Die Ergebnisse $|0\rangle$ und $|1\rangle$ in Schritt 3 sind i.A. nicht mehr gleichwahrscheinlich.

Wähle etwa $\alpha = \beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Dann gilt $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$

aber

$$\frac{|\alpha+\beta|^2}{2} = \frac{\left|\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right|^2}{2} = 1$$

$$\frac{|\alpha-\beta|^2}{2} = \frac{\left|\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right|^2}{2} = 0$$

Übung Zeige: Aus $|\gamma_0|^2 + |\gamma_1|^2 = 1$, $|\beta_0|^2 + |\beta_1|^2 = 1$

für $|x_0\rangle = \gamma_0|0\rangle + \gamma_1|1\rangle$, $|x_1\rangle = \beta_0|0\rangle + \beta_1|1\rangle$

folgt $|\alpha_{00}|^2 + |\alpha_{01}|^2 + |\alpha_{10}|^2 + |\alpha_{11}|^2 = 1$

für $R = |x_1\rangle|x_0\rangle$

$$\overset{!}{=} \alpha_{00}|00\rangle + \alpha_{01}|01\rangle + \alpha_{10}|10\rangle + \alpha_{11}|11\rangle$$

Es gilt

$$\begin{aligned}
1 &= (|\beta_0|^2 + |\beta_1|^2)(|\gamma_0|^2 + |\gamma_1|^2) \\
&= |\beta_0|^2|\gamma_0|^2 + |\beta_0|^2|\gamma_1|^2 + |\beta_1|^2|\gamma_0|^2 + |\beta_1|^2|\gamma_1|^2 \\
&= |\beta_0\gamma_0|^2 + |\beta_0\gamma_1|^2 + |\beta_1\gamma_0|^2 + |\beta_1\gamma_1|^2 \\
&= |\alpha_{00}|^2 + |\alpha_{01}|^2 + |\alpha_{10}|^2 + |\alpha_{11}|^2
\end{aligned}$$

$\alpha_{ij} := \beta_i\gamma_j$

Übung Betrachte $R = |x_1\rangle|x_0\rangle$ mit
$|x_1\rangle = \frac{1}{2}|0\rangle + \frac{\sqrt{3}}{2}|1\rangle$, $|x_0\rangle = \frac{1}{2}|0\rangle - \frac{\sqrt{3}}{2}|1\rangle$
Bestimme die Amplituden $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$

Wir berechnen

$$\begin{aligned} R &= \left(\tfrac{1}{2}|0\rangle + \tfrac{\sqrt{3}}{2}|1\rangle\right)\left(\tfrac{1}{2}|0\rangle - \tfrac{\sqrt{3}}{2}|1\rangle\right) \\ &= \tfrac{1}{4}|00\rangle - \tfrac{\sqrt{3}}{4}|01\rangle + \tfrac{\sqrt{3}}{4}|10\rangle - \tfrac{3}{4}|11\rangle \\ &= \tfrac{1}{4}|0\rangle - \tfrac{\sqrt{3}}{4}|1\rangle + \tfrac{\sqrt{3}}{4}|2\rangle - \tfrac{3}{4}|3\rangle \end{aligned}$$

Also
$$\alpha_0 = \frac{1}{4}, \quad \alpha_1 = -\frac{\sqrt{3}}{4}, \quad \alpha_2 = \frac{\sqrt{3}}{4}, \quad \alpha_3 = -\frac{3}{4}$$
und eine Messung führt

- mit Wahrscheinlichkeit $\left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$ auf $|00\rangle$
- mit Wahrscheinlichkeit $\left(-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2 = \frac{3}{16}$ auf $|01\rangle$
- mit Wahrscheinlichkeit $\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2 = \frac{3}{16}$ auf $|10\rangle$
- mit Wahrscheinlichkeit $\left(-\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$ auf $|11\rangle$

Übung Leiten Sie die Matrixdarstellung von CNOT her
Entsprechend dem Hinweis (Folie Vorlesung) stehen in der Abbildungsmatrix A_{CNOT} von CNOT die Bilder der Standard-Basisvektoren. Per Definition gilt

$$\begin{aligned} CNOT|00\rangle &= |00\rangle = (1\ 0\ 0\ 0)^T = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} \\ CNOT|01\rangle &= |01\rangle = (0\ 1\ 0\ 0)^T = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} \\ CNOT|10\rangle &= |11\rangle = (0\ 0\ 0\ 1)^T = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} \\ CNOT|11\rangle &= |10\rangle = (0\ 0\ 1\ 0)^T = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} \end{aligned}$$

Also
$$A_{CNOT} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Übung A_{CNOT} ist unitär

