Aufgaben zu Einheitswurzeln

Aufgabe 1

Abweichend von der bisherigen Notation schreiben wir

$$\omega_k = \exp\left(2\pi i \frac{k}{n}\right) \quad \text{für } k \in \{0, \dots, n-1\}$$

Die Wahl von $n \in \{2, \dots, 6\}$ ergibt sich aus dem jeweiligen Fall.

$n = 2$:

$\omega_0 = 1$

$\omega_1 = \exp\left(2\pi i \frac{1}{2}\right) = \exp(\pi i) = -1$

$n = 3$:

$\omega_0 = 1$

$\omega_1 = \exp\left(2\pi i \cdot \frac{1}{3}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\omega_2 = \exp\left(2\pi i \cdot \frac{2}{3}\right) = \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$n = 4$:

$\omega_0 = 1$

$\omega_1 = \exp\left(2\pi i \cdot \frac{1}{4}\right) = i$

$\omega_2 = \exp\left(2\pi i \cdot \frac{2}{4}\right) = -1$

$\omega_3 = \exp\left(2\pi i \cdot \frac{3}{4}\right) = -i$

$n = 5$:

$\omega_0 = 1$

$\omega_1 = \exp\left(2\pi i \frac{1}{5}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) \approx 0{,}31 + i$

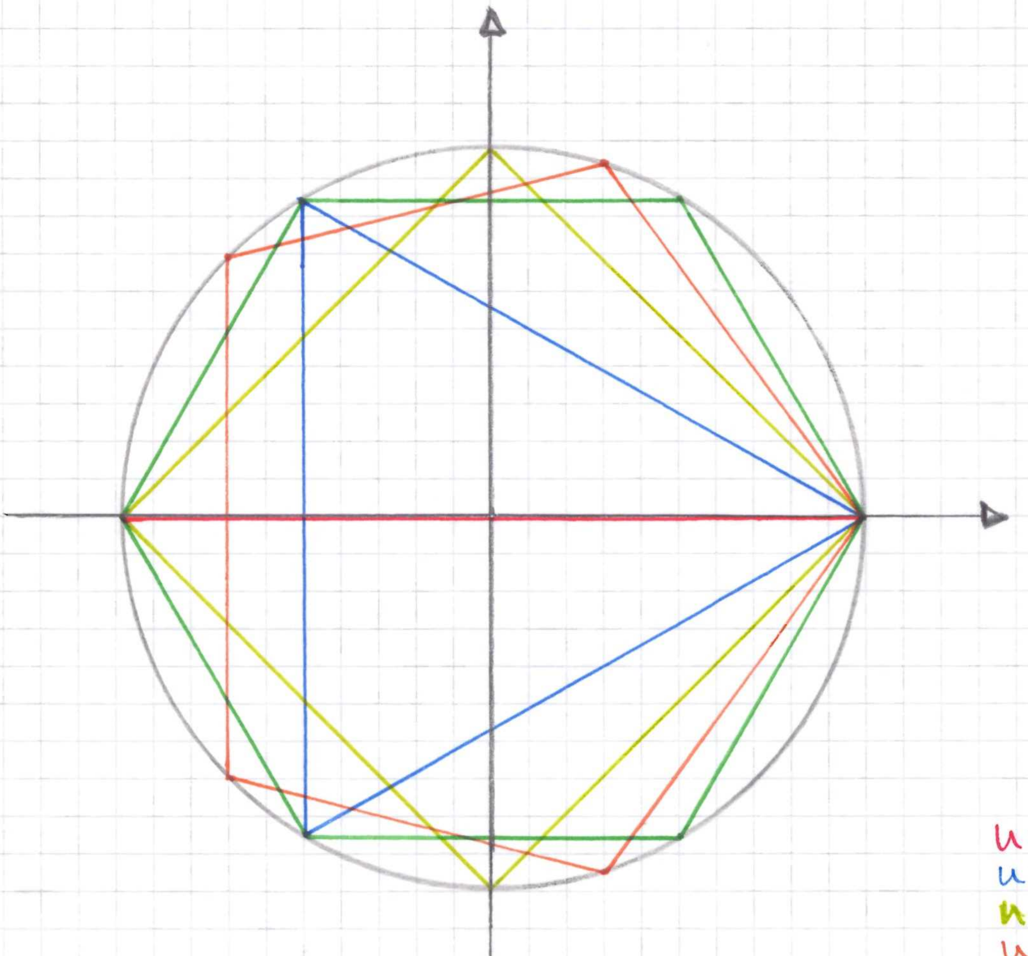
$\omega_2 = \exp\left(2\pi i \frac{2}{5}\right) = \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right)$

$\omega_3 = \exp\left(2\pi i \frac{3}{5}\right) = \cos\left(\frac{6\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{6\pi}{5}\right)$

$\omega_4 = \exp\left(2\pi i \frac{4}{5}\right) = \cos\left(\frac{8\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{8\pi}{5}\right)$

$\underline{n=6:}$

$$\omega_0 = 1$$
$$\omega_1 = \exp\left(2\pi i \cdot \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\omega_2 = \exp\left(2\pi i \cdot \frac{2}{6}\right) = -\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\omega_3 = \exp\left(2\pi i \cdot \frac{3}{6}\right) = -1$$
$$\omega_4 = \exp\left(2\pi i\, \frac{4}{6}\right) = -\frac{1}{2} - i\,\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\omega_5 = \exp\left(2\pi i\, \frac{5}{6}\right) = \frac{1}{2} - i\,\frac{\sqrt{3}}{2}$$



$n=2$
$n=3$
$n=4$
$n=5$
$n=6$

Aufgabe 2

Mittels geometrischer Summe

$$\sum_{k=0}^{M} z^k = \frac{z^{M+1}-1}{z-1} \quad , z \neq 1$$

ergibt sich

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega_n^{kl} = \sum_{k=0}^{n-1} (\omega_n^l)^k = \frac{(\omega_n^l)^n - 1}{\omega_n^l - 1} = 0$$

$$(\omega_n^l)^n = (\omega_n^n)^l = 1^l = 1$$

Für das Produkt berechnet man

$$\prod_{k=0}^{n-1} \omega_n^k = \omega_n^{\sum_{k=0}^{n-1} k} = \omega_n^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} k = \frac{n(n-1)}{2} \quad \text{(Gauß)}$$

$$= \exp\left(\frac{2\pi i}{n} \cdot \frac{n(n-1)}{2}\right)$$

$$= \exp(\pi i (n-1)) = (-1)^{n-1}$$

$$\exp(\pi i) = -1 \quad \text{(vgl. Aufgabe 1)}$$

Aufgabe 3

Ergebnis der Messung bzgl. $|q_3\rangle$:

Mit Wahrscheinlichkeit $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2 = \frac{5}{6}$ wird $|0\rangle$ angenommen. Das Register ist dann im Zustand

$$\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}|0000\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}|0010\rangle + \frac{1}{\sqrt{6}}|0011\rangle}{\sqrt{\frac{5}{6}}} =$$

$$= \frac{\sqrt{10}}{5}|0000\rangle + \frac{\sqrt{10}}{5}|0010\rangle + \frac{1}{\sqrt{5}}|0011\rangle$$

Mit Wahrscheinlichkeit $\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2 = \frac{1}{6}$ wird $|1\rangle$ angenommen und das Register ist dann im Zustand

$$\frac{\frac{1}{\sqrt{6}}|1110\rangle}{\frac{1}{\sqrt{6}}} = |1110\rangle$$