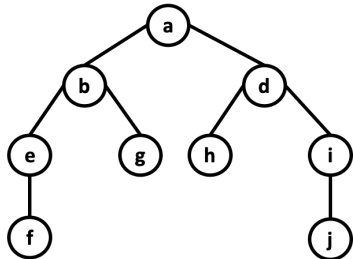


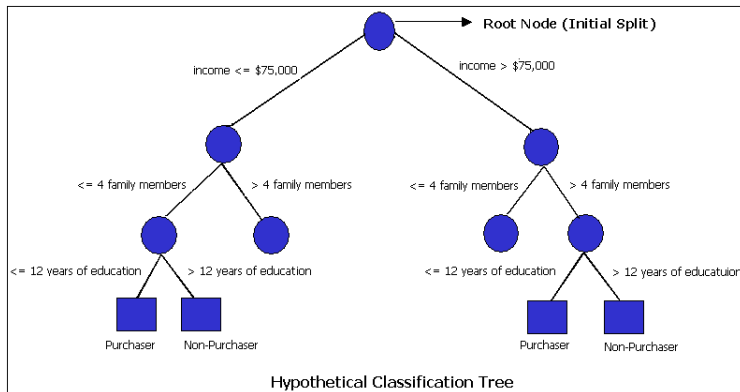
# Árboles

- Estructura de datos no lineal que modela una estructura jerárquica.



