (r \wedge t)$ | (d) (1) $\sim p \vee \sim q$ |
| (2) $\sim s$ | (2) $\sim\sim q$ |

7. Usar a regra do “Sílogismo hipotético” para deduzir a conclusão de cada um dos seguintes pares de premissas:

- | | |
|---|--|
| (a) (1) $p \rightarrow r \vee \sim s$ | (b) (1) $x = 3 \rightarrow x < y$ |
| (2) $r \vee \sim s \rightarrow t$ | (2) $x < y \rightarrow x \neq z$ |
| (c) (1) $s \vee t \rightarrow r \wedge q$ | (d) (1) $xy = 6 \rightarrow xy + 5 = 11$ |
| (2) $r \wedge q \rightarrow \sim p$ | (2) $xy + 5 = 11 \rightarrow y = 2$ |

8. Usar a regra do “Dilema construtivo” para deduzir a conclusão de cada um dos seguintes ternos de premissas:

(a) (1) $p \rightarrow r$
 (2) $\sim q \rightarrow \sim s$
 (3) $p \vee \sim q$

(b) (1) $x = 5 \vee x < y$
 (2) $x = 5 \rightarrow x > 3$
 (3) $x < y \rightarrow z < 2$

(c) (1) $y = 0 \rightarrow xy = 0$
 (2) $y > 1 \rightarrow xy > 3$
 (3) $y = 0 \vee y > 1$

(d) (1) $x = 2 \rightarrow x^2 = 4$
 (2) $x = 2 \vee y = 3$
 (3) $y = 3 \rightarrow y^2 = 9$

9. Usar a regra do “Dilema destrutivo” para deduzir a conclusão de cada um dos seguintes ternos de premissas:

(a) (1) $p \wedge q \rightarrow r$
 (2) $q \rightarrow r \wedge s$
 (3) $\sim r \vee \sim(r \wedge s)$

(b) (1) $p \rightarrow \sim r \wedge q$
 (2) $\sim(\sim r \wedge q) \vee \sim s$
 (3) $\sim q \rightarrow s$

(c) (1) $x < 3 \rightarrow x \neq y$
 (2) $x > 4 \rightarrow x < y$
 (3) $x = y \vee x \neq y$

(d) (1) $y \neq 9 \vee y \neq 18$
 (2) $x = 2 \rightarrow y = 9$
 (3) $x = 8 \rightarrow y = 18$

Capítulo 10

Validade Mediante Tabelas - Verdade

1. As tabelas-verdade podem ser usadas para **demonstrar**, **verificar** ou **testar a validade** de qualquer argumento.

Dado um argumento:

$$P_1, P_2, \dots, P_n \vdash Q \quad (1)$$

cumpe constatar se é ou não possível ter $V(Q) = F$ quando $V(P_1) = V(P_2) = \dots = V(P_n) = V$. Para isso, o procedimento prático consiste em construir uma tabela-verdade com uma coluna para cada premissa e a conclusão, e nela identificar as linhas em que os valores lógicos das premissas P_1, P_2, \dots, P_n são todos V . Nessas linhas, o valor lógico da conclusão Q deve ser também V para que o argumento dado (1) seja **válido**. Se, ao invés, em ao menos uma dessas linhas o valor lógico da conclusão Q for F , então o argumento dado (1) é **não-válido**, ou seja, é um **sofisma**.

Uma outra alternativa para demonstrar, verificar ou testar a validade do argumento dado (1) consiste em construir a “condicional associada”:

$$(P_1 \wedge P_2 \wedge \dots \wedge P_n) \rightarrow Q$$

e reconhecer se esta condicional é ou não uma **tautologia** mediante a construção da sua respectiva tabela-verdade. Se esta condicional é tautológica, então o argumento dado (1) é **válido**. Caso contrário, o argumento dado (1) é um **sofisma**.

2. EXEMPLIFICAÇÃO

(1) Verificar se é válido o argumento: $p \rightarrow q, q \vdash p$

Resolução – Construamos a seguinte tabela-verdade:

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

← 1

← 3

As premissas do argumento dado figuram nas colunas 2 e 3, e a conclusão figura na coluna 1. As premissas são ambas verdadeiras (V) nas linhas 1 e 3. Na linha 1 a conclusão também é verdadeira (V), mas na linha 3 a conclusão é falsa (F). Logo, o argumento dado não é válido, ou seja, é um sofisma, pois, a falsidade da conclusão é compatível com a verdade das premissas.

Observe-se que esta forma de argumento não-válido apresenta certa semelhança com a forma de argumento válido **Modus ponens**. Tem o nome de “Sofisma de afirmar o consequente”.

- (2) Verificar se é válido o argumento: $p \rightarrow q, \neg p \vdash \neg q$

Resolução — Construamos a seguinte tabela-verdade:

p	q	$p \rightarrow q$	$\neg p$	$\neg q$
V	V	V	F	F
V	F	F	F	V
F	V	V	V	F
F	F	V	V	V

← 3

← 4

As premissas do argumento dado figuram nas colunas 3 e 4, e a conclusão figura na coluna 5. As premissas são ambas verdadeiras (V) nas linhas 3 e 4. Na linha 4 a conclusão também é verdadeira (V), mas na linha 3 a conclusão é falsa (F). Logo, o argumento dado não é válido, ou seja, é um sofisma.

Observe-se que esta forma de argumento não-válido apresenta certa semelhança com a forma de argumento válido **Modus tollens**. Tem o nome de “Sofisma de negar o antecedente”.

- (3) Verificar a validade do argumento: $p \leftrightarrow q, q \vdash p$

Resolução — Construamos a seguinte tabela-verdade:

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

← 1

As premissas do argumento dado figuram nas colunas 2 e 3, e a conclusão figura na coluna 1. As premissas são ambas verdadeiras (V) somente na linha 1, e nesta linha a conclusão também é verdadeira (V), isto é, não é possível ter premissas verdadeiras e conclusão falsa. Logo, o argumento dado é válido.

- (4) Testar a validade do argumento: $p \vee q, \neg q \vdash p \rightarrow r \vdash r$

Resolução — Construamos a seguinte tabela-verdade:

p	q	r	$p \vee q$	$\neg q$	$p \rightarrow r$
V	V	V	V	F	V
V	V	F	V	F	F
V	F	V	V	V	V
V	F	F	V	V	F
F	V	V	V	F	V
F	V	F	V	F	V
F	F	V	F	V	V
F	F	F	F	V	V

← 3

As premissas do argumento dado figuram nas colunas 4, 5 e 6, e a conclusão figura na coluna 3. As três premissas são verdadeiras (V) somente na linha 3, e nesta linha a conclusão também é verdadeira (V), isto é, não é possível ter premissas verdadeiras e conclusão falsa. Logo, o argumento dado é válido.

- (5) Testar a validade do argumento:

Se $x = 0$ e $y = z$, então $y > 1$

$y \geq 1$

Portanto, $y \neq z$

Resolução — Representando as três proposições simples $x = 0$, $y = z$ e $y > 1$ respectivamente por p , q e r , o argumento dado sob forma simbólica escreve-se:

$$p \wedge q \rightarrow r, \neg r \vdash \neg q$$

Posto isto, construamos a seguinte tabela-verdade:

p	q	r	$p \wedge q$	$p \wedge q \rightarrow r$	$\neg r$	$\neg q$
V	V	V	V	V	F	F
V	V	F	V	F	V	F
V	F	V	F	V	F	V
V	F	F	F	V	V	V
F	V	V	F	V	F	F
F	V	F	F	V	V	F
F	F	V	F	V	F	V
F	F	F	F	V	V	V

← 4

← 6

← 8

As premissas do argumento dado figuram nas colunas 5 e 6, e a conclusão figura na coluna 7. As premissas são ambas verdadeiras (V) nas linhas 4, 6 e 8. Nas linhas 4 e 8 a conclusão também é verdadeira (V), mas na linha 6 a conclusão é falsa (F), isto é, a falsidade da conclusão é compatível com a verdade das premissas. Logo, o argumento dado não é válido, ou seja, é um sofisma.

NOTA — Para demonstrar que um argumento é não-válido basta encontrar um argumento da mesma forma e que tenha, no entanto, premissas verdadeiras e conclusão falsa. Esta maneira de demonstrar a não-validade de um argumento chama-se “Método do contra-exemplo”.

Exemplificando, o seguinte argumento tem a mesma forma do que foi dado:

$$\begin{array}{l} \text{Se } 1 = 0 \text{ e } 0 = 0, \text{ então } 0 > 1 \\ 0 \geq 1 \\ \hline \text{Portanto, } 0 \neq 0 \end{array}$$

A primeira premissa é verdadeira (V), porque o seu antecedente é falso, e a segunda premissa é obviamente verdadeira (V), mas a conclusão é claramente falsa (F). Logo, este argumento é um contra-exemplo que prova que o argumento dado é não-válido (sofisma).

(6) Verificar se é válido o argumento: $\sim p \rightarrow q$, $p \vdash \sim q$

Resolução — A “condicional associada” ao argumento dado é:

$$((\sim p \rightarrow q) \wedge p) \rightarrow \sim q$$

Construamos a tabela-verdade desta condicional:

p	q	$\sim p$	$\sim p \rightarrow q$	$(\sim p \rightarrow q) \wedge p$	$\sim q$	$((\sim p \rightarrow q) \wedge p) \rightarrow \sim q$	
V	V	F	V	V	F	F	← 1
V	F	F	V	V	V	V	← 2
F	V	V	V	F	F	V	← 3
F	F	V	F	F	V	V	← 4

Na última coluna desta tabela-verdade figuram as letras V e F. Logo, a “condicional associada” não é tautológica e por conseguinte o argumento dado não é válido, ou seja, é um sofisma.

Chega-se a mesma conclusão observando que as premissas do argumento dado são ambas verdadeiras (V) na linha 1 e que nesta linha a conclusão é falsa (F).

(7) Verificar se é válido o argumento: $p \rightarrow q \vdash p \rightarrow q \vee r$

Resolução — A “condicional associada” ao argumento dado é:

$$(p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow q \vee r)$$

Construamos a tabela-verdade desta condicional:

p	q	r	$p \rightarrow q$	$q \vee r$	$p \rightarrow q \vee r$	$(p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow q \vee r)$	
V	V	V	V	V	V	V	← 1
V	V	F	V	V	V	V	← 2
V	F	V	F	V	V	V	← 3
V	F	F	F	F	F	V	← 4
F	V	V	V	V	V	V	← 5
F	V	F	V	V	V	V	← 6
F	F	V	V	V	V	V	← 7
F	F	F	V	F	V	V	← 8

Na última coluna desta tabela-verdade figura somente a letra V (verdade). Logo, a “condicional associada” é tautológica e por conseguinte o argumento dado é válido.

Chega-se a mesma conclusão observando que a premissa do argumento dado é verdadeira (V) nas linhas 1, 2, 5, 6, 7 e 8, e em cada uma destas linhas a conclusão é verdadeira (V).

(8) Testar a validade do argumento:

$$\text{Se } x = 0, \text{ então } x + y = y$$

$$\text{Se } y = z, \text{ então } x + y \neq z$$

$$\text{Logo, se } x = 0, \text{ então } y \neq z$$

Resolução — Representando as três proposições simples $x = 0$, $x + y = y$ e $y = z$ respectivamente por p, q e r, o argumento dado sob forma simbólica escreve-se:

$$p \rightarrow q, \quad r \rightarrow \sim q \vdash p \rightarrow \sim r$$

Então, a “condicional associada” ao argumento dado é:

$$(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow \sim q) \rightarrow (p \rightarrow \sim r)$$

Posto isto, construamos a tabela-verdade desta condicional a fim de reconhecer se é ou não uma **tautologia**:

(p	\rightarrow	q)	\wedge	(r	\rightarrow	$\sim q)$	\rightarrow	(p	\rightarrow	$\sim r)$	
V	V	V	F	V	F	F	V	V	F	F	$\leftarrow 2$
V	V	V	V	F	V	F	V	V	V	V	
V	F	F	F	V	V	V	V	V	F	F	
V	F	F	F	F	V	V	V	V	V	V	
F	V	V	F	V	F	F	V	F	V	V	$\leftarrow 6$
F	V	V	V	F	V	F	V	F	V	V	$\leftarrow 7$
F	V	F	V	V	V	V	V	F	V	F	$\leftarrow 8$
F	V	F	V	F	V	V	V	F	V	V	
1	2	1	4	1	3	2	5	1	3	2	

Na coluna 5 desta tabela-verdade figura somente a letra V (verdade). Logo, a "condicional associada" é **tautológica** e por conseguinte o argumento dado é **válido**.

Chega-se ao mesmo resultado observando que as premissas do argumento dado são ambas verdadeiras (V) nas linhas 2, 6, 7 e 8, e em cada uma destas linhas a conclusão também é verdadeira (V).

(9) Testar a validade do argumento:

Se 8 não é par, então 5 não é primo

Mas 8 é par

Logo, 5 é primo

Resolução — Cumpre, em primeiro lugar, passar o argumento dado para a **forma simbólica**. Representando por p a proposição "8 é par" e por q a proposição "5 é primo", temos:

$$\sim p \rightarrow \sim q, \quad p \vdash \sim q$$

Posto isto, construamos a seguinte tabela-verdade:

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \rightarrow \sim q$	
V	V	F	F	V	$\leftarrow 1$
V	F	F	V	V	$\leftarrow 2$
F	V	V	F	F	
F	F	V	V	V	

As premissas do argumento dado figuram nas colunas 1 e 5, e a conclusão figura na coluna 2. As premissas são ambas verdadeiras (V) nas linhas 1 e 2, mas na linha 2 a conclusão é falsa (F). Logo, o argumento dado é um **sofisma**, embora tenha premissas e conclusão verdadeiras.

(10) Verificar a validade do argumento:

Se 7 é menor que 4, então 7 não é primo

7 não é menor que 4

Logo, 7 é primo

Resolução — Seja p a proposição "7 é menor que 4" e q a proposição "7 é primo". Então sob forma simbólica o argumento dado escreve-se:

$$p \rightarrow \sim q, \quad \sim p \vdash \sim q$$

Posto isto, construamos a seguinte tabela-verdade:

p	q	$\sim q$	$p \rightarrow \sim q$	$\sim p$	
V	V	F	F	F	$\leftarrow 3$
V	F	V	V	F	
F	V	F	V	V	$\leftarrow 4$
F	F	V	V	V	

As premissas do argumento dado figuram nas colunas 4 e 5, e a conclusão figura na coluna 2. As premissas são ambas verdadeiras (V) nas linhas 3 e 4, mas na linha 4 a conclusão é falsa (F). Logo, o argumento dado é um **sofisma**, embora tenha premissas e conclusão verdadeiras.

(11) Verificar se é válido o argumento:

Se 7 é primo, então 7 não divide 21

7 divide 21

Logo, 7 não é primo

Resolução — Representando por p a proposição "7 é primo" e por q a proposição "7 divide 21", o argumento dado sob forma simbólica escreve-se:

$$p \rightarrow \sim q, \quad q \vdash \sim p$$

Posto isto, construamos a seguinte tabela-verdade:

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \rightarrow \sim q$
V	V	F	F	V
V	F	F	V	V
F	V	V	F	V
F	F	V	V	V

← 3

As premissas do argumento dado figuram nas colunas 2 e 5, e a conclusão figura na coluna 3. As premissas são ambas verdadeiras (V) somente na linha 3, e nesta linha a conclusão também é verdadeira (V). Logo, o argumento dado é válido.

Observe-se que a primeira premissa e a conclusão deste argumento válido são proposições falsas.

(12) Verificar a validade do argumento:

Se chove, Marcos fica resfriado
Marcos não ficou resfriado

Logo, não choveu

Resolução — Representando por p a proposição “Chove” e por q a proposição “Marcos fica resfriado”, o argumento dado sob forma simbólica escreve-se:

$$p \rightarrow q, \quad \sim q \vdash \sim p$$

e por conseguinte é válido, pois, tem a forma do argumento válido **Modus tollens** (MT).

(13) Verificar se é válido o argumento:

Se um homem é careca, ele é infeliz.
Se um homem é infeliz, ele morre jovem

Logo, carecas morrem jovens

Resolução — Representando as proposições “Ele é careca”, “Ele é infeliz” e “Ele morre jovem” respectivamente por p , q e r , o argumento dado sob forma simbólica escreve-se:

$$p \rightarrow q, \quad q \rightarrow r \vdash p \rightarrow r$$

e por conseguinte é válido, pois, tem a forma do argumento válido **Silogismo hipotético** (SH).

(14) Testar a validade do argumento:

Se 8 é par, então 3 não divide 7

Ou 5 não é primo ou 3 divide 7

Mas 5 é primo

Portanto, 8 é ímpar

Resolução — Representando as proposições simples “8 é par”, “3 divide 7” e “5 é primo” respectivamente por p , q e r , o argumento dado sob forma simbólica escreve-se:

$$p \rightarrow \sim q, \quad \sim r \vee q, \quad r \vdash \sim p$$

Então, a “condicional associada” ao argumento dado é:

$$((p \rightarrow \sim q) \wedge (\sim r \vee q) \wedge r) \rightarrow \sim p$$

Posto isto, construamos a tabela-verdade abreviada desta condicional a fim de reconhecer se é ou não uma **tautologia**:

((p	\rightarrow	$\sim q$)	\wedge	$(\sim r$	\vee	q)	\wedge	\sim	\rightarrow	$\sim p$
V	F	F	F	F	V	V	F	V	V	F
V	F	F	F	V	V	V	F	F	V	F
V	V	V	F	F	F	F	F	V	V	F
V	V	V	V	V	V	F	F	F	V	F
F	V	F	V	F	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	V	V	V	V	F	V	V
F	V	V	F	F	F	F	F	V	V	V
F	V	V	V	V	V	F	F	F	V	V
1	3	2	4	2	3	1	5	1	6	2

← 5

Na coluna 6 desta tabela-verdade figura somente a letra V (verdade). Logo, a “condicional associada” é tautológica e por conseguinte o argumento dado é válido.

Chega-se ao mesmo resultado observando que as três premissas do argumento dado são ao mesmo tempo verdadeiras (V) somente na linha 5, e nesta linha a conclusão também é verdadeira (V).

Note-se que a segunda premissa e a conclusão deste argumento válido são proposições falsas.

3. PROVA DE NÃO-VALIDADE

O método usual para demonstrar, verificar ou testar a não-validade de um dado argumento $P_1, P_2, \dots, P_n \vdash Q$ consiste em encontrar uma atribuição de valores lógicos às proposições simples componentes do argumento que torne todas as premissas P_1, P_2, \dots, P_n verdadeiras (V) e a conclusão Q falsa (F), o que equivale em encontrar uma linha da tabela-verdade relativa ao argumento dado em que os valores lógicos das premissas P_1, P_2, \dots, P_n são todos V e o valor lógico da conclusão Q é F. É óbvio que, todas as vezes que seja possível encontrar essa atribuição de valores lógicos, sem a construção da tabela-verdade completa relativa ao argumento dado, evita-se uma boa parte de trabalho.

Exemplos:

(1) Demonstrar a não-validade do argumento:

$$(p \rightarrow q) \vee \sim(r \wedge s), \quad p \vee s \vdash r \rightarrow q$$

Dem. — Com a seguinte atribuição de valores lógicos às proposições simples componentes do argumento dado:

V	F
r	p
s	q

os valores lógicos das duas premissas são V e o valor lógico da conclusão é F, pois, temos:

$$1^{\text{a}} \text{ Premissa: } (F \rightarrow F) \vee \sim(V \wedge V) = V \vee \sim V = V \vee F = V$$

$$2^{\text{a}} \text{ Premissa: } F \vee V = V$$

$$\text{Conclusão: } V \rightarrow F = F$$

Logo, o argumento dado é não-válido (sofisma).

(2) Demonstrar a não-validade do argumento:

$$p \vee \sim q, \quad \sim(\sim r \wedge s), \quad \sim(\sim p \wedge \sim s) \vdash \sim q \rightarrow r$$

Dem. — Com a seguinte atribuição de valores lógicos às proposições simples componentes do argumento dado:

V	F
p	q
r	
s	

os valores lógicos das três premissas são V e o valor lógico da conclusão é F, pois, temos:

$$1^{\text{a}} \text{ Premissa: } V \vee \sim F = V \vee V = V$$

$$2^{\text{a}} \text{ Premissa: } \sim(\sim F \wedge F) = \sim(V \wedge V) = \sim V = F$$

$$3^{\text{a}} \text{ Premissa: } \sim(\sim V \wedge \sim F) = \sim(F \wedge V) = \sim F = V$$

$$\text{Conclusão: } \sim F \rightarrow F = V \rightarrow F = F$$

Logo, o argumento dado não é válido (sofisma).

(3) Demonstrar que é não-válido o argumento:

$$p \wedge q \rightarrow (p \rightarrow r) \vee s, \quad p \wedge \sim r \vdash \sim p \vee \sim q$$

Dem. — Atribuindo às proposições simples componentes do argumento dado os valores lógicos indicados pela tabela:

V	F
p	r
q	
s	

resulta o valor lógico V para as duas premissas e o valor lógico F para a conclusão, pois, temos:

$$1^{\text{a}} \text{ Premissa: } V \wedge V \rightarrow (V \rightarrow F) \vee V = V \rightarrow F \vee V = V \rightarrow V = V$$

$$2^{\text{a}} \text{ Premissa: } V \wedge \sim F = V \wedge V = V$$

$$\text{Conclusão: } \sim V \vee \sim V = F \vee F = F$$

Portanto, o argumento dado não é válido (sofisma).

(4) Demonstrar que é não-válido o argumento:

- (1) $x \neq 0$
 - (2) $x = 0 \vee \sim(x < 1 \vee y \geq x)$
 - (3) $y > x \rightarrow y > 1 \wedge x + y > 2$
- $\therefore y > 1 \rightarrow x < 1$

Dem. — Atribuindo às proposições simples componentes do argumento dado os valores lógicos indicados pela tabela:

V	F
$y > x$	$x = 0$
$y > 1$	$x \leq 1$
$x + y > 2$	

resulta o valor lógico V para as três premissas e o valor lógico F para a conclusão, pois, temos:

1^a Premissa: $\sim F = V$

2^a Premissa: $F \vee \sim(F \vee \sim V) = F \vee \sim(F \vee F) = F \vee \sim F = F \vee V = V$

3^a Premissa: $V \rightarrow V \wedge V = V \rightarrow V = V$

Conclusão: $V \rightarrow F = F$

(5) Demonstrar a **não-validade** do argumento:

$$\begin{array}{l} (1) \quad x^2 - 3x + 2 = 0 \rightarrow x = 1 \vee x = 2 \\ (2) \quad x = 1 \vee x = 2 \rightarrow 3x > x^2 \\ (3) \quad 3x > x^2 \\ \hline \therefore \quad 3x > x^2 \vee x = 1 \end{array}$$

Dem. Atribuindo a todas as proposições simples componentes do argumento dado o mesmo valor lógico F, resulta o valor lógico V para as três premissas e o valor lógico F para a conclusão, pois, temos:

1^a Premissa: $F \rightarrow F \vee F = F \rightarrow F = V$

2^a Premissa: $F \vee F \rightarrow F = F \rightarrow F = V$

3^a Premissa: $\sim F = V$

Conclusão: $F \vee F = F$

EXERCÍCIOS

1. Usar tabelas-verdade para verificar que são **válidos** os seguintes argumentos:

- (a) $p \rightarrow q, \quad r \rightarrow \sim q \vdash r \rightarrow \sim p$
- (b) $p \rightarrow \sim q, \quad r \rightarrow p, \quad q \vdash \sim r$
- (c) $p \rightarrow q, \quad r \vee \sim q, \quad \sim r \vdash \sim p$
- (d) $p \rightarrow q \vee r, \quad \sim q \vdash p \rightarrow r$
- (e) $p \rightarrow \sim q, \quad p, \quad \sim q \rightarrow r \vdash r$
- (f) $p \wedge \sim q, \quad \sim r \rightarrow q \vdash p \wedge r$
- (g) $p \vee (q \vee r), \quad \sim p, \quad \sim r \vdash q$
- (h) $p \vee \sim q, \quad \sim p, \quad \sim(p \wedge r) \rightarrow q \vdash r$

2. Verificar mediante tabelas-verdade que são **válidos** os seguintes argumentos:

- (a) $p \rightarrow \sim q, \quad q, \quad \sim p \rightarrow r \wedge s \vdash r \wedge s$
- (b) $p \rightarrow q \wedge r, \quad \sim(q \wedge r), \quad \sim p \rightarrow s \vdash \sim p \wedge s$
- (c) $p \vee q, \quad q \rightarrow r, \quad \sim r \vee s \vdash s$
- (d) $p \wedge q \rightarrow r, \quad s \rightarrow p \wedge q, \quad s \vdash q \vee r$
- (e) $p \vee q, \quad q \rightarrow r, \quad p \rightarrow s, \quad \sim s \vdash r \wedge (p \vee q)$

3. Usar tabelas-verdade para mostrar a **validade** dos seguintes argumentos:

$$\begin{array}{ll} (a) & \begin{array}{l} (1) \quad x = 0 \rightarrow x \neq y \\ (2) \quad x = z \rightarrow x = y \\ (3) \quad x = z \end{array} \\ & \hline \\ & \therefore \quad x \neq 0 \end{array} \quad \begin{array}{ll} (b) & \begin{array}{l} (1) \quad x = 6 \rightarrow x > y \\ (2) \quad \sim(y > 5 \wedge x \neq 6) \\ (3) \quad y \geq 5 \rightarrow x > y \end{array} \\ & \hline \\ & \therefore \quad x > y \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} (c) & \begin{array}{l} (1) \quad x \neq y \rightarrow x \neq z \\ (2) \quad x \neq z \rightarrow x \neq 0 \\ (3) \quad x = 0 \end{array} \\ & \hline \\ & \therefore \quad x = y \end{array} \quad \begin{array}{ll} (d) & \begin{array}{l} (1) \quad y > x \leftrightarrow x = 0 \\ (2) \quad xy = 0 \leftrightarrow x = 0 \\ (3) \quad y \geq x \end{array} \\ & \hline \\ & \therefore \quad xy \neq 0 \end{array}$$

4. Demonstrar a **não-validade** dos seguintes argumentos pelo “Método de atribuição de valores lógicos”:

- (a) $p \rightarrow q, \quad r \rightarrow s, \quad p \vee s \vdash q \vee r$
- (b) $\sim(p \wedge q), \quad \sim p \wedge \sim q \rightarrow r \wedge s, \quad s \rightarrow r \vdash r$
- (c) $p \leftrightarrow q \vee r, \quad q \leftrightarrow p \vee r, \quad r \leftrightarrow p \vee q, \quad \sim p \vdash q \vee r$
- (d) $p \rightarrow q \vee r, \quad s \leftrightarrow r, \quad \sim p \vee q \vdash \sim p \wedge q$
- (e) $(p \rightarrow q) \rightarrow r, \quad r \rightarrow \sim s \vee t, \quad (s \rightarrow t) \rightarrow u, \quad u \vdash p \rightarrow q$
- (f) $p \rightarrow (q \rightarrow r), \quad s \rightarrow (t \rightarrow v), \quad q \rightarrow s \wedge t, \quad \sim(q \wedge v) \vdash p \leftrightarrow r$

5. Passar para a **forma simólica** e testar a validade do argumento:

Se trabalho, não posso estudar
Trabalho ou passo em Física
Trabalhei

Logo, passei em Física

Capítulo 11

Validade Mediante Regras de Inferência

1. O método das tabelas-verdade permite demonstrar, verificar ou testar a validade de qualquer argumento, mas o seu emprego torna-se cada vez mais trabalhoso à medida que aumenta o número de proposições simples componentes dos argumentos. Assim, p. ex., para testar a validade de um argumento com cinco (5) proposições simples componentes é necessário construir uma tabela-verdade com $2^5 = 32$ linhas, perspectiva nada animadora.

Um método mais eficiente para demonstrar, verificar ou testar a validade de um dado argumento $P_1, P_2, \dots, P_n \vdash Q$ consiste em deduzir a conclusão Q a partir das premissas P_1, P_2, \dots, P_n mediante o uso de certas regras de inferência.

