2.5. Funções Exponenciais

Definição:

> Dada um número real **a** (**a > 0** e **a ≠ 1**), denomina-se *função exponencial de base* ***a*** função f: IR → IR_+^* definida por **f(x) = a^x**.

Exemplos:

a) $f(x) = 4^x$ b) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ c) $f(x) = 10^x$ d) $f(x) = \left(\sqrt{2}\right)^x$

As restrições a > 0 e a ≠ 1 dadas na definição são necessárias, pois:

★ Para a = 0 e x negativo, não existiria a^x (Não teríamos uma função definida em IR);
Observe:
a) $0^2 = 0$
b) $0^{-2} = \frac{1}{0^2} = \frac{1}{0}$ (Não existe divisão por zero)

★ Para a < 0 e x = $\frac{1}{2}$, por exemplo, não haveria a^x (Não teríamos uma função em IR);
Observe:
a) $(-9)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-9} \notin$ IR

★ Para a = 1 e x qualquer número real, $a^x = 1$ (Função constante);
Observe:
a) $1^5 = 1$

Exemplos:

1) Dada a função exponencial $f(x) = 4^x$, determine:

a) f(3) =

b) f(-1) =

c) $f\left(\frac{1}{2}\right) =$

d) $f\left(-\frac{1}{2}\right) =$

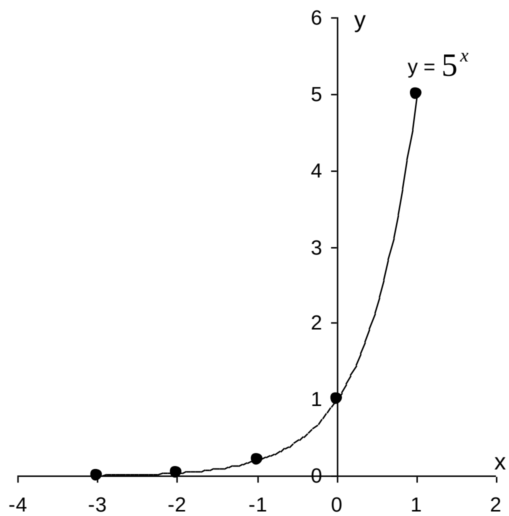
e) f(0,5) =

f) f(-0,5) =

✍ Gráfico da função exponencial

Função exponencial: f(x) = a^x

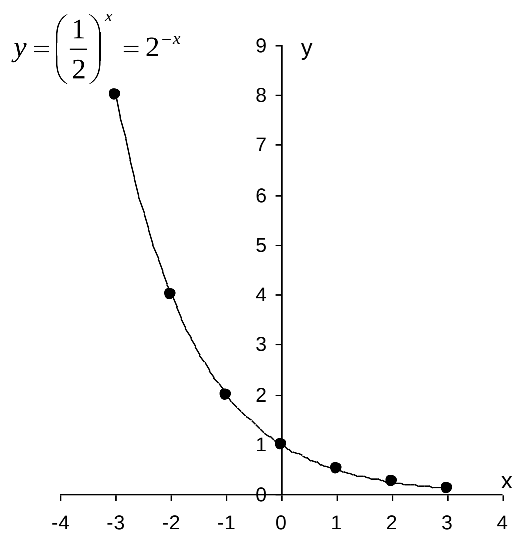
a > 1 (função crescente)



- f(x) é *crescente*, pois **a > 1**;

- O gráfico não toca o eixo x e não tem pontos nos quadrantes III e IV;

0 < a < 1 (função decrescente)



- f(x) é de*crescente*, pois **0 < a < 1**;

- O gráfico não toca o eixo x e não tem pontos nos quadrantes III e IV;

Equações Exponenciais:

Equações exponenciais são aquelas em que as variáveis aparecem nos expoentes. Veja alguns exemplos:

a) $2^x = 16$

b) $2^{2x} = 64^{x - 2}$

c) $3 \cdot 5^x = 75$

d) $\left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{8}{27}$

e) $2^{x^2 - 3x - 4} = 1$

f) $3^{2x} - 6 \cdot 3^x - 27 = 0$ **(Equações exponenciais que exigem transformações e artifícios)**

O número irracional e e a função exponencial e^x.

