Projeto e Análise de Algoritmos: Estratégias de Prova Matemática

Prof. Renê Veloso[1]

March, 27th 2014

[1]Universidade Estadual de Montes Claros
Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional e Sistemas (PPGMCS)

Sumário

1. Introdução
2. Estratégias de Prova Matemática
   - Conclusão na forma $P \rightarrow Q$
   - Conclusão na forma $\neg P$
   - Modus Ponens e Modus Tollens
3. Indução Matemática

Introdução

Você está estudando sobre números primos e verifica a seguinte relação entre "todo" número n e $2^n - 1$:

n	**é primo?**	$2^n - 1$	**é primo?**
2	sim	3	sim

Introdução

Você está estudando sobre números primos e verifica a seguinte relação entre "todo" número n e $2^n - 1$:

n	**é primo?**	$2^n - 1$	**é primo?**
2	sim	3	sim
3	sim	7	sim

Introdução

Você está estudando sobre números primos e verifica a seguinte relação entre "todo" número n e $2^n - 1$:

n	**é primo?**	$2^n - 1$	**é primo?**
2	sim	3	sim
3	sim	7	sim
4	não	15	não: 15=3.5

Introdução

Você está estudando sobre números primos e verifica a seguinte relação entre "todo" número n e $2^n - 1$:

n	**é primo?**	$2^n - 1$	**é primo?**
2	sim	3	sim
3	sim	7	sim
4	não	15	não: 15=3.5
5	sim	31	sim

Introdução

Você está estudando sobre números primos e verifica a seguinte relação entre "todo" número n e $2^n - 1$:

n	**é primo?**	$2^n - 1$	**é primo?**
2	sim	3	sim
3	sim	7	sim
4	não	15	não: 15=3.5
5	sim	31	sim
6	não	63	não: 63=7.9

Introdução

Você está estudando sobre números primos e verifica a seguinte relação entre "todo" número n e $2^n - 1$:

n	**é primo?**	$2^n - 1$	**é primo?**
2	sim	3	sim
3	sim	7	sim
4	não	15	não: 15=3.5
5	sim	31	sim
6	não	63	não: 63=7.9
7	sim	127	sim

Introdução

Você está estudando sobre números primos e verifica a seguinte relação entre "todo" número n e $2^n - 1$:

n	**é primo?**	$2^n - 1$	**é primo?**
2	sim	3	sim
3	sim	7	sim
4	não	15	não: 15=3.5
5	sim	31	sim
6	não	63	não: 63=7.9
7	sim	127	sim

Esse padrão continua para todo número n?

Introdução

Você tem dois "chutes"...

Conjectura 1 Suponha que n seja um número inteiro maior que 1 e n é primo. Então $2^n - 1$ é primo.

Conjectura 2 Suponha que n seja um número inteiro maior que 1 e n não é primo. Então $2^n - 1$ não é primo.

Introdução

Você tem dois "chutes"...

Conjectura 1 Suponha que n seja um número inteiro maior que 1 e n é primo. Então $2^n - 1$ é primo.

Conjectura 2 Suponha que n seja um número inteiro maior que 1 e n não é primo. Então $2^n - 1$ não é primo.

Contraexemplo

11 é primo, mas $2^{11} - 1 = 2047$ não é! $(2047 = 23*89)$
Então a conjectura 1 é incorreta.

Introdução

Você tem dois “chutes”...

Conjectura 1 Suponha que n seja um número inteiro maior que 1 e n é primo. Então $2^n - 1$ é primo.

Conjectura 2 Suponha que n seja um número inteiro maior que 1 e n não é primo. Então $2^n - 1$ não é primo.

Contraexemplo

11 é primo, mas $2^{11} - 1 = 2047$ não é! $(2047 = 23*89)$
Então a conjectura 1 é incorreta.

Mas e a segunda? Fui até o número 30 e não encontrei um contraexemplo... ela é correta?

Introdução

Você tem dois "chutes"...

Conjectura 1 Suponha que n seja um número inteiro maior que 1 e n é primo. Então $2^n - 1$ é primo.

Conjectura 2 Suponha que n seja um número inteiro maior que 1 e n não é primo. Então $2^n - 1$ não é primo.

Contraexemplo

11 é primo, mas $2^{11} - 1 = 2047$ não é! $(2047 = 23*89)$
Então a conjectura 1 é incorreta.

Mas e a segunda? Fui até o número 30 e não encontrei um contraexemplo... ela é correta?
Não.

