

UNIVERSIDAD NACIONAL DE SAN CRISTOBAL
DE HUAMANGA

FACULTAD DE INGENIERÍA DE MINAS, GEOLOGÍA Y
CIVIL

ESCUELA DE FORMACIÓN PROFESIONAL CIENCIAS FÍSICO
MATEMÁTICAS



CÁLCULO DE PROBABILIDAD

RESOLUCIÓN DE EJERCICIOS

Σ

PROFESOR: Jackson Macoy Romero Plasencia

ALUMNO: Apaico Alvarado Erik Orlando

Ayacucho-Peru
(2019)

Hoja de práctica 3

Resolución

1. Sean A,B y C eventos aleatorios en un espacio de probabilidad (Ω, A, P) . Muestre que

a) - $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ y
 - $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$

Demostración del primero

$B = (A \cap B) \cup (A^c \cap B)$, por aditividad finita

$$P(B) = P(A \cap B) + P(A^c \cap B) \dots\dots (i)$$

$A \cup B = A \cup (B \cap A^c)$, también por aditividad finita

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B \cap A^c) \dots\dots (ii)$$

Haciendo (ii)-(i) tenemos

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Demostración del segundo

$P(A \cup B \cup C) = P(A \cup K) = P(A) + P(K) - P(A \cap K)$, por lo anterior como $K = B \cup C$

Por tanto

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B \cup C) - P(A \cap (B \cup C)) = P(A) + P(B) + P(C) - P(B \cap C) - P((A \cap B) \cup (A \cap C))$$

tenemos que $P((A \cap B) \cup (A \cap C)) = P(A \cap C) + P(A \cap B) - P((A \cap B) \cap (A \cap C))$

$$\Rightarrow P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

- b) Enuncie una generalización del item(a) para el caso de la unión de n eventos aleatorios

Sean n eventos A_1, A_2, \dots, A_n

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{i < j} P(A_i \cap A_j) + \sum_{i < j < k} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \sum_{i < j < k < l} P(A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_l) + \dots + (-1)^{n+1} P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right)$$

c) Pruebe las siguientes desigualdades de Bonferroni

$$i) \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} P(A_i \cap A_j) \leq P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \leq \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} P(A_i \cap A_j) + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} P(A_i \cap A_j \cap A_k)$$

Sabemos que

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} P(A_i \cap A_j) + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \sum_{1 \leq i < j < k < l \leq n} P(A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_l) + \dots + (-1)^{n+1} P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right)$$

Vemos que

$$\sum_{1 \leq i < j < k \leq n} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \sum_{1 \leq i < j < k < l \leq n} P(A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_l) + \dots + (-1)^{n+1} P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) \geq 0 \dots \dots \dots (*)$$

y también tenemos que

$$- \sum_{1 \leq i < j < k < l \leq n} P(A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_l) + \dots + (-1)^{n+1} P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) \leq \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} P(A_i \cap A_j \cap A_k) \dots \dots \dots (**)$$

Note que

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} P(A_i \cap A_j) + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} P(A_i \cap A_j \cap A_k)$$

Se sabe

$$\sum_{1 \leq i < j < k \leq n} P(A_i \cap A_j \cap A_k) \geq 0$$

Se comprueba (**)

$$\begin{aligned}
\sum_{1 \leq i < j < k \leq n} P(\cup(A_i \cap A_j \cap A_k)) &= \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \\
\sum_{1 \leq i < j < k < l \leq n} P(A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_l) + \dots + (-1)^{n+1} P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) &\geq 0 \\
\Rightarrow \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} P(A_i \cap A_j \cap A_k) &\geq - \sum_{1 \leq i < j < k < l \leq n} P(A_i \cap A_j \cap A_k \cap \\
A_l) + \dots + (-1)^{n+1} P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) & \\
\text{Entonces probamos } (*) &
\end{aligned}$$

ii) Si k es impar, $k \leq n$, entonces

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \leq \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} P(A_{i_1} \cap A_{i_2}) + (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k})$$

si k es par $k \leq n$, vale \geq en esta ultima desigualdad

$$\begin{aligned}
P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) &= \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} P(A_{i_1} \cap A_{i_2}) + (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) \\
&+ (-1)^k \sum_{i \leq i_1 < \dots < i_k < i_{k+1}} P(\cup(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k} \cap A_{i_{k+1}}))
\end{aligned}$$

Si k es par tenemos que la ultima parte de esta sumatoria es positivo y esta ocurre \leq cuando retiramos esta ultima parte .

Si k es impar tenemos negativo o desigualdades.

2. Sea (Ω, A, P) un espacio de probabilidad y suponga que todos los siguientes conjuntos pertenecen a A . Pruebe:

(a) Si los A_n son disjuntos y $P(B|A_n) = P(C|A_n) \forall n$, entonces

$$P(B \cup A_n) = P(C \cup A_n)$$

Probando

$$\text{Si son disjuntos y } P(B|A_n) = P(C|A_n) \forall n$$

$$\Rightarrow P(B \cup A_n) = P(C \cup A_n)$$

$$\begin{aligned}
P(B \cup A_n) &= \frac{P(B \cap [\cup A_n])}{P(\cup A_n)} = \frac{P(B \cap A_1) + \dots + P(B \cap A_n)}{P(\cup A_n)} \\
&= \frac{P(A_1)P(B|A_1) + \dots + P(A_n)P(B|A_n)}{P(\cup A_n)} = \frac{P(A_1)P(C|A_1) + \dots + P(A_n)P(C|A_n)}{P(\cup A_n)} \\
&= \frac{P(C \cap A_1) + \dots + P(C \cap A_n)}{P(\cup A_n)} = \frac{P(C \cap [\cup A_n])}{P(\cup A_n)} = P(C \cup A_n)
\end{aligned}$$

