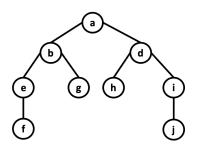
# Árboles

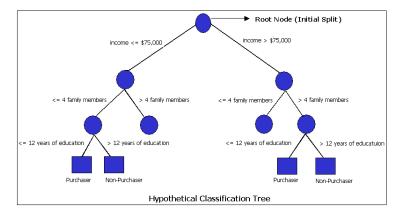
 Estructura de datos no lineal que modela una estructura jerárquica.



TV0M - LAN - MASH 2 / 135

#### Árboles: aplicaciones

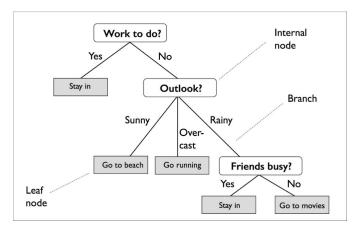
#### Problemas de clasificación



TV0M - LAN - MASH 3 / 135

### Árboles: aplicaciones

#### Problemas de decisión



TVOM - LAN - MASH 4 / 135

## Árboles: aplicaciones

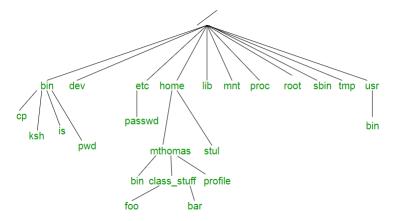
#### Problemas de decisión



TV0M - LAN - MASH 5 / 135

### Árboles: aplicaciones

#### Sistemas de archivos



TV0M - LAN - MASH 6 / 135

## Árboles: aplicaciones

#### Árboles sintácticos

```
x := a + b;

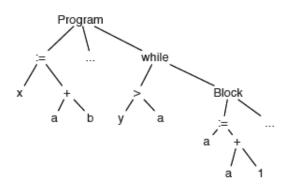
y := a * b;

while (y > a) {

a := a + 1;

x := a + b

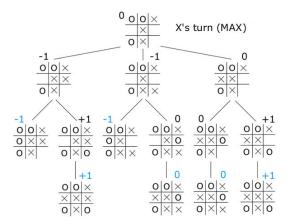
}
```



TV0M - LAN - MASH 7 / 135

#### Árboles: aplicaciones

# Árboles de juegos



TV0M - LAN - MASH 8 / 135

#### Árboles: aplicaciones

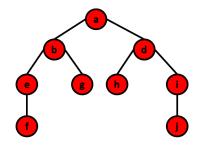
- · Algorítmica: en los métodos de clasificación y búsqueda.
- Compiladores: como árboles sintácticos para representar las expresiones o producciones posibles de un lenguaje.
- Inteligencia artificial: árboles de juegos, de decisiones, de resolución.
- · Etc.

TVOM - LAN - MASH 9 / 135

\_\_\_\_ Árboles

#### Árboles: terminología

- Nodo: Son los vértices o elementos del árbol.
- Arista: Es una conexión entre dos nodos.
- Raíz: Es el nodo que no tiene padre, es decir, no es el hijo de ningún elemento.
   Todos los demás elementos o nodos se derivan o descienden de él.
- Hoja: Es aquel nodo que no contiene ningún subárbol.
- Padre: Nodo que antecede a otros nodos.
   Todos los nodos tienen un sólo padre -excepto la raíz que no tiene padre.
- Hijos: Nodo que no es hoja y al que se le asocia uno o varios subárboles
- Hermanos: Son los nodos de un mismo padre.
- Nodo interior: Nodo que no es hoja ni raíz.

