Biblioteca dos Brunos [UFMG]

Bruno Demattos & Bruno Monteiro

Índice

1 Estruturas

1.1 BIT

```
// BIT 1-based, v 0-based
// Para mudar o valor da posicao p para x,
// faca: poe(x - sum(p, p), p)
//
// Complexidades:
// build - O(n)
// poe - O(log(n))
// query - O(log(n))

int n;
int bit[MAX];
int v[MAX];

void build() {
  bit[0] = 0;
  for (int i = 1; i <= n; i++) bit[i] = v[i - 1];

  for (int i = 1; i <= n; i++) {
    int j = i + (i & -i);
    if (j <= n) bit[j] += bit[i];
  }
}

// soma x na posicao p
void poe(int x, int p) {
  while (p <= n) {
    bit[p] += x;
    p += p & -p;
  }
}

// soma [1, p]
int query(int p) {
  int ret = 0;
  while (p) {
    ret += bit[p];
    p -= p & -p;
  }
  return ret;
}

// soma [a, b]
int sum(int a, int b) {
  return query(b) - query(a - 1);
}
```

1.2 BIT 2D

```
// BIT 1-based
// Para mudar o valor da posicao (x, y) para k,
// faca: poe(x, y, k - sum(x, y, x, y))
//
// Complexidades:
// build - O(n^2 log^2(n))
// poe - O(log^2(n))
// query - O(log^2(n))

int n;
int bit[MAX][MAX];
int M[MAX][MAX];

void poe(int x, int y, int k) {
  int y2 = y;
  while (x <= n) {
    y = y2;
```

```
    while (y <= n) {
      bit[x][y] += k;
      y += y & -y;
    }
    x += x & -x;
  }
}

int query(int x, int y) {
  int ret = 0;
  int y2 = y;
  while (x) {
    y = y2;
    while (y) {
      ret += bit[x][y];
      y -= y & -y;
    }
    x -= x & -x;
  }
  return ret;
}

int sum(int x, int y, int z, int w) {
  int ret = query(z, w);
  if (x > 1) ret -= query(x - 1, w);
  if (y > 1) ret -= query(z, y - 1);
  if (x > 1 and y > 1) ret += query(x - 1, y - 1);

  return ret;
}

void build() {
  for (int i = 1; i <= n; i++)
    for (int j = 1; j <= n; j++)
      bit[i][j] = 0;

  for (int i = 1; i <= n; i++)
    for (int j = 1; j <= n; j++)
      poe(i, j, M[i - 1][j - 1]);
}
```

1.3 SQRT-decomposition

```
// 0-indexed
// MAX2 = sqrt(MAX)
//
// O bloco da posicao x eh
// sempre x/q
//
// Complexidades:
// build - O(n)
// query - O(sqrt(n))

int n, q;
int v[MAX];
int bl[MAX2];

void build() {
  q = (int) sqrt(n);

   // computa cada bloco
  for (int i = 0; i <= q; i++) {
    bl[i] = INF;
    for (int j = 0; j < q and q * i + j < n; j++)
      bl[i] = min(bl[i], v[q * i + j]);
  }
}

int query(int a, int b) {
  int ret = INF;

  // linear no bloco de a
  for (; a <= b and a % q; a++) ret = min(ret, v[a]);

  // bloco por bloco
  for (; a + q <= b; a += q) ret = min(ret, bl[a / q]);

  // linear no bloco de b
  for (; a <= b; a++) ret = min(ret, v[a]);

  return ret;
}
```

