# Robótica grupo2
# Clase 3

Facultad de Ingeniería UNAM

M.I. Erik Peña Medina

# Derechos reservados

# Estado del arte de los robots

- Expectativas sobre los robots.
- Investigación del estado del arte.
  - Recopilación de la información.
  - Clasificación de la información.
    - Revisión de la información mediante el formato.

- Conceptos básicos de la descripción de los cuerpo rígidos.
  - Nomenclatura
  - Cuerpo rígido.
  - Leyes del movimiento (leyes de Newton).
  - Grado de libertad.
  - Centro de masa.

# Nomenclatura

1. Los elementos matemáticos estarán escritos utilizando la fuente Times New Roman en cursiva, exceptuando:
    - Las abreviaturas de funciones trigonométricas, que se escriben en fuente Times New Roman recta y en idioma inglés para facilitar la programación de las ecuaciones ($\cos\theta$, $\sin\theta$, $\tan\theta$, $\sec\theta$, $\csc\theta$, $\cot\theta$, $\arccos\theta$, $\arcsin\theta$, $\arctan\theta$, $\mathrm{arcsec}\,\theta$, $\mathrm{arccsc}\,\theta$ y $\mathrm{arccot}\,\theta$).
    - Los vectores y matrices se escriben con fuente Times New Roman recta y en negritas, por ejemplo, el vector de posición ${}^{i}\mathbf{p}$ establecido en un sistema de referencia $\{i\}$, y la matriz de $\mathbf{A}$. Algunos vectores estarán asociados a conceptos específicos por lo que están escritos con letra mayúscula como el vector de pares por efectos de Coriolis $\mathbf{V}(q,\dot{q})$, el vector de pares por efectos de la gravedad $\mathbf{G}(q)$ de pares por efectos de la gravedad.

# Nomenclatura

2. Una constante, literal o variable es una base cuando está acompañada por un super índice del lado derecho. En el caso de las matrices, los superíndices derechos indican el tipo de matriz, por ejemplo, en el caso de una matriz $\mathbf{A}$, el superíndice $-1$ indica su matriz inversa $\mathbf{A}^{-1}$, el superíndice $T$ indica su matriz transpuesta ($\mathbf{A}^{T}$) y el superíndice $+$ indica la matriz pseudo inversa ($\mathbf{A}^{+}$).
3. Los vectores con el superíndice derecho $T$ indica su vector transpuesto, por ejemplo, $\mathbf{p}^{T}$ indica el vector transpuesto del vector $\mathbf{p}$. Esta notación se emplea para incluir vectores dentro de un texto, por ejemplo, $\mathbf{p}^{T} = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}$.

# Nomenclatura

4. En vectores y matrices el superíndice superior izquierdo indica referencia con respecto a un sistema de referencia considerado anterior y el subíndice inferior derecho indica referencia con respecto a un sistema de referencia o cuerpo siguiente. Por ejemplo, el vector de posición ${}^{i}\mathbf{p}_{j}$ indica la posición de un punto $j$ con respecto al origen de un sistema anterior $i$, en la matriz de transformación ${}^{i}\mathbf{T}_{j}$ sus índices indican que esta contiene las relaciones de posición y orientación de un sistema $j$ con respecto a un sistema de referencia anterior $i$. En el caso de que las ecuaciones sean desarrolladas utilizando la herramienta MathCAD, los índices se escribirán en la parte inferior, por ejemplo, en el caso de los vectores ${}^{i}\mathbf{p}_{j} = p_{i\_j}$ y en el caso de las matrices ${}^{i}\mathbf{T}_{j} = T_{i\_j}$.

# Nomenclatura

5. En este texto se platean matrices de rotación asociadas con cambios de orientación con respecto a los ejes de un sistema de referencia cartesiano $i$ y una matriz de rotación establecida de manera general, siguiendo la convención de los ángulos de Eüler. En el caso de las matrices de rotación asociadas a cada uno de los ejes del sistema cartesiano $i$, la matriz de rotación con respecto a la rotación sobre el eje $x$ es $\mathbf{R}_x(\gamma)$, la matriz de rotación con respecto a la rotación sobre el eje $y$ es $\mathbf{R}_y(\beta)$ y la matriz de rotación con respecto a la rotación sobre el eje $z$ es $\mathbf{R}_z(\alpha)$. En el caso de la matriz de rotación general esta describe las relaciones de orientación de un sistema de referencia cartesiano $j$ con respecto a otro sistema cartesiano $i$, esta matriz se establece de la siguiente manera ${}^{i}\mathbf{R}_j({}^{i}\alpha_j, {}^{i}\beta_j, {}^{i}\gamma_j) = \mathbf{R}_z({}^{i}\alpha_j)\mathbf{R}_y({}^{i}\beta_j)\mathbf{R}_x({}^{i}\gamma_j)$. Cuando este planteamiento sea utilizado en MatCAD las matrices de rotación se expresarán de la siguiente manera $R_{i\_j}(\alpha_{i\_j}, \beta_{i\_j}, \gamma_{i\_j}) = R_z(\alpha_{i\_j})R_y(\beta_{i\_j})R_x(\gamma_{i\_j})$.

