Übung Messen Sie $|\psi\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2}|0\rangle + \frac{1}{2}|1\rangle$ bzgl. der X-Basis $\{|+\rangle, |-\rangle\}$.

Dafür muss $|\psi\rangle$ bzgl. der X-Basis dargestellt werden, d.h. $|\psi\rangle = \underbrace{\langle +|\psi\rangle}_{\text{Amplitude}}|+\rangle + \underbrace{\langle -|\psi\rangle}_{\text{Amplitude}}|-\rangle$

Wir berechnen

$$\begin{aligned}
\langle +|\psi\rangle &= \langle +|\left(\frac{\sqrt{3}}{2}|0\rangle + \frac{1}{2}|1\rangle\right) \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2}\langle +|0\rangle + \frac{1}{2}\langle +|1\rangle \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(\langle 0| + \langle 1|)|0\rangle\right) + \\
&\quad + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(\langle 0| + \langle 1|)|1\rangle\right) \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\underbrace{\langle 0|0\rangle}_{=1} + \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\underbrace{\langle 1|0\rangle}_{=0} + \\
&\quad + \frac{1}{2\sqrt{2}}\underbrace{\langle 0|1\rangle}_{=0} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\underbrace{\langle 1|1\rangle}_{=1} \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\langle -|\psi\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\langle 0| - \langle 1|)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}|0\rangle + \frac{1}{2}|1\rangle\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\langle 0|0\rangle + \frac{1}{2}\langle 0|1\rangle - \frac{\sqrt{3}}{2}\langle 1|0\rangle\right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2}\langle 1|1\rangle\right) \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

Wegen $\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{3+2\sqrt{3}+1}{4\cdot 2} = \frac{4+2\sqrt{3}}{8} = \frac{2+\sqrt{3}}{4}$

wird $|+\rangle$ mit Wahrscheinlichkeit $\frac{2+\sqrt{3}}{4} \approx 0{,}93$ gemessen.

Analog: Wegen

$$\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{3-2\sqrt{3}+1}{8} = \frac{2-\sqrt{3}}{4}$$

wird $|-\rangle$ mit Wahrscheinlichkeit $\frac{2-\sqrt{3}}{4} \approx 0{,}07$ gemessen.

Übung Beweise: Die Hadamard-Matrix ist unitär

Wegen $H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$,

d.h. die Matrix ist symmetrisch und hat nur reelle Einträge, gilt $\overline{H} = H$ und $H^T = H$.

Also $H^+ = H$. Es genügt demnach zu zeigen, dass H selbstinvers ist, d.h. $H^2 = I_2$ gilt.

$$H^2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

Damit ist H unitär

Übung Varianten einfacher Zufallszahlengeneratoren

Variante 1
1. $|x\rangle \leftarrow |1\rangle$
2. $|x\rangle \leftarrow H|x\rangle$
3. Messung von $|x\rangle$

Wir beobachten

1. Schritt Qubit wird in den Anfangszustand $|1\rangle$ versetzt

2. Schritt Anwendung der Hadamard-Transformation liefert $H|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$

3. Schritt Messung des Qubits liefert

- mit Wahrscheinlichkeit $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}$ den Zustand $|0\rangle$
- mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ den Zustand $|1\rangle$

Im Ergebnis ist kein Unterschied zum ursprünglichen Verfahren festzustellen

Variante 2 Für $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ mit $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$
1. $|x\rangle \leftarrow \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$
2. $|x\rangle \leftarrow H|x\rangle$
3. Messung von $|x\rangle$

Wir beobachten

1. Schritt Qubit wird in einen zulässigen Zustand versetzt

2. Schritt Anwendung der Hadamard-Transformation ergibt

$$\begin{aligned} H|x\rangle &= \alpha H|0\rangle + \beta H|1\rangle \\ &= \alpha \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) + \beta \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) \\ &= \frac{\alpha+\beta}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{\alpha-\beta}{\sqrt{2}}|1\rangle \end{aligned}$$

3. Schritt Messung liefert

- mit Wahrscheinlichkeit $\frac{|\alpha+\beta|^2}{2}$ den Zustand $|0\rangle$
- —"— $\frac{|\alpha-\beta|^2}{2}$ den Zustand $|1\rangle$

Die Ergebnisse $|0\rangle$ und $|1\rangle$ in Schritt 3 sind i.A. <u>nicht</u> mehr gleichwahrscheinlich.

Wähle etwa $\alpha = \beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Dann gilt $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$

aber

$$\frac{|\alpha+\beta|^2}{2} = \frac{\left|\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right|^2}{2} = 1$$

$$\frac{|\alpha-\beta|^2}{2} = \frac{\left|\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right|^2}{2} = 0$$