2. EXEMPLIFICAÇÃO

(1) Verificar que é válido o argumento: $p \rightarrow q, p \wedge r \vdash q$

Resolução — Temos, sucessivamente:

(1)	$p \rightarrow q$	P
(2)	$p \wedge r$	P
(3)	p	2 — SIMP
(4)	q	1,3 — MP

Da segunda premissa: $p \wedge r$, pela Regra de Simplificação (SIMP), inferimos p . De p e da primeira premissa: $p \rightarrow q$, pela Regra Modus ponens (MP), inferimos q , que é a conclusão do argumento dado.

Assim, a conclusão pode ser deduzida das duas premissas do argumento dado por meio de duas Regras de inferência, e por conseguinte o argumento dado é válido.

(2) Verificar que é válido o argumento:

$$p \wedge q, p \vee r \rightarrow s \vdash p \wedge s$$

Resolução — Temos, sucessivamente:

(1)	$p \wedge q$	P
(2)	$p \vee r \rightarrow s$	P
(3)	p	1 — SIMP
(4)	$p \vee r$	3 — AD
(5)	s	2,4 — MP
(6)	$p \wedge s$	3,5 — CONJ

Da primeira premissa: $p \wedge q$, pela Regra de Simplificação (SIMP), inferimos p . De p , pela Regra da Adição (AD), inferimos $p \vee r$. De $p \vee r$ e da segunda premissa: $p \vee r \rightarrow s$, pela Regra Modus ponens (MP), inferimos s . De s e de p (linha 3), pela Regra da Conjunção (CONJ), inferimos $p \wedge s$, que é a conclusão do argumento dado.

Assim, a conclusão pode ser deduzida das duas premissas do argumento dado por meio de quatro Regras de inferência, e por conseguinte o argumento dado é válido.

(3) Verificar a validade do argumento:

$$p \rightarrow (q \rightarrow r), p \rightarrow q, p \vdash r$$

Resolução — Temos, sucessivamente:

(1)	$p \rightarrow (q \rightarrow r)$	P
(2)	$p \rightarrow q$	P
(3)	p	P
(4)	$q \rightarrow r$	1,3 — MP
(5)	q	2,3 — MP
(6)	r	4,5 — MP

(4) Verificar a validade do argumento:

$$p \rightarrow q, p \wedge q \rightarrow r, \sim(p \wedge r) \vdash \sim p$$

Resolução — Temos, sucessivamente:

(1)	$p \rightarrow q$	P
(2)	$p \wedge q \rightarrow r$	P
(3)	$\sim(p \wedge r)$	P
(4)	$p \rightarrow p \wedge q$	1 — ABS
(5)	$p \rightarrow r$	2,4 — SH
(6)	$p \rightarrow p \wedge r$	5 — ABS
(7)	$\sim p$	3,6 — MT

(5) Verificar que é válido o argumento:

$$p \vee q \rightarrow r, \quad r \vee q \rightarrow (p \rightarrow (s \leftrightarrow t)), \quad p \wedge s \vdash s \leftrightarrow t$$

Resolução — Temos, sucessivamente:

(1)	$p \vee q \rightarrow r$	P
(2)	$r \vee q \rightarrow (p \rightarrow (s \leftrightarrow t))$	P
(3)	$p \wedge s$	P
(4)	p	3 — SIMP
(5)	$p \vee q$	4 — AD
(6)	r	1,5 — MP
(7)	$r \vee q$	6 — AD
(8)	$p \rightarrow (s \leftrightarrow t)$	2,7 — MP
(9)	$s \leftrightarrow t$	4,8 — MP

(6) Verificar que é válido o argumento:

$$p \rightarrow \sim q, \quad \sim p \rightarrow (r \rightarrow \sim q), \quad (\sim s \vee \sim r) \rightarrow \sim \sim q, \quad \sim s \vdash \sim r$$

Resolução — Temos, sucessivamente:

(1)	$p \rightarrow \sim q$	P
(2)	$\sim p \rightarrow (r \rightarrow \sim q)$	P
(3)	$(\sim s \vee \sim r) \rightarrow \sim \sim q$	P
(4)	$\sim s$	P
(5)	$\sim s \vee \sim r$	4 — AD
(6)	$\sim \sim q$	3,5 — MP
(7)	$\sim p$	1,6 — MT
(8)	$r \rightarrow \sim q$	2,7 — MP
(9)	$\sim r$	6,8 — MT

(7) Verificar a validade do argumento:

$$p \wedge q \rightarrow r, \quad r \rightarrow s, \quad t \rightarrow \sim u, \quad t, \quad \sim s \vee u \vdash \sim(p \wedge q)$$

Resolução — Temos, sucessivamente:

(1)	$p \wedge q \rightarrow r$	P
(2)	$r \rightarrow s$	P
(3)	$t \rightarrow \sim u$	P
(4)	t	P
(5)	$\sim s \vee u$	P
(6)	$\sim u$	3,4 — MP
(7)	$\sim s$	5,6 — SD
(8)	$\sim r$	2,7 — MT
(9)	$\sim(p \wedge q)$	1,8 — MT

(8) Verificar a validade do argumento:

$$p \rightarrow q, \quad q \rightarrow r, \quad s \rightarrow t, \quad p \vee s \vdash r \vee t$$

Resolução — Temos, sucessivamente:

(1)	$p \rightarrow q$	P
(2)	$q \rightarrow r$	P
(3)	$s \rightarrow t$	P
(4)	$p \vee s$	P
(5)	$p \rightarrow r$	1,2 — SH
(6)	$r \vee t$	3,4,5 — DC

(9) Verificar a validade do argumento:

$$p \rightarrow q, \quad \sim r \rightarrow (s \rightarrow t), \quad r \vee (p \vee s), \quad \sim r \vdash q \vee t$$

Resolução — Temos, sucessivamente:

(1)	$p \rightarrow q$	P
(2)	$\sim r \rightarrow (s \rightarrow t)$	P
(3)	$r \vee (p \vee s)$	P
(4)	$\sim r$	
(5)	$s \rightarrow t$	2,4 — MP
(6)	$p \vee s$	3,4 — SD
(7)	$q \vee t$	1,5,6 — DC

(10) Verificar que é válido o argumento:

$$p \rightarrow q, (p \rightarrow r) \rightarrow s \vee q, p \wedge q \rightarrow r, \sim s \vdash q$$

Resolução — Temos, sucessivamente:

(1)	$p \rightarrow q$	P
(2)	$(p \rightarrow r) \rightarrow s \vee q$	P
(3)	$p \wedge q \rightarrow r$	P
(4)	$\sim s$	P
(5)	$p \rightarrow p \wedge q$	1 — ABS
(6)	$p \rightarrow r$	3,5 — SH
(7)	$s \vee q$	2,6 — MP
(8)	q	4,7 — SD

(11) Verificar a validade do argumento:

$$p \rightarrow q, p \vee (\sim r \wedge \sim q), s \rightarrow \sim r, \sim(p \wedge q) \vdash \sim s \vee \sim q$$

Resolução — Temos, sucessivamente:

(1)	$p \rightarrow q$	P
(2)	$p \vee (\sim r \wedge \sim q)$	P
(3)	$s \rightarrow \sim r$	P
(4)	$\sim(p \wedge q)$	P
(5)	$p \rightarrow p \wedge q$	1 — ABS
(6)	$\sim p$	4,5 — MT
(7)	$\sim r \wedge \sim q$	2,6 — SD
(8)	$\sim r$	7 — SIMP
(9)	$\sim s$	3,8 — MT
(10)	$\sim s \vee \sim q$	9 — AD

(12) Verificar a validade do argumento:

$$p \rightarrow r, q \rightarrow s, \sim r, (p \vee q) \wedge (r \vee s) \vdash s$$

Resolução — Temos, sucessivamente:

(1)	$p \rightarrow r$	P
(2)	$q \rightarrow s$	P
(3)	$\sim r$	P
(4)	$(p \vee q) \wedge (r \vee s)$	P
(5)	$p \vee q$	4 — SIMP
(6)	$r \vee s$	1,2,5 — DC
(7)	s	3,6 — SD

(13) Verificar que é válido o argumento:

$$p \rightarrow q, q \rightarrow r, r \rightarrow s, \sim s, p \vee t \vdash t$$

Resolução — Temos, sucessivamente:

(1)	$p \rightarrow q$	P
(2)	$q \rightarrow r$	P
(3)	$r \rightarrow s$	P
(4)	$\sim s$	P
(5)	$p \vee t$	P
(6)	$p \rightarrow r$	1,2 — SH
(7)	$p \rightarrow s$	3,6 — SH
(8)	$\sim p$	4,7 — MT
(9)	t	5,8 — SD

(14) Verificar que é válido o argumento:

$$(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s), t \rightarrow u, u \rightarrow v, \sim q \vee \sim v \vdash \sim p \vee \sim t$$

Resolução — Temos, sucessivamente:

(1)	$(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s)$	P
(2)	$t \rightarrow u$	P
(3)	$u \rightarrow v$	P
(4)	$\sim q \vee \sim v$	P
(5)	$t \rightarrow v$	2,3 — SH
(6)	$p \rightarrow q$	1 — SIMP
(7)	$\sim p \vee \sim t$	4,5,6 — DD

(15) Verificar a validade do argumento:

$$x = y \rightarrow x = z, x = z \rightarrow x = 1, x = 0 \rightarrow x \neq 1, x = y \vdash x \neq 0$$

Resolução — Temos, sucessivamente:

(1)	$x = y \rightarrow x = z$	P
(2)	$x = z \rightarrow x = 1$	P
(3)	$x = 0 \rightarrow x \neq 1$	P
(4)	$x = y$	P
(5)	$x = y \rightarrow x = 1$	1,2 — SH
(6)	$x = 1$	4,5 — MP
(7)	$x \neq 0$	3,6 — MT

(16) Verificar a validade do argumento:

- Se $x = y$, então $x = z$
 Se $x = z$, então $x = t$
 Ou $x = y$ ou $x = 0$
 Se $x = 0$, então $x + u = 1$
 Mas $x + u \neq 1$

Portanto, $x = t$

Resolução — Temos, sucessivamente:

- $$\begin{array}{ll} (1) & x = y \rightarrow x = z \quad P \\ (2) & x = z \rightarrow x = t \quad P \\ (3) & x = y \vee x = 0 \quad P \\ (4) & x = 0 \rightarrow x + u = 1 \quad P \\ (5) & x + u \neq 1 \quad P \\ \hline (6) & x = y \rightarrow x = t \quad 1,2 - SH \\ (7) & x \neq 0 \quad 4,5 - MT \\ (8) & x = y \quad 3,7 - SD \\ (9) & x = t \quad 6,8 - MP \end{array}$$

(17) Verificar que é válido o argumento:

$$x = y \rightarrow x = z, \quad x \neq y \rightarrow x < z, \quad x < z \vee y > z, \quad y \neq z \wedge x \neq z \vdash y > z$$

Resolução — Temos, sucessivamente:

- $$\begin{array}{ll} (1) & x = y \rightarrow x = z \quad P \\ (2) & x \neq y \rightarrow x < z \quad P \\ (3) & x < z \vee y > z \quad P \\ (4) & y \neq z \wedge x \neq z \quad P \\ \hline (5) & x \neq z \quad 4 - SIMP \\ (6) & x \neq y \quad 1,5 - MT \\ (7) & x < z \quad 2,6 - MP \\ (8) & y > z \quad 3,7 - SD \end{array}$$

EXERCÍCIOS

1. Usar a regra "Modus ponens" para deduzir de cada um dos seguintes ternos de premissas a conclusão indicada:

- (a) (1) $p \rightarrow q$
 (2) $q \rightarrow r$
 (3) p

- (b) (1) $p \rightarrow \neg q$
 (2) p
 (3) $\neg q \rightarrow r$

$\therefore r$

$\therefore r$

- (c) (1) $p \rightarrow q \wedge r$
 (2) $q \wedge r \rightarrow s$
 (3) p

$\therefore s$

- (d) (1) $\neg p \rightarrow q \vee r$
 (2) $s \vee t \rightarrow \neg p$
 (3) $s \vee t$

$\therefore q \vee r$

2. Usar a regra "Modus ponens" para deduzir de cada um dos seguintes ternos de premissas a conclusão indicada:

- (a) (1) $2 > 1 \rightarrow 3 > 1$
 (2) $3 > 1 \rightarrow 3 > 0$
 (3) $2 > 1$

$\therefore 3 > 0$

- (b) (1) $x + 1 = 2$
 (2) $x + 1 = 2 \rightarrow y + 1 = 2$
 (3) $y + 1 = 2 \rightarrow x = y$

$\therefore x = y$

- (c) (1) $x + 0 = y \rightarrow x = y$
 (2) $x + 0 = y$
 (3) $x = y \rightarrow x + 2 = y + 2$

$\therefore x + 2 = y + 2$

- (d) (1) $(a > b \wedge b > c) \rightarrow a > c$
 (2) $a > b \wedge b > c$
 (3) $a > c \rightarrow a > 10$

$\therefore a > 10$

3. Usar a regra "Modus ponens" para deduzir de cada um dos seguintes conjuntos de premissas a conclusão indicada:

- (a) (1) $(a = b \wedge b = c) \rightarrow a = c$
 (2) $a = c \rightarrow c = a$
 (3) $a = b \wedge b = c$

$\therefore c = a$

- (b) (1) $p \rightarrow \neg q$
 (2) p
 (3) $\neg q \rightarrow r$

$\therefore \neg r$

- (c) (1) $p \vee q$
 (2) $p \vee q \rightarrow \neg r$
 (3) $\neg r \rightarrow s \wedge \neg t$
 (4) $s \wedge \neg t \rightarrow u \vee v$

$\therefore u \vee v$

- (d) (1) $\neg p \rightarrow q$
 (2) $q \rightarrow r$
 (3) $\neg r \rightarrow s$
 (4) $r \rightarrow \neg s$
 (5) $\neg s \rightarrow t$
 (6) $t \rightarrow u$

$\therefore u$

4. Usar as regras "Modus ponens" e "Modus tollens" para deduzir de cada um dos seguintes conjuntos de premissas a conclusão indicada:

- (a) (1) $p \rightarrow q$
 (2) $\neg p \rightarrow r$
 (3) $\neg q$

$\therefore r$

- (b) (1) $p \rightarrow \neg q$
 (2) $\neg \neg q$
 (3) $\neg p \rightarrow r \wedge s$

$\therefore r \wedge s$

$$\begin{array}{ll} \text{(c)} & \begin{array}{ll} (1) & p \rightarrow q \\ (2) & q \rightarrow \sim r \\ (3) & s \rightarrow \sim r \\ (4) & p \end{array} \quad P \\ \hline \therefore & \sim s \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{(d)} & \begin{array}{ll} (1) & x \neq 0 \rightarrow y = 1 \\ (2) & x = y \rightarrow y = t \\ (3) & y = t \rightarrow y \neq 1 \\ (4) & x = y \end{array} \quad P \\ \hline \therefore & x = 0 \end{array}$$

5. Usar as regras da “Conjunção”, “Simplificação”, “Modus ponens” e “Modus tollens” para verificar que são válidos os seguintes argumentos:

- (a) $p \wedge q, p \rightarrow r \vdash p \wedge r$
- (b) $\sim p \wedge q, r \rightarrow p \vdash \sim p \wedge \sim r$
- (c) $r \rightarrow p, r \rightarrow q, r \vdash p \wedge q$
- (d) $\sim p \rightarrow q, \sim(r \wedge s), p \rightarrow r \wedge s \vdash \sim p \wedge q$

6. Usar a regra do “Silogismo disjuntivo” para verificar que são válidos os seguintes argumentos:

- (a) $p \vee q, \sim r, q \rightarrow r \vdash p$
- (b) $p \wedge q, r \vee s, p \rightarrow \sim s \vdash r$
- (c) $p, p \rightarrow \sim q, q \vee r \vdash p \wedge r$
- (d) $\sim p, p \vee (q \vee r), \sim r \vdash q$
- (e) $p \vee \sim q, \sim \sim q, p \rightarrow r \wedge s \vdash s$

7. Usar a regra do “Silogismo disjuntivo” para deduzir de cada um dos seguintes termos de premissas a conclusão indicada:

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} & \begin{array}{ll} (1) & x = y \vee x = z \\ (2) & x = z \rightarrow x = 6 \\ (3) & x \neq 6 \end{array} \\ \hline \therefore & x = y \end{array} \quad \begin{array}{ll} \text{(b)} & \begin{array}{ll} (1) & x \neq 0 \rightarrow x \neq y \\ (2) & x = y \vee x = z \\ (3) & x \neq z \end{array} \\ \hline \therefore & x = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{(c)} & \begin{array}{ll} (1) & 1 + 1 = 2 \wedge 2 + 1 = 3 \\ (2) & 3 - 2 = 1 \vee 2 - 1 \neq 1 \\ (3) & 1 + 1 = 2 \rightarrow 2 - 1 = 1 \end{array} \\ \hline \therefore & 3 - 2 = 1 \end{array} \quad \begin{array}{ll} \text{(d)} & \begin{array}{ll} (1) & x = 0 \vee x = y \\ (2) & x = y \rightarrow x = z \\ (3) & x \neq z \end{array} \\ \hline \therefore & x = 0 \end{array}$$

8. Verificar que são válidos os seguintes argumentos:

- (a) $r \rightarrow p \vee q, r, \sim p \vdash q$
- (b) $p \rightarrow \sim q, \sim \sim q, \sim p \rightarrow r \vdash r$
- (c) $p \wedge q, p \rightarrow r, q \rightarrow s \vdash r \wedge s$
- (d) $p \rightarrow q, q \rightarrow \sim r, p \vdash \sim r$
- (e) $p \rightarrow q, \sim q, \sim p \rightarrow r \vdash r$
- (f) $p \rightarrow q, p \rightarrow r, p \vdash q \wedge r$

- (g) $p \rightarrow q, \sim q, p \vee r \vdash r$
- (h) $p \vee \sim q, r \rightarrow \sim p, r \vdash \sim q$
- (i) $\sim p \vee \sim q, \sim \sim q, r \rightarrow p \vdash \sim r$
- (j) $p \rightarrow \sim q, \sim \sim q, \sim p \rightarrow r \vee s \vdash r \vee s$
- (k) $\sim p \vee \sim \sim q, \sim \sim p, \sim r \rightarrow \sim q \vdash \sim \sim r$
- (l) $p \rightarrow \sim q \wedge r, p, s \rightarrow q, s \vee t \vdash t$
- (m) $p \wedge q, p \rightarrow r, r \wedge s \rightarrow \sim t, q \rightarrow s \vdash \sim t$

9. Verificar que são válidos os seguintes argumentos:

- (a) $\begin{array}{ll} (1) & x + 8 = 12 \vee x \neq 4 \\ (2) & x = 4 \wedge y < x \\ (3) & x + 8 = 12 \wedge y < x \rightarrow y + 8 < 12 \end{array} \\ \hline \therefore & y + 8 < 12 \end{array}$
- (b) $\begin{array}{ll} (1) & x + 2 < 6 \rightarrow x < 4 \\ (2) & y < 6 \vee x + y < 10 \\ (3) & x + y < 10 \wedge x + 2 < 6 \end{array} \\ \hline \therefore & x < 4 \wedge y < 6 \end{array}$
- (c) $\begin{array}{ll} (1) & x = y \rightarrow x \neq y + 3 \\ (2) & x = y + 3 \vee x + 2 = y \\ (3) & x + 2 \neq y \wedge x = 5 \end{array} \\ \hline \therefore & x = 5 \wedge x \neq y \end{array}$
- (d) $\begin{array}{ll} (1) & x < y \vee x = y \\ (2) & x = y \rightarrow y \neq 5 \\ (3) & x < y \wedge y = 5 \rightarrow x < 5 \\ (4) & y = 5 \end{array} \\ \hline \therefore & x < 5 \end{array}$
- (e) $\begin{array}{ll} (1) & 3x + 2y = 18 \wedge x + 4y = 16 \\ (2) & x = 2 \rightarrow 3x + 2y \neq 18 \\ (3) & x = 2 \vee y = 3 \\ (4) & x \neq 4 \rightarrow y \neq 3 \end{array} \\ \hline \therefore & x = 4 \end{array}$
- (f) $\begin{array}{ll} (1) & x + 2 > 5 \rightarrow x = 4 \\ (2) & x = 4 \rightarrow x + 4 \neq 7 \\ (3) & x + 4 < 7 \\ (4) & x + 2 > 5 \vee (5 - x > 2 \wedge x < 3) \end{array} \\ \hline \therefore & x < 3 \end{array}$

$$\begin{array}{ll}
 \text{(g) (1)} & x > 5 \rightarrow x = 6 \vee x > 6 \\
 \text{(2)} & x \neq 5 \wedge x \neq 5 \rightarrow x > 5 \\
 \text{(3)} & x < 5 \rightarrow x \neq 7 \\
 \text{(4)} & x = 7 \wedge x \neq 6 \\
 \text{(5)} & x = 7 \rightarrow x \neq 5 \\
 \hline
 \therefore & x > 6
 \end{array}$$

10. Usar a regra da “Adição” para verificar que são válidos os seguintes argumentos:

- $$\begin{array}{l}
 \text{(a) } p \vee q, \quad p \rightarrow r, \quad \neg r \vdash q \vee s \\
 \text{(b) } p \wedge \neg q, \quad r \rightarrow \neg q, \quad \neg r \rightarrow s \vdash s \vee \neg p \\
 \text{(c) } \neg p, \quad q \rightarrow p, \quad \neg q \vee r \rightarrow s \vdash s \\
 \text{(d) } p \wedge q \rightarrow s, \quad r, \quad r \rightarrow p \wedge q \vdash s \vee q \\
 \text{(e) } p \wedge \neg q, \quad r \rightarrow q, \quad r \vee s, \quad p \vee s \rightarrow t \vdash t
 \end{array}$$

11. Usar a regra da “Adição” para verificar que são válidos os seguintes argumentos:

- $$\begin{array}{ll}
 \text{(a) (1)} & x > 3 \vee y < 4 \\
 \text{(2)} & x > 3 \rightarrow x > y \\
 \text{(3)} & x \geq y \\
 \hline
 \therefore & y < 4 \vee x > 2
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{ll}
 \text{(b) (1)} & x > y \vee x > 5 \\
 \text{(2)} & x \geq 5 \vee y < 6 \\
 \text{(3)} & x + y = 1 \wedge x \geq y \\
 \hline
 \therefore & x > y \vee y < 6
 \end{array}$$
-
- $$\begin{array}{ll}
 \text{(c) (1)} & x = 2 \rightarrow x < 3 \\
 \text{(2)} & x \neq 4 \wedge x < 3 \\
 \text{(3)} & x \neq 2 \vee x > 4 \rightarrow x = 5 \\
 \hline
 \therefore & x = 5 \wedge x \neq 4
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{ll}
 \text{(d) (1)} & y < 6 \rightarrow y < x \\
 \text{(2)} & y < 6 \vee x = 5 \rightarrow y > x \\
 \text{(3)} & y < x \\
 \hline
 \therefore & y = x \vee y > x
 \end{array}$$
-
- $$\begin{array}{ll}
 \text{(e) (1)} & x - 2 = 1 \wedge 2 - x \neq 1 \\
 \text{(2)} & x = 1 \rightarrow 2 - x = 1 \\
 \text{(3)} & x = 1 \vee x + 2 = 5 \\
 \text{(4)} & x + 2 = 5 \vee x - 2 = 1 \rightarrow x = 3 \\
 \hline
 \therefore & x = 3
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{ll}
 \text{(f) (1)} & x + 2 \neq 5 \vee 2x = 6 \\
 \text{(2)} & x + 2 \neq 5 \rightarrow x \neq 3 \\
 \text{(3)} & 2x - 2 = 8 \rightarrow 2x \neq 6 \\
 \text{(4)} & x + 3 = 8 \wedge 2x - 2 = 8 \\
 \hline
 \therefore & x \neq 3 \vee x > 2
 \end{array}$$

12. Deduzir de cada um dos seguintes conjuntos de premissas a conclusão indicada:

- $$\begin{array}{ll}
 \text{(a) (1)} & \sin 30^\circ = 0,5 \rightarrow \csc 30^\circ = 2 \\
 \text{(2)} & \sin 30^\circ = 0,5 \\
 \text{(3)} & \csc 30^\circ = 2 \rightarrow \tan 30^\circ = 0,58 \\
 \hline
 \therefore & \tan 30^\circ = 0,58 \vee \cos 60^\circ = 0,5
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 \text{(b) (1)} & Dx^3 = 3x^2 \wedge D3 = 0 \\
 \text{(2)} & Dx^3 = 3x^2 \rightarrow Dx^2 = 2x \\
 \text{(3)} & Dx^2 = 2x \vee Dx^3 = 12 \rightarrow x = 2 \\
 \hline
 \therefore & x = 2
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 \text{(c) (1)} & y < 4 \wedge x = y + 3 \\
 \text{(2)} & \neg(x \neq y + 3) \rightarrow x > 2 \\
 \text{(3)} & y \geq 2 \rightarrow x \geq 2 \\
 \text{(4)} & y \geq 2 \vee y = 3 \rightarrow x \geq 5 \\
 \hline
 \therefore & y < 3 \vee x \geq 5
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 \text{(d) (1)} & x = y \vee x < y \\
 \text{(2)} & y = x + 4 \\
 \text{(3)} & (x < 3 \vee x > 5) \wedge y = x + 4 \rightarrow y \neq 8 \\
 \text{(4)} & x \neq y \\
 \text{(5)} & y = 6 \vee x < y \rightarrow x < 3 \\
 \hline
 \therefore & (x = 4 \vee y \neq 8) \wedge x < 3
 \end{array}$$

13. Usar a regra do “Sílogismo hipotético” para verificar que são válidos os seguintes argumentos:

$$\begin{array}{ll}
 \text{(a) (1)} & 5x - 4 = 3x + 4 \rightarrow 5x = 3x + 8 \\
 \text{(2)} & 2x = 8 \rightarrow x = 4 \\
 \text{(3)} & 5x = 3x + 8 \rightarrow 2x = 8 \\
 \hline
 \therefore & 5x - 4 = 3x + 4 \rightarrow x = 4
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 \text{(b) (1)} & x \neq y \rightarrow y < x \\
 \text{(2)} & (x > 5 \rightarrow y < x) \rightarrow y = 5 \\
 \text{(3)} & y \neq 5 \vee x = 6 \\
 \text{(4)} & x > 5 \rightarrow x \neq y \\
 \hline
 \therefore & x = 6 \vee x > 6
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 \text{(c) (1)} & z = 5 \rightarrow ((y = 3 \rightarrow y + z = 8) \wedge z > y) \\
 \text{(2)} & (xy + z = 11 \rightarrow x = 2) \rightarrow (y = 3 \wedge z = 5) \\
 \text{(3)} & xy = 6 \rightarrow x = 2 \\
 \text{(4)} & xy + z = 11 \rightarrow xy = 6 \\
 \hline
 \therefore & y + z = 8
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 \text{(d) (1)} \quad 5x = 20 \rightarrow x = 4 \\
 \text{(2)} \quad 2x = 6 \vee x \neq 3 \\
 \text{(3)} \quad (5x - 3 = 17 \rightarrow x = 4) \rightarrow 2x \neq 6 \\
 \text{(4)} \quad 5x - 3 = 17 \rightarrow 5x = 20 \\
 \hline
 \therefore x \neq 3 \vee x < 4
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 \text{(e) (1)} \quad (x + y = 5 \rightarrow y = 3) \vee x + z = 3 \\
 \text{(2)} \quad z \neq 1 \vee (x + z = 3 \rightarrow x + y = 5) \\
 \text{(3)} \quad x + y \neq 5 \wedge z = 1 \\
 \hline
 \therefore x + z = 3 \rightarrow y = 3
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 \text{(f) (1)} \quad x = 3 \rightarrow x > y \\
 \text{(2)} \quad x \neq 3 \rightarrow z = 5 \\
 \text{(3)} \quad (x = 3 \rightarrow x < z) \rightarrow x \triangleleft z \\
 \text{(4)} \quad x > y \rightarrow x < z \\
 \hline
 \therefore z = 5 \vee z > 5
 \end{array}$$

