Determinante e Inversa de Matrizes

Tásia do Vale

Matemática Aplicada I
Análise e Desenvolvimento de Sistemas, 2022.1
Escola Agrícola de Jundiaí – Universidade Federal do Rio Grande do Norte

ESCOLA AGRICOLA DE JUNDIAÍ

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE

Revisando – Multiplicacao de matrizes

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 5 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$$

$$A = (a_{ij})_{m \times n} \qquad B = (b_{jk})_{n \times p}$$

É possível multiplicar

$$A.B = C = (c_{ik})_{m \times p}$$

A é a matriz 2 x 3 → iguais $\Rightarrow$ exixte AB

B é a matriz 3 x 2 → AB é do tipo $\Rightarrow$ 2 x 2

O numero de colunas de A tem que ser o numero de linhas de B

$$AB = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix}$$

$$B.A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-1).1+3.3 & (-1).2+3.4 \\ 4.1+2.3 & 4.2+2.4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 10 \\ 10 & 16 \end{bmatrix}$$

Revisando – Multiplicacao de matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overset{C_{11}}{\boxed{1 \,.\, (-1) + 2 \,.\, 4}} & \\ & \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \,.\, (-1) + 2 \,.\, 4 & \overset{C_{12}}{\boxed{1 \,.\, 3 + 2 \,.\, 2}} \\ & \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \,.\, (-1) + 2 \,.\, 4 & 1 \,.\, 3 + 2 \,.\, 2 \\ \underset{C_{21}}{\boxed{3 \,.\, (-1) + 4 \,.\, 4}} & \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \,.\, (-1) + 2 \,.\, 4 & 1 \,.\, 3 + 2 \,.\, 2 \\ 3 \,.\, (-1) + 4 \,.\, 4 & \underset{C_{22}}{\boxed{3 \,.\, 3 + 4 \,.\, 2}} \end{bmatrix}$$

Revisando – Multiplicacao de matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A \times B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 2 \times 1 + 3 \times 2 & 2 \times 3 + 3 \times 1 & 2 \times 0 + 3 \times 1 \\ 4 \times 1 + 6 \times 2 & 4 \times 3 + 6 \times 1 & 4 \times 0 + 6 \times 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 2 + 6 & 6 + 3 & 0 + 3 \\ 4 + 12 & 12 + 6 & 0 + 6 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 8 & 9 & 3 \\ 16 & 18 & 6 \end{bmatrix}$$

DETERMINANTE

Determinante

- Número associado a uma matriz quadrada
- A partir dele, é possível saber:
  - se uma matriz é invertível e se um sistema admite ou não solução

det(A) – o determinante é um número
A é uma matriz!

Determinante

Matriz inversa (2x2): Seja A uma matriz 2x2

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Teorema: A é invertível se, e só se, ad-bc≠0, e a sua inversa é dada por

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

det(A)