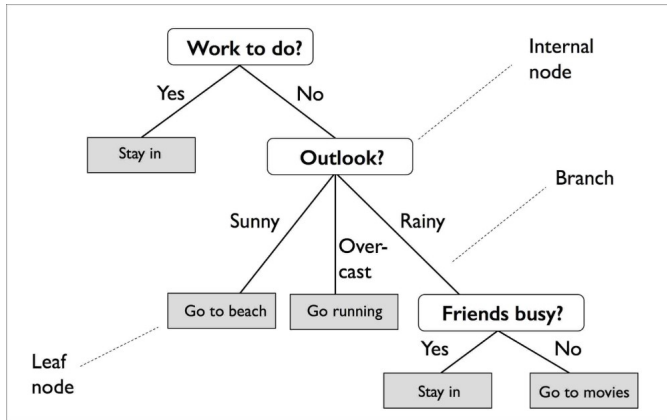
# Árboles: aplicaciones

## Problemas de clasificación



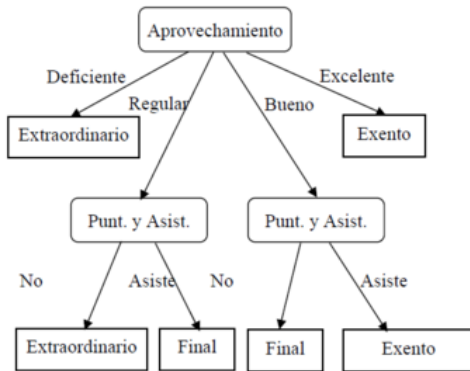
# Árboles: aplicaciones

## Problemas de decisión



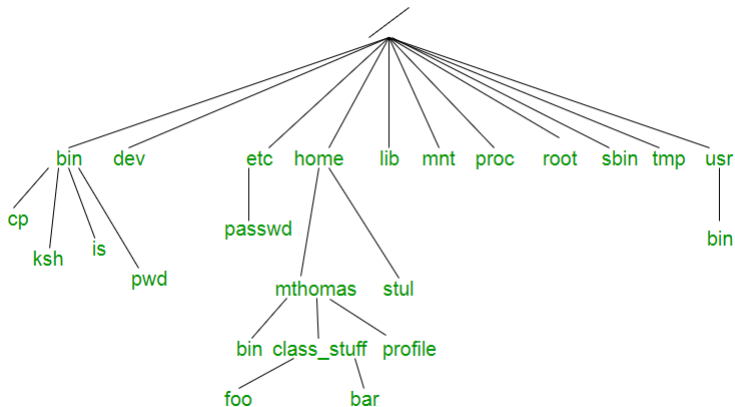
# Árboles: aplicaciones

## Problemas de decisión



# Árboles: aplicaciones

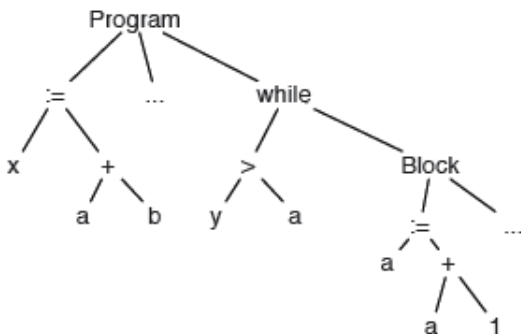
## Sistemas de archivos



## Árboles: aplicaciones

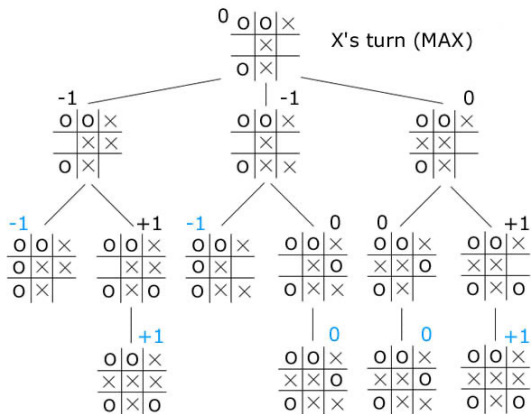
## Árboles sintácticos

```
x := a + b;  
y := a * b;  
while (y > a) {  
    a := a + 1;  
    x := a + b  
}
```



# Árboles: aplicaciones

## Árboles de juegos



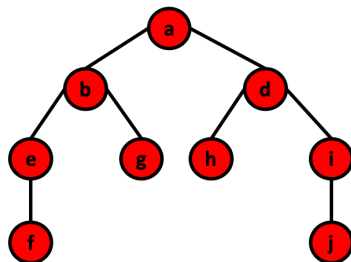
## Árboles: aplicaciones

- Algorítmica: en los métodos de clasificación y búsqueda.
- Compiladores: como árboles sintácticos para representar las expresiones o producciones posibles de un lenguaje.
- Inteligencia artificial: árboles de juegos, de decisiones, de resolución.
- Etc.



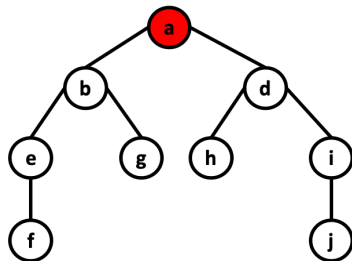
# Árboles: terminología

- **Nodo:** Son los vértices o elementos del árbol.
- **Arista:** Es una conexión entre dos nodos.
- **Raíz:** Es el nodo que no tiene *padre*, es decir, no es el hijo de ningún elemento. Todos los demás elementos o nodos se derivan o descienden de él.
- **Hoja:** Es aquel nodo que no contiene ningún subárbol.
- **Padre:** Nodo que antecede a otros nodos. Todos los nodos tienen un sólo padre -excepto la raíz que no tiene padre.
- **Hijos:** Nodo que no es hoja y al que se le asocia uno o varios subárboles.
- **Hermanos:** Son los nodos de un mismo padre.
- **Nodo interior:** Nodo que no es hoja ni raíz.



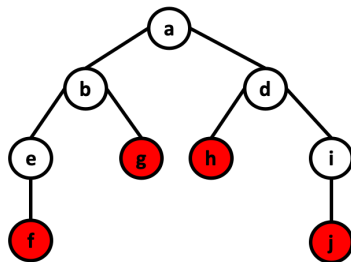
# Árboles: terminología

- **Nodo:** Son los vértices o elementos del árbol.
- **Raíz:** Es el nodo que no tiene *padre*; es decir, no es el hijo de ningún elemento. Todos los demás elementos o nodos se derivan o descienden de él.
- **Hoja:** Es aquel nodo que no contiene ningún subárbol.
- **Padre:** Nodo que antecede a otros nodos. Todos los nodos tienen un sólo padre -excepto la raíz que no tiene padre.
- **Hijos:** Nodo que no es hoja y al que se le asocia uno o varios subárboles.
- **Hermanos:** Son los nodos de un mismo padre.
- **Nodo interior:** Nodo que no es hoja ni raíz.



