Hochschule RheinMain

ÜBUNGEN

zur Veranstaltung ***Quantencomputing*** im Studiengang Angewandte Informatik

No. 7 | Martin Rehberg

Präsenzaufgaben

Aufgabe 1: Bestimmen Sie für $2 \leq n \leq 6$ die n-ten Einheitswurzeln und zeichnen Sie diese in ein Koordinatensystem.

Aufgabe 2: Berechnen Sie

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega_n^{k\ell}$$

und

$$\prod_{k=0}^{n-1} \omega_n^k$$

für $\omega_n = \exp\left(\frac{2\pi i}{n}\right)$ und $1 \leq \ell < n,\ n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 3: Gegeben sei ein Quantenregister im Zustand

$$|q_3q_2q_1q_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}|0000\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}|0010\rangle + \frac{1}{\sqrt{6}}|0011\rangle + \frac{1}{\sqrt{6}}|1110\rangle.$$

Bestimmen Sie das Ergebnis der Messung nach $|q_3\rangle$.

Übungsaufgaben

Aufgabe 1: Bezeichne QFT die Quanten-Fouriertransformation der Ordnung N und ω die N-te Einheitswurzel. Sei

$$M = \mathrm{QFT}^\dagger\,\mathrm{QFT}$$

und M_{rs} das Element der Matrix M in Zeile r und Spalte s. Zeigen Sie

(i.)

$$M_{rs} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \omega^{k(s-r)}.$$

(ii.) $M_{rs} = 1$ für $r = s$.

(iii.) $M_{rs} = 0$ für $r \neq s$.

Hinweis: Sie haben damit gezeigt, dass QFT eine unitäre Transformation ist.

Aufgabe 2: Lösen Sie die (in der Vorlesung kennengelernte) Rekursionsgleichung

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + O(n),\ T(1) = O(1)$$

der FFT für den Spezialfall $n = 2^k$.

Präsenzaufgaben

Aufgabe 1

Abweichend von der bisherigen Notation schreiben wir

$$w_k = \exp(2\pi i \tfrac{k}{n}) \quad \text{für } k \in \{0, \dots, n-1\}$$

Die Wahl von $n \in \{2, \dots, 6\}$ ergibt sich aus den jeweiligen Fall

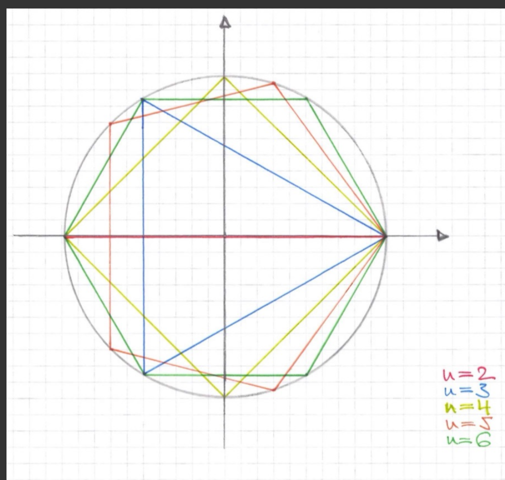
n=2

$$w_0 = 1$$
$$w_1 = \exp(2\pi i \tfrac{1}{2}) = \exp(\pi i) = -1$$

n=3

$$w_0 = 1$$
$$w_1 = \exp(2\pi i \cdot \tfrac{1}{3}) = \cos(\tfrac{2\pi}{3}) + i\sin(\tfrac{2\pi}{3}) = -\tfrac{1}{2} + i\tfrac{\sqrt{3}}{2}$$
$$w_2 = \exp(2\pi i \cdot \tfrac{2}{3}) = \cos(\tfrac{4\pi}{3}) + i\sin(\tfrac{4\pi}{3}) = -\tfrac{1}{2} - i\tfrac{\sqrt{3}}{2}$$

n=4



$$w_0 = 1$$
$$w_1 = \exp(2\pi i \tfrac{1}{4}) = i$$
$$w_2 = \exp(2\pi i \tfrac{2}{4} = -1$$
$$w_3 = \exp(2\pi i \tfrac{3}{4}) = -i$$

n=5

$$w_0 = 1$$
$$w_1 = \exp(2\pi i \tfrac{1}{5}) = \cos(\tfrac{2\pi}{5}) + i\sin(\tfrac{2\pi}{5})$$
$$w_2 = \exp(2\pi i \tfrac{2}{5}) = \cos(\tfrac{4\pi}{5}) + i\sin(\tfrac{4\pi}{5})$$
$$w_3 = \exp(2\pi i \tfrac{3}{5}) = \cos(\tfrac{6\pi}{5}) + i\sin(\tfrac{6\pi}{5})$$
$$w_4 = \exp(2\pi i \tfrac{4}{5}) = \cos(\tfrac{8\pi}{5}) + i\sin(\tfrac{8\pi}{5})$$

n=6

$$w_0 = 1$$
$$w_1 = \exp(2\pi i \tfrac{1}{6}) = \tfrac{1}{2} + i\tfrac{\sqrt{3}}{2}$$
$$w_2 = \exp(2\pi i \tfrac{2}{6}) = -\tfrac{1}{2} + i\tfrac{\sqrt{3}}{2}$$
$$w_3 = \exp(2\pi i \tfrac{3}{6}) = -1$$
$$w_4 = \exp(2\pi i \tfrac{4}{6}) = -\tfrac{1}{2} - i\tfrac{\sqrt{3}}{2}$$
$$w_5 = \exp(2\pi i \tfrac{5}{6}) = \tfrac{1}{2} - i\tfrac{\sqrt{3}}{2}$$