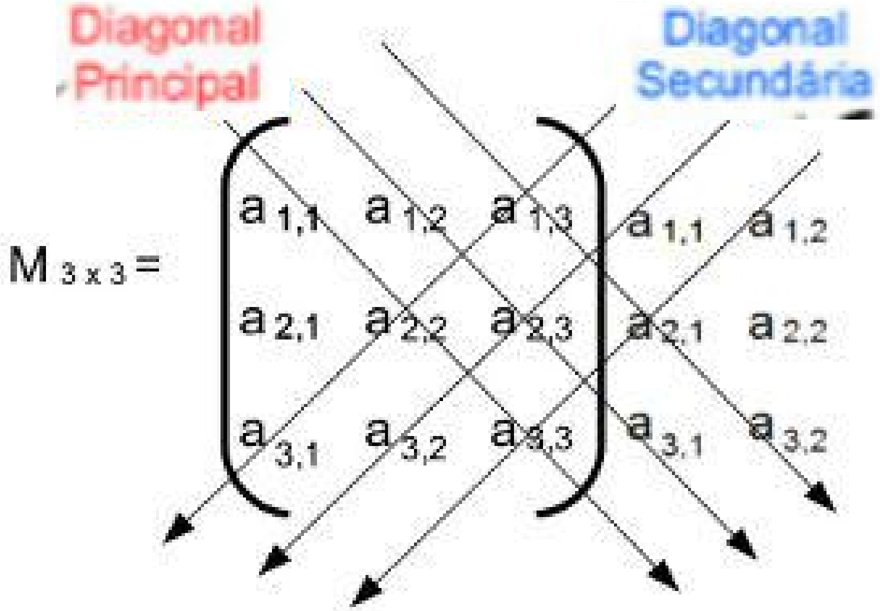
Termos Principal e Secundário

- **Termo principal:** produto dos elementos da diagonal principal, dada uma matriz quadrada A, de ordem n

$$a_{11}, a_{22}, a_{33}, \ldots, a_{nn}$$

- **Termo secundário:** produto dos elementos da diagonal secundária, dada uma matriz A, de ordem n

$$a_{1n}, a_{2n-1}, a_{3n-2}, \ldots, a_{n1}$$



Regra de Sarrus

$$\begin{matrix} + & + & + & & - & - & - \end{matrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$$= -(a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33}) + (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32})$$

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 7 & 8 \\ 3 & 6 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \\ 3 & 6 \end{matrix} \qquad A = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 7 & 8 \\ 3 & 6 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \\ 3 & 6 \end{matrix}$$

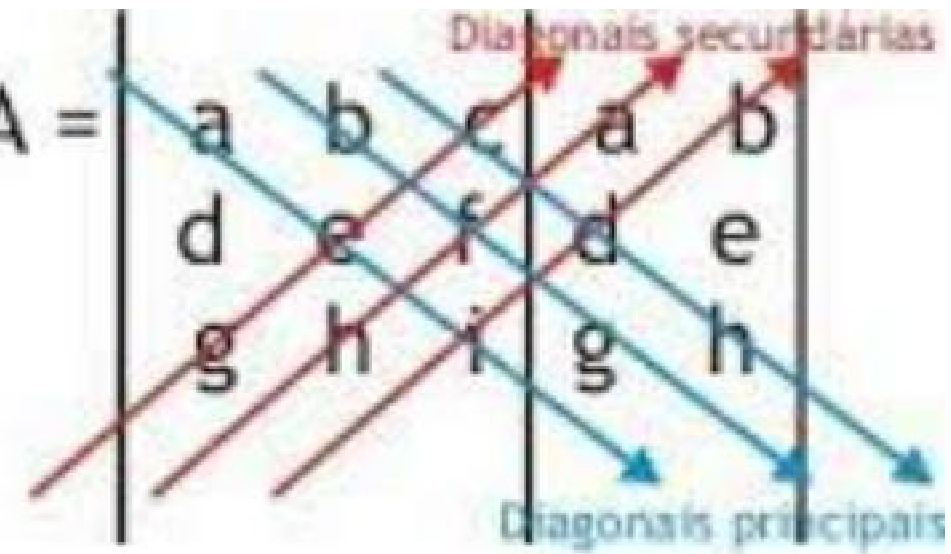
$$-126 \quad -48 \quad -12 \quad 14 \quad 72 \quad 72$$

Det A = -126 -48 -12 +14 +72 +72

Det A = -186 +158

Regra de Sarrus

Seja $A=\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$, então $\text{detA} =$



$$\text{detA} = \underbrace{a.e.i + b.f.g + c.d.h}_{\text{Diagonais principais}} - \underbrace{g.e.c - h.f.a - i.d.b}_{\text{Diagonais secundárias}}$$

Operações Matriciais

Cofator de uma matriz: seja A uma matriz quadrada, o cofator C_{ij} do elemento a posição (i, j) de uma matriz A é dado pelo valor do determinante de A_{ij}, vezes o valor $(-1)^{i+j}$

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} det(A_{ij})$$

onde A_{ij} é a matriz obtida eliminando a i-ésima linha e a j-ésima coluna da matriz A

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

O menor complementar relativo ao elemento a_{23} é

$$AC_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

O cofator ou complemento algébrico relativo ao elemento a_{23} é

$$\Delta_{23} = (-1)^{2+3} AC_{23} \Rightarrow \Delta_{23} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}$$