14. Usar a regra do “Dilema construtivo” para verificar a validade dos seguintes argumentos:

$$\begin{array}{l}
 \text{(a) (1)} \quad 2x + y = 7 \rightarrow 2x = 4 \\
 \text{(2)} \quad 2x + y = 5 \rightarrow y = 1 \\
 \text{(3)} \quad 2x + y = 7 \vee 2x + y = 5 \\
 \text{(4)} \quad 2x \neq 4 \\
 \hline
 \therefore y = 1
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 \text{(b) (1)} \quad x \neq 6 \rightarrow (x = 2 \vee x = 8) \\
 \text{(2)} \quad 2x + 3y = 21 \wedge x \neq 6 \\
 \text{(3)} \quad x = 2 \rightarrow y = 9 \\
 \text{(4)} \quad x = 8 \rightarrow y = 1 \\
 \hline
 \therefore y = 1 \vee y = 9
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 \text{(c) (1)} \quad x > 5 \vee y \trianglelefteq 6 \\
 \text{(2)} \quad y \triangleleft 6 \rightarrow x < z \\
 \text{(3)} \quad x > 5 \rightarrow y < z \\
 \text{(4)} \quad y \triangleleft z \wedge z = 6 \\
 \hline
 \therefore x < z \vee z = 6
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 \text{(d) (1)} \quad y = 0 \rightarrow xy = 0 \\
 \text{(2)} \quad y = 0 \vee y \triangleleft 1 \\
 \text{(3)} \quad xy = 0 \vee xy > 3 \rightarrow x \neq 4 \\
 \text{(4)} \quad y \triangleleft 1 \rightarrow xy > 3 \\
 \hline
 \therefore x \neq 4 \vee x > y
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 \text{(e) (1)} \quad x < y \vee y < x \\
 \text{(2)} \quad y < x \rightarrow x > 6 \\
 \text{(3)} \quad x < y \rightarrow x < 7 \\
 \text{(4)} \quad (x > 6 \vee x < 7) \rightarrow y \triangleright 11 \\
 \text{(5)} \quad y > 11 \vee x < 0 \\
 \hline
 \therefore x < 0 \vee y < 12
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 \text{(f) (1)} \quad 2x^2 - 10x + 12 = 0 \wedge x < 4 \\
 \text{(2)} \quad x^2 - 5x + 6 = 0 \rightarrow x = 2 \vee x = 3 \\
 \text{(3)} \quad x = 2 \rightarrow x^2 = 4 \\
 \text{(4)} \quad x = 3 \rightarrow x^2 = 9 \\
 \text{(5)} \quad 2x^2 - 10x + 12 = 0 \rightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \\
 \hline
 \therefore x^2 = 4 \vee x^2 = 9
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 \text{(g) (1)} \quad x = 5 \vee x < y \\
 \text{(2)} \quad x > 3 \vee z < 2 \rightarrow z < x \vee y = 1 \\
 \text{(3)} \quad x < y \rightarrow z < 2 \\
 \text{(4)} \quad x = 5 \rightarrow x > 3 \\
 \text{(5)} \quad z < x \rightarrow x = 4 \\
 \text{(6)} \quad x > 3 \vee z < 2 \rightarrow y \neq 1 \\
 \hline
 \therefore x = 4
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 \text{(h) (1)} \quad (y = 5 \rightarrow x < y) \wedge x > 1 \\
 \text{(2)} \quad y > 5 \vee y = 5 \\
 \text{(3)} \quad x < y \vee y > 4 \rightarrow x + 1 \triangleright y \wedge y < 9 \\
 \text{(4)} \quad y > 5 \rightarrow y > 4 \\
 \hline
 \therefore x + 1 \triangleright y \vee x \triangleright 4
 \end{array}$$

15. Verificar a validade de cada um dos seguintes argumentos:

- (a) $p \wedge \neg q, \quad q \vee \neg r, \quad s \rightarrow r \vdash p \wedge \neg s$
- (b) $p \vee \neg q, \quad \neg q \rightarrow r, \quad p \rightarrow s, \quad \neg r \vdash s$

- (c) $p \rightarrow q, q \rightarrow \neg r, \neg \neg r, p \vee (s \wedge t) \vdash s$
 (d) $p \vee q, q \rightarrow r, p \rightarrow s, \neg s \vdash r \wedge (p \vee q)$
 (e) $\neg p \vee \neg q, \neg q \rightarrow \neg r, \neg p \rightarrow t, \neg t \vdash \neg r \wedge \neg t$
 (f) $p \rightarrow \neg q, p \vee r, r \rightarrow \neg q, s \rightarrow q, t \vdash \neg s \wedge t$
 (g) $\neg p \rightarrow q, q \rightarrow r \wedge s, p \rightarrow t, \neg t \vdash s$
 (h) $p \vee q, q \rightarrow r, \neg r \vdash p$
 (i) $p \rightarrow q, \neg q \wedge \neg r, \neg r \rightarrow s \vdash \neg p \wedge s$
 (j) $p \rightarrow q, p \vee r, \neg r \vdash q \vee s$
 (k) $p \rightarrow q, q \rightarrow r, (p \rightarrow r) \rightarrow \neg s, s \vee t \vdash t$
 (l) $p \vee \neg q, \neg r, p \rightarrow r, \neg q \rightarrow s \vdash s$
 (m) $r \rightarrow t, s \rightarrow q, t \vee q \rightarrow \neg p, r \vee s \vdash \neg p$
 (n) $p \rightarrow \neg q, \neg q \rightarrow \neg s, (p \rightarrow \neg s) \rightarrow \neg t, r \rightarrow t \vdash \neg r$
 (o) $p \vee q \rightarrow \neg r, s \rightarrow p, t \rightarrow q, s \vee t \vdash u \vee \neg r$

16. Verificar que são válidos os seguintes argumentos:

$$\begin{array}{l} (a) \quad (1) \quad x = y \vee x > y \\ (2) \quad x < 4 \vee x \not\in z \\ (3) \quad x = y \rightarrow x < z \\ (4) \quad x > y \rightarrow x < z \\ \hline \therefore \quad x < 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} (b) \quad (1) \quad 2x + y = 5 \rightarrow 2x = 2 \\ (2) \quad 2x + y = 5 \vee y = 3 \\ (3) \quad 2x = 2 \rightarrow x = 1 \\ (4) \quad y = 3 \rightarrow 2x = 2 \\ \hline \therefore \quad x = 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} (c) \quad (1) \quad x < 3 \vee x > 4 \\ (2) \quad x < 3 \rightarrow x \neq y \\ (3) \quad x > 4 \rightarrow x \neq y \\ (4) \quad x < y \vee x \neq y \rightarrow x \neq 4 \wedge x = 2 \\ \hline \therefore \quad x = ? \end{array}$$

$$\begin{array}{l} (d) \quad (1) \quad x = 3 \rightarrow 2x^2 = 18 \\ (2) \quad x = 3 \vee x = -3 \\ (3) \quad x = -3 \rightarrow 2x^2 = 18 \\ (4) \quad 2x^2 = 18 \rightarrow x^2 = 9 \\ \hline \therefore \quad x^2 = 9 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} (e) \quad (1) \quad z > x \rightarrow x \neq 7 \\ (2) \quad x < 6 \vee x = 3 \\ (3) \quad x = 3 \rightarrow z > x \\ (4) \quad x < 6 \rightarrow z > x \\ (5) \quad x = 7 \vee x = 5 \\ \hline \therefore \quad x = 5 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} (f) \quad (1) \quad x = 3 \vee x = 4 \\ (2) \quad x = 3 \rightarrow x^2 - 7x + 12 = 0 \\ (3) \quad x = 4 \rightarrow x^2 - 7x + 12 = 0 \\ (4) \quad x^2 - 7x + 12 = 0 \rightarrow x > 2 \\ (5) \quad x^2 < 9 \rightarrow x > 2 \\ (6) \quad x^2 < 9 \rightarrow x^2 = 9 \vee x^2 > 9 \\ \hline \therefore \quad x^2 = 9 \vee x^2 > 9 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} (g) \quad (1) \quad x > y \vee x < 4 \\ (2) \quad x < 4 \rightarrow x < y \wedge y < 4 \\ (3) \quad x > y \rightarrow x = 4 \\ (4) \quad x \neq 4 \\ \hline \therefore \quad x < y \end{array}$$

$$\begin{array}{l} (h) \quad (1) \quad x = \frac{5\pi}{6} \rightarrow \operatorname{sen} x = \frac{1}{2} \\ (2) \quad x = \frac{\pi}{6} \vee x = \frac{5\pi}{6} \\ (3) \quad \operatorname{sen} x = \frac{1}{2} \rightarrow \operatorname{csc} x = 2 \\ (4) \quad x = \frac{\pi}{6} \rightarrow \operatorname{sen} x = \frac{1}{2} \\ \hline \therefore \quad \operatorname{cos} x = \frac{\sqrt{3}}{2} \vee \operatorname{csc} x = 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} (i) \quad (1) \quad x + 2y = 5 \vee 3x + 4y = 11 \\ (2) \quad x > y \vee x \not\in 2 \rightarrow y < 2 \vee y < 1 \\ (3) \quad 3x + 4y = 11 \rightarrow x = 1 \\ (4) \quad x > y \vee x \not\in 2 \\ (5) \quad x + 2y = 5 \rightarrow x = 1 \\ \hline \therefore \quad x = 1 \wedge (y < 2 \vee y < 1) \end{array}$$

17. Use as Regras de Inferência para mostrar que são válidos os seguintes argumentos:

- (a) $p \vee q \rightarrow \neg r, p, s \rightarrow r \vdash \neg s$
- (b) $p \wedge (q \vee r), q \vee r \rightarrow \neg s, s \vee t \vdash t$
- (c) $p \vee q \rightarrow \neg r, q, s \wedge t \rightarrow r \vdash \neg(s \wedge t)$
- (d) $p \rightarrow q, \neg q, \neg p \vee \neg r \rightarrow s \vdash s$
- (e) $p \vee (q \wedge r), q \rightarrow s, r \rightarrow t, s \wedge t \rightarrow p \vee r, \neg p \vdash r$
- (f) $q \vee (r \rightarrow t), q \rightarrow s, \neg s \rightarrow (t \rightarrow p), \neg s \vdash r \rightarrow p$
- (g) $p \vee q \rightarrow (p \rightarrow s \wedge t), p \wedge r \vdash t \vee u$

Capítulo 12

Validade Mediante Regras de Inferência e Equivalências

1. REGRA DE SUBSTITUIÇÃO

Há muitos argumentos cuja validade não se pode demonstrar, verificar ou testar com o uso exclusivo das dez Regras de Inferência dadas anteriormente (Cap. 7), sendo necessário recorrer a um princípio de inferência adicional, a “Regra de substituição” de proposições equivalentes seguinte:

Uma proposição qualquer P ou apenas uma parte de P pode ser substituída por uma proposição equivalente, e a proposição Q que assim se obtém é equivalente à P.

2. EQUIVALÊNCIAS NOTÁVEIS

A fim de facilitar o emprego da “Regra de substituição” damos a seguir uma lista de proposições equivalentes, que podem substituir-se mutuamente onde quer que ocorram:

I. Idempotência (ID):

$$(i) \quad p \Leftrightarrow p \wedge p; \quad (ii) \quad p \Leftrightarrow p \vee p$$

II. Comutação (COM):

$$(i) \quad p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p; \quad (ii) \quad p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$$

III. Associação (ASSOC):

$$(i) \quad p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r \\ (ii) \quad p \vee (q \vee r) \Leftrightarrow (p \vee q) \vee r$$

IV. Distribuição (DIST):

- (i) $p \wedge (q \vee r) \leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
- (ii) $p \vee (q \wedge r) \leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

V. Dupla negação (DN):

$$p \leftrightarrow \sim \sim p$$

VI. De Morgan (DM):

- (i) $\sim(p \wedge q) \leftrightarrow \sim p \vee \sim q$
- (ii) $\sim(p \vee q) \leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$

VII. Condicional (COND):

$$p \rightarrow q \leftrightarrow \sim p \vee q$$

VIII. Bicondicional (BICOND):

- (i) $p \leftrightarrow q \leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
- (ii) $p \leftrightarrow q \leftrightarrow (p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$

IX. Contraposição (CP):

$$p \rightarrow q \leftrightarrow \sim q \rightarrow \sim p$$

X. Exportação-Importação (EI):

$$p \wedge q \rightarrow r \leftrightarrow p \rightarrow (q \rightarrow r)$$

Estas equivalências notáveis constituem dez Regras de Inferência adicionais que se usam para demonstrar, verificar ou testar a validade de argumentos mais complexos.

Uma importante diferença no modo de aplicar as dez primeiras Regras de Inferência e estas dez últimas Regras de Inferência deve ser observada: as dez primeiras Regras de Inferência só podem ser aplicadas a linhas completas de uma demonstração ou dedução, ao passo que as dez últimas Regras de Inferência podem ser aplicadas tanto a linhas completas como a partes de linhas completas consoante a "Regra de substituição".

Definição — Dado um argumento $P_1, P_2, \dots, P_n \vdash Q$, chama-se demonstração ou dedução de Q , a partir das premissas P_1, P_2, \dots, P_n , toda a sequência finita de proposições X_1, X_2, \dots, X_k tais que cada X_i ou é uma premissa ou resulta de proposições anteriores da sequência pelo uso de uma Regra de Inferência, e de tal modo que a última proposição X_k da sequência seja a conclusão Q do argumento dado.

3. EXEMPLIFICAÇÃO

- (1) Demonstrar que é válido o argumento: $p \rightarrow \sim q, q \vdash \sim p$

Dem. — Temos, sucessivamente:

(1)	$p \rightarrow \sim q$	P
(2)	q	P
(3)	$\sim \sim q \rightarrow \sim p$	1 – CP
(4)	$q \rightarrow \sim p$	3 – DN
(5)	$\sim p$	2,4 – MP

- (2) Demonstrar que é válido o argumento: $p \rightarrow q, r \rightarrow \sim q \vdash p \rightarrow \sim r$

Dem. — Temos, sucessivamente:

(1)	$p \rightarrow q$	P
(2)	$r \rightarrow \sim q$	P
(3)	$\sim \sim q \rightarrow \sim r$	2 – CP
(4)	$q \rightarrow \sim r$	3 – DN
(5)	$p \rightarrow \sim r$	1,4 – SH

- (3) Demonstrar que é válido o argumento: $p \vee (q \wedge r), p \vee q \rightarrow s \vdash p \vee s$

Dem. — Temos, sucessivamente:

(1)	$p \vee (q \wedge r)$	P
(2)	$p \vee q \rightarrow s$	P
(3)	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$	1 – DIST
(4)	$p \vee q$	3 – SIMP
(5)	s	2,4 – MP
(6)	$p \vee s$	5 – AD

(4) Demonstrar que é válido o argumento: $p \vee q \rightarrow r \wedge s, \sim s \vdash \sim q$

Dem. Temos, sucessivamente:

(1)	$p \vee q \rightarrow r \wedge s$	P
(2)	$\sim s$	P
(3)	$\sim r \vee \sim s$	2 - AD
(4)	$\sim(r \wedge s)$	3 - DM
(5)	$\sim(p \vee q)$	1,4 - MT
(6)	$\sim p \wedge \sim q$	5 - DM
(7)	$\sim q$	6 - SIMP

(5) Demonstrar a validade do argumento: "Se Londres não fica na Bélgica, então Paris não fica na França. Mas Paris fica na França. Logo, Londres fica na Bélgica".

Dem. Representando as proposições "Londres fica na Bélgica" e "Paris fica na França" respectivamente por p e q , o argumento dado na forma simbólica escreve-se:

$$\sim p \rightarrow \sim q, q \vdash p$$

Posto isto, temos sucessivamente:

(1)	$\sim p \rightarrow \sim q$	P
(2)	q	P
(3)	$\sim \sim p \vee \sim q$	1 - COND
(4)	$p \vee \sim q$	3 - DN
(5)	$\sim \sim q$	2 - DN
(6)	p	4,5 - SD

Logo, o argumento dado é válido, embora sua conclusão seja uma proposição falsa.

(6) Demonstrar a validade do argumento:

$$(p \vee \sim q) \vee r, \sim p \vee (q \wedge \sim p) \vdash q \rightarrow r$$

Dem. Temos, sucessivamente:

(1)	$(p \vee \sim q) \vee r$	P
(2)	$\sim p \vee (q \wedge \sim p)$	P
(3)	$(\sim p \vee q) \wedge (\sim p \vee \sim p)$	2 - DIST
(4)	$(\sim p \vee q) \wedge \sim p$	3 - ID
(5)	$\sim p$	4 - SIMP

(6)	$p \vee (\sim q \vee r)$	1 - ASSOC
(7)	$\sim q \vee r$	5,6 - SD
(8)	$q \rightarrow r$	7 - COND

(7) Demonstrar a validade do argumento:

$$p \rightarrow \sim q, r \rightarrow q, r \vdash \sim p$$

Dem. Temos, sucessivamente:

(1)	$p \rightarrow \sim q$	P
(2)	$r \rightarrow q$	P
(3)	r	P
(4)	$\sim q \rightarrow \sim r$	2 - CP
(5)	$p \rightarrow \sim r$	1,4 - SH
(6)	$\sim \sim r \rightarrow \sim p$	5 - CP
(7)	$r \rightarrow \sim p$	6 - DN
(8)	$\sim p$	3,7 - MP

(8) Demonstrar a validade do argumento:

$$p \rightarrow q, q \leftrightarrow s, t \vee (r \wedge \sim s) \vdash p \rightarrow t$$

Dem. Temos, sucessivamente:

(1)	$p \rightarrow q$	P
(2)	$q \leftrightarrow s$	P
(3)	$t \vee (r \wedge \sim s)$	P
(4)	$(q \rightarrow s) \wedge (s \rightarrow q)$	2 - BICOND
(5)	$q \rightarrow s$	4 - SIMP
(6)	$p \rightarrow s$	1,5 - SH
(7)	$(t \vee r) \wedge (t \vee \sim s)$	3 - DIST
(8)	$t \vee \sim s$	7 - SIMP
(9)	$\sim s \vee t$	8 - COM
(10)	$s \rightarrow t$	9 - COND
(11)	$p \rightarrow t$	6,10 - SH

(9) Demonstrar a validade do argumento: "Se estudo, então não sou reprovado em Física. Se não jogo basquete, então estudo. Mas fui reprovado em Física. Portanto, joguei basquete".

Dem. Representando "Estudo" por p , "Sou reprovado em Física" por q e "Jogo basquete" por r , o argumento dado sob forma simbólica escreve-se:

$$p \rightarrow \sim q, \sim r \rightarrow p, q \vdash r$$

Posto isto, temos sucessivamente:

(1)	$p \rightarrow \neg q$	P
(2)	$\neg r \rightarrow p$	P
(3)	q	P
(4)	$\neg\neg q$	3 - DN
(5)	$\neg p$	1,4 - MT
(6)	$\neg\neg r \vee p$	2 - COND
(7)	$r \vee p$	6 - DN
(8)	r	5,7 - SD

Logo, o argumento dado é válido.

(10) Demonstrar que é válido o argumento:

$$p \vee (q \wedge r), \quad p \rightarrow s, \quad s \rightarrow t \vdash t$$

Dem. — Temos, sucessivamente:

(1)	$p \vee (q \wedge r)$	P
(2)	$p \rightarrow s$	P
(3)	$s \rightarrow r$	P
(4)	$p \rightarrow r$	2,3 - SH
(5)	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$	1 - DIST
(6)	$p \vee r$	5 - SIMP
(7)	$r \vee p$	6 - COM
(8)	$\neg\neg r \vee p$	7 - DN
(9)	$\neg r \rightarrow p$	8 - COND
(10)	$\neg r \rightarrow r$	4,9 - SH
(11)	$\neg\neg r \vee r$	10 - COND
(12)	$r \vee r$	11 - DN
(13)	r	12 - ID

(11) Demonstrar que é válido o argumento:

$$p \wedge q \rightarrow \neg r, \quad r \vee (s \wedge t), \quad p \leftrightarrow q \vdash p \rightarrow s$$

Dem. — Temos, sucessivamente:

(1)	$p \wedge q \rightarrow \neg r$	P
(2)	$r \vee (s \wedge t)$	P
(3)	$p \leftrightarrow q$	P
(4)	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$	3 - BICOND
(5)	$p \rightarrow q$	4 - SIMP

(6)	$p \rightarrow p \wedge q$	5 - ABS
(7)	$p \rightarrow \neg r$	1,6 - SH
(8)	$(r \vee s) \wedge (\neg r \vee t)$	2 - DIST
(9)	$r \vee s$	8 - SIMP
(10)	$\neg\neg r \vee s$	9 - DN
(11)	$\neg r \rightarrow s$	10 - COND
(12)	$p \rightarrow s$	7,11 - SH

(12) Demonstrar que é válido o argumento:

$$p \rightarrow q, \quad r \rightarrow s, \quad q \vee s \rightarrow \neg t, \quad t \vdash \neg p \wedge \neg r$$

Dem. — Temos, sucessivamente:

(1)	$p \rightarrow q$	P
(2)	$r \rightarrow s$	P
(3)	$q \vee s \rightarrow \neg t$	P
(4)	t	P
(5)	$\neg\neg t$	4 - DN
(6)	$\neg(q \vee s)$	3,5 - MT
(7)	$\neg q \wedge \neg s$	6 - DM
(8)	$\neg q$	7 - SIMP
(9)	$\neg s$	7 - SIMP
(10)	$\neg p$	1,8 - MT
(11)	$\neg r$	2,9 - MT
(12)	$\neg p \wedge \neg r$	10,11 - CONJ

(13) Demonstrar a validade do argumento:

$$p \rightarrow q, \quad q \rightarrow (p \rightarrow (r \vee s)), \quad r \leftrightarrow s, \quad \neg(r \wedge s) \vdash \neg p$$

Dem. — Temos, sucessivamente:

(1)	$p \rightarrow q$	P
(2)	$q \rightarrow (p \rightarrow (r \vee s))$	P
(3)	$r \leftrightarrow s$	P
(4)	$\neg(r \wedge s)$	P
(5)	$(r \wedge s) \vee (\neg r \wedge \neg s)$	3 - BICOND
(6)	$\neg r \wedge \neg s$	5 - SIMP
(7)	$\neg(r \vee s)$	6 - DM
(8)	$p \rightarrow (p \rightarrow (r \vee s))$	1,2 - SH
(9)	$(p \wedge p) \rightarrow (r \vee s)$	8 - EI
(10)	$p \rightarrow r \vee s$	9 - ID
(11)	$\neg p$	7,10 - MT

(14) Demonstrar a validade do argumento:

$$p \rightarrow q, q \rightarrow r, r \rightarrow p, p \rightarrow \neg r \vdash \neg p \wedge \neg r$$

Dem. Temos, sucessivamente:

(1)	$p \rightarrow q$	P
(2)	$q \rightarrow r$	P
(3)	$r \rightarrow p$	P
(4)	$p \rightarrow \neg r$	P
(5)	$p \rightarrow r$	1,2 - SH
(6)	$(p \rightarrow r) \wedge (r \rightarrow p)$	3,5 - AD
(7)	$p \leftrightarrow r$	6 - BICOND
(8)	$(p \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg r)$	7 - BICOND
(9)	$\neg p \vee \neg r$	4 - COND
(10)	$\neg(p \wedge r)$	9 - DM
(11)	$\neg p \wedge \neg r$	8,10 - SD

(15) Demonstrar que é válido o argumento:

$$\neg p \vee q \rightarrow r, r \vee s \rightarrow \neg t, t \vdash \neg q$$

Dem. Temos, sucessivamente:

(1)	$\neg p \vee q \rightarrow r$	P
(2)	$r \vee s \rightarrow \neg t$	P
(3)	t	P
(4)	$\neg\neg t$	3 - DN
(5)	$\neg(r \vee s)$	2,4 - MT
(6)	$\neg r \wedge \neg s$	5 - DM
(7)	$\neg r$	6 - SIMP
(8)	$\neg(\neg p \vee q)$	1,7 - MT
(9)	$\neg\neg p \wedge \neg q$	8 - DM
(10)	$p \wedge q$	9 - DN
(11)	$\neg q$	10 - SIMP

(16) Demonstrar a validade do argumento:

(1)	$x < 6$
(2)	$y > 7 \vee x = y \rightarrow \neg(y = 4 \wedge x < y)$
(3)	$y \neq 4 \rightarrow x \leq 6$
(4)	$x < 6 \rightarrow x < y$
	$\therefore x \neq y$

Dem. Temos, sucessivamente:

(1)	$x < 6$	P
(2)	$y > 7 \vee x = y \rightarrow \neg(y = 4 \wedge x < y)$	P
(3)	$y \neq 4 \rightarrow x \leq 6$	P
(4)	$x < 6 \rightarrow x < y$	P
(5)	$x < y$	1,4 - MP
(6)	$y = 4$	1,3 - MT
(7)	$y = 4 \wedge x < y$	5,6 - CONJ
(8)	$\neg(y = 4 \wedge x < y)$	7 - DN
(9)	$\neg(y > 7 \vee x = y)$	2,8 - MT
(10)	$y \geq 7 \wedge x \neq y$	9 - DM
(11)	$x \neq y$	10 - SIMP

(17) Demonstrar a validade do argumento:

(1)	$y \neq 1 \wedge y \leq 1$
(2)	$y \geq 1 \rightarrow y < 1 \vee y = 1$
(3)	$x = 3 \vee x > 3$
(4)	$x \geq 3 \rightarrow x \neq y$
(5)	$x = 3 \rightarrow x \neq y$
	$\therefore \neg(x = y \vee y \geq 1)$

Dem. Temos, sucessivamente:

(1)	$y \neq 1 \wedge y \leq 1$	P
(2)	$y \geq 1 \rightarrow y < 1 \vee y = 1$	P
(3)	$x = 3 \vee x > 3$	P
(4)	$x \geq 3 \rightarrow x \neq y$	P
(5)	$x = 3 \rightarrow x \neq y$	P
(6)	$x \neq y \vee x \neq y$	3,4,5 - DC
(7)	$x \neq y$	6 - ID
(8)	$y \leq 1 \wedge y \neq 1$	1 - COM
(9)	$\neg(y < 1 \vee y = 1)$	8 - DM
(10)	$y > 1$	2,9 - MT
(11)	$x \neq y \wedge y > 1$	7,10 - CONJ
(12)	$\neg(x = y \vee y \geq 1)$	11 - DM

(18) Demonstrar a validade do argumento:

(1)	$x = y \rightarrow x \leq y$
(2)	$y = 0 \leftrightarrow x \leq y$
(3)	$x = 0 \vee xy = 0 \rightarrow y = 0$
(4)	$(x = y \rightarrow y = 0) \rightarrow x = 0$
	$\therefore \neg(x < y \wedge x = 1)$

Dem. — Temos, sucessivamente:

- | | | |
|------|--|------------|
| (1) | $x = y \rightarrow x \triangleleft y$ | P |
| (2) | $y = 0 \leftrightarrow x \triangleleft y$ | P |
| (3) | $x = 0 \vee xy = 0 \rightarrow y = 0$ | P |
| (4) | $(x = y \rightarrow y = 0) \rightarrow x = 0$ | P |
| (5) | $(y = 0 \rightarrow x \triangleleft y) \wedge (x \triangleleft y \rightarrow y = 0)$ | 2 — BICOND |
| (6) | $x \triangleleft y \rightarrow y = 0$ | 5 — SIMP |
| (7) | $x = y \rightarrow y = 0$ | 1,6 — SH |
| (8) | $x = 0$ | 4,7 — MP |
| (9) | $x = 0 \vee xy = 0$ | 8 — AD |
| (10) | $y = 0$ | 3,9 — MP |
| (11) | $y = 0 \rightarrow x \triangleleft y$ | 5 — SIMP |
| (12) | $x \triangleleft y$ | 10,11 — MP |
| (13) | $x \triangleleft y \vee x \neq 1$ | 12 — AD |
| (14) | $\neg(x \triangleleft y \wedge x = 1)$ | 13 — DM |

(19) Demonstrar a validade do argumento:

- | | |
|--------------|---|
| (1) | $x < y \wedge y < z \rightarrow x < z$ |
| (2) | $(y < z \rightarrow x < z) \rightarrow z = 3$ |
| (3) | $x < y$ |
| \therefore | $z = 3$ |

Dem. — Temos, sucessivamente:

- | | | |
|-----|---|----------|
| (1) | $x < y \wedge y < z \rightarrow x < z$ | P |
| (2) | $(y < z \rightarrow x < z) \rightarrow z = 3$ | P |
| (3) | $x < y$ | P |
| (4) | $x < y \rightarrow (y < z \rightarrow x < z)$ | 1 — EI |
| (5) | $y < z \rightarrow x < z$ | 3,4 — MP |
| (6) | $z = 3$ | 2,5 — MP |

4. INCONSISTÊNCIA

Duas ou mais proposições que não podem ser simultaneamente verdadeiras dizem-se **inconsistentes**. Também se diz que formam um conjunto inconsistente de proposições.