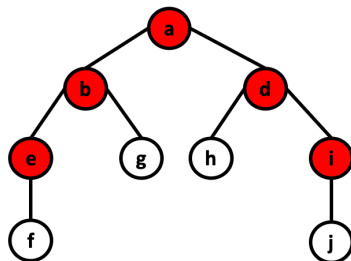
# Árboles: terminología

- **Nodo:** Son los vértices o elementos del árbol.
- **Raíz:** Es el nodo que no tiene *padre*; es decir, no es el hijo de ningún elemento. Todos los demás elementos o nodos se derivan o descienden de él.
- **Hoja:** Es aquel nodo que no contiene ningún subárbol.
- **Padre:** Nodo que antecede a otros nodos. Todos los nodos tienen un sólo padre -excepto la raíz que no tiene padre.
- **Hijos:** Nodo que no es hoja y al que se le asocia uno o varios subárboles.
- **Hermanos:** Son los nodos de un mismo padre.
- **Nodo interior:** Nodo que no es hoja ni raíz.



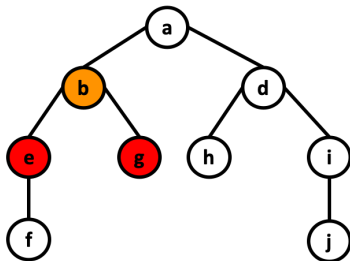
# Árboles: terminología

- **Nodo:** Son los vértices o elementos del árbol.
- **Raíz:** Es el nodo que no tiene *padre*; es decir, no es el hijo de ningún elemento. Todos los demás elementos o nodos se derivan o descienden de él.
- **Hoja:** Es aquel nodo que no contiene ningún subárbol.
- **Padre:** Nodo que antecede a otros nodos. Todos los nodos tienen un sólo padre -excepto la raíz que no tiene padre.
- **Hijos:** Nodo que no es hoja y al que se le asocia uno o varios subárboles.
- **Hermanos:** Son los nodos de un mismo padre.
- **Nodo interior:** Nodo que no es hoja ni raíz.



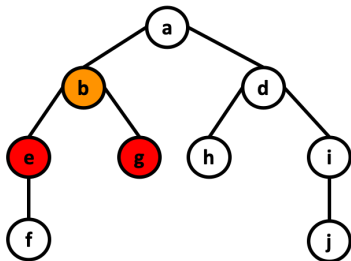
# Árboles: terminología

- **Nodo:** Son los vértices o elementos del árbol.
- **Raíz:** Es el nodo que no tiene *padre*; es decir, no es el hijo de ningún elemento. Todos los demás elementos o nodos se derivan o descienden de él.
- **Hoja:** Es aquel nodo que no contiene ningún subárbol.
- **Padre:** Nodo que antecede a otros nodos. Todos los nodos tienen un sólo padre -excepto la raíz que no tiene padre.
- **Hijos:** Nodo que desciende de otro nodo al que se le referencia como **padre**.
- **Hermanos:** Son los nodos de un mismo padre.
- **Nodo interior:** Nodo que no es hoja ni raíz.



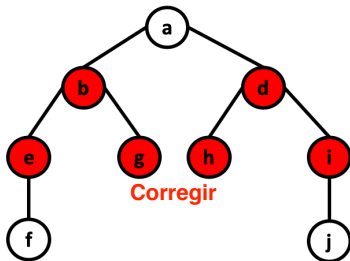
# Árboles: terminología

- **Nodo:** Son los vértices o elementos del árbol.
- **Raíz:** Es el nodo que no tiene *padre*; es decir, no es el hijo de ningún elemento. Todos los demás elementos o nodos se derivan o descienden de él.
- **Hoja:** Es aquel nodo que no contiene ningún subárbol.
- **Padre:** Nodo que antecede a otros nodos. Todos los nodos tienen un sólo padre -excepto la raíz que no tiene padre.
- **Hijos:** Nodo que desciende de otro nodo al que se le referencia como padre.
- **Hermanos:** Son los nodos de un mismo padre.
- **Nodo interior:** Nodo que no es hoja ni raíz.