1.4 Seg-Tree

```
// SegTree 1-based, vetor 0-based
// Query: soma do range [a, b]
// Update: soma x em cada elemento do range [a, b]
//
// Complexidades:
// build - O(n)
// query - O(log(n))
// update - O(log(n))

int seg[4 * MAX];
int lazy[4 * MAX];
int v[MAX];
int n, a, b, x;

int build(int p, int l, int r) {
  lazy[p] = 0;
  if (l == r) return seg[p] = v[l - 1];

  int m = (l + r) / 2;
  return seg[p] = build(2 * p, l, m) + build(2 * p + 1, m + 1, r
      );
}

// propagar o que ta em p para os filhos
void prop(int p, int l, int r) {
  // soma o lazy
  seg[p] += lazy[p] * (r - l + 1);

  // propaga pros filhos
  if (l != r) {
    lazy[2 * p] += lazy[p];
    lazy[2 * p + 1] += lazy[p];
  }

  // zera o lazy
  lazy[p] = 0;
}

// somar x no intervalo [l, r]
int lazy_op(int p, int l, int r) {
  // soma x * (tamanho do intervalo)
  seg[p] += x * (r - l + 1);

  // suja os filhos
  if (l != r) {
    lazy[2 * p] += x;
    lazy[2 * p + 1] += x;
  }

  return seg[p];
}

int query(int p, int l, int r) {
  // propaga
  prop(p, l, r);

  // to totalmente dentro
  if (a <= l and r <= b) return seg[p];
  // to fora
  if (b < l or r < a) return 0;

  int m = (l + r) / 2;
  return query(2 * p, l, m) + query(2 * p + 1, m + 1, r);
}

int update(int p, int l, int r) {
  // propaga
  prop(p, l, r);

  // to totalmente dentro
  if (a <= l and r <= b) return lazy_op(p, l, r);
  // to fora
  if (b < l or r < a) return seg[p];

  int m = (l + r) / 2;
  return seg[p] = update(2 * p, l, m) + update(2 * p + 1, m + 1,
      r);
}
```

1.5 Sparse-Table

```
// MAX2 = log(MAX)
```

```
//
// Complexidades:
// build - O(n log(n))
// query - O(1)

int n;
int v[MAX];
int m[MAX][MAX2]; // m[i][j] : posicao do minimo
                  // em [v[i], v[i + 2^j - 1]]

void build() {
  for (int i = 0; i < n; i++) m[i][0] = i;

  for (int j = 1; 1 << j <= n; j++) {
    int tam = 1 << j;
    for (int i = 0; i + tam <= n; i++) {
      if (v[m[i][j - 1]] < v[m[i + tam/2][j - 1]])
        m[i][j] = m[i][j - 1];
      else m[i][j] = m[i + tam/2][j - 1];
    }
  }
}

int query(int a, int b) {
  int j = (int) log2(b - a + 1);

  return min(v[m[a][j]], v[m[b - (1 << j) + 1][j]]);
}
```

1.6 Trie

```
// N deve ser maior ou igual ao numero de nos da trie
// fim indica se alguma palavra acaba nesse no
//
// Complexidade:
// Inserir e conferir string S -> O(|S|)

int trie[N][26];
int fim[N];
int nx = 1;

void insere(string &s, int p, int l, int at){
  // se nao chegou no fim da palavra termina de inserir
  if(p != l){
    int c = s[p] - 'a';
    // se nao existe um no que representa esse prefixo + c
    // cria o no
    if(!trie[at][c]) trie[at][c] = nx++;
    insere(s, p+1, l, trie[at][c]);
  }
  else fim[at] = 1;
}

int check(string &s, int p, int l, int at){
  if(p != l){
    int c = s[p] - 'a';
    if(trie[at][c]) return check(s, p+1, l, trie[at][c]);
    return 0;
  }
  return fim[at];
}
```

1.7 Union-Find

```
// Complexidades:
// build - O(n)
// find - O(1)
// une - O(1)

int n;
int v[MAX];    // v[i] : representante do conjunto que contem i
int size[MAX]; // size[i] : tamanho do conjunto que tem i como
   representante

void build() {
  for (int i = 0; i < n; i++) {
    v[i] = i;
    size[i] = 1;
  }
}

int find(int k) {
  return v[k] == k ? k : v[k] = find(v[k]);
}
```

```
void une(int a, int b) { // |a| <= |b|
  a = find(a);
  b = find(b);
  if (size[a] > size[b]) swap(a, b);

  size[b] += size[a];
  v[a] = b;
}

// une sem union by size
//
// une e find ficam O(log(n))
//
// void une(int a, int b) {
//   v[find(a)] = find(b);
// }
```

2 Grafos

2.1 Bellman-Ford

```
// Calcula a menor distancia
// entre a e todos os vertices e
// detecta ciclo negativo
// Retorna 1 se ha ciclo negativo
// Nao precisa representar o grafo,
// soh armazenar as arestas
//
// O(nm)

int n, m;
int d[MAX];
vector<pair<int, int> > ar; // vetor de arestas
vector<int> w;              // peso das arestas

bool bellman_ford(int a) {
  for (int i = 0; i < n; i++) d[i] = INF;
  d[a] = 0;

  for (int i = 0; i <= n; i++)
    for (int j = 0; j < m; j++) {
      if (d[ar[j].second] > d[ar[j].first] + w[j]) {
        if (i == n) return 1;

        d[ar[j].second] = d[ar[j].first] + w[j];
      }
    }

  return 0;
}
```

