

Elektroniske kredsløb

Tillægsnote til Griffiths' *Introduction to Electrodynamics*, 4th edition

Denne note er oprindeligt skrevet af Per Hedegård til kurset "Elektrodynamik og Bølger" (EM2), siden redigeret af Anders Sørensen og endelig af Jens Paaske.

Et elektronisk kredsløb, består af en række kanaler – ofte ledninger, men i dag er det meget mere almindeligt, at kanalerne er lavet af meget små metalstriber, der er pådampet fx. en silicium krystal. Disse kanaler fører elektroner rundt til og igennem et antal komponenter, som ændrer på disses bevægelse, afhængig af opladningen af, feltet over, eller magnetfeltet igennem komponenten. Dette koncept er meget kraftfuldt og al moderne civilisation med dens fjernsyn, radio, computere, internet, mikrobølgeovne, telefoner, etc. bygger teknisk set herpå. I dette kapitel vil vi gennemgå de mest basale love for sådanne elektroniske kredsløb, som de blev formuleret i anden halvdel af 1800 tallet.

1 Passive komponenter

Passive komponenter er elementer i et kredsløb, som ikke er i stand til at forstærke strømmen, dvs. ikke er i stand til at tilføre kredsløbet energi. De mest almindelige passive komponenter er *modstande*, *kapacitorer* (kondensatorer) og *induktorer* (spoler). De mest almindelige aktive komponenter er transistorer og diode, men dem skal vi ikke komme nærmere ind på i denne note.

1.1 Modstand

Grunden til at elektroner i et materiale bevæger sig og laver en elektrisk strøm er til syvende og sidst at de er udsat for en elektrisk kraft, som er beskrevet ved et elektrisk felt \vec{E} . Hvis materialet var helt perfekt, dvs. hvis alle atomerne sad fuldstændigt stille på deres plads i det gitter, som alle krystallinske materialer er opbygget af, og hvis der ikke er "fremmedatomer" til stede, så vil elektronerne "falde frit" ned gennem ledningen i en accelereret bevægelse jvf. Newtons love. I praksis har vi aldrig en sådan idealiseret situation. Atomerne foretager små termiske vibrationer og selv i det reneste stof er der et vist antal fremmedatomer. Disse forstyrrelser bevirker, at elektronerne ikke "falder frit" men snarere falder som en faldskærmsudspringer: Uden faldskærm ville han hele tiden blive accelereret ned mod jorden, med faldskærm vil han kun i starten blive accelereret, men på grund af faldskærmens mange stød med luftmolekylerne ophører accelerationen og han opnår en konstant sluthastighed, der på kontrolleret vis fører ham ned mod jordoverfladen. Denne sluthastighed er faktisk proportional med tyngdekraften

$$v = ag, \tag{1}$$

hvor proportionalitetskonstanten (mobiliteten) α afhænger af skærmens størrelse, tætheden af luftmolekyler etc. For elektroner i en ledning sker noget tilsvarende. Deres sluthastighed i et elektrisk felt vil også være proportional med feltets styrke

$$\vec{v} = \mu \vec{E}. \quad (2)$$

Ved nu at multiplicere med elektrontætheden og **elektronladningen** resulterer ovenstående i Ohms lov

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}. \quad (3)$$

Den tyske fysiker Paul Drude skrev en simpel formel ned for værdien af konduktiviteten, σ :

$$\sigma = \frac{ne^2\tau}{m}, \quad (4)$$

hvor n er elektrontætheden (eller snarere ladningsbærertætheden, idet mange af elektronerne i stoffet er bundet til de enkelte atomer og kan ikke bevæge sig frit), e er elektronens ladning, og m er elektronens masse. Endelig er τ den gennemsnitlige tid der går mellem at en elektron støder ind i et vibrerende atom eller i et fremmedatom.

På samme måde som i Griffiths kapitel 7 er det nu muligt at relatere den samlede strøm igennem en ledning, $I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{a}$, hvor S er et tværsnit af ledningen, til spændingsfaldet $V = \int \vec{E} \cdot d\vec{l}$, over et stykke af ledningen via den mere kendte version af Ohms lov

$$V = RI, \quad (5)$$

hvor $R = L/(\sigma A)$ (L er stykkets længde, og A er ledningens tværsnitsareal).

Den vigtigste fysiske egenskab ved elektrisk modstand, er at der heri overføres energi fra det strømmende elektronsystem til de vibrerende atomer, dvs. til varme i ledningen. Denne energioverførsel sker med en hastighed (Griffiths formel (8.6))

$$\frac{dW}{dt} = \int_V \vec{J} \cdot \vec{E} d\tau, \quad (6)$$

hvor der her integreres over hele ledningens volumen. Strengt taget udtrykker denne formel den energi pr. tid, dvs. det arbejde pr. tid, som det elektriske felt udfører på elektronerne. Denne ekstra energi, som tilføres elektronerne, vil så til syvende og sidst overføres til varme i ledningen gennem stød mellem elektroner og atomer. Den tidslige forsinkelse mellem at elektronen modtager energien fra feltet og til den afleveres til atomerne er så kort – 10^{-10} – 10^{-14} sek. – at vi kan se bort fra den. Ligningen (6) har også en version i termer af V og I , nemlig

$$\frac{dW}{dt} = VI = RI^2. \quad (7)$$

Som det fremgår af Griffiths tabel 7.1 varierer konduktiviteten (eller dens reciprokke, resistiviteten) med mange størrelsesordener. Det mest ledende materiale – bortset fra superledere – er sølv, og det leder en faktor 10^{24} bedre end den bedste isolator! I et kredsløb, hvor ledningerne mellem komponenterne er lavet af kobber eller sølv, kan man derfor ofte se bort fra modstanden i disse ledninger og kun inkludere modstanden i komponenter, der med vilje er anbragt i kredsløbet med det formål at skabe et spændingsfald og derfor er lavet af et mindre ledende materiale.

1.2 Kapacitor

I et kredsløb kan der ofte være områder, hvor der sker en vis ladningsophobning, og der vil som følge heraf opstå et elektrisk felt med feltlinier, der ender andre steder i kredsløbet, hvor den modsvarende negative ladning befinder sig. Der er med andre ord opstået en spændingsforskel mellem disse ladede områder. Som regel sker sådanne opladninger på kontrollerede steder, ofte i form af en komponent, kondensatoren. Fra den generelle teori i Griffiths' kapitel 2.5.4 ved vi, at der er en lineær sammenhæng mellem mængden af ophobet ladning, Q , og spændingsforskellen, V

$$Q = CV. \quad (8)$$

Kapacitansen, C , afhænger af den geometriske udformning af komponenten, og den har typisk en værdi på $C \approx \epsilon_0 a$, hvor a er en typisk længde i komponenten.

Umiddelbart vil man sige, at der ikke kan passere strøm igennem en kondensator – den består jo af to metalplader adskilt af en meget god isolator, og der kan ikke passere elektroner gennem en isolator. I et kort tidsrum kan man godt sige, at der bevæger sig strøm gennem kondensatoren: mens den oplades løber der ladning til den ene plade og ladning væk fra den anden, så set udefra er det som om, der bevæger sig ladning gennem komponenten. Prisen er dog at den lades op og det koster energi

$$W = \frac{Q^2}{2C}, \quad (9)$$

så der er grænser for hvor længe strømmen kan have samme retning. Ud fra (8) og sammenhængen mellem strøm og ladning, $dQ/dt = I$, kan vi få "Ohms lov" for en kapacitor

$$I = C \frac{dV}{dt}, \quad \text{eller} \quad V = \frac{1}{C} \int I dt. \quad (10)$$

For en kapacitor er sammenhængen mellem strøm og spænding altså en differentialligning.

Som regel er kapacitorer indført i et kredsløb med vilje, for at de skal tjene et bestemt formål, men man skal være opmærksom på, at der kan opstå uønskede ladningsophobninger og dertil hørende kapacitanser og spændingsforskelle imellem forskellige dele af kredsløbet.

1.3 Induktans

Når vi har at gøre med tidsligt varierende strømme, vil der ifølge Amperes lov opstå varierende magnetfelter, som på sin side ifølge Faradays lov vil resultere i varierende elektriske felter med dertil hørende varierende elektromotoriske kræfter. Sådanne elektromotoriske kræfter er man ofte interesseret i at udnytte i et kredsløb. Man får de kraftigste magnetfelter, hvis man lader strømmen løbe igennem en spole, der eventuelt kan have en kerne lavet af et magnetisk materiale. En sådan komponent kaldes en *induktor*, eller blot en spole. Dens symbol er en idealiseret spole.

Den samlede elektromotoriske kraft i sådan en komponent er jvf. Faradays lov, Griffiths ligning (7.14)

$$\mathcal{E} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi}{dt}. \quad (11)$$

Her er det vigtigt at indse, at integralet der definerer \mathcal{E} er et lukket kurve- integral, dvs. det inkluderer også dele af kredsen, som er uden for spolen. På den anden side har vi den samlede flux igennem den lukkede kurve. Her vil det dominerende bidrag komme fra spolen og det er derfor muligt at tale om at spolen opfylder en slags Ohms lov. Vi har nemlig, at fluxen Φ er lineært relateret til strømmen gennem spolen, via $\Phi = LI$, hvor L er spolens induktans. Den ønskede sammenhæng mellem elektromotorisk kraft og strøm bliver så

$$\mathcal{E} = -L \frac{dI}{dt}, \quad (12)$$

dvs. en differentialligning.

Vi bemærker her, at der ikke er nogen elektromotorisk kraft, hvis der løber en konstant strøm gennem spolen, da vi så har $dI/dt = 0$. Hvis vi derimod vil ændre strømmen kommer der en elektromotorisk kraft. Grunden til dette er, at når der løber strøm i en spole, opstår der et magnetfelt. Et sådant magnetfelt koster energi at lave, og i en spole er der derfor oplagret en energi

$$W = \frac{1}{2} LI^2. \quad (13)$$

At ændre på strømmen kræver derfor, at vi ændrer energien. Der skal altså udføres et (positivt eller negativt) arbejde for at ændre strømmen i en spole, og der induceres derfor en elektromotorisk kraft som vil modvirke enhver ændring i strømmen (vi vil se på dette i mere detalje nedenfor).

