Instituto Politécnico Nacional

Escuela Superiror de Computación

Matematicas Avanzadas para la Ingenieria

Profesor:
Miguel Gonzales Trujillo
Alumno:
Alcantara Covarrubias Erik
Email: erik.alcova@gmail.com
Grupo: 4SCM6

Contents

Primer Parcial

Segundo Parcial

Integracion Compleja

Segun el teorema fundamental del calculo, existe una funcion F = f(x):
a) Tal que la integral de A a B de f(x) dx es: F(B) - F(A)
b) La derivada de una funcion antiderivada es igual a la funcion original
Ahora sea f(z) una funcion compleja definida en todo z que es real.
f(z) solo podra ser integrada con $\int_\gamma f(z)dz$ donde; γ = trayectoria o camino.
A esto se le llamara integral de curva o linea.

Parametrizacion

Por ejemplo si tenemos una curva γ nosotros podemos parametrizarla o describirla con una ecuacion compleja:
Digamos que γ_1 = 1+i y γ_0 = 0+i0, z lo podemos expresar en su forma x+iy;
Si calculamos su formula como si fuera una recta en el plano cartesiano (y = mx+b) entonces;
En este caso m = 1 y b = 0, podemos calcular que $x = t\epsilon[0, 1]$ y $y = x = t\epsilon[0, 1]$
Por lo tanto ambas partes dependen de t, si reemplazamos en la ecuacion original, obtenemos $z(t) = t + it$ donde $t\epsilon[0, 1]$
Teniendo la ecuacion parametrizada podemos porfin definir una integral para numeros complejos:
$\int_{z(t_0)}^{z(t_1)} f(t)\frac{dz}{dt}dt$ donde $f(t)$ es una funcion compleja $f(z) = u(t) + iv(t)$.
Podemos identificar la nueva ecuacion como $\int_\gamma f(z) = \int_\gamma (u(t) + v(i))dz = \int_\gamma u(t)dz + i\int_\gamma v(t)dz$

Tipos de curva

Teniendo diferentes curvas de tipo;
a) Curva simple abierta (Normales)
b) Curva simple cerrada (circulares)
c) Curva no simple cerrada (circulares con irregularidades)
d) Curva simple por partes [Spp] (Normales compuestas)

Definicion

Sea γ una curva definida por;
$z = z(t)$ donde $t\epsilon I$
γ es una curva simple si dados t_1 y $t_2\epsilon I$ tales que $t_1 \neq t_2$ y $z(t_1) \neq z(t_2)$
γ es una curva cerrada si $z(t_0) = z(t_f)$, $t_1 \neq t_2$ y $z(t_1) \neq z(t_2)$
γ es una curva no simple cerrada si $z(t_0) = z(t_f)$, $t_1 \neq t_2$ y $z(t_1) = z(t_2)$
γ es una curva simple por partes si cada parte es una curva simple
Estas definicioes sirven para resolver f(z): $\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f[z(t)]\frac{dz}{dt}dt$

Ejercicio 1

Parametrice los sig. Arcos o curvas; En un punto de 1 a i
Esta recta se puede definir como $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$
$\gamma_1 = Z_1(t) = 1 + ti \ \forall \ t\epsilon[0,1]$
$\gamma_2 = Z_2(t) = (2-t) + i \ \forall \ t\epsilon[1,2]$
Nota: γ_2 puede escribirse diferente, pero surgen problemas al duplicarse y usar el mismo intervalo, por lo que la formula propuesta soluciona estos problemas
Definimos $\frac{dz}{dt} = i\forall t\epsilon[0,1]$ o $(-1)\forall t\epsilon[1,2]$
Para f(z) = 1 =>
$\int_\gamma f(z)dz = \int_{\gamma_1} 1dz + \int_{\gamma_2} 1dz = \int_0^1 1(i)dt + \int_1^2 1(-1)dt = i-1$

Ejercicio 2

Siendo f(z) = z^2 y $\rho = 2$
La formula del circulo es: $x^2+y^2 = r^2 => x^2+y^2 = 2^2$
Por definicion en coordenadas polares: $x = \rho Sen(t)$ y $y = \rho Cos(t)$
Sustituyendo $z(t) = [2Sen(t)]^2 + i[2Cos(t)]^2 = 2^2 \ \forall \ t\epsilon[0,2\pi]$
Derivando $\frac{dz}{dt} = [-2Sen(t) + 2iCos(t)]dt = \frac{-2}{i}[Cos(t) + iSen(t)]dt$
$= \frac{-2}{i}e^{it}dt \ \forall \ t\epsilon[0,2\pi]$
Integrando $\int_0^{2\pi}[-2Sen(t) + 2iCos(t)]^2 \frac{-2}{i}e^{it}dt$
Usando la formula= $\int f(z)dz = \int z^2dz$
$\int_0^{2\pi} 4[Cos(t) + iSen(t)]^2 \frac{-2}{i}e^{it}dt = \int_0^{2\pi} 4(e^{it})^2 \frac{-2}{i}e^{it}dt = \int_0^{2\pi}[4(e^{2it})(\frac{-2}{i}e^{it})]dt$
$= \frac{-8}{i}\int_0^{2\pi}[(e^{2it})(e^{it})]dt = \frac{-8}{i}\int_0^{2\pi}(e^{3it})dt = \frac{-8}{i}[-\frac{i}{3}e^{3it}]|_0^{2\pi}$
$= \frac{-8}{i}(-\frac{i}{3} * 0) = -\frac{8}{i} * 0 = 0$