2.2 Floyd-Warshall

```
// encontra o menor caminho entre todo
// par de vertices e detecta ciclo negativo
// returna 1 sse ha ciclo negativo
// d[i][i] deve ser 0
// para i != j, d[i][j] deve ser w se ha uma aresta
// (i, j) de peso w, INF caso contrario
//
// O(n^3)

int n;
int d[MAX][MAX];

bool floyd_warshall() {
  for (int k = 0; k < n; k++)
  for (int i = 0; i < n; i++)
  for (int j = 0; j < n; j++)
    d[i][j] = min(d[i][j], d[i][k] + d[k][j]);

  for (int i = 0; i < n; i++)
    if (d[i][i] < 0) return 1;

  return 0;
}
```

2.3 Heavy-Light decomposition

```
// SegTree de maximo, 0-based
```

```
// query_hld(u, v) calcula maior aresta
// no caminho de u pra v
// update_hld(p, val) muda o peso da aresta
// p para val
//
// SegTree pode ser facilmente modificada
//
// Complexidades:
// build_hld - O(n)
// query_hld - O(log^2 (n))
// update_hld - O(log(n))

int n, a, b, x; // [a, b] usado na seg tree | x : valor de
   update
vector<vector<int> > g(MAX), w(MAX);
int subsize[MAX]; // tamanho da sub-arvore
int pai[MAX], chain[MAX], head[MAX]; // cabeca de cada chain
int num[MAX]; // numeracao do vertice na segtree
int vec[MAX]; // v[i] : custo de u para pai[u], u = num[i]
vector<vector<int> > ind(MAX); // index da aresta
int ponta[MAX]; // vertice de baixo da aresta
int vis[MAX], chains, seg[4 * MAX];
int pos; // posicao atual na seg tree (na hora de montar a HLD)

// seg tree de maximo com update pontual
int build_seg(int p, int l, int r);
int query_seg(int p, int l, int r);
int update_seg(int p, int l, int r);

void dfs(int k) {
  vis[k] = 1;
  subsize[k] = 1;
  for (int i = 0; i < (int) g[k].size(); i++) {
    int u = g[k][i];
    if (!vis[u]) {
      dfs(u);

      pai[u] = k;
      subsize[k] += subsize[u];
      ponta[ind[k][i]] = u;
    }
  }
}

void hld(int k, int custo) {
  vis[k] = 1;
  chain[k] = chains - 1;

  num[k] = pos;
  vec[pos++] = custo;

  // acha filho pesado
  int f = -1, peso = -INF, prox_custo;
  for (int i = 0; i < (int) g[k].size(); i++) if (!vis[g[k][i]])
    if (subsize[g[k][i]] > peso) {
      f = g[k][i];
      peso = subsize[f];
      prox_custo = w[k][i];
    }

  // folha
  if (f == -1) return;

  // continua a chain
  hld(f, prox_custo);

  // comeca novas chains
  for (int i = 0; i < (int) g[k].size(); i++)
    if (!vis[g[k][i]] and g[k][i] != f) {
      chains++;
      head[chains - 1] = g[k][i];
      hld(g[k][i], w[k][i]);
    }
}

void build_hld(int root) {
  for (int i = 0; i < n; i++) vis[i] = 0;

  // DFS pra calcular tamanho das sub-arvores,
  // e ponta das arestas
  dfs(root);

  for (int i = 0; i < n; i++) vis[i] = 0;
```

```
    // comeca 0 chain da root
    chains = 1;
    head[0] = root;
    pos = 0;
    hld(root, -1);

    // cria seg tree
    build_seg(0, 0, n - 1);
}

int query_hld(int u, int v) {
    if (u == v) return 0;

    int ret = -INF;

    while (chain[u] != chain[v]) {
        // sobe o de maior chain
        if (chain[u] < chain[v]) swap(u, v);

        a = num[head[chain[u]]], b = num[u];
        ret = max(ret, query_seg(0, 0, n - 1));

        u = head[chain[u]];
        u = pai[u];
    }

    if (u == v) return ret;

    // query final
    if (num[u] < num[v]) swap(u, v); // LCA eh v

    a = num[v] + 1, b = num[u];
    ret = max(ret, query_seg(0, 0, n - 1));

    return ret;
}

void update_hld(int p, int val) {
    x = val;
    a = b = num[ponta[p]];
    update_seg(0, 0, n - 1);
}
```