Atribui-se a John Napier a descoberta do número de Neper. É um importante número irracional, que é estudado em Cálculo Diferencial e Integral, e surge como limite, para valores muito grandes de n, da sucessão $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

Vamos considerar a expressão $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ com **n** $\in$ {1, 2, 3, 4, 5, 6, ...}:

$$\left(1+\frac{1}{1}\right)^1, \left(1+\frac{1}{2}\right)^2, \left(1+\frac{1}{3}\right)^3, \left(1+\frac{1}{4}\right)^4, \cdots, \left(1+\frac{1}{10}\right)^{10}, \cdots, \left(1+\frac{1}{100}\right)^{100}, \cdots, \left(1+\frac{1}{1000}\right)^{1000}, \cdots$$

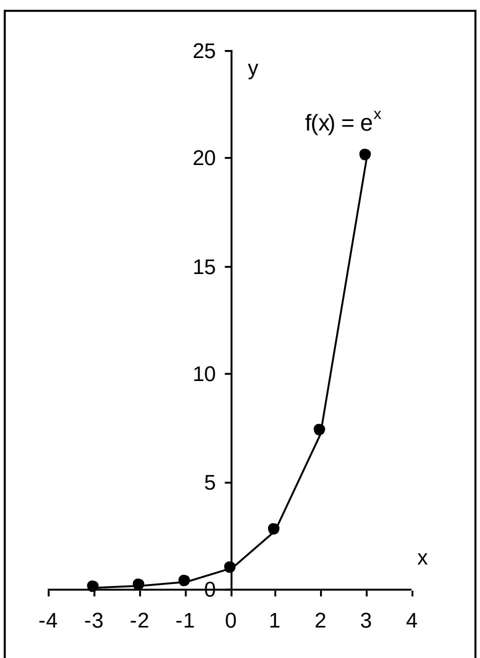
2,000 ; 2,250 ; 2,370 ; 2,441 ; ... ; 2,594 ; ... ; 2,705 ; ... ; 2,715 ; ...

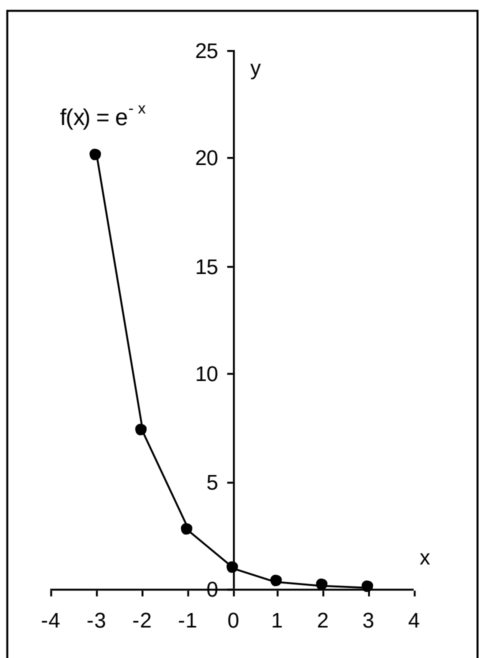
Quando **n** aumenta indefinidamente, a expressão $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ tende ao número irracional $e = 2{,}7182818284...$

Uma função exponencial muito importante em matemática é aquela cuja base é e**:**

$$\boxed{\mathbf{f(x) =} \; e^x} \quad \begin{cases} f(2) = e^2 = 7{,}39 \\ f(5) = e^5 = 148{,}41 \\ f(-1) = e^{-1} = 0{,}37 \end{cases}$$

Gráfico da função exponencial f(x) = e^x





Exercícios – Função exponencial

1) Resolva as equações exponenciais:

a) $2^x = 32$

b) $10^{3x} = 1000$

c) $25^x = 125$

d) $9^x = 243$

e) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x} = \frac{1}{32}$

f) $\left(\frac{3}{5}\right)^{2x} = \frac{125}{27}$

g) $4^x = \frac{1}{64}$

h) $2^{x-3} = \frac{1}{8}$

i) $3^{x^2-5} = 81$

j) $2^{3x+1} = 4^{x-2}$

l) $25^{x-1} = 125^{x+3}$

m) $3^{x-1} = 27$

n) $2^x = \frac{1}{16}$

o) $2^x = \sqrt[3]{4}$

p) $125^{x+2} = 1$

q) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x} = \sqrt[3]{4}$

r) $\left(\sqrt{2}\right)^{x} = 4$

s) $\sqrt[5]{2^x} = \frac{1}{32}$

t) $9^{x-2} = \sqrt{27}$

u) $(0,25)^{2x} = \sqrt{32}$

v) $2^{x-4} + 2^x = 34$

x) $3^x + 3^{x-1} - 3^{x-2} = 11$

2) Qual é o ponto comum aos gráficos de $f(x) = 4^{x-1}$ e $g(x) = 2^x$?

3) Dada a função exponencial $f(x) = 4^x$, determine:

a) f(3)

b) f(-1)

c) f(-1/2)

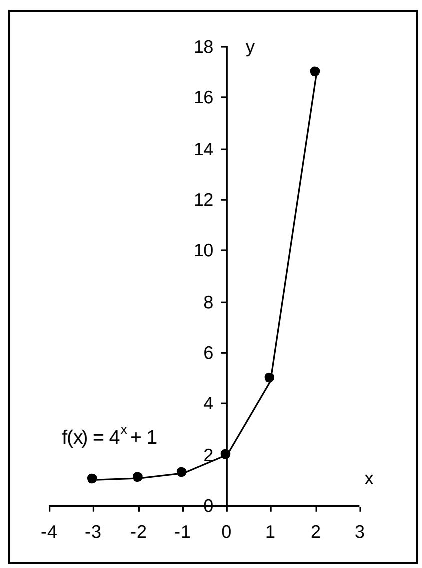
d) f(x) = 1024

e) $f(x) = \sqrt[3]{32}$

4) Resolva a equação $(0,25)^{x-1} = \left(\frac{1}{8}\right)^{1-x}$.

