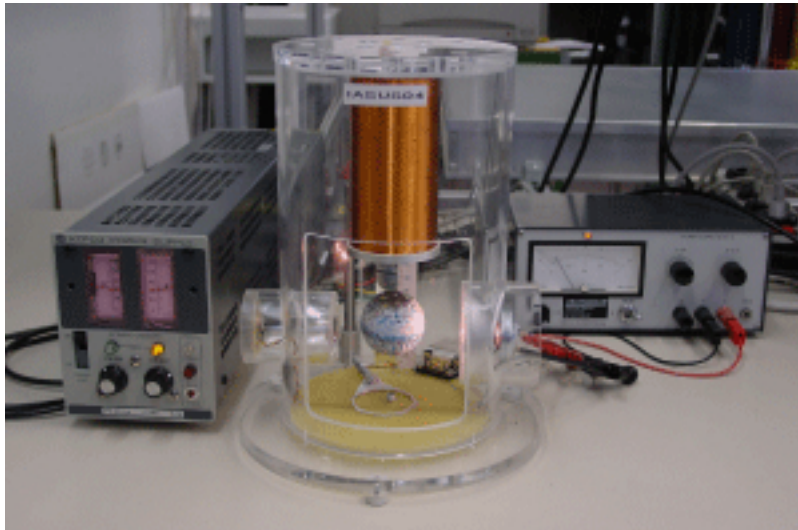


---

## Projet de Semestre

# Data driven controller design for a magnetic suspension system



**Professeur :** Dominique Bonvin

**Assistants :** Klaske van Heusden et Alireza Karimi

**Etudiant :** Vincent Reymond

Master, Semestre 2, Génie Mécanique 2007

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>4</b>
1.1	Système étudié : sustentation magnétique . . . . .	4
1.2	Démarche . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Stabilisation</b>	<b>6</b>
2.1	Calibration . . . . .	6
2.2	Modélisation . . . . .	7
2.3	Synthèse de $K_0$ . . . . .	8
2.3.1	Régulateur Proportionnel (P) . . . . .	9
2.3.2	Régulateur Propotionnel Dérivé (PD) . . . . .	10
2.4	Modèle non-linéaire . . . . .	12
2.5	Système réel . . . . .	13
<b>3</b>	<b>Méthode</b>	<b>15</b>
3.1	Théorie . . . . .	15
3.1.1	Principe . . . . .	15
3.1.2	Approche corrélative . . . . .	17
3.1.3	Algorithme . . . . .	17
3.2	Application : Simulation . . . . .	18
3.2.1	Vérification de la méthode : $M = \frac{K_0 G}{1+K_0 G}$ . . . . .	18
3.2.2	Modèle de référence $M$ . . . . .	19
3.3	Application : Système réel . . . . .	21
3.3.1	Vérification de la méthode : $M = \frac{K_0 G}{1+K_0 G}$ . . . . .	21
3.3.2	Modèle de référence $M$ . . . . .	22
3.4	Discussion des résultats . . . . .	24
<b>4</b>	<b>Conclusion</b>	<b>27</b>
<b>5</b>	<b>Annexes</b>	<b>28</b>
5.1	Calibration . . . . .	28
5.2	Modèles de référence . . . . .	29

# Table des figures

1.1	Principe de la sustentation . . . . .	5
2.1	Lieu des pôles : régulateur P . . . . .	9
2.2	Diagramme de Bode : régulateur P . . . . .	10
2.3	Lieu des pôles : régulateur PD . . . . .	11
2.4	Lieu des pôles : recombinaison pôle zéro (régulateur PD) . . .	11
2.5	Diagramme de Bode : régulateur PD . . . . .	12
2.6	Simulation : régulateur $K_0$ (la position 0 correspond au point d'équilibre) . . . . .	13
2.7	Système réel : régulateur $K_0$ (la position 0 correspond au point d'équilibre) . . . . .	13
3.1	Poursuite d'un modèle de référence . . . . .	15
3.2	Schéma d'implantation de la méthode . . . . .	16
3.3	Résultats de la méthode avec $M = \frac{K_0 G}{1+K_0 G}$ et $\beta = [1 \quad q^{-1}]$ . .	19
3.4	Résultats : $M = M_1$ et $\beta = [1 \quad q^{-1} \dots] (1 - 0.966q^{-1})$ . . . . .	20
3.5	Résultats : $M = \frac{K_0 G}{1+K_0 G}$ et $\beta = [1 \quad q^{-1}](1 - 0.966 \quad q^{-1})$ . . . . .	21
3.6	Résultats : $M = M_2$ et $\beta = [1 \quad q^{-1} \dots] (1 - 0.966q^{-1})$ . . . . .	22
3.7	Résultats : $M = M_2$ et $\beta = [1 \quad q^{-1} \dots] (1 - 0.966q^{-1})$ . . . . .	23
3.8	Résultats : $M = M_1$ et $\beta = [1 \quad q^{-1} \dots] (1 - 0.966q^{-1})$ . . . . .	24
3.9	Modèle linéaire : diagramme de Bode de $M_1$ et $H_m$ . . . . .	25
5.1	Réponses des modèles référence à un saut unité . . . . .	30
5.2	Diagramme de Bode des différents modèles référence . . . . .	30

# Chapitre 1

## Introduction

Certains systèmes mécaniques sont trop complexes pour être modélisés de manière suffisamment précise. Dès lors la synthèse d'un régulateur à l'aide de méthodes dites classiques peut s'avérer infructueuse ou du moins peu efficace. L'une des solutions est d'utiliser les données entrée-sortie du système en question : cette méthodologie porte le nom de "data driven", dont différentes méthodes ont été développées à ce jour.

Dans le cadre de ce projet, l'une d'entre elles va être étudiée et appliquée sur un système de sustentation magnétique. Elle décrit la synthèse d'un régulateur linéairement paramétrisé permettant de suivre un modèle de référence. De plus, elle est basée sur une approche corrélative et n'utilise qu'un seul set de données, elle est donc non-itérative.

Nous allons donc appliquer cette méthode à un système réel afin d'en déterminer les avantages et les limites.

### 1.1 Système étudié : sustentation magnétique

Le principe de la sustentation magnétique, illustré sur la figure 1.1, consiste à maintenir une boule métallique en lévitation. Pour cela il faut compenser la force due à la gravité,  $mg$ , par une force électromagnétique,  $F_e$ , produite à l'aide d'une bobine. La position  $x$  de la boule constitue la sortie de notre système alors que le courant  $i$  que nous faisons passer dans la bobine représente la commande.

Ce principe de lévitation peut se traduire sous forme mathématique par :

$$\sum F = mg + F_e = 0 \quad F_e \text{ la force électromagnétique} \quad (1.1)$$

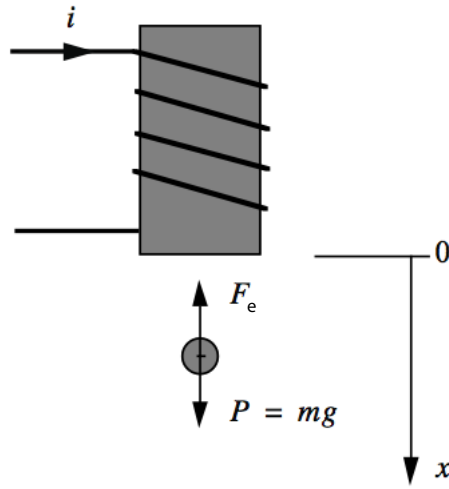


FIG. 1.1 – Principe de la sustentation

L'expression de la force électromagnétique est la suivante :

$$F_e = \frac{1}{2} \frac{\partial L(x)}{\partial x} i^2 \quad (1.2)$$

où  $L(x)$  représente l'inductance de la bobine dont nous ne connaissons pas la valeur.