Sumário

1 Introdução

2 Estratégias de Prova Matemática

Conclusão na forma $P \to Q$

Conclusão na forma $\neg P$

Modus Ponens e Modus Tollens

3 Indução Matemática

Conclusão na forma $P \to Q$

Para provar uma conclusão na forma $P \to Q$ é comum utilizar uma das seguintes estratégias:

- Assuma que P é verdade e então prove que Q é verdade ($P \to Q$)
- Assuma que Q é falso e prove que P também é falso ($\neg Q \to \neg P$)

Conclusão na forma $P \rightarrow Q$

Assuma que P é verdade e então prove que Q é verdade ($P \rightarrow Q$)

Conclusão na forma $P \to Q$

Assuma que P é verdade e então prove que Q é verdade ($P \to Q$)

Atenção

Você não está provando que Q é verdade, porque não se sabe se a hipótese de que P é verdade está correta.
Está apenas concluindo que, se P for verdade, você tem certeza que Q também é... portanto $P \to Q$ é verdade (fica subentendido).

Conclusão na forma $P \to Q$

Assuma que P é verdade e então prove que Q é verdade $(P \to Q)$

Passo 1 Encontrar os dados e objetivos.

Conclusão na forma $P \to Q$

Assuma que P é verdade e então prove que Q é verdade ($P \to Q$)

Passo 1 Encontrar os dados e objetivos.

Dados	Objetivo
—	$P \to Q$

Conclusão na forma $P \to Q$

Assuma que P é verdade e então prove que Q é verdade ($P \to Q$)

Passo 1 Encontrar os dados e objetivos.

Passo 2 transformar o problema. Há novas hipóteses que podem ser aproveitadas?

Dados	Objetivo
—	$P \to Q$

Conclusão na forma $P \to Q$

Assuma que P é verdade e então prove que Q é verdade ($P \to Q$)

Passo 1 Encontrar os dados e objetivos.

Passo 2 transformar o problema. Há novas hipóteses que podem ser aproveitadas?

Dados	Objetivo
—	$\cancel{P \to Q}$
P	Q

Conclusão na forma $P \to Q$

Example

Suponha que a e b são números reais. Prove que se $0 < a < b$ então $a^2 < b^2$.

Conclusão na forma $P \to Q$

Example

Suponha que a e b são números reais. Prove que se $0 < a < b$ então $a^2 < b^2$.

Passo 1 ?

Conclusão na forma $P \to Q$

Example

Suponha que a e b são números reais. Prove que se $0 < a < b$ então $a^2 < b^2$.

Passo 1 ?

Dados	Objetivo
$a, b \in \mathbb{R}$	$(0 < a < b) \to (a^2 < b^2)$

Conclusão na forma $P \to Q$

Example

Suponha que a e b são números reais. Prove que se $0 < a < b$ então $a^2 < b^2$.

Passo 1 ?

Passo 2 ?

Dados	Objetivo
$a, b \in \mathbb{R}$	$(0 < a < b) \to (a^2 < b^2)$

Conclusão na forma $P \to Q$

Example

Suponha que a e b são números reais. Prove que se $0 < a < b$ então $a^2 < b^2$.

Passo 1 ?

Passo 2 ?

Dados	Objetivo
$a, b \in \mathbb{R}$	$\cancel{(0 < a < b) \to (a^2 < b^2)}$
$0 < a < b$	$a^2 < b^2$

Conclusão na forma $P \rightarrow Q$

Example

Suponha que a e b são números reais. Prove que se $0 < a < b$ então $a^2 < b^2$.

Passo 1 ?

Passo 2 ?

Dados	Objetivo
$a, b \in \mathbb{R}$	$\cancel{(0 < a < b) \rightarrow (a^2 < b^2)}$
$0 < a < b$	$a^2 < b^2$

Como sair dos dados e chegar ao objetivo?

Uma pista é multiplicar a nos dois lados de $a < b$. Ficará $a * a < a * b \Rightarrow a^2 < ab$. Da mesma forma, multiplicamos b nos dois lados de $a < b$. Ficando $ab < b^2$.
Juntando tudo, fica $a^2 < ab < b^2$, que é o mesmo que $a^2 < b^2$.

Conclusão na forma $P \to Q$

Passo 1 ?

Passo 2 ?

Dados	Objetivo
$a, b \in \mathbb{R}$	$\cancel{(0 < a < b) \to (a^2 < b^2)}$
$0 < a < b$	$a^2 < b^2$

Theorem

Suponha a e b como números reais. Se $0 < a < b$ *então* $a^2 < b^2$.

Demonstração.