Um argumento se diz **inconsistente** se as suas premissas não podem ser simultaneamente verdadeiras (inconsistentes).

As proposições:

$$\neg(p \vee \neg q), \quad p \vee \neg r, \quad q \rightarrow r$$

p. ex., são **inconsistentes**, pois, é impossível encontrar uma atribuição de valores às proposições simples componentes p , q e r que torne essas três proposições compostas simultaneamente verdadeiras. Com efeito, construindo as tabelas-verdade dessas três proposições verifica-se que, em cada linha, pelo menos uma delas é falsa (F), isto é, não há uma só linha em que admitam, todas, o valor lógico V.

\sim	(p)	(\vee)	(\sim)	(q)	(p)	(\vee)	(\sim)	(r)	(q)	(\rightarrow)	(r)
F	V	V	F	V	V	V	F	V	V	V	V
F	V	V	F	V	V	V	V	F	V	F	F
F	V	V	V	F	V	V	F	V	F	V	V
F	V	V	V	F	V	V	V	F	F	V	F
V	F	F	F	V	F	F	F	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F	V	V	F	V	F	F
F	F	V	V	F	F	F	F	V	F	V	V
F	F	V	V	F	F	V	V	F	F	V	F

Também se pode demonstrar que as três proposições dadas são inconsistentes deduzindo do seu conjunto uma **contradição** qualquer, p. ex., do tipo $A \wedge \neg A$, mediante as **regras de dedução** usadas para os argumentos, pois, como estas regras preservam a verdade, a **contradição** que se obtém prova que estas três proposições não podem ser conjuntamente verdadeiras. Realmente, temos, sucessivamente:

- | | | |
|------|-----------------------------|--------------------|
| (1) | $\neg(p \vee \neg q)$ | |
| (2) | $p \vee \neg r$ | |
| (3) | $q \rightarrow r$ | |
| (4) | $\neg p \wedge \neg \neg q$ | 1 — DM |
| (5) | $\neg p \wedge q$ | 4 — DN |
| (6) | q | 5 — SIMP |
| (7) | r | 3,6 — MP |
| (8) | $\neg p$ | 5 — SIMP |
| (9) | $\neg r$ | 2,8 — SD |
| (10) | $r \wedge \neg r$ | 7,9 — CONJ (Cont.) |

Outros exemplos:

(1) Demonstrar que são inconsistentes as três seguintes proposições:

- | | |
|-----|------------------------------|
| (1) | $x = 1 \rightarrow y \leq x$ |
| (2) | $y < x \rightarrow y = 0$ |
| (3) | $\neg(y = 0 \vee x \neq 1)$ |

Dem. Temos, sucessivamente:

- (1) $x = 1 \rightarrow y < x$
- (2) $y < x \rightarrow y = 0$
- (3) $\sim(y = 0 \vee x \neq 1)$

- (4) $x = 1 \rightarrow y = 0$ 1,2 - SH
- (5) $y \neq 0 \wedge x = 1$ 3 - DM
- (6) $x = 1$ 5 - SIMP
- (7) $y = 0$ 4,6 - MP
- (8) $y \neq 0$ 5 - SIMP
- (9) $y = 0 \wedge y \neq 0$ 7,8 - CONJ (Cont.)

(2) Demonstrar que é **inconsistente** o conjunto das seguintes proposições:

$$\sim p \vee \sim q, \quad p \wedge s, \quad \sim s \vee r, \quad r \rightarrow t \wedge q$$

Dem. Temos, sucessivamente:

- (1) $\sim p \vee \sim q$
- (2) $p \wedge s$
- (3) $\sim s \vee r$
- (4) $r \rightarrow t \wedge q$

- (5) p 2 - SIMP
- (6) s 2 - SIMP
- (7) $\sim q$ 1,5 - SD
- (8) r 3,6 - SD
- (9) $r \wedge q$ 4,8 - MP
- (10) q 9 - SIMP
- (11) $q \wedge \sim q$ 7,10 - CONJ (Cont.)

(3) Demonstrar que é **consistente** o conjunto das seguintes proposições:

$$\sim(p \vee q), \quad r \rightarrow s, \quad \sim q \wedge r$$

Dem. Com efeito, para a seguinte atribuição de valores lógicos às proposições simples componentes p, q, r e s :

V	F
r	p
s	q

as três proposições compostas dadas são simultaneamente verdadeiras, pois, temos:

$$\sim(F \vee F) = \sim F = V, \quad F \rightarrow F = V, \quad \sim F \wedge V = V \wedge V = V$$

EXERCÍCIOS

1. Demonstrar a **validade** dos seguintes argumentos:

- (a) $p \rightarrow \sim q, \quad q, \quad \sim p \rightarrow r \wedge s \vdash r \wedge s$
- (b) $p \rightarrow q, \quad \sim p \rightarrow \sim \sim r, \quad \sim q \vdash r$
- (c) $p \rightarrow \sim r, \quad q \rightarrow r, \quad q \vdash \sim p$
- (d) $\sim p \rightarrow \sim q, \quad \sim q \rightarrow \sim r, \quad r \vdash p$
- (e) $\sim p \vee q, \quad \sim p \rightarrow r, \quad \sim r \vdash q$
- (f) $r \rightarrow p \vee q, \quad \sim \sim r, \quad \sim q \vdash p$
- (g) $\sim p \vee q, \quad \sim q, \quad \sim(q \wedge r) \rightarrow p \vdash r$
- (h) $p, \quad \sim q \rightarrow \sim p \vdash q \vee \sim s$
- (i) $\sim p \rightarrow q, \quad q \rightarrow r, \quad \sim r \vdash p$
- (j) $p \rightarrow q, \quad \sim q, \quad \sim p \rightarrow r \vdash \sim \sim r$
- (k) $\sim p \rightarrow \sim q, \quad q \vdash p$
- (l) $p \vee q, \quad \sim q, \quad p \rightarrow r \wedge s \vdash s \wedge r$
- (m) $(r \wedge \sim t) \rightarrow \sim s, \quad p \rightarrow s, \quad p \wedge q \vdash \sim(\sim t \wedge r)$
- (n) $(r \wedge s) \vee p, \quad q \rightarrow \sim p, \quad t \rightarrow \sim p, \quad q \vee t \vdash s \wedge r$
- (o) $\sim p \vee \sim q, \quad \sim r \rightarrow p, \quad r \rightarrow \sim s, \quad s \vdash \sim q$
- (p) $p \rightarrow q \vee r, \quad \sim \sim p, \quad \sim r \vdash q$
- (q) $r \rightarrow p \wedge \sim q, \quad r \vee \sim s, \quad s \vdash \sim q \wedge p$
- (r) $\sim(p \wedge q), \quad \sim q \rightarrow r, \quad \sim p \rightarrow r, \quad s \rightarrow \sim r \vdash \sim s$
- (s) $p \wedge \sim q, \quad p \rightarrow \sim r, \quad q \vee \sim s \vdash \sim(r \vee s)$
- (t) $\sim s \rightarrow \sim(p \vee \sim t), \quad t \rightarrow q \wedge r, \quad \sim s \vdash r \wedge q$
- (u) $\sim p \rightarrow q, \quad r \rightarrow q, \quad r \vee \sim p, \quad \sim q \vee s \vdash s$
- (v) $t \rightarrow p \wedge s, \quad q \rightarrow \sim p, \quad r \rightarrow \sim s, \quad r \vee q \vdash \sim t$
- (w) $r \rightarrow \sim p, \quad (r \wedge s) \vee t, \quad t \rightarrow q \vee u, \quad \sim q \wedge \sim u \vdash \sim p$
- (x) $p \vee q, \quad s \rightarrow q \wedge r, \quad p \rightarrow s, \quad q \rightarrow s \vdash r \wedge q$
- (y) $\sim(p \vee \sim r), \quad p \vee q, \quad r \rightarrow s, \quad q \wedge s \rightarrow t \wedge s \vdash s \wedge t$
- (z) $p \rightarrow q, \quad q \rightarrow r \vdash \sim p \vee r$

2. Demonstrar a **validade** dos seguintes argumentos:

- (a) (1) $x > y \rightarrow x > z$
 (2) $z > 6 \rightarrow \sim(x > y \rightarrow z < 7)$
 (3) $x > z \rightarrow z < 7$

$$\therefore z > 6 \vee z < y$$

- (b) (1) $x \neq y \rightarrow x > y \vee x < y$
 (2) $x > y \vee x < y \rightarrow x \neq 4$
 (3) $x < y \rightarrow \sim(x \neq y \rightarrow x \neq 4)$
 (4) $x \neq y$

$$\therefore x > y$$

(c) (1) $x = 3 \vee y = 3$
(2) $x > 2 \vee x + y > 5$
(3) $y = 3 \vee x = 3 \rightarrow x + y > 5$
(4) $\sim(y < 5 \wedge y > 3) \rightarrow x \geq 2$

$$\therefore y < 5$$

(d) (1) $x < 3 \wedge y > 6$
(2) $y \neq 7 \rightarrow \sim(x = 2 \wedge y > x)$
(3) $y > 6 \wedge x < 3 \rightarrow y > x \wedge x = 2$

$$\therefore y = 7$$

(e) (1) $y \neq 3$
(2) $x + y = 8 \rightarrow y = 3$
(3) $x + y = 8 \vee x \neq 5$

$$\therefore \sim(x = 5 \wedge y = 4)$$

(f) (1) $x \neq y$
(2) $x < y \vee \sim(x \geq 3 \vee x + y < 5)$
(3) $x > 3 \rightarrow \sim(x \geq y \vee y \neq 2)$

$$\therefore x > y$$

(g) (1) $\sim(y - x = 2 \vee x + y \geq 8)$
(2) $\sim(x > y \vee y < 5)$
(3) $x = 2 \rightarrow x + y \geq 8$

$$\therefore \sim(x = 2 \vee y < 5)$$

(h) (1) $x = 1 \rightarrow x < y$
(2) $x^2 - 4x + 3 = 0 \rightarrow x = 1 \vee x = 3$
(3) $\sim(x = y \vee x^2 - 4x + 3 \neq 0)$
(4) $x = 3 \rightarrow x < y$

$$\therefore x < y \vee y \neq 4$$

(i) (1) $\sim(x > y \wedge x + y > 7)$
(2) $x \geq y \rightarrow x < 4$
(3) $x + y \geq 7 \rightarrow x < 4$
(4) $x - y = 2 \rightarrow x \leq 4$

$$\therefore x - y \neq 2$$

(j) (1) $\sim(z < 3 \vee x > y) \wedge y = 2$
(2) $x \neq y \vee x = 1$
(3) $x > z \rightarrow x > y$
(4) $x \geq z \rightarrow x \leq y$

$$\therefore x = 1$$

(k) (1) $3x + y = 11 \leftrightarrow 3x = 9$
(2) $3x = 9 \rightarrow 3x + y = 11 \leftrightarrow y = 2$
(3) $y \neq 2 \vee x + y = 5$

$$\therefore x + y = 5$$

(l) (1) $2x = 6 \leftrightarrow x = 3$
(2) $2x = 8 \leftrightarrow x = 4$
(3) $2x = 6 \vee x = 4$

$$\therefore \sim(2x \neq 8 \wedge x \neq 3)$$

(m) (1) $5x = 15 \leftrightarrow x = 3$
(2) $5x = 15 \wedge 4x = 12$
(3) $x = 3 \rightarrow x + 2y = 7$

$$\therefore \sim(y = 2 \wedge x + 2y \neq 7)$$

(n) (1) $y \geq x \leftrightarrow x = y \vee x < y$
(2) $\sim(y < 1 \vee y > x)$

$$\therefore x \leq y \wedge x \neq y$$

(o) (1) $x < y \leftrightarrow y > 4$
(2) $y = 6 \leftrightarrow x + y = 10$
(3) $y > 4 \wedge x + y = 10$

$$\therefore x < y \wedge y = 6$$

(p) (1) $x > y \vee x < 6$
(2) $x > y \rightarrow x > 4$
(3) $x > 4 \rightarrow x = 5 \wedge x < 7$
(4) $x < 6 \rightarrow x = 5 \wedge x < 7$
(5) $x < 7 \wedge x = 5 \rightarrow z > x \vee y < z$
(6) $x > y \rightarrow \sim(y < z \vee z > x)$

$$\therefore x < 6$$

3. Demonstrar a validade dos seguintes argumentos:

- (a) $r \rightarrow p \wedge q, \sim p \vee \sim q, r \vee s \vdash s$
- (b) $p \vee q \rightarrow r, \sim r, \sim p \rightarrow s \vdash s$
- (c) $(p \rightarrow q) \rightarrow r, \sim r, (\sim p \vee q) \vee s \vdash s$
- (d) $\sim(p \wedge q) \rightarrow (r \rightarrow s), r \wedge \sim s, q \rightarrow t \vdash t$
- (e) $p \vee \sim(q \vee \sim r), \sim p, r \rightarrow s \vee t \vdash s \vee t$
- (f) $p \vee q \rightarrow r, \sim r, q \vee (\sim s \vee t) \vdash s \rightarrow t$
- (g) $p \vee (\sim q \rightarrow r), \sim(p \vee s) \wedge \sim r \vdash q$
- (h) $(p \rightarrow q) \rightarrow r, \sim r \vee s, \sim(p \wedge \sim q), s \vee t \rightarrow u \vdash u$
- (i) $\sim p \vee q, \sim s \rightarrow \sim r, p \vee (r \wedge t) \vdash q \vee s$

- (j) $p \rightarrow \neg q, p \vee (r \wedge s) \vdash q \rightarrow s$
 (k) $p \rightarrow q \vee r, \neg r \vdash p \rightarrow q$
 (l) $\neg p \vee \neg q \rightarrow r, r \rightarrow s \vdash \neg s \rightarrow p$
 (m) $p \vee q, q \rightarrow r, s \rightarrow t, \neg r \vdash s \rightarrow p$
 (n) $p \rightarrow q, q \vee r \rightarrow s, \neg s \vdash \neg p$
 (o) $p \vee (q \wedge r), p \vee r \rightarrow s \wedge t \vdash s$
 (p) $(p \rightarrow q) \vee (r \wedge s), \neg q \vdash \neg p \vee s$
 (q) $p \rightarrow q, p \wedge q \rightarrow r \vee s, r \vee s \rightarrow \neg t, (p \rightarrow \neg t) \rightarrow u \vdash u$
 (r) $p \vee q \rightarrow r \wedge s, \neg r \vdash \neg p$

4. Demonstrar que os seguintes conjuntos de proposições são inconsistentes deduzindo uma contradição para cada um deles:

- | | |
|--|---|
| (a) (1) $q \rightarrow p$
(2) $\neg(p \vee r)$
(3) $q \vee r$ | (b) (1) $p \vee \neg q$
(2) $\neg(q \rightarrow r)$
(3) $p \rightarrow r$ |
| (c) (1) $\neg(p \vee q)$
(2) $\neg q \rightarrow r$
(3) $\neg r \vee s$
(4) $\neg p \rightarrow \neg s$ | (d) (1) $p \vee s \rightarrow q$
(2) $q \rightarrow \neg r$
(3) $t \rightarrow p$
(4) $t \wedge r$ |
| (e) (1) $x = y \rightarrow x < 4$
(2) $x < 4 \vee x < z$
(3) $\neg(x < z \vee x \neq y)$ | (f) (1) $x = 0 \leftrightarrow x + y = y$
(2) $x > 1 \wedge x = 0$
(3) $x + y = y \rightarrow x \geq 1$ |
| (g) (1) $x = y \rightarrow x < z$
(2) $x < z \wedge (x = y \vee y < z)$
(3) $y < z \rightarrow x < z$ | (h) (1) $x < y \rightarrow x \neq y$
(2) $y > z \rightarrow z < y$
(3) $x = y \wedge y > z$
(4) $x < y \vee z < y$ |

5. Demonstrar que os seguintes conjuntos de proposições são consistentes:

- | | |
|---|--|
| (a) (1) $p \rightarrow q$
(2) $q \rightarrow r$
(3) $\neg r \vee s$ | (b) (1) $p \rightarrow q$
(2) $\neg q \rightarrow r$
(3) $p \vee r$ |
| (c) (1) $\neg p \vee \neg q$
(2) $\neg p \rightarrow r$
(3) $\neg r$ | (d) (1) $p \rightarrow q$
(2) $r \rightarrow q$
(3) $q \rightarrow \neg s$ |
| (e) (1) $x = y \rightarrow x \neq y$
(2) $x < y \vee x = y$
(3) $x < y \rightarrow x < y$ | (f) (1) $x = 2 \vee x = 3$
(2) $x \neq 2 \vee x \neq 3$ |

Capítulo 13

Demonstração Condicional e Demonstração Indireta

1. DEMONSTRAÇÃO CONDICIONAL

Outro método muito útil para demonstrar a validade de um argumento é a “Demonstração condicional”. Esta demonstração, todavia, só pode ser usada se a conclusão do argumento tem a forma condicional.

Seja o argumento:

$$P_1, P_2, \dots, P_n \vdash A \rightarrow B \quad (1)$$

cuja conclusão é a condicional $A \rightarrow B$.

Sabemos que este argumento é válido se e somente se a “condicional associada”:

$$(P_1 \wedge P_2 \wedge \dots \wedge P_n) \rightarrow (A \rightarrow B)$$

é tautológica. Ora, pela “Regra de Importação”, esta “condicional associada” é equivalente à seguinte:

$$[(P_1 \wedge P_2 \wedge \dots \wedge P_n) \wedge A] \rightarrow B$$

Assim sendo, o argumento (1) é válido se e somente se também é válido o argumento:

$$P_1, P_2, \dots, P_n, A \vdash B$$

cujas premissas são todas aquelas do primitivo argumento (1), mais uma, A, e cuja conclusão é B (observe-se que A e B são respectivamente o antecedente e o consequente da conclusão do primitivo argumento (1)).

Em resumo, temos a seguinte regra DC: Para demonstrar a validade do argumento (1), cuja conclusão tem forma condicional, $A \rightarrow B$, introduz-se A como “premissa adicional” (indicada por PA) e deduz-se B.

2. EXEMPLIFICAÇÃO

(1) Demonstrar a validade do argumento:

$$p \vee (q \rightarrow r), \sim r \vdash q \rightarrow p$$

Dem. De conformidade com a Regra DC para demonstração de um argumento cuja conclusão tem forma condicional, cumpre deduzir “ p ” a partir das premissas: $p \vee (q \rightarrow r)$, $\sim r$ e q , isto é, demonstrar a validade do argumento:

$$p \vee (q \rightarrow r), \sim r, q \vdash p$$

Temos, sucessivamente:

(1)	$p \vee (q \rightarrow r)$	P
(2)	$\sim r$	P
(3)	q	PA
(4)	$p \vee (\sim q \vee r)$	1 - COND
(5)	$(p \vee \sim q) \vee r$	4 - ASSOC
(6)	$p \vee \sim q$	2,5 - SD
(7)	$\sim \sim q$	3 - DN
(8)	p	6,7 - SD

(2) Demonstrar a validade do argumento:

$$\sim p \rightarrow \sim q \vee r, s \vee (r \rightarrow t), \sim p \vee s, \sim s \vdash q \rightarrow t$$

Dem. De conformidade com a Regra DC, cumpre demonstrar a validade do argumento:

$$\sim p \rightarrow \sim q \vee r, s \vee (r \rightarrow t), \sim p \vee s, \sim s, q \vdash t$$

Temos, sucessivamente:

(1)	$\sim p \rightarrow \sim q \vee r$	P
(2)	$s \vee (r \rightarrow t)$	P
(3)	$\sim p \vee s$	P
(4)	$\sim s$	P
(5)	q	PA
(6)	$p \rightarrow s$	3 - COND
(7)	$\sim p$	4,6 - MT
(8)	$\sim q \vee r$	1,7 - MP
(9)	$q \rightarrow r$	8 - COND
(10)	$r \rightarrow t$	2,4 - SD
(11)	$q \rightarrow t$	9,10 - SH
(12)	t	5,11 - MP

(3) Demonstrar a validade do argumento:

$$\begin{array}{l} (1) (y = 4 \rightarrow x > y) \wedge x > z \\ (2) x > y \vee z > y \rightarrow y < 4 \wedge y \neq 3 \\ (3) y = 2 \rightarrow z > y \\ \hline \therefore y = 2 \vee y = 4 \rightarrow y < 4 \vee y > 3 \end{array}$$

Dem. De conformidade com a Regra DC, cumpre demonstrar a validade do argumento:

$$\begin{array}{l} (1) (y = 4 \rightarrow x > y) \wedge x > z \\ (2) x > y \vee z > y \rightarrow y < 4 \wedge y \neq 3 \\ (3) y = 2 \rightarrow z > y \\ (4) y = 2 \vee y = 4 \\ \hline \therefore y < 4 \vee y > 3 \end{array}$$

Temos, sucessivamente:

$$\begin{array}{ll} (1) (y = 4 \rightarrow x > y) \wedge x > z & P \\ (2) x > y \vee z > y \rightarrow y < 4 \wedge y \neq 3 & P \\ (3) y = 2 \rightarrow z > y & P \\ (4) y = 2 \vee y = 4 & PA \\ (5) y = 4 \rightarrow x > y & 1 - SIMP \\ (6) x > y \vee z > y & 3,4,5 - DC \\ (7) y < 4 \wedge y \neq 3 & 2,6 - MP \\ (8) y < 4 & 7 - SIMP \\ (9) y < 4 \vee y > 3 & 8 - AD \end{array}$$

(4) Demonstrar a validade do argumento:

$$\sim p \rightarrow (q \rightarrow r), s \vee (r \rightarrow t), p \rightarrow s \vdash \sim s \rightarrow (q \rightarrow t)$$

Dem. Consoante a Regra DC, cumpre demonstrar a validade do argumento:

$$\sim p \rightarrow (q \rightarrow r), s \vee (r \rightarrow t), p \rightarrow s, \sim s \vdash q \rightarrow t$$

Como a conclusão deste argumento também é uma condicional, $q \rightarrow t$, fazendo uso novamente da mesma Regra DC, cumpre demonstrar a validade do argumento:

$$\sim p \rightarrow (q \rightarrow r), s \vee (r \rightarrow t), p \rightarrow s, \sim s, q \vdash t$$

Temos, sucessivamente:

(1)	$\neg p \rightarrow (q \rightarrow r)$	P
(2)	$s \vee (r \rightarrow t)$	P
(3)	$p \rightarrow s$	P
(4)	$\neg s$	PA
(5)	q	PA
(6)	$\neg p$	3,4 - MT
(7)	$q \rightarrow r$	1,6 - MP
(8)	r	5,7 - MP
(9)	$r \rightarrow t$	2,4 - SD
(10)	t	8,9 - MP

(5) Demonstrar a validade do argumento:

$$p \rightarrow q, \quad q \leftrightarrow s, \quad t \vee (r \wedge \neg s) \vdash p \rightarrow t$$

Dem. Consoante a Regra DC, cumpre demonstrar a validade do argumento:

$$p \rightarrow q, \quad q \leftrightarrow s, \quad t \vee (r \wedge \neg s), \quad p \vdash t.$$

Temos, sucessivamente:

(1)	$p \rightarrow q$	P
(2)	$q \leftrightarrow s$	P
(3)	$t \vee (r \wedge \neg s)$	P
(4)	p	PA
(5)	q	1,4 - MP
(6)	$(q \rightarrow s) \wedge (s \rightarrow q)$	2 - BICOND
(7)	$q \rightarrow s$	6 - SIMP
(8)	s	5,7 - MP
(9)	$(t \vee r) \wedge (t \vee \neg s)$	3 - DIST
(10)	$t \vee \neg s$	9 - SIMP
(11)	$\neg \neg s$	8 - DN
(12)	t	10,11 - SD

(6) Demonstrar a validade do argumento:

$$\neg p \rightarrow \neg q, \quad r \rightarrow s, \quad (\neg p \wedge t) \vee (r \wedge u) \vdash q \rightarrow s$$

Dem. — Consoante a Regra DC, cumpre demonstrar a validade do argumento:

$$\neg p \rightarrow \neg q, \quad r \rightarrow s, \quad (\neg p \wedge t) \vee (r \wedge u), \quad q \vdash s$$

Temos, sucessivamente:

(1)	$\neg p \rightarrow \neg q$	P
(2)	$r \rightarrow s$	P
(3)	$(\neg p \wedge t) \vee (r \wedge u)$	P
(4)	q	PA
(5)	$\neg \neg q$	4 - DN
(6)	$\neg \neg p$	1,5 - MT
(7)	p	6 - DN
(8)	$p \vee \neg t$	7 - AD
(9)	$\neg \neg p \vee \neg t$	8 - DN
(10)	$\neg(\neg p \wedge t)$	9 - DM
(11)	$r \wedge u$	3,10 - SD
(12)	r	11 - SIMP
(13)	s	2,12 - MP

3. DEMONSTRAÇÃO INDIRETA

Um outro método frequentemente empregado para demonstrar a validade de um dado argumento:

$$P_1, P_2, \dots, P_n \vdash Q \quad (1)$$

chamado “Demonstração indireta” ou “Demonstração por absurdo” consiste em admitir a negação $\neg Q$ da conclusão Q, sito é, supor $\neg Q$ verdadeira, e daí deduzir logicamente uma contradição qualquer C (p. ex., do tipo $A \wedge \neg A$) a partir das premissas P_1, P_2, \dots, P_n e $\neg Q$, isto é, demonstrar que é válido o argumento:

$$P_1, P_2, \dots, P_n, \neg Q \vdash C$$

Se assim ocorre, então o argumento dado (1) também é válido. Com efeito, pela Regra DC (Demonstração condicional), o argumento:

$$P_1, P_2, \dots, P_n \vdash \neg Q \rightarrow C$$

é válido. E como temos:

$$\neg Q \rightarrow C \iff \neg \neg Q \vee C \iff Q \vee C \iff Q$$

segue-se que é válido o argumento dado (1).

Em resumo, temos a seguinte Regra DI: Para demonstrar a validade do argumento (1) introduz-se $\neg Q$ como “premissa adicional” (indicada por PA) e deduz-se uma contradição C (p. ex.: $A \wedge \neg A$).

4. EXEMPLIFICAÇÃO

(1) Demonstrar a validade do argumento:

$$p \rightarrow \neg q, \quad r \rightarrow q \vdash \neg(p \wedge r)$$

Dem. — De conformidade com a Regra DI (Demonstração indireta), cumpre deduzir uma **contradição** das premissas $p \rightarrow \neg q$, $r \rightarrow q$ e $p \wedge r$. Temos, sucessivamente:

(1)	$p \rightarrow \neg q$	P
(2)	$r \rightarrow q$	P
(3)	$p \wedge r$	PA
(4)	p	3 — SIMP
(5)	r	3 — SIMP
(6)	$\neg q$	1,4 — MP
(7)	q	2,5 — MP
(8)	$q \wedge \neg q$	6,7 — CONJ (Cont.)

(2) Demonstrar a validade do argumento:

$$\neg p \rightarrow q, \quad \neg q \vee r, \quad \neg r \vdash p \vee s$$

Dem. — De conformidade com a Regra DI, cumpre deduzir uma **contradição** das premissas $\neg p \rightarrow q$, $\neg q \vee r$, $\neg r$ e $\neg(p \vee s)$. Temos, sucessivamente:

(1)	$\neg p \rightarrow q$	P
(2)	$\neg q \vee r$	P
(3)	$\neg r$	P
(4)	$\neg(p \vee s)$	PA
(5)	$\neg p \wedge \neg s$	4 — DM
(6)	$\neg p$	5 — SIMP
(7)	q	1,6 — MP
(8)	$\neg q$	2,3 — SD
(9)	$q \wedge \neg q$	7,8 — CONJ (Cont.)

(3) Demonstrar a validade do argumento:

$$p \rightarrow q \vee r, \quad \neg r \vdash p \rightarrow q$$

Dem. — De conformidade com a Regra DC (Demonstração condicional), cumpre demonstrar a **validade** do argumento:

$$p \rightarrow q \vee r, \quad \neg r, \quad p \vdash q$$

e, portanto, consoante a Regra DI (Demonstração indireta), cumpre deduzir uma **contradição** das premissas $p \rightarrow q \vee r$, $\neg r$, p e $\neg q$. Temos, sucessivamente:

(1)	$p \rightarrow q \vee r$	P
(2)	$\neg r$	P
(3)	p	PA
(4)	$\neg q$	PA
(5)	$q \vee r$	1,3 — MP
(6)	q	2,5 — SD
(7)	$q \wedge \neg q$	4,6 — CONJ (Cont.)