Nous pouvons facilement nous rendre compte que le système ne sera pas stable en boucle ouverte. En effet, si nous éloignons la sphère de sa position d'équilibre, elle va soit tomber, soit être aimantée par la bobine.

## 1.2 Démarche

Ce projet est réalisé en deux étapes principales. La première consiste à synthétiser un régulateur permettant de stabiliser le système en boucle fermée. En effet, comme nous l'avons expliqué ci-dessus, nous savons qu'il est instable en boucle ouverte. Nous allons donc procéder à la modélisation de la sustentation magnétique dont nous établirons notamment le modèle linéaire afin de pouvoir utiliser une méthode classique basée sur le lieu des pôles.

Une fois ce premier objectif atteint, nous passerons à la deuxième partie dans laquelle nous étudierons la méthode et l'appliquerons aux modèles linéaire et non-linéaire ainsi qu'au système réel.

# Chapitre 2

## Stabilisation de la sustentation magnétique

Comme mentionné dans l'introduction, la méthode nécessite les données entrée-sortie du système. Il est donc nécessaire que nous synthétisions un premier régulateur permettant de stabiliser la sustentation magnétique. Mais, avant toute chose, il nous faut calibrer le système afin de pouvoir travailler correctement avec ce dernier.

### 2.1 Calibration

Afin de déterminer la distance séparant la sphère de la bobine, nous disposons d'un capteur d'intensité lumineuse. Le capteur nous restitue une mesure de tension, il nous faut donc déterminer la relation entre les volts donnés par le capteur et la position. A l'aide d'un bras mécanique, nous avons placé la sphère à différentes distances de la bobine et relevé les valeurs de tension transmises par le capteur. Nous avons ensuite réalisé une approximation polynomiale du second ordre avec les données récoltées<sup>1</sup>.

Comme examiné plus haut, nous ne connaissons pas la valeur de  $L(x)$  et par conséquent celle de  $\frac{1}{2} \frac{\partial L(x)}{\partial x}$  non plus. Pour la déterminer, nous avons placé la sphère à différentes hauteurs (toujours à l'aide du bras mécanique) et nous faisons varier le courant jusqu'à trouver le point de lévitation. Ceci nous permet de trouver une relation entre le courant  $i$  et la position  $x$ . En combinant les équations 1.1 et 1.2, nous obtenons :

$$\frac{1}{2} \frac{\partial L(x)}{\partial x} = -\frac{mg}{i^2} \quad (2.1)$$

---

<sup>1</sup>les données numériques sont mentionnées en annexe

Ce résultat associé à la relation que nous venons de déterminer entre  $i$  et  $x$  sont utilisés afin de réaliser une approximation polynomiale du 2<sup>ème</sup> ordre. Nous pouvons donc à présent exprimer le terme  $\frac{1}{2} \frac{\partial L(x)}{\partial x}$  ainsi :

$$\frac{1}{2} \frac{\partial L(x)}{\partial x} \approx -(a_2 x^2 + a_1 x + a_0) \quad (2.2)$$

Cette approximation<sup>2</sup> sera notamment reprise dans la section suivante lors de la linéarisation.

Le matériel à disposition pour mesurer la hauteur séparant la sphère du fond de la bobine n'était pas très performant. La calibration n'était donc pas extrêmement précise. Cependant elle était suffisante pour nous permettre de poursuivre le projet.

## 2.2 Modélisation

Nous devons en premier lieu déterminer un régulateur  $K_0$  qui permette de stabiliser la sustentation magnétique. Nous allons utiliser une technique standard pour le synthétiser c'est pourquoi il nous faut un modèle linéaire de notre système réel afin de pouvoir déterminer une fonction de transfert entre le courant  $i$  et la position  $x$ .

Pour commencer, nous allons écrire l'équation du mouvement :

$$m\ddot{x} = mg + F_e = mg + \frac{1}{2} \frac{\partial L(x)}{\partial x} i^2 \quad (2.3)$$

Le terme  $i^2$  composant la force électromagnétique rend cette expression non linéaire. Nous devons donc procéder à une linéarisation<sup>3</sup> de  $F_e$  autour du point de fonctionnement  $(x_0, i_0)$  :

$$F_e(x, i) \approx F_e(x_0, i_0) + \left. \frac{\partial F_e}{\partial x} \right|_{(x_0, y_0)} (x - x_0) + \left. \frac{\partial F_e}{\partial i} \right|_{(x_0, y_0)} (i - i_0) \quad (2.4)$$

En combinant cette équation avec l'approximation polynomiale 2.2, nous obtenons :

$$\begin{aligned} F_e(x, i) \approx & -(a_2 x_0^2 + a_1 x_0 + a_0) i_0^2 - (2a_2 x_0 + a_1) i_0^2 (x - x_0) \\ & - 2(a_2 x_0^2 + a_1 x_0 + a_0) i_0 (i - i_0) \end{aligned} \quad (2.5)$$

<sup>2</sup>les données numériques sont fournies en annexes

<sup>3</sup>le lecteur peut consulter le chapitre 3.5 de [2] pour une explication détaillée de la linéarisation

Le point de fonctionnement devant satisfaire l'expression 2.3, nous avons :

$$m\ddot{x}_0 = mg - (a_2x_0^2 + a_1x_0 + a_0)i_0^2 \quad (2.6)$$

Cette égalité, associée à 2.5, nous donne l'équation différentielle linéaire :

$$m\ddot{\tilde{x}} \approx -(2a_2x_0 + a_1)i_0^2\tilde{x} - 2(a_2x_0^2 + a_1x_0 + a_0)i_0\tilde{i} \quad (2.7)$$

où  $\tilde{x} = x - x_0$  et  $\tilde{i} = i - i_0$ .

Pour un point de fonctionnement fixe, cette équation est stationnaire. Ainsi nous pouvons définir la commande a priori  $i_0$  nécessaire pour obtenir une position d'équilibre  $x_0$  en posant  $\ddot{\tilde{x}}_0 = 0$  dans l'équation 2.6 :

$$i_0 = \pm \sqrt{\frac{mg}{a_2x_0^2 + a_1x_0 + a_0}} \quad (2.8)$$

Finalement, l'équation 2.7 nous conduit à la fonction de transfert suivante reliant  $i$  à  $x$  :

$$G(s) = \frac{\tilde{X}(s)}{\tilde{I}(s)} = -\frac{2(a_2x_0^2 + a_1x_0 + a_0)i_0}{ms^2 + (2a_2x_0 + a_1)i_0^2} \quad (2.9)$$

Nous avons ainsi obtenu un modèle linéaire de la sustentation magnétique, nous allons donc pouvoir appliquer une méthode standard afin de synthétiser un régulateur.

## 2.3 Synthèse d'un régulateur dans le lieu des pôles

La fonction de transfert discrète en boucle fermée de notre modèle linéarisé se formule de la façon suivante :

$$H(z) = \frac{K(z)G(z)}{1 + K(z)G(z)} \quad (2.10)$$

où  $K(z)$  est le régulateur que nous désirons synthétiser et  $G(z)$  représente la fonction de transfert discrète de notre modèle<sup>4</sup>. Comme le titre l'indique nous allons observer le lieu des pôles<sup>5</sup> afin de déterminer quel type de régulateur nous allons choisir pour stabiliser le système.

