Aufgabe Toffoli Gatter

$T: \{0,1\}^3 \to \{0,1\}^3$, $T(a,b,c) = (a,b,ab \oplus c)$

zu (i) $T(a,1,1) = (a,1,a \oplus 1)$

und $BIT_3(T(a,1,1)) = a \oplus 1 = \overline{a} = NOT(a)$

zu (ii) $T(a,b,0) = (a,b,ab \oplus 0) = (a,b,ab)$,

also $BIT_3(T(a,b,0)) = ab = a \wedge b = AND(a,b)$

zu (iii) Beachte $\overline{\overline{a} \wedge \overline{b}} = a \vee b$, also

$T(\overline{a},\overline{b},1) = (\overline{a},\overline{b},\overline{a} \cdot \overline{b} \oplus 1)$

$= (\overline{a},\overline{b},\overline{\overline{a} \cdot \overline{b}})$ und

$BIT_3(T(\overline{a},\overline{b},1)) = \overline{\overline{a} \cdot \overline{b}} = \overline{\overline{a} \wedge \overline{b}} = a \vee b$

zu (iv) zeige $T^{-1}(a,b,c) = T(a,b,c)$, d.h. das Toffoli-Gatter ist selbstinvers.

Es ist

$$\begin{aligned} T(T(a,b,c)) &= T(a,b,ab \oplus c) \\ &= (a,b,ab \oplus (ab \oplus c)) \\ &= (a,b,ab \oplus ab \oplus c) \\ &= (a,b,c) \end{aligned}$$

Aufgabe 2

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

Dann ist

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \otimes B = \begin{pmatrix} 6B & 5B & 4B \\ 3B & 2B & B \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 6\alpha & 6\beta & 5\alpha & 5\beta & 4\alpha & 4\beta \\ 6\gamma & 6\delta & 5\gamma & 5\delta & 4\gamma & 4\delta \\ 3\alpha & 3\beta & 2\alpha & 2\beta & \alpha & \beta \\ 3\gamma & 3\delta & 2\gamma & 2\delta & \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

$$B \otimes A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \otimes A = \begin{pmatrix} \alpha A & \beta A \\ \gamma A & \delta A \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 6\alpha & 5\alpha & 4\alpha & 6\beta & 5\beta & 4\beta \\ 3\alpha & 2\alpha & \alpha & 3\beta & 2\beta & \beta \\ 6\gamma & 5\gamma & 4\gamma & 6\delta & 5\delta & 4\delta \\ 3\gamma & 2\gamma & \gamma & 3\delta & 2\delta & \delta \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3

Wir schreiben $|\psi\rangle$ zunächst als Produkt von

$|\psi_1\rangle = \alpha_0 |0\rangle + \alpha_1 |1\rangle$ und $|\psi_0\rangle = \beta_0 |0\rangle + \beta_1 |1\rangle$

Also

$$|\psi\rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\sqrt{3}|00\rangle - \sqrt{3}|01\rangle + |10\rangle - |11\rangle \right)$$

$$\overset{!}{=} \left(\alpha_0|0\rangle + \alpha_1|1\rangle \right)\left(\beta_0|0\rangle + \beta_1|1\rangle \right)$$

$$= \alpha_0\beta_0|00\rangle + \alpha_0\beta_1|01\rangle + \alpha_1\beta_0|10\rangle + \alpha_1\beta_1|11\rangle$$

Koeffizientenvergleich ergibt

$$\alpha_0\beta_0 = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}, \quad \alpha_0\beta_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}, \quad \alpha_1\beta_0 = \frac{1}{2\sqrt{2}}, \quad \alpha_1\beta_1 = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

Wir lösen für α_0 in Abhängigkeit von β_0: $\alpha_0 = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}\,\beta_0}$

und setzen in die zweite Gleichung ein,

$$\alpha_0 = -\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}\,\beta_1} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}\,\beta_0}, \quad \text{also} \quad \beta_1 = -\beta_0$$

In der dritten Gleichung ist $\alpha_1 = \frac{1}{2\sqrt{2}\,\beta_0}$

Setzen wir $\alpha_1 = \frac{1}{2\sqrt{2}\,\beta_0}$ und $\beta_1 = -\beta_0$ in die vierte Gleichung ein, folgt

$$-\frac{1}{2\sqrt{2}} = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \quad \text{(wahre Aussage)}$$

D.h. wir haben für α_0, α_1 und β_1 Lösungen in Abhängigkeit von β_0 und setzen diese ein:

$$|\psi_1\rangle|\psi_0\rangle = (\alpha_0|0\rangle + \alpha_1|1\rangle)(\beta_0|0\rangle + \beta_1|1\rangle)$$

$$= \left(\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}\beta_0}|0\rangle + \frac{1}{2\sqrt{2}\beta_0}|1\rangle\right)(\beta_0|0\rangle - \beta_1|1\rangle)$$

setze $\beta_0 = 1$ als spezielle Lösung

$$\overset{\ast}{=} \left(\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{2\sqrt{2}}|1\rangle\right)(|0\rangle - |1\rangle)$$

$$= \underbrace{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}|0\rangle + \frac{1}{2}|1\rangle\right)}_{\text{zulässiges Qubit}}\underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle\right)}_{|-\rangle}$$