(4) Demonstrar a validade do argumento:

$$\neg p \vee q, \quad \neg q, \quad \neg r \rightarrow s, \quad \neg p \rightarrow(s \rightarrow \neg t) \vdash t \rightarrow r$$

Dem. — De conformidade com a Regra DC (Demonstração condicional), cumpre demonstrar a **validade** do argumento:

$$\neg p \vee q, \quad \neg q, \quad \neg r \rightarrow s, \quad \neg p \rightarrow(s \rightarrow \neg t), \quad t \vdash r$$

e, portanto, consoante a Regra DI (Demonstração indireta), cumpre deduzir uma **contradição** das premissas $\neg p \vee q$, $\neg q$, $\neg r \rightarrow s$, $\neg p \rightarrow(s \rightarrow \neg t)$, t e $\neg r$. Temos, sucessivamente:

(1)	$\neg p \vee q$	P
(2)	$\neg q$	P
(3)	$\neg r \rightarrow s$	P
(4)	$\neg p \rightarrow(s \rightarrow \neg t)$	P
(5)	t	PA
(6)	$\neg r$	PA
(7)	$\neg p$	1,2 — SD
(8)	$s \rightarrow \neg t$	4,7 — MP
(9)	s	3,6 — MP
(10)	$\neg t$	8,9 — MP
(11)	$t \wedge \neg t$	5,10 — CONJ (Cont.)

(5) Demonstrar a validade do argumento:

(1)	$\neg(y \neq 1 \vee z \neq -1)$	
(2)	$(x < y \wedge x > z) \wedge z = -1 \rightarrow x = 0$	
(3)	$\neg(y = 1 \vee z = 0) \vee (x < y \wedge x > z)$	
		$\therefore x = 0$

Dem. — De conformidade com a Regra DI (Demonstração indireta), cumpre deduzir uma **contradição** das premissas (1), (2), (3) e $x \neq 0$. Temos, sucessivamente:

(1)	$\sim(y \neq 1 \vee z \neq -1)$	P
(2)	$(x < y \wedge x > z) \wedge z = -1 \rightarrow x = 0$	P
(3)	$\sim(y = 1 \vee x = 0) \vee (x < y \wedge x > z)$	P
(4)	$x \neq 0$	PA
(5)	$y = 1 \wedge z = -1$	1 – DM
(6)	$y = 1$	5 – SIMP
(7)	$y = 1 \vee x = 0$	6 – AD
(8)	$\sim\sim(y = 1 \vee x = 0)$	7 – DN
(9)	$x < y \wedge x > z$	3,8 – SD
(10)	$z = -1$	5 – SIMP
(11)	$(x < y \wedge x > z) \wedge z = -1$	9,10 – CONJ
(12)	$x = 0$	2,11 – MP
(13)	$x = 0 \wedge x \neq 0$	4,12 – CONJ (Cont.)

(6) Demonstrar a **validade** do argumento:

(1)	$x = 1 \vee \sim(x + y = y \vee x \triangleright y)$
(2)	$x > y \rightarrow x^2 > xy \wedge y = 1$
(3)	$x \neq 1$
	$\therefore \sim(y = 1 \rightarrow x^2 \triangleright xy)$

Dem. — De conformidade com a Regra DI (Demonstração indireta), cumpre deduzir uma **contradição** das premissas (1), (2), (3) e $y = 1 \rightarrow x^2 \triangleright xy$. Temos, sucessivamente:

(1)	$x = 1 \vee \sim(x + y = y \vee x \triangleright y)$	P
(2)	$x > y \rightarrow x^2 > xy \wedge y = 1$	P
(3)	$x \neq 1$	P
(4)	$y = 1 \rightarrow x^2 \triangleright xy$	PA
(5)	$\sim(x + y = y \vee x \triangleright y)$	1,3 – SD
(6)	$x + y \neq y \wedge x > y$	5 – DM
(7)	$x > y$	6 – SIMP
(8)	$x^2 > xy \wedge y = 1$	2,7 – MP
(9)	$x^2 > xy$	8 – SIMP
(10)	$y = 1$	8 – SIMP
(11)	$x^2 \triangleright xy$	4,10 – MP
(12)	$x^2 > xy \wedge x^2 \triangleright xy$	9,11 – CONJ (Cont.)

(7) Demonstrar a **validade** do argumento:

(1)	$x < y \rightarrow xy = x$
(2)	$x \neq y \wedge xy \neq x$
(3)	$x \triangleleft y \vee y = 1 \rightarrow x = 2$
	$\therefore \sim(x = 2 \leftrightarrow x = y)$

Dem. — Consoante a Regra DI (Demonstração indireta), cumpre deduzir uma **contradição** das premissas (1), (2), (3) e $x = 2 \leftrightarrow x = y$. Temos, sucessivamente:

(1)	$x < y \rightarrow xy = x$	P
(2)	$x \neq y \wedge xy \neq x$	P
(3)	$x \triangleleft y \vee y = 1 \rightarrow x = 2$	P
(4)	$x = 2 \leftrightarrow x = y$	PA
(5)	$x \neq y$	2 – SIMP
(6)	$xy \neq x$	2 – SIMP
(7)	$x \triangleleft y$	1,6 – MT
(8)	$x \triangleleft y \vee y = 1$	7 – AD
(9)	$x = 2$	3,8 – MP
(10)	$(x = 2 \rightarrow x = y) \wedge (x = y \rightarrow x = 2)$	4 – BICOND
(11)	$x = 2 \rightarrow x = y$	10 – SIMP
(12)	$x = y$	9,11 – MP
(13)	$x = y \wedge x \neq y$	5,12 – CONJ (Cont.)

EXERCÍCIOS

1. Usar a **Regra DC** (Demonstração condicional) para mostrar que são **válidos** os seguintes argumentos:

- (a) $\sim r \vee \sim s, q \rightarrow s \vdash r \rightarrow \sim q$
- (b) $p \rightarrow \sim q, \sim(r \wedge \sim p) \vdash q \rightarrow \sim r$
- (c) $r \rightarrow t, t \rightarrow \sim s, (r \rightarrow \sim s) \rightarrow q \vdash p \rightarrow p \wedge q$
- (d) $p \rightarrow q, r \rightarrow p, s \rightarrow r \vdash s \rightarrow q$
- (e) $\sim p, \sim r \rightarrow q, \sim s \rightarrow p \vdash \sim(r \wedge s) \rightarrow q$
- (f) $p \rightarrow \sim q, \sim r \rightarrow q, \sim s \rightarrow \sim q \vdash p \vee \sim s \rightarrow r$
- (g) $\sim p \vee \sim s, q \rightarrow \sim r, t \rightarrow s \wedge r \vdash t \rightarrow \sim(p \vee q)$
- (h) $r \rightarrow s, s \rightarrow q, r \vee(s \wedge p) \vdash \sim q \rightarrow p \wedge s$
- (i) $r \vee s, \sim t \rightarrow \sim p, r \nrightarrow \sim q \vdash p \wedge q \rightarrow s \wedge t$
- (j) $r \rightarrow p, s \rightarrow t, t \rightarrow r \vdash s \rightarrow p \vee q$
- (k) $q \rightarrow p, t \vee s, q \vee \sim s \vdash \sim(p \vee t) \rightarrow t$
- (l) $p \vee q \rightarrow r, s \rightarrow \sim r \wedge \sim t, s \vee u \vdash p \rightarrow u$
- (m) $p \rightarrow q, r \rightarrow t, s \rightarrow r, p \vee s \vdash \sim q \rightarrow t$

2. Usar a **Regra DC** (Demonstração condicional) para mostrar que são válidos os seguintes argumentos:

- (a) (1) $x \neq y \rightarrow x > y \vee y > x$
 (2) $y \neq 2 \vee x = 2$
 (3) $x > y \vee y > x \rightarrow x \neq 2$

$$\therefore y = 2 \rightarrow x = y$$

- (b) (1) $x = 1 \rightarrow xy = 2$
 (2) $x + y \neq 3 \rightarrow x \neq 1$
 (3) $y = 1 \vee x = 2 \rightarrow \neg(x + y = 3 \wedge xy = 2)$

$$\therefore x = 1 \rightarrow x \neq 2 \wedge y \neq 1$$

- (c) (1) $x = 0 \rightarrow x^2 - x = 0$
 (2) $x = 1 \rightarrow x^2 - x = 0$
 (3) $x = 2 \vee x^2 - x = 0 \rightarrow x^3 - 3x^2 + 2x = 0$

$$\therefore x = 0 \vee x = 1 \rightarrow x^3 - 3x^2 + 2x = 0$$

3. Usar a **Regra DC** (Demonstração condicional) para mostrar que são válidos os seguintes argumentos:

- (a) $p \vee q, \neg r \vee \neg q \vdash \neg p \rightarrow \neg r$
 (b) $\neg p \vee \neg q, p \vee (r \wedge s) \vdash q \rightarrow s$
 (c) $p \wedge q \rightarrow \neg r \vee \neg s, r \wedge s \vdash p \rightarrow \neg q$
 (d) $p \rightarrow q, p \vee \neg r, \neg s \vee t \rightarrow r \vdash \neg s \rightarrow q$
 (e) $(p \rightarrow q) \vee r, s \vee t \rightarrow \neg r, s \vee (t \wedge u) \vdash p \rightarrow q$
 (f) $(p \rightarrow q) \wedge \neg(\neg r \wedge \neg s), s \rightarrow t \vee u, \neg u \vdash r \rightarrow t$
 (g) $p \vee \neg q, q, r \rightarrow \neg s, p \rightarrow (\neg s \rightarrow t) \vdash \neg t \rightarrow \neg r$

4. Usar a **Regra DI** (Demonstração indireta) para mostrar que são válidos os seguintes argumentos:

- (a) $\neg(p \wedge q), p \rightarrow r, q \vee \neg r \vdash \neg p$
 (b) $p \rightarrow \neg q, r \rightarrow \neg p, q \vee r \vdash \neg p$
 (c) $\neg(p \wedge q), \neg r \rightarrow q, \neg p \rightarrow r \vdash r$
 (d) $p \rightarrow q \vee r, q \rightarrow \neg p, s \rightarrow \neg r \vdash \neg(p \wedge s)$
 (e) $p \vee q, p \rightarrow \neg r, q \rightarrow s \vdash \neg r \vee s$
 (f) $p \vee q, s \rightarrow \neg p, \neg(q \vee r) \vdash \neg s$
 (g) $p \rightarrow \neg q, q \vee \neg r, \neg(s \vee \neg r) \vdash \neg p$
 (h) $\neg p \rightarrow \neg q, \neg p \vee r, r \rightarrow \neg s \vdash \neg q \vee \neg s$
 (i) $p \wedge q \leftrightarrow \neg r, \neg r \rightarrow \neg p, \neg q \rightarrow \neg r \vdash q$
 (j) $\neg p \vee \neg q, r \vee s \rightarrow p, q \vee \neg s, \neg r \vdash \neg(r \vee s)$

- (k) $p \vee q \rightarrow r, \neg r, s \rightarrow p \vdash \neg s$
 (l) $(p \rightarrow q) \vee r, s \vee t \rightarrow \neg r, s \vee (t \wedge u) \vdash p \rightarrow q$
 (m) $p \rightarrow q, q \vee r \rightarrow s, \neg s \vdash \neg p$
 (n) $(p \rightarrow q) \rightarrow r, r \vee s \rightarrow \neg t, t \vdash \neg q$

5. Usar a **Regra DI** (Demonstração indireta) para mostrar que são válidos os seguintes argumentos:

- (a) (1) $2x + 3y = 24$
 (2) $(x = 6 \rightarrow y = 4) \vee 2x = 12$
 (3) $(2x = 12 \rightarrow x = 6) \vee 2x + 3y \neq 24$
 (4) $x \neq 6$

$$\therefore 2x = 12 \rightarrow y = 4$$

- (b) (1) $y = 1 \rightarrow x = 0 \vee x > y$
 (2) $z = -1 \rightarrow x = 0 \vee x < z$
 (3) $x \geq y$
 (4) $x \leq z$
 (5) $y = 1 \vee z = -1$

$$\therefore x = 0$$

6. Usar a **Regra DI** (Demonstração indireta) para mostrar que são válidos os seguintes argumentos:

- (a) $(p \rightarrow q) \vee (r \wedge s), \neg q \vdash p \rightarrow s$
 (b) $p \rightarrow q, q \leftrightarrow s, t \vee (r \wedge \neg s) \vdash p \rightarrow t$
 (c) $\neg p \rightarrow \neg q \vee r, s \vee (r \rightarrow t), p \rightarrow s, \neg s \vdash q \rightarrow t$
 (d) $\neg(p \rightarrow q) \vee (s \rightarrow \neg r), q \vee s, p \rightarrow \neg s \vdash \neg r \vee \neg s$
 (e) $(\neg p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s), p \leftrightarrow t \vee \neg s, r, \neg t \vdash q$
 (f) $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (r \wedge s \rightarrow t), p \rightarrow q \wedge r, r, \neg t \vdash \neg s$
 (g) $\neg(p \rightarrow \neg q) \rightarrow ((r \leftrightarrow s) \vee t), p, q, \neg t \vdash r \rightarrow s$

Capítulo 14

Sentenças Abertas

1. SENTENÇAS ABERTAS COM UMA VARIÁVEL

Definição Chama-se sentença aberta com uma variável em um conjunto A ou apenas sentença aberta em A, uma expressão $p(x)$ tal que $p(a)$ é falsa (F) ou verdadeira (V) para todo $a \in A$.

Em outros termos, $p(x)$ é uma sentença aberta em A se e somente se $p(x)$ torna-se uma proposição (falsa ou verdadeira) todas as vezes que se substitui a variável x por qualquer elemento $a \in A$ ($a \in A$).

O conjunto A recebe o nome de **conjunto-universo** ou apenas **universo** (ou ainda **domínio**) da variável x e qualquer elemento $a \in A$ diz-se um **valor** da variável x .

Se $a \in A$ é tal que $p(a)$ é uma proposição verdadeira (V), diz-se que a **satisfaz** ou **verifica** $p(x)$.

Uma sentença aberta com uma variável em A também se chama **função proposicional com uma variável em A** ou simplesmente **função proposicional em A** (ou ainda **condição em A**).

Exemplos — São sentenças abertas em $N = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$ (conjunto dos números naturais) as seguintes expressões:

- | | |
|-----------------|-------------------------|
| (a) $x + 1 > 8$ | (b) $x^2 - 5x + 6 = 0$ |
| (c) $x + 5 = 9$ | (d) x é divisor de 10 |
| (e) x é primo | (f) x é múltiplo de 3 |

2. CONJUNTO-VERDADE DE UMA SENTENÇA ABERTA COM UMA VARIÁVEL

Definição Chama-se **conjunto-verdade** de uma sentença aberta $p(x)$ em um conjunto A, o conjunto de todos os elementos $a \in A$ tais que $p(a)$ é uma proposição verdadeira (V).

INICIAÇÃO À LÓGICA MATEMÁTICA

157

Este conjunto representa-se por V_p . Portanto, simbolicamente, temos:

$$V_p = \{x \mid x \in A \wedge p(x) \text{ é V}\}$$

ou seja, mais simplesmente:

$$V_p = \{x \mid x \in A \wedge p(x)\} \quad \text{ou} \quad V_p = \{x \in A \mid p(x)\}$$

Obviamente, o **conjunto-verdade** V_p de uma sentença aberta $p(x)$ em A é sempre um **subconjunto** do conjunto A ($V_p \subseteq A$).

Exemplos:

- (1) Seja a sentença aberta “ $x + 1 > 8$ ” em N (conjunto dos números naturais). O conjunto-verdade é:

$$V_p = \{x \mid x \in N \wedge x + 1 > 8\} = \{8, 9, 10, \dots\} \subseteq N$$

- (2) Para a sentença aberta “ $x + 7 < 5$ ” em N, o conjunto-verdade é:

$$V_p = \{x \mid x \in N \wedge x + 7 < 5\} = \emptyset \subseteq N$$

- (3) O conjunto-verdade em N da sentença aberta “ $x + 5 > 3$ ” é:

$$V_p = \{x \mid x \in N \wedge x + 5 > 3\} = N \subseteq N$$

- (4) Para a sentença aberta “ x é divisor de 10” em N, temos:

$$V_p = \{x \mid x \in N \wedge x \text{ é divisor de } 10\} = \{1, 2, 5, 10\} \subseteq N$$

- (5) O conjunto-verdade da sentença aberta “ $x^2 - 2x > 0$ ” em Z (conjunto dos números inteiros) é:

$$V_p = \{x \mid x \in Z \wedge x^2 - 2x > 0\} = Z - \{0, 1, 2\}$$

NOTA — Mostram os exemplos anteriores que, se $p(x)$ é uma sentença aberta em um conjunto A, três casos podem ocorrer:

- (1) $p(x)$ é verdadeira (V) para todo $x \in A$, isto é, o conjunto-verdade V_p coincide com o universo A da variável x ($V_p = A$).

Diz-se, neste caso, que $p(x)$ exprime uma **condição universal** (ou uma propriedade universal) no conjunto A.

(2) $p(x)$ é verdadeira (V) somente para alguns $x \in A$, isto é, o conjunto-verdade V_p é um subconjunto próprio do universo A da variável x ($V_p \subset A$).

Neste caso, diz-se que $p(x)$ exprime uma condição possível (ou uma propriedade possível) no conjunto A .

(3) $p(x)$ não é verdadeira (F) para nenhum $x \in A$, isto é, o conjunto-verdade V_p é vazio ($V_p = \emptyset$).

Diz-se, neste caso, que $p(x)$ exprime uma condição impossível (ou uma propriedade impossível) no conjunto A .

No universo R (conjunto dos números reais), as condições:

$$x + 1 > x \quad \text{e} \quad x + 1 = x$$

são universal a primeira (visto ser verificada por todos os números reais) e impossível a segunda (visto não ser verificada por nenhum número real).

No mesmo universo R a condição $9x^2 - 1 = 0$ é possível, visto ser verificada somente pelos números reais $1/3$ e $-1/3$. Pelo contrário, no universo N (conjunto dos números naturais) a mesma condição $9x^2 - 1 = 0$ é impossível, pois, não existe nenhum número natural que verifique tal condição. Por sua vez, a condição $3x > 1$ é universal em N (o triplo de um número natural é sempre maior que 1), mas não é universal em R (não é verificada para $x = 1/3$ ou para $x < 1/3$).

Como se vê através destes exemplos, o emprego dos adjetivos “universal”, “possível” e “impossível” depende geralmente do universo adotado. Note-se, porém, que a condição $x = x$ é universal, e por conseguinte a condição $x \neq x$ é impossível, qualquer que seja o universo considerado, por virtude do AXIOMA LÓGICO DA IDENTIDADE: Todo o ente é idêntico a si mesmo, isto é, simbolicamente:

$$a = a, \text{ qualquer que seja o ente } a$$

Entende-se por ente (ser ou entidade) a tudo aquilo que se considera como existente e a que, por isso, se pode dar um nome.

3. SENTENÇAS ABERTAS COM DUAS VARIÁVEIS

Definição Dados dois conjuntos A e B , chama-se sentença aberta com duas variáveis em $A \times B$ ou apenas sentença aberta em $A \times B$, uma expressão $p(x, y)$ tal que $p(a, b)$ é falsa (F) ou verdadeira (V) para todo o par ordenado $(a, b) \in A \times B$.

Em outros termos, $p(x, y)$ é uma sentença aberta em $A \times B$ se e somente se $p(x, y)$ torna-se uma proposição (falsa ou verdadeira) todas as vezes que as variáveis x e y são substituídas respectivamente pelos elementos a e b de qualquer par ordenado (a, b) pertencente ao produto cartesiano $A \times B$ dos conjuntos A e B ($(a, b) \in A \times B$).

O conjunto $A \times B$ recebe o nome de **conjunto-universo** ou apenas **universo** (ou ainda **domínio**) das variáveis x e y , e qualquer elemento (a, b) de $A \times B$ diz-se um **par de valores das variáveis** x e y .

Se $(a, b) \in A \times B$ é tal que $p(a, b)$ é uma proposição verdadeira (V), diz-se que (a, b) **satisfaz** ou **verifica** $p(x, y)$.

Uma sentença aberta com duas variáveis em $A \times B$ também se chama **função proposicional com duas variáveis** em $A \times B$ ou simplesmente **função proposicional** em $A \times B$ (ou ainda **condição** em $A \times B$).

Exemplos — Sejam os conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{5, 6\}$. São sentenças abertas em $A \times B$ as seguintes expressões:

- (a) x é menor que y ($x < y$)
- (b) x é divisor de y ($x | y$)
- (c) y é o dobro de x ($y = 2x$)
- (d) $\text{mdc}(x, y) = 1$

O par ordenado $(3, 5) \in A \times B$, p. ex., satisfaz (a) e (d), pois, $3 < 5$ e $\text{mdc}(3, 5) = 1$, e o par ordenado $(3, 6) \in A \times B$, p. ex., satisfaz (b) e (c), pois, $3 | 6$ e $6 = 2 \cdot 3$.

4. CONJUNTO-VERDADE DE UMA SENTENÇA ABERTA COM DUAS VARIÁVEIS

Definição Chama-se **conjunto-verdade** de uma sentença aberta $p(x, y)$ em $A \times B$, o conjunto de todos os elementos $(a, b) \in A \times B$ tais que $p(a, b)$ é uma proposição verdadeira (V).

Este conjunto representa-se por V_p . Portanto, simbolicamente, temos:

$$V_p = \{(x, y) \mid x \in A \wedge y \in B \wedge p(x, y)\}$$

ou seja, mais simplesmente:

$$V_p = \{(x, y) \in A \times B \mid p(x, y)\}$$

O **conjunto-verdade** V_p de uma sentença aberta $p(x, y)$ em $A \times B$ é sempre um subconjunto do conjunto $A \times B$ ($V_p \subset A \times B$).

Exemplos:

- (1) Sejam os conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{1, 3, 5\}$. O conjunto-verdade da sentença aberta “ $x < y$ ” em $A \times B$ é:

$$\begin{aligned} V_p &= \{(x, y) \mid x \in A \wedge y \in B \wedge x < y\} = \\ &= \{(1, 3), (1, 5), (2, 3), (2, 5), (3, 5), (4, 5)\} \subset A \times B \end{aligned}$$

(2) Sejam os conjuntos $A = \{2, 3, 4, 5\}$ e $B = \{3, 6, 7, 10\}$. O conjunto-verdade da sentença aberta “ x divide y ” ($x|y$) em $A \times B$ é:

$$\begin{aligned} V_p &= \{(x, y) \mid x \in A \wedge y \in B \wedge x|y\} = \\ &= \{(2, 6), (2, 10), (3, 3), (3, 6), (5, 10)\} \subset A \times B \end{aligned}$$

(3) Sejam os conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{3, 4\}$. O conjunto-verdade da sentença aberta “ $x + 1 \leq y$ ” em $A \times B$ é:

$$\begin{aligned} V_p &= \{(x, y) \mid x \in A \wedge y \in B \wedge x + 1 \leq y\} = \\ &= \{(1, 3), (1, 4), (2, 4)\} \subset A \times B \end{aligned}$$

(4) Sejam os conjuntos $A = \{2, 3, 4\}$ e $B = \{1, 2, 6\}$. O conjunto-verdade da sentença aberta “ $\text{mdc}(x, y) = 2$ ” em $A \times B$ é:

$$\begin{aligned} V_p &= \{(x, y) \mid x \in A \wedge y \in B \wedge \text{mdc}(x, y) = 2\} = \\ &= \{(2, 2), (2, 6), (4, 2), (4, 6)\} \subset A \times B \end{aligned}$$

(5) O conjunto-verdade da sentença aberta “ $2x + y = 10$ ” em $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, sendo \mathbb{N} o conjunto dos números naturais, é:

$$\begin{aligned} V_p &= \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{N} \wedge 2x + y = 10\} = \\ &= \{(1, 8), (2, 6), (3, 4), (4, 2)\} \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N} \end{aligned}$$

(6) O conjunto-verdade da sentença aberta “ $x^2 + y^2 = 1$ ” em $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, sendo \mathbb{Z} o conjunto dos números inteiros, é:

$$\begin{aligned} V_p &= \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{Z} \wedge x^2 + y^2 = 1\} = \\ &= \{(0, 1), (1, 0), (-1, 0), (0, -1)\} \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \end{aligned}$$

5. SENTENÇAS ABERTAS COM N VARIÁVEIS

Consideremos os n conjuntos A_1, A_2, \dots, A_n e o seu produto cartesiano $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$.

Definição – Chama-se sentença aberta com n variáveis em $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ ou apenas sentença aberta em $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$, uma expressão $p(x_1, x_2, \dots, x_n)$ tal que $p(a_1, a_2, \dots, a_n)$ é falsa (F) ou verdadeira (V) para toda n -upla $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$.

O conjunto $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ recebe o nome de **conjunto-universo** ou apenas **universo** (ou ainda **domínio**) das variáveis x_1, x_2, \dots, x_n , e qualquer elemento $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ diz-se uma **n -upla de valores das variáveis x_1, x_2, \dots, x_n** .

Se $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ é tal que $p(a_1, a_2, \dots, a_n)$ é uma proposição verdadeira (V), diz-se que (a_1, a_2, \dots, a_n) **satisfaz** ou **verifica** $p(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Uma sentença aberta com n variáveis em $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ também se chama **função proposicional com n variáveis em $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$** ou simplesmente **função proposicional em $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$** (ou ainda **condição em $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$**).

Exemplo – A expressão “ $x + 2y + 3z < 18$ ” é uma sentença aberta em $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, sendo \mathbb{N} o conjunto dos números naturais.

O terno ordenado $(1, 2, 4) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, p. ex., satisfaz esta sentença aberta, pois, $1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 4 < 18$.

6. CONJUNTO-VERDADE DE UMA SENTENÇA ABERTA COM N VARIÁVEIS

Definição – Chama-se **conjunto-verdade** de uma sentença aberta $p(x_1, x_2, \dots, x_n)$ em $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$, o conjunto de todas as n -uplas $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ tais que $p(a_1, a_2, \dots, a_n)$ é uma proposição verdadeira (V).

Portanto, simbolicamente, temos:

$$\begin{aligned} V_p &= \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_1 \in A_1 \wedge x_2 \in A_2 \wedge \dots \wedge x_n \in A_n \\ &\quad \wedge p(x_1, x_2, \dots, x_n)\} \end{aligned}$$

ou seja, mais simplesmente:

$$V_p = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n \mid p(x_1, x_2, \dots, x_n)\}$$

Exemplo – O conjunto-verdade da sentença aberta “ $18x - 7y + 13z = 39$ ” em $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, sendo \mathbb{Z} o conjunto dos números inteiros, é:

$$\begin{aligned} V_p &= \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Z} \wedge 18x_1 - 7x_2 + 13x_3 = 39\} = \\ &= \{(1, -3, 0), (4, 1, -2), (3, 4, 1), (6, 8, -1), \dots\} \end{aligned}$$

NOTA – Em Matemática, as **equações** e as **inequações** são sentenças abertas que exprimem relação de igualdade e desigualdade, respectivamente, entre duas expressões com variáveis. Mas, o conceito de sentença aberta é muito mais amplo que o de equação ou inequação; assim, “ x divide y ”, “ x é primo com y ”, “ x é filho de y ”, etc., são sentenças abertas, sem serem equações nem inequações.

Capítulo 15

Operações Lógicas sobre Sentenças Abertas

- As operações lógicas que definimos para proposições (Cap. 2) estendem-se naturalmente à sentenças abertas.

2. CONJUNÇÃO

Consideremos, p. ex., as sentenças abertas:

“ x é médico”, “ x é professor”

o universo da variável x em cada uma delas sendo o conjunto H dos seres humanos.
Ligando estas duas sentenças abertas pelo conectivo \wedge (que se lê “e”), obtemos uma nova sentença aberta em H :

“ x é médico \wedge x é professor”

que é verificada por todos os indivíduos que satisfazem ao mesmo tempo as duas condições dadas, e só por esses indivíduos. Logo, é natural chamar a nova sentença aberta assim obtida **conjunção** das duas primeiras.

