Aufgabe SWAP-Gatter

zu (i) Es gilt

$$\mathrm{SWAP}: \begin{cases} |0\rangle|0\rangle \longmapsto |0\rangle|0\rangle \\ |0\rangle|1\rangle \longmapsto |1\rangle|0\rangle \\ |1\rangle|0\rangle \longmapsto |0\rangle|1\rangle \\ |1\rangle|1\rangle \longmapsto |1\rangle|1\rangle \end{cases}$$

Die entsprechende Matrix

$$A_{SWAP} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ist eine Permutationsmatrix und als solche unitär

zu (ii) Wir rechnen

$$(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle)(\gamma|0\rangle + \delta|1\rangle) =$$

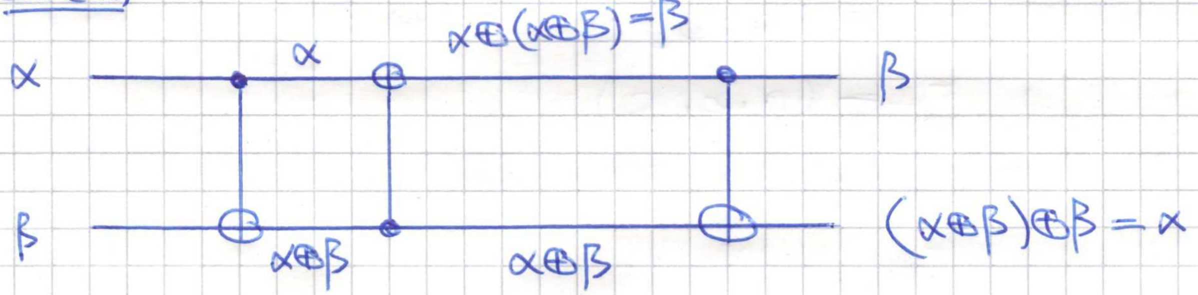
$$= \alpha\gamma|00\rangle + \alpha\delta|01\rangle + \beta\gamma|10\rangle + \beta\delta|11\rangle$$

$$\xmapsto{SWAP} \alpha\gamma|00\rangle + \alpha\delta|10\rangle + \beta\gamma|01\rangle + \beta\delta|11\rangle$$

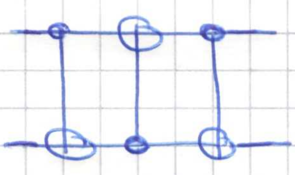
$$= \gamma\alpha|00\rangle + \gamma\beta|01\rangle + \delta\alpha|10\rangle + \delta\beta|11\rangle$$

$$= (\gamma|0\rangle + \delta|1\rangle)(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle)$$

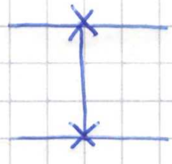
zu (iii)



Statt



schreibt man



Aufgabe 2

zu (i) Hier gilt $f(0) = 1$ und $f(1) = 0$ (Negation)
Wir beginnen in Schritt 3, da f vorher nicht auftritt:

$$|\phi_3\rangle = \frac{1}{2}\left((-1)^{f(0)}|0\rangle + (-1)^{f(1)}|1\rangle\right)(|0\rangle - |1\rangle)$$

$$= \frac{1}{2}(-|0\rangle + |1\rangle)(|0\rangle - |1\rangle)$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) = -|-\rangle|-\rangle$$

Hadamard-Transformation in Schritt 4 liefert

$$|\phi_4\rangle = -H|-\rangle H|-\rangle = -|1\rangle|1\rangle$$

Eine Messung liefert $|1\rangle|1\rangle = |11\rangle$ mit Wahrscheinlichkeit $(-1)^2 = 1$ und der Algorithmus gibt "balanciert" aus

zu (ii) Nun gilt $f(0) = f(1) = 1$ (Einsfunktion)
und in Schritt 3 ist

$$|\phi_3\rangle = \frac{1}{2}\left((-1)^{f(0)}|0\rangle + (-1)^{f(1)}|1\rangle\right)(|0\rangle - |1\rangle)$$

$$= \frac{1}{2}(-|0\rangle - |1\rangle)(|0\rangle - |1\rangle)$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) = -|+\rangle|-\rangle$$

Anwendung der Hadamard-Transformation führt auf

$$|\phi_4\rangle = -H|+\rangle H|-\rangle = -|0\rangle|1\rangle$$

und eine Messung ergibt $|0\rangle|1\rangle = |01\rangle$ mit Wahrscheinlichkeit $(-1)^2 = 1$. Der Algorithmus gibt "konstant" aus