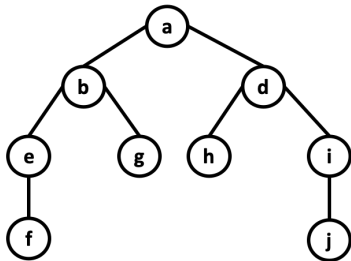
# Árboles: terminología

- **Nodo:** Son los vértices o elementos del árbol.
- **Raíz:** Es el nodo que no tiene *padre*; es decir, no es el hijo de ningún elemento. Todos los demás elementos o nodos se derivan o descienden de él.
- **Hoja:** Es aquel nodo que no contiene ningún subárbol.
- **Padre:** Nodo que antecede a otros nodos. Todos los nodos tienen un sólo padre -excepto la raíz que no tiene padre.
- **Hijos:** Nodo que desciende de otro nodo al que se le referencia como padre.
- **Hermanos:** Son los nodos de un mismo padre.
- **Nodo interior:** Nodo que no es hoja ni raíz.



## Árboles: terminología

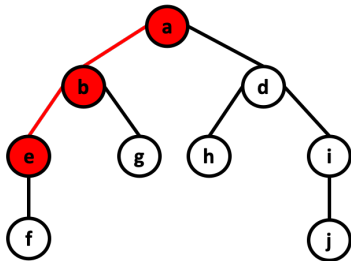
- **Bosque:** Colección de dos o más árboles.
- **Camino:** Conjunto de enlaces entre dos o más nodos consecutivos.
- **Rama:** Camino que termina en una hoja.
- **Nivel:** Es la longitud del único camino desde la raíz hasta un nodo determinado. El nivel de la raíz, por definición es cero.
- **Altura:** Es la longitud del camino más largo desde la raíz a cualquier vértice.
- **Grado:** Es el número de hijos que tiene en ese momento el nodo.
- **Orden:** Número potencial de hijos que puede tener cada elemento de un árbol.





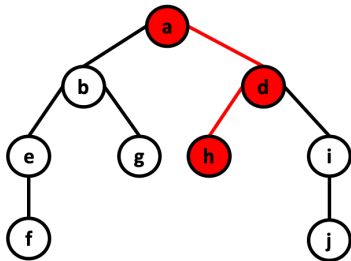
## Árboles: terminología

- **Bosque:** Colección de dos o más árboles.
- **Camino:** Conjunto de enlaces entre dos o más nodos consecutivos.
- **Rama:** Camino que termina en una hoja.
- **Nivel:** Es la longitud del único camino desde la raíz hasta un nodo determinado. El nivel de la raíz, por definición es cero.
- **Altura:** Es la longitud del camino más largo desde la raíz a cualquier vértice.
- **Grado:** Es el número de hijos que tiene en ese momento el nodo.
- **Orden:** Número potencial de hijos que puede tener cada elemento de un árbol.



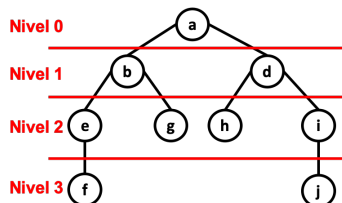
## Árboles: terminología

- **Bosque:** Colección de dos o más árboles.
- **Camino:** Conjunto de enlaces entre dos o más nodos consecutivos.
- **Rama:** Camino que termina en una hoja.
- **Nivel:** Es la longitud del único camino desde la raíz hasta un nodo determinado. El nivel de la raíz, por definición es cero.
- **Altura:** Es la longitud del camino más largo desde la raíz a cualquier vértice.
- **Grado:** Es el número de hijos que tiene en ese momento el nodo.
- **Orden:** Número potencial de hijos que puede tener cada elemento de un árbol.



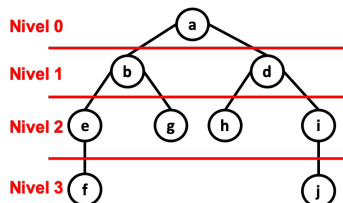
## Árboles: terminología

- **Bosque:** Colección de dos o más árboles.
- **Camino:** Conjunto de enlaces entre dos o más nodos consecutivos.
- **Rama:** Camino que termina en una hoja.
- **Nivel:** Es la longitud del único camino desde la raíz hasta un nodo determinado. El nivel de la raíz por definición es cero.
- **Altura:** Es la longitud del camino más largo desde la raíz a cualquier vértice.
- **Grado:** Es el número de hijos que tiene en ese momento el nodo.
- **Orden:** Número potencial de hijos que puede tener cada elemento de un árbol.