Analogamente, a **conjunção** das sentenças abertas em R (conjunto dos números reais):

“ $x > 2$ ”, “ $x < 8$ ”

é a sentença aberta em R :

“ $x > 2 \wedge x < 8$ ”

Assim, fazendo $x = 5$, $x = \pi$, $x = 2$, $x = -1$, $x = 8,57$, etc., teremos sucessivamente:

x	$x > 2$	$x < 8$	$x > 2 \wedge x < 8$
7	V	V	V
π	V	V	V
2	F	V	F
-1	F	V	F
8,57	V	F	F
...

Note-se que a conjunção $x > 2 \wedge x < 8$ costuma ser escrita: $2 < x < 8$.

Aliás, sendo a e b números reais quaisquer, escreve-se, **por definição**:

$$a < x < b \iff x > a \wedge x < b$$

ou

$$[a, b] \iff x > a \wedge x < b$$

Outros exemplos:

- (1) No universo N (conjunto dos números naturais):

$$\begin{aligned} 3 | x \wedge 5 | x &\iff 15 | x \\ x | y \wedge y | x &\iff x = y \end{aligned}$$

- (2) No universo R (conjunto dos números reais):

$$2x + y = 8 \wedge 5x - 3y = 9 \iff x = 3 \wedge y = 2$$

o que também se pode escrever:

$$\begin{cases} 2x + y = 8 \\ 5x - 3y = 9 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$$

- (3) No universo das figuras geométricas:

$$x \text{ é um retângulo} \wedge x \text{ é um losango} \iff x \text{ é um quadrado}$$

De modo geral, sejam $p(x)$ e $q(x)$ sentenças abertas em um conjunto A . É óbvio que um elemento $a \in A$ satisfaz a sentença aberta $p(x) \wedge q(x)$ em A se a proposição $p(a) \wedge q(a)$ é verdadeira (V). Ora, esta proposição é verdadeira se e somente se as proposições $p(a)$ e $q(a)$ são ambas verdadeiras, isto é, se e somente se $a \in A$ satisfaz ao mesmo tempo as sentenças abertas $p(x)$ e $q(x)$ em A . Portanto, o conjunto-verdade $V_p \wedge q$ da sentença aberta $p(x) \wedge q(x)$ em A é a intersecção (\cap) dos conjuntos-verdade V_p e V_q das sentenças abertas $p(x)$ e $q(x)$ em A . Temos, pois, simbolicamente:

$$V_{p \wedge q} = V_p \cap V_q = \{x \in A \mid p(x)\} \cap \{x \in A \mid q(x)\}$$

Exemplificando, sejam as sentenças abertas em Z (conjunto dos números inteiros):

$$p(x) : x^2 + x - 2 = 0$$

$$q(x) : x^2 - 4 = 0$$

Temos:

$$\begin{aligned} V_{p \wedge q} &= \{x \in Z \mid x^2 + x - 2 = 0\} \cap \{x \in Z \mid x^2 - 4 = 0\} = \\ &= \{-2, 1\} \cap \{-2, 2\} = \{-2\} \end{aligned}$$

3. DISJUNÇÃO

Consideremos ainda as sentenças abertas em H (conjunto dos seres humanos):

“ x é médico”, “ x é professor”

Ligando estas duas sentenças abertas pelo conceitivo \vee (que se lê “ou”), obtemos uma nova sentença aberta em H :

“ x é médico \vee x é professor”

que é verificada por todo indivíduo que satisfaz uma pelo menos das duas condições dadas, e só por esses indivíduos. Logo, é natural chamar a nova sentença aberta assim obtida **disjunção** das duas primeiras.

Analogamente, a **disjunção** das sentenças abertas em R (conjunto dos números reais):

“ $x < 2$ ”, “ $x > 8$ ”

é a sentença aberta em R :

“ $x < 2 \vee x > 8$ ”

Assim, para $x = 0$, $x = -1$, $x = 2$, $x = 5$, $x = \pi$, $x = 8,57$, etc., teremos sucessivamente:

x	$x < 2$	$x > 8$	$x < 2 \vee x > 8$
0	V	F	V
-1	V	F	V
2	F	F	F
5	F	F	F
π	F	F	F
8,57	F	V	V
...

Outros exemplos:

(1) No universo N (conjunto dos números naturais):

$$x | 6 \vee x | 10 \iff x \in \{1, 2, 3, 5, 6, 10\}$$

(2) No universo R (conjunto dos números reais):

$$x = 2 \vee x = -3 \iff x^2 + x - 6 = 0$$

$$x = 5 \vee x < 5 \iff x \leq 5$$

Aliás, sendo a e b números reais quaisquer, escreve-se, por definição:

$$a \leq b \iff a < b \vee a = b$$

Também se escreve, por definição:

$$a \leq b \leq c \iff a \leq b \wedge b \leq c$$

ou seja:

$$a \leq b \leq c \iff (a \leq b \vee a = b) \wedge (b \leq c \vee b = c)$$

Análogos significados têm:

$$a \leq b < c, \quad a < b \leq c, \quad a > b \geq c, \quad \text{etc.}$$

De modo geral, sejam $p(x)$ e $q(x)$ sentenças abertas em um conjunto A . É imediato que um elemento $a \in A$ satisfaz a sentença aberta $p(x) \vee q(x)$ em A se a proposição $p(a) \vee q(a)$ é verdadeira (V). Ora, esta proposição é verdadeira se e somente se **uma pelo menos** das proposições $p(a)$ e $q(a)$ é verdadeira, isto é, se e somente se $a \in A$ satisfaz **uma pelo menos** das sentenças abertas $p(x)$ e $q(x)$ em A . Portanto, o conjunto-verdade $V_p \vee q$ da sentença aberta $p(x) \vee q(x)$ em A é a

reunião (\cup) dos conjuntos-verdade V_p e V_q das sentenças abertas $p(x)$ e $q(x)$ em A . Temos, pois, simbolicamente:

$$V_{p \vee q} = V_p \cup V_q = \{x \in A \mid p(x)\} \cup \{x \in A \mid q(x)\}$$

Exemplificando, sejam as sentenças abertas em Z (conjunto dos números inteiros):

$$p(x) : x^2 + x - 2 = 0$$

$$q(x) : x^2 - 4 = 0$$

Temos:

$$\begin{aligned} V_{p \vee q} &= \{x \in Z \mid x^2 + x - 2 = 0\} \cup \{x \in Z \mid x^2 - 4 = 0\} \\ &= \{-2, 1\} \cup \{-2, 2\} = \{-2, 1, 2\} \end{aligned}$$

Para as sentenças abertas em R (conjunto dos números reais):

$$p(x) : x < 0, \quad q(x) : x > 0$$

temos:

$$V_{p \vee q} = \{x \in R \mid x < 0\} \cup \{x \in R \mid x > 0\} = R_-^* \cup R_+^* = R^*$$

4. NEGAÇÃO

Consideremos no universo H dos seres humanos a sentença aberta:

“ x tem menos de 21 anos”

Antepondo a esta sentença aberta o conectivo \sim (que se lê “não é verdade que”), obtemos a nova sentença aberta em H :

“ $\sim x$ tem menos de 21 anos”

que é natural chamar **negação** da primeira, pois, é verificada precisamente pelos indivíduos que não satisfazem aquela.

Obviamente, a negação de “ x tem menos de 21 anos” é logicamente equivalente à seguinte sentença aberta em H :

“ x tem 21 anos $\vee x$ tem mais de 21 anos”

Outros exemplos:

(1) No universo N (conjunto dos números naturais):

$$\sim x \text{ é par} \iff x \text{ é ímpar}$$

(2) No universo R (conjunto dos números reais):

$$\sim(x < y) \iff x \geq y$$

ou seja:

$$\sim(x < y) \iff x = y \vee x > y$$

Por sua vez:

$$\sim(x = y) \iff x < y \vee x > y$$

(3) Em qualquer universo U :

$$\sim(x = y) \iff x \neq y$$

De modo geral, seja $p(x)$ uma sentença aberta em um conjunto A . É óbvio que um elemento $a \in A$ **satisfaz** a sentença aberta $\sim p(x)$ em A se a proposição $\sim p(a)$ é verdadeira (V). Ora, esta proposição é verdadeira se e somente se a proposição $p(a)$ é falsa (F), isto é, se e somente se $a \in A$ **não satisfaz** a sentença aberta $p(x)$ em A . Portanto, o **conjunto-verdade** $V_{\sim p}$ da sentença aberta $\sim p(x)$ em A é o **complemento em relação a A** do conjunto-verdade V_p da sentença aberta $p(x)$ em A . Temos, pois, simbolicamente:

$$V_{\sim p} = C_A V_p = C_A \{x \in A \mid p(x)\}$$

Exemplificando, seja A o conjunto dos números naturais divisíveis por 5, isto é, $A = \{5k \mid k \in N\} = \{5, 10, 15, 20, \dots\}$. Para a sentença aberta em A :

$$p(x) : x \text{ termina por } 5$$

temos:

$$\begin{aligned} V_{\sim p} &= C_A \{x \in A \mid x \text{ termina por } 5\} = \\ &= \{x \in A \mid x \text{ termina por } 0\} \end{aligned}$$

5. CONDICIONAL

Consideremos as sentenças abertas em Z (conjunto dos números inteiros):

$$“x^2 - 5x + 6 = 0”, \quad “x^2 - 9 = 0”$$

Ligando estas duas sentenças abertas pelo conectivo \rightarrow (que se lê: “se ... então ...”) obtemos uma nova sentença aberta em Z :

$$“x^2 - 5x + 6 = 0 \rightarrow x^2 - 9 = 0”$$

denominada **condicional** das duas primeiras, e **verificada** por todo número inteiro diferente de 2 (para $x = 2$ a condicional é falsa (F) porque o antecedente é verdadeiro (V) e o consequente é falso (F)).

De modo geral, sejam $p(x)$ e $q(x)$ sentenças abertas em um mesmo conjunto A . Ligando estas duas sentenças abertas pelo conectivo \rightarrow , obtemos uma nova sentença aberta em A : “ $p(x) \rightarrow q(x)$ ”, que é **verificada** por todo elemento $a \in A$ tal que a condicional “ $p(a) \rightarrow q(a)$ ” é verdadeira (V).

Por ser $p(x) \rightarrow q(x) \leftrightarrow \neg p(x) \vee q(x)$, segue-se que o **conjunto-verdade** $V_{p \rightarrow q}$ da sentença aberta $p(x) \rightarrow q(x)$ em A **coincide** com o conjunto-verdade da sentença aberta $\neg p(x) \vee q(x)$ em A e, portanto, é a **reunião** (\cup) dos conjuntos-verdade $V_{\neg p}$ e V_q das sentenças abertas $\neg p(x)$ e $q(x)$ em A . Temos, pois, simbolicamente:

$$V_{p \rightarrow q} = V_{\neg p} \cup V_q = CA V_p \cup V_q$$

ou seja:

$$V_{p \rightarrow q} = CA \{x \in A \mid p(x)\} \cup \{x \in A \mid q(x)\}$$

Exemplificando, sejam as sentenças abertas em N (conjunto dos números naturais):

$$p(x) : x \mid 12, \quad q(x) : x \mid 45$$

Temos:

$$\begin{aligned} V_{p \rightarrow q} &= CN \{x \in N \mid x \mid 12\} \cup \{x \in N \mid x \mid 45\} = \\ &= CN \{1, 2, 3, 4, 6, 12\} \cup \{1, 3, 5, 9, 15, 45\} = \\ &= N - \{2, 4, 6, 12\} \end{aligned}$$

6. BICONDICIONAL

Consideremos as sentenças abertas em Z (conjunto dos números inteiros):

$$“x > -5”, \quad “x < 0”$$

Ligando estas duas sentenças abertas pelo conectivo \leftrightarrow (que se lê: “se e somente se”) obtemos uma nova sentença aberta em Z :

$$“x > -5 \leftrightarrow x < 0”$$

denominada **bicondicional** das duas primeiras, e que é **verificada** por todo número inteiro maior que -5 e menor que 0 , isto é, para $x = -4, -3, -2, -1$, e somente por esses números.

De modo geral, sejam $p(x)$ e $q(x)$ sentenças abertas em um mesmo conjunto A . Ligando estas duas sentenças abertas pelo conectivo \leftrightarrow , obtemos uma nova sen-

tença aberta em A : “ $p(x) \leftrightarrow q(x)$ ”, que é **verificada** por todo elemento $a \in A$ tal que a bicondicional “ $p(a) \leftrightarrow q(a)$ ” é verdadeira (V).

Por ser $p(x) \leftrightarrow q(x) \leftrightarrow (p(x) \rightarrow q(x)) \wedge (q(x) \rightarrow p(x))$, segue-se que o **conjunto-verdade** $V_{p \leftrightarrow q}$ da sentença aberta $p(x) \leftrightarrow q(x)$ em A **coincide** com o conjunto-verdade da sentença aberta em A :

$$(p(x) \rightarrow q(x)) \wedge (q(x) \rightarrow p(x))$$

e, portanto, é a **interseção** (\cap) dos conjuntos-verdade $V_{p \rightarrow q}$ e $V_{q \rightarrow p}$ das sentenças abertas em A : $p(x) \rightarrow q(x)$ e $q(x) \rightarrow p(x)$. Temos, pois, simbolicamente:

$$\begin{aligned} V_{p \leftrightarrow q} &= V_{p \rightarrow q} \cap V_{q \rightarrow p} = (V_{\neg p} \cup V_q) \cap (V_{\neg q} \cup V_p) = \\ &= (CA V_p \cup V_q) \cap (CA V_q \cup V_p) \end{aligned}$$

ou seja:

$$\begin{aligned} V_{p \leftrightarrow q} &= [CA \{x \in A \mid p(x)\} \cup \{x \in A \mid q(x)\}] \cap \\ &\quad \cap [CA \{x \in A \mid q(x)\} \cup \{x \in A \mid p(x)\}] \end{aligned}$$

Exemplificando, sejam as sentenças abertas em N (conjunto dos números naturais):

$$p(x) : x \mid 6, \quad q(x) : x \mid 15$$

Temos:

$$\begin{aligned} CN V_p \cup V_q &= CN \{1, 2, 3, 6\} \cup \{1, 3, 5, 15\} = N - \{2, 6\} \\ CN V_q \cup V_p &= CN \{1, 3, 5, 15\} \cup \{1, 2, 3, 6\} = N - \{5, 15\} \end{aligned}$$

e, portanto:

$$V_{p \leftrightarrow q} = [N - \{2, 6\}] \cap [N - \{5, 15\}] = N - \{2, 5, 6, 15\}$$

7. ÁLGEBRA DAS SENTENÇAS ABERTAS

As propriedades das operações lógicas sobre proposições (Cap. 7) se transmitem automaticamente às operações lógicas sobre sentenças abertas em um mesmo conjunto que vimos de definir. Assim, a **conjunção** e a **disjunção** continuam a ser **comutativas** e **associativas**, e cada uma delas é **distributiva** em relação à outra. Subsiste a **propriedade da dupla negação**, assim como as **leis de DE MORGAN**. Quanto às **propriedades de identidade**:

$$p \wedge t \leftrightarrow p, \quad p \wedge c \leftrightarrow c, \quad p \vee t \leftrightarrow t, \quad p \vee c \leftrightarrow p$$

assumem agora novo aspecto. Assim, temos:

- (I) A conjunção de uma sentença aberta com uma outra que exprime uma condição universal é equivalente à primeira.
 (II) A conjunção de uma sentença aberta com uma outra que exprime uma condição impossível também exprime uma condição impossível.

Destas duas propriedades resultam mais duas outras por **dualidade lógica**, substituindo “conjunção” por “disjunção”, “universal” por “impossível” e “impossível” por “universal”.

Consideremos, p. ex., em \mathbb{R} (conjunto dos números reais) os sistemas:

$$\begin{cases} 2x - 1 \geq 3 \\ x + 1 \geq x \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - 1 \geq 3 \\ x + 1 = x \end{cases}$$

que se podem escrever, respectivamente:

$$2x - 1 \geq 3 \wedge x + 1 \geq x, \quad 2x - 1 \geq 3 \wedge x + 1 = x$$

Como a sentença aberta $x + 1 \geq x$ exprime uma **condição universal** e a sentença aberta $x + 1 = x$ exprime uma **condição impossível**, teremos:

$$\begin{aligned} 2x - 1 \geq 3 \wedge x + 1 \geq x &\iff 2x - 1 \geq 3 \\ 2x - 1 \geq 3 \wedge x + 1 = x &\iff x + 1 = x \text{ (impossível)} \end{aligned}$$

Analogamente:

$$\begin{aligned} 2x - 1 \geq 3 \vee x + 1 \geq x &\iff x + 1 \geq x \text{ (universal)} \\ 2x - 1 \geq 3 \vee x + 1 = x &\iff 2x - 1 \geq 3 \end{aligned}$$

CONVENÇÃO — Dadas várias sentenças abertas $p_1(x), p_2(x), p_3(x), \dots$, escreve-se:

$p_1(x) \wedge p_2(x) \wedge p_3(x)$ em lugar de $(p_1(x) \wedge p_2(x)) \wedge p_3(x)$;

$p_1(x) \wedge p_2(x) \wedge p_3(x) \wedge p_4(x)$ em lugar de $(p_1(x) \wedge p_2(x) \wedge p_3(x)) \wedge p_4(x)$; etc.

Analogamente para a disjunção.

EXERCÍCIOS

1. Determinar o conjunto-verdade em $A = \{1, 2, 3, \dots, 9, 10\}$ de cada uma das seguintes sentenças abertas compostas:

- (a) $x < 7 \wedge x$ é ímpar (b) x é par $\wedge x + 2 \leq 10$
 (c) $3 \mid x \wedge x < 8$ (d) $(x + 4) \in A \wedge (x^2 - 5) \notin A$

INICIAÇÃO À LÓGICA MATEMÁTICA

2. Determinar o **conjunto-verdade** em $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ de cada uma das seguintes sentenças abertas compostas:

- (a) $x^2 - 3x = 0 \vee x^2 = x$ (b) x é par $\vee x^2 \leq 9$
 (c) x é primo $\vee (x + 5) \in A$ (d) $x^2 \geq 16 \vee x^2 - 6x + 5 = 0$

3. Determinar o **conjunto-verdade** em $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ de cada uma das seguintes sentenças abertas compostas:

- (a) $\sim(x \leq 3)$ (b) $\sim(x$ é ímpar)
 (c) $\sim(x + 12)$ (d) $\sim(x + 1) \in A$
 (e) $\sim(x$ é primo) (f) $\sim(x^2 - 3x = 0)$

4. Determinar o **conjunto-verdade** em $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ de cada uma das seguintes sentenças abertas compostas:

- (a) x é par $\rightarrow x^2 - 1 = 0$ (b) $x + 12 \rightarrow x$ é primo
 (c) $(x + 5) \notin A \rightarrow x < 0$ (d) $x^2 - 1 \neq 0 \rightarrow x^2 + 4x + 3 = 0$
 (e) $x^2 + x - 6 < 0 \rightarrow x^2 - 9 = 0$

5. Determinar o **conjunto-verdade** em $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ de cada uma das seguintes sentenças abertas compostas:

- (a) $x^2 - 3x = 0 \leftrightarrow x^2 - x = 0$ (b) x é par $\leftrightarrow x^2 \leq 8$
 (c) x é primo $\leftrightarrow (x + 3) \in A$ (d) $x^2 > 12 \leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0$

6. Sejam as sentenças abertas em \mathbb{R} (conjunto dos números reais):

$$p(x) : 2x - 3 \leq 0 \quad e \quad q(x) : x + 1 \geq 0$$

Determinar $V_p \wedge q$ e $V_p \rightarrow q$.

7. Sejam as sentenças abertas em \mathbb{R} (conjunto dos números reais):

$$p(x) : 15x^2 + 2x - 8 = 0 \quad e \quad q(x) : 5x^2 + 19x + 12 = 0$$

Determinar $V_p \vee q$ e $V_p \wedge q$.

8. Sejam as sentenças abertas em \mathbb{R} (conjunto dos números reais):

$$p(x) : -4x + 3 \geq 0 \quad e \quad q(x) : 5x + 2 \geq 0$$

Determinar $V_p \wedge q$ e $V_{\sim p}$.

9. Sejam as sentenças abertas em $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$:

$$p(x) : x^2 \in A \quad e \quad q(x) : x$$
 é ímpar

Determinar $V_{p \rightarrow q}$, $V_{q \rightarrow p}$ e $V_{p \leftrightarrow q}$.

10. Sejam $p(x)$, $q(x)$ e $r(x)$ sentenças abertas em um mesmo conjunto A . Exprimir o conjunto-verdade da sentença aberta composta:

$p(x) \rightarrow q(x) \vee \sim r(x)$
em função de V_p , V_q e V_r .

Resolução — Temos, sucessivamente:

$$V_{p \rightarrow q \vee \sim r} = CAV_p \cup V_q \vee \sim r = CAV_p \cup (V_q \cup V_{\sim r}) = CAV_p \cup (V_q \cup CAV_r)$$

11. Sejam $p(x)$, $q(x)$ e $r(x)$ sentenças abertas em um mesmo conjunto A . Achar a expressão do conjunto-verdade de cada uma das sentenças abertas compostas abaixo em função de V_p , V_q e V_r :

- (a) $\sim(p(x) \vee q(x))$ (b) $\sim p(x) \rightarrow \sim q(x)$
 (c) $p(x) \rightarrow (\sim r(x) \rightarrow q(x))$ (d) $(p(x) \rightarrow q(x)) \wedge (q(x) \rightarrow r(x))$

Capítulo 16

Quantificadores

1. QUANTIFICADOR UNIVERSAL

Seja $p(x)$ uma sentença aberta em um conjunto não vazio A ($A \neq \emptyset$) e seja V_p o seu conjunto-verdade:

$$V_p = \{x \mid x \in A \wedge p(x)\}$$

Quando $V_p = A$, isto é, todos os elementos do conjunto A satisfazem a sentença aberta $p(x)$, podemos, então, afirmar:

- (i) “Para todo elemento x de A , $p(x)$ é verdadeira (V)”
- (ii) “Qualquer que seja o elemento x de A , $p(x)$ é verdadeira (V)”



$$V_p = A$$

ou seja, mais simplesmente:

- (iii) “Para todo x de A , $p(x)$ ”
- (iv) “Qualquer que seja x de A , $p(x)$ ”

Pois bem, no simbolismo da Lógica Matemática indica-se este fato, abreviadamente, de uma das seguintes maneiras:

- (1) $(\forall x \in A) (p(x))$
- (2) $\forall x \in A, p(x)$
- (3) $\forall x \in A : p(x)$

Muitas vezes, para simplificar a notação, omite-se a indicação do domínio A da variável x , escrevendo mais simplesmente:

- (4) $(\forall x) (p(x))$
- (5) $\forall x, p(x)$
- (6) $\forall x : p(x)$

Subsiste, pois, a equivalência:

$$(\forall x \in A) (p(x)) \Leftrightarrow V_p = A$$

Importa notar que $p(x)$, simplesmente, é uma sentença aberta, e por conseguinte carece de valor lógico V ou F; mas, a sentença aberta $p(x)$ com o símbolo \forall antes dela, isto é, $(\forall x \in A) (p(x))$, torna-se uma proposição e, portanto, tem um valor lógico, que é a verdade (V) se $V_p = A$ e a falsidade (F) se $V_p \neq A$.

Em outros termos, dada uma sentença aberta $p(x)$ em um conjunto A, o símbolo \forall , referido à variável x, representa uma operação lógica que transforma a sentença aberta $p(x)$ numa proposição, verdadeira ou falsa, conforme $p(x)$ exprime ou não uma condição universal no conjunto A. A esta operação lógica dá-se o nome de **quantificação universal** e ao respectivo símbolo \forall (que é um A invertido) o de **quantificador universal**.

Quando, em particular, A seja um conjunto finito com n elementos a_1, a_2, \dots, a_n , isto é, $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, é óbvio que a proposição $(\forall x \in A) (p(x))$ é equivalente à conjunção das n proposições $p(a_1), p(a_2), \dots, p(a_n)$, ou seja, simbolicamente:

$$(\forall x \in A) (p(x)) \Leftrightarrow (p(a_1) \wedge p(a_2) \wedge \dots \wedge p(a_n))$$

Portanto, num universo finito, o quantificador universal equivale a conjunções sucessivas. Assim, p. ex., no universo finito $A = \{3, 5, 7\}$ e sendo $p(x)$ a sentença aberta "x é primo", temos:

$$(\forall x \in A) (x \text{ é primo}) \Leftrightarrow (3 \text{ é primo} \wedge 5 \text{ é primo} \wedge 7 \text{ é primo})$$

Exemplificando, a expressão:

$$(\forall x) (x \text{ é mortal})$$

lê-se "Qualquer que seja x, x é mortal", o que é uma proposição verdadeira (V) no universo H dos seres humanos ou, mais geralmente, no universo dos seres vivos.

Se a variável da sentença aberta for uma outra, em vez da letra x, escreve-se o quantificador universal \forall seguido dessa variável. Assim, a expressão:

$$(\forall \text{ Fulano}) (\text{Fulano é mortal})$$

lê-se "Qualquer que seja Fulano, Fulano é mortal", o que significa **exatamente o mesmo** que a proposição anterior.

Analogamente, as expressões:

$$\begin{aligned} (\forall x) (2x > x) &: \text{"Qualquer que seja } x, 2x > x" \\ (\forall y) (2y > y) &: \text{"Qualquer que seja } y, 2y > y" \end{aligned}$$

exprimem ambas o mesmo fato: "O dobro de um número é sempre maior que esse número", o que é verdadeiro em N, mas falso em R (p. ex., $2 \cdot 0 = 0, 2 \cdot (-3) < -3$, etc.).

Muitas vezes (quando não há perigo de dúvida), o quantificador é escrito depois e não antes da expressão quantificada. Por exemplo, tem-se em R:

$$x^2 - 4 = (x + 2)(x - 2), \forall x$$

Aqui, o símbolo $\forall x$ pode ler-se "qualquer que seja x" ou "para todo o valor de x" ou simplesmente "para todo o x".

Algumas vezes, para evitar possíveis dúvidas, o domínio da variável é devidamente especificado. Assim:

$$x + 1 > x, \forall x \in R$$

Aqui, " $\forall x \in R$ " lê-se: "qualquer que seja $x \in R$ " ou ainda "para todo $x \in R$ ".

Outras vezes ainda, para condensar a escrita, escreve-se a variável como índice do símbolo \forall . Assim, p. ex.:

$$\forall_{x > 0} 2x > x \text{ ("Para todo o } x > 0, \text{ tem-se } 2x > x\text")$$

$$\forall_{x \neq 0} x^2 > 0 \text{ ("Para todo o } x \neq 0, \text{ tem-se } x^2 > 0\text")$$

Outros exemplos:

(1) A proposição:

$$(\forall n \in N) (n + 5 > 3)$$

é verdadeira, pois, o conjunto-verdade da sentença aberta $p(n) : n + 5 > 3$ é:

$$V_p = \{n \mid n \in N \wedge n + 5 > 3\} = \{1, 2, 3, \dots\} = N$$

(2) A proposição:

$$(\forall n \in N) (n + 3 > 7)$$

é falsa, pois, o conjunto-verdade da sentença aberta $p(n) : n + 3 > 7$ é:

$$V_p = \{n \mid n \in N \wedge n + 3 > 7\} = \{5, 6, 7, \dots\} \neq N$$

(3) Obviamente, a proposição $(\forall x \in R) (x^2 \geq 0)$ é verdadeira e a proposição $(\forall x \in R) (3x - 5 = 0)$ é falsa.

