Ü B U N G E N

zur Veranstaltung ***Quantencomputing*** im Studiengang Angewandte Informatik

No. 9 Martin Rehberg

Aufgaben von Typ der Klausur (Probeklausur)

In dieser Aufgabenserie sollen klausurtypische Aufgaben bearbeitet werden. Bitte beachten Sie das die tatsächliche Anzahl der Aufgaben in der Klausur variieren kann und das wir noch nicht alle klausurrelevanten Themen in der Vorlesung behandelt haben.

Aufgabe 1: Richtig oder Falsch.

	Richtig	Falsch
Für die Hadamard-Transformation gilt $H\|0\rangle = -\|0\rangle$.		
Jede Permutationsmatrix ist unitär.		
Das Tensorprodukt von Matrizen ist stets kommutativ.		
Das Toffoli-Gatter ist universell.		

Aufgabe 2:

(a.) Untersuchen Sie die Wirkung der durch

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$$

beschriebenen Transformation auf ein Qubit im Zustand $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$.
Ist die durch die Matrix S beschriebene Transformation auch zulässig (Beweis)?

(b.) Gegeben sei ein Quantenregister im Zustand

$$|q_3q_2q_1q_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0000\rangle + \frac{1}{\sqrt{6}}|0010\rangle + \frac{1}{\sqrt{5}}|0011\rangle + \sqrt{\frac{2}{15}}|1110\rangle.$$

Bestimmen Sie das Ergebnis der Messung (inkl. Folgezustände) nach $|q_3\rangle$.

Aufgabe 3: Untersuchen Sie ob die Abbildung $U_f : |x, y\rangle \mapsto |x \oplus f(y), y\rangle$ eine zulässige Transformation auf Qubits beschreibt, wenn f die Einsfunktion ist, d.h. $f(0) = f(1) = 1$ gilt.

Aufgabe 4: Das anti-Toffoli-Gatter $T : \{0, 1\}^3 \to \{0, 1\}^3$ ist definiert durch

$$T(a, b, c) = (a, b, (\bar{a} \wedge \bar{b}) \,\mathrm{XOR}\, c).$$

(a.) Bestimmen Sie die (klassische) Wahrheitstabelle des anti-Toffoli-Gatters.

(b.) Zeigen Sie das sich mit dem anti-Toffoli-Gatter die logischen Verknüpfungen $\mathrm{NOT}(a)$, $\mathrm{OR}(a, b)$ und $\mathrm{NOR}(a, b)$ im dritten Eintrag umsetzen lassen.
Hinweis: Verwenden Sie die Hilfsfunktion $\mathrm{BIT}_3(a, b, c) = c$.

(c.) Konstruieren Sie das anti-Toffoli-Gatter aus dem Toffoli-Gatter und vier NOT-Gattern.

Aufgabe 5: Zeigen Sie, dass der Bell-Zustand

$$\Phi^- = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |11\rangle)$$

nicht in das Produkt zweier Zustände je eines Qubits zerlegt werden kann. Geben Sie dann ein Beispiel an, aus welchem unverschränkten Zustand Φ^- mittels CNOT erzeugt werden kann.

Aufgabe 6: Sei $|\psi\rangle$ beliebig und $|\omega\rangle$ beliebig, aber fest gewählt. Beweisen Sie das es keinen linearen Quantenkopierer

$$K : |\psi\rangle \otimes |\omega\rangle \mapsto |\psi\rangle \otimes |\psi\rangle$$

geben kann, indem Sie die Wirkung von K auf $|0\rangle \otimes |1\rangle,\ |1\rangle \otimes |1\rangle$ und $\frac{|1\rangle+|0\rangle}{\sqrt{2}} \otimes |1\rangle$ untersuchen.

Aufgabe 7: Analysieren Sie den nachfolgend abgebildeten Schaltkreis (*durch scharfes hinsehen*) für $R = |q_3q_2q_1q_0\rangle$ und vereinfachen Sie diesen schrittweise. Sie können davon ausgehen, das jedes Qubit mit $|0\rangle$ initialisiert wurde. Beantworten Sie abschließend die Frage, welche Funktion die Schaltung erfüllt.