<sup>4</sup> $G(z)$  a été obtenue en discrétisant  $G(s)$  obtenue dans l'expression 2.9

<sup>5</sup>cette méthode est décrite dans le chapitre 9 de la référence [4]



### 2.3.1 Régulateur Proportionnel (P)

Pour commencer, nous allons étudier le lieu des pôles obtenu lorsque  $K_0$  est un régulateur proportionnel. La fonction de transfert d'un tel régulateur est simplement  $K(z) = K_p$ .

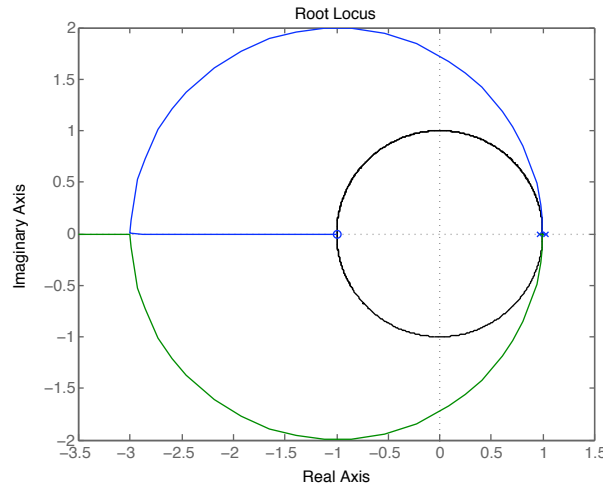


FIG. 2.1 – Lieu des pôles : régulateur P

Sur la figure 2.1, nous observons un zéro en  $-1$ , un pôle stable en  $0.966$  et un pôle instable en  $1.034$ . Nous pouvons constater qu'il ne sera pas possible de stabiliser le système avec un tel régulateur, étant donné que le lieu des pôles passe à l'extérieur du cercle unité.

Si nous traçons à présent le diagramme de Bode de notre modèle bouclé (figure 2.2), nous nous rendons bien compte que le problème se situe au niveau de la phase. En effet, celle-ci se situe à  $-180^\circ$ , ce qui signifie qu'il n'y a aucune marge.

Nous pouvons écarter d'emblée l'idée d'introduire un terme intégrateur dans notre contrôleur. En effet, ceci aurait pour effet d'abaisser la phase qui est déjà critique. Pour remédier à ce problème, il faudrait donc inclure un terme dérivé à notre régulateur, ce qui nous permettrait d'obtenir une certaine marge de phase et donc de stabiliser notre modèle linéaire.

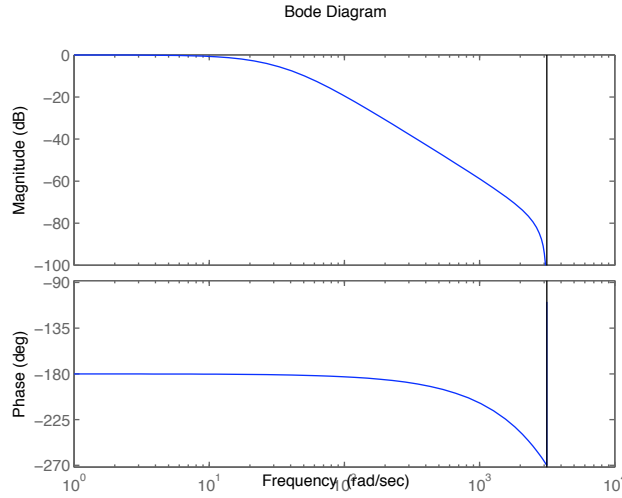


FIG. 2.2 – Diagramme de Bode : régulateur P

### 2.3.2 Régulateur Propotionnel Dérivé (PD)

Comme nous l'avons suggéré dans le paragraphe précédent, nous allons nous intéresser à un régulateur proportionnel dérivé. Sa fonction de transfert, obtenue à l'aide de la discrétisation par la 2<sup>ème</sup> méthode d'Euler, se formule ainsi :

$$K(z) = K_p \left[ 1 + \frac{T_d}{h} \frac{z - 1}{z} \right] \quad (2.11)$$

où  $T_d$  représente le terme dérivé et  $h$  la période d'échantillonnage.

En retravaillant l'expression 2.11, nous pouvons mettre en évidence une structure avec un zéro :

$$K(z) = K_p \left( \frac{h + T_d}{h} \right) \frac{z - \frac{T_d}{h+T_d}}{z} \quad (2.12)$$

Si nous plaçons ce zéro entre l'origine et le pôle stable de  $G(z)$  nous remarquons que le lieu des pôles est déformé et déplacé sur la gauche du graphique (figure 2.3). Cette configuration nous permet ainsi de déterminer un régulateur permettant de stabiliser le système.

Cependant en choisissant  $T_d$  de manière à ce que le zéro de l'expression 2.12 soit égal au pôle stable de  $G(z)$ , c'est à dire  $\frac{T_d}{h+T_d} = 0.966$ , une recombinaison aura lieu, c'est à dire une simplification pôle-zéro. Le lieu des pôles qui

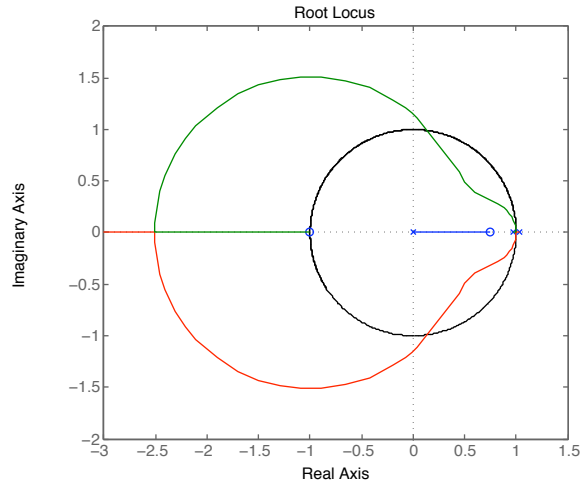


FIG. 2.3 – Lieu des pôles : régulateur PD

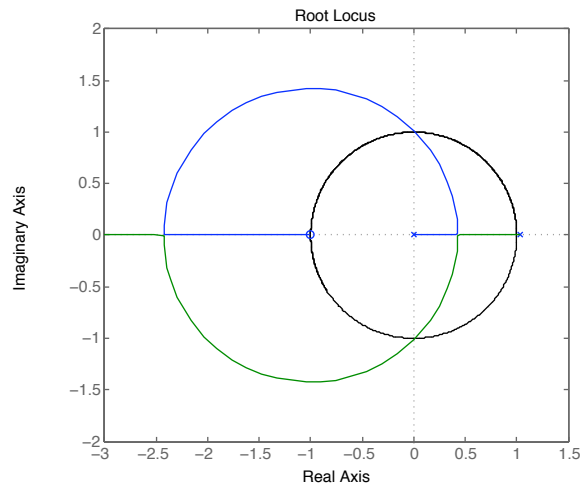


FIG. 2.4 – Lieu des pôles : recombinaison pôle zéro (régulateur PD)

en résulte sera d'autant plus intéressant, permettant notamment de choisir des pôles réels (figure 2.4).

Si nous observons le diagramme de Bode (figure 2.5) obtenu en implémentant un régulateur PD sur notre modèle, nous pouvons remarquer que le problème lié à la phase est à présent résolu. En effet, nous avons obtenu une marge de phase importante.

