Lista 1 - EDB

Nome: Gabriel Hipolito Ferreira da Silva
Número de matrícula: 10001o159

1) a) Equação característica: $y'' + y = 0 \Rightarrow r^2 + 1 = 0$

$y(0) = 0$
$y'(\pi) = 1$

$r^2 = -1 \Rightarrow r = \sqrt{-1} \Rightarrow r = \pm i$

$e^0 (C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x) = 0$

$y(0): C_1 \cdot \cancel{\cos(0)}^{\to 1} + C_2 \cancel{\operatorname{sen}(0)}^{\to 0} = 0$

$(C_1 = 0)$

$y(x) = C_1 \cos(x) + C_2 \operatorname{sen}(x)$

$y'(x) = -C_1 \operatorname{sen}(x) + C_2 \cos(x)$

$-C_1 \cancel{\operatorname{sen}(\pi)}^{\to 0} + C_2 \cancel{\cos(\pi)}^{\to -1} = 1$

$C_2(-1) = 1 \Rightarrow C_2 = -1$

$C_1 = 0$ e $C_2 = -1$, então:

$y(x) = 0 \cdot \cancel{\cos(x)}^{\to 0} + (-1) \operatorname{sen}(x)$

$y(x) = -\operatorname{sen}(x)$

b) $y'' + y = 0$ $y'(0) = 1$ $y(L) = 0$

$r^2 + 1 = 0 \Rightarrow r = \pm i$

$y = C_1 \cos(x) + C_2 \operatorname{sen}(x)$

$y'(x) = -C_1 \operatorname{sen}(x) + C_2 \cos x$

$y'(0) = -\cancel{C_1 \operatorname{sen}(0)} + C_2 \cos(0) = 1$

$C_2 = 1.$

Para $y(L) = 0$:

$$y(L) = 1\cos(L) + C_2 \operatorname{sen}(L) = 0$$
$$C_2 \operatorname{sen}(L) = \cos(L)$$
$$C_2 = -tg(L)$$

$\therefore y = -tg(L)\cos(x) + \operatorname{sen}(x)$
sem solução se $L = 0$ e se $\cos(L) \neq 0$

$y_p = Ae^{4t}$

não homogênea identidade

$y_p = y$

$y_p'' = y''$

$y(0) = 0$

$y(\pi) = 0$

métodos dos coeficientes n̄ determi

c) $y'' + 4y = \cos x$

$y = y_H + y_p$

$y_p = A\cos x + B \operatorname{sen} x$

$y_p'(x) = -A \operatorname{sen} x + B\cos x$

$y_p''(x) = -A\cos x - B\operatorname{sen} x$

Substituindo: $y'' + y = \cos(x)$

$\Rightarrow -A\cos(x) - B\operatorname{sen}(x) + 4A\cos(x) + 4B\operatorname{sen}(x) = \cos(x)$

$\Rightarrow 3A\cos(x) + 3B\operatorname{sen}(x) = \cos(x)$

$\Rightarrow 3A = 1$ e $B = 0$

$A = \frac{1}{3}$

$y_p(x) = \frac{1}{3}\cos(x)$

HOMOGÊNEA

$y'' + 4y = 0$

$r^2 + 4 = 0$

$\Rightarrow r = \pm 2i$

$y_H(x) = C_1\cos(2x) + C_2\operatorname{sen}(2x)$

$y(x) = C_1\cos 2x + C_2 \operatorname{sen} 2x + \frac{1}{3}\cos x$

tilibra

$2A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{2}$

$y(0) = C_1 \cos(2.0) + C_2 \operatorname{sen}(2.0) + \frac{1}{3}\cos(0)$

$y(0) = C_1 + \frac{1}{3} \Rightarrow C_1 = -\frac{1}{3}$

$y(\pi) = C_1 \cos(2.\pi) + C_2 \operatorname{sen}(2\pi) + \frac{1}{3}\cos(\pi)$

$y(\pi) = 0 : -\frac{1}{3} - \frac{1}{3} \Rightarrow C_1 = -\frac{2}{3}$ Não existe solução

d) $y'' + 3y = \cos(x)$ $\quad y'(0) = 0, \; y'(\pi) = 0$

$y = y_h + y_p$

Equação característica: $r^2 + 3 = 0 \Rightarrow r^2 = -3 \Rightarrow r = \pm\sqrt{3}i$

$y(x) = C_1 \cos\sqrt{3}x + C_2 \operatorname{sen}\sqrt{3}x$

$y_p = A\cos(x) + B\operatorname{sen}(x)$

$[A\cos(x) + B\operatorname{sen}(x)]'' + 3[A\cos(x) + B\operatorname{sen}(x)] = \cos(x)$

$-A\cos(x) - B\operatorname{sen}(x) + 3A\cos(x) + 3B\operatorname{sen}(x) = \cos(x)$

