Hochschule RheinMain

ÜBUNGEN

zur Veranstaltung ***Quantencomputing*** im Studiengang Angewandte Informatik

No. 4 Martin Rehberg

Präsenzaufgabe: Quantenteleportation

Alice ist im Besitz eines Qubits $|x\rangle$ im Zustand $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ und will dieses Bob mitteilen. Es soll also ein Informationsaustausch stattfinden. Zum Zeitpunkt des Informationsaustausches gibt es aber keinen Quantenkanal zwischen Alice und Bob. Beide können nur über einen klassischen Kanal miteinander kommunizieren. Jedoch besitzen Alice und Bob jeweils ein Qubit eines verschränkten Paares von Qubits. Genauer: Alice besitzt ein Qubit $|a\rangle$ und Bob ein Qubit $|b\rangle$, die sich im verschränkten Zustand $|ab\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$ befinden. Alice kann Bob zwei klassische Bits übermitteln.

Aufgabe: Analysieren Sie das folgende Verfahren für das Register $|x\rangle|a\rangle|b\rangle$, wobei X den Bitflip und Z den Phasenflip (vgl. Serie 1, Aufgabe 2) bezeichnet.

1. Alice wendet CNOT an: $|x\rangle|a\rangle \leftarrow |x\rangle|a \oplus x\rangle$.
2. Alice wendet auf das zu übermittelnde Qubit die Hadamard-Transformation an: $|x\rangle \leftarrow H|x\rangle$.
3. Alice misst ihre Qubits und übermittelt die Ergebnisse x und a über den klassischen Kanal an Bob.
4. Bob führt entsprechend den Werten von x und a die folgenden Schritte durch:
   - 4.1 Ist $a = 1$, dann wendet Bob den Bitflip X auf sein Qubit an: $|b\rangle \leftarrow X|b\rangle$.
   - 4.2 Ist $x = 1$, dann wendet Bob den Phasenflip Z auf sein Qubit an: $|b\rangle \leftarrow Z|b\rangle$.

Hinweis: Stellen Sie am Ende des zweiten Schrittes bzgl. der ersten Bits $|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle$ und $|11\rangle$ um, bevor Sie im dritten Schritt die Messung durchführen.

Übungsaufgaben

Aufgabe 1: Implementieren Sie den Algorithmus von Deutsch-Jozsa für $f(x) = x_2 \oplus x_3 \oplus x_4$.

Aufgabe 2: Algorithmus von Bernstein-Vazirani Gegeben sei eine Funktion $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ von der unbekannt ist, um welche der 2^n möglichen Varianten von

$$f(x) = f(x;s) = s \cdot x = s_0x_0 \oplus s_1x_1 \oplus ... \oplus s_{n-1}x_{n-1}$$

für $s \in \{0,1\}^n$ es sich handelt. Die Funktion liegt in Form eines Quantenorakels (Quantensubroutine)

$$U_f : |x_{n-1}, ..., x_0, y\rangle \mapsto |x_{n-1}, ..., x_0, y \oplus f(x)\rangle$$

vor. Analysieren Sie den nachfolgenden Algorithmus von Bernstein-Vazirani zur Bestimmung von a.

1. $|x_{n-1}, ..., x_0\rangle|y\rangle \leftarrow |0...0\rangle|1\rangle$
2. $|x\rangle|y\rangle \leftarrow H_{n+1}|x\rangle|y\rangle$
3. $|x\rangle|y\rangle \leftarrow U_f|x\rangle|y\rangle$
4. $|x\rangle|y\rangle \leftarrow (H_n|x\rangle)|y\rangle$
5. Messe das Register $|x\rangle = |s\rangle$.
   Ausgabe: Die Funktion ist $f(x) = f(x;s) = s \cdot x$.

Hinweis: Sie können sich bei der Analyse des Algorithmus an der Analyse des *Algorithmus von Deutsch-Jozsa* aus der Vorlesung orientieren. Unterscheiden Sie in Ihrer Analyse in Schritt 5 die Möglichkeiten das a als Zustand angenommen wird bzw. nicht als Zustand angenommen wird und untersuche Sie die entsprechenden Auswirkung auf die Amplitude.

Aufgabe 3: Implementieren Sie den Algorithmus von Bernstein-Vazirani für $f(x) = x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus x_4$.

Aufgabe 4: Untersuchen Sie den Algorithmus von Bernstein-Vazirani für den Fall das eine Funktion $f(x) = f(x; s, b) = s \cdot x \oplus b$ für $b \in \{0, 1\}^n$ gegeben ist. Wird in diesem Fall immer noch a ausgegeben?