2.4 LCA

```
// Assume que um vertice eh ancestral dele mesmo, ou seja,
// se a eh ancestral de b, LCA(a, b) = b
// MAX2 = ceil(log(MAX))
//
// Complexidades:
// build - O(n log(n))
// lca - O(log(n))

vector<vector<int> > g(MAX);
int n, p;
int pai[MAX2][MAX];
int in[MAX], out[MAX];

void dfs(int k) {
    in[k] = p++;
    for (int i = 0; i < (int) g[k].size(); i++)
        if (in[g[k][i]] == -1)
            pai[0][g[k][i]] = k, dfs(g[k][i]);
    out[k] = p++;
}

void build(int raiz) {
    for (int i = 0; i < n; i++) pai[0][i] = i;
    p = 0, memset(in, -1, sizeof in);
    dfs(raiz);

    // pd dos pais
    for (int k = 1; k < MAX2; k++) for (int i = 0; i < n; i++)
        pai[k][i] = pai[k - 1][pai[k - 1][i]];
}

bool anc(int a, int b) { // se a eh ancestral de b
    return in[a] <= in[b] and out[a] >= out[b];
}

int lca(int a, int b) {
    if (anc(a, b)) return a;
    if (anc(b, a)) return b;

    // sobe a
```

```
  for (int k = MAX2 - 1; k >= 0; k--)
    if (!anc(pai[k][a], b)) a = pai[k][a];

  return pai[0][a];
}
```

2.5 LCA com RMQ

```
// Assume que um vertice eh ancestral dele mesmo, ou seja,
// se a eh ancestral de b, LCA(a, b) = b
//
// Complexidades:
// build - O(n) + build_RMQ
// lca - RMQ

int n;
vector<vector<int> > g(MAX);
int pos[MAX];      // pos[i] : posicao de i em v (primeira
    aparicao
int ord[2 * MAX]; // ord[i] : i-esimo vertice na ordem de
    visitacao da dfs
int v[2 * MAX];    // vetor de alturas que eh usado na RMQ
int p;

void dfs(int k, int l) {
  ord[p] = k;
  pos[k] = p;
  v[p++] = l;
  for (int i = 0; i < (int) g[k].size(); i++)
    if (pos[g[k][i]] == -1) {
      dfs(g[k][i], l + 1);
      ord[p] = k;
      v[p++] = l;
    }
}

void build(int root) {
  for (int i = 0; i < n; i++) pos[i] = -1;

  p = 0;
  dfs(root, 0);
  build_RMQ();
}

int lca(int u, int v) {
  int a = pos[u], b = pos[v];
  if (a > b) swap(a, b);
  return ord[RMQ(a, b)];
}
```

2.6 Centroid decomposition

```
// O(n log(n))

int n;
vector<vector<int> > g(MAX);
int subsize[MAX];
int rem[MAX];
int pai[MAX];

void dfs(int k, int last) {
  subsize[k] = 1;
  for (int i = 0; i < (int) g[k].size(); i++)
    if (g[k][i] != last and !rem[g[k][i]]) {
      dfs(g[k][i], k);
      subsize[k] += subsize[g[k][i]];
    }
}

int centroid(int k, int last, int size) {
  for (int i = 0; i < (int) g[k].size(); i++) {
    int u = g[k][i];
    if (rem[u] or u == last) continue;
    if (subsize[u] > size / 2)
      return centroid(u, k, size);
  }
  // k eh o centroid
  return k;
}

void decomp(int k, int last) {
  dfs(k, k);
```

```
  // acha e tira o centroid
  int c = centroid(k, k, subsize[k]);
  rem[c] = 1;
  pai[c] = last;
  if (k == last) pai[c] = c;

  // decompoe as sub-arvores
  for (int i = 0; i < (int) g[c].size(); i++)
    if (!rem[g[c][i]]) decomp(g[c][i], c);
}

void build() {
  memset(rem, 0, sizeof rem);
  decomp(0, 0);
}
```