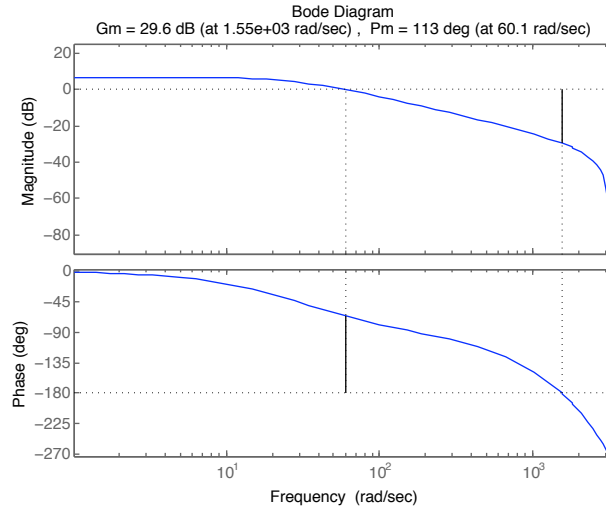


FIG. 2.5 – Diagramme de Bode : régulateur PD

Le régulateur synthétisé dans cette section sera désormais désigné par  $K_0$ . Les valeurs numériques retenues sont  $K_p = 374$  et  $Td = 0.03$ , ce sont celles qui ont permis d'obtenir le diagramme de Bode ci-dessus. Sur la figure 2.6, nous pouvons observer la réponse à un signal carré. Nous remarquons que le statisme est relativement important, cependant le modèle est stable : notre but est donc atteint.

## 2.4 Modèle non-linéaire

Le modèle linéaire résulte d'une approximation du modèle non-linéaire. Nous ne sommes donc pas certains que ce dernier soit stabilisé par le régulateur  $K_0$  déterminé dans le lieu des pôles. Nous allons donc l'implémenter sur le modèle non-linéaire obtenu dans l'équation 2.3 afin de vérifier le comportement.

En examinant la figure 2.6, nous constatons que la stabilité est atteinte. Le statisme est toujours important et nous pouvons observer l'effet de la non-linéarité. Celle-ci se manifeste par un statisme différent selon que la consigne soit positive ou négative, alors qu'il est le même pour le modèle linéaire.

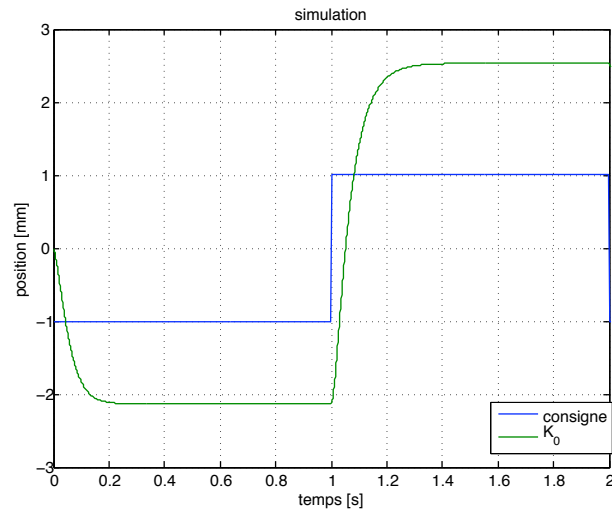


FIG. 2.6 – Simulation : régulateur  $K_0$  (la position 0 correspond au point d'équilibre)

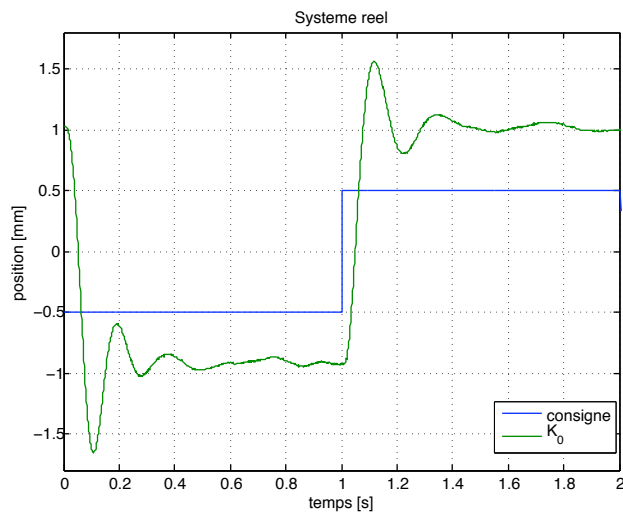


FIG. 2.7 – Système réel : régulateur  $K_0$  (la position 0 correspond au point d'équilibre)

## 2.5 Système réel

Le modèle non-linéaire étant également une simplification du système réel, il est possible que le régulateur  $K_0$  ne le stabilise pas. En effet, les mouvements

hors axes ainsi que les imprécisions dues au système de mesure ne peuvent pas être modélisés. Ces différences ne sont pas forcément négligeables et donc le régulateur pourrait ne pas être adapté. Cependant la marge de phase que nous avons obtenue dans la sous-section 2.3.2 devrait garantir une robustesse suffisamment importante.

Sur la figure 2.7, nous pouvons constater que le système est stable. Le statisme et l'overshoot sont importants. Cependant, le but de cette partie était de stabiliser la sustentation magnétique afin de pouvoir appliquer une méthode utilisant les entrées et sorties. Cet objectif est donc atteint. De plus nous avons pu acquérir une certaine connaissance du système et déterminer certains points sensibles, ce qui s'avérera utile par la suite.

# Chapitre 3

## Méthode

### 3.1 Théorie

#### 3.1.1 Principe

La méthode [1] que nous allons appliquer permet de synthétiser un régulateur en utilisant les données entrée-sortie d'un système. Comme illustré sur la figure 3.1, le but est de déterminer un régulateur  $K(\rho)$  permettant de poursuivre un modèle de référence.

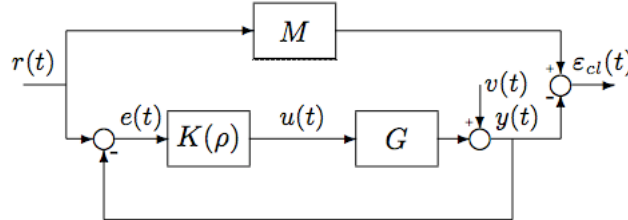


FIG. 3.1 – Poursuite d'un modèle de référence

Le critère de contrôle du modèle de référence se formule ainsi :

$$J_{mr}(\rho) = \left\| M - \frac{K(\rho)G}{1 + K(\rho)G} \right\|_2^2 \quad (3.1)$$

où  $M$  représente le modèle de référence,  $G$  la fonction de transfert de notre système et  $K(\rho)$  le régulateur que nous voulons déterminer.

Le modèle de référence peut se formuler ainsi :

$$M = \frac{K^*G}{1 + K^*G} \quad (3.2)$$

Dans cette équation  $K^*$  représente le régulateur idéal permettant à notre système de suivre exactement le modèle de référence.