I enhver kreds vil der altid være en vis induktans. For en kreds uden nogen spole er induktansen en geometrisk størrelse der har en approximativ værdi $L \approx \mu_0 a$, hvor a er en typisk længde. Indsætter man derimod en spole med mange vindinger kan man forøge induktansen betydeligt $L \approx \mu_0 a N^2$, hvor N er antallet af vindinger. Induktansen vil derfor typisk være domineret af spolen hvis $N \gg 1$. Udover tilsigtede induktanser fra spoler kan der i et kredsløb være utilsigtede induktanser, idet det er fluxen igennem den samlede kreds der bestemmer kredsens samlede induktans. Denne opdeles ofte i gensidige induktanser mellem forskellige dele af kredsløbet (magnetisk flux fra strømme i en del af kredsen, der inducerer strømme i andre dele af kredsen).

1.4 Batterier og spændingsforsyninger

For at få strømme til at løbe i en kreds er det naturligvis nødvendigt at have komponenter, der kan skabe elektromotoriske kræfter, dvs. pumpe energi ind i systemet – selv i jævnstrømstilfældet. Disse komponenter er strengt taget ikke passive, men de er nødvendige at omtale på dette sted.

Et batteri eller en spændingsforsyning kan bedst karakteriseres som en "elektron-elevator". Det er en indretning, der kan "løfte" ladninger fra et spændingsniveau til et højere, dvs. mod den retning som det elektriske felt trækker i ladningen. Kraften og den energi som dens arbejde repræsenterer kan være af kemisk natur, som det ofte er i et batteri. Det kan dog også være en bogstavelig elevator, som det er i en såkaldt *van de Graaff* generator. Det vigtige ved en sådan spændingsforsyning er, at den repræsenterer en kraft per ladning, \vec{f} , der ikke er knyttet til det elektriske felt \vec{E} . Kraften udfører et arbejde på en enhedsladning – den såkaldte elektromotoriske kraft:

$$\mathcal{E}_0 = \int \vec{f} \cdot d\vec{l}, \quad (14)$$

hvor integralet strengt taget er over en lukket kreds, men bidraget fra \vec{f} er naturligvis koncentreret til batteriets område.

Den samlede energi som en sådan spændingsforsyning pumper ind i systemet pr. sekund er givet som

$$\frac{dW}{dt} = \frac{d}{dt}(Q\mathcal{E}_0) = I\mathcal{E}_0. \quad (15)$$

2 Kirchhoffs love

Gustav Kirchhoff formulerede i midten af 1800 tallet to love, som ethvert elektrisk kredsløb opfylder. Den almene gyldighed af lovene er sikret derved, at lovene er direkte konsekvenser af to fundamentale love i hele fysikken, nemlig lovene om ladningsbevarelse og energibevarelse. En yderligere antagelse indgår, nemlig, at elektriske signaler forplanter sig uendelig hurtigt. Når eksempelvis ladningstætheden eller strømmen ændrer sig et sted i kredsen, så vil de dertil hørende elektriske og magnetiske felter være ændrede overalt i resten af kredsen. Dette er naturligvis principielt umuligt. Enhver forandring vil højst kunne forplante sig med lysets hastighed rundt i kredsen. Dette har kun praktisk relevans, hvis vi har at gøre med meget hurtige forandringer, dvs. med variationer, der har en meget høj frekvens (se nøjere diskussion af frekvens i næste afsnit). **Et krav må være, at alle forandringer er kommunikeret rundt i kredsen inden yderligere forandringer sker. Matematisk kan det udtrykkes at**

$$\text{Varighed af forandring} \approx \frac{1}{\nu} \gg \frac{L}{c} \approx \text{varighed af kommunikation}, \quad (16)$$

hvor L er kredsens geometriske størrelse og ν er en typisk frekvens for systemet. Med andre ord bølgelængden $\lambda = c/\nu$ af et lyssignal med frekvensen ν skal være meget længere end kredsens udstrækning

$$\lambda = \frac{c}{\nu} \gg L. \quad (17)$$

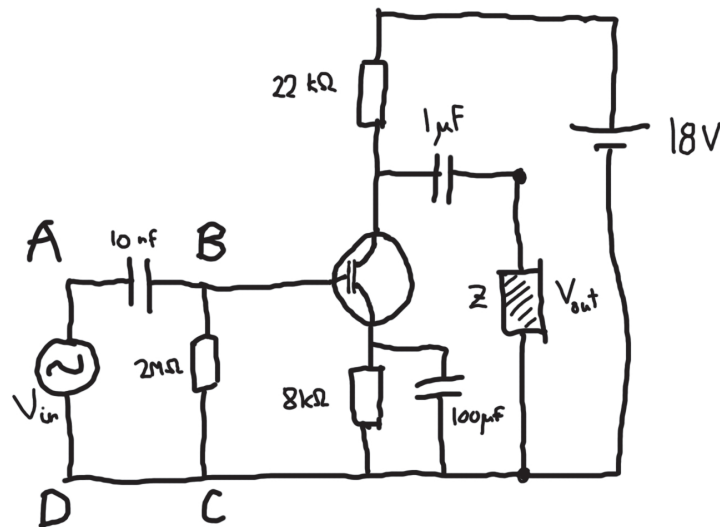
I praksis betyder det, for centimeter store kredse, at de anvendte frekvenser må være mindre end 10 GHz.

2.1 Kirchhoffs 1. lov

Tilbage til Kirchhoffs love. En typisk elektrisk kreds kan være som vist i Fig. 1. Den består af en række såkaldte *knuder* hvor 3 eller flere kanaler mødes. Ladningsbevarelse siger, at ladninger, der strømmer ind mod sådan en knude må forlade knuden igen. Hvis vi regner strømmene, I_i , i de forskellige kanaler med fortegn, fx. som positiv, hvis ladningerne strømmer ind mod knuden og negativ hvis de strømmer bort, så kan Kirchhoffs 1. lov skrives

$$\sum_i I_i = 0. \quad (18)$$

Bemærk, at en knude er et lille metallisk område, hvor der ikke sker ladningsophobning. Hvis der kunne ske ladningsophobning, så ville området ikke være kvalificeret som knude, men snarere som del af en kapacitor-komponent.



Figur 1: Elektrisk kredsløb (simpel spændingsforstærker)

2.2 Kirchhoffs 2. lov

Betragter vi igen kredsen i Fig. 1, så kan vi opfatte den som et antal mindre delkredse, fx. ABCD. En sådan delkreds kaldes en maske. Det samlede arbejde per ladning udført af elektriske og andre kræfter pr. tid er givet som

$$\int (\vec{f} + \vec{E}) \cdot \vec{J} d\tau, \quad (19)$$

hvor integralet er et volumenintegral over den strømførende del af kredsen. I en enkelt gren – benævnt i – af kredsen vil dette arbejde blive afsat som varme, som allerede beskrevet i forrige afsnit. Vi har altså en lokal form for energibevarelse:

$$\int_i (\vec{f} + \vec{E}) \cdot \vec{J} d\tau = R_i I_i^2. \quad (20)$$

Venstresiden omskrives nu, idet vi antager at kraftfelterne er konstante hen over et tværsnit af ledningen:

$$I_i (\mathcal{E}_i + \int_i \vec{E} \cdot d\vec{l}), \quad (21)$$

hvor \mathcal{E}_i er den elektromotoriske kraft fra eventuelle batterier og generatorer i den i 'te gren. Divideres nu med I_i fås følgende identitet for hver gren af masken:

$$\mathcal{E}_i + \int_i \vec{E} \cdot d\vec{l} = R_i I_i. \quad (22)$$

Hvis en gren indeholder en kapacitor, så vil kurveintegralet over \vec{E} ikke inkludere stykket mellem kapacitorens plader. Vi kan addere og subtrahere et sådant bidrag og få

$$\mathcal{E}_i + \int_{\text{hele } i} \vec{E} \cdot d\vec{l} - V_{Ci} = R_i I_i, \quad (23)$$

hvor V_{Ci} er spændingen over kapacitoren $V_{Ci} = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l}$. Vi vil nu addere disse ligninger for samtlige grene i en maske og ende med

$$\sum_{\text{batterier}} \mathcal{E} + \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} - \sum_{\text{kapacitorer}} V_C = \sum_{\text{modstande}} R_i I_i. \quad (24)$$

Sidste skridt består nu i at anvende Faradays lov. Den siger, at det lukkede kurveintegral af E er lig med minus den samlede fluxændring omsluttet af masken

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\sum_{\text{spoler}} L_i \frac{dI_i}{dt}, \quad (25)$$

hvor vi til slut har set bort fra gensidige induktanser fra andre dele af kredsløbet og mellem spoler indenfor masken¹.

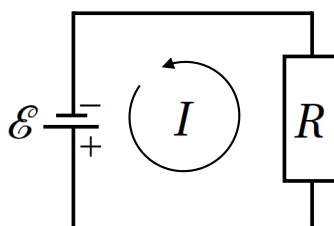
Efter denne lidt besværlige omgang er vi omsider nået frem til Kirchhoffs 2. lov, eller maskeligningen, som den også kaldes:

$$\sum_{\text{batterier}} \mathcal{E}_i = \sum_{\text{spoler}} L_i \frac{dI_i}{dt} + \sum_{\text{kapacitorer}} V_{Ci} + \sum_{\text{modstande}} R_i I_i. \quad (26)$$

Når man skal anvende disse ligninger skal man erstatte V_{Ci} med $C^{-1} \int^t I(t') dt'$, der således bliver integro-differentialligninger med strømmene som ubekendte. Spændinger kan så indføres som matematiske hjælpe størrelser.

Er man uddannet som elektroingeniør eller elektriker har man en meget nem huskeregel for Kirchhoffs 2. lov. Man siger ganske enkelt, at hver komponent i kredsen bidrager med et for komponenten karakteristisk spændingsfald: $R_i I_i$ for en den i te modstand, V_{Ci} for den i te kapacitor og $L_i dI_i/dt$ for den i te spole. Dette spændingsfald vil i langt de fleste tilfælde være det man måler, hvis man tilslutter et voltmeter på hver side af en komponent (se dog Griffiths opgave 7.50 for et eksempel, hvor det ikke er tilfældet, fordi der går et varierende magnetfelt gennem kredsen). Når man går rundt i en kreds siger ligning (26) at summen af alle spændingsfaldene modsvares af spændingsforsyningens spænding, \mathcal{E} (eller summen af dem hvis der er flere). Bemærk her, at når man går rundt i en kreds med mange knuder vil strømmen ikke være den samme i alle grene. I det tilfælde er det vigtigt at spændingsfaldet over en komponent er bestemt af strømmen gennem den gren som komponenten sidder i. Til dagligt brug er spændingsfald en overordentlig nyttig tænkemåde, men der kan opstå situationer, hvor det er vigtigt at forstå, at det egentlige fysiske indhold i loven er energibevarelse samt, at spændinger ikke er veldefinerede fysiske størrelser – det er kun strømme og elektromotoriske kræfter (se igen Griffiths opg. 7.50).