Suponha $0 < a < b$. Multiplicando os dois lados da inequação $a < b$ pelo número positivo a, podemos concluir que $a^2 < ab$. De forma similar, multiplicando por b obtemos $ab < b^2$. Portanto, como $a^2 < ab < b^2$, temos que $a^2 < b^2$. Assim, se $0 < a < b$ então $a^2 < b^2$. □

Conclusão na forma $P \to Q$

Forma geral:

```
Suponha P.
     [Prove Q]
Portanto, se P então Q.
```

Conclusão na forma $P \to Q$

Para provar uma conclusão na forma $P \to Q$ é comum utilizar uma das seguintes estratégias:

- ~~Assuma que P é verdade e então prove que Q é verdade ($P \to Q$)~~
- Assuma que Q é falso e prove que P também é falso ($\neg Q \to \neg P$)

Conclusão na forma $P \to Q$

Assuma que Q é falso e prove que P também é falso

Atenção

A contrapositiva de $P \to Q$ é $\neg Q \to \neg P$.

Passo 1 Encontrar os dados e objetivos.

Passo 2 transformar o problema.

Dados	Objetivo

Conclusão na forma $P \to Q$

Assuma que Q é falso e prove que P também é falso

Atenção

A contrapositiva de $P \to Q$ é $\neg Q \to \neg P$.

- Passo 1 Encontrar os dados e objetivos.
- Passo 2 transformar o problema.

Dados	Objetivo
—	$P \to Q$

Conclusão na forma $P \rightarrow Q$

Assuma que Q é falso e prove que P também é falso

Atenção

A contrapositiva de $P \rightarrow Q$ é $\neg Q \rightarrow \neg P$.

Passo 1 Encontrar os dados e objetivos.

Passo 2 transformar o problema.

Dados	Objetivo
—	$\cancel{P \rightarrow Q}$
$\neg Q$	$\neg P$

Conclusão na forma $P \to Q$

Assuma que Q é falso e prove que P também é falso

Atenção

A contrapositiva de $P \to Q$ é $\neg Q \to \neg P$.

- Passo 1 Encontrar os dados e objetivos.
- Passo 2 transformar o problema.

Dados	Objetivo
—	$\cancel{P \to Q}$
$\neg Q$	$\neg P$

Forma geral:

```
Suponha que Q é falso.
     [Prove ¬P]
Portanto, se P então Q.
```

Conclusão na forma $P \to Q$

Example

Suponha que a, b e c são números reais e que $a > b$. Prove que se $ac \leq bc$ então $c \leq 0$.

Dados	Objetivo
$a, b, c \in \mathbb{R}$	$(ac \leq bc) \to (c \leq 0)$
$a > b$	

Conclusão na forma $P \to Q$

Example

Suponha que a, b e c são números reais e que $a > b$. Prove que se $ac \leq bc$ então $c \leq 0$.

Dados	Objetivo
$a, b, c \in \mathbb{R}$	$(ac \leq bc) \to (c \leq 0)$
$a > b$	

Equivalencias

$(ac \leq bc) \to (c \leq 0) \equiv \neg(c \leq 0) \to \neg(ac \leq bc) \equiv$
$(c > 0) \to (ac > bc)$

Conclusão na forma $P \to Q$

Example

Suponha que a, b e c são números reais e que $a > b$. Prove que se $ac \leq bc$ então $c \leq 0$.

Equivalencias

$(ac \leq bc) \to (c \leq 0) \equiv \neg(c \leq 0) \to \neg(ac \leq bc) \equiv$
$(c > 0) \to (ac > bc)$

Dados	Objetivo
$a, b, c \in \mathbb{R}$	$ac > bc$
$a > b$	
$c > 0$	

Conclusão na forma $P \to Q$

Dados	Objetivo
$a, b, c \in \mathbb{R}$	$ac > bc$
$a > b$	
$c > 0$	

`Suponha` $c > 0$.

    [Prove $ac > bc$]

`Portanto, se` $ac \leq bc$ `então` $c \leq 0$.

Conclusão na forma $P \to Q$

Dados	Objetivo
$a, b, c \in \mathbb{R}$	$ac > bc$
$a > b$	
$c > 0$	

`Suponha` $c > 0$.

`[Prove` $ac > bc$`]`

`Portanto, se` $ac \leq bc$ `então` $c \leq 0$.

Theorem

Suponha que a, b, c são números reais e que $a > b$. Se $ac \leq bc$ então $c \leq 0$.

Demonstração.

Prova pela contrapositiva. Suponha $c > 0$. Então multiplicamos ambos os lados de $a > b$ por c e concluimos que $ac > bc$. Portanto, se $ac \leq bc$ então $c \leq 0$. □

Sumário

1 Introdução

2 Estratégias de Prova Matemática

Conclusão na forma $P \rightarrow Q$

Conclusão na forma $\neg P$

Modus Ponens e Modus Tollens

3 Indução Matemática

Conclusão na forma $\neg P$

Para provar uma conclusão na forma $\neg P$ é comum utilizar uma das seguintes estratégias:

- Transforme o objetivo e use alguma das estratégias anteriores
- Suponha que P é verdade e tente chegar numa contradição (prova por contradição)

Conclusão na forma $\neg P$

Transforme o objetivo e use alguma das estratégias anteriores.