5) Resolva a equação $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-4} = 8^{x+2}$.

6) Observe o gráfico da função definida de IR em IR, que esta ao lado e responda:



a) A função é crescente ou decrescente?

b) Qual é Im(f) e D(f)?

c) Em que ponto a função corta o eixo y?

d) Em que ponto a função corta o eixo x?

e) Determine a imagem para x = -1

f) Determine x de modo que f(x) = 5.

7) Calcule o valor de $y = [3^{-1} - (-3)^{-1}]^{-1}$.

8) Supondo $a \neq 0$ e $b \neq 0$, vamos simplificar a expressão $E = (-a^{-1})^2 + (b^2)^{-1} + 2(ab)^{-1}$.

9) Qual é o valor de $y = \left[\dfrac{4 - \left(-\frac{1}{2}\right)^2}{3 + \left(-\frac{3}{2}\right)^2} \right]^{-1}$?

10) Calcular o valor de cada uma das seguintes expressões:

a) $\left[\dfrac{2^{-1} - (-2)^{-1}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}} \right]^{-2}$

b) $\dfrac{3.2^{-2} - 2.3^{-2}}{(3.2)^{-2}}$

11) Simplifique $\dfrac{3^{x+2} - 3^{x+1}}{3^x}$.

12) Calcule o valor de y = $8^{\frac{2}{3}} + 81^{\frac{1}{4}}$.

13) Efetue:

a) $\dfrac{2^{\frac{3}{2}} . 4^{\frac{1}{2}}}{8^{\frac{5}{6}}}$

b) $\dfrac{\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} . 4^{\frac{3}{2}} . 36^{\frac{-1}{2}}}{10000^{-\frac{1}{4}}}$

14) Resolva, em IR, as seguintes equações exponenciais:

a) $2^{3x+2} = 32$

b) $2^{x^2 - x - 16} = 16$

c) $81^{1-3x} = 27$

d) $5^{2x^2 + 3x - 2} = 1$

e) $\dfrac{1}{e^2} = e^{x-3}$

f) $\left(\sqrt{2}\right)^{3x-1} = \left(\sqrt[3]{16}\right)^{2x-1}$

g) $\dfrac{1}{7} = \sqrt[7]{49^{x-1}}$

h) $4^x - 2^x - 2 = 0$

i) $9^x + 3^{x+1} = 4$

15) Simplifique a expressão $\dfrac{2^{n+4} + 2^{n+2} + 2^{n-1}}{2^{n-2} + 2^{n-1}}$.

16) Resolva as equações: (a) $4^{x^2+1} - 15.2^{x^2+2} = 64$ e (b) $5^{10x} - 10.5^{5x} - 5 = -30$

Respostas:

1) a. S={5} b. S={1} c. S={3/2} d. S={5/2} e. S={5} f. S={-3/2} g. S={-3}
h. S={0} i. S={-3,+3} j. S={-5} l. S={-11} m. S={4} n. S={-4} o. S={2/3}
p. S={-2} q. S={-2/3} r. S={4} s. S={-25} t. S={11/4} u. S={-5/8}
v. S={ 5 } x. S={ 2 }
2) S = (2,4)
3) a. 64 b. ¼ c. ½ d. 5 e. 5/6 4) {1} 5) {-2, -1}

6) a. crescente b. Im =]0, + ∞] c. y = 2 d. Nunca corta e. f(-1) = $\frac{5}{4}$ f. x = 1

7) y = $\frac{3}{2}$ 8) $E = \left(\frac{a+b}{ab}\right)^2$ 9) $y = \frac{7}{5}$ 10) a. 4 b. 19

11) 6 12) 7 13) a. 1 b. $\frac{20}{3}$

14) a. {1} b. {5, -4} c. $\left\{\frac{1}{12}\right\}$ d. $\left\{-2, \frac{1}{2}\right\}$ e. {1} f. $\left\{\frac{5}{7}\right\}$ g. $\left\{-\frac{5}{2}\right\}$ h. {1} i. {0} 15) $\frac{82}{3}$

16) a) (-2,2) b) $\frac{1}{5}$

Aos interessados:
- **Matemática, contexto & aplicações**. Luiz Roberto Dante, Volume 1.
- **Cálculo, Função de uma e várias variáveis**. Pedro A. Morrettin. Editora Saraiva.
- **Pré-Cálculo.** Valéria Zuma Medeiros, et al.
- **Pré-Cálculo.** Franklin D. Demana, et al..