¹Strengt taget er V_{Ci} ikke veldefineret, da den vil afhænge af integrationsvejen fra den ene kapacitorplade til den anden. Det samlede resultat er dog entydigt, idet et skift i vej (og dermed i V_{Ci}) vil være kompenseret af et skift i fluxen Φ . Det er naturligvis mest praktisk, at vælge integrationsvejen som den korteste vej mellem kapacitorpladerne, hvorved også Φ vil være domineret af fluxen gennem kredsens spoler.



Figur 2: Simpel kreds med batteri og modstand. Batteriets positive pol angives med en lang streg, og elektroner vil således flyde fra den korte- til den lange streg. Da elektronerne bærer negative ladning, vil strømmen pr. definition løbe den modsatte vej (cf. Griffiths Kap. 5.1.3).

3 Eksempler

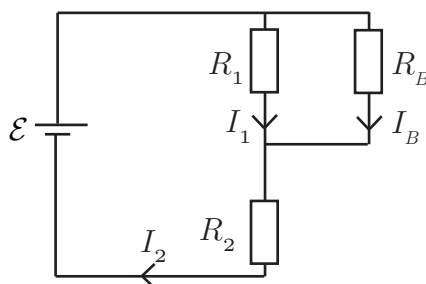
3.1 Jævnstrømskredse

Når strømmene i en kreds er tidsuafhængige vil hverken kapacitorer eller induktorer spille nogen rolle og de kan droppes fra ligningerne. Kapacitoren fordi der ikke kan løbe en konstant strøm igennem en kapacitor uden at der vil blive opbygget ufysiske store ladningsophobninger. Induktorer forsvinder ganske enkelt fordi $dI/dt = 0$. Tilbage er kun batterier og modstande. Vores første eksempel er den simpleste kreds med kun ét batteri og én modstand (Fig. 2). Den ene maskeligning siger så det velkendte, at der løber en strøm i kredsen, og denne har en styrke, der er givet ved:

$$\mathcal{E} = RI. \quad (27)$$

Lidt mere udfordrende er *spændingsdeleren* (Fig. 3). For at løse dette problem, skal vi først indføre nogle størrelser som beskriver det vi vil regne ud. Vi kalder strømmen gennem modstand 1 for I_1 , strømmen gennem modstand 2 for I_2 , og strømmen gennem *belastningsmodstanden* I_B . Strømmene bliver regnet positivt som vist med pilene i figuren. Vi har 2 knuder og 2 masker. De to knudeligninger siger det samme nemlig

$$I_2 = I_1 + I_B. \quad (28)$$



Figur 3: Spændingsdeleren

Maskeligningerne er

$$\begin{aligned}\mathcal{E} &= R_1 I_1 + R_2 I_2 \\ 0 &= R_B I_B - R_1 I_1.\end{aligned}\tag{29}$$

Bemærk at der kommer et minus i den sidste fordi vi går i modsat retning af I_1 når vi går med uret rundt i masken. Vi har altså 3 ligninger med 3 ubekendte strømme. Løsningen er

$$\begin{aligned}I_B &= \frac{\mathcal{E}}{R_B} \frac{R_1}{R_1 + R_2 + R_1 R_2 / R_B} \\ I_1 &= \frac{\mathcal{E}}{R_1 + R_2 + R_1 R_2 / R_B} \\ I_2 &= I_1 + I_B.\end{aligned}\tag{30}$$

Strømmen gennem belastningsmodstanden er $\mathcal{E}_{\text{eff}}/R_B$, hvor den effektive spænding er

$$\mathcal{E}_{\text{eff}} = \mathcal{E} \frac{R_1}{R_1 + R_2 + R_1 R_2 / R_B},\tag{31}$$

dvs. en spænding som i grænsen, hvor belastningsmodstanden er meget stor ($R_B \gg R_1, R_2$) blot er en bestemt brøkdel af batterispændingen:

$$\mathcal{E}_{\text{eff}} = \mathcal{E} \frac{R_1}{R_1 + R_2},\tag{32}$$

heraf navnet spændingsdeler. Det er vigtigt at huske, at for at få den ønskede deling må man kunne se bort fra strømmen i belastningsmodstanden, dvs. have en stor sådan belastningsmodstand.

3.2 Transienter

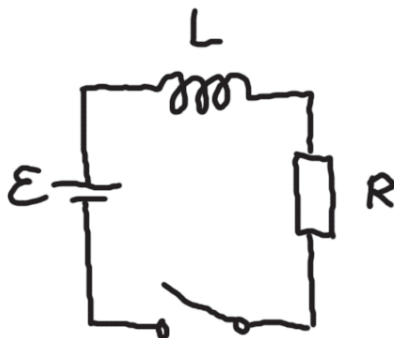
I det første eksempel i dette afsnit betragtede vi en simpel kreds med en modstand og et batteri, hvori der løber en konstant strøm. Man kan nu spørge, hvordan denne stationære situation egentlig er kommet i stand. Det virker ufysisk at strømstyrken skulle være sprunget direkte fra nul til \mathcal{E}/R i det øjeblik batteriet blev sluttet til. Det er det da også. Enhver kreds – selv uden spoler – vil have en induktans, idet den naturligt vil omslutte den – variable – magnetiske flux genereret af strømmen. En mere fysisk korrekt repræsentation af kredsen er derfor som vist i Fig 4.

Den ny maskeligning er nu

$$\mathcal{E} = L \frac{dI}{dt} + RI,\tag{33}$$

med den randbetingelse, at klokken $t = 0$ (netop da batteriet sluttet til) er strømmen lig nul. Ligningen er en inhomogen, lineær, første ordens differentialligning, **hvis fuldstændige løsning som bekendt er en partikulær løsning til ligningen plus en fuldstændig løsning til den homogene ligning**. Det er nemt at gætte en partikulær løsning, vi kan nemlig blot tage løsningen fra jævnstrømstilfældet, som vi allerede har diskuteret. Løsningen til den homogene ligning er en exponentialfunktion, således at den samlede løsning bliver

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}}{R} + k e^{-Rt/L},\tag{34}$$



Figur 4: Realistisk kreds med batteri, induktans, og modstand

hvor konstanten k bestemmes af begyndelsesbetingelsen $I(0) = 0$. Vi får

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}}{R}(1 - e^{-Rt/L}). \quad (35)$$

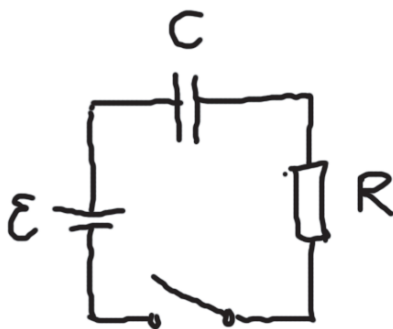
Vi ser at det faktisk tager en endelig tid $\tau \sim L/R$ for strømmen at vokse op til sin stationære værdi. Dette kan også ses af selve maskeligningen evalueret klokken $t = 0$, hvor der da står, at $dI/dt = \mathcal{E}/L$. For $L \approx \mu_0 a$ (med $a = 1$ cm) og $R = 10 \Omega$ bliver $\tau \approx 10^{-9}$ sekunder – meget hurtigt.

Vi har flere gange argumenteret, at man ikke i det lange løb kan have en jævnstrøm løbende igennem en kapacitor. Hvor langt er det lange løb? Det kan vi finde ud af ved at sætte et batteri på kapacitoren. Kredsen bliver så, idet man aldrig kan undgå at have en modstand i kredsen. Se Fig. 5. Maskeligningen bliver i dette tilfælde

$$\mathcal{E} = RI(t) + \frac{1}{C} \int_0^t I(t') dt'. \quad (36)$$

Ligningen løses lettest ved i stedet for strømmen, I , at bruge ladningen $Q(t)$ på kapacitoren som variabel:

$$\mathcal{E} = R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C}. \quad (37)$$



Figur 5: Opladning af kapacitor

Denne ligning har samme form, som ligning (33), og ovenikøbet med samme begyndelsesbetingelse, nemlig at ladningen på kapaciteten er nul til $t = 0$. Vi kan derfor uden videre skrive løsningen ned:

$$Q(t) = \mathcal{E} C (1 - e^{-t/RC}). \quad (38)$$

Vi ser at ladningen vokser til sin slutværdi $Q = \mathcal{E} C$ med en karakteristisk tidskonstant $\tau \sim RC$. Med en typisk modstand på $R = 1 \text{ k}\Omega$ og en kapacitet $C = \epsilon_0 a$, hvor $a = 10 \text{ cm}$, fås $\tau \approx 10^{-9} \text{ sek}$.

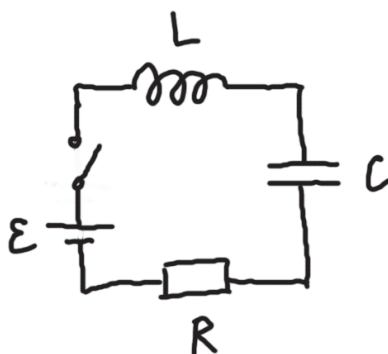
I dette sidste tilfælde burde vi egentlig også tilføje en induktans til kredsen, for også her springer strømmen fra en værdi 0 før $t = 0$ til en værdi $I = \mathcal{E}/R$ umiddelbart efter at batteriet er sluttet til. Dette kan synes som en uskyldig lille korrektion – men der introduceres herved en ny fysisk effekt, hvis omfang og rækkevidde næppe kan overvurderes. Først den fysiske effekt. Den realistiske kreds ser nu ud som vist i Fig. 6 og kaldes ofte for svingningskredsen af grunde som vi skal se nedenfor. Maskeligningen har nu formen

$$\mathcal{E} = L \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t I(t') dt' + RI. \quad (39)$$

Lad os differentiere én gang med hensyn til tiden, flytte lidt om på leddene og få

$$L \frac{d^2 I}{dt^2} = -\frac{1}{C} I - R \frac{dI}{dt}. \quad (40)$$

Denne ligning minder om Newtons 2. lov for en partikel med koordinat $x = I$ og masse $m = L$ udsat for en fjederkraft (med fjederkonstant $k = C^{-1}$) samt en gnidningskraft (gnidningskoefficient $\gamma = R$). Løsningen til en sådan bevægelse er (dæmpede) svingninger med en svingningsfrekvens $\omega_0 = \sqrt{k/m} = 1/\sqrt{LC}$. Fysisk er det ladning, der oscillerer ind og ud af kapaciteten. Når kapaciteten er fuldt opladet findes al energien i systemet i form af et elektrisk felt mellem kapacitorpladerne. En kvart periode senere er ladningen på kapaciteten lig med 0; til gengæld er strømmen maximal og al energien er nu til stede i form af det med strømmen forbundne magnetfelt. Dette er meget generelt for elektromagnetiske bølger – lys og anden elektromagnetisk stråling er et andet vigtigt eksempel. Svingningen kan ikke fortsætte i det uendelige – gnidningen vil med tiden standse den og overføre energien til Ohmsk varme i ledningerne.