(b) Si A_1, A_2, \dots son disjuntos y $\cup A_n = \Omega$, entonces

$$P(B|C) = \sum_n P(A_n|C)P(B|A_n \cap C)$$

Probando

$$P(B|C) = \sum_n P(A_n|C)P(B|A_n \cap C)$$

$$P(B|C) = \frac{P(B \cap C)}{P(C)} = \sum_n \frac{P(B \cap C \cap A_n)}{P(C)}, \text{ pues}$$

$$B \cap C = \Omega \cap (B \cap C) = [\cup_n A_n] \cap B \cap C \Rightarrow P(\cup_n A_n \cap B \cap C) = \sum_n P(A_n \cap B \cap C)$$

Luego

$$\begin{aligned} P(B|C) &= \sum_n \frac{P(B \cap C \cap A_n)}{P(C)} \frac{P(C \cap A_n)}{P(C \cap A_n)} = \sum_n \frac{P(C \cap A_n)}{P(C)} \frac{P(B \cap C \cap A_n)}{P(C \cap A_n)} \\ &= \sum_n P(A_n|C)P(B|C \cap A_n) \end{aligned}$$

3. Durante el mes de noviembre la probabilidad de lluvia es de 0,3. El Fluminense gana un partido en un día con lluvia con probabilidad 0,4; en un día sin lluvia con probabilidad 0,6. Si ganó un partido en noviembre, ¿cuál es la probabilidad que haya llovido ese día?

Solución:

C : lluvia en el mes de noviembre

$F|C$: Fluminense gana un partido en un día con lluvia

$$P(C) = 0,3; P(F|C) = 0,4$$

$$P(C|F) = \frac{P(C)P(F|C)}{P(C)P(F|C) + P(C^c)P(F|C^c)} = \frac{(0,3)(0,4)}{(0,3)(0,4) + (0,7)(0,6)} = 0,222$$

4. Pedro quiere enviar una carta a Marina, La probabilidad de que Pedro escriba la carta es 0,8. La probabilidad de que el correo no la pierda es 0,9. La probabilidad de que el cartero la entregue es 0,9. Dado que Marina no recibió la carta, ¿cuál es la probabilidad de que Pedro no haya escrito?

Solución:

p : Pedro

C : correo

c : cartero

M : Marina recibió la carta

$$P(p) = 0,8$$

$$P(C) = 0,9$$

$$P(c) = 0,9$$

$$\begin{aligned}
P(M) &= (0,8)(0,9)(0,9) = 0,648 \\
P(p \cap M) &= P(p \cap |p \cap C \cap c) = 0,648 \quad P(p^c | M^c) = \frac{P(p^c \cap M^c)}{M^c} = \frac{1 - P(p \cup M)}{1 - P(M)} \\
&= \frac{1 - [P(p) + P(M) - P(p \cap M)]}{1 - P(M)} = \frac{(1) - (0,8) - (0,648) + (0,648)}{1 - 0,648} = \frac{0,2}{0,352} = 0,568
\end{aligned}$$

5. Sean A_1, \dots, A_n eventos aleatorios independientes, con $p_k = P(A_k)$, $k = 1, \dots, n$. Obtenga la probabilidad de ocurrencia de los siguientes eventos en términos de las probabilidades p_k .

- (a) La ocurrencia de ninguno de los A_k
- (b) La ocurrencia de por lo menos uno de los A_k
- (c) La ocurrencia de exactamente uno de los A_k
- (d) La ocurrencia de exactamente dos de los A_k
- (e) La ocurrencia de todos los A_k
- (f) La ocurrencia de, como máximo, $n - 1$ de los A_k

Solución (a):

$$\begin{aligned}
P(A_1^c \cap A_2^c \cap \dots \cap A_n^c) &= P\left(\bigcap_{k=1}^n A_k^c\right) = \prod_{k=1}^n P(A_k^c) \\
&= \prod_{k=1}^n (1 - P(A_k))
\end{aligned}$$

Solución (b):

$$1 - P\left(\bigcap_{k=1}^n A_k^c\right) = 1 - \prod_{k=1}^n (1 - P(A_k))$$

Solución (c):

$$\begin{aligned}
P(\{A_1 \cap [\bigcap_{k=2}^n A_k^c]\} \cup \{A_2 \cap [\bigcap_{k=1, k \neq 2}^n A_k^c]\} \cup \dots \cup \{A_n \cap [\bigcap_{k=1, k \neq n}^n A_k^c]\}) \\
= P_1 \prod_{k=1, k \neq 1}^n (1 - P(A_k)) + \dots + P_n \prod_{k=1, k \neq n}^n (1 - P(A_k))
\end{aligned}$$

$$= \sum_{j=1}^n P_j \prod_{k=1, k \neq j}^n (1 - P(A_k))$$

Solución (d):

$$\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} P_j P_i \prod_{k=1, k \neq j, k \neq i}^n (1 - P(A_k))$$

Solución (e):

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P\left(\bigcap_{k=1}^n A_k\right) = \prod_{k=1}^n P(A_k)$$