2. QUANTIFICADOR EXISTENCIAL

Seja $p(x)$ uma sentença aberta em um conjunto não vazio $A (A \neq \emptyset)$ e seja V_p o seu conjunto-verdade:

$$V_p = \{x \mid x \in A \wedge p(x)\}$$

Quando V_p não é vazio ($V_p \neq \emptyset$), então, um elemento, pelo menos, do conjunto A satisfaz a sentença aberta $p(x)$, e podemos afirmar:

- (i) “Existe pelo menos um $x \in A$ tal que $p(x)$ é verdadeira (V)”
- (ii) “Para algum $x \in A$, $p(x)$ é verdadeira (V)”

ou seja, mais simplesmente:

- (iii) “Existe $x \in A$ tal que $p(x)$ ”
- (iv) “Para algum $x \in A$, $p(x)$ ”

Pois bem, no simbolismo da Lógica Matemática indica-se este fato, abreviadamente, de uma das seguintes maneiras:

- (1) $(\exists x \in A) (p(x))$
- (2) $\exists x \in A, p(x)$
- (3) $\exists x \in A : p(x)$

Muitas vezes, para simplificar a notação, omite-se a indicação do domínio A da variável x , escrevendo mais simplesmente:

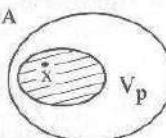
- (4) $(\exists x) (p(x))$
- (5) $\exists x, p(x)$
- (6) $\exists x : p(x)$

Subsiste, pois, a equivalência:

$$(\exists x \in A) (p(x)) \Leftrightarrow V_p \neq \emptyset$$

Cumpre notar que, sendo $p(x)$ uma sentença aberta, carece de valor lógico V ou F; mas a sentença aberta $p(x)$ com o símbolo \exists antes dela, isto é, $(\exists x \in A) (p(x))$, torna-se uma proposição e, portanto, tem um valor lógico, que é a verdade (V) se $V_p \neq \emptyset$ e a falsidade (F) se $V_p = \emptyset$.

Deste modo, dada uma sentença aberta $p(x)$ em um conjunto A , o símbolo \exists , referido à variável x , representa uma operação lógica que transforma a sentença aberta $p(x)$ numa proposição, verdadeira ou falsa, conforme $p(x)$ exprime ou não uma condição possível no conjunto A . A esta operação lógica dá-se o nome de quantificação existencial e ao respectivo símbolo \exists (que é um E invertido) o de quantificador existencial.



Quando, em particular, A seja um conjunto finito com n elementos a_1, a_2, \dots, a_n , isto é, $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, é óbvio que a proposição $(\exists x \in A) (p(x))$ é equivalente à disjunção das n proposições $p(a_1), p(a_2), \dots, p(a_n)$, ou seja, simbolicamente:

$$(\exists x \in A) (p(x)) \Leftrightarrow (p(a_1) \vee p(a_2) \vee \dots \vee p(a_n))$$

Portanto, num universo finito, o quantificador existencial equivale a disjunções sucessivas. Assim, p. ex., no universo finito $A = \{3, 4, 5\}$ e sendo $p(x)$ a sentença aberta “ x é par”, temos:

$$(\exists x \in A) (p(x)) \Leftrightarrow (3 \text{ é par} \vee 4 \text{ é par} \vee 5 \text{ é par})$$

Exemplificando, a expressão:

$$(\exists x) (x \text{ vive na Lua})$$

lê-se “Existe pelo menos um x tal que x vive na Lua”, e é uma proposição falsa (F) no universo H dos seres humanos, que também se pode traduzir por “Algum ser vive na Lua”.

Analogamente, a expressão:

$$(\exists x) (x > x^2)$$

lê-se “Existe pelo menos um x tal que $x > x^2$ ”, o que é uma proposição verdadeira (V) em R (“Algum número real é superior ao seu quadrado”), mas falsa (F) em N (“Nenhum número natural é superior ao seu quadrado”).

Para o símbolo \exists adotam-se ainda convenções análogas àquelas que indicamos para o quantificador universal \forall , com esta única diferença: nunca pode ser escrito após a sentença aberta quantificada.

Outros exemplos:

- (1) A proposição:

$$(\exists n \in N) (n + 4 < 8)$$

é verdadeira, pois, o conjunto-verdade da sentença aberta $p(n) : n + 4 < 8$ é:

$$V_p = \{n \mid n \in N \wedge n + 4 < 8\} = \{1, 2, 3, \} \neq \emptyset$$

- (2) A proposição:

$$(\exists n \in N) (n + 5 < 3)$$

é falsa, pois, o conjunto-verdade da sentença aberta $p(n) : n + 5 < 3$ é:

$$V_p = \{n \mid n \in N \wedge n + 5 < 3\} = \emptyset$$

- (3) Obviamente, a proposição $(\exists x \in R) (x^2 < 0)$ é falsa e a proposição $(\exists x \in R) (2x - 1 = 0)$ é verdadeira.

3. VARIÁVEL APARENTE E VARIÁVEL LIVRE

Quando há um quantificador a incidir sobre uma variável, esta diz-se **aparente** ou **muda**; caso contrário, a variável diz-se **livre**.

Assim, p. ex., a letra x é **variável livre** nas sentenças abertas:

$$3x - 1 = 14 \quad (\text{equação}), \quad x + 1 > x \quad (\text{inequação})$$

mas é **variável aparente** nas proposições:

$$(\exists x)(3x - 1 = 14), \quad (\forall x)(x + 1 > x)$$

É frequente em Matemática o uso do seguinte **PRINCÍPIO DE SUBSTITUIÇÃO DAS VARIÁVEIS APARENTES**: Todas às vezes que uma variável aparente é substituída, em todos os lugares que ocupa numa expressão, por outra variável que não figure na mesma expressão, obtém-se uma expressão equivalente.

Assim, p. ex., são equivalentes as proposições:

$$\begin{aligned} (*) \quad & (\forall \text{ Fulano})(\text{Fulano é mortal}) \quad \text{e} \quad (\forall x)(x \text{ é mortal}); \\ (***) \quad & (\exists \text{ Fulano})(\text{Fulano foi à Lua}) \quad \text{e} \quad (\exists x)(x \text{ foi à Lua}) \end{aligned}$$

De modo geral, qualquer que seja a sentença aberta $p(x)$ em um conjunto A subsistem as equivalências:

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & (\forall x \in A)(p(x)) \iff (\forall y \in A)(p(y)) \\ \text{(ii)} \quad & (\exists x \in A)(p(x)) \iff (\exists y \in A)(p(y)) \end{aligned}$$

4. QUANTIFICADOR DE EXISTÊNCIA E UNICIDADE

Consideremos em R a sentença aberta “ $x^2 = 16$ ”. Por ser

$$4^2 = 16, \quad (-4)^2 = 16 \quad \text{e} \quad 4 \neq -4$$

podemos concluir:

$$(\exists x, y \in R)(x^2 = 16 \wedge y^2 = 16 \wedge x \neq y)$$

Pelo contrário, para a sentença aberta “ $x^3 = 27$ ” em R teremos as duas proposições:

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & (\exists x \in R)(x^3 = 27) \\ \text{(ii)} \quad & x^3 = 27 \wedge y^3 = 27 \Rightarrow x = y \end{aligned}$$

A primeira proposição diz que existe pelo menos um $x \in R$ tal que $x^3 = 27$ ($x = 3$): é uma afirmação de **existência**.

A segunda proposição diz que não pode existir mais de um $x \in R$ tal que $x^3 = 27$: é uma afirmação de **unicidade**.

A conjunção das duas proposições diz que existe um $x \in R$ e um só tal que $x^3 = 27$. Para indicar este fato, escreve-se:

$$(\exists ! x \in R)(x^3 = 27)$$

onde o símbolo $\exists !$ é chamado **quantificador existencial de unicidade** e se lê: “Existe um e um só”.

Muitas proposições da Matemática encerram afirmações de existência e unicidade. Assim, p. ex., no universo R :

$$a \neq 0 \Rightarrow (\forall b)(\exists ! x)(ax = b)$$

Exemplificando, são obviamente verdadeiras as proposições:

$$\begin{aligned} (\exists ! x \in N)(x^2 - 9 = 0) \\ (\exists ! x \in Z)(-1 < x < 1) \\ (\exists ! x \in R)(|x| = 0) \end{aligned}$$

5. NEGAÇÃO DE PROPOSIÇÕES COM QUANTIFICADOR

É claro que um quantificador universal ou existencial pode ser precedido do símbolo de negação \sim . Por exemplo, no universo H dos seres humanos, as expressões:

$$\begin{array}{ll} \text{(i)} \quad (\forall x)(x \text{ fala francês}) & \text{(ii)} \quad \sim(\forall x)(x \text{ fala francês}) \\ \text{(iii)} \quad (\exists x)(x \text{ foi à Lua}) & \text{(iv)} \quad \sim(\exists x)(x \text{ foi àLua}) \end{array}$$

são proposições que, em linguagem comum, se podem enunciar, respectivamente:

$$\begin{array}{ll} (*) \quad \text{"Toda a pessoa fala francês"} \\ (***) \quad \text{"Nem toda a pessoa fala francês"} \\ (***) \quad \text{"Alguém foi à Lua"} \\ (*****) \quad \text{"Ninguém foi à Lua"} \end{array}$$

São também evidentes as equivalências:

$$\begin{aligned} \sim(\forall x)(x \text{ fala francês}) & \iff (\exists x)(\sim x \text{ fala francês}) \\ \sim(\exists x)(x \text{ foi àLua}) & \iff (\forall x)(\sim x \text{ foi àLua}) \end{aligned}$$

De modo geral, a negação da proposição $(\forall x \in A)(p(x))$ é equivalente a afirmação de que, para ao menos um $x \in A$, $p(x)$ é falsa ou $\sim p(x)$ é verdadeira.

Logo, subsiste a equivalência:

$$\sim [(\forall x \in A)(p(x))] \Leftrightarrow (\exists x \in A)(\sim p(x))$$

Analogamente, a negação da proposição $(\exists x \in A)(p(x))$ é equivalente a afirmação de que, para todo $x \in A$, $p(x)$ é falsa ou $\sim p(x)$ é verdadeira. Logo, subsiste a equivalência:

$$\sim [(\exists x \in A)(p(x))] \Leftrightarrow (\forall x \in A)(\sim p(x))$$

Estas duas importantes equivalências são conhecidas por **segundas regras de negação de DE MORGAN**.

Portanto: A negação transforma o quantificador universal em quantificador existencial (seguido de negação) e vice-versa.

Exemplos:

(1) A negação da proposição: "Todo o aluno da turma A é bem comportado" é a proposição: "Existe pelo menos um aluno da turma A que não é bem comportado", ou seja, mais simplesmente: "Nem todo aluno da turma A é bem comportado".

(2) A negação da proposição: "Existe pelo menos um aluno da turma A que está doente" é a proposição: "Qualquer que seja o aluno da turma A, ele não está doente", ou seja, mais simplesmente: "Nenhum aluno da turma A está doente".

(3) A negação da proposição: "Existe um planeta que é habitável" é a proposição: "Todos os planetas não são habitáveis", ou seja: "Nenhum planeta é habitável". Representando por P o conjunto de todos os planetas, teremos, simbolicamente:

$$\sim(\exists x \in P)(x \text{ é habitável}) \Leftrightarrow (\forall x \in P)(x \text{ não é habitável})$$

(4) A negação da proposição: "Para todo o número natural n, tem-se $n + 2 > 8$ " é a proposição: "Existe pelo menos um número natural n tal que $n + 2 \leq 8$ ". Simbolicamente:

$$\sim(\forall n \in \mathbb{N})(n + 2 > 8) \Leftrightarrow (\exists n \in \mathbb{N})(n + 2 \leq 8)$$

$$(5) \sim(\exists x \in \mathbb{R})(x^2 < 0) \Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R})(x^2 \geq 0)$$

$$(6) \sim(\forall x \in \mathbb{R})(3x - 5 = 0) \Leftrightarrow (\exists x \in \mathbb{R})(3x - 5 \neq 0)$$

$$(7) \sim(\forall x \in \mathbb{R})(|x| \geq 0) \Leftrightarrow (\exists x \in \mathbb{R})(|x| < 0)$$

$$(8) \sim(\exists x \in \mathbb{R})(\operatorname{sen}x = 0) \Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R})(\operatorname{sen}x \neq 0)$$

6. CONTRA-EXEMPLO

Para mostrar que uma proposição da forma $(\forall x \in A)(p(x))$ é falsa (F) basta mostrar que a sua negação $(\exists x \in A)(\sim p(x))$ é verdadeira (V), isto é, que existe pelo menos um elemento $x_0 \in A$ tal que $p(x_0)$ é uma proposição falsa (F). Pois bem, o elemento x_0 diz-se um **contra-exemplo** para a proposição $(\forall x \in A)(p(x))$.

Exemplos:

(1) A proposição $(\forall n \in \mathbb{N})(2^n > n^2)$ é falsa, sendo o número 2 um contra-exemplo: $2^2 = 2^2$. Os números 3 e 4 também são contra-exemplos, pois, temos: $2^3 < 3^2$ e $2^4 = 4^2$.

Para $n = 1$ e para todo $n > 4$ se tem $2^n > n^2$.

(2) A proposição $(\forall x \in \mathbb{R})(|x| \neq 0)$ é falsa, sendo o número 0 um contra-exemplo: $|0| = 0$.

(3) A proposição $(\forall x \in \mathbb{R})(x^2 > x)$ é falsa, sendo, p. ex., $\frac{1}{3}$ um contra-exemplo: $(\frac{1}{3})^2 < \frac{1}{3}$.

(4) A proposição $(\forall x \in \mathbb{R})((x+2)^2 = x^2 + 4)$ é falsa, sendo, p. ex., 1 um contra-exemplo: $(1+2)^2 \neq 1^2 + 4$ ou $9 \neq 5$.

(5) A proposição $(\forall x \in \mathbb{Z}_+)(x^2 + x + 41 \text{ é um número primo})$ é falsa, sendo o número 40 um contra-exemplo, pois, temos:

$40^2 + 40 + 41 = 40(40+1) + 41 = 40 \cdot 41 + 41 = 41(40+1) = 41 \cdot 41 = 41^2$, que é um número composto.

É interessante notar que o trinômio $x^2 + x + 41$, analizado pela primeira vez pelo famoso matemático suíço LEONHARD EULER (1707-1783), produz números primos para $x = 0, 1, 2, 3, \dots, 39$.

EXERCÍCIOS

1. Sendo R o conjunto dos números reais, determinar o valor lógico (V ou F) de cada uma das seguintes proposições:

- | | |
|---|---|
| (a) $(\forall x \in \mathbb{R})(x = x)$ | (b) $(\exists x \in \mathbb{R})(x^2 = x)$ |
| (c) $(\exists x \in \mathbb{R})(x = 0)$ | (d) $(\exists x \in \mathbb{R})(x + 2 = x)$ |
| (e) $(\forall x \in \mathbb{R})(x + 1 > x)$ | (f) $(\forall x \in \mathbb{R})(x^2 = x)$ |

Resolução:

- (a) F ($| -3 | = 3 \neq -3$); (b) V ($1^2 = 1$);
 (c) V ($| 0 | = 0$); (d) F (A equação $x + 2 = x$ não tem solução);
 (e) V (Todo o número real é solução da inequação $x + 1 > x$);
 (f) F ($3^2 \neq 3$)

2. Dar a negação das proposições do Exercício 1.

Resolução:

- (a) $(\exists x \in \mathbb{R}) (\sim(|x| = x)) \iff (\exists x \in \mathbb{R}) (|x| \neq x)$
 (b) $(\forall x \in \mathbb{R}) (\sim(x^2 = x)) \iff (\forall x \in \mathbb{R}) (x^2 \neq x)$
 (c) $(\forall x \in \mathbb{R}) (\sim(|x| = 0)) \iff (\forall x \in \mathbb{R}) (|x| \neq 0)$
 (d) $(\forall x \in \mathbb{R}) (\sim(x + 2 = x)) \iff (\forall x \in \mathbb{R}) (x + 2 \neq x)$
 (e) $(\exists x \in \mathbb{R}) (\sim(x + 1 > x)) \iff (\exists x \in \mathbb{R}) (x + 1 \leq x)$
 (f) $(\exists x \in \mathbb{R}) (\sim(x^2 = x)) \iff (\exists x \in \mathbb{R}) (x^2 \neq x)$

3. Sendo $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, determinar o valor lógico (V ou F) de cada uma das seguintes proposições:

- (a) $(\exists x \in A) (x + 3 = 10)$ (b) $(\forall x \in A) (x + 3 < 10)$
 (c) $(\exists x \in A) (x + 3 < 5)$ (d) $(\forall x \in A) (x + 3 \leq 7)$
 (e) $(\exists x \in A) (3^x > 72)$ (f) $(\exists x \in A) (x^2 + 2x = 15)$

Resolução:

- (a) F (Nenhum elemento de A é raiz da equação $x + 3 = 10$)
 (b) V (Para cada elemento de A se tem $x + 3 < 10$)
 (c) V (1 é solução da inequação $x + 3 < 5$)
 (d) F (5 não é solução da inequação $x + 3 \leq 7$)
 (e) V ($3^4 = 81 > 72$)
 (f) V (3 é raiz da equação $x^2 + 2x = 15$)

4. Dar a negação das proposições do Exercício 3.

Resolução:

- (a) $(\forall x \in A) (\sim(x + 3 = 10)) \iff (\forall x \in A) (x + 3 \neq 10)$
 (b) $(\exists x \in A) (\sim(x + 3 < 10)) \iff (\exists x \in A) (x + 3 \geq 10)$
 (c) $(\forall x \in A) (\sim(x + 3 < 5)) \iff (\forall x \in A) (x + 3 \geq 5)$
 (d) $(\exists x \in A) (\sim(x + 3 \leq 7)) \iff (\exists x \in A) (x + 3 > 7)$
 (e) $(\forall x \in A) (\sim(3^x > 72)) \iff (\forall x \in A) (3^x \leq 72)$
 (f) $(\forall x \in A) (\sim(x^2 + 2x = 15)) \iff (\forall x \in A) (x^2 + 2x \neq 15)$

5. Sendo R o conjunto dos números reais, determinar o valor lógico (V ou F) de cada uma das seguintes proposições:

- (a) $(\exists x \in R) (2x = x)$ (b) $(\exists x \in R) (x^2 + 3x = 2)$
 (c) $(\exists x \in R) (x^2 + 5 = 2x)$ (d) $(\forall x \in R) (2x + 3x = 5x)$

6. Dar a negação das proposições do Exercício 5.

7. Sendo $A = \{1, 2, 3\}$, determinar o valor lógico (V ou F) de cada uma das seguintes proposições:

- (a) $(\exists x \in A) (x^2 + x - 6 = 0)$ (b) $(\exists y \in A) (\sim(y^2 + y = 6))$
 (c) $(\exists x \in A) (x^2 + 3x = 1)$ (d) $\sim(\forall x \in A) (x^2 + x = 6)$
 (e) $\sim(\exists x \in A) (x^2 + 3x = 1)$ (f) $(\forall z \in A) (z^2 + 3z \neq 1)$

8. Sendo $A = \{1, 2, 3\}$, determinar o valor lógico (V ou F) de cada uma das seguintes proposições:

- (a) $(\forall x \in A) ((x + 1)^2 = x^2 + 1)$
 (b) $(\exists x \in A) (x^3 - x^2 - 10x - 8 = 0)$
 (c) $(\forall x \in A) (x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0)$
 (d) $(\exists x \in A) (x^4 - 4x^3 - 7x^2 - 50x = 24)$

9. Sendo $A = \{1, 2, 3, 4\}$, determinar o valor lógico (V ou F) de cada uma das seguintes proposições:

- (a) $(\forall x \in A) (x + 3 \leq 6)$ (b) $(\exists x \in A) (x + 3 < 6)$
 (c) $(\forall x \in A) (x^2 - 10 \leq 8)$ (d) $(\exists x \in A) (2x^2 + x = 15)$

10. Dar a negação das proposições do Exercício 9.

11. Sendo R o conjunto dos números reais, determinar o valor lógico (V ou F) de cada uma das seguintes proposições:

- (a) $(\forall x \in R) (x^2 + 1 > 0)$
 (b) $(\exists x \in R) (x^2 + 1 = 0)$
 (c) $(\exists x \in R) (4x - 3 = 1 - 2x)$
 (d) $(\forall x \in R) (x^2 + 3x + 2 = 0)$
 (e) $(\exists x \in R) (3x^2 - 2x - 1 = 0)$
 (f) $(\exists x \in R) (3x^2 - 2x + 1 = 0)$
 (g) $(\forall x \in R) (x + 2)^2 = x^2 + 4x + 4$

12. Sendo $A = \{2, 3, \dots, 8, 9\}$, dar um contra-exemplo para cada uma das seguintes proposições:

- (a) $(\forall x \in A) (x + 5 < 12)$ (b) $(\forall x \in A) (x \text{ é primo})$
 (c) $(\forall x \in A) (x^2 > 1)$ (d) $(\forall x \in A) (x \text{ é par})$
 (e) $(\forall x \in A) (0^x = 0)$ (f) $(\forall x \in A) (x \mid 72)$

Resolução:

- Para $x = 7, 8$ e 9 , temos $x + 5 \geq 12$. Logo, cada um desses três números é um **contra-exemplo**.
- Os números $4, 6, 8$ e 9 não são primos e, portanto, cada um deles é um **contra-exemplo**.
- Não há **contra-exemplo** porque a proposição é verdadeira.
- Os números $3, 5, 7$ e 9 são ímpares e, portanto, cada um deles é um **contra-exemplo**.
- Não há **contra-exemplo** porque a proposição é verdadeira.
- Os números 5 e 7 não dividem 72 e, portanto, cada um deles é um **contra-exemplo**.

13. Sendo $A = \{3, 5, 7, 9\}$, dar um **contra-exemplo** para cada uma das seguintes proposições:

- | | |
|--|--|
| (a) $(\forall x \in A)(x + 3 \geq 7)$ | (b) $(\forall x \in A)(x \text{ é ímpar})$ |
| (c) $(\forall x \in A)(x \text{ é primo})$ | (d) $(\forall x \in A)(x = x)$ |

14. Dar a negação das proposições do Exercício 13.

15. Dar a negação de cada uma das seguintes proposições:

- $(\forall x \in A)(p(x)) \wedge (\exists x \in A)(q(x))$
- $(\exists x \in A)(p(x)) \vee (\forall x \in A)(q(x))$
- $(\exists x \in A)(\sim p(x)) \vee (\forall x \in A)(\sim q(x))$
- $(\exists x \in A)(p(x)) \rightarrow (\forall x \in A)(\sim q(x))$

16. Dar a negação de cada uma das seguintes proposições:

- $(\forall x)(x + 2 \leq 7) \wedge (\exists x)(x^2 - 1 = 3)$
- $(\exists x)(x^2 = 9) \vee (\forall x)(2x - 5 \neq 7)$

17. Demonstrar:

- $p(y) \rightarrow (\exists x \in A)(p(x)), y \in A$
- $(\forall x \in A)(p(x)) \rightarrow p(y), y \in A$
- $(\forall x \in A)(p(x)) \rightarrow (\exists x \in A)(p(x))$

18. Demonstrar:

- $(\forall x)(p(x) \wedge q(x)) \iff [(\forall x)(p(x)) \wedge (\forall x)(q(x))]$
- $(\exists x)(p(x) \wedge q(x)) \rightarrow [(\exists x)(p(x)) \wedge (\exists x)(q(x))]$
- $(\exists x)(p(x) \vee q(x)) \iff [(\exists x)(p(x)) \vee (\exists x)(q(x))]$
- $[(\forall x)(p(x)) \vee (\forall x)(q(x))] \Rightarrow (\forall x)(p(x) \vee q(x))$

Capítulo 17

Quantificação de Sentenças Abertas Com Mais de Uma Variável

1. QUANTIFICAÇÃO PARCIAL

Consideremos, p. ex., a expressão:

$$(\exists x \in A)(2x + y < 7)$$

sendo $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ o universo das variáveis x e y .

Esta expressão, que se pode ler: "Existe pelo menos um $x \in A$ para o qual se tem $2x + y < 7$ ", não é uma proposição, visto que o seu valor lógico, embora não dependa de x (variável aparente), depende ainda de y (variável livre). Portanto, é uma sentença aberta em y , cujo conjunto-verdade é $\{1, 2, 3, 4\}$, pois, somente para $y = 5$ não existe $x \in A$ tal que $2x + y < 7$.

Analogamente, a expressão:

$$(\forall y \in A)(2x + y < 10)$$

sendo $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ o universo das variáveis x e y , que se pode ler: "Para todo $y \in A$ se tem $2x + y < 10$ ", também não é uma proposição, mas uma sentença aberta em x (variável livre), cujo conjunto-verdade é $\{1, 2\}$, pois, somente para $x = 1$ ou $x = 2$ se tem $2x + y < 10$ para todo $y \in A$.

De um modo geral, dada uma sentença aberta com mais de uma variável, a aplicação de um quantificador referido a uma das variáveis, transforma a sentença aberta dada numa outra sentença aberta com menos uma variável livre. Logo, a aplicação sucessiva de quantificadores acaba por transformar uma sentença aberta com mais de uma variável numa proposição.

2. QUANTIFICAÇÃO MÚLTIPLA

Toda a sentença aberta precedida de quantificadores, um para cada variável, isto é, com todas as variáveis quantificadas, é uma proposição, pois, assume um dos valores lógicos V ou F.

Assim, p. ex., são proposições as seguintes expressões:

- (i) $(\forall x \in A)(\forall y \in B)(p(x, y))$
- (ii) $(\forall x \in A)(\exists y \in B)(p(x, y))$
- (iii) $(\exists x \in A)(\forall y \in B)(\forall z \in C)(p(x, y, z))$

Exemplos:

(1) Consideremos os conjuntos:

$$H = \{\text{Jorge, Cláudio, Paulo}\}, M = \{\text{Suely, Carmen}\}$$

e seja $p(x, y)$ a sentença aberta em $H \times M$: “ x é irmão de y ”.

A proposição:

$$(\forall x \in H)(\exists y \in B)(p(x, y))$$

se pode ler: “Para todo x de H existe pelo menos um y de M tal que x é irmão de y ”. Em outros termos: “Cada homem de H é irmão de Suely ou de Carmen”.

A proposição:

$$(\exists y \in M)(\forall x \in H)(p(x, y))$$

se pode ler: “Pelo menos uma das mulheres de M é irmã de todos os homens de H ”. Observe-se que, mudando a ordem dos quantificadores, obtém-se uma proposição diferente.

(2) A proposição:

$$(\forall x \in N)(\forall y \in N)((x + y)^2 > x^2 + y^2)$$

se pode ler: “Quaisquer que sejam x e y pertencentes a N , $(x + y)^2$ é maior que $x^2 + y^2$ ”.

Esta proposição também se pode escrever:

$$(\forall x, y \in N)((x + y)^2 > x^2 + y^2)$$

ou

$$(x + y)^2 > x^2 + y^2, \forall x, y \in N$$

e é obviamente verdadeira (V), enquanto que a proposição:

$$(x + y)^2 > x^2 + y^2, \forall x, y \in R$$

é falsa (F).

Costuma-se, para simplificar a notação, omitir a indicação do domínio de cada variável e escrever, p. ex.:

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2, \forall x, y$$

o que é verdadeiro em N e em R .

(3) Consideremos os conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ e a sentença aberta em $A \times B$: “ $2x + y = 8$ ”.

A proposição:

$$(\forall x \in A)(\exists y \in B)(2x + y = 8)$$

é verdadeira (V), pois, para $x = 1, 2, 3, 4$ temos $y = 6, 4, 2, 0 \in B$.

A proposição:

$$(\forall y \in B)(\exists x \in A)(2x + y = 8)$$

é falsa (F), pois, para $y = 8$, temos $x = 0 \notin A$.

A proposição:

$$(\exists y \in B)(\forall x \in A)(2x + y = 8)$$

também é falsa (F), pois, não existe um $y \in B$ tal que para todo $x \in A$ seja $2x + y = 8$.

Analogamente, também é falsa (F) a proposição:

$$(\exists x \in A)(\forall y \in B)(2x + y = 8)$$

3. COMUTATIVIDADE DOS QUANTIFICADORES

I. Quantificadores da mesma espécie podem ser comutados:

$$(\forall x)(\forall y)(p(x, y)) \Leftrightarrow (\forall y)(\forall x)(p(x, y));$$

$$(\exists x)(\exists y)(p(x, y)) \Leftrightarrow (\exists y)(\exists x)(p(x, y))$$

II. Quantificadores de espécies diferentes não podem em geral ser comutados

Exemplificando, seja a sentença aberta “ x é filho de y ”, o universo das variáveis x e y sendo o conjunto H dos seres humanos. A proposição:

$$(\forall x)(\exists y)(x \text{ é filho de } y)$$

é verdadeira (V), mas a proposição:

$$(\exists y)(\forall x)(x \text{ é filho de } y)$$

é falsa (F).

Seja, agora, a sentença aberta “ $y > x$ ”, o universo das variáveis x e y sendo o conjunto N dos números naturais. A proposição:

$$(\forall x)(\exists y)(y > x)$$

é verdadeira (V), mas a proposição:

$$(\exists y)(\forall x)(y > x)$$

é falsa (F).