Figur 6: RCL -kreds

Den matematiske analyse af problemet forløber således. Vi har at gøre med en lineær, 2. ordens differentialligning. En sådan har generelt to lineært uafhængige løsninger. Disse løsninger findes ved at gætte på en løsning af formen $I(t) = e^{-\lambda t}$, sætte ind i ligningen og løse den resulterende andengradslikning for λ – den såkaldte karakterlikning. Vi får

$$L\lambda^2 - R\lambda + \frac{1}{C} = 0, \quad (41)$$

der har løsningerne

$$\lambda_{\pm} = \frac{R}{2L} \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}, \quad (42)$$

hvor $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ er den ovenfor nævnte svingningsfrekvens. Der er nu tre muligheder:

1) $\omega_0 > R/(2L)$	$(\lambda_+ \neq \lambda_-, \text{komplekse})$	(Underdæmpet RCL-kreds)
2) $\omega_0 = R/(2L)$	$(\lambda_+ = \lambda_-, \text{kompleks})$	(Kritisk dæmpet RCL-kreds)
3) $\omega_0 < R/(2L)$	$(\lambda_+ \neq \lambda_-, \text{reelle og positive})$	(Overdæmpet RCL-kreds)

I tilfældet 1) er begge løsninger komplekse og en generel reel løsning til strømligningen (40) er

$$I(t) = (A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t))e^{-Rt/(2L)} \quad (\text{Underdæmpet RCL-kreds}) \quad (43)$$

hvor $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - (R/(2L))^2}$ og A og B er konstanter, der skal bestemmes af begyndelsesbetingelser. En sådan svingning kaldes *underdæmpet*.

Som det ses svinger strømmen frem og tilbage med en frekvens ω som er ca. lig det simple udtryk $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ hvis modstanden er lille - deraf navnet svingningskredsen. Svingningen har dog en endelig levetid og henfalder i løbet af en tid $\tau = 2L/R$, som er længere jo mindre modstanden R er. Forholdet mellem dæmpningstiden τ og svingningstiden $T = 2\pi/\omega_0$ kaldes kredsens *godhed* og benævnes med bogstavet Q

$$Q = \pi \frac{\tau}{T} = \frac{L\omega_0}{R} \quad (44)$$

(bemærk at dette Q ikke må forveksles med ladningen Q . Man bruger desværre bogstavet Q for begge).

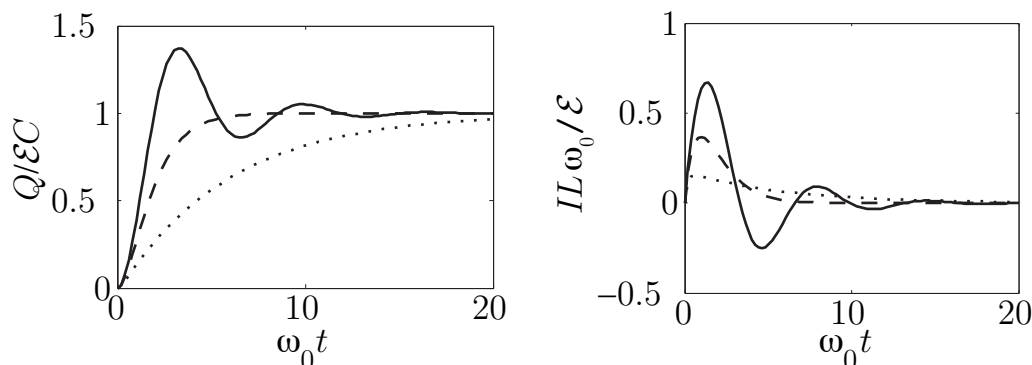
I tilfældet 2) er $\lambda_+ = \lambda_-$ og vi har kun fundet en løsning til (40). Det er dog nemt at se at i dette tilfælde er også $I(t) = t e^{-\lambda_+ t}$ en løsning. En generel reel løsning bliver så:

$$I(t) = (A + Bt)e^{-Rt/(2L)} \quad (\text{Kritisk dæmpet RCL-kreds}) \quad (45)$$

Det strømforløb kaldes *kritisk dæmpet*.

I det sidste tilfælde 3) er både λ_+ og λ_- reelle, positive tal. Den generelle løsning er i dette *overdæmpede* tilfælde så

$$I(t) = Ae^{-\lambda_+ t} + Be^{-\lambda_- t} \quad (\text{Overdæmpet RCL-kreds}) \quad (46)$$



Figur 7: Transienter for svingningskredsen. Figuren viser tidsudviklingen i ladningen Q (venstre) og strømmen I (højre) efter der tændes. Kurverne viser forløbet for tilfældene 1) underdæmpet $R/2L = 0.3\omega_0$ eller “godhed” $Q \approx 1.7$ (fuld kurve), 2) kritisk dæmpet $R/2L = \omega_0$ eller “godhed” $Q = 0.5$ (stiplet kurve) og 3) overdæmpet $R/2L = 3\omega_0$ eller “godhed” $Q \approx 0.17$ (prikket kurve).

For at løse det fysiske problem, hvor vi klokken $t = 0$ spænder batteriet på kredsen, må vi løse ligningen (39), som i termer af ladningen Q i stedet for strømmen I har formen

$$\mathcal{E} = L \frac{d^2 Q}{dt^2} + \frac{1}{C} Q + R \frac{dQ}{dt}, \quad (47)$$

med begyndelsesbetingelserne $Q(0) = 0$ og $I(0) = 0$. En partikulær løsning er den statisk opladede kapacitor $Q = C\mathcal{E}$. Den homogene ligning har præcis samme form som strømligningen (40) og derfor samme type løsninger. Det er nu ligetil at finde løsningerne i de tre tilfælde. Her skal vi nøjes med at vise det tidlige forløb grafisk, se Fig. 7.

4 Vekselstrøm

Den simple såkaldte *RCL-kreds* vi diskuterede i sidste afsnit danner grundlaget for al radiokommunikation. Hjertet i enhver (gammel) radio er sådan en svingningskreds. Forskellen fra det vi allerede har studeret er, at nu vil spændingskilden være en tidsligt varierende funktion, nemlig signalet som kommer ind på radioens antenne.

Vi vil derfor se på tilfældet, hvor den elektromotoriske kraft er tidsafhængig, $\mathcal{E}(t)$. I praksis bliver radiosignaler sendt som en elektromotorisk kraft, der varierer harmonisk i tiden, d.v.s. \mathcal{E} 's tidsafhængighed er

$$\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \cos(\omega t + \theta), \quad (48)$$

hvor ω er den såkaldte *vinkelfrekvens*, der relaterer sig til den almindelige frekvens $\nu = 1/T$, hvor T er perioden, ved $\omega = 2\pi\nu$. θ kaldes *fasen* af \mathcal{E} , og \mathcal{E}_0 er *amplituden* af svingningen. Samme tidsafhængighed har også den elektromotoriske kraft, som findes i vores stikkontakter. Det er derfor yderst relevant at se lidt nærmere på kredse med en sådan en tidsafhængighed.

For nemheds skyld vil vi i regningerne nedenfor se bort fra transiente effekter. Dvs. vi vil ikke kigge på, hvad der sker, når man f.eks. tænder en kontakt, men kun kigge på situationen

uendeligt lang tid efter der blev tændt på kontakten. Hvad der sker lige når man tænder, overlader vi til en af opgaverne.

I de ligninger vi fandt tidligere indgik ting som dI/dt og $\int dt' I(t')$. En meget rar ting ved tidsafhængigheden (48) er, at den er simpel både at differentiere og integrere. Endnu lettere bliver det dog, hvis vi kigger på en funktion som² $\exp(-i\omega t)$, der differentieret og integreret giver sig selv: $d \exp(-i\omega t)/dt = -i\omega \exp(-i\omega t)$ og $\int dt' \exp(-i\omega t') = \exp(-i\omega t)/(-i\omega)$. Denne egenskab er meget nyttig som vi skal se nedenfor.

Lad os starte med at give et lille eksempel på, hvordan vi vil behandle vekselstrøm, og så generaliserer vi det bagefter. Vi betragter et simpelt kredsløb med en spole, en modstand og en elektromotorisk kraft $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cos(\omega t)$, d.v.s. som i Fig. 4, men uden kontakten og med jævnstrømsspændingen erstattet med vekselstrøm. Vi vælger nu at skrive den elektromotoriske kraft som realdelen af en kompleks funktion

$$\mathcal{E}(t) = \text{Re}[\tilde{\mathcal{E}}(t)] = \text{Re}[\mathcal{E}_0 e^{-i\omega t}] = \text{Re}[\tilde{\mathcal{E}}_0 e^{-i\omega t}],$$

hvor den komplekse amplitude er $\tilde{\mathcal{E}}_0 = \mathcal{E}_0$ (det kan måske virke lidt forvirrende, at jeg her indfører en ny størrelse, der er det samme som en anden, men jeg gør dette for at være konsistent med de regninger som kommer senere). Dette har vi selvfølgelig lov til, men hvorfor gør vi det? Jo, det smarte kommer, når vi kigger på Kirchhoffs 2. lov (26). Lad os prøve også at skrive strømmen som realdelen af en kompleks funktion³

$$I(t) = \text{Re}[\tilde{I}(t)] = \text{Re}[\tilde{I}_0 e^{-i\omega t}].$$

Kirchhoffs 2. lov (26) lyder da

$$\text{Re}[\tilde{\mathcal{E}}(t)] = \left(L \frac{d}{dt} \text{Re}[\tilde{I}(t)] + R \text{Re}[\tilde{I}(t)] \right). \quad (49)$$

Da vi ved, at $\text{Re}[x + y] = \text{Re}[x] + \text{Re}[y]$, kunne vi i stedet for at tage realdelen på hvert enkelt led, lige så godt tage realdelen af hele højre siden til sidst. Lad os nu prøve helt at lade være med at tage realdelen

$$\tilde{\mathcal{E}}(t) = \left(L \frac{d}{dt} \tilde{I}(t) + R \tilde{I}(t) \right). \quad (50)$$

Realdelen af denne ligninger giver Kirchhoffs 2. lov (49) for de reelle fysiske størrelser vi er interesserede i, mens vi er ligeglade med imaginærdelen. Hvis den komplekse ligning (50) er opfyldt, vil realdelene altså opfylde Kirchhoffs 2. lov (26). Som vi skal se om lidt er den komplekse ligning meget nemmere at løse end den reelle ligning. Den nemmeste måde at løse Kirchhoffs 2. lov for de reelle størrelser, er derfor først at løse den komplekse hjælpeligninger (50) og derefter tage realdelen af den komplekse strøm. (Læs lige dette afsnit igennem en gang til for at være sikker på du forstår det. Dette er det springende punkt i udledningen.)