Example

Suponha $A \cap C \subseteq B$ e que $a \in C$. Prove que $a \notin A \setminus B$.

Conclusão na forma $\neg P$

Transforme o objetivo e use alguma das estratégias anteriores.

Example

Suponha $A \cap C \subseteq B$ e que $a \in C$. Prove que $a \notin A \setminus B$.

Dados	Objetivo

Conclusão na forma $\neg P$

Transforme o objetivo e use alguma das estratégias anteriores.

Example

Suponha $A \cap C \subseteq B$ e que $a \in C$. Prove que $a \notin A \setminus B$.

Dados	Objetivo
$A \cap C \subseteq B$	$a \notin A \setminus B$
$a \in C$	

Conclusão na forma $\neg P$

Transforme o objetivo e use alguma das estratégias anteriores.

Example

Suponha $A \cap C \subseteq B$ e que $a \in C$. Prove que $a \notin A \setminus B$.

Transformando $a \notin A \setminus B$

$a \notin A \setminus B \equiv \neg(a \in A \wedge a \notin B) \equiv$
$a \notin A \vee a \in B \equiv a \in A \rightarrow a \in B$
(lembrando que: $p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q \equiv \neg(p \wedge \neg q)$)

Conclusão na forma $\neg P$

Transforme o objetivo e use alguma das estratégias anteriores.

Example

Suponha $A \cap C \subseteq B$ e que $a \in C$. Prove que $a \notin A \setminus B$.

Transformando $a \notin A \setminus B$

$a \notin A \setminus B \equiv \neg(a \in A \wedge a \notin B) \equiv$
$a \notin A \vee a \in B \equiv a \in A \rightarrow a \in B$
(lembrando que: $p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q \equiv \neg(p \wedge \neg q)$)

Dados	Objetivo
$A \cap C \subseteq B$	$\cancel{a \notin A \setminus B}$
$a \in C$	$a \in B$
$a \in A$	

Conclusão na forma $\neg P$

Example

Suponha $A \cap C \subseteq B$ e que $a \in C$. Prove que $a \notin A \setminus B$.

Dados	Objetivo
$A \cap C \subseteq B$	$\cancel{a \notin A \setminus B}$
$a \in C$	$a \in B$
$a \in A$	

Demonstração.

Suponha $a \in A$. Então como $a \in C$, $a \in A \cap C$. Mas então como $A \cap C \subseteq B$, conclui-se que $a \in B$. Assim, não é verdade que a é um elemento de A mas não de B, então $a \notin A \setminus B$. □

Conclusão na forma $\neg P$

Para provar uma conclusão na forma $\neg P$ é comum utilizar uma das seguintes estratégias:

- ~~Transforme o objetivo e use alguma das estratégias anteriores~~
- Suponha que P é verdade e tente chegar numa contradição (prova por contradição)

Conclusão na forma $\neg P$

Suponha que P é verdade e tente chegar numa contradição (prova por contradição)

Uma vez que você chegou a uma contradição, pode concluir que P deve ser falso.

Dados	Objetivo
—	$\neg P$

Forma geral:

```
Suponha que P é verdade.

~~~~~[chegue em uma contradição]

Portanto, P é falso.
```

Conclusão na forma $\neg P$

Suponha que P é verdade e tente chegar numa contradição (prova por contradição)

> Uma vez que você chegou a uma contradição, pode concluir que P deve ser falso.

Dados	Objetivo
—	$\cancel{\neg P}$
P	contradição

Forma geral:

```
Suponha que P é verdade.

~~~~~[chegue em uma contradição]

Portanto, P é falso.
```

Conclusão na forma $\neg P$

Example

Prove que se $x^2 + y = 13$ e $y \neq 4$ então $x \neq 3$.

Conclusão na forma $\neg P$

Example

Prove que se $x^2 + y = 13$ e $y \neq 4$ então $x \neq 3$.

Dados	Objetivo

Conclusão na forma $\neg P$

Example

Prove que se $x^2 + y = 13$ e $y \neq 4$ então $x \neq 3$.

Dados	Objetivo
—	$(x^2 + y = 13 \wedge y \neq 4) \to (x \neq 3)$

Conclusão na forma $\neg P$

Example

Prove que se $x^2 + y = 13$ e $y \neq 4$ então $x \neq 3$.