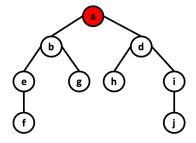


TVOM - LAN - MASH 10 / 135

#### Árboles: terminología

AED

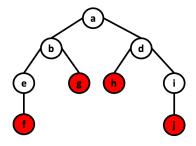
- Nodo: Son los vértices o elementos del árbol.
- Raíz: Es el nodo que no tiene padre:, es decir, no es el hijo de ningún elemento.
   Todos los demás elementos o nodos se derivan o descienden de él
- Hoja: Es aquel nodo que no contiene ningún subárbol.
- Padre: Nodo que antecede a otros nodos.
   Todos los nodos tienen un sólo padre -excepto la raíz que no tiene padre.
- Hijos: Nodo que no es hoja y al que se le asocia uno o varios subárboles.
- Hermanos: Son los nodos de un mismo padre.
- Nodo interior: Nodo que no es hoja ni raíz.



TVOM - LAN - MASH 11 / 135

#### Árboles: terminología

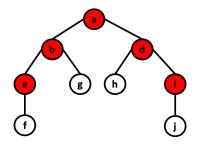
- Nodo: Son los vértices o elementos del árbol.
- Raíz: Es el nodo que no tiene padre:, es decir, no es el hijo de ningún elemento.
   Todos los demás elementos o nodos se derivan o descienden de él
- Hoja: Es aquel nodo que no contiene ningún subárbol.
- Padre: Nodo que antecede a otros nodos.
   Todos los nodos tienen un sólo padre -excepto la raíz que no tiene padre.
- Hijos: Nodo que no es hoja y al que se le asocia uno o varios subárboles.
- Hermanos: Son los nodos de un mismo padre.
- Nodo interior: Nodo que no es hoja ni raíz.



TVOM - LAN - MASH 12 / 135

#### Árboles: terminología

- Nodo: Son los vértices o elementos del árbol.
- Raíz: Es el nodo que no tiene padre:, es decir, no es el hijo de ningún elemento.
   Todos los demás elementos o nodos se derivan o descienden de él
- Hoja: Es aquel nodo que no contiene ningún subárbol.
- Padre: Nodo que antecede a otros nodos.
   Todos los nodos tienen un sólo padre -excepto la raíz que no tiene padre.
- Hijos: Nodo que no es hoja y al que se le asocia uno o varios subárboles.
- Hermanos: Son los nodos de un mismo padre.
- Nodo interior: Nodo que no es hoja ni raíz.

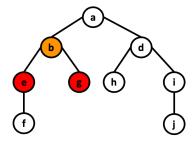


TV0M - LAN - MASH 13 / 135

## Árboles: terminología

AED

- Nodo: Son los vértices o elementos del árbol.
- Raíz: Es el nodo que no tiene padre:, es decir, no es el hijo de ningún elemento.
   Todos los demás elementos o nodos se derivan o descienden de él.
- Hoja: Es aquel nodo que no contiene ningún subárbol.
- Padre: Nodo que antecede a otros nodos.
   Todos los nodos tienen un sólo padre -excepto la raíz que no tiene padre.
- Hijos: Nodo que desciende de otro nodo al que se le referencia como padre.
- Hermanos: Son los nodos de un mismo padre.
- Nodo interior: Nodo que no es hoja ni raíz.

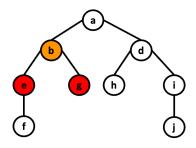


TVOM - LAN - MASH 14 / 135

## Árboles: terminología

AED

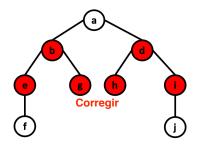
- Nodo: Son los vértices o elementos del árbol.
- Raíz: Es el nodo que no tiene padre:, es decir, no es el hijo de ningún elemento. Todos los demás elementos o nodos se derivan o descienden de él.
- Hoja: Es aquel nodo que no contiene ningún subárbol.
- Padre: Nodo que antecede a otros nodos.
   Todos los nodos tienen un sólo padre -excepto la raíz que no tiene padre.
- Hijos: Nodo que desciende de otro nodo al que se le referencia como padre.
- Hermanos: Son los nodos de un mismo padre.
- Nodo interior: Nodo que no es hoja ni raíz.



