INSTITUTO TECNOLÓGICO AUTÓNOMO DE MÉXICO

Tarea 4.20

Erick Alejandro Santillán de Mauleon.

20) Elige una foto de tu matemático favorito. Realiza el análisis por componentes principales de ella (terminología que usan en estadśtica para la svd). Incluye: gr'afica de los valores singulares, rangos de la matriz original y de tres componentes principales (tú elige cuáles), errores relativos, foto original máas tres fotos de componentes principales distintas, análisis comparativo y observaciones pertinentes. Sugerencia: no le preguntes al instructor y consulta *C.Moler, Numerical Computing with Matlab, SIAM, 2004, Sección 10.11.*

Empezaremos por leer la foto en Matlab:

```
imagen1=double(rgb2gray (imread('imagen1.jpg')));
```

Figura 0.1: Figura original de rango 300

Usamos la foto de Marcela González de 300x400 pixeles. Lo que hace Matlab es leer la imagen como una matriz $M \in \mathbb{R}_{300x400}$, cada (M_{ij}) corresponde al pixel (i, j) en la imagen original al cual se le asigna su valor en la escala de grises, la matriz sólo toma valores naturales entre el 1 y el 256. Esto hace que sea una matriz muy pesada computacionalmente, por tanto vamos a calcular la descompsición SVD y disminuirle el rango:

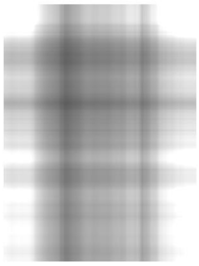
```
function [ E ] = reduceRNG( U, S, V , k )
sigma=diag(S);
[n m]=size(U);
[p q]=size(V);
E=zeros(n,p);
for i=1:k
    E=E+sigma(i)*U(:,i)*V(:,i)';
end %for
end %function

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

[U1, S1, V1]=svd(imagen1);
E1=reduceRNG(U1,S1,V1,150); E2=reduceRNG(U1,S1,V1,75); E3=reduceRNG(U1,S1,V1,37);
E4=reduceRNG(U1,S1,V1,15); E5=reduceRNG(U1,S1,V1,1);
```

(a) rng=150

(b) rng=75

(c) rng=37

(d) rng=15



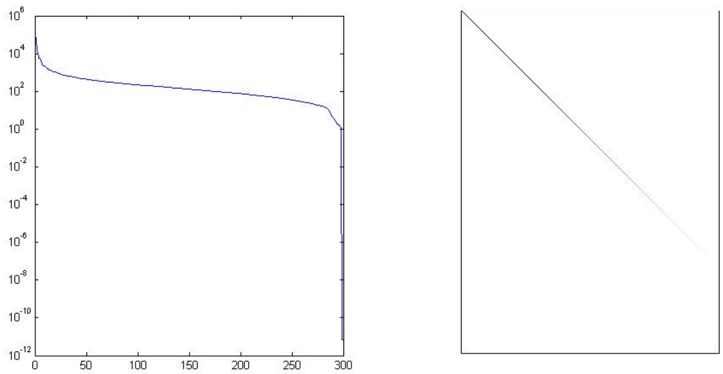
(e) rng=1

Figura 0.2: Aproximaciones de rango 150, 75, 37, 15 y 1

Como podemos ver en los primeros 15 eigenvalores de Marcela podemos encontrar prácticamente toda la información relevante para poder generar su rostro. Ahora calculemos la norma de cada una de estas matrices para ver cuanta información vamos perdiendo (denotaremos por M_k a la aproximación a Marcela de rango k):

$$\begin{aligned}
\|M - M_{150}\|_2 &\approx 57{,}2438 \\
\|M - M_{75}\|_2 &\approx 215{,}3233 \\
\|M - M_{37}\|_2 &\approx 511{,}9019 \\
\|M - M_{15}\|_2 &\approx 1{,}2213e+03 \\
\|M - M_{1}\|_2 &\approx 1{,}0517e+04
\end{aligned}$$

Como podemos ver en las imágenes M_{150}, M_{75} e inclusive M_{37} son muy buenas aproximaciones para la cara de Marcela, no así sus normas pueden parecernos bastante grandes a lo que consideraríamos una tolerancia "pequeña" como usualmente la tomamos.
Observemos la gráfica de eigenvalores y la "foto" de eigenvalores:



(a) Gráfica de eigenvalores

(b) Foto de eigenvalores

Figura 0.3: Gráfica logarítmica de eigenvalores

Podemos observar que el espectro de Marcela tiene muy pocos eigenvalores "pequeños", en general esto no sucede, y podemos también observar que para los últimos eigenvalores, estos decrecen exponencialmente. En la foto de eigenvalores podemos observar como la línea negra cubre gran parte del rango de la matriz y empieza a tener tonos más grises, i.e. los eignvalores decrecen, de forma muy lenta.