Expansão em Cofatores do det(A)

$$det(A) = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} =$$
$$= a_{21}C_{21} + a_{22}C_{22} =$$
$$= a_{11}C_{11} + a_{21}C_{21} =$$
$$= a_{12}C_{12} + a_{22}C_{22}$$

- Em cada expressão de cofatores, todas as entradas e os cofatores vêm da mesma linha ou coluna de A

Teorema: Se A for uma matriz nxn, então independentemente de qual linha ou coluna escolhermos, sempre obteremos o mesmo número, multiplicando as entradas daquela linha ou coluna pelos cofatores correspondentes e somando os produtos obtidos

Expansão em Cofatores do det(A)
Teorema de Laplace

Definição: Se A for uma matriz nxn, então o número obtido multiplicando as entradas de uma linha ou coluna qualquer de A, pelos cofatores correspondentes e somando os produtos assim obtidos é denominado determinante de A. As próprias somas são denominadas expansão em cofatores de det(A), ou seja

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in}$$

Desenvolvimento em cofatores ao longo da linha i

O desenvolvimento pode ser feito de forma similar por colunas

$$|A| = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj}$$

Desenvolvimento em cofatores ao longo da coluna j

Exemplo

- Expansão em cofatores ao longo da primeira linha da matriz A

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 3 \\ 5 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

$$det(A) = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 3 \\ 5 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} -2 & -4 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= 3(-4) - (1)(-11) + 0 = -1$$

Exemplo

- Expansão em cofatores ao longo da primeira **coluna** da matriz A

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 3 \\ 5 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

$$det(A) = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 3 \\ 5 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} - (-2)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= 3(-4) - (-2)(-2) + 5(3) =- 1$$

Escolha Inteligente de Linha ou Coluna

Exercício 1

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Dadas as matrizes A e B, calcule:
- det A + det B
- det(A+B)

Exercício 2

- Calcule $\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & -3 & 7 \end{vmatrix}$

Desenvolvimento de Laplace

$$det(A) = a_{11}|A_{11}| - a_{12}|A_{12}| + a_{13}|A_{13}|$$

- Considerando os **cofatores**:

$$C_{ij} = (-1)^{i+j}|A_{ij}|$$

- Obtemos a expressão:

$$det(A) = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13}$$

- Obs 1: Essa propriedade é válida para matrizes de ordem n

Desenvolvimento de Laplace

- Obs 2: Uma forma análoga é válida para as colunas

Exemplo:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

- Trabalhando com base na segunda coluna:

$$det(A) = a_{12}C_{12} + a_{22}C_{22} + a_{32}C_{32}$$

$$C_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = (-1).(2) =- 2$$

$$C_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = (1).(8) = 8$$

$$C_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = (-1).(-7) = 7$$

$$det(A) = (-2)C_{12} + (1)C_{22} + (-1)C_{32}$$

$$det(A) = (-2)(-2) + (1)(8) + (-1)(7) = 4 + 8 - 7 = 5$$

Desenvolvimento de Laplace

- Em algumas situações, o desenvolvimento de Laplace facilita o cálculo do determinante

Exemplo:

$$det(A) = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

- Na terceira linha, existe apenas um elemento não-nulo. Assim:

$$det(A) = a_{33}.C_{33} = 1.C_{33}$$

$$C_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1.5 = 5 = det(A)$$

Exercício

- Calcule o determinante da matriz A

$$|A| = \begin{vmatrix} -5 & 2 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -5 & 2 & -3 & 0 \\ -8 & 5 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$det(A) = a_{22}C_{22} = 2.C_{22}$$

$$C_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} -5 & 3 & -4 \\ -5 & -3 & 0 \\ -8 & 3 & 1 \end{vmatrix} = (1).(186) = 186$$

$$det(A) = a_{22}C_{22} = 2.(186) = 372$$

Calculando Determinantes

- Através das propriedades dos determinantes podemos fazer manipulações na matriz de modo a simplificar o seu cálculo
- Cálculo de determinantes por meio de redução da matriz associada à forma escalonada por linhas