²At vi i eksponenten bruger $-i$ og ikke bare i er et fuldstændigt tilfældigt valg, men fortegnet her er det man normalt bruger i fysikken. F.eks. bruger man i kvantemekanikken også $\exp(-iEt/\hbar)$. Der er dog mange, f.eks. ingeniører, som bruger det modsatte fortegn eller indfører $j = -i$, når de skal regne på elektronik, så pas derfor meget på, når du tager en formel fra en anden bog!

³Vi antager her, at tidsudviklingen af strømmen har en helt bestemt form. Denne antagelse bliver bekræftet af, at vi nedenfor rent faktisk finder løsninger til Kirchhoffs love ved at bruge denne form.

Lad os nu løse (50). Fordi differentiation af en eksponentialfunktion er det nemmeste i verden, får vi med det samme

$$\tilde{\mathcal{E}}_0 e^{-i\omega t} = (-i\omega L + R)\tilde{I}_0 e^{-i\omega t}.$$

Her kan vi forkorte eksponentialfunktionen på begge sider og ender med

$$\tilde{\mathcal{E}}_0 = (-i\omega L + R)\tilde{I}_0. \quad (51)$$

Denne ligning minder om Ohms lov. Den eneste forskel er, at den omhandler de komplekse størrelser, og at i stedet for modstanden R har vi nu parentesen, som vi kalder for *impedansen* $Z = R - i\omega L$. Når vi regner med de komplekse strømme, skal vi således aldrig løse differential ligninger, men kan nøjes med at løse simple algebraiske ligninger. Det bliver derfor ikke sværere at regne med spoler (og kapacitorer, som vi skal se nedenfor), end det var at regne med modstande for jævnstrøm.

Fra resultatet ovenfor kan vi hurtigt finde amplituden af den komplekse strøm

$$\tilde{I}_0 = \frac{\tilde{\mathcal{E}}_0}{Z} = \frac{\mathcal{E}_0}{R - i\omega L}. \quad (52)$$

Hermed har vi løst problemer for de komplekse strømme, men mangler stadig at komme tilbage til den reelle fysiske strøm vi er interesseret i. Dette gøres nemmest ved at skrive impedansen på polær form $Z = |Z| \exp(i\phi)$, hvor⁴

$$\begin{aligned} |Z| &= \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} \\ \tan \phi &= -\frac{\omega L}{R}. \end{aligned}$$

Den komplekse amplitude kan nu omskrive til $\tilde{I}_0 = |\tilde{I}_0| \exp(-i\phi)$, hvor

$$|\tilde{I}_0| = \frac{\mathcal{E}_0}{|Z|} = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}.$$

Hvorefter den reelle fysiske strøm fåes ved at tage realdelen af den komplekse strøm

$$I(t) = \operatorname{Re}[\tilde{I}_0 e^{-i(\omega t + \phi)}] = |\tilde{I}_0| \cos(\omega t + \phi).$$

Ovenstående udledning kan måske synes lidt kompliceret, men da vi først havde udledt den "komplekse Ohms lov" (51) var resten af regningen faktisk ret hurtig. Lad os derfor prøve at generalisere regningerne ovenfor til et generelt kredsløb med mange komponenter og grene: I den j 'te gren er der en elektromotorisk kraft givet ved

$$\mathcal{E}_j(t) = \mathcal{E}_{0,j} \cos(\omega t + \theta_j).$$

Denne vælger vi nu at skrive som

$$\mathcal{E}_j(t) = \operatorname{Re}[\tilde{\mathcal{E}}_j(t)] = \operatorname{Re}[\mathcal{E}_{0,j} e^{-i(\omega t + \theta_j)}] = \operatorname{Re}[\tilde{\mathcal{E}}_{0,j} e^{-i\omega t}], \quad (53)$$

⁴Der skal dog her gives en lille advarsel: Udtrykket for $\tan \phi$ er altid rigtigt, men nogle gange er det ikke helt nok. Hvis man tager den inverse tangens får man altid et resultat mellem $-\pi/2$ og $\pi/2$, men dette er jo forkert hvis vinklen ikke ligger i dette interval. For situationen her er R altid større end nul og fasen ligger derfor i intervallet fra $-\pi/2$ til $\pi/2$, så der er ikke noget problem. Hvis man derimod beregner strømmen i en lille gren i et kompliceret kredsløb, kan man komme i problemer, hvis man udelukkende kigger på $\tan \phi$.

hvor den komplekse amplitude er givet ved $\tilde{\mathcal{E}}_{0,j} = \mathcal{E}_0 \exp(-i\theta_j)$. Tilsvarende indfører vi også den komplekse ladning på den j 'te kapacitor og den komplekse strøm i den j 'te gren

$$Q_j(t) = \operatorname{Re}[\tilde{Q}_j(t)] = \operatorname{Re}[\tilde{Q}_{0,j} e^{-i\omega t}] \quad (54)$$

$$I_j(t) = \operatorname{Re}[\tilde{I}_j(t)] = \operatorname{Re}[\tilde{I}_{0,j} e^{-i\omega t}]. \quad (55)$$

Kirchhoffs love (18) og (26) lyder så

$$\sum_{\text{alle kanaler der løber til en knude}} \operatorname{Re}[\tilde{I}_j] = 0$$

$$\sum_{\text{batterier}} \operatorname{Re}[\tilde{\mathcal{E}}_j] = \sum_{\text{spoler}} \operatorname{Re}\left[L_j \frac{d\tilde{I}_j}{dt}\right] + \sum_{\text{kapacitorer}} \operatorname{Re}\left[\frac{\tilde{Q}_j}{C_j}\right] + \sum_{\text{modstande}} \operatorname{Re}[R_j \tilde{I}_j].$$

Igen vælger vi helt at udelade realdelen fra denne ligning, fordi vi ved at når de komplekse ligninger er opfyldt, vil realdelene opfylde Kirchhoffs love. Vi får derfor de komplekse ligninger

$$\sum_{\text{alle kanaler der løber til en knude}} \tilde{I}_j = 0 \quad (56)$$

$$\sum_{\text{batterier}} \tilde{\mathcal{E}}_j = \sum_{\text{spoler}} L_j \frac{d\tilde{I}_j}{dt} + \sum_{\text{kapacitorer}} \frac{\tilde{Q}_j}{C_j} + \sum_{\text{modstande}} R_j \tilde{I}_j. \quad (57)$$

Vores mål er af finde strømmene som løser (56) og (57). Problemet er dog, at for at gøre dette, skal vi komme af med ladningen \tilde{Q}_j . Vi bruger nu, at strømmen er $\tilde{I}_j = d\tilde{Q}_j/dt$. Derved får vi

$$\tilde{I}_j = \tilde{I}_{0,j} e^{-i\omega t} = \frac{d\tilde{Q}_j}{dt} = -i\omega \tilde{Q}_{0,j} e^{-i\omega t}$$

eller

$$\tilde{Q}_{0,j} = \frac{\tilde{I}_{0,j}}{-i\omega}. \quad (58)$$

Indsættes dette i (56) og (57) samtidig med at vi differentierer strømmen giver det

$$\sum_{\text{alle kanaler der løber til en knude}} \tilde{I}_{0,j} e^{-i\omega t} = 0$$

$$\sum_{\text{batterier}} \tilde{\mathcal{E}}_{0,j} e^{-i\omega t} = \sum_{\text{spoler}} -i\omega L_j \tilde{I}_{0,j} e^{-i\omega t} + \sum_{\text{kapacitorer}} \frac{\tilde{I}_{0,j}}{-i\omega C_j} e^{-i\omega t} + \sum_{\text{modstande}} R_j \tilde{I}_{0,j} e^{-i\omega t}.$$

Som det ses indeholder alle led en faktor $\exp(-i\omega t)$, som vi kan forkorte væk. Vi får derfor endelig Kirchhoffs love for vekselstrøm:

$$\sum_{\text{alle kanaler der løber til en knude}} \tilde{I}_{0,j} = 0 \quad (59)$$

$$\sum_{\text{batterier}} \tilde{\mathcal{E}}_{0,j} = \sum_{\text{spoler}} -i\omega L_j \tilde{I}_{0,j} + \sum_{\text{kapacitorer}} \frac{1}{-i\omega C_j} \tilde{I}_{0,j} + \sum_{\text{modstande}} R_j \tilde{I}_{0,j}. \quad (60)$$

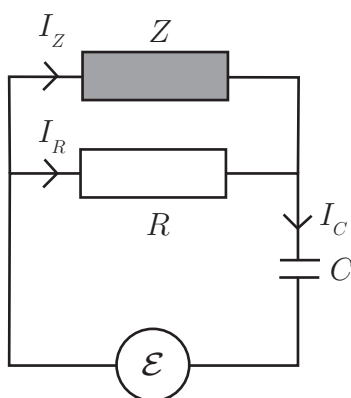
Bemærk, at de minder meget om de "rigtige" Kirchhoffs love for de reelle størrelser. Dog er der den store forskel, at Kirchhoffs 2. lov (60) ikke længere er en differentialligning, men en helt almindelig algebraisk ligning, som er meget lettere at løse. For vekselstrøm er det således ikke meget sværere at løse et kredsløb med både spoler og kapacitorer, end det er at beskrive et jævnstrømskredsløb med en masse modstande. Den eneste forskel fra jævnstrøm og modstande er, at der i stedet for modstande står en komplekse impedans. Impedanserne opfører sig præcist som elektriske modstande gør i et jævnstrømskredsløb, blot skal man huske, at de er komplekse tal. En kapacitor har impedansen $1/(-i\omega C)$ og har således høj impedans for lave frekvenser. Bemærk specielt, at man ikke kan sende jævnstrøm, som svarer til $\omega = 0$, gennem en kapacitor, og en kapacitor har derfor uendelig impedans for $\omega = 0$. En spole har impedansen $-i\omega L$, der er størst for høje frekvenser. Hvis der i en gren optræder flere komponenter lægger man blot deres impedanser sammen, ligesom man gør med modstande. Kort opsummeret er de relevante impedanser for hhv. modstand, kapacitor og induktor altså:

$$Z_R = R, \quad Z_C = \frac{i}{\omega C}, \quad Z_L = -i\omega L. \quad (61)$$

Inden vi går videre med nogle lidt mere komplicerede eksempler, må vi hellere lige sikre os at vi forstår de generelle udtryk ovenfor. Vi betragter derfor igen det samme kredsløb som ovenfor. D.v.s. et kredsløb med en spole, en modstand og en elektromotorisk kraft $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cos(\omega t)$ (som i Fig. 4 uden kontakten og med jævnstrømsspændingen erstatter med vekselstrøm). Kredsløbet har ingen knuder. Der er således kun én kompleks strøm \tilde{I} , og vi behøver ikke bekymre os om (59). Fordi fasen er nul er den komplekse amplitude $\tilde{\mathcal{E}}_0 = \mathcal{E}_0$. På højre siden af (60) står der bare $-i\omega L \tilde{I}_0 + R \tilde{I}_0$, og vi får derfor med det samme svaret i (52) - det var meget hurtigere end at løse en differentialligning.