TVOM - LAN - MASH 15 / 135

#### Árboles: terminología

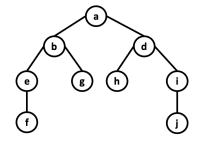
- Nodo: Son los vértices o elementos del árbol.
- Raíz: Es el nodo que no tiene padre:, es decir, no es el hijo de ningún elemento.
   Todos los demás elementos o nodos se derivan o descienden de él
- Hoja: Es aquel nodo que no contiene ningún subárbol.
- Padre: Nodo que antecede a otros nodos.
   Todos los nodos tienen un sólo padre -excepto la raíz que no tiene padre.
- Hijos: Nodo que desciende de otro nodo al que se le referencia como padre.
- Hermanos: Son los nodos de un mismo padre.
- Nodo interior: Nodo que no es hoja ni raíz.



TV0M - LAN - MASH 16 / 135

#### Árboles: terminología

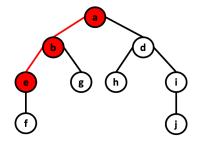
- Bosque: Colección de dos o más árboles.
- Camino: Conjunto de enlaces entre dos o más nodos consecutivos.
- Rama: Camino que termina en una hoja.
- Nivel: Es la longitud del único camino desde la raíz hasta un nodo determinado. El nivel de la raíz, por definición es cero.
- Altura: Es la longitud del camino más largo desde la raíz a cualquier vértice.
- Grado: Es el número de hijos que tiene en ese momento el nodo.
- Orden: Número potencial de hijos que puede tener cada elemento de un árbol.



TVOM - LAN - MASH 17 / 135

## Árboles: terminología

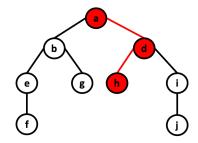
- Bosque: Colección de dos o más árboles.
- Camino: Conjunto de enlaces entre dos o más nodos consecutivos.
- Rama: Camino que termina en una hoja.
- Nivel: Es la longitud del único camino desde la raíz hasta un nodo determinado. El nivel de la raíz, por definición es cero.
- Altura: Es la longitud del camino más largo desde la raíz a cualquier vértice.
- Grado: Es el número de hijos que tiene en ese momento el nodo.
- Orden: Número potencial de hijos que puede tener cada elemento de un árbol.



TV0M - LAN - MASH 18 / 135

## Árboles: terminología

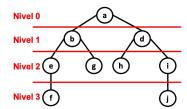
- Bosque: Colección de dos o más árboles.
- Camino: Conjunto de enlaces entre dos o más nodos consecutivos.
- Rama: Camino que termina en una hoja.
- Nivel: Es la longitud del único camino desde la raíz hasta un nodo determinado. El nivel de la raíz, por definición es cero.
- Altura: Es la longitud del camino más largo desde la raíz a cualquier vértice.
- Grado: Es el número de hijos que tiene en ese momento el nodo.
- Orden: Número potencial de hijos que puede tener cada elemento de un árbol.



TV0M - LAN - MASH 19 / 135

### Árboles: terminología

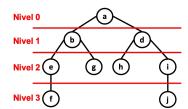
- Bosque: Colección de dos o más árboles.
- Camino: Conjunto de enlaces entre dos o más nodos consecutivos.
- \* Rama: Camino que termina en una hoja.
- Nivel: Es la longitud del único camino desde la raíz hasta un nodo determinado. El nivel de la raíz por definición es cero.
- Altura: Es la longitud del camino más largo desde la raíz a cualquier vértice.
- Grado: Es el número de hijos que tiene en ese momento el nodo.
- Orden: Número potencial de hijos que puede tener cada elemento de un árbol.