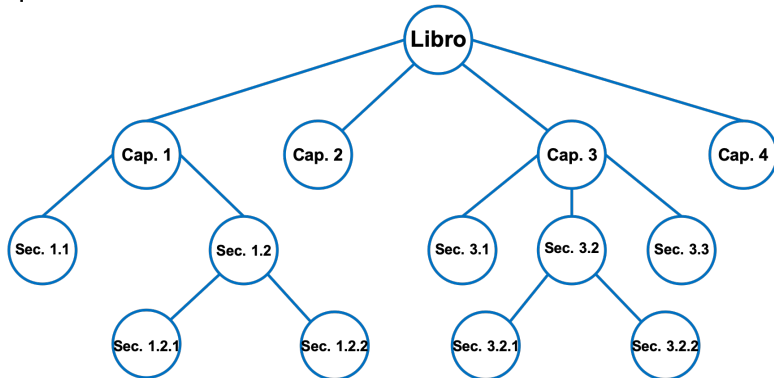
## Árboles: terminología

- **Bosque:** Colección de dos o más árboles.
- **Camino:** Conjunto de enlaces entre dos o más nodos consecutivos.
- **Rama:** Camino que termina en una hoja.
- **Nivel:** Es la longitud del único camino desde la raíz hasta un nodo determinado. El nivel de la raíz por definición es cero.
- **Altura:** Es la longitud del camino más largo desde la raíz a cualquier vértice.
- **Grado:** Es el número de hijos que tiene en ese momento el nodo.
- **Orden:** Número potencial de hijos que puede tener cada elemento de un árbol.



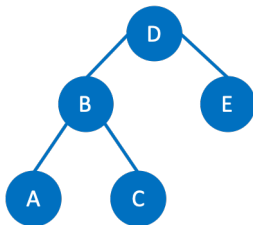
## Tipos de árboles: libre

Es una colección de nodos y aristas que satisfacen ciertos requerimientos.



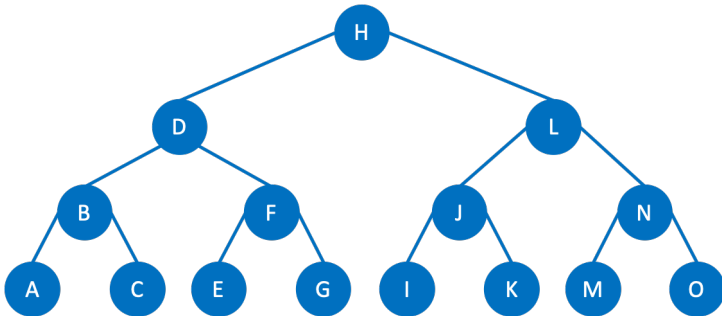
## Tipos de árboles: completo

Un árbol m-ario se considera **completo** si todo nodo interior tiene exactamente  $m$  hijos, excepto las hojas.



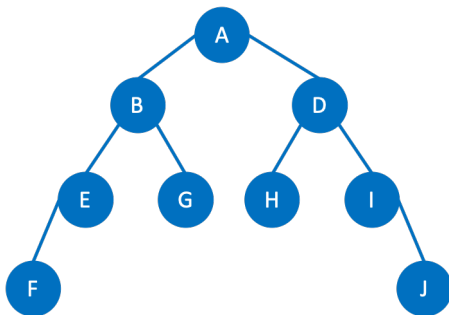
## Tipos de árboles: lleno

Un árbol m-ario se considera **lleno** si está **completo** y todas las hojas están en el mismo **nivel**.



## Tipos de árboles: balanceado

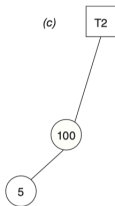
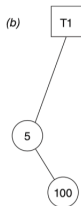
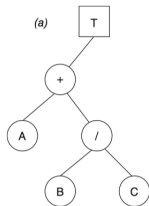
Un árbol con raíz  $m$ -ario de altura  $h$  está equilibrado o balanceado si todas sus hojas tienen altura  $h$  o  $h-1$ .





## Tipos de árboles: binario

Un **árbol binario** es un conjunto finito de cero o más nodos, tales que:



- Existe un nodo denominado raíz del árbol.
- Cada nodo puede tener 0, 1 o 2 subárboles, conocidos como subárbol izquierdo y subárbol derecho.