Le critère de contrôle  $J_{mr}(\rho)$  n'est pas linéaire par rapport à  $K(\rho)$ . Pour le rendre linéaire, nous faisons l'approximation suivante :

$$\frac{1}{1 + K(\rho)G} \approx \frac{1}{1 + K^*G} = (1 - M) \quad (3.3)$$

Ainsi notre nouveau critère linéaire prend la forme :

$$J(\rho) = \left\| [M - K(\rho)G(1 - M)] \right\|_2^2 \quad (3.4)$$

Ce critère est donc linéaire par rapport à  $K(\rho)$  et donc en choisissant un régulateur linéairement paramétrisé, il sera également linéaire en  $\rho$ . Rappelons qu'un régulateur linéairement paramétrisé s'écrit ainsi :

$$K(\rho) = \beta(q^{-1}\rho) \quad (3.5)$$

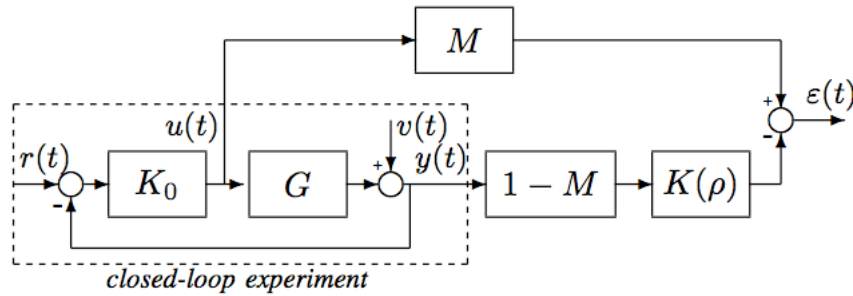


FIG. 3.2 – Schéma d'implantation de la méthode

Le schéma 3.2 illustre la démarche utilisée.  $K_0$  représente le régulateur PD synthétisé dans la section 2.3,  $G$  est la fonction de transfert de notre système,  $r(t)$  constitue l'entrée,  $u(t)$  la commande,  $y(t)$  la sortie et  $v(t)$  le bruit. L'erreur de sortie peut se mettre sous la forme :

$$\varepsilon(\rho, t) = Mu(t) - (1 - M)K(\rho)y(t) \quad (3.6)$$



### 3.1.2 Approche corrélative

En étudiant le schéma 3.2, nous nous rendons compte que pour le régulateur idéal  $K^*$ , l'erreur de sortie  $\varepsilon(\rho, t)$  et l'entrée  $r(t)$  ne doivent pas être corrélées. C'est pourquoi nous allons utiliser une approche corrélative. Nous allons donc évaluer le critère linéaire  $J(\rho)$ , à l'aide du critère de corrélation qui se définit ainsi :

$$J_c(\rho) = f^T(\rho)f(\rho) \quad (3.7)$$

$J_c$  représente donc la norme de la fonction de corrélation  $f$  qui elle-même peut être estimée, pour un nombre  $N$  de données, de la manière suivante :

$$f(\rho) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \zeta_w \varepsilon(\rho, t) \quad (3.8)$$

$\zeta_w(t)$  constitue un vecteur de variables instrumentales tel que :

$$\zeta_w = [r_w(t+l), r_w(t+l-1), \dots, u_w(t), u_w(t-1), \dots, u_w(t-l)]^T \quad (3.9)$$

Avec  $r_w(t+l) = W(q^{-1})r(t)$  et  $l$  un entier suffisamment grand.

$W$  est un filtre assurant que  $J_c$  soit une bonne approximation de notre critère de départ  $J_r m$ .

$W$  prend la forme suivante<sup>1</sup> :

$$W(e^{-j\omega}) = \frac{1 - M(e^{-j\omega})}{\Phi_{ur}(\omega)} \quad (3.10)$$

$\Phi_{ur}$  représente la densité interspectrale entre la commande  $u(t)$  et l'entrée  $r(t)$ .

### 3.1.3 Algorithme

Pour appliquer cette méthode, il faudra définir un modèle de référence  $M$ , ainsi que la structure  $\beta$  du régulateur linéairement paramétrisé (voir formule 3.5).

L'erreur de signal 3.6 peut être réécrite ainsi :

$$\varepsilon(\rho, t) = u_M(t) - \phi^T(t)\rho \quad (3.11)$$

---

<sup>1</sup>le lecteur intéressé trouvera le développement permettant de déterminer  $W$  en consultant la référence [1]

où  $u_M(t) = M(q^{-1})u(t)$  et  $\phi(t) = \beta(q^{-1})(1 - M(q^{-1}))y(t)$ .

En utilisant les expressions 3.8 et 3.11, nous pouvons estimer la fonction de corrélation par :

$$f_N = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \zeta_w(t)[u_M(t) - \phi^T(t)\rho] \quad (3.12)$$

Le paramètre  $\rho$  qui minimise le critère de corrélation 3.7 peut être obtenu par la méthode des moindres carrés :

$$\rho = (Q^T Q)^{-1} Q^T Z \quad (3.13)$$

où  $Q = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \zeta_w(t)\phi^T(t)$  et  $Z = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \zeta_w(t)u_M(t)$ , de plus rappelons que  $Q^T Q$  ne doit pas être singulière.

Nous avons donc tout ce qu'il nous faut pour implémenter cette méthode et pouvoir l'appliquer à nos modèles linéaires et non linéaires ainsi qu'à notre système réel.

## 3.2 Application : Simulation

### 3.2.1 Vérification de la méthode : $M = \frac{K_0 G}{1 + K_0 G}$

L'algorithme faisant l'objet de la section précédente a été programmé sur Matlab. Afin de vérifier si la programmation a été effectuée correctement, nous allons utiliser  $\frac{K_0 G}{1 + K_0 G}$  comme modèle de référence. En effet, en donnant à  $\beta$  la structure d'un régulateur PD, la méthode devrait permettre de trouver  $K(\rho) = K_0$  pour le modèle linéaire.  $\beta$  aura donc la forme suivante :

$$\beta = [1 \quad q^{-1}] \quad (3.14)$$

Avec des données non-bruitées, la méthode nous permet de retrouver exactement le même régulateur alors qu'avec des données bruitées une très légère différence existe. Ceci nous permet de tirer deux enseignements de cette expérience :

1. la méthode est correctement programmée car pour des données non-bruitées elle nous a permis de retrouver le même régulateur
2. le bruit<sup>2</sup> empêche de trouver le régulateur optimal, cependant la méthode permet tout de même de bien s'en approcher

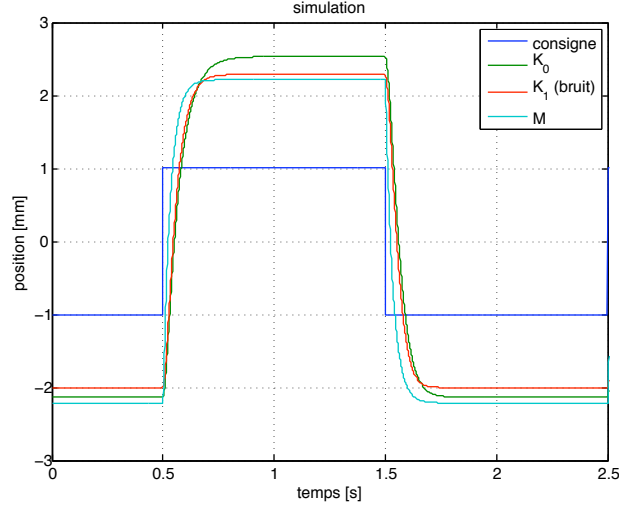


FIG. 3.3 – Résultats de la méthode avec  $M = \frac{K_0 G}{1 + K_0 G}$  et  $\beta = [1 \quad q^{-1}]$

En ce qui concerne le modèle non-linéaire, la méthode ne devrait pas trouver le même régulateur étant donné que  $G$  provient du modèle linéaire. Ainsi les régulateurs synthétisés à l'aide de la méthode sont différents de  $K_0$ , que ce soit avec des données bruitées ou non. Cependant ils permettent tout de même de stabiliser le système.

