Präsenzaufgaben Serie 1

Aufgabe 1

Y-Basis $\{|i\rangle, |-i\rangle\}$ mit $|i\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + i|1\rangle)$
und $|-i\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - i|1\rangle)$

Dann ist $\langle i| = \frac{1}{\sqrt{2}}(\langle 0| - i\langle 1|)$ und
$\langle -i| = \frac{1}{\sqrt{2}}(\langle 0| + i\langle 1|)$

Für transformiertes $|\psi\rangle = \underbrace{\langle i|\psi\rangle}_{\text{Amplitude}}|i\rangle + \underbrace{\langle -i|\psi\rangle}_{\text{Amplitude}}|-i\rangle$
berechnen wir die neuen Amplituden als

$$
\begin{aligned}
\langle i|\psi\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\langle 0| - i\langle 1|)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}|0\rangle + \frac{1}{2}|1\rangle\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\underbrace{\langle 0|0\rangle}_{=1} + \frac{1}{2}\underbrace{\langle 0|1\rangle}_{=0} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\underbrace{\langle 1|0\rangle}_{=0} - \frac{i}{2}\underbrace{\langle 1|1\rangle}_{=1}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right) \\
&= \frac{\sqrt{3}-i}{2\sqrt{2}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\langle -i|\psi\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\langle 0| + i\langle 1|)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}|0\rangle + \frac{1}{2}|1\rangle\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\langle 0|0\rangle + \frac{1}{2}\langle 0|1\rangle + i\frac{\sqrt{3}}{2}\langle 1|0\rangle + \frac{i}{2}\langle 1|1\rangle\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right) \\
&= \frac{\sqrt{3}+i}{2\sqrt{2}}
\end{aligned}
$$

Wir erhalten also bei einer Messung bzgl. der Y-Basis

- $|i\rangle$ mit Wahrscheinlichkeit $|\langle i|\psi\rangle|^2 = \left|\frac{\sqrt{3}-i}{2\sqrt{2}}\right|^2 = \frac{3+1}{8} = \frac{1}{2}$
- $|-i\rangle$ mit Wahrscheinlichkeit $|\langle -i|\psi\rangle|^2 = \left|\frac{\sqrt{3}+i}{2\sqrt{2}}\right|^2 = \frac{3+1}{8} = \frac{1}{2}$

Aufgabe 2

zu (i) X ist symmetrisch und hat nur reelle Einträge,
also $X^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = X$

Es bleibt zu prüfen ob X selbstinvers und damit unitär ist:

$$X^\dagger X = X^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

Weiter ist

$$X|\psi\rangle = \alpha X|0\rangle + \beta X|1\rangle = \alpha|1\rangle + \beta|0\rangle$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ bzw. } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Insbesondere: $X|0\rangle = |1\rangle$, $X|1\rangle = |0\rangle$
Auf der Z-Basis (computational basis) verhält sich X also wie NOT

zu (ii) Für Y gilt

$$Y^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & \bar{i} \\ \bar{-i} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = Y$$

Wir prüfen auch hier ob Y selbstinvers (und damit unitär) ist:

$$Y^\dagger Y = Y^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i^2 & 0 \\ 0 & -i^2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

Für die Wirkung auf $|\psi\rangle$ ist

$Y|\psi\rangle = \alpha Y|0\rangle + \beta Y|1\rangle = i\alpha|1\rangle - i\beta|0\rangle$ denn

$$\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix} = i\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ bzw. } Y|0\rangle = i|1\rangle$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i \\ 0 \end{pmatrix} = -i\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ bzw. } Y|1\rangle = -i|0\rangle$$

Aufgabe 3

zu (i) Wir prüfen ob die Definition für lineare Abbildungen erfüllt ist:

Für $v = (a,b)$, $w = (a',b')$ ist

$$v+w = (a+a', b+b')$$
$$kv = (ka, kb) \text{ für } k \in \mathbb{R}$$

und somit

$$F(v+w) = F(a+a', b+b') = (a+a'+b+b', a+a')$$
$$= (a+b, a) + (a'+b', a')$$
$$= F(v) + F(w)$$

$$F(kv) = F(ka, kb) = (ka+kb, ka)$$
$$= k(a+b, a) = kF(v)$$

Da $v, w \in \mathbb{R}^2$ und $k \in \mathbb{R}$ beliebig gewählt waren, ist F linear

zu (ii) Wir konstruieren ein Gegenbeispiel

Wähle $v = (1,2)$ und $w = (3,4)$. Dann ist

$v+w = (4,6)$, $F(v) = 2$ und $F(w) = 12$

Es folgt

$$F(v+w) = F(4,6) = 24 \neq 14 = F(v) + F(w)$$

D.h. F ist nicht linear