Eksempel: Høj-pas filter

Denne kreds består af en variabel spændingsforsyning \mathcal{E}_{in} samt en uspecificeret kreds med impedans Z . Imellem de to er anbragt et såkaldt høj-pas filter. Det består af en modstand, R , anbragt parallelt med Z , samt en kapacitor, C , i serie. Se Fig. 8.



Figur 8: Høj-pas filter

For at beregne hvilken strøm, der løber gennem den ukendte impedans Z , opstiller vi nu knudeligningen

$$\tilde{I}_{0,C} = \tilde{I}_{0,R} + \tilde{I}_{0,Z}$$

samt maskeligningerne

$$\begin{aligned}\tilde{I}_{0,Z}Z - \tilde{I}_{0,R}R &= 0 \\ \tilde{\mathcal{E}}_{0,\text{in}} &= \frac{\tilde{I}_{0,C}}{-i\omega C} + R\tilde{I}_{0,R}.\end{aligned}$$

Vi har nu opstillet de fysiske love som beskriver systemet og mangler kun at løse ligningerne. Dette kan man gøre ved at bruge den første maskeligning til at komme af med $\tilde{I}_{0,R} = \tilde{I}_{0,Z}Z/R$. Indsætter vi nu dette i knudeligningen, kommer vi også af med $\tilde{I}_{0,C} = (1 + Z/R)\tilde{I}_{0,Z}$. Den sidste maskeligning bliver så

$$\tilde{\mathcal{E}}_{0,\text{in}} = \left(\frac{1 + \frac{Z}{R}}{-i\omega C} + Z \right) \tilde{I}_{0,Z}.$$

Vi kan nu endelig finde strømmen $\tilde{I}_{0,Z}$ ved at dividere med parantesen. Frem for at kigge på strømmen er det interessant at kigge på spændingen over den uspecificerede komponent $\tilde{\mathcal{E}}_{0,\text{out}} = Z\tilde{I}_{0,Z}$. Efter lidt omskrivninger får vi

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{E}}_{0,\text{out}} &= \frac{-i\omega RC}{1 + \frac{R}{Z} - i\omega RC} \tilde{\mathcal{E}}_{0,\text{in}} \\ &\approx \frac{-i\omega RC}{1 - i\omega RC} \tilde{\mathcal{E}}_{0,\text{in}},\end{aligned}\tag{62}$$

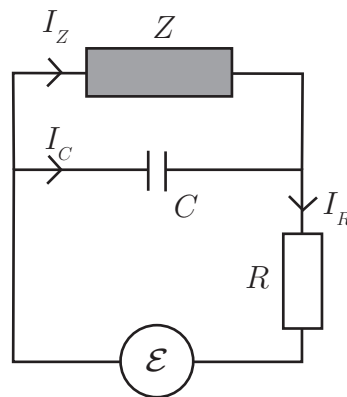
hvor vi i den sidste ligning har antaget, at Z er meget større end R . Dette er en ofte anvendt approksimation, men man skal naturligvis checke, at den gælder i hvert enkelt tilfælde. Vi kan nu se, hvorfor konfigurationen kaldes et høj-pas filter. For små frekvenser $\omega RC \ll 1$ vil out-spændingen være meget mindre end in-spændingen, hvorimod vi i den modsatte grænse har, at de to spændinger er ens.

Eksempel: Lav-pas filter

I denne kreds er der byttet om på modstand og kapacitor, således at det nu er kapacitoren, der er parallel med Z , som vist i Fig. 9. Logikken og matematikken er den samme som i lav-pas filteret. Vi skal blot bytte om på R og $i/(\omega C)$. I approksimationen $|Z| \gg 1/(\omega C)$ får vi således

$$\tilde{\mathcal{E}}_{0,\text{out}} \approx \frac{1}{1 - i\omega RC} \tilde{\mathcal{E}}_{0,\text{in}}.\tag{63}$$

I lavfrekvensgrænsen, i.e. $\omega RC \ll 1$, vil output-spænding og input-spænding være ens, hvorimod output-spændingen vil være stærkt undertrykt for høje frekvenser, $\omega RC \gg 1$. Heraf navnet lav-pas filter.



Figur 9: Lav-pas filter

5 Arbejde og energi

Lad os nu betragte et generelt kredsløb med en harmonisk svingende elektromotorisk kraft. Dette vil man kunne repræsentere som i Fig. 10, hvor resten af kredsen er angivet som en effektiv komponent med impedans Z . Impedansen vil være en kompleks funktion af frekvensen ω og vil have en real- og en imaginærdel

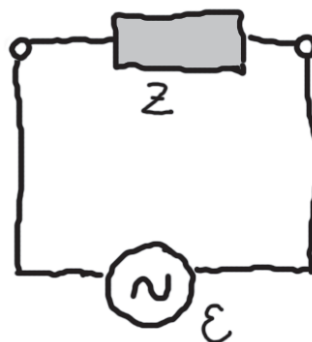
$$Z = R + iX.$$

Realdelen R kaldes *resistansen* og imaginærdelen X kaldes *reaktansen*. Den komplekse impedans kan igen skrives med polære koordinater

$$Z = |Z|e^{i\phi},$$

hvor

$$|Z| = \sqrt{R^2 + X^2} \quad \text{og} \quad \tan \phi = \frac{X}{R}. \quad (64)$$



Figur 10: Generel kreds med en variabel spændingsforsyning.

Sætter vi nu igen for nemhed skyld $\theta = 0$ i ligning (48) så $\tilde{\mathcal{E}}_0 = \mathcal{E}_0$, finder vi den komplekse strøm

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}_0}{|Z|} \cos(\omega t + \phi). \quad (65)$$

Så normen af impedansen bestemmer amplituden af strømmen, mens ϕ giver faseforskellen mellem strøm og spænding.

Lad os nu prøve at kigge på hvor meget energi, der bliver afsat. Arbejdet der bliver udført af batteriet per tid (effekten) er

$$P(t) = \mathcal{E}(t)I(t). \quad (66)$$

Bemærk, denne ligning gælder for de reelle størrelser \mathcal{E} og I ikke for den komplekse elektromotoriske kraft og den komplekse strøm. Indsætter vi vores udtryk for strømmen (65) giver det

$$P(t) = \frac{\mathcal{E}_0^2}{|Z|} \cos(\omega t) \cos(\omega t + \phi). \quad (67)$$

Effekten svinger op og ned, og sommetider kan batteriet faktisk modtage energi fra kredsen $P(t) < 0$. Dette skyldes, at der undervejs bliver oplagret energi i kredsen, fordi en kapacitor oplades, eller der løber strøm gennem en spole. Når f.eks. kapacitoren aflades igen, kan noget af denne energi løbe tilbage til batteriet.

Når man skal betale sin el-regning, er elværket ikke interesseret i, hvor meget energi man har brugt på hver enkelt tidspunkt. I stedet vil elværket gerne vide, hvor meget energi man har brugt i alt. Lad os derfor midle effekten over en periode $T = 2\pi/\omega$ for at finde middeleffekten⁵

$$\begin{aligned} \langle P \rangle &= \frac{1}{T} \frac{\mathcal{E}_0^2}{|Z|} \int_0^T \cos(\omega t) \cos(\omega t + \phi) dt \\ &= \frac{\mathcal{E}_0^2}{2|Z|} \cos(\phi). \end{aligned} \quad (68)$$

Effekten der afsættes afhænger altså af faseforskellen ϕ , så der afsættes mest energi, hvis strømmen og den elektromotoriske kraft er i fase, dvs. $\phi = 0$. Udtrykket for ϕ (64) kan man skrive om ved at kigge på en lille retvinklet trekant med sider R , X , og $|Z|$, så man får $\cos(\phi) = R/|Z|$. Indsættes dette får vi

$$\langle P \rangle = \frac{\mathcal{E}_0^2 R}{2|Z|^2} = \frac{1}{2} |\tilde{I}_0|^2 R. \quad (69)$$

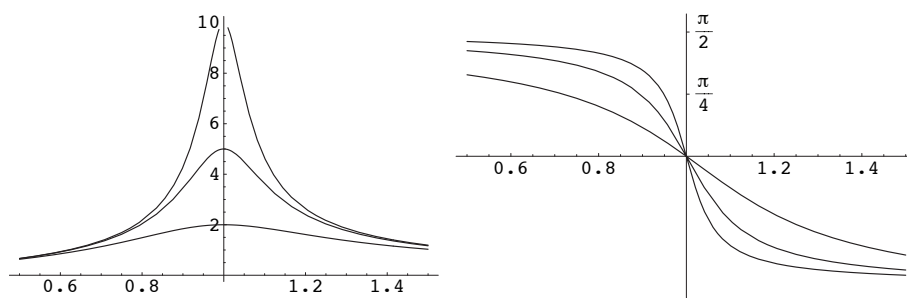
Det kræves således, at der er en resistans for at der afsættes energi. Ser vi på den effekt, der afsættes i en modstand, er den $P(t) = I(t)^2 R$. Midler man nu dette udtryk over en periode finder man præcis det udtryk, der står i (69). Middeleffekten svarer altså nøje til den energi der bliver afsat i modstandene. Spoler og kapacitorer oplagrer energi midlertidigt, men hvis de er modstandsfrie bliver der ikke afsat noget energi i dem.