## Operaciones con árboles

- Insertar
- Eliminar
- Recorrer
- Buscar

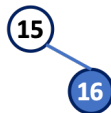
## Operaciones con árboles: insertar en árbol binario

- insertar:15

15

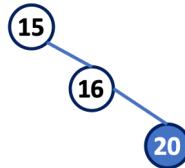
## Operaciones con árboles: insertar en árbol binario

- insertar:15
- **insertar:16**



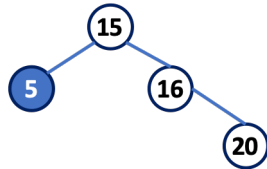
## Operaciones con árboles: insertar en árbol binario

- insertar:15
- insertar:16
- **insertar:20**



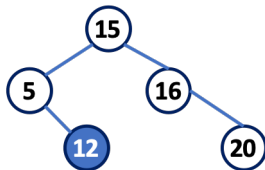
## Operaciones con árboles: insertar en árbol binario

- insertar:15
- insertar:16
- insertar:20
- **insertar:5**



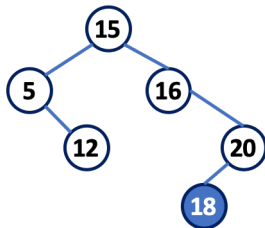
## Operaciones con árboles: insertar en árbol binario

- insertar:15
- insertar:16
- insertar:20
- insertar:5
- **insertar:12**



## Operaciones con árboles: insertar en árbol binario

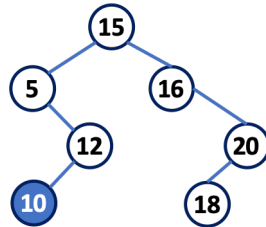
- insertar:15
- insertar:16
- insertar:20
- insertar:5
- insertar:12
- **insertar:18**





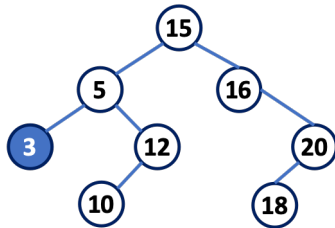
## Operaciones con árboles: insertar en árbol binario

- insertar:15
- insertar:16
- insertar:20
- insertar:5
- insertar:12
- insertar:18
- **insertar:10**



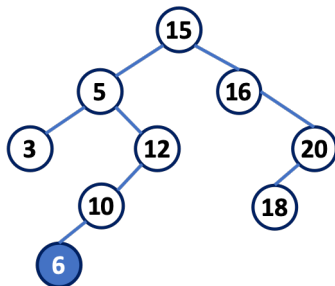
## Operaciones con árboles: insertar en árbol binario

- insertar:15
- insertar:16
- insertar:20
- insertar:5
- insertar:12
- insertar:18
- insertar:10
- **insertar:3**



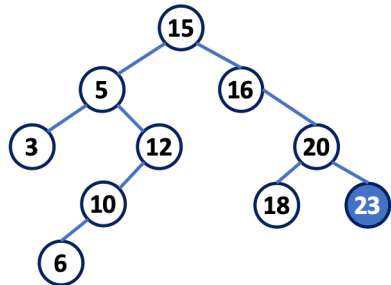
## Operaciones con árboles: insertar en árbol binario

- insertar:15
- insertar:16
- insertar:20
- insertar:5
- insertar:12
- insertar:18
- insertar:10
- insertar:3
- **insertar:6**



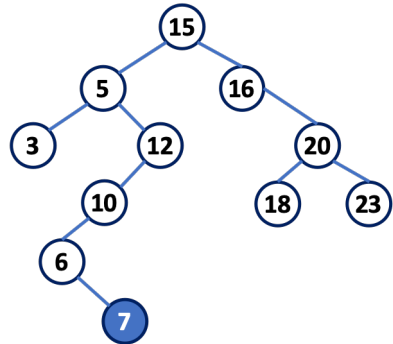
## Operaciones con árboles: insertar en árbol binario

- insertar:15
- insertar:16
- insertar:20
- insertar:5
- insertar:12
- insertar:18
- insertar:10
- insertar:3
- insertar:6
- **insertar:23**



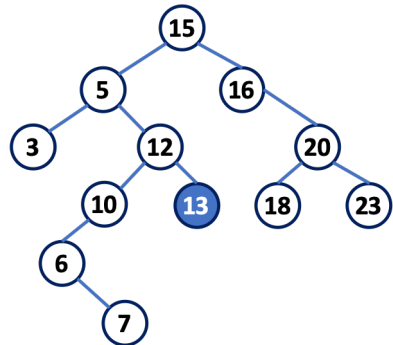
## Operaciones con árboles: insertar en árbol binario