# Nomenclatura

6. En el caso de los robots paralelos estos están compuestos por varias cadenas cinemáticas, por lo que a los subíndices inferiores derechos de los vectores y matrices establecidos en su modelado se les agrega $n$ para identificar a la cadena que pertenecen, por ejemplo, el vector de posición ${}^{i}\mathbf{p}_{j.n}$ el cual indica la posición de un punto $j$ con respecto a un sistema de referencia $i$ dentro de una cadena cinemática $n$, en el caso de las transformaciones relacionadas con la cadena cinemática de un robot paralelo estas se expresaran ${}^{i}\mathbf{T}_{j.n}$. En el caso de los modelos desarrollados utilizando la herramienta de MathCAD los vectores de posición relacionados con una cadena cinemática se expresarán de la siguiente manera ${}^{i}\mathbf{p}_{j.n} = p_{i\_j.n}$, en el caso de las matrices de transformación estas se expresarán como ${}^{i}\mathbf{T}_{j.n} = T_{i\_j.n}$.

# Nomenclatura

7. Los productos vectoriales se expresan de la siguiente manera:
    - El producto punto entre dos vectores se puede expresar como $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ o mediante la expresión $\mathbf{a}^T\mathbf{b}$.
    - El producto cruz entre dos vectores se expresa mediante la expresión $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.
8. Las matrices identidad se expresan de la siguiente manera $\mathbf{I}^n$ cuando estas con cuadradas y su dimensión es de $n \times n$, el caso de que la matriz identidad no se cuadrada se expresará $\mathbf{I}^{n \times m}$ con $n$ renglones y $m$ columnas.
9. Las variables de la postura de un robot se expresan como el conjunto $q = \{q_1, \ldots, q_n\}$, las cuales se agrupan formando el vector $\mathbf{q}^T = \begin{pmatrix} q_1 & \cdots & q_n \end{pmatrix}$. En el caso de los robots redundantes, el conjunto de las variables de la postura se divide en un subconjunto de variables actuadas $q_w = \{q_{w_1}, \ldots, q_{w_m}\}$ y en un subconjunto de variables de adaptación $q_f = \{q_{f_1}, \ldots, q_{f_{n-m}}\}$, donde $m$ es la cantidad de variables que describen la posición y orientación del efector final del robot dentro de su espacio de trabajo, y n es la cantidad de variables que describen la postura de un robot redundante.

# Nomenclatura

10. Para el planteamiento de los modelos matemáticos relacionados con la cinemática de posición, la cinemática de velocidades y la cinemática de aceleraciones se le asocia al efector final de un robot un sistema de referencia cartesiano $P$, el cual se emplea para describir la posición del efector final mediante el vector ${}^{i}\mathbf{p}_{P}$ y su orientación mediante el vector ${}^{i}\boldsymbol{\theta}_{P}$ con respecto a un sistema de referencia $i$, que por lo general es el sistema inercial asociado con el número $0$. En el caso de los robots en el plano $xy$ el vector de posición es ${}^{i}\mathbf{p}_{P}^{T}=\left({}^{i}x_{P} \quad {}^{i}y_{P}\right)$ y el vector de orientación es ${}^{i}\boldsymbol{\theta}_{P}=\left({}^{i}\theta_{P}\right)$, y en el caso del espacio cartesiano de tres dimensiones el vector de posición es ${}^{i}\mathbf{p}_{P}^{T}=\left({}^{i}x_{P} \quad {}^{i}y_{P} \quad {}^{i}z_{P}\right)$ y el vector de orientación es ${}^{i}\boldsymbol{\theta}_{P}^{T}=\left({}^{i}\gamma_{P} \quad {}^{i}\beta_{P} \quad {}^{i}\alpha_{P}\right)$. En el caso de modelos desarrollados utilizando la herramienta de MathCAD el vector de posición del efector final asociado a un sistema $P$ con respecto a un sistema de referencia $i$ se puede expresar como $p_{i\_P}^{T}=\left(x_{i\_P} \quad y_{i\_P} \quad z_{i\_P}\right)$, en el caso del vector de orientación este se expresa de la siguiente manera $\theta_{i\_P}^{T}=\left(\gamma_{i\_P} \quad \beta_{i\_P} \quad \alpha_{i\_P}\right)$.

