Aufgabe 2

$$|q_2 q_1 q_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|000\rangle + \frac{1}{2}|100\rangle + \frac{1}{\sqrt{8}}|101\rangle + \frac{1}{\sqrt{8}}|111\rangle$$

zu (i) Messe bzgl. $|q_0\rangle$

- Mit Wahrscheinlichkeit $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$ wird $|0\rangle$ angenommen. Das Register ist dann im Zustand

$$\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}|000\rangle + \frac{1}{2}|100\rangle}{\sqrt{\frac{3}{4}}} = \sqrt{\frac{2}{3}}\,|000\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}|100\rangle$$

- Mit Wahrscheinlichkeit $\left(\frac{1}{\sqrt{8}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{8}}\right)^2 = \frac{1}{4}$ wird $|1\rangle$ angenommen und das Register ist im Zustand

$$\frac{\frac{1}{\sqrt{8}}|101\rangle + \frac{1}{\sqrt{8}}|111\rangle}{\sqrt{\frac{1}{4}}} = \frac{2}{\sqrt{8}}|101\rangle + \frac{2}{\sqrt{8}}|111\rangle$$

zu (ii) Messe bzgl. $|q_2\rangle$

- Mit Wahrscheinlichkeit $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}$ wird $|0\rangle$ angenommen Das Register ist dann im Zustand

$$\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}|000\rangle}{\sqrt{\frac{1}{2}}} = |000\rangle$$

- Mit Wahrscheinlichkeit $\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{8}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{8}}\right)^2 = \frac{1}{2}$ wird $|1\rangle$ angenommen und das Register ist im Zustand

$$\frac{\frac{1}{2}|100\rangle + \frac{1}{\sqrt{8}}|101\rangle + \frac{1}{\sqrt{8}}|111\rangle}{\sqrt{\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{2}|100\rangle + \frac{1}{2}|101\rangle + \frac{1}{2}|111\rangle$$

Aufgabe 3

zu (i) Mit $CNOT_{01} : |x, y\rangle \mapsto |x \oplus y, y\rangle$ folgt

$$CNOT_{01} : \begin{cases} |00\rangle \mapsto |00\rangle \\ |01\rangle \mapsto |11\rangle \\ |10\rangle \mapsto |10\rangle \\ |11\rangle \mapsto |01\rangle \end{cases}$$

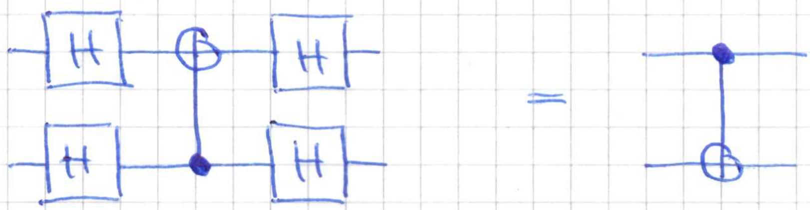
und somit

$$A_{CNOT_{01}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Das ist eine Permutationsmatrix, also unitär

zu (ii) Behauptung: $(H \otimes H)\, CNOT\, (H \otimes H) = CNOT_{01}$

Als Schaltkreis wäre dies



Wir belegen die Behauptung, indem wir das Tensorprodukt der Matrizen berechnen und mit $A_{CNOT_{01}}$ vergleichen:

$(H \otimes H)\, CNOT\, (H \otimes H) =$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} = CNOT_{01}$$