Sammenligner man (69) med jævnstrøms resultatet $I^2 R$ er der en forskel på en faktor en halv. For at komme af med denne faktor indfører man tit effektive amplituder $I_{\text{eff}} = |\tilde{I}_0|/\sqrt{2}$ og $\mathcal{E}_{\text{eff}} = \mathcal{E}_0/\sqrt{2}$, så vi har

$$\langle P \rangle = I_{\text{eff}}^2 R, \quad (70)$$

præcist som i jævnstrøms tilfældet. F.eks. er de 220V, der står på vores stikkontakter, ikke den egentlige amplitude men \mathcal{E}_{eff} .

⁵Denne regning laves lettest ved at bruge $\cos(A)\cos(B) = (\cos(A+B) + \cos(A-B))/2$.



Figur 11: Strøamplitude $|\tilde{I}_0|$ og faseskift ϕ som funktion af ω/ω_0 . For $Q = 10, 5, 2$.

6 Svingningskredsen

Den afgørende enhed i en radiomodtager er en svingningskreds – eller RCL-kredsen, som vi tidligere har kaldt den. Den består som før af en kapacitor, en induktor og en modstand i serie med en spændingsforsyning (se Fig. 6). I tilfældet med radioen er spændingsforsyningen til kredsen erstattet af en tidsligt varierende spænding, som til syvende og sidst stammer fra radioens antenne. I antennen vil den elektromotoriske kraft skyldes udefra kommende elektromagnetisk stråling udsendt fra en radiosender. Her vil vi betragte signalet som værende en ren harmonisk svingning som i (48).

Maskeligningen for kredsen er givet som

$$\tilde{\mathcal{E}}_{0,\text{in}} = \left(R - i\omega L + \frac{i}{\omega C} \right) \tilde{I}_0.$$

Heraf kan vi beregne strømmen i kredsen:

$$\begin{aligned} \tilde{I}_0 &= \frac{\tilde{\mathcal{E}}_{0,\text{in}}}{R - i\omega L + i/\omega C} \\ &= \frac{e^{-i\phi}}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \tilde{\mathcal{E}}_{0,\text{in}}, \end{aligned} \quad (71)$$

hvor vi har skrevet impedansen for kredsen på polær form $Z = |Z|e^{i\phi}$ med

$$|Z| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \quad \text{og} \quad \tan \phi = \frac{\frac{1}{\omega C} - \omega L}{R}. \quad (72)$$

Strømmen i kredsen er altså stærkt frekvensafhængig. Man kan nu spørge, ved hvilken frekvens vi har den stærkeste strøm. Det vil svare til at minimere $|Z|$ som funktion af ω . Det sker for en frekvens der opfylder

$$\frac{1}{\omega C} - \omega L = 0, \quad (73)$$

hvilket netop svarer til kredsens naturlige svingningsfrekvens

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \quad (74)$$

Hele forløbet af strøm og faseskift som funktion af frekvens er vist i Fig. 11.

Det fænomen vi her ser kaldes generelt en *resonans*, og ω_0 kaldes også *resonansfrekvensen*. Resonans er ofte relateret til systemer som udefra forstyrres af en periodisk kraft. Hvis den ydre frekvens rammer en af systemets *egenfrekvenser* kan der opstå resonans, hvorved der overføres stor energi fra den ydre kraft til systemets indre frihedsgrader. I figuren er resonanskurven plottet for forskellige værdier af godheden Q som blev defineret i ligning (44). Kurven med størst godhed giver den snævreste resonanstopp og faseskift tættest på $\pm\pi/2$. I en af opgaverne vil vi vise, at bredden, $\Delta\omega$ af resonanstoppen netop er ω_0/Q . Jo bedre en svingningskreds er (jo flere svingninger den kan lave før den henfalder), jo skarpere er resonansen altså (jo smallere er toppen). Dette er et MEGET generelt fænomen i fysikken som I vil støde på igen og igen. Når man i gamle dage “stillede ind på de danske stationer”, så skete det typisk ved at skrue på en drejekondensator, hvorved C ændres, og med den kredsens resonansfrekvens, indtil ω_0 matcher den frekvens, hvormed senderen i Kalundborg udsender sit radiosignal.

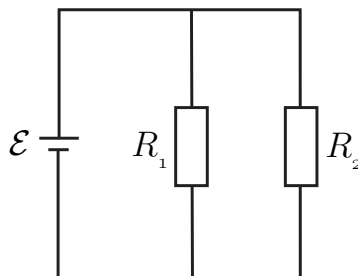
Træningsopgaver

1. En kapacitor laves ved, at to kvadratiske plader med sidelængder 10 cm placeres i en afstand af 1 cm fra hinanden, og imellem de to plader indsættes der et dielektrikum med relativ permitivitet $\epsilon_r = 3$.
 - a) Hvad er kapacitansen? (Dette diskuteres ikke i disse noter, men i Griffiths).
 - b) Der lægges nu en spænding på 5 V mellem de to plader. Hvor stor er ladningen på hver plade?
 - c) Vi antager nu, at kapacitoren oplades ved, at der løber en konstant strøm i $5 \mu\text{s}$. Hvad er strømmen I ? (Dette er ikke en realistisk model. Vi vender snart tilbage til, hvordan en kapacitor reelt oplades.)
2. En spole med induktans $L=100 \text{ nH}$ forbindes til en strømforsyning, som leverer en elektromotorisk kraft $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \cos(2\pi \nu t)$, hvor $\mathcal{E}_0 = 5 \text{ V}$ og $\nu=10 \text{ MHz}$. Hvad er strømmen gennem spolen som funktion af tiden?
3. Vi betragter to parallel forbundne modstande R_1 og R_2 som vist i Fig 12.
 - a) Vis at den totale strøm fra spændingsforsyningen kan skrives som $I = \mathcal{E}/R_{\text{eff}}$, hvor den effektive modstand R_{eff} er givet ved

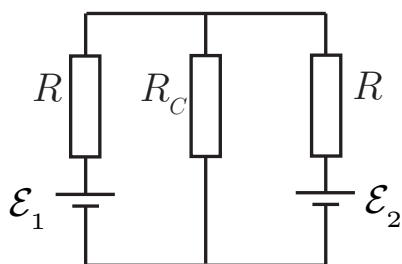
$$\frac{1}{R_{\text{eff}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}. \quad (75)$$

Start med at opskrive Kirchhoffs love for systemet.

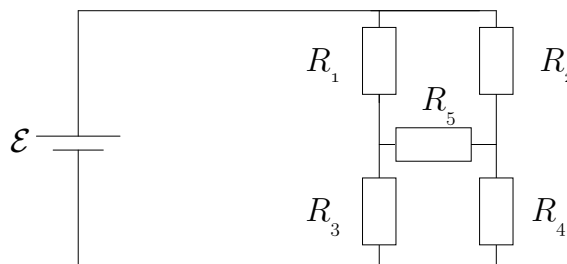
b) Generaliser dette resultat til N parallel forbundne modstande.



Figur 12: Parallelforbundne modstande

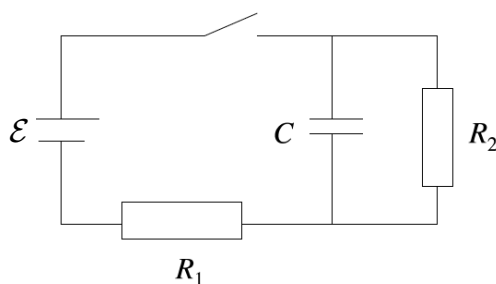


Figur 13: Kredsløb med to batterier.



Figur 14: Kredsløb med 5 modstande.

4. Betragt kredsløbet i Fig. 13. To batterier med elektromotorisk kraft \mathcal{E}_1 og \mathcal{E}_2 er serie forbundet med to ens modstande med modstand R , og begge er parallel forbundne med en central modstand med modstand R_C .
Opstil Kirchhoffs love for systemet og find strømmen gennem modstanden R_C .
5. Betragt kredsløbet i Fig. 14.
 - a) Opskriv Kirchhoffs love for systemet.
 - b) Løs ligningerne og find alle strømme. Du har sådan set løst alt fysikken i det første spørgsmål, så dette spørgsmål er bare "trivielt" algebra, som ender med at være lidt langt men lige ud af landevejen. Det er derfor helt i orden at skrive ligningerne ind i en computer og få den til at løse dem. Meningen med denne opgave, er bare at illustrere, at Kirchhoffs love sætter os i stand til at løse selv rimeligt komplicerede situationer.
 - c) Check at den totale strøm giver det man forventer når $R_5 \rightarrow \infty$ og $R_5 = 0$.
6. Vi vil nu kigge på kredsløbet i Fig. 4 med $\mathcal{E} = 5 \text{ V}$, $L = 20 \text{ mH}$, og $R = 100 \Omega$. Hvor lang tid går der fra der tændes på kontakten til der løber strømmen $I = 25 \text{ mA}$?
7. Betragt kredsløbet i Fig. 5 med $\mathcal{E} = 10 \text{ V}$, $R = 15 \text{ k}\Omega$, og $C = 35 \text{ nF}$. Til tiden $t = 0$ tilsluttes kontakten.
 - a) Skitser strømmen i kredsen, ladningen på kapacitoren, samt spændingen over kapacitoren og spændingen over modstanden som funktion af tiden.
 - b) Hvad er strømmen til $t = 0$?
 - c) Hvad er ladningen på kapacitoren i ligevægt?
 - d) Hvor lang tid tager det ca. at oplade kapacitoren?
Lang tid efter kontakten er tilsluttet, skiftes fortegnet på den elektromotoriske kraft, så den nu er $\mathcal{E} = -10 \text{ V}$.
 - e) Gentag spørgsmål a. Hvis man har en god intuition for problemet (eller om man vil en god fysisk forståelse) kan man gøre dette direkte, eller man kan besvare dette spørgsmål ved først at løse spørgsmål f.
 - f) Opstil en differential ligning for ladningen og find ladningen på kapacitoren som funktion af tid.



Figur 15: Opladning af kapacitor.