Dados	Objetivo
—	$x \neq 3$
$x^2 + y = 13$	
$y \neq 4$	

Conclusão na forma $\neg P$

Example

Prove que se $x^2 + y = 13$ e $y \neq 4$ então $x \neq 3$.

Dados	Objetivo
—	$x \neq 3$
$x^2 + y = 13$	
$y \neq 4$	

```
Suponha x^2 + y = 13 e y ≠ 4.
    [Prove que x ≠ 3]
Assim, se x^2 + y = 13 e y ≠ 4 então x ≠ 3.
```

Conclusão na forma $\neg P$

Example

Prove que se $x^2 + y = 13$ e $y \neq 4$ então $x \neq 3$.

Suponha $x^2 + y = 13$ e $y \neq 4$.

[Prove que $x \neq 3$]

Assim, se $x^2 + y = 13$ e $y \neq 4$ então $x \neq 3$.

Dados	Objetivo
—	contradição
$x^2 + y = 13$	
$y \neq 4$	
$x = 3$	

Conclusão na forma $\neg P$

Example

Prove que se $x^2 + y = 13$ e $y \neq 4$ então $x \neq 3$.

Dados	Objetivo
—	contradição
$x^2 + y = 13$	
$y \neq 4$	
$x = 3$	

```
Suponha x^2 + y = 13 e y ≠ 4.
    Suponha x = 3.
        [contradição]
    Portanto, x ≠ 3.
Assim, se x^2 + y = 13 e y ≠ 4 então x ≠ 3.
```

Conclusão na forma $\neg P$

Example

Prove que se $x^2 + y = 13$ e $y \neq 4$ então $x \neq 3$.

```
Suponha x² + y = 13 e y ≠ 4.
    Suponha x = 3.
        [contradição]
    Portanto, x ≠ 3.
Assim, se x² + y = 13 e y ≠ 4 então x ≠ 3.
```

Substituindo o x na equação $x^2 + y = 13$, obtemos $9 + y = 13$, resultado em $y = 4$. Mas isso contradiz o fato que $y \neq 4$.

Conclusão na forma $\neg P$

Example

Suponha A,B e C são conjuntos, onde $A \setminus B \subseteq C$ e um elemento x qualquer. Prove que se $x \in A \setminus C$ então $x \in B$.

Conclusão na forma $\neg P$

Example

Suponha A,B e C são conjuntos, onde $A \setminus B \subseteq C$ e um elemento x qualquer. Prove que se $x \in A \setminus C$ então $x \in B$.

Dados	Objetivo

Conclusão na forma $\neg P$

Example

Suponha A,B e C são conjuntos, onde $A \setminus B \subseteq C$ e um elemento x qualquer. Prove que se $x \in A \setminus C$ então $x \in B$.

Dados	Objetivo
$A \setminus B \subseteq C$	$x \in B$
$x \in A \setminus C$	

Conclusão na forma $\neg P$

Example

Suponha A, B e C são conjuntos, onde $A \setminus B \subseteq C$ e um elemento x qualquer. Prove que se $x \in A \setminus C$ então $x \in B$.

Dados	Objetivo
$A \setminus B \subseteq C$	$\cancel{x \in B}$
$x \in A \setminus C$	contradição
$x \notin B$	

Conclusão na forma $\neg P$

Example

Suponha A, B e C são conjuntos, onde $A \setminus B \subseteq C$ e um elemento x qualquer. Prove que se $x \in A \setminus C$ então $x \in B$.

Dados	Objetivo
$A \setminus B \subseteq C$	$\cancel{x \in B}$
$x \in A \setminus C$	contradição
$x \notin B$	

Suponha $x \in A \setminus C$.
    Suponha $x \notin B$.
        [contradição]
    Portanto, $x \in B$.
Assim, se $x \in A \setminus C$ então $x \in B$.

Conclusão na forma $\neg P$

Example

Suponha A,B e C são conjuntos, onde $A \setminus B \subseteq C$ e um elemento x qualquer. Prove que se $x \in A \setminus C$ então $x \in B$.

Dados	Objetivo
$A \setminus B \subseteq C$	$\cancel{x \in B}$
$x \in A \setminus C$	contradição
$x \notin B$	

Uma maneira de avançar é alterar os dados e objetivo.
$x \in A \setminus C \equiv x \in A \wedge x \notin C$.

Conclusão na forma $\neg P$

Example

Suponha A, B e C são conjuntos, onde $A \setminus B \subseteq C$ e um elemento x qualquer. Prove que se $x \in A \setminus C$ então $x \in B$.

Dados	Objetivo
$A \setminus B \subseteq C$	contradição
$x \in A$	$x \in C$
$x \notin C$	
$x \notin B$	

Uma maneira de avançar é alterar os dados e objetivo.