### 3.2.2 Modèle de référence $M$

Le modèle de référence peut être choisi de manière à remplir des spécifications d'amortissement ou atteindre certaines performances en régime permanent. De façon générale, le choix<sup>3</sup> peut se résumer ainsi :

- fonction de transfert du 2<sup>ème</sup> ordre
- deux pôles conjugués déterminant l'amortissement
- un zéro  $(z + 1)$ <sup>4</sup>
- un gain statique de valeur 1

<sup>2</sup>le bruit injecté dans le système représentait environ un dixième de l'amplitude d'entrée

<sup>3</sup>des explications sur le choix d'un modèle de référence se trouve dans la référence [4]

<sup>4</sup>ce zéro est présent dans  $G$ , c'est pourquoi nous l'avons rajouté, nous avons d'ailleurs observé une légère amélioration des résultats

En ce qui concerne la structure de  $\beta$ , nous lui avons laissé plus de degrés de liberté :

$$\beta = [1 \quad q^{-2} \quad q^{-3} \quad q^{-4} \quad q^{-5} \quad \dots] \quad (3.15)$$

Que ce soit pour les modèles linéaire ou non-linéaire, les régulateurs obtenus ne permettaient pas de stabiliser le système.

Comme nous l'avons vu dans la section 2.3, la marge de phase est critique dans notre problème. Pour améliorer cet aspect nous avons imposé un zéro dans notre régulateur. Ce dernier nous a permis d'obtenir une certaine marge de phase. Nous allons donc utiliser cette information pour modifier la structure  $\beta$ . Nous ajoutons à 3.15 une partie fixe contenant le même zéro que nous avons déterminé pour le régulateur PD.  $\beta$  prend donc la forme suivante :

$$\beta = [1 \quad q^{-2} \quad q^{-3} \quad q^{-4} \quad q^{-5} \quad \dots](1 - 0.966 q^{-1}) \quad (3.16)$$

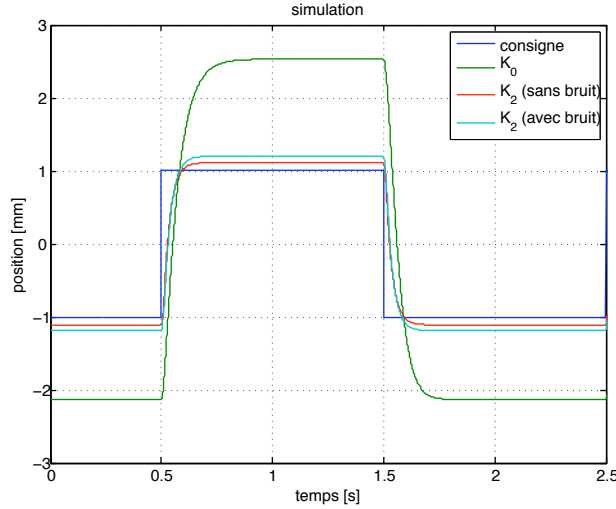


FIG. 3.4 – Résultats :  $M = M_1$  et  $\beta = [1 \quad q^{-1} \quad \dots] (1 - 0.966q^{-1})$

Grâce à cette modification, les régulateurs déterminés à l'aide de la méthode stabilisent notre système.

Nous remarquons une nette amélioration du comportement sur la figure 3.4, cependant nous ne sommes pas parvenus à éliminer entièrement le statisme. En fait nous constatons que le nouveau régulateur ne permet pas à

notre système de suivre le modèle de référence.

Différentes structures de  $\beta$  et de  $M$  ont été testées. Malgré cela, aucune n'a permis de suivre de manière plus précise le modèle de référence. Une interprétation de ce problème sera discutée dans la dernière section de ce chapitre.

**Remarque :** les modèles de référence ne sont pas représentés sur les graphiques afin de ne pas les surcharger. Cependant, les différents modèles référence utilisés dans ce rapport sont représentés en annexes.

### 3.3 Application : Système réel

Dans cette partie, nous allons exposer les résultats obtenus suite à l'application de la méthode décrite plus haut. Nous allons entreprendre la même démarche que celle utilisée en simulation.

#### 3.3.1 Vérification de la méthode : $M = \frac{K_0 G}{1+K_0 G}$

Comme pour le modèle non-linéaire, nous nous attendons à trouver un contrôleur différent de  $K_0$ . En utilisant la structure 3.15, le régulateur issu de la méthode ne nous permet pas de stabiliser le système.

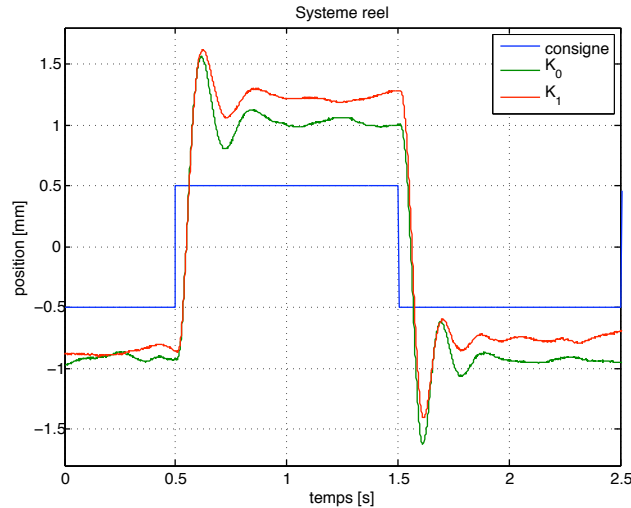


FIG. 3.5 – Résultats :  $M = \frac{K_0 G}{1+K_0 G}$  et  $\beta = [1 \quad q^{-1}](1 - 0.966 q^{-1})$

Nous pouvons émettre deux hypothèses à ce sujet :

- le système réel est très différent du modèle linéaire avec lequel nous avons déterminé  $K_0$
- le bruit est très important sur le système réel et comme nous l'avons vu en simulation (sous-section 3.2.1) il empêche d'atteindre le paramètre optimal

Nous pouvons penser que l'addition de ces deux phénomènes est l'origine de l'échec de la méthode.

Nous ajoutons donc la partie fixe ( $1 - 0.966 q^{-1}$ ) et trouvons à présent un régulateur qui stabilise le système (figure 3.5).

### 3.3.2 Modèle de référence $M$

Dans la sous-section 3.2.2 nous avons expliqué quels aspects nous regardions pour choisir notre modèle de référence.

Lors de l'application de la méthode en simulation, nous avons récolté des résultats pour une multitude de modèles référence.

En ce qui concerne le système réel, très peu de modèles de référence permettaient à l'algorithme d'aboutir à un régulateur stabilisant le système. Entre autres, il ne fallait pas trop en demander en termes d'amortissement.

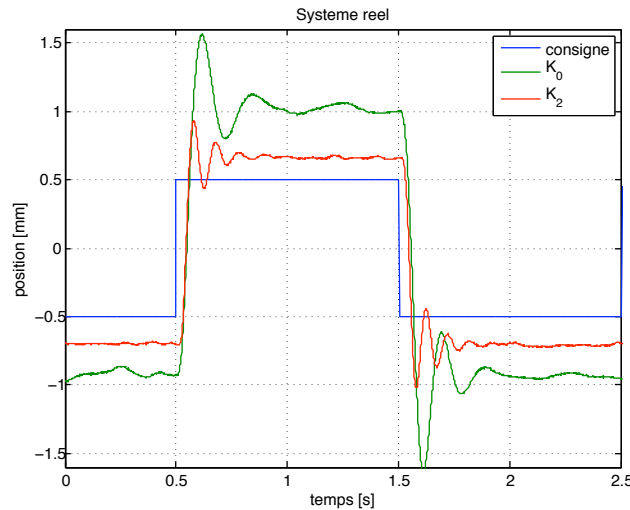


FIG. 3.6 – Résultats :  $M = M_2$  et  $\beta = [1 q^{-1} \dots] (1 - 0.966q^{-1})$

Nous constatons tout de même sur la figure 3.6 que le nouveau régulateur est meilleur que  $K_0$  : l'overshoot est inférieur, le statisme a également diminué et l'amortissement est meilleur.