TV0M - LAN - MASH 20 / 135

## Árboles: terminología

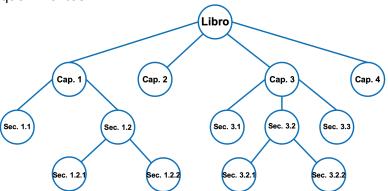
- Bosque: Colección de dos o más árboles.
- Camino: Conjunto de enlaces entre dos o más nodos consecutivos.
- Rama: Camino que termina en una hoja.
- Nivel: Es la longitud del único camino desde la raíz hasta un nodo determinado. El nivel de la raíz por definición es cero.
- Altura: Es la longitud del camino más largo desde la raíz a cualquier vértice.
- Grado: Es el número de hijos que tiene en ese momento el nodo.
- Orden: Número potencial de hijos que puede tener cada elemento de un árbol.



TVOM - LAN - MASH 21 / 135

#### Tipos de árboles: libre

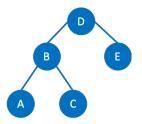
Es una colección de nodos y aristas que satisfacen ciertos requerimientos.



TVOM - LAN - MASH 22 / 135

#### Tipos de árboles: completo

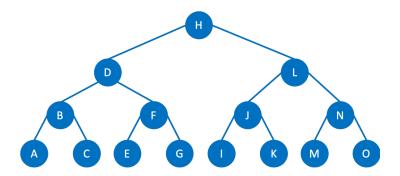
Un árbol m-ario se considera **completo** si todo nodo interior tiene exactamente m hijos, excepto las hojas.



TVOM - LAN - MASH 23 / 135

#### Tipos de árboles: lleno

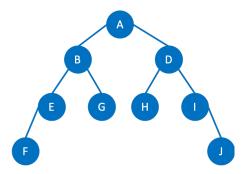
Un árbol m-ario se considera **lleno** si está **completo** y todas las hojas están en el mismo **nivel**.



TVOM - LAN - MASH 24 / 135

#### Tipos de árboles: balanceado

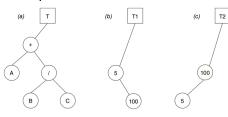
Un árbol con raíz m-ario de altura h está equilibrado o balanceado si todas sus hojas tienen altura h o h-1.



TVOM - LAN - MASH 25 / 135

#### Tipos de árboles: binario

Un **árbol binario** es un conjunto finito de cero o más nodos, tales que:



- Existe un nodo denominado raíz del árbol
- Cada nodo puede tener 0, 1 o 2 subárboles, conocidos como subárbol izquierdo y subárbol derecho.

TV0M - LAN - MASH 26 / 135

# Operaciones con árboles

- Insertar
- Eliminar
- Recorrer
- Buscar

TVOM - LAN - MASH 27 / 135

# Operaciones con árboles: insertar en árbol binario

• insertar:15

15

TVOM - LAN - MASH 28 / 135

## Operaciones con árboles: insertar en árbol binario

• insertar:15

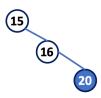
• insertar:16



TVOM - LAN - MASH 29 / 135

## Operaciones con árboles: insertar en árbol binario

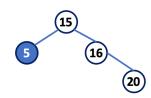
- insertar:15
- insertar:16
- insertar:20



TV0M - LAN - MASH 30 / 135

# Operaciones con árboles: insertar en árbol binario

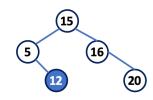
- insertar:15
- insertar:16
- insertar:20
- insertar:5



TV0M - LAN - MASH 31 / 135

# Operaciones con árboles: insertar en árbol binario

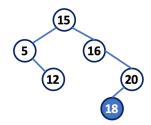
- insertar:15
- insertar:16
- insertar:20
- insertar:5
- insertar:12



TVOM - LAN - MASH 32 / 135

### Operaciones con árboles: insertar en árbol binario

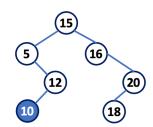
- insertar:15
- insertar:16
- insertar:20
- insertar:5
- insertar:12
- insertar:18