- insertar:15
- insertar:16
- insertar:20
- insertar:5
- insertar:12
- insertar:18
- insertar:10
- insertar:3
- insertar:6
- insertar:23
- **insertar:7**



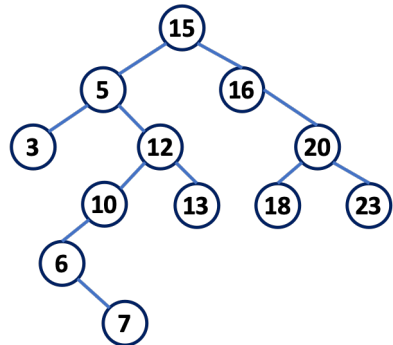
## Operaciones con árboles: insertar en árbol binario

- insertar:15
- insertar:16
- insertar:20
- insertar:5
- insertar:12
- insertar:18
- insertar:10
- insertar:3
- insertar:6
- insertar:23
- insertar:7
- **insertar:13**



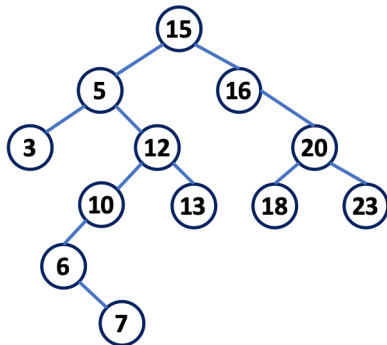
## Operaciones con árboles: insertar en árbol binario

- insertar:15
- insertar:16
- insertar:20
- insertar:5
- insertar:12
- insertar:18
- insertar:10
- insertar:3
- insertar:6
- insertar:23
- insertar:7
- insertar:13



## Operaciones con árboles: eliminar en árbol binario

- 1 El nodo a eliminar es una hoja.
- 2 El nodo a eliminar tiene 1 hijo.
- 3 El nodo a eliminar tiene 2 hijos.

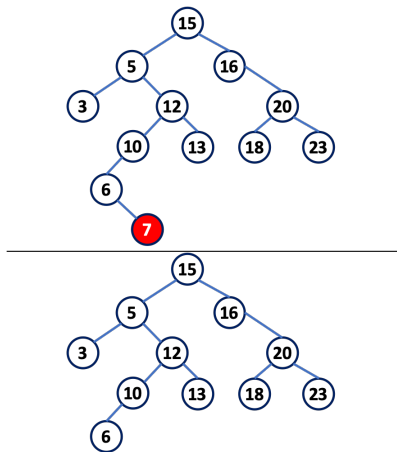




## Operaciones con árboles: eliminar en árbol binario

El nodo a eliminar es una hoja:

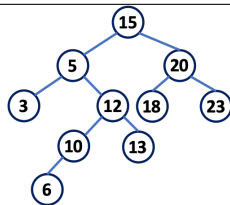
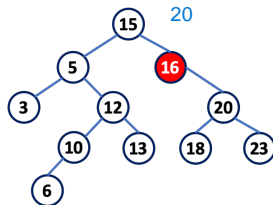
- eliminar: 7



## Operaciones con árboles: eliminar en árbol binario

El nodo a eliminar tiene 1 hijo:

- eliminar: 16



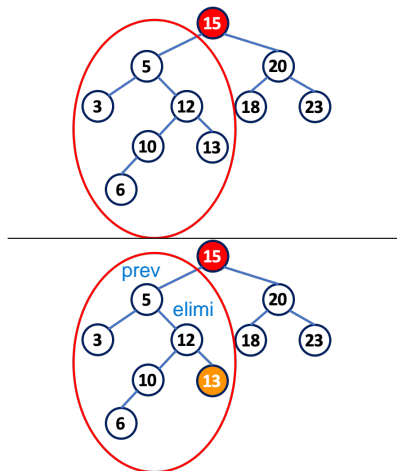
## Operaciones con árboles: eliminar en árbol binario

**El nodo a eliminar tiene 2 hijos:**

- 1 Predecesor: es el nodo más derecho del subárbol izquierdo.
- 2 Sucesor: es el nodo más izquierdo del subárbol derecho.