4. NEGAÇÃO DE PROPOSIÇÕES COM QUANTIFICADORES

A negação de proposições com mais de um quantificador se obtém mediante a aplicação sucessiva das regras para negação de proposições com um único quantificador (segundas regras de negação de DE MORGAN).

Exemplos:

(1) Negação de proposições com dois quantificadores da mesma espécie:

$$\begin{aligned}\sim(\forall x)(\forall y)(p(x, y)) &\iff (\exists x)(\sim(\forall y)(p(x, y))) \iff \\ &\iff (\exists x)(\exists y)(\sim p(x, y));\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sim(\exists x)(\exists y)(p(x, y)) &\iff (\forall x)(\sim(\exists y)(p(x, y))) \iff \\ &\iff (\forall x)(\forall y)(\sim p(x, y))\end{aligned}$$

(2) Negação de proposições com dois quantificadores de espécies diferentes:

$$\begin{aligned}\sim(\forall x)(\exists y)(p(x, y)) &\iff (\exists x)(\sim(\exists y)(p(x, y))) \iff \\ &\iff (\exists x)(\forall y)(\sim p(x, y));\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sim(\exists x)(\forall y)(p(x, y)) &\iff (\forall x)(\sim(\forall y)(p(x, y))) \iff \\ &\iff (\forall x)(\exists y)(\sim p(x, y))\end{aligned}$$

(3) Negação de proposições com três quantificadores:

$$\begin{aligned}\sim(\exists x)(\exists y)(\forall z)(p(x, y, z)) &\iff (\forall x)(\sim(\exists y)(\forall z)(p(x, y, z))) \iff \\ &\iff (\forall x)(\forall y)(\exists z)(\sim p(x, y, z))\end{aligned}$$

EXERCÍCIOS

1. Sendo $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ o universo das variáveis x e y , determinar o conjunto-verdade de cada uma das seguintes sentenças abertas:

$$(a) (\exists y)(2x + y < 7) \quad (b) (\forall x)(2x + y < 10)$$

2. Sendo $\{1, 2, \dots, 9, 10\}$ o universo das variáveis x e y , determinar o conjunto-verdade de cada uma das seguintes sentenças abertas:

$$(a) (\forall y)(x + y < 14) \quad (b) (\exists y)(x + y < 14)$$

3. Sendo $\{1, 2, 3\}$ o universo das variáveis x e y , determinar o valor lógico (V ou F) de cada uma das seguintes proposições:

$$\begin{array}{ll}(a) (\exists x)(\forall y)(x^2 < y + 1) & (b) (\forall x)(\exists y)(x^2 + y^2 < 12) \\ (c) (\forall x)(\forall y)(x^2 + y^2 < 12) & (d) (\forall x)(\forall y)(x^2 + 2y < 10) \\ (e) (\exists x)(\forall y)(x^2 + 2y < 10) & (f) (\forall x)(\exists y)(x^2 + 2y < 10) \\ (g) (\exists x)(\exists y)(x^2 + 2y < 10)\end{array}$$

4. Sendo $\{1, 2, 3\}$ o universo das variáveis x , y e z , determinar o valor lógico (V ou F) de cada uma das seguintes proposições:

$$\begin{array}{ll}(a) (\exists x)(\forall y)(\exists z)(x^2 + y^2 < 2z^2) & (b) (\exists x)(\exists y)(\forall z)(x^2 + y^2 < 2z^2)\end{array}$$

5. Sendo R o conjunto dos números reais, determinar o valor lógico (V ou F) de cada uma das seguintes proposições:

$$\begin{array}{ll}(a) (\forall y \in R)(\exists x \in R)(x + y = y) & \\ (b) (\forall x \in R)(\exists y \in R)(x + y = 0) & \\ (c) (\forall x \in R)(\exists y \in R)(xy = 1) & \\ (d) (\forall y \in R)(\exists x \in R)(y < x)\end{array}$$

6. Sendo $A = \{1, 2, \dots, 9, 10\}$, determinar o valor lógico (V ou F) de cada uma das seguintes proposições:

$$\begin{array}{ll}(a) (\forall x \in A)(\exists y \in A)(x + y < 14) & \\ (b) (\forall x \in A)(\forall y \in A)(x + y < 14)\end{array}$$

7. Dar a negação de cada uma das seguintes proposições:

$$\begin{array}{ll}(a) (\forall x)(\exists y)(p(x) \vee q(y)) & (b) (\exists x)(\forall y)(p(x) \vee \sim q(y)) \\ (c) (\exists y)(\exists x)(p(x) \wedge \sim q(y)) & (d) (\forall x)(\exists y)(p(x, y) \rightarrow q(y)) \\ (e) (\exists x)(\forall y)(p(x, y) \rightarrow q(x, y))\end{array}$$

8. Dar a negação de cada uma das proposições do Exercício 5.

9. Demonstrar:

$$\begin{array}{ll}(i) (\exists x)(\forall y)(p(x, y)) \Rightarrow (\forall y)(\exists x)(p(x, y)) & \\ (ii) (\exists y)(\forall x)(p(x, y)) \Rightarrow (\forall x)(\exists y)(p(x, y))\end{array}$$

10. Conjuntos Limitados

Seja A um subconjunto não vazio do conjunto \mathbb{R} dos números reais ($A \neq \emptyset$ e $A \subset \mathbb{R}$).

Definição 1: Diz-se que A é **limitado inferiormente** (ou **limitado à esquerda**) se e somente se:

$$(\exists a \in \mathbb{R}) (\forall x \in A) (a \leq x)$$

Definição 2: Diz-se que A é **limitado superiormente** (ou **limitado à direita**) se e somente se:

$$(\exists b \in \mathbb{R}) (\forall x \in A) (x \leq b)$$

Definição 3: Diz-se que A é **limitado** se e somente se:

$$(\exists a, b \in \mathbb{R}) (\forall x \in A) (a \leq x \wedge x \leq b)$$

Respostas dos Exercícios

CAPÍTULO 1

- | | | | | | | |
|----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1. (a) V | (b) F | (c) F | (d) F | (e) V | (f) F | (g) V |
| (h) F | (i) V | (j) F | (k) F | (l) F | (m) V | (n) F |
| (o) V | (p) F | (q) V | (r) V | (s) V | (t) V | (u) F |

CAPÍTULO 2

1. (a) Não está frio.
 (b) Está frio e está chovendo.
 (c) Está frio ou está chovendo.
 (d) Está chovendo se e somente se está frio.
 (e) Se está frio, então não está chovendo.
 (f) Está frio ou não está chovendo.
 (g) Não está frio e não está chovendo.
 (h) Está frio se e somente se não está chovendo.
 (i) Se está frio e não está chovendo, então está frio.
2. (a) Se Carlos é feliz, então Jorge é rico.
 (b) Jorge é rico ou Carlos não é feliz.
 (c) Carlos é feliz se e somente se Jorge não é rico.
 (d) Se Jorge não é rico, então Carlos é feliz.
 (e) Não é verdade que Jorge não é rico.
 (f) Se Jorge não é rico e Carlos é feliz, então Jorge é rico.
3. (a) Claudio fala inglês ou alemão.
 (b) Claudio fala inglês e alemão.
 (c) Claudio fala inglês mas não alemão.
 (d) Claudio não fala inglês e nem alemão.
 (e) Não é verdade que Claudio não fala inglês.
 (f) Não é verdade que Claudio não fala inglês e nem alemão.
4. (a) Não é verdade que João é gaúcho e Jaime não é paulista.
 (b) Não é verdade que João não é gaúcho.

- (c) Não é verdade que João não é gaúcho ou que Jaime não é paulista.
 (d) Se João é gaúcho, então Jaime não é paulista.
 (e) João não é gaúcho se e somente se Jaime não é paulista.
 (f) Não é verdade que, se Jaime não é paulista, então João é gaúcho.
5. (a) $p \wedge q$ (b) $p \wedge \sim q$ (c) $\sim(\sim p \vee q)$
 (d) $\sim p \wedge \sim q$ (e) $p \vee (\sim p \wedge q)$ (f) $\sim(\sim p \vee \sim q)$
6. (a) $\sim p \wedge q$ (b) $p \vee \sim q$ (c) $\sim p \wedge \sim q$
 (d) $(\sim p \vee q) \wedge \sim q$
7. (a) $(p \vee q) \wedge \sim r$ (b) $(p \wedge q) \vee \sim(p \wedge r)$ (c) $\sim(p \wedge \sim r)$
 (d) $\sim((q \vee r) \wedge \sim p)$
8. (a) $x = 0 \vee x > 0$ (b) $x \neq 0 \wedge y \neq 0$ (c) $x > 1 \vee x + y = 0$
 (d) $x^2 = x \wedge x \wedge x^0 = 1$
9. (a) $(x + y = 0 \wedge z > 0) \vee x = 0$ (b) $x = 0 \wedge (y + z > x \vee z = 0)$
 (c) $x \neq 0 \vee (x = 0 \wedge y < 0)$ (d) $(x = y \wedge z = t) \vee (x < y \wedge z = 0)$
10. (a) $x > 0 \rightarrow y = 2$ (b) $x + y = 2 \rightarrow z > 0$
 (c) $x = 1 \vee x = 2 \rightarrow y > 1$ (d) $z > 5 \rightarrow x \neq 1 \wedge x \neq 2$
 (e) $x \neq y \rightarrow x + z > 5 \wedge y + z < 5$ (f) $(x + y > z \wedge z = 1) \rightarrow x + y > 1$
 (g) $x < 2 \rightarrow x = 1 \vee x = 0$ (h) $y = 4 \wedge (x < y \rightarrow x < 5)$
11. (a) $(x > 5 \wedge x < 7) \vee x \neq 6$ (b) $x < 5 \wedge x > 3 \rightarrow x = 4$
 (c) $x > 1 \vee (x < 1 \wedge x \geq 0)$
12. (a) F (b) V (c) F (d) V (e) F (f) F (g) F
13. (a) V (b) V (c) F (d) F (e) V (f) V (g) F
 (h) F (i) V (j) F (k) F
14. (a) V (b) V (c) F (d) V (e) V (f) F (g) V
 (h) V
15. (a) V (b) V (c) F (d) F (e) V (f) V (g) F
 (h) F (i) V (j) V
16. (a) V (b) F (c) V (d) F (e) V (f) F (g) V
 (h) V
17. (a) F (b) F (c) F (d) V (e) V (f) F (g) V

18. (a) V (b) V (c) F (d) F (e) V (f) F
19. (a) $V(p) = V$ ou $V(p) = F$ (b) $V(p) = F$ (c) $V(p) = F$
 (d) $V(p) = V$ ou $V(p) = F$ (e) $V(p) = F$ (f) $V(p) = F$
20. (a) $V(p) = F$ e $V(q) = V$; $V(p) = F$ e $V(q) = F$
 (b) $V(p) = F$ e $V(q) = F$
 (c) $V(p) = V$ e $V(q) = V$
 (d) $V(p) = V$ e $V(q) = V$
 (e) $V(p) = F$ e $V(q) = V$

CAPÍTULO 3

1.

	p	q	$\sim q$	$p \vee \sim q$	$\sim(p \vee \sim q)$
(a)	V	V	F	V	F
	V	F	V	V	F
	F	V	F	F	V
	F	F	V	V	F

	p	q	$\sim q$	$p \rightarrow \sim q$	$\sim(p \rightarrow \sim q)$
(b)	V	V	F	F	V
	V	F	V	V	F
	F	V	F	V	F
	F	F	V	V	F

	p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \wedge q \rightarrow p \vee q$
(c)	V	V	V	V	V
	V	F	F	V	V
	F	V	F	V	V
	F	F	F	F	V

	p	q	$\sim p$	$q \rightarrow p$	$\sim p \rightarrow (q \rightarrow p)$
(d)	V	V	F	V	V
	V	F	F	V	V
	F	V	V	F	F
	F	F	V	V	V

(e)

p	q	$p \rightarrow q$	$p \wedge q$	$(p \rightarrow q) \rightarrow p \wedge q$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	V	F	F
F	F	V	F	F

(f)

p	q	$\sim q$	$\sim q \wedge p$	$q \leftrightarrow \sim q \wedge p$
V	V	F	F	F
V	F	V	V	F
F	V	F	F	F
F	F	V	F	V

(g)

p	q	$\sim q$	$p \leftrightarrow \sim q$	$q \rightarrow p$	$(p \leftrightarrow \sim q) \leftrightarrow q \rightarrow p$
V	V	F	F	V	F
V	F	V	V	V	V
F	V	F	V	F	F
F	F	V	F	V	F

(h)

p	q	$(p \leftrightarrow \sim q) \rightarrow \sim q$	\rightarrow	\sim	p	\wedge	q
V	V	V	F	F	V	F	V
V	F	V	V	F	F	V	F
F	V	F	V	V	F	V	V
F	F	F	F	V	V	F	F

2.

(a)

p	q	r	\sim	p	\wedge	r	\rightarrow	q	v	\sim	r
V	V	V	F	V	F	V	V	V	F	V	V
V	V	F	F	V	F	F	V	V	V	F	V
V	F	V	F	V	F	V	F	F	F	V	V
V	F	F	F	V	F	F	V	V	V	F	V
F	V	V	V	F	V	V	V	V	F	V	V
F	V	F	V	F	F	V	V	V	F	V	V
F	F	V	V	F	V	V	F	F	F	V	V
F	F	F	V	F	F	V	V	V	F	V	F

(b)

p	q	r	$p \rightarrow r$	\leftrightarrow	q	v	\sim	r
V	V	V	V	V	V	V	F	V
V	V	F	V	F	F	V	V	F
V	F	V	V	V	F	F	V	V
V	F	F	V	F	F	V	V	F
F	V	V	F	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	V	V	V	F
F	F	V	F	V	F	V	V	V
F	F	F	F	V	F	V	F	F

(c)

p	q	r	$p \rightarrow (p \rightarrow \sim r)$	\leftrightarrow	q	v	\sim	r
V	V	V	V	F	V	F	V	V
V	V	F	V	V	V	F	V	V
V	F	V	V	F	V	F	V	V
V	F	F	V	V	V	F	F	F
F	V	V	F	V	V	V	V	V
F	V	F	F	V	V	F	V	V
F	F	V	F	V	V	F	V	V
F	F	F	F	V	V	F	F	F

(d)

(p \wedge q) $\rightarrow r$) v	\sim	p	\leftrightarrow	q	v	\sim	r
V	V	V	V	V	F	V	V
V	V	V	F	F	F	V	V
V	F	F	V	V	F	V	F
V	F	F	V	F	V	F	V
F	F	V	V	V	V	V	V
F	F	V	V	F	V	V	V
F	F	F	V	V	V	F	V
F	F	F	V	F	V	F	V

3. (a) VFFFV (b) VVFF (c) FVVF (d) FVVF (e) VFFF
 (f) FVFV (g) VVPV

4. (a) VVVVVFFFF (b) VFVVVFV (c) FVFFFVVVV
 (d) VVVVVFFFF (e) VVFVFVVF (f) FFFFVVF

5. (a) V (b) F (c) F (d) V (e) F (f) V

6. F

7. (a) F (b) V (c) V (d) V

8. (a) F (b) F (c) V

9. (a) F (b) V (c) F (d) V (e) V (f) V
 (g) V (h) V (i) F (j) F (k) V (l) V

10. (a) V (b) F (c) V (d) V (e) V (f) V

11. (a) F (b) V (c) V (d) V (e) V (f) F
 (g) V (h) V

12. (a) V (b) V (c) F (d) V (e) V

13. (a) V (b) V

14. (a) F (b) V (c) V

15. (a) $(q \leftrightarrow r \vee q) \leftrightarrow (p \wedge \sim q)$
 (b) $p \wedge \sim \sim q \leftrightarrow (q \leftrightarrow r \vee q)$
 (c) $(p \vee q \rightarrow \sim r) \vee (\sim q \wedge r \wedge q)$

CAPÍTULO 4

4. (a), (b), (c), (g), (h) tautológicas; (d), (e), (f) contingentes

CAPÍTULO 6

8. (a) F (b) V (c) F (d) V

CAPÍTULO 7

4. (a) Está frio e não está chovendo.
 (b) O pai de Marcos não é pernambucano e a mãe não é gaúcha.
 (c) As vendas estão aumentando ou os preços estão diminuindo.
 (d) Jorge não estuda Física ou estuda Química.

CAPÍTULO 8

3. (a) $\sim p \wedge q$ (b) $p \vee \sim q$ (c) $p \wedge q$ (d) $\sim p \wedge q$
 (e) $\sim q$ (f) C(Ctr.)

7. (a) $\sim p \vee q$ (b) $\sim p$ (c) $p \wedge \sim p$ (d) $p \vee \sim p$
 (e) $\sim p \vee \sim q$ (f) $\sim p$ (g) $p \vee \sim p$ (h) $\sim p \wedge \sim q$
 (i) $(p \vee \sim p) \wedge (q \vee \sim q)$ (j) $(p \vee \sim q) \wedge (\sim p \vee q) \wedge q$
 (k) $p \wedge (p \vee q) \wedge (\sim p \vee \sim q)$ (l) $p \wedge (p \vee \sim q) \wedge (\sim p \vee q)$
 (m) $(\sim p \vee q \vee r) \wedge (\sim p \vee \sim q \vee \sim r)$ (n) $p \wedge (p \vee q) \wedge r$

8. (a) $p \wedge q$ (b) $p \wedge \sim q$ (c) $\sim p \vee (\sim p \wedge q)$ (d) $\sim p \wedge \sim q$
 (e) $\sim p \vee q$ (f) $\sim p \vee \sim q$ (g) $p \vee \sim p$ (h) $p \wedge \sim p$
 (i) $\sim p \vee \sim q$ (j) $\sim p \wedge \sim q$ (k) $\sim p$ (l) $p \vee \sim p$

CAPÍTULO 9

1. (a) $(\sim p \wedge (\sim q \rightarrow p)) \rightarrow q$
 (b) $(p \rightarrow q) \rightarrow \sim(p \wedge \sim q)$
 (c) $(p \wedge (p \rightarrow q)) \wedge (\sim q \vee (r \wedge s)) \rightarrow r \wedge s$
 (d) $((x = y \rightarrow x = 5) \wedge (x = 5 \rightarrow x < z)) \rightarrow (x = y \rightarrow x < z)$

2. (a) $p, q \vee \sim p \vdash q$
 (b) $p \rightarrow q, p \wedge \sim q \vdash s$
 (c) $\sim(x < 0 \wedge y \neq x) \vdash x < 0 \vee y = x$

3. (a) AD (b) SIMP (c) SH (d) MP (e) MT (f) CONJ
 (g) SD (h) ABS (i) MP (j) MT (k) CONJ (l) AD
 (m) SD (n) SH (o) SIMP

4. (a) $x = z$ (b) $xy \in R$ (c) $x > z$ (d) $3 > 1$
 (e) $y + 1 = 2$ (f) $x = y$
5. (a) $x = 0$ (b) $x \neq z$ (c) $\sim(p \leftrightarrow q)$ (d) $x \geq 3$
6. (a) $x \neq 4$ (b) $y < 6$ (c) $r \wedge t$ (d) $\sim p$
7. (a) $p \rightarrow t$ (b) $x = 3 \rightarrow x \neq z$
 (c) $s \vee t \rightarrow \sim p$ (d) $xy = 6 \rightarrow y = 2$
8. (a) $r \vee \sim s$ (b) $x > 3 \vee z < 2$
 (c) $xy = 0 \vee xy > 3$ (d) $x^2 = 4 \vee y^2 = 9$
9. (a) $\sim(p \wedge q) \vee \sim q$ (b) $p \vee \sim \sim q$
 (c) $x \leq 3 \vee x \geq 4$ (d) $x \neq 2 \vee x \neq 8$

CAPÍTULO 10

5. $p \rightarrow \sim q$, $p \vee r$, $p \vdash \neg r$; Sofisma

CAPÍTULO 14

1. (a) $\{3\}$ (b) $\{1, 2, 3, 4\}$ (c) $\{2, 3\}$
 (d) $\{2\}$ (e) $\{5\}$ (f) $\{6, 7, 8, \dots\}$
2. (a) $\{3, -3\}$ (b) $\{-1, 0, 1\}$ (c) $\{2, -2\}$
 (d) $\{0\}$ (e) $\{4, -3\}$ (f) $\{3, -2\}$
3. (a) $\{1, 3, 4\}$ (b) $\{1, 3\}$ (c) $\{1\}$ (d) $\{1, 3, 4\}$
 (e) $\{4\}$ (f) $\{1\}$ (g) $\{1, 3, 9\}$ (h) $\{3, 4, 7, 9\}$
4. (a) $\{-1, 1, 2, 4\}$ (b) $\{x \in R \mid x \geq 2\}$ (c) $\{-1, 1\}$
 (d) \emptyset (e) $\{-2, 2\}$ (f) $\{-3, 3\}$
 (g) $\{-2, 2, 4\}$ (h) $\{-1, 0\}$
5. (a) $\{9, 10\}$ (b) $\{4, 10\}$ (c) $\{4, 9\}$ (d) $\{1\}$
6. $\{(1, 5), (3, 3), (3, 5), (4, 2), (4, 3), (4, 5)\}$

7. $\{(2, 8), (2, 6), (3, 3), (3, 6)\}$
 8. $\{(9, 1), (6, 2), (3, 3)\}$
 9. $\{(2, 3), (2, 5), (3, 2), (3, 4), (3, 5), (4, 3), (4, 5), (5, 2), (5, 3), (5, 4)\}$
 10. $\{(2, 2), (2, 5), (3, 3), (3, 6), (4, 4), (5, 5), (5, 2), (6, 6), (6, 3)\}$
 11. $\{(-2, -1), (-2, 0), (0, -1), (0, 0), (1, -1)\}$

CAPÍTULO 15

1. (a) $\{1, 3, 5\}$ (b) $\{2, 4, 6, 8\}$ (c) $\{3, 6\}$ (d) $\{1, 2, 4, 5, 6\}$
 2. (a) $\{0, 1, 3\}$ (b) $\{0, 1, 2, 4\}$ (c) $\{0, 2, 3, 5\}$ (d) $\{1, 4, 5\}$
 3. (a) $\{4, 5\}$ (b) $\{0, 2, 4\}$ (c) $\{0, 5\}$ (d) $\{5\}$
 (e) $\{0, 1, 4\}$ (f) $\{1, 2, 4, 5\}$
 4. (a) $\{-3, -1, 1, 3\}$ (b) $\{-3, -2, 0, 2, 3\}$ (c) $\{-3, -2, -1\}$
 (d) $\{-3, -1, 1\}$ (e) $\{-3, 2, 3\}$
 5. (a) $\{0, 2, 4, 5\}$ (b) $\{0, 2, 3, 5\}$ (c) $\{2, 4\}$ (d) $\{0, 1\}$
 6. $V_{p \wedge q} = [-1, \frac{3}{2}]$ $V_{p \rightarrow q} = [-1, \rightarrow]$
 7. $V_{p \vee q} = \left\{-3, -\frac{4}{5}, \frac{2}{3}\right\}$ $V_{p \wedge q} = \left\{-\frac{4}{5}\right\}$
 8. $V_{p \wedge q} = [-\frac{2}{5}, \frac{3}{4}]$ $V_{\sim p} = [\frac{3}{4}, \rightarrow]$
 9. $V_{p \rightarrow q} = \{1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ $V_{q \rightarrow p} = \{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$
 $V_{p \leftrightarrow q} = \{1, 3, 4, 6, 8\}$
 11. (a) $CAV_p \cap CAV_q$ (b) $V_p \cup CAV_q$
 (c) $CAV_p \cup V_q \cup V_r$ (d) $(V_q \cap V_t) \cup (CAV_p \cap V_d) \cup C_A(V_p \cup V_q)$

CAPÍTULO 16

5. (a) V (b) V (c) F (d) V

6. (a) $(\forall x \in \mathbb{R})(2x \neq x)$ (b) $(\forall x \in \mathbb{R})(x^2 + 3x \neq 2)$
 (c) $(\forall x \in \mathbb{R})(x^2 + 5 \neq 2x)$ (d) $(\exists x \in \mathbb{R})(2x + 3x \neq 5x)$

7. (a) V (b) V (c) F (d) V (e) V (f) V

8. (a) F (b) F (c) V (d) F

9. (a) F (b) V (c) V (d) F

10. (a) $(\exists x \in \mathbb{A})(x + 3 \geq 6)$ (b) $(\forall x \in \mathbb{A})(x + 3 \geq 6)$
 (c) $(\exists x \in \mathbb{A})(x^2 - 10 > 8)$ (d) $(\forall x \in \mathbb{A})(2x^2 + x \neq 15)$

11. (a) V (b) F (c) V (d) F (e) V (f) F (g) V

13. (a) 3 (b) Não há (a proposição é verdadeira)
 (c) 9 (d) Não há (a proposição é verdadeira)

14. (a) $(\exists x \in \mathbb{A})(x + 3 < 7)$ (b) $(\exists x \in \mathbb{A})(x \text{ é par})$
 (c) $(\exists x \in \mathbb{A})(x \text{ não é primo})$ (d) $(\exists x \in \mathbb{A})(|x| \neq x)$

15. (a) $(\exists x \in \mathbb{A})(\neg p(x)) \vee (\forall x \in \mathbb{A})(\neg q(x))$
 (b) $(\forall x \in \mathbb{A})(\neg p(x)) \wedge (\exists x \in \mathbb{A})(\neg q(x))$
 (c) $(\forall x \in \mathbb{A})(p(x)) \wedge (\exists x \in \mathbb{A})(q(x))$
 (d) $(\exists x \in \mathbb{A})(p(x)) \wedge (\exists x \in \mathbb{A})(q(x))$

16. (a) $(\exists x)(x + 2 > 7) \vee (\forall x)(x^2 - 1 \neq 3)$
 (b) $(\forall x)(x^2 \neq 9) \wedge (\exists x)(2x - 5 = 7)$

CAPÍTULO 17

1. (a) $\{1, 2\}$ (b) \emptyset

2. (a) $\{1, 2, 3\}$ (b) $\{1, 2, \dots, 9, 10\}$

3. (a) V (b) B (c) F (d) F (e) V (f) F (g) V

4. (a) V (b) F

5. (a) V (b) V (c) F (d) V

6. (a) V (b) F

7. (a) $(\exists x)(\forall y)(\neg p(x) \wedge \neg q(y))$ (b) $(\forall x)(\exists y)(\neg p(x) \wedge q(y))$
 (c) $(\forall y)(\forall x)(\neg p(x) \vee q(y))$ (d) $(\exists x)(\forall y)(p(x, y) \wedge \neg q(x, y))$
 (e) $(\forall x)(\exists y)(p(x, y) \wedge \neg q(x, y))$

8. (a) $(\exists y \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R})(x + y \neq y)$ (b) $(\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})(x + y \neq 0)$
 (c) $(\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})(xy \neq 1)$ (d) $(\exists y \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R})(y \geq x)$

Bibliografia

1. BOSCH, J. – Simbolismo Lógico; Eudeba; 1965
2. BURGOS, A. – Iniciación a la Lógica Matemática; S.C.; 1973
3. CHEIFETZ y AVENOSO – Lógica y Teoria de Conjuntos; Alhambra; 1974
4. CHAUVINEAU, J. – La Logique Moderne; P.U.F.; 1966
5. COPI, IRVING M. – Introduction to Logic; MacMillan; 1963
6. DEANO, A. – Introducción a La Lógica Formal; Alianza; 1973
7. GARRIDO, M. – Logica Simbólica; TECNOS; 1968
8. HILBERT y ACKERMANN – Lógica Teórica; TECNOS; 1968
9. KEMENY, SNELL y THOMPSON – Matemáticas Finitas; Eudeba; 1967
10. LIPSCHUTZ, S. – Finite Mathematics; Schaum; 1966
11. LIGHTSTONE, A. H. – Symbolic Logic; Harper; 1966
12. MORA y LEBLANC – Lógica Matemática; F.C.E.; 1965
13. MORENO, A. – Ejercicios de Logica; Eudeba; 1973
14. MURO, HERMOSA y JACHIMOVICZ – Ejercicios de Lógica; Paidós; 1974
15. MENDELSON, E. – Boolean Algebra; Schaum; 1970
16. NOVIKOV, P. S. – Mathematical Logic; Oliver & Boyd; 1964
17. NUNO, J. – Elementos de Lógica Formal; EBVC; 1973
18. SUPPES y HILL – Lógica Matemática; Reverté; 1973