2.7 Dijkstra

```
// encontra menor distancia de a
// para todos os vertices
// se ao final do algoritmo d[i] = INF,
// entao a nao alcanca i
//
// O(m log(n))

int n;
vector<vector<int> > g(MAX);
vector<vector<int> > w(MAX); // peso das arestas
int d[MAX];

void dijsktra(int a) {
  for (int i = 0; i < n; i++) d[i] = INF;
  d[a] = 0;
  priority_queue<pair<int, int> > Q;
  Q.push(make_pair(0, a));

  while (Q.size()) {
    int u = Q.top().second, dist = -Q.top().first;
    Q.pop();
    if (dist > d[u]) continue;

    for (int i = 0; i < (int) g[u].size(); i++) {
      int v = g[u][i];
      if (d[v] > d[u] + w[u][i]) {
        d[v] = d[u] + w[u][i];
        Q.push(make_pair(-d[v], v));
      }
    }
  }
}
```

2.8 Dinic

```
// tem que definir o tamanho de g e de lev como o numero
// de vertices do grafo e depois char o a funcao fluxo
//
// Complexidade:
// Caso geral: O(V^2 * E)
// Grafo bipartido O(sqrt(V)*E)

struct edge{
  int p, c, id; // destino, capacidade, id
  edge() {p = c = id = 0;}
  edge(int p, int c, int id):p(p), c(c), id(id){}
};

vector<vector<edge> > g; // define o tamanho depois
vector <int> lev;

void add(int a, int b, int c){
  // de a para b com capacidade c
  edge d = {b, c, (int) g[b].size()};
  edge e = {a, 0, (int) g[a].size()};
  g[a].pb(d);
  g[b].pb(e);
}

bool bfs(int s, int t){
  // bfs de s para t construindo o level
  for(int i = 0; i < g.size(); i++)
    lev[i] = -1;
  lev[s] = 0;

  // bfs saindo de s
```

```
  queue <int> q;
  q.push(s);
  while(q.size()){
    int u = q.front(); q.pop();

    for(int i = 0; i < g[u].size(); i++){
      edge e = g[u][i];
      // se ja foi visitado ou nao tem capacidade nao visita
      if(lev[e.p] != -1 || !e.c) continue;
      lev[e.p] = lev[u] + 1;
      if(e.p == t) return true;
      q.push(e.p);
    }
  }

  return false;
}

int dfs(int v, int s, int f){
  if(v == s || !f) return f;

  int flu = f;
  for(int i = 0; i < g[v].size(); i++){
    edge e = g[v][i]; int u = e.p;

    // visita se tiver capacidadade e se ta no proximo nivel
    if(lev[u] != lev[v] + 1 || !e.c) continue;

    int tenta = dfs(u, s, min(flu, e.c));
    // se passou alguma coisa altera as capacidades
    if(tenta){
      flu -= tenta;
      g[v][i].c -= tenta;
      g[u][e.id].c += tenta;
    }
  }

  // se passou tudo tira da lista dos possiveis
  if(flu == f) lev[v] = -1;
  return f - flu;
}
```

```
int fluxo(int s, int t){
  int r = 0;
  while(bfs(s, t)) r += dfs(s, t, inf);
  return r;
}

// ja tem ate o debug
void imprime(){
  for(int i = 0; i < g.size(); i++){
    printf("%i -> ", i);
    for(int j = 0; j < g[i].size(); j++)
      printf("(%i %i)", g[i][j].p, g[i][j].c);
    printf("\n");
  }
  printf("\n");
}
```

2.9 Kosaraju

```
// O(n + m)

int n;
vector<vector<int> > g(MAX);
vector<vector<int> > gi(MAX); // grafo invertido
int vis[MAX];
stack<int> S;
int comp[MAX];                // componente conexo de cada
    vertice

void dfs(int k) {
  vis[k] = 1;
  for (int i = 0; i < (int) g[k].size(); i++)
    if (!vis[g[k][i]]) dfs(g[k][i]);

  S.push(k);
}

void scc(int k, int c) {
  vis[k] = 1;
  comp[k] = c;
  for (int i = 0; i < (int) gi[k].size(); i++)
    if (!vis[gi[k][i]]) scc(gi[k][i], c);
```

```
}

void kosaraju() {
  for (int i = 0; i < n; i++) vis[i] = 0;
  for (int i = 0; i < n; i++) if (!vis[i]) dfs(i);

  for (int i = 0; i < n; i++) vis[i] = 0;
  while (S.size()) {
    int u = S.top();
    S.pop();
    if (!vis[u]) scc(u, u);
  }
}
```