$B = 0, \; A = \frac{1}{2}$

$y_p = \frac{1}{2}\cos(x)$

$y = C_1 \cos\sqrt{3}x + C_2 \operatorname{sen}\sqrt{3}x \frac{1}{2}\cos(x)$

$y' = -C_2\sqrt{3}\operatorname{sen}\sqrt{3}x + C_2\sqrt{3}\cos\sqrt{3}x - \frac{1}{2}\operatorname{sen}(x)$

$y'(0)=0$:

$y' = -c_1\sqrt{3}\,sen(0) + c_2\sqrt{3}\cos(0) - \frac{1}{2} sen(0) = 0$

$\sqrt{3}c_2 = 0$

$c_2 = 0$

$y'(\pi)=0$: $y' = -c_1\sqrt{3}\,sen\,\sqrt{3}\pi = 0$

$c_1 = 0$

$y = \frac{1}{2}\cos(x)$

2) a) $y'' + \lambda y = 0$ $\quad y(0)=0 \quad y'(\pi)=0$

para $\lambda < 0$: $\lambda = -\mu^2$ $\quad y'' - \mu^2 y = 0$

Equação característica: $r^2 - \mu^2 = 0 \Rightarrow r = \pm\mu$

$y(x) = c_1 \cosh \mu x + c_2 \,senh\, \mu x$

$c_1 = c_2 = 0$

$\therefore$ $y=0$ e existem autovalores <0.

$\lambda = 0$: $\quad y(x) = c_1 x + c_2$

$y(0)=0$:

$y(x) = c_1(0) + c_2$

$c_2 = 0$

$y'(\pi)=0$: $\quad$ solução geral: $y=0$

$y' = c_1 = 0$

$c_1 = 0$ $\quad$ Não há autovalores <0.

$\lambda > 0$: $\lambda = \mu^2$, então:

$$y'' + \mu^2 y = 0$$

$$y(x) = C_1 \cos \mu x + C_2 \operatorname{sen} \mu x$$

para $y(0) = 0$: $C_1 = 0$

Para $y'(\pi) = 0$

A equação será: $y'(x) = \mu . C_1 \operatorname{sen} \mu x + \mu C_2 \cos \mu x$

$$y'(\pi) = -\mu C_1 \operatorname{sen} \mu \pi + \mu C_2 \cos \mu \pi = 0$$

$$\mu C_2 \cos \mu \pi = 0$$

$\cos \mu \pi = 0$ se:

$\mu \pi = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2} \dots \Rightarrow \mu = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2} \dots$

Para zerar a função cos:

$\mu_n = \frac{2n-1}{2}$, $n = 1, 2, \dots$

Enfim, os autovalores serão $\mu^2 = \lambda$

$$\boxed{\lambda = (\mu_n)^2 = \left(\frac{2n-1}{2}\right)^2}$$

Para $C_1 = 0$ e $C_2 \neq 0$: $y(x) = C_2 \operatorname{sen} \mu x$

$$\boxed{y_n(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{2n-1}{2}\right) x}$$

b) $y'' + \lambda y = 0 \quad y'(0) = 0 \quad y'(\pi) = 0$

Analisando $\lambda < 0$:

$$\lambda = -\mu^2$$

$y'' - \mu^2 y = 0$

Equação Característica

$$r^2 - \mu^2 = 0$$
$$r = \pm \mu$$

$y(x) = c_1 e^{\mu x} + c_2 e^{-\mu x}$

$y'(x) = \mu c_1 e^{\mu x} - \mu c_2 e^{-\mu x}$

$y'(0) = \mu c_1 e^{\mu 0} - \mu c_2 e^{0}$

$\mu c_1 - \mu c_2 = 0$

$\mu(c_1 - c_2) = 0$

Como não há $\mu = 0$, segue então: $c_1 = c_2$

$y'(\pi) = 0$

$y'(\pi) = \mu c_1 e^{\mu\pi} - \mu c_1 e^{-\mu\pi}$

$\mu c_1 (e^{\mu\pi} - e^{-\mu\pi}) = 0$

$\mu \neq 0$ e $e^{\mu\pi} - e^{\mu\pi} \neq 0$, $c_1 = 0$

$c_1 = c_2 = 0$

∴ Solução geral: $y = 0$, existem autovalores < 0

Para $\lambda=0$: solução geral $y(x)=c_1 x+c_2$
$y'=c_1 x$

$y'(0)=0$: $y'=c_1 x=0 \to c_1=0$

Logo: $y(x)=c_2$

λ é um autovalor de $c>0$.