TVOM - LAN - MASH 33 / 135

### Operaciones con árboles: insertar en árbol binario

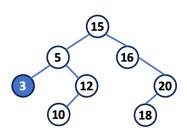
- insertar:15
- insertar:16
- insertar:20
- insertar:5
- insertar:12
- insertar:18
- insertar:10



TV0M - LAN - MASH 34 / 135

### Operaciones con árboles: insertar en árbol binario

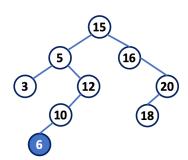
- insertar:15
- insertar:16
- insertar:20
- insertar:5
- insertar:12
- insertar:18
- insertar:10
- insertar:3



TVOM - LAN - MASH 35 / 135

#### Operaciones con árboles: insertar en árbol binario

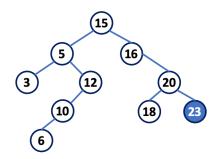
- insertar:15
- insertar:16
- insertar:20
- insertar:5
- insertar:12
- insertar:18
- insertar:10
- insertar:3
- insertar:6



TVOM - LAN - MASH 36 / 135

#### Operaciones con árboles: insertar en árbol binario

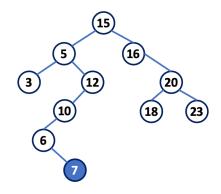
- insertar:15
- insertar:16
- insertar:20
- insertar:5
- insertar:12
- insertar:18
- insertar:10
- insertar:3
- insertar:6
- insertar:23



TV0M - LAN - MASH 37 / 135

## Operaciones con árboles: insertar en árbol binario

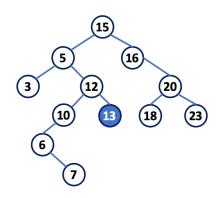
- insertar:15
- insertar:16
- insertar:20
- insertar:5
- insertar:12
- insertar:18
- insertar:10
- insertar:3
- insertar:6
- insertar:23
- insertar:7



TV0M - LAN - MASH 38 / 135

## Operaciones con árboles: insertar en árbol binario

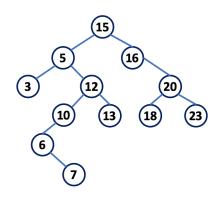
- insertar:15
- insertar:16
- insertar:20
- insertar:5
- insertar:12
- insertar:18
- insertar:10
- insertar:3
- insertar:6
- insertar:23
- insertar:7
- insertar:13



TV0M - LAN - MASH 39 / 135

## Operaciones con árboles: insertar en árbol binario

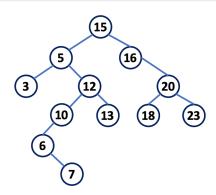
- insertar:15
- insertar:16
- insertar:20
- insertar:5
- insertar:12
- insertar:18
- insertar:10
- insertar:3
- insertar:6
- insertar:23
- insertar:7
- insertar:13



TV0M - LAN - MASH 40 / 135

# Operaciones con árboles: eliminar en árbol binario

- 1 El nodo a eliminar es una hoja.
- El nodo a eliminar tiene 1 hijo.
- 3 El nodo a eliminar tiene 2 hijos.

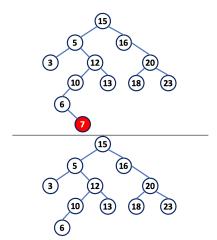


TV0M - LAN - MASH 41 / 135

# Operaciones con árboles: eliminar en árbol binario

### El nodo a eliminar es una hoja:

• eliminar: 7

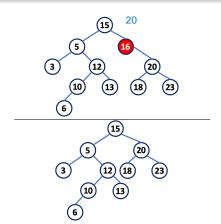


TVOM - LAN - MASH 42 / 135

# Operaciones con árboles: eliminar en árbol binario

El nodo a eliminar tiene 1 hijo:

• eliminar: 16



TV0M - LAN - MASH 43 / 135

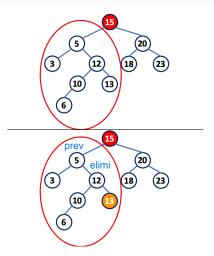
### Operaciones con árboles: eliminar en árbol binario

### El nodo a eliminar tiene 2 hijos:

- 1 Predecesor: es el nodo más derecho del subárbol izquierdo.
- 2 Sucesor: es el nodo más izquierdo del subárbol derecho.