2.10 Kruskal

```
// Gera AGM a partir do vetor de arestas
//
// O(m log(m))

int n;
vector<pair<int, pair<int, int> > > ar; // vetor de arestas
vector<int> agm;                        // agm[i] eh 1 sse a i-
    esima aresta ta na AGM
int v[MAX];

// Union-Find em O(log(n))
void build();
int find(int k);
void une(int a, int b);

void kruskal() {
  build();

  sort(ar.begin(), ar.end());
  for (int i = 0; i < (int) ar.size(); i++) {
    int a = ar[i].s.f, b = ar[i].s.s;
    if (find(a) != find(b)) {
      une(a, b);
      agm.pb(1);
    } else agm.pb(0);
  }
}
```

2.11 Ponte

```
// Chama zera(numDeVertices)
// Depois dfs para (0, -1) = (verticeInicial, paiDele)
// Se tiver ponte a variavel ok vai ser 0 no final
//
// Complexidade: O(n + m)

vector <vector<int> > g(N);
vector<int> di (N); // distancia do vertice inicial
vector<int> lo (N); // di do menor vertice que ele alcanca
vector<int> vi (N);
int d, ok;

void zera(int n){
  for(int i = 0; i < n; i++){
    g[i].clear();
    di[i] = -1;
    lo[i] = INF;
    vi[i] = 0;
  }
  ok = 1;
  d = 0;
}

void dfs(int v, int pai){
  vi[v] = 1;
  // ele eh o d-esimo a ser visitado e alcanca o d-esimo vertice
  di[v] = lo[v] = d++;

  for(int i = 0; i < g[v].size(); i++){
    int u = g[v][i];
    if(!vi[u]) dfs(u, v);

    // o filho nao alcanca ninguem menor ou igual a ele, eh
       ponte
    if(di[v] < lo[u]) ok = 0;

    // atualiza o menor que ele alcanca
    if(pai != u && lo[u] < lo[v])
```

```
        lo[v] = lo[u];
    }
}
```

2.12 Tarjan

```
// O(n + m)

int n;
vector<vector<int> > g(MAX);
stack<int> S;
int vis[MAX], comp[MAX];
int id[MAX], p;

int dfs(int k) {
  int lo = id[k] = p++;
  S.push(k);
  vis[k] = 2; // ta na pilha

  // calcula o menor cara q ele alcanca
  // que ainda nao esta em um scc
  for (int i = 0; i < sz(g[k]); i++) {
    if (!vis[g[k][i]])
      lo = min(lo, dfs(g[k][i]));
    else if (vis[g[k][i]] == 2)
      lo = min(lo, id[g[k][i]]);
  }

  // nao alcanca ninguem menor -> comeca scc
  if (lo == id[k]) while (1) {
    int u = S.top();
    S.pop(); vis[u] = 1;
    comp[u] = k;
    if (u == k) break;
  }

  return lo;
}

void tarjan() {
  for (int i = 0; i < n; i++) vis[i] = 0;
  p = 0;
  for (int i = 0; i < n; i++) if (!vis[i]) dfs(i);
}
```

3 Matemática

3.1 Crivo de Erastosthenes

```
// O(n log(log(n)))

int primo[MAX];
int n;

void crivo() {
  primo[1] = 0;
  for (int i = 2; i <= n; i++) primo[i] = 1;

  for (int i = 2; i*i <= n; i++) if (primo[i])
    for (int j = i*i; j <= n; j += i) primo[j] = 0;
}
```

3.2 Exponenciação rápida

```
// (x^y mod m) em O(log(y))

typedef long long int ll;

ll pow(ll x, ll y, ll m) { // iterativo
  ll ret = 1;
  while (y) {
    if (y & 1) ret = (ret * x) % m;
    y >>= 1;
    x = (x * x) % m;
  }
  return ret;
}

ll pow(ll x, ll y, ll m) { // recursivo
  if (y == 0) return 1;
```

```
  ll ret = pow(x, y / 2, m);
  ret = (ret * ret) % m;
  if (y & 1) ret = (ret * x) % m;
  return ret;
}
```

3.3 Euclides

```
// O(log(min(a, b)))
// Na pratica, pode ser considerado O(1)

int mdc(int a, int b) {
  return !b ? a : mdc(b, a % b);
}
```

3.4 Euclides extendido

```
// acha x e y tal que ax + by = mdc(a, b)
//
// O(log(min(a, b)))

int mdce(int a, int b, int *x, int *y){
  if(!a){
    *x = 0;
    *y = 1;
    return b;
  }

  int X, Y;
  int mdc = mdce(b % a, a, &X, &Y);
  *x = Y - (b / a) * X;
  *y = X;

  return mdc;
}
```

