Aufgabe 1

Wir verwenden den euklidischen Algorithmus und berechnen

$$4081 = 1 \cdot 2585 + 1496$$
$$2585 = 1 \cdot 1496 + 1089$$
$$1496 = 1 \cdot 1089 + 407$$
$$1089 = 2 \cdot 407 + 275$$
$$407 = 1 \cdot 275 + 132$$
$$275 = 2 \cdot 132 + 11$$
$$132 = 12 \cdot 11$$

Also $ggT(4081, 2585) = 11$. Mit dem erweiterten euklidischen Algorithmus ist

$$\begin{aligned} 11 &= 275 - 2 \cdot 132 \\ &= 275 - 2(407 - 275) = 3 \cdot 275 - 2 \cdot 407 \\ &= 3(1089 - 2 \cdot 407) - 2 \cdot 407 = 3 \cdot 1089 - 8 \cdot 407 \\ &= 3 \cdot 1089 - 8(1496 - 1089) = 11 \cdot 1089 - 8 \cdot 1496 \\ &= 11(2585 - 1496) - 8 \cdot 1496 = 11 \cdot 2585 - 19 \cdot 1496 \\ &= 11 \cdot 2585 - 19(4081 - 2585) \\ &= (-19)\, 4081 + 30 \cdot 2585 \end{aligned}$$

Also

$$ggT(4081, 2585) = (-19)\, 4081 + 30 \cdot 2585$$

Aufgabe 2

zu (i) Per Definition ist $a|b$ und $a|c$ äquivalent zur Existenz ganzer Zahlen d, e mit $ad = b$ und $ae = c$. Also

$$b + c = ad + ae = a(d+e),$$

per Definition gilt also $a \mid (b+c)$

zu (ii) Per Definition gibt es eine ganze Zahl d mit $ad = b$. Also gilt

$$bc = adc = a\underbrace{(dc)}_{\in \mathbb{Z}}$$

und wieder per Definition gilt $a \mid bc$

Aufgabe 3

Aus $d|a$ und $d|b$ folgt (mit Aufgabe 2) $d \mid (a+cb)$, womit d ein gemeinsamer Teiler von b und $a+cb$ ist.

Andererseits folgt aus $w \mid (a+cb)$ und $w|b$ (mit Aufgabe 2) dann $w \mid (a+cb) - cb$ bzw. $w|a$. Wir schließen:

Die Zahlenpaare $(a+cb, b)$ und (a,b) haben alle Teiler gemeinsam, insbesondere gilt dann auch $ggT(a+cb, b) = ggT(a,b)$