Ejercicio 3

Evalue $\int_\gamma ydz$ donde γ que es una linea que une a 1 con i:
La linea tiene una formula similar a $y = mx + b$
Por lo que la recta que necesitamos calcular es $z(t) = 1 - t + it \ \forall \ t\epsilon[-1,1]$
$\frac{dz}{dt} = \frac{d([1-t]+it)}{dt} \ \forall \ t\epsilon[0,1]$
$\int_0^1 t(-1+i)dt = (-1+i)\int_0^1 tdt = \frac{(-1+i)}{2}(1^2-0^2) = (-1+i)\frac{t^2}{2} = \frac{(-1+i)}{2}$

Ejercicio 3

$\int_\gamma e^z$ donde $|z| = 1$ γ une los puntos 1 e i
$X = Cos(t) \ || \ Y = Sen(t)$
$z(t) = Cos(t) + iSen(t) \ \forall \ t\epsilon[0, \frac{\pi}{2}]$
$\frac{dz}{dt} = [-Sen(t) + iCos(t)]dt$
$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{Cos(t)+iSen(t)}[-Sen(t) + iCos(t)]dt$ si $u = Cos(t) + iSen(t)$
$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^u du = e^i - e$

Parametrizacion para limites complejos

Sea F(z) una funcion analitica, tal que $\frac{dF(z)}{dt} = f(z)$ en una region $R \subset \mathbb{C}$, si γ es un arco spp definido por $z = z(t)\ \forall\ t\epsilon[a,b]$ contenido en R
Entonces: $\int_\gamma f(z)dz = F(b) - F(a)$
NOTA: Para la forma analitica se necesita que la derivada sea continua y se cumpla las ecuaciones de Cauchi-Riemman
Si $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$(arco cerrado) entonces $\int_\gamma f(z)dz = 0$

Problema #1

Demuestre que $\int_\gamma \frac{1}{z}dz = 2\pi i$ donde el arco esta definido por $|z| = 1$
$x^2 + y^2 = 1$ y $z = x + iy$
$x = Cos(t)\ \forall\ t\epsilon[0, 2\pi]$
$y = Sen(t)\ \forall\ t\epsilon[0, 2\pi]$
$z = Cos(t) + iSen(t)$
$dz = [Cos(t) + iSen(t)]' = -Sen(t) + iCos(t)dt$
$\int_0^{2\pi} \frac{-Sen(t)+iCos(t)dt}{Cos(t)+iSen(t)} = \int_0^{2\pi} e^{-it} * ie^{it}dt = i(t)_0^{2\pi} = 2i\pi$

Problema #2

Encuentra la $\int_\gamma \overline{Z}$ si el largo es un circulo de radio R, centrado en $Z_0 = a$
Parametrizando: Circulo => $(x - a_{rea})^2 + (y - a_{img})^2 = R^2$
Proponiendo: $X = a_{rea} + RCos(t)$ y $Y = a_{img} + RSen(t)\ \forall\ t\epsilon[0, 2\pi]$
Reemplazando: $Z = (a_{rea} + RCos(t)) + i(a_{img} + RSen(t))$
Entonces: $\overline{Z} = (a_{rea} + RCos(t)) - i(a_{img} + RSen(t))$
Derivando: $dz = [(a_{rea} + RCos(t)) - i(a_{img} + RSen(t))]'dt$
$= -RSen(t) - iRCos(t)dt$
Integral de linea: $\int_0^{2\pi}[a_{rea}+RCos(t)]+i[a_{img}+RSen(t)][-RSen(t)-iRCos(t)]dt$
$= \int_0^{2\pi}[a_{rea} + RCos(t)] + i[a_{img} + RSen(t)] - R[Sen(t) + iCos(t)]dt$
Resultado (??): $= 2\pi iR^2$

Teorema de Cauchy

Sea $f(z)$ una funcion analitica, para todo z en el interior y sobre una curva γ de borde Spp entonces:
$\int_\gamma f(z)dz = 0$

Problema #3

Encuentre σ_γ de $\frac{Z}{Z^2+4}$ donde γ es el $|z| = 1$
$\frac{df}{dz} = \frac{(1)(z^2+4)-(2z)(z)}{(z^2+4)^2} = \frac{4-z^2}{(z^2+4)^2}$ $\therefore$ Si es continua en γ y en su interior.
Teorema de Cauchy: $\int_\gamma \frac{z}{z^2+4}dz = 0$

Comprobacion

Parametrizando $|z| = 1 = e^{it}$ $\forall$ $t\epsilon[0, 2\pi]$
$dz = ie^{it}dt$
$\int_0^{2\pi} \frac{e^{it}}{(e^{it})^2+4} ie^{it}dt = \int_0^{2\pi} \frac{ie^{2it}}{(e^{it})^2+4}dt = i\int_0^{2\pi} \frac{e^{2it}}{(e^{2it})+4}dt$
Cambio de variable: $u = e^{2it} + 4$ y $du = 2ie^{2it}$
$\int_0^{2\pi} \frac{du}{2u} = \int_0^{2\pi} \frac{du}{2u} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{du}{u} = \frac{ln(u)}{2}|_0^{2\pi} = \frac{ln[(e^{2it})+4]}{2}|_0^{2\pi}$
$= \frac{ln[(e^{2i(2\pi)})+4]}{2} - \frac{ln[5]}{2} = \frac{ln[1+4]}{2} - \frac{ln[5]}{2} = \frac{ln[5]}{2} - \frac{ln[5]}{2} = 0$

Problema #4

Encuentre $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{R^2-r^2}{R^2-2RrCos(\theta)+r^2}d\theta = 1$
HINT: $Re(\frac{R+re^{i\theta}}{R-re^{i\theta}}) = \rho$
a