3.5 Miller-Rabin

```
// Testa se n eh primo, n <= 3 * 10^18
//
// O(log(n)), considerando multiplicacao
// e exponenciacao constantes

// multiplicacao e exponenciacao rapidas
ll mul(ll x, ll y, ll m); // x*y mod m
ll pow(ll x, ll y, ll m); // x^y mod m

bool prime(ll n) {
  if (n < 2) return 0;
  if (n <= 3) return 1;
  if (n % 2 == 0) return 0;

  ll d = n - 1;
  int r = 0;
  while (d % 2 == 0) r++, d /= 2;

  // com esses primos, o teste funciona garantido para n <=
     3*10^18
  // funciona para n <= 3*10^24 com os primos ate 41
  int a[9] = {2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23};
  // outra opcao para n <= 2^64:
  // int a[7] = {2, 325, 9375, 28178, 450775, 9780504,
     1795265022};

  for (int i = 0; i < 9; i++) {
    if (a[i] >= n) break;
    ll x = pow(a[i], d, n);
    if (x == 1 or x == n - 1) continue;

    bool deu = 1;
    for (int j = 0; j < r - 1; j++) {
      x = pow(x, 2, n);
      if (x == n - 1) deu = 0, break;
    }
    if (deu) return 0;
  }
  return 1;
}
```

3.6 Pollard's Rho

```
// Usa o algoritmo de deteccao de ciclo de Brent
```

```
// A fatoracao nao sai necessariamente ordenada
// O algoritmo rho encontra um fator de n,
// e funciona muito bem quando n possui um fator pequeno
// Eh recomendado chamar srand(time(NULL)) na main
//
// Complexidades (considerando mul e pow constantes):
// rho - esperado O(n^(1/4)) no pior caso
// fact - esperado menos que O(n^(1/4) log(n)) no pior caso

ll mdc(ll a, ll b);
ll mul(ll a, ll b, ll m);
ll pow(ll a, ll b, ll m);
bool prime(ll n); // Miller-Rabin O(log^2(n))

ll rho(ll n) {
  if (n == 1 or prime(n)) return n;
  if (n % 2 == 0) return 2;

  while (1) {
    ll x = 2, y = 2;
    ll ciclo = 2, i = 0;

    // tenta com essa constante
    ll c = (rand() / (double) RAND_MAX) * (n - 1) + 1;
    // divisor
    ll d = 1;

    while (d == 1) {
      // algoritmo de Brent
      if (++i == ciclo) ciclo *= 2, y = x;
      x = (pow(x, 2, n) + c) % n;

      // x = y -> ciclo
      // tenta com outra constante
      if (x == y) break;

      d = mdc(abs(x - y), n);
    }

    // sucesso -> retorna o divisor
    if (x != y) return d;
  }
}

void fact(ll n, vector<ll>& v) {
  if (n == 1) return;
  if (prime(n)) v.pb(n);
  else {
    ll d = rho(n);
    fact(d, v);
    fact(n / d, v);
  }
}
```

3.7 Totiente

```
// O(sqrt(n))

int tot(int n){
  int ret = n;

  for (int i = 2; i*i <= n; i++)
    if (n % i == 0) {
      while (n % i == 0) n /= i;
      ret -= ret / i;
    }

  if(n > 1) ret -= ret / n;

  return ret;
}
```

4 Problemas

4.1 Invertion Count

```
// O(n log(n))

int n;
int v[MAX];

// bit de soma
```

```
void build();
void poe(int p);
int query(int p);

// converte valores do array pra
// numeros de 1 a n
void conv() {
  vector<int> a;
  for (int i = 0; i < n; i++) a.push_back(v[i]);

  sort(a.begin(), a.end());

  for (int i = 0; i < n; i++)
    v[i] = 1 + (lower_bound(a.begin(), a.end(), v[i]) - a.begin
       ());
}

long long inv() {
  conv();
  build();

  long long ret = 0;
  for (int i = n - 1; i >= 0; i--) {
    ret += query(v[i] - 1);
    poe(v[i]);
  }
  return ret;
}
```

