Aufgabe 1

zu (i) Aus der Darstellung als Matrix

$$QFT = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \cdots & \omega^{N-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \omega^{N-1} & \omega^{2(N-1)} & \cdots & \omega^{(N-1)(N-1)} \end{pmatrix}$$

folgt

$$M_{rs} = \frac{1}{N}\left(\omega^{-0\cdot r}\omega^{0\cdot s} + \omega^{-r}\omega^{s} + \omega^{-2r}\omega^{2s} + \ldots + \omega^{-(N-1)r}\omega^{(N-1)s}\right)$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\omega^{-kr}\omega^{ks} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\omega^{k(s-r)}$$

zu (ii) Für $r=s$ folgt

$$M_{rs} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\omega^{k\cdot 0} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}1 = 1$$

zu (iii) Für $r \neq s$ sei $c := s-r \neq 0$. Dann folgt

$$M_{rs} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}(\omega^c)^k = 0$$

Aufgabe 2 (Präsenzaufgabe)

Aufgabe 2

Für $n = 2^k$ liefern die Rekursionsgleichungen

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + \Theta(n), \quad T(1) = \Theta(1)$$

dann

$$\begin{aligned}
T(2^k) &= 2T(2^{k-1}) + \Theta(2^k) \\
&= 2\left(2T(2^{k-2}) + \Theta(2^{k-1})\right) + \Theta(2^k) \\
&= 2^2\, T(2^{k-2}) + \Theta(2^k) + \Theta(2^k) \\
&= 2^3\, T(2^{k-3}) + \Theta(2^k) + \Theta(2^k) + \Theta(2^k) \\
&\;\vdots \\
&= 2^k \underbrace{T(2^{k-k})}_{= T(1) = \Theta(1)} + \underbrace{\Theta(2^k) + \ldots + \Theta(2^k)}_{k\text{-mal}} \\
&= \Theta(2^k) + k\,\Theta(2^k) \\
&= \Theta(k 2^k)
\end{aligned}$$

Also $T(2^k) = \Theta(k\,2^k)$

für $n = 2^k$, $\log n = k$