Entre le moment où nous avons récolté les données et celui où nous avons appliqué la méthode, un certain nombre d'événements se sont déroulés :

- l'ampoule du capteur d'intensité lumineuse a dû être remplacée
- la sustentation magnétique a été déplacée
- la sphère métallique a été déformée

Ces différents événements ont en quelque sorte changé la configuration du système. Le régulateur  $K_0$  était d'ailleurs moins performant que lors de sa synthèse. Nous avons donc prélevé un nouvel échantillon de données afin que celles-ci contiennent les différentes modifications subies par le système.

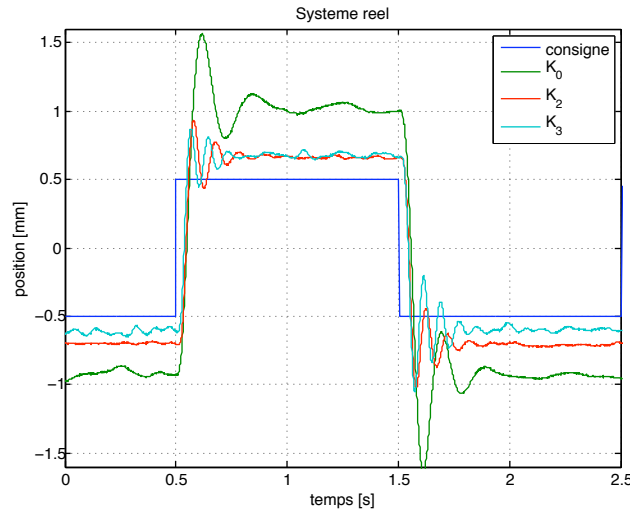


FIG. 3.7 – Résultats :  $M = M_2$  et  $\beta = [1 \text{ } q^{-1} \dots] (1 - 0.966q^{-1})$

Nous avons ensuite appliqué la méthode à ce nouveau set d'entrée-sortie. Cette démarche nous a permis de pouvoir synthétiser de nouveaux régulateurs à l'aide de modèles de référence différents. Cependant l'amélioration n'est pas très conséquente.

Sur le graphique 3.7, nous pouvons voir une légère amélioration au niveau du statisme. En contrepartie les oscillations semblent plus importantes.

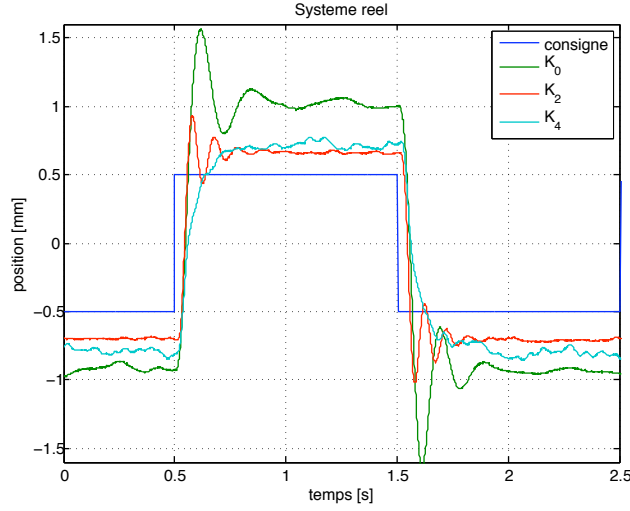


FIG. 3.8 – Résultats :  $M = M_1$  et  $\beta = [1 \ q^{-1} \ \dots]$  ( $1 - 0.966q^{-1}$ )

En ce qui concerne la figure 3.8, nous obtenons une réponse plus amortie mais avec un statisme plus important. Ce résultat a été atteint avec un modèle de référence ayant des spécifications d'amortissement plus élevées que pour le cas précédent.

### 3.4 Discussion des résultats

Comme nous l'avons mentionné plus haut, les régulateurs synthétisés ne permettaient pas de suivre de manière précise le modèle de référence. Prenons un exemple illustrant ce phénomène :

- Application sur le modèle linéaire
- modèle de référence :  $M_1$ <sup>5</sup>
- Structure du régulateur : 3.16

Sur la figure 5.2 sont représentés les diagrammes de Bode de  $M_1$  et du modèle linéaire contrôlé par le régulateur découlant de la méthode (représenté par  $H_m$  dans la figure ). Nous pouvons constater que la principale différence se trouve en basse fréquence : l'amplitude du système linéarisé ne se trouve pas à zéro, ce qui a pour conséquence le statisme que nous avons pu observer sur les différents graphiques. Nous avons donc essayé d'utiliser un signal d'excitation ayant une fréquence plus basse en espérant qu'il en résulte une

<sup>5</sup>nous rappelons que des informations sur  $M_1$  se trouvent en annexes



amélioration des résultats. Malheureusement, cette approche n'a pas eu le succès escompté, ne permettant pas de résoudre le problème.

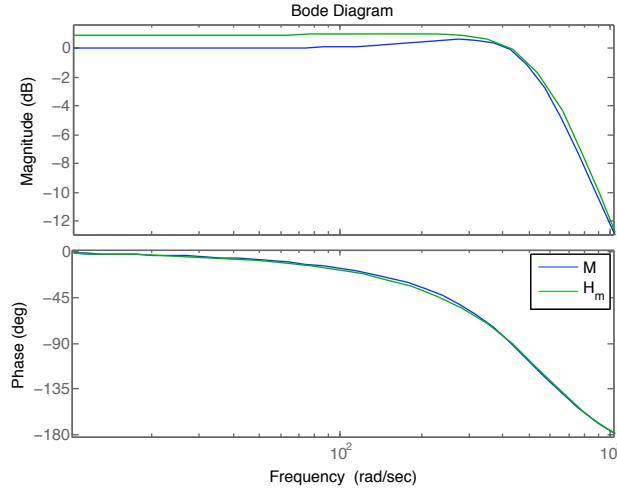


FIG. 3.9 – Modèle linéaire : diagramme de Bode de  $M_1$  et  $H_m$

Une autre hypothèse serait que le problème provienne du terme  $W$  censé assurer que le critère de corrélation  $J_c$  soit une bonne approximation du critère du modèle de référence  $J_r m$ . En effet, si nous reprenons l'exemple du paragraphe précédent, la méthode nous donne une valeur  $J_c = 4.12 \cdot 10^{-9}$  alors que si nous calculons le critère du modèle de référence<sup>6</sup>, nous trouvons  $J_{rm} = 0.0348$ . Nous pouvons donc mettre en doute l'efficacité de  $W$ . Ainsi si ce filtre est mal dimensionné, il pourrait apporter une contribution non négligeable à l'écart entre le modèle de référence et notre système bouclé. Lors de ce projet nous avons utilisé une fonction prédéfinie afin d'estimer la corrélation interspectrale  $\phi_{ur}$  qui apparait dans l'équation 3.10 qui définit  $W$ . Il faudrait peut être vérifier si cette fonction est efficace.