Eliminar utilizando el **predecesor**:

- **eliminar: 15**



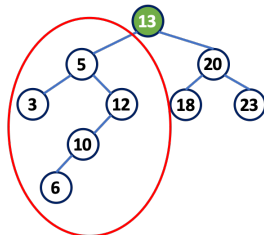
## Operaciones con árboles: eliminar en árbol binario

### El nodo a eliminar tiene 2 hijos:

- 1 Predecesor: es el nodo más derecho del subárbol izquierdo.
- 2 Sucesor: es el nodo más izquierdo del subárbol derecho.

Eliminar utilizando el **predecesor**:

- **eliminar: 15**



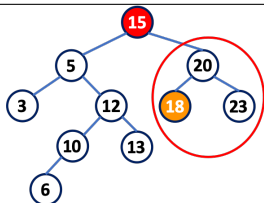
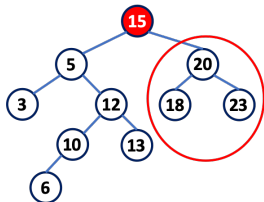
## Operaciones con árboles: eliminar en árbol binario

**El nodo a eliminar tiene 2 hijos:**

- 1 Predecesor: es el nodo más derecho del subárbol izquierdo.
- 2 Sucesor: es el nodo más izquierdo del subárbol derecho.

Eliminar utilizando el **sucesor**:

- **eliminar: 15**



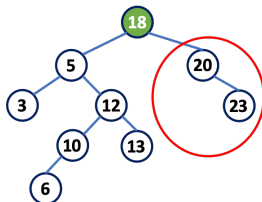
## Operaciones con árboles: eliminar en árbol binario

### El nodo a eliminar tiene 2 hijos:

- 1 Predecesor: es el nodo más derecho del subárbol izquierdo.
- 2 Sucesor: es el nodo más izquierdo del subárbol derecho.

Eliminar utilizando el **sucesor**:

- **eliminar: 15**



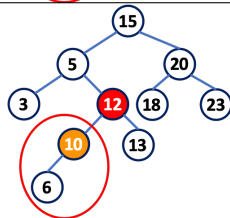
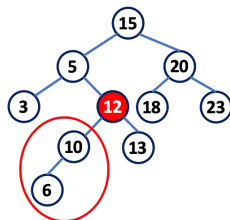
## Operaciones con árboles: eliminar en árbol binario

**El nodo a eliminar tiene 2 hijos:**

- 1 Predecesor: es el nodo más derecho del subárbol izquierdo.
- 2 Sucesor: es el nodo más izquierdo del subárbol derecho.

Eliminar utilizando el **predecesor**:

- **eliminar:** 12



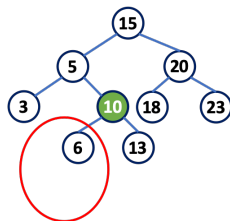
## Operaciones con árboles: eliminar en árbol binario

### El nodo a eliminar tiene 2 hijos:

- 1 Predecesor: es el nodo más derecho del subárbol izquierdo.
- 2 Sucesor: es el nodo más izquierdo del subárbol derecho.

Eliminar utilizando el **predecesor**:

- **eliminar:** 12





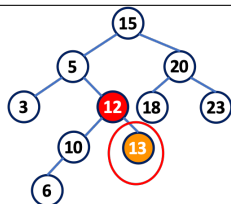
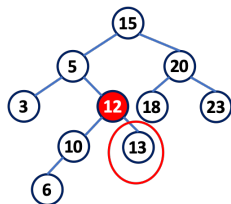
## Operaciones con árboles: eliminar en árbol binario

**El nodo a eliminar tiene 2 hijos:**

- 1 Predecesor: es el nodo más derecho del subárbol izquierdo.
- 2 Sucesor: es el nodo más izquierdo del subárbol derecho.

Eliminar utilizando el **sucesor**:

- **eliminar:** 12



## Operaciones con árboles: eliminar en árbol binario

### El nodo a eliminar tiene 2 hijos:

- 1 Predecesor: es el nodo más derecho del subárbol izquierdo.
- 2 Sucesor: es el nodo más izquierdo del subárbol derecho.

Eliminar utilizando el **sucesor**:

- **eliminar: 12**