$x \in A \setminus C \equiv x \in A \wedge x \notin C$.

Conclusão na forma $\neg P$

Example

Suponha A,B e C são conjuntos, onde $A \setminus B \subseteq C$ e um elemento x qualquer. Prove que se $x \in A \setminus C$ então $x \in B$.

Dados	Objetivo
$A \setminus B \subseteq C$	contradição
$x \in A$	$x \in C$
$x \notin C$	
$x \notin B$	

```
Suponha x ∈ A \ C.
    Suponha x ∉ B.
        [contradição]
    Portanto, x ∈ B.
Assim, se x ∈ A\C então x ∈ B.
```

Uma maneira de avançar é alterar os dados e objetivo.
$x \in A \setminus C \equiv x \in A \wedge x \notin C$.

Conclusão na forma $\neg P$

Example

Suponha A,B e C são conjuntos, onde $A \setminus B \subseteq C$ e um elemento x qualquer. Prove que se $x \in A \setminus C$ então $x \in B$.

Dados	Objetivo
$A \setminus B \subseteq C$	contradição
$x \in A$	$x \in C$
$x \notin C$	
$x \notin B$	

Estratégia:

Dados	Objetivo
$\neg P$	P

Forma: [prove P]

Como sabemos que $\neg P$, contradição.

Conclusão na forma $\neg P$

Dados	Objetivo
$A \setminus B \subseteq C$	contradição
$x \in A$	$x \in C$
$x \notin C$	
$x \notin B$	

Suponha $x \in A \setminus C$. Isso significa que $x \in A$ e $x \notin C$.
Suponha $x \notin B$.
[prove $x \in C$]
Isso contradiz o fato de que $x \notin C$.
Portanto, $x \in B$.
Assim, se $x \in A \setminus C$ então $x \in B$.

Conclusão na forma $\neg P$

Dados	Objetivo
$A \setminus B \subseteq C$	contradição
$x \in A$	$x \in C$
$x \notin C$	
$x \notin B$	

Suponha $x \in A \setminus C$. Isso significa que $x \in A$ e $x \notin C$.
  Suponha $x \notin B$.
    Como $x \in A \setminus B \subseteq C$ implica em $x \in C$.
    Isso contradiz o fato de que $x \notin C$.
  Portanto, $x \in B$.
Assim, se $x \in A \setminus C$ então $x \in B$.

Sumário

1 Introdução

2 Estratégias de Prova Matemática

Conclusão na forma $P \to Q$

Conclusão na forma $\neg P$

Modus Ponens e Modus Tollens

3 Indução Matemática

Modus Ponens

Modus Ponendo Ponens: a forma de afirmar afirmando.

$P \rightarrow Q$
P

$\therefore Q$

$((P \rightarrow Q) \wedge P) \rightarrow Q$

Modus Tollens

Modus Tollendo Tollens: a forma de negar negando.

$P \rightarrow Q$
$\neg Q$

$\therefore \neg P$

$((P \rightarrow Q) \wedge \neg Q) \rightarrow \neg P$

O mesmo que:

$$\begin{cases} P \subseteq Q \\ x \notin Q \therefore x \notin P \end{cases} \qquad \begin{cases} \forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \\ \exists x(\neg Q(x)) \therefore \exists x(\neg P(x)) \end{cases}$$

Conclusão na forma $\neg P$

Example

Suponha $P \rightarrow (Q \rightarrow R)$. Prove que $\neg R \rightarrow (P \rightarrow \neg Q)$.

Dados	Objetivo
$P \rightarrow (Q \rightarrow R)$	$\neg R \rightarrow (P \rightarrow \neg Q)$

Conclusão na forma $\neg P$

Example

Suponha $P \to (Q \to R)$. Prove que $\neg R \to (P \to \neg Q)$.

Dados	Objetivo
$P \to (Q \to R)$	$\cancel{\neg R \to (P \to \neg Q)}$
$\neg R$	$P \to \neg Q$

Conclusão na forma $\neg P$

Example

Suponha $P \to (Q \to R)$. Prove que $\neg R \to (P \to \neg Q)$.

Dados	Objetivo
$P \to (Q \to R)$	$\cancel{\neg R \to (P \to \neg Q)}$
$\neg R$	$P \to \neg Q$

Suponha $\neg R$.
 [prove $P \to \neg Q$]
$\therefore \neg R \to (P \to \neg Q)$

Dados	Objetivo

Conclusão na forma $\neg P$

Example

Suponha $P \to (Q \to R)$. Prove que $\neg R \to (P \to \neg Q)$.

```
Suponha ¬R.
    [prove P → ¬Q]
∴ ¬R → (P → ¬Q)
```

Dados	Objetivo
$P \to (Q \to R)$	$P \to \neg Q$
$\neg R$	

Conclusão na forma $\neg P$

Example

Suponha $P \rightarrow (Q \rightarrow R)$. Prove que $\neg R \rightarrow (P \rightarrow \neg Q)$.