A_{CNOT} ist reell und symmetrisch, also gilt
$\overline{A}_{CNOT} = A_{CNOT}$ und $A^T_{CNOT} = A_{CNOT}$
Es folgt $A^{+}_{CNOT} = A_{CNOT}$ und es bleibt zu zeigen
das A_{CNOT} selbstinvers ist:

$$A^2_{CNOT} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_4$$

Zeige Permutationsmatrizen sind unitär

Erinnerung: Sei $\pi \in S_n$. Die zugehörige $(n\times n)$-Permutationsmatrix $P_\pi = (p_{ij})$ ist definiert durch

$$p_{ij} = \delta_{\pi(i),j} = \begin{cases} 1, \text{ falls } \pi(i) = j, \\ 0, \text{ sonst.} \end{cases}$$

Per Definition sind die Einträge von P_π Elemente aus $\{0,1\} \subset \mathbb{Z}$, also gilt $\overline{P_\pi} = P_\pi$.
Transponieren liefert nun

$$P_\pi^T = (p_{ji}) = (\delta_{\pi(j),i}) \text{ mit } \delta_{\pi(j),i} = \begin{cases} 1, \text{ falls } \pi(j) = i \\ 0, \text{ sonst} \end{cases}$$
$$= P_{\pi^{-1}} = P_\pi^{-1}$$

wobei π^{-1} die zu π inverse Permutation bzgl. Komposition bezeichnet.
Mit $P_\pi^T = P_\pi^{-1}$ folgt $P_\pi^+ = (\overline{P_\pi})^T = P_\pi^T = P_\pi^{-1}$.
Permutationsmatrizen sind also unitär.

Zeige $U_f : |x, y\rangle \mapsto |x, y \oplus f(x)\rangle$ ist unitär

Es gibt mehrere Möglichkeiten

1. Möglichkeit: f ist die Nullfunktion, d.h.
$f: \{0,1\} \to \{0,1\}$ mit $f(0) = 0$, $f(1) = 0$

Dann gilt

$$U_f : \begin{cases} |00\rangle \mapsto |0, 0 \oplus f(0)\rangle = |00\rangle \\ |01\rangle \mapsto |0, 1 \oplus f(0)\rangle = |01\rangle \\ |10\rangle \mapsto |1, 0 \oplus f(1)\rangle = |10\rangle \\ |11\rangle \mapsto |1, 1 \oplus f(1)\rangle = |11\rangle \end{cases}$$

D.h. U_f ist die Identität und wird durch I_4 beschrieben.
$U_f = I_4$ ist unitär.

2. Möglichkeit: f ist die Identität, d.h.
$f: \{0,1\} \to \{0,1\}$ mit $f(0) = 0$, $f(1) = 1$

Dann gilt
$U_f : |x, y\rangle \mapsto |x, y \oplus f(x)\rangle = |x, y \oplus x\rangle = |x, x \oplus y\rangle$

Diese Abbildung kennen wir bereits als CNOT und für die entsprechenden Matrizen gilt $U_f = A_{CNOT}$, d.h. unitär.

3. Möglichkeit f ist die Negation, d.h.
$f: \{0,1\} \to \{0,1\}$, mit $f(0) = 1$, $f(1) = 0$.

Wir betrachten wieder die einzelnen Bilder von f:

$$U_f : \begin{cases} |00\rangle \mapsto |0, 0 \oplus f(0)\rangle = |01\rangle \\ |01\rangle \mapsto |0, 1 \oplus f(0)\rangle = |00\rangle \\ |10\rangle \mapsto |1, 0 \oplus f(1)\rangle = |10\rangle \\ |11\rangle \mapsto |1, 1 \oplus f(1)\rangle = |11\rangle \end{cases}$$

Wir wissen: U_f kann durch eine Matrix beschrieben werden.
Die mit $|i\rangle$ bezeichnete Spalte beschreibt das Bild des Basisvektors $|i\rangle$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = U_f$$

U_f ist eine Permutationsmatrix, also unitär.

<u>4. Möglichkeit</u> f ist die Einsfunktion, also
$f: \{0,1\} \to \{0,1\}$, $f(0) = 1$, $f(1) = 1$.
Dann ist

$$U_f: \begin{cases} |00\rangle \mapsto |0, 0 \oplus f(1)\rangle = |01\rangle \\ |01\rangle \mapsto |0, 1 \oplus f(0)\rangle = |00\rangle \\ |10\rangle \mapsto |1, 0 \oplus f(1)\rangle = |11\rangle \\ |11\rangle \mapsto |1, 1 \oplus f(1)\rangle = |10\rangle \end{cases}$$

und

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = U_f$$

U_f ist eine Permutationsmatrix und als solche unitär.

<u>Übung</u> Für $x \in \{0,1\}$ ist $|f(x)\rangle - |1 \oplus f(x)\rangle = (-1)^{f(x)}(|0\rangle - |1\rangle)$

Mit $f(x) \in \{0,1\}$ gilt

$$|f(x)\rangle - |1 \oplus f(x)\rangle = \begin{cases} |0\rangle - |1 \oplus 0\rangle = |0\rangle - |1\rangle & \text{, für } f(x) = 0, \\ |1\rangle - |1 \oplus 1\rangle = |1\rangle - |0\rangle & \text{, für } f(x) = 1, \end{cases}$$

$$= (-1)^{f(x)}(|0\rangle - |1\rangle)$$