Autovalores e Autovetores

Supondo que determinada matriz quadrada A é diagonalizável, podemos dizer então, que existe uma matriz P tal que:

$\boldsymbol{D = P^{-1}AP}$, em que D é uma matriz diagonal

Para descobrirmos qual é a matriz diagonal D, é necessário encontrar a matriz P, bem como sua inversa. Por isso utilizamos os conceitos de autovalores e autovetores:

Um número real λ é chamado **autovalor** de A, se existe um vetor não nulo, chamado de **autovetor**, $V = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$, de $\mathbb{R}^n$, tal que:

$$\boldsymbol{AV = \lambda V}$$

Desta forma, pela matriz A_{nxn}, temos as seguintes conclusões:

Autovalores ($\boldsymbol{\lambda}$):	**Autovetores ($\boldsymbol{v}$):**
$\lvert A - \lambda I \rvert = 0$	$(A - \lambda I)v = 0$

- A matriz D, sempre será a matriz dos autovalores.
- A matriz P, sempre será a matriz dos autovetores em coluna.

Se uma matriz A é diagonalizável e $A = PDP^{-1}$, então os autovalores de A formam a diagonal de D e *n* autovetores linearmente independentes associados aos autovalores formam as colunas de P.

Diagonalização de Operadores Lineares

Antes de iniciarmos, é necessário relembrar a definição de Operadores Lineares, vista em Transformações Lineares:

Seja a Transformação Linear $\boldsymbol{T}: \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}$. Se os conjuntos V (domínio) e W (contradomínio) são iguais, $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{W}$, então **T** é denominada um **Operador Linear**.

Dizemos que uma matriz $A_{n \times n}$, é diagonalizável, se existem matrizes P e D tais que:

$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{PDP^{-1}}$ ou equivalentemente,

$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{P^{-1}AP}$, em que D é uma matriz diagonal.

Em termos de definição:

Sejam V um espaço vetorial real de dimensão finita e T um operador linear sobre V. Dizemos que T é um **operador diagonalizável** se existe uma base ordenada B (formada por *n* **autovetores**) tal que a matriz do operador $(T)_B$ é uma **Matriz Diagonal**

Teorema

Para que um operador seja diagonalizável, as multiplicidades algébricas (referente aos valores dos autovalores) e geométricas (referente aos vetores dos autovalores) têm que ser equivalentes entre si.

Consequência: seja V um espaço vetorial real de dimensão finita, digamos $dim(V) = n$ e T um operador linear sobre *V* que possui *n* autovalores distintos. Então T é um operador diagonalizável.

Só de se descobrir n autovalores distintos, já indica que o operador é diagonalizável.

Exemplo

Considere o operador linear $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, dado por:

$T(x, y) = (x, 2x + y)$.

Vamos encontrar os autovalores e autovetores de T. A matriz que representa T com relação a base canônica B do $\mathbb{R}^2$ é:

$$(T)_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Descobrimos os autovalores (λ):

$$|(T)_B - \lambda I| = 0$$

$$\left| \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(1-\lambda)^2 = 0$$
$$(1-\lambda)(1-\lambda) = 0$$

$$\therefore \boldsymbol{\lambda = 1}$$

Agora, determinamos os autovetores (v):

$$((T)_B - \lambda I)v = 0$$

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} 0x + 0y = 0 \\ 2x + 0y = 0 \end{cases}$$

$$\boldsymbol{x = 0}$$

$$\boldsymbol{v = \{(0, y)\} \to \{(0, 1)\}}$$