Suponha $\neg R$.
 [prove $P \rightarrow \neg Q$]
$\therefore \neg R \rightarrow (P \rightarrow \neg Q)$

Dados	Objetivo
$P \rightarrow (Q \rightarrow R)$	$\cancel{P \rightarrow \neg Q}$
$\neg R$	$\neg Q$
P	

Conclusão na forma $\neg P$

Example

Suponha $P \rightarrow (Q \rightarrow R)$. Prove que $\neg R \rightarrow (P \rightarrow \neg Q)$.

Suponha $\neg R$.
  Suponha P.
   [prove $\neg Q$]
  $\therefore P \rightarrow \neg Q$.
$\therefore \neg R \rightarrow (P \rightarrow \neg Q)$

Dados	Objetivo
$P \rightarrow (Q \rightarrow R)$	$\neg Q$
$\neg R$	
P	

Conclusão na forma $\neg P$

Example

Suponha $P \to (Q \to R)$. Prove que $\neg R \to (P \to \neg Q)$.

```
Suponha ¬R.
   Suponha P.
    [prove ¬Q]
   ∴ P → ¬Q.
∴ ¬R → (P → ¬Q)
```

Dados	Objetivo
$P \to (Q \to R)$	$\neg Q$
$\neg R$	
P	
$Q \to R$	(modus ponens)

Conclusão na forma $\neg P$

Example

Suponha $P \to (Q \to R)$. Prove que $\neg R \to (P \to \neg Q)$.

Suponha $\neg R$.
  Suponha P.
    Uma vez que P e $P \to (Q \to R)$, temos que $Q \to R$.
    [prove $\neg Q$]
  $\therefore P \to \neg Q$.
$\therefore \neg R \to (P \to \neg Q)$

Conclusão na forma $\neg P$

Example

Suponha $P \rightarrow (Q \rightarrow R)$. Prove que $\neg R \rightarrow (P \rightarrow \neg Q)$.

Suponha $\neg R$.
  Suponha P.
   Uma vez que P e $P \rightarrow (Q \rightarrow R)$, temos que $Q \rightarrow R$.
   Mas então, uma vez que $\neg R$, concluimos $\neg Q$.
   (modus tollens)
  $\therefore P \rightarrow \neg Q$.
$\therefore \neg R \rightarrow (P \rightarrow \neg Q)$

Sumário

1 Introdução

2 Estratégias de Prova Matemática
Conclusão na forma $P \rightarrow Q$
Conclusão na forma $\neg P$
Modus Ponens e Modus Tollens

3 Indução Matemática

Indução matemática

Example

$$1 = 1$$

Indução matemática

Example

$1 = 1$

$1 + 3 = 4$

Indução matemática

Example

$1 = 1$
$1 + 3 = 4$
$1 + 3 + 5 = 9$

Indução matemática

Example

$1 = 1$

$1 + 3 = 4$

$1 + 3 + 5 = 9$

$1 + 3 + 5 + 7 = 16$

Indução matemática

Example

$1 = 1$

$1 + 3 = 4$

$1 + 3 + 5 = 9$

$1 + 3 + 5 + 7 = 16$

Conjectura

A soma dos n primeiros números ímpares $= n^2$

Indução matemática

Método tipicamente usado para comprovar uma dada afirmação sobre os números naturais.

Para provar algo na forma $\forall n \in \mathbb{N}\ P(n)$.

Indução matemática

Princípio da Indução Finita

Dominós

Passo de Indução Se um dominó cair, então o seguinte também cairá.

Indução matemática

Princípio da Indução Finita

Dominós

Base O primeiro dominó cairá.

Passo de Indução Se um dominó cair, então o seguinte também cairá.

Indução matemática

Para provar $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$

Base prove $P(0)$

Passo de Indução prove que $\forall n \in \mathbb{N}(P(n) \rightarrow P(n+1))$

Indução matemática

Para provar $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$

Base prove $P(0)$

Passo de Indução prove que $\forall n \in \mathbb{N}(P(n) \rightarrow P(n+1))$

Example

Indução matemática

Para provar $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$

Base prove $P(0)$

Passo de Indução prove que $\forall n \in \mathbb{N}(P(n) \rightarrow P(n+1))$

Example

A soma dos n primeiros números ímpares $= n^2$.

Indução matemática

Para provar $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$

Base prove $P(0)$

Passo de Indução prove que $\forall n \in \mathbb{N}(P(n) \rightarrow P(n+1))$

Example

$1 + 3 + 5 + 7 + ... + (2n - 1) = n^2$.