Para $\lambda>0$: $y(x)=c_1 \cos\mu(x)+c_2 \operatorname{sen}\mu x$
$y'(x)=-\mu c_1 \operatorname{sen}\mu x+\mu c_2 \cos\mu x$

$y'(0)=0$: $y'(0)=-\mu c_1 \operatorname{sen} 0+\mu c_2 \cos 0=0$
$\mu c_2=0$
$c_2=0$

$y'(\pi)=0$: $y'(x)=-\mu c_1 \operatorname{sen}\mu x+\mu c_2 \cos\mu x$
$y'(\pi)=-\mu c_2 \operatorname{sen}\mu\pi=0$

$y(x)=c_1 \cos\mu x$

qualquer valor $\mu=m$ e $c_1\neq 0$
$\lambda_p=m^2$
$y_m=\cos m x$

c) $y'' + \lambda y = 0 \quad y'(0) = 0 \quad , y'(L) = 0$

Equação característica: $r^2 + \lambda = 0$

$r = \pm i\sqrt{\lambda}$

$\lambda = \mu^2$

$\lambda > 0$: $y(x) = c_1 \cos\sqrt{\lambda}x + c_2 \operatorname{sen}\sqrt{\lambda}x$

$y'(x) = -\sqrt{\lambda}c_1 \operatorname{sen}\sqrt{\lambda}x + \sqrt{\lambda}c_2 \cos\sqrt{\lambda}x$

$y'(0) = 0$: $y'(0) = \sqrt{\lambda}c_2 \cos 0 = 0$

$c_2 = 0$

$y'(L) = 0$: $y'(L) = -\sqrt{\lambda}c_1 \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}L) = 0$

$\operatorname{sen}\sqrt{\lambda} = 0$

$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$

$y_n = \cos\left(\frac{n\pi}{L}\right)$ ✓

3) a) $\cos 2\pi x$ "$\operatorname{sen}(x)$ e $\cos(x)$ têm período fundamental 2π."

$T = \frac{2L}{m}$

$T = \frac{2\pi}{a}$

$\cos 2\pi x$

$a = 2\pi$: $T = \frac{2\pi}{2\pi} = 1 \Rightarrow T = 1$

b) $sen\left(\frac{\pi x}{L}\right)$

$T = \frac{2\pi}{a}$ e $sen\frac{\pi x}{L}$, no qual $a = \frac{\pi}{L}$

$T = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{L}} \Rightarrow T = 2L.$

c) x^2

A função x^2 está crescendo no intervalo $[0, \infty]$, com $x_1 > x_2 \Rightarrow (x_1)^2 > (x_2)^2$,

∴, torna-se impossível encontrar T; $(x)^2 = (x+T)^2$ quando $x > 0$. Segue então que a função não é periódica.

d) $f(x) = \begin{cases} (-1)^n, & 2n-1 < x < 2n \\ 1, & 2n \leq x < 2n+1 \end{cases}$ $n = 0; \pm 1, \pm 2 \ldots$

$T > 0$ $f(x+T) = f(x)$

A função se altera em intervalos $2n-(2n-1) = 1$
A função se altera de -1 a 1.
$T = 4$, altera de -1 a 1, e $2n-1$ até $2n+1$,

$T = 4.$

4) Se a função é periódica, basta mudar os limites de 2L, para a direita na 1ª parte e 2L para a 2ª parte

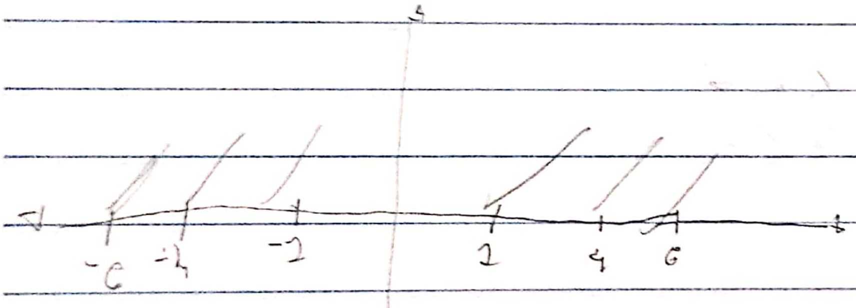
$f(x+T) = f(x)$

$t = 2L$. Vai ficar então: $f(x) = -x$

1ª $f(x) = -(x-2L) = -x+2L$ ("adicionando 2L e retirando 2L")

2ª $f(x) = -(x+2L) = -x-2L$

5) $\{-1 < x < 0;\ x+1;\ 0 < x < 1;\ x\}$



Aplicando os valores dos intervalos:

$$f(x) = \begin{cases} x+1, \text{ se } -1 < x < 0 \\ x, \text{ se } 0 < x < 1 \end{cases}$$

* Há uma linha que passa nos pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2):

$$y - y_1 = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right) \cdot (x - x_1)$$

para $1 < x < 2$, $f(x)$ é uma linha entre $(1,0)$ e $(2,1)$. Sendo a equação da mesma:

$$y - 0 = \left(\frac{1-0}{2-1}\right) \cdot (x-1)$$

$$y = x - 1$$

$f(x) = x - 1, \; 1 < x < 2$

Para $8 < x < 9$, a função $f(x)$ é uma linha entre $(8,0)$ e $(9,1)$, então:

$$y - 0 = \left(\frac{1-0}{9-8}\right)(x-8) \Rightarrow y = x - 8$$

$f(x) = x - 8, \; 8 < x < 9$

$\therefore$ $f(x) = x - 1, \; 1 < x < 2$
$f(x) = x - 8, \; 8 < x < 9$