Aufgabe 1

zu (i)

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1+\sqrt{2}\\ 1\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1+\sqrt{2}+1\\ 1+\sqrt{2}-1\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}2+\sqrt{2}\\ \sqrt{2}\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt{2}}+1\\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}\sqrt{2}}{\cancel{\sqrt{2}}}+1\\ 1\end{pmatrix} = 1\cdot\begin{pmatrix}1+\sqrt{2}\\ 1\end{pmatrix}$$

Also ist 1 Eigenwert

zu (ii)

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1-\sqrt{2}\\ 1\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}2-\sqrt{2}\\ -\sqrt{2}\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}\sqrt{2}}{\sqrt{2}}-1\\ -1\end{pmatrix} = (-1)\begin{pmatrix}1-\sqrt{2}\\ 1\end{pmatrix}$$

Also ist (-1) Eigenwert

Aufgabe 2

zu (i) Die Amplitude von $|0\rangle$ ist $\frac{3+i\sqrt{3}}{4}$. Also wird $|0\rangle$ mit Wahrscheinlichkeit

$$\left|\frac{3+i\sqrt{3}}{4}\right|^2 = \frac{(3+i\sqrt{3})(3-i\sqrt{3})}{16} = \frac{9+3}{16} = \frac{3}{4}$$

gemessen.

$|1\rangle$ wird mit Wahrscheinlichkeit $|-\frac{1}{2}|^2 = \frac{1}{4}$ gemessen

zu (ii) Zunächst muss $|\psi\rangle$ bzgl. der X-Basis dargestellt werden, d.h. $|\psi\rangle = \langle +|\psi\rangle|+\rangle + \langle -|\psi\rangle|-\rangle$

Wir rechnen

$$\langle +|\psi\rangle = \langle +|\left(\frac{3+i\sqrt{3}}{4}|0\rangle - \frac{1}{2}|1\rangle\right)$$

$$= \frac{3+i\sqrt{3}}{4}\langle +|0\rangle - \frac{1}{2}\langle +|1\rangle \quad =$$

$$= \frac{3+i\sqrt{3}}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\langle 0| + \langle 1|\right)\right)|0\rangle -$$

$$- \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\langle 0| + \langle 1|\right)\right)|1\rangle$$

$$= \frac{3+i\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \underbrace{\langle 0|0\rangle}_{=1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \underbrace{\langle 1|1\rangle}_{=1}$$

$$= \frac{3+i\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{3+i\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$= \frac{3+i\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} - \frac{2}{4\sqrt{2}} = \frac{1+i\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}$$

$$\langle -|\psi\rangle = \langle -|\left(\frac{3+i\sqrt{3}}{4}|0\rangle - \frac{1}{2}|1\rangle\right)$$

$$= \frac{3+i\sqrt{3}}{4}\langle -|0\rangle - \frac{1}{2}\langle -|1\rangle$$

$$= \frac{3+i\sqrt{3}}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\langle 0| - \langle 1|\right)\right)|0\rangle -$$

$$- \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\langle 0| - \langle 1|\right)\right)|1\rangle$$

$$= \frac{3+i\sqrt{3}}{4} \underbrace{\langle 0|0\rangle}_{=1} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \underbrace{\langle 1|1\rangle}_{=1}$$

$$= \frac{3+i\sqrt{3}}{4} + \frac{2}{4\sqrt{2}} = \frac{5+i\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}$$

Also $|\psi\rangle = \frac{1+i\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}|+\rangle + \frac{5+i\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}|-\rangle$

Dann wird $|+\rangle$ mit Wahrscheinlichkeit

$$\left|\frac{1+i\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}\right|^2 = \frac{(1+i\sqrt{3})(1-i\sqrt{3})}{32} = \frac{1+3}{32} = \frac{1}{8}$$

und $|-\rangle$ mit Wahrscheinlichkeit

$$\left|\frac{5+i\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}\right|^2 = \frac{(5+i\sqrt{3})(5-i\sqrt{3})}{32} = \frac{25+3}{32} = \frac{7}{8}$$

gemessen