8. Vi vil nu kigge på svingningskredsen i Fig. 6. Vi antager først, at spændingen er $\mathcal{E} = 5$ V, og at komponenterne har værdierne $R = 100 \Omega$, $L = 20$ mH, og $C = 20$ nF.
- Skitser ladningen på kapacitoren og strømmen gennem kredsen som funktion af tid. Definér dine egne begyndelsesbetingelser.
 - Hvad er ladningen på kapacitoren i ligevægt, og hvor lang tid tager det ca. at komme til ligevægt?
- Vi skifter nu modstanden ud med en modstand på $R = 10$ k Ω .
- Gentag spørgsmål a og b.
9. Vi betragter i denne opgave opladningen af kapacitoren i Fig. 15.
- Til tiden $t = 0$ sluttet kontakten. Hvad er begyndelsesbetingelsen for ladningen Q på kapacitoren?
 - Opskriv Kirchhoffs love og vis at
- $$\mathcal{E} = \frac{R_1 + R_2}{R_2 C} Q + R_1 \frac{dQ}{dt}. \quad (76)$$
- Hvad er ladningen på kapacitoren i ligevægt.
 - Løs differential ligningen og find $Q(t)$.
10. Vi vil i denne opgave kigge på en kreds, svarende til kredsen i Fig. 4, med kontakten lukket og med en varierende elektromotorisk kraft $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \cos(\omega t)$. Antag $\mathcal{E}_0 = 8$ V, $R = 10 \Omega$, $L = 1 \mu\text{H}$, og $\omega = 2\pi \cdot 10$ MHz.
- Brug de komplekse impedanser til at finde den komplekse strøm \tilde{I} i kredsen.
 - Skriv strømmen på formen $I = I_0 \cos(\omega t + \phi)$ og bestem I_0 og ϕ .
11. Vi kigger i denne opgave på en kreds som i Fig. 5, men med kontakten lukket og en varierende elektromotorisk kraft $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \cos(\omega t + \theta)$.
- Brug de komplekse impedanser til at finde den komplekse strøm \tilde{I} i kredsen.
 - Skriv strømmen på formen $I = I_0 \cos(\omega t + \phi)$.
 - Antag $\mathcal{E}_0 = 10$ V, $R = 1$ k Ω , $C = 10$ nF, $\omega = 2\pi \cdot 20$ kHz, og $\theta = \pi/4$. Find I_0 og ϕ .

12. Betragt svingningskredsen i Fig. 6. Strømforsyningen leverer en elektromotorisk kraft $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \cos(\omega t)$.
- Find strømmen gennem modstanden R og skriv den som $I = I_0 \cos(\omega t + \phi)$.
 - Hvad er kredsens resonansfrekvens ω_0 (den frekvens, hvor strømmen har den største amplitude)?
 - Vis at effekten afsat i modstanden R midlet over en periode kan skrives som

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} \frac{R \mathcal{E}_0^2}{R^2 + \frac{L^2}{\omega^2} (\omega^2 - \omega_0^2)^2}. \quad (77)$$

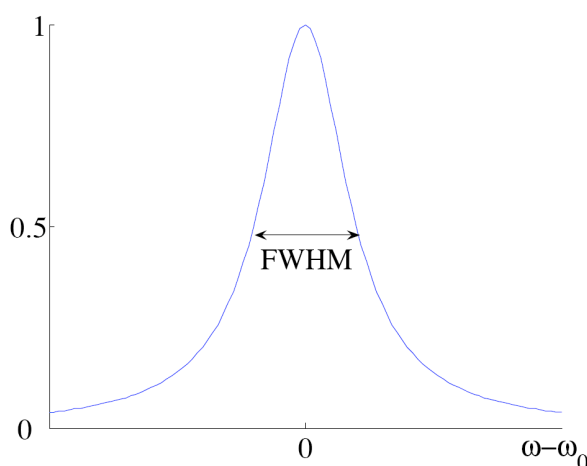
Når R/L bliver mindre, bliver resonansen (77) smallere. Bredden af resonansen, $\Delta\omega$, defineres typisk som "Full Width Half Maximum" (FWHM). Dvs. man finder afstanden mellem de to punkter, hvor kurven har halvdelen af værdien i maximum (se Fig. 16).

d) Find $\Delta\omega$.

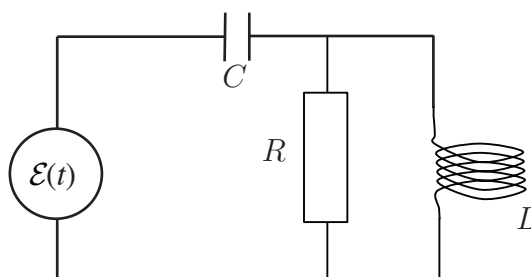
Kredsens godhed Q defineres nu som

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}. \quad (78)$$

e) Hvordan passer denne definition med definitionen (44)?

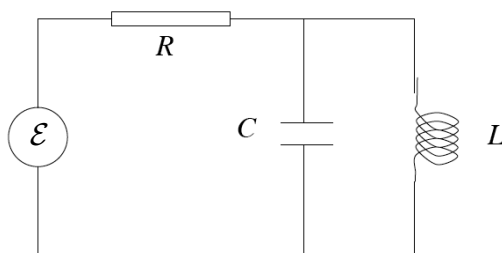


Figur 16: FWHM - full width half maximum

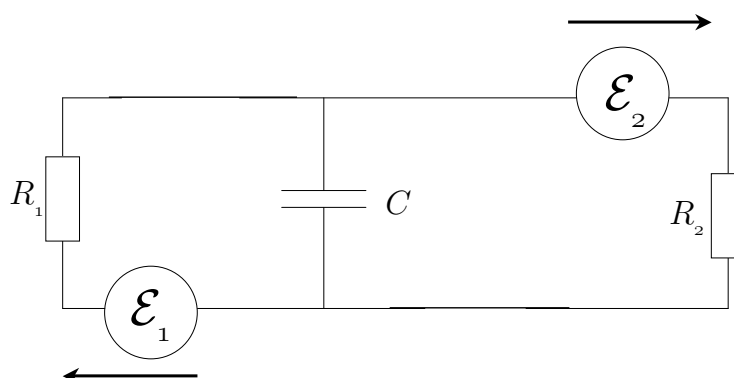


Figur 17: En parallel kreds med modstand, kapacitor og spole.

13. Vi betragter i denne opgave kredsløbet i Fig. 17.
- Opskriv knude og maskeligninger for kredsløbet. Kredsen drives nu med en elektromotorisk kraft $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \cos(\omega t)$.
 - Skriv knude og maskeligningerne på kompleks form og find strømmen gennem modstanden ved hjælp af de komplekse impedanser. Vi vil nu bruge $\mathcal{E}_0 = 5 \text{ V}$, $R = 500 \Omega$, $C = 50 \text{ nF}$, $L = 40 \text{ mH}$, og $\omega = (2\pi) \cdot 10 \text{ kHz}$.
 - Skriv den reelle strøm gennem modstanden på formen $I = I_0 \cos(\omega t + \phi)$ og bestem I_0 og ϕ .
 - Find effekten afsat i modstanden til alle tider samt middel effekten.
14. Vi kigger i denne opgave på vekselstrømskredsløbet i Fig. 18. Strømforsyningen leverer en emf $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \cos(\omega t)$.
- Opskriv Kirchhoffs love og find alle strømme i systemet. Skriv strømmene på formen $I(t) = I_0 \cos(\omega t + \delta)$.
Hint: Det bliver hurtigt omstændeligt at skrive størrelsen og fasen ned for hver enkelt strøm (men det er ikke fordi det er svært). Hvis man kigger på sammenhængene mellem strømmene kan man dog se, at de er reelle ligninger. Man kan derfor (i dette tilfælde) hurtigt se hvad de andre reelle strømme er, når man først har fundet f.eks. I_C .
 - Find den effekt som strømforsyningen leverer, og effekten afsat i modstanden til tiden t .
 - Vis at midlet over en periode er arbejdet udført af strømforsyningen det samme som energien afsat i modstanden.



Figur 18: Vekselstrømskredsløb



Figur 19: Kredsløb med to strømforsyninger. Pilene angiver i hvilken retning vi regner positivt.

15. Betragt kredsløbet i Fig. 19. De to strømforsyninger leverer emf'er $\mathcal{E}_1(t) = \mathcal{E}_{0,1} \cos(\omega t)$ og $\mathcal{E}_2(t) = \mathcal{E}_{0,2} \cos(\omega t)$. I det første spørgsmål vil vi se bort fra, at der er to emf'er og sætte $\mathcal{E}_2 = 0$ (bare lad som om den slet ikke er der, så ledningen løber lige igennem).
- Opstil Kirchhoffs love og find den reelle strøm, som løber gennem kapacitoren.
 - Antag nu at vi slukker for den første strømforsyning $\tilde{\mathcal{E}}_1 = 0$, men at nummer to er tændt $\tilde{\mathcal{E}}_2 \neq 0$. Hvad er strømmen gennem kapacitoren nu?
 - Nu tænder vi for begge strømforsyninger. Find igen strømmen som løber i kapacitoren. Dette kan gøres på to måder: enten ved blot at opskrive Kirchhoffs love og løse dem eller man kan gøre noget smart og bruge resultatet ovenfra. (I dette spørgsmål kommer man let til at skrive meget lange udtryk, specielt hvis man ikke bruger den smarte måde. Det er derfor en god idé at indføre nogle hjælpe størrelser, som f.eks. at udtrykke den komplekse strøm fra spørgsmål a) og b) som $\tilde{I}_0 = \tilde{\mathcal{E}}_0/A$, hvor A er en passende konstant, og derefter udtrykke svaret v.h.a. hjælpe størrelserne A, B, \dots . Der er ikke så meget grund til at reducere svaret yderligere, det er mere teknikken end svaret, der er det vigtige i dette spørgsmål).
 - Hvordan vil du løse problemet, hvis de to strømforsyninger har forskellige frekvenser? Du behøver ikke udføre beregningen, men tænk over, hvad man kunne gøre.
16. I denne opgave vil vi kigge på, hvad der sker, når man tænder en vekselstrøm. Vi kigger igen på svingningskredsen i Fig. 6, men med en vekselspænding $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \cos(\omega t)$. Til tiden $t = 0$ tænder vi kontakten.
- Hvilke grænsebetingelser skal være opfyldt ved $t = 0$, i.e., hvad er $I(t = 0^+)$ og $Q(t = 0^+)$?
- Vi vil nu bruge, at den fuldstændige løsning til en lineær differential ligning kan skrives som en partikulær løsning til den inhomogene differential ligning

$$\mathcal{E}(t) = R \frac{dQ}{dt} + L \frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{Q}{C} \quad (79)$$

plus den fuldstændige løsning til homogene differential ligning

$$0 = R \frac{dQ}{dt} + L \frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{Q}{C} \quad (80)$$

- b) Find en partikulær løsning til (79). Hint: Impedans metoden giver os en partikulær løsning for strømmen. Man kan derefter finde en partikulær løsning for ladningen ved at bruge (58).
- c) Hvad er den fuldstændige løsning til (80)? Antag at kredsen er underdæmpet.
- d) Hvad er løsningen, som opfylder grænsebetingelserne?
- e) Vis at for lange tider får vi resultatet, som vi finder med impedans metoden.