#### Eliminar utilizando el predecesor:

eliminar: 15



TVOM - LAN - MASH 44 / 135

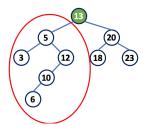
### Operaciones con árboles: eliminar en árbol binario

### El nodo a eliminar tiene 2 hijos:

- Predecesor: es el nodo más derecho del subárbol izquierdo.
- 2 Sucesor: es el nodo más izquierdo del subárbol derecho.

#### Eliminar utilizando el predecesor:

• eliminar: 15



TVOM - LAN - MASH 45 / 135

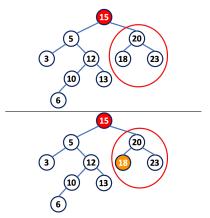
## Operaciones con árboles: eliminar en árbol binario

### El nodo a eliminar tiene 2 hijos:

- 1 Predecesor: es el nodo más derecho del subárbol izquierdo.
- 2 Sucesor: es el nodo más izquierdo del subárbol derecho.

#### Fliminar utilizando el sucesor:

eliminar: 15



TVOM - LAN - MASH 46 / 135

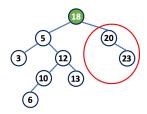
### Operaciones con árboles: eliminar en árbol binario

### El nodo a eliminar tiene 2 hijos:

- Predecesor: es el nodo más derecho del subárbol izquierdo.
- 2 Sucesor: es el nodo más izquierdo del subárbol derecho.

#### Eliminar utilizando el sucesor:

eliminar: 15



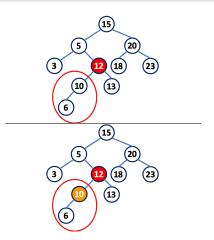
## Operaciones con árboles: eliminar en árbol binario

### El nodo a eliminar tiene 2 hijos:

- 1 Predecesor: es el nodo más derecho del subárbol izquierdo.
- 2 Sucesor: es el nodo más izquierdo del subárbol derecho.

#### Eliminar utilizando el predecesor:

eliminar: 12



TVOM - LAN - MASH 48 / 135

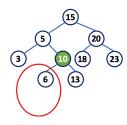
### Operaciones con árboles: eliminar en árbol binario

### El nodo a eliminar tiene 2 hijos:

- Predecesor: es el nodo más derecho del subárbol izquierdo.
- 2 Sucesor: es el nodo más izquierdo del subárbol derecho.

#### Eliminar utilizando el predecesor:

eliminar: 12



TVOM - LAN - MASH 49 / 135

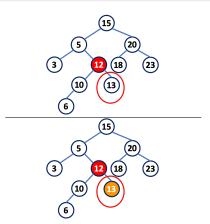
## Operaciones con árboles: eliminar en árbol binario

#### El nodo a eliminar tiene 2 hijos:

- 1 Predecesor: es el nodo más derecho del subárbol izquierdo.
- 2 Sucesor: es el nodo más izquierdo del subárbol derecho.

#### Fliminar utilizando el sucesor:

eliminar: 12



TVOM - LAN - MASH 50 / 135

### Operaciones con árboles: eliminar en árbol binario

### El nodo a eliminar tiene 2 hijos:

- Predecesor: es el nodo más derecho del subárbol izquierdo.
- 2 Sucesor: es el nodo más izquierdo del subárbol derecho.

#### Eliminar utilizando el sucesor:

eliminar: 12