Une autre raison possible pour laquelle nous ne sommes pas parvenus à suivre plus rigoureusement le modèle de référence, est que nous n'avons pas réussi à ajouter un terme fixe intégrateur. Celui-ci aurait certainement permis d'éliminer le statisme et ramener la magnitude à zéro pour les basses fréquences. Le système bouclé aurait donc été plus proche du modèle de référence. Cependant, comme nous l'avons décrit dans la section 2.3, ce terme

<sup>6</sup>nous pouvons calculer ce critère car l'exemple traite du modèle linéaire dont nous connaissons  $G$

intégrateur met en péril la stabilité du système, ce qui explique en partie l'échec de cette tentative.

Finalement les perturbations étaient assez importantes sur la sustentation magnétique : les mouvements hors axe, la rotation de la sphère sur elle-même ainsi que la mauvaise qualité du capteur sont autant d'éléments qui ont contribué à introduire du bruit dans les données. Or comme nous l'avons vu dans ce chapitre, le bruit empêche d'atteindre le paramètre optimal lors de la minimisation du critère de corrélation. Les résultats mitigés obtenus sur le système réel peuvent peut-être s'expliquer par la présence d'un bruit important.

# Chapitre 4

## Conclusion

Notre premier objectif était de synthétiser un régulateur en se basant sur le lieu des pôles. Une fois le système stabilisé, nous avons appliqué une méthode "data driven" dans le but de déterminer un nouveau contrôleur permettant la poursuite d'un modèle de référence.

Bien que les régulateurs synthétisés à l'aide de la méthodologie étudiée dans ce projet soient plus performants que le premier, les résultats sont tout de même mitigés. En effet, aucun d'entre eux n'a permis à notre système d'atteindre un gain statique proche de 1 et donc de suivre de manière précise le modèle de référence.

Comme nous en avons parlé dans la discussion des résultats, il faudrait vérifier l'efficacité du filtre  $W$ . En effet, le critère de corrélation ne semble pas être une bonne approximation du critère du modèle de référence. Or ceci est le rôle de  $W$ .

Finalement, en ce qui concerne le système expérimental, il faudrait changer le capteur d'intensité lumineuse permettant de mesurer la position. Ce dernier ne semble pas adapté à cette application. Il paraît notamment particulièrement sensible aux petits mouvements hors axes qui sont interprétés comme des variations de hauteur.

Lausanne, le 27 juin 2007

Vincent Reymond

# Chapitre 5

## Annexes

### 5.1 Calibration

$$U \rightarrow x$$

$x$  : distance entre le fond de la bobine et le centre de la sphère

$U$  : tension du capteur

Voici les mesures :

x [cm]	U [V]
4.4	4.86
4.6	3.91
4.9	2.36
5.1	0.83
5.4	0.03

Nous faisons une approximation polynomiale du 2<sup>ème</sup> ordre telle que :

$$x = b_2 U^2 + b_1 U + b_0 \quad (5.1)$$

A l'aide du tableau ci-dessus nous obtenons les valeurs suivantes :

$$b_2 = 0.0584 \cdot 10^{-3} \quad b_1 = -2.2232 \cdot 10^{-3} \quad b_0 = 53.6035 \cdot 10^{-3} \quad (5.2)$$

$$\mathcal{X} \longrightarrow \frac{1}{2} \frac{\partial L(x)}{\partial x}$$

$x$  : distance entre le fond de la bobine et le centre de la sphère

$i$  : courant qui passe dans la bobine

Voici les mesures :

x [cm]	U [V]	$\frac{1}{2} \frac{\partial L(x)}{\partial x}$
4.4	2.96	-0.0112
4.6	3.46	-0.0082
4.9	3.96	-0.0063
5.1	4.47	-0.0049
5.4	4.97	-0.0040

Nous faisons une approximation polynomiale du 2<sup>ème</sup> ordre telle que :

$$\frac{1}{2} \frac{\partial L(x)}{\partial x} = -(a_2 x^2 + a_1 x + a_0) \quad (5.3)$$

A l'aide du tableau ci-dessus nous obtenons les valeurs suivantes :

$$a_2 = 59.8258 \cdot 10^{-3} \quad a_1 = -6.5572 \cdot 10^{-3} \quad a_0 = 0.1837 \cdot 10^{-3} \quad (5.4)$$

## 5.2 Modèles de référence

$$M_0 = \frac{K_0 G}{1 + K_0 G}$$

$M_1 = A \frac{z+1}{(z-p_1)(z-p_2)}$  avec  $p_{1,2} = 0.7 \pm 0.3j$  et  $A$  est défini de manière à ce que le gain statique soit de 1.

$M_2 = A \frac{z+1}{(z-p_1)(z-p_2)}$  avec  $p_{1,2} = 0.95 \pm 0.1j$  et  $A$  est défini de manière à ce que le gain statique soit de 1.

Les réponses à un saut unité ainsi que les diagramme de Bode de ces trois modèles références sont représentés sur la page suivante.

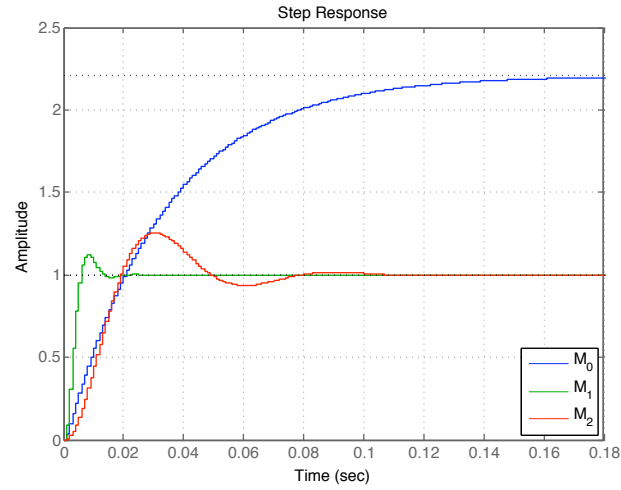


FIG. 5.1 – Réponses des modèles référence à un saut unité

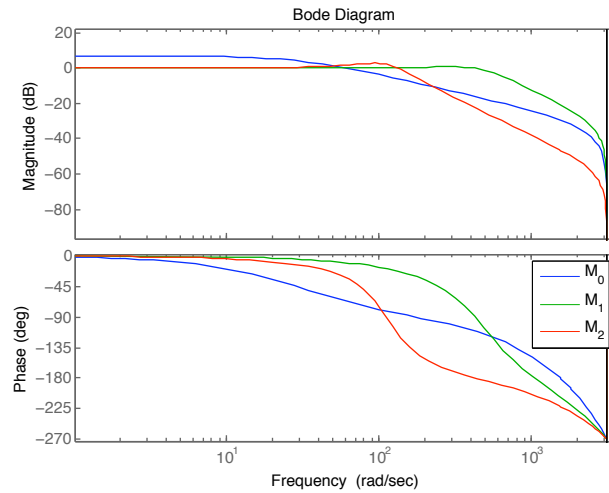


FIG. 5.2 – Diagramme de Bode des différents modèles référence

# Bibliographie

- [1] Alireza Karimi, Klaske van Heusden and Dominique Bonvin *Non-iterative Data-driven Controller Tuning Using the Correlation Approach*, Presented at European Control Conference, Kos Island, Greece, July 2007.
- [2] Prof. D. Bonvin *Systèmes dynamiques*, Laboratoire d'automatique, EPFL, Février 2003.
- [3] Prof. D. Bonvin, Dr. A. Karimi, *Identification de systèmes dynamiques*, Laboratoire d'automatique, EPFL, Octobre 2006.
- [4] Roland Longchamp, *Commande numérique de systèmes dynamiques, cours d'automatique*, Presses Polytechniques et universitaires romandes, 2006.