

Aufgabe Quantenteleportation

Wir betrachten das Register $|x\rangle|a\rangle|b\rangle$ mit $|x\rangle$ im Zustand $|z\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ und $|ab\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$.

Dieses befindet sich zu Beginn im Zustand

$$\begin{aligned} |\phi_0\rangle &= (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle) \\ &= \frac{\alpha}{\sqrt{2}}(|000\rangle + |011\rangle) + \frac{\beta}{\sqrt{2}}(|100\rangle + |111\rangle) \end{aligned}$$

Alice wendet im **ersten Schritt** CNOT: $|x\rangle|a\rangle \mapsto |x\rangle|a \oplus x\rangle$ an und es ergibt sich

$$\begin{aligned} |\phi_1\rangle &= \frac{\alpha}{\sqrt{2}}(|0\rangle|0 \oplus 0\rangle|0\rangle + |0\rangle|1 \oplus 0\rangle|1\rangle) + \\ &\quad + \frac{\beta}{\sqrt{2}}(|1\rangle|0 \oplus 1\rangle|0\rangle + |1\rangle|1 \oplus 1\rangle|1\rangle) \\ &= \frac{\alpha}{\sqrt{2}}(|000\rangle + |011\rangle) + \frac{\beta}{\sqrt{2}}(|110\rangle + |101\rangle) \end{aligned}$$

Im **zweiten Schritt** wird die Hadamard-Transformation auf $|x\rangle$ angewendet:

$$\begin{aligned} |\phi_2\rangle &= \frac{\alpha}{\sqrt{2}}(H|0\rangle|00\rangle + H|0\rangle|11\rangle) + \\ &\quad + \frac{\beta}{\sqrt{2}}(H|1\rangle|10\rangle + H|1\rangle|01\rangle) \\ &= \frac{\alpha}{\sqrt{2}} H|0\rangle(|00\rangle + |11\rangle) + \frac{\beta}{\sqrt{2}} H|1\rangle(|10\rangle + |01\rangle) \\ &= \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)(|00\rangle + |11\rangle) + \\ &\quad + \frac{\beta}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)(|10\rangle + |01\rangle) \\ &= \frac{\alpha}{2}(|000\rangle + |011\rangle + |100\rangle + |111\rangle) + \\ &\quad + \frac{\beta}{2}(|010\rangle + |001\rangle - |110\rangle - |101\rangle) \end{aligned}$$

Da im nächsten Schritt gemessen werden soll, stellen wir noch bzgl. der ersten beiden Qubits $|x\rangle|a\rangle$ (Alice' Qubits) um:

$$|\Phi_2\rangle = \frac{1}{2} \left(|00\rangle(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) + |01\rangle(\beta|0\rangle + \alpha|1\rangle) + |10\rangle(\alpha|0\rangle - \beta|1\rangle) - |11\rangle(\beta|0\rangle - \alpha|1\rangle) \right)$$

Alice misst im **dritten Schritt** und jeweils mit Wahrscheinlichkeit $(\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$ ergibt sich $|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle$ oder $|11\rangle$.

Das dritte Qubit $|b\rangle$ (von Bob) geht dabei in einen an Alice' Ergebnis gekoppelten Zustand über. Wir beobachten

Alice' Ergebnis	Zustand von Bobs Qubit
$ 00\rangle$	$\alpha 0\rangle + \beta 1\rangle$
$ 01\rangle$	$\beta 0\rangle + \alpha 1\rangle$
$ 10\rangle$	$\alpha 0\rangle - \beta 1\rangle$
$ 11\rangle$	$-\beta 0\rangle + \alpha 1\rangle$

Ziel des Verfahrens ist es, $|a\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ von Alice an Bob zu übertragen. Im **vierten Schritt** werden vier Fälle unterschieden:

1. Fall: Alice übermittelt $|00\rangle$. Dann ist Bobs Qubit bereits im Zustand $\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ und er muss nichts mehr machen

2. Fall: Alice übermittelt $|01\rangle = |x\rangle|a\rangle$, d.h. $a=1$.

Dann wendet Bob X an und erhält

$$X(\alpha|1\rangle + \beta|0\rangle) = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$$

3. Fall Alice übermittelt $|10\rangle = |x\rangle|a\rangle$, d.h. $x=1$.

Bob wendet nun Z an:

$$Z(\alpha|0\rangle - \beta|1\rangle) = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$$

4. Fall Alice übermittelt $|11\rangle$, d.h. $x=a=1$.

Bob wendet zuerst X an:

$$X(\alpha|1\rangle - \beta|0\rangle) = \alpha|0\rangle - \beta|1\rangle$$

Anschließend wendet Bob Z an:

$$Z(\alpha|0\rangle - \beta|1\rangle) = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$$