Indução matemática

Para provar $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$

Base prove $P(0)$

Passo de Indução prove que $\forall n \in \mathbb{N}(P(n) \rightarrow P(n+1))$

Example

$1 + 3 + 5 + 7 + ... + (2n - 1) = n^2$.

Base $1 = 1^2 = 1$

Indução matemática

Para provar $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$

Base prove $P(0)$

Passo de Indução prove que $\forall n \in \mathbb{N}(P(n) \rightarrow P(n+1))$

Example

$1 + 3 + 5 + 7 + ... + (2n - 1) = n^2.$

Base $1 = 1^2 = 1$

Hipótese Para um n arbitrário
$1 + 3 + 5 + 7 + ... + (2n - 1) = n^2.$

Indução matemática

Para provar $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$

Base prove $P(0)$

Passo de Indução prove que $\forall n \in \mathbb{N}(P(n) \rightarrow P(n+1))$

Example

$1 + 3 + 5 + 7 + ... + (2n - 1) = n^2.$

Base $1 = 1^2 = 1$

Hipótese Para um n arbitrário
$1 + 3 + 5 + 7 + ... + (2n - 1) = n^2.$

TESE:

$1 + 3 + 5 + 7 + ... + (2k - 1) + (2(n+1) - 1) = (n+1)^2$

Indução matemática

Para provar $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$

Base prove $P(0)$

Passo de Indução prove que $\forall n \in \mathbb{N}(P(n) \rightarrow P(n+1))$

Example

$1 + 3 + 5 + 7 + ... + (2n - 1) = n^2$.

Base $1 = 1^2 = 1$

Hipótese Para um n arbitrário

$1 + 3 + 5 + 7 + ... + (2n - 1) = n^2$.

TESE:

$1 + 3 + 5 + 7 + ... + (2k - 1) + (2(n + 1) - 1) = (n + 1)^2$

$1 + 3 + 5 + 7 + ... + (2n - 1) + (2n + 1) = (n + 1)^2$

Indução matemática

Para provar $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$

Base prove $P(0)$

Passo de Indução prove que $\forall n \in \mathbb{N}(P(n) \rightarrow P(n+1))$

Example

$1 + 3 + 5 + 7 + ... + (2n - 1) = n^2$.

Base $1 = 1^2 = 1$

Hipótese Para um n arbitrário
$1 + 3 + 5 + 7 + ... + (2n - 1) = n^2$.

TESE:

$1 + 3 + 5 + 7 + ... + (2k - 1) + (2(n + 1) - 1) = (n + 1)^2$
$1 + 3 + 5 + 7 + ... + (2n - 1) + (2n + 1) = (n + 1)^2$
$1 + 3 + 5 + 7 + ... + (2n - 1) + (2n + 1) = (n + 1)^2$

Indução matemática

Para provar $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$

Base prove $P(0)$

Passo de Indução prove que $\forall n \in \mathbb{N}(P(n) \rightarrow P(n+1))$

Example

$1 + 3 + 5 + 7 + ... + (2n - 1) = n^2.$

Base $1 = 1^2 = 1$

Hipótese Para um n arbitrário
$1 + 3 + 5 + 7 + ... + (2n - 1) = n^2.$

TESE:

$$1 + 3 + 5 + 7 + ... + (2k - 1) + (2(n + 1) - 1) = (n + 1)^2$$
$$1 + 3 + 5 + 7 + ... + (2n - 1) + (2n + 1) = (n + 1)^2$$
$$1 + 3 + 5 + 7 + ... + (2n - 1) + (2n + 1) = (n + 1)^2$$
$$n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2$$

Indução matemática

Example

Prove que para todo $n \geq 4$, $n! > 2^n$.

Indução matemática

Example

Prove que para todo $n \geq 4$, $n! > 2^n$.

Base Quando $n = 4$, temos que $n! = 24 > 16 = 2^n$.

Indução matemática

Example

Prove que para todo $n \geq 4$, $n! > 2^n$.

Base: Quando $n = 4$, temos que $n! = 24 > 16 = 2^n$.

Hipótese: Para um n arbitrário, onde $n \geq 4$, suponha que $n! > 2^n$.

Indução matemática

Example

Prove que para todo $n \geq 4$, $n! > 2^n$.

Base Quando $n = 4$, temos que $n! = 24 > 16 = 2^n$.

Hipótese Para um n arbitrário, onde $n \geq 4$, suponha que $n! > 2^n$.

TESE:

$(n+1)! = (n+1).n!$
$> (n+1)!.2^n$ (pela hipótese)
$> 2.2^n = 2^{n+1}$