4.2 LIS

```
// Calcula uma LIS
// Para ter o tamanho basta fazer lis().size()
// Implementacao do algotitmo descrito em:
// https://goo.gl/HiFkn2
//
// O(n log(n))

const int INF = 0x3f3f3f3f;

int n, v[MAX];

vector<int> lis() {
  int I[n + 1], L[n];

  // pra BB funfar bacana
  I[0] = -INF;
  for (int i = 1; i <= n; i++) I[i] = INF;

  for (int i = 0; i < n; i++) {
    // BB
    int l = 0, r = n;
    while (l < r) {
      int m = (l + r) / 2;
      if (I[m] >= v[i]) r = m;
      else l = m + 1;
    }

    // ultimo elemento com tamanho l eh v[i]
    I[l] = v[i];
    // tamanho da LIS terminando com o
    // elemento v[i] eh l
    L[i] = l;
  }

  // reconstroi LIS
  vector<int> ret;
  int m = -INF, p;
  for (int i = 0; i < n; i++) if (L[i] > m) {
    m = L[i];
    p = i;
  }
  ret.push_back(v[p]);
  int last = m;
  while (p--) if (L[p] == m - 1) {
    ret.push_back(v[p]);
    m = L[p];
  }

  reverse(ret.begin(), ret.end());
  return ret;
}
```

4.3 Nim

```
// Calcula movimento otimo do jogo classico de Nim
// Assume que o estado atual eh perdedor
// Funcao move retorna um par com a pilha (0 indexed)
// e quanto deve ser tirado dela
//
// MAX2 = teto do log do maior elemento
// possivel nas pilhas
//
// O(n)

int v[MAX], n;

pair<int, int> move() {
  int x = 0;
  for (int j = 0; j < n; j++) x ^= v[j];

  int p = -1;
  for (int i = 1 << MAX2; i; i >>= 1) if (x & i) {
    for (int j = 0; j < n; j++) if (v[j] & i) {
      p = j;
      break;
    }
    break;
  }

  x ^= v[p];
  return make_pair(p, v[p] - x);
}
```

5 String

5.1 KMP

```
// Primeiro chama a funcao process com o padrao
// Depois chama match com (texto, padrao)
// Vai retornar o numero de ocorrencias do padrao
//
// Complexidades:
// process - O(m)
// match - O(n + m)
// n = |texto| e m = |padrao|

int p[N];

void process(string &s){
  int i = 0, j = -1;
  p[0] = -1;
  while(i < s.size()){
    while(j >= 0 and s[i] != s[j]) j = p[j];
    i++; j++;
    p[i] = j;
  }
}

int match(string &s, string &t){
  int r = 0;
  process(t);
  int i = 0, j = 0;
  while(i < s.size()){
    while(j >= 0 and s[i] != t[j]) j = p[j];
    i++; j++;
    if(j == t.size()){
      j = p[j];
      r++;
    }
  }
  return r;
}
```

5.2 Z

```
// Complexidades:
// z - O(|s|)
// match - O(|s| + |p|)

vector<int> get_z(string s) {
    int n = s.size();
    vector<int> z(n, 0);

    // intervalo da ultima substring valida
```

```
    int l = 0, r = 0;
    for (int i = 1; i < n; i++) {
        // estimativa pra z[i]
        if (i <= r) z[i] = min(r - i + 1, z[i - l]);

        // calcula valor correto
        while (i + z[i] < n and s[z[i]] == s[i + z[i]]) z[i]++;

        // atualiza [l, r]
        if (i + z[i] - 1 > r) l = i, r = i + z[i] - 1;
    }

    return ret;
}

// quantas vezes p aparece em s
int match(string s, string p) {
    int n = s.size(), m = p.size();
    vector<int> z = get_z(p + s);

    int ret = 0;
    for (int i = m; i < n + m; i++)
        if (z[i] >= m) ret++;

    return ret;
}
```

6 Extra

6.1 Template

```
#include <bits/stdc++.h>

using namespace std;

#define sc(a) scanf("%d",&a)
#define sc2(a,b) scanf("%d%d",&a,&b)
#define sc3(a,b,c) scanf("%d%d%d",&a,&b,&c)
#define pri(x) printf("%d\n",x)
#define prie(x) printf("%d ",x)
#define prif() printf("\n")
#define sz(x) (int)((x).size())
#define mp make_pair
#define pb push_back
#define f first
#define s second
#define BUFF ios::sync_with_stdio(false)

typedef long long int ll;
typedef pair<int, int> ii;
typedef vector<int> vi;
typedef vector<vi> vvi;
typedef vector<ii> vii;
const int INF = 0x3f3f3f3f;
const ll LINF = 0x3f3f3f3f3f3f3f3fll;
```

6.2 Vimrc

```
set ts=4 si ai sw=2 number mouse=a
syntax on
```