# Nomenclatura

11. La posición y orientación del efector final de un robot dentro de su espacio de trabajo se establece mediante el vector de pose ${}^{i}\xi_{p}{}^{T} = \left({}^{i}\mathbf{p}_{p} \quad {}^{i}\boldsymbol{\theta}_{p}\right)$, el cual es ideal o se establece mediante una medición. La posición y orientación del efector final también puede establecerse en términos de las variables de la postura de un robot mediante el vector de pose ${}^{i}\xi_{p\_}{}^{T} = \left({}^{i}\mathbf{p}_{p}(q) \quad {}^{i}\boldsymbol{\theta}_{p}(q)\right)$, el cual es aproximado debido a los errores debido a la resolución de los actuadores del robot. En el caso de que se desarrollen modelos utilizando la herramienta de MathCAD el vector de pose se expresará de la siguiente manera $\xi_{i\_p}{}^{T} = \left(p_{i\_p} \quad \theta_{i\_p}\right)$ y el vector de postura del robot se expresará de la siguiente manera $\xi_{i\_p\_}{}^{T} = \left(p_{i\_p}(q) \quad \theta_{i\_p}(q)\right)$.

# Nomenclatura

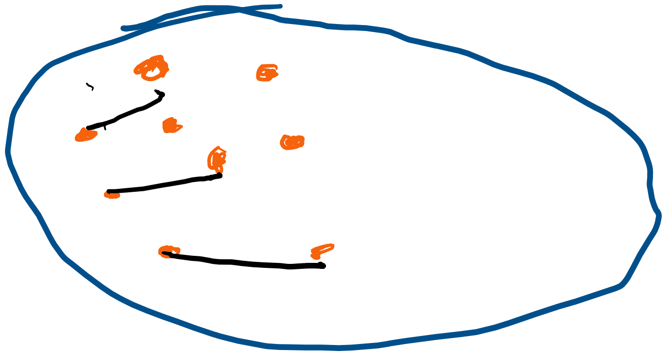
12. Las restricciones cinemáticas de la posición y orientación que una tarea a la postura de un robot mediante la pose de su efector final se establece mediante la expresión $\mathbf{F} = {}^{t}\boldsymbol{\xi}_P - {}^{t}\boldsymbol{\xi}_{P\_} = \mathbf{0}$.
13. Las restricciones cinemáticas que las velocidades de la realización de una tarea le imponen a un robot mediante el movimiento de su efector final se establece mediante el modelo $\mathbf{C}_q = {}^{t}\dot{\boldsymbol{\xi}}_P - {}^{t}\dot{\boldsymbol{\xi}}_{P\_} = \mathbf{0}$, el cual puede ser expresado mediante la distribución $\mathbf{C}_q = \mathbf{A}_q(q)\boldsymbol{\Psi} = \mathbf{0}$, donde $\mathbf{A}_q(q)$ es la matriz de restricciones cinemáticas de la postura y el vector de velocidades generalizadas $\boldsymbol{\Psi}^T = \begin{pmatrix} {}^{t}\dot{\mathbf{p}}_P(q) & {}^{t}\dot{\boldsymbol{\theta}}_P & \dot{\mathbf{q}} \end{pmatrix}$.

# Antecedentes básicos

## Cuerpo rígido

Un cuerpo rígido es un cuerpo ideal el cual es indeformable:

- La distancia entre las partículas que lo conforman no cambia.
- Sus propiedades físicas (densidad) es homogéneas.



-Cuantitativas

-Cuantitativas

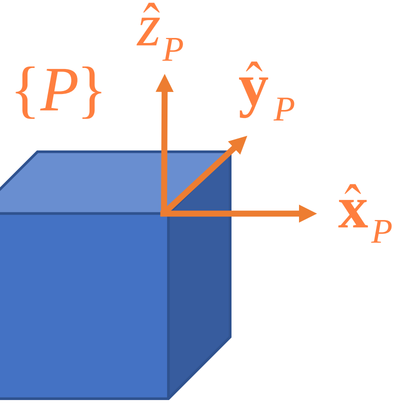
-