Calculando Determinantes

Teorema: Seja A uma matriz quadrada. Se A tem uma linha ou coluna de zeros então o $\det(A)=0$

Prova: Como o determinante de A pode ser obtido por uma coleção de expansões em cofatores ao longo de qualquer linha ou coluna, podemos usar a linha ou coluna de zeros

Teorema: Seja A uma matriz quadrada. Então o $\det(A)=\det(A^t)$

Prova: como transpor uma matriz troca suas colunas para linhas e suas linhas para colunas, a expansão em cofatores de A ao longo de qualquer linha é igual à expansão em cofatores de A^t ao longo da coluna correspondente

Regra do Triängulo para calculo do Determinantes

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\det A = (a_{11} \,.\, a_{22} \,.\, a_{33}) + (a_{12} \,.\, a_{23} \,.\, a_{31}) + (a_{13} \,.\, a_{21} \,.\, a_{32})$$
$$- (a_{31} \,.\, a_{22} \,.\, a_{13}) - (a_{32} \,.\, a_{23} \,.\, a_{11}) - (a_{33} \,.\, a_{21} \,.\, a_{12})$$

Calculando Determinantes

Teorema: Seja E uma matriz elementar nxn

(a) Se E resulta da multiplicação de uma linha de I_n, por um número não nulo k, então det(E)=k

(b) Se E resulta da permutação de duas linhas de I_n, então det(E)=-1

(c) Se E resulta da soma de um múltiplo de uma linha de I_n com uma outra linha, então det(E)=1

Exemplo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

A segunda linha de I_4 foi multiplicada por 3

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

7 vezes a última linha de I_4 foi somada à primeira linha

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

A primeira e última linhas de I_4 foram permutadas

Calculando Determinantes

Teorema: Se A for uma matriz quadrada com duas linhas proporcionais ou duas colunas proporcionais, então det(A)=0

Exemplo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 2 & 6 & -4 & 8 \\ 3 & 9 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 4 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 9 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 4 & 8 \end{vmatrix} = 0$$

A segunda linha é 2 vezes a primeira, portanto somamos -2 vezes a primeira linha à segunda para introduzir uma linha de zeros

Calculando Determinantes

Usar redução de linhas para calcular um determinante

Exemplo: Vamos reduzir A a uma forma escalonada (triangular superior), e então aplicar o teorema que diz que nestes casos, det(A) é o produto das entradas na diagonal principal

$$det(A) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 3 & -6 & 9 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} =$$

A primeira e a segunda linhas de A foram permutadas

Um fator comum de 3 da primeira linha foi trazido para fora do determinante

$$= -3 \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} =$$

-2 vezes a primeira linha foi somado à terceira linha

$$= -3 \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 10 & -5 \end{vmatrix} =$$

-10 vezes a segunda linha foi somado à terceira linha

$$= -3 \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -55 \end{vmatrix} =$$

Um fator comum de -55 da última linha foi trazido para fora do determinante

$$= (-3)(-55) \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-3)(-55)(1) = 165$$

Calculando Determinantes

- Em geral,

$$det(A+B) \neq det(A) + det(B)$$

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad A+B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$$

$$det(A) = 1, det(B) = 8 e det(A+B) = 23$$

Calculando Determinantes

Teorema: Sejam A, B e C matrizes nxn que diferem somente em uma única linha, digamos, a r-ésima, e suponha que a r-ésima linha de C possa ser obtida somando as entradas correspondentes nas r-ésimas linhas de A e B, então det(C)=det(A)+det(B)

Exemplo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1+0 & 4+1 & 7+(-1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 7 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

Calculando Determinantes

Teorema: Sejam A e B matrizes nxn, então

$$det(AB) = det(A)det(B)$$

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 8 \end{bmatrix} \qquad AB = \begin{bmatrix} 2 & 17 \\ 3 & 14 \end{bmatrix}$$

$$det(A) = 1, det(B) =- 23 e det(AB) =- 23$$

$$det(AB) = det(A).det(B)$$

Calculando Determinantes

Teorema: Uma matriz quadrada A é invertível se, e só se, det(A)$\neq$0

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

Como a primeira e terceira linhas de A são proporcionais, det(A)=0. Assim A não é invertível

Matriz singular: matriz cujo determinante é nulo. Caso contrário, diz-se que a matriz é não singular.

Calculando Determinantes

Teorema: Se A for invertível, então

$$det(A^{-1}) = \frac{1}{det(A)}$$

Prova:

Como $AA^{-1}=I$, segue que $det(A^{-1}A)=det(I)$. Logo devemos ter $det(A^{-1})det(A)=1$.

Como $det(A)\neq 0$, a prova pode ser completada dividindo ambos os lados dessa equação por det(A)

Resumo Propriedades do Determinante de uma Matriz

Considere A e B matrizes quadradas. Então valem as propriedades dos determinantes

Propriedades:

I) Se A possui uma linha (ou coluna) de zeros, então det(A) = 0

II) Se A possui duas linhas (ou colunas) iguais, então det(A) = 0

III) Se B é obtida de A multiplicando-se uma linha (ou coluna) por um escalar k, então det(B) = kdet(A)

IV) Se B é obtida por troca das posições relativas de duas linhas (ou colunas) da matriz A, então det(B) = -det(A)

V) Se B é obtida de A, substituindo-se a linha i (ou coluna) por ela somada a um múltiplo escalar de outra linha j (ou coluna) ($j \neq i$), então det(B) = det(A)

VI) det(A) = det(A')

VII) det(AB) = det(A) det(B)

Resumo Propriedades do Determinante de uma Matriz

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{i1}+c_{i1} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{i1} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{i1} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

- Detalhe: soma **em uma linha** (não soma de matrizes)
- De um modo geral, $\det(A+B) \neq \det(A) + \det(B)$

Resumo Propriedades do Determinante de uma Matriz

- O determinante não se altera se somarmos a uma linha outra linha multiplicada por uma constante

Exemplo: multiplicando-se a primeira linha por 2 e somando com a terceira

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 8 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

MATRIZ ADJUNTA

Exemplo

- Matriz dos cofatores é a matriz formada por todos os cofatores:

$$C = [C_{ij}]$$

Exemplo: encontre a matriz dos cofatores da matriz A

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 4 \\ 1 & 6 & 5 \end{bmatrix}$$

$$C_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} = (1).(-19) =- 19$$

- ...

- Resposta:

$$C = \begin{bmatrix} -19 & 19 & -19 \\ -5 & 10 & -11 \\ 4 & -8 & 5 \end{bmatrix}$$

Exemplo

- Matriz adjunta, é a matriz **transposta** da matriz dos cofatores

Exemplo:

$$C = \begin{bmatrix} -19 & 19 & -19 \\ -5 & 10 & -11 \\ 4 & -8 & 5 \end{bmatrix}$$

$$adj(A) = C^T = \begin{bmatrix} -19 & -5 & 4 \\ 19 & 10 & -8 \\ -19 & -11 & 5 \end{bmatrix}$$

Matriz Adjunta

Teorema: se A é uma matriz de ordem n
Adj(A).A = A.Adj(A) = det(A).I_n

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 4 \\ 1 & 6 & 5 \end{bmatrix}$$

- det(A)= 10+4 – (48–15)=15–33=–19

$$adj(A) = \begin{bmatrix} -19 & -5 & 4 \\ 19 & 10 & -8 \\ -19 & -11 & 5 \end{bmatrix}$$

$$A.adj(A) = \begin{bmatrix} -19 & 0 & 0 \\ 0 & -19 & 0 \\ 0 & 0 & -19 \end{bmatrix} = -19 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Obs: det(A)=–19

$$A.(adj(A)) = (det(A)).I_n$$

$$\operatorname{adj}(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} A_{22} & A_{23} \\ A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} A_{21} & A_{23} \\ A_{31} & A_{33} \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} A_{21} & A_{22} \\ A_{31} & A_{32} \end{vmatrix} \\ \\ -\begin{vmatrix} A_{12} & A_{13} \\ A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} A_{11} & A_{13} \\ A_{31} & A_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{31} & A_{32} \end{vmatrix} \\ \\ +\begin{vmatrix} A_{12} & A_{13} \\ A_{22} & A_{23} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} A_{11} & A_{13} \\ A_{21} & A_{23} \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} \end{pmatrix}^T$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^* = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 3 \\ 1 & -3 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{Adj(A)} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{-3} & \mathbf{-3} & \mathbf{3} \\ \mathbf{3} & \mathbf{-2} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

Matriz Inversa

- Se A e B são matrizes quadradas de mesma ordem, ambas invertíveis (isto é, existem A^{-1} e B^{-1} então **A.B é invertível** e $(A.B)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}$
- Nem toda matriz tem inversa. Exemplo:
- $\det(A.A^{-1}) = \det(A).\det(A^{-1})$ e $\det(I_n) = 1$ $\Rightarrow$ $\det(A.A^{-1}) = \det(A).\det(A^{-1}) = 1$
- Daí, podemos concluir que se A tem inversa:
- $\det(A) \neq 0$ (**condição necessária para a matriz A ser invertível**)
- $\det(A^{-1}) = 1/\det(A)$
- Foi visto que $A.adj(A) = (\det(A)).I$. Se $\det(A) \neq 0$, e dividindo os dois lados por $\det(A)$:

$$A\frac{1}{det(A)}.adj(A) = I$$

$$\boldsymbol{A^{-1} = 1/det(A)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -3 & -3 & 3 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}}$$

- e a inversa pode ser calculada como:

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)}.adj(A)$$

$$\boldsymbol{1/3\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -3 & -3 & 3 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & -2/3 & 0 \end{pmatrix}}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 3 & 1\\ 1 & 2 & 0\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}a & b & c\\ a+3d+g & b+3e+h & c+3f+i\\ a+2d & b+2e & c+2f\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ -1/2 & 0 & 1/2\\ 1/2 & 1 & -3/2\end{bmatrix}$$

$$A \cdot A^{-1} = I_n$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a+2c & b+2d \\ 3a+4c & 3b+4d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} a+2c & b+2d \\ a+0c & b+0d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} a+2c=1 \\ a=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} b+2d=0 \\ b=1 \end{cases}$$

$$a=0 \qquad b=1$$

$$c=\frac{1}{2} \qquad d=-\frac{1}{2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a+2d+3g & b+2e+3h & c+2f+3i \\ d+g & e+h & f+i \\ 5a+6d & 5b+6e & 5c+6f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz inversa 2x2

Matriz	Matriz inversa	Matriz identidade
$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$	$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -7 & 2 \end{bmatrix}$	$\mathbf{I}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -7 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -7 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Exercício 2

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

- Dada a matriz A, calcule:
- a) det A
- b) A^{-1}

Linguagem R

- Defina a matriz A = [2 1 -3; 0 2 1; 5 1 3]
  - det(A): calcula o determinante
  - inv(A): calcula a inversa de A

Bibliografia Recomendada

- Anton, H., & Rorres, C. (2001). Álgebra linear com aplicações (Vol. 8, p. 16). Porto Alegre: Bookman.

- Lay, D. C. (2011). Álgebra linear e suas aplicações. Editora LTC, São Paulo.

- Material Didático Matemática Aplicada I, Prof. Leonardo Teixeira, EAJ-UFRN

- Gersting, J. L. (2004). Fundamentos matemáticos para a ciência da computação: um tratamento moderno de matemática discreta. Livros Técnicos e Científicos.

- Chapra, S. C., & Canale, R. P. (2010). Numerical methods for engineers. Boston: McGraw-Hill Higher Education.

Outras Referências:
Santos, R. J. (2012). Matrizes, vetores e geometria analítica, Belo Horizonte: Imprensa Universitária da UFMG, 2012

https://www.alfaconnection.pro.br/matematica/matrizes-e-determinantes/matrizes/conceitos-basicos/

https://www.ufrgs.br/reamat/CalculoNumerico/livro-py/sdsl.html

Determinante e Inversa de Matrizes

Questões?

Matemática Aplicada I
Análise e Desenvolvimento de Sistemas, 2022.1

ESCOLA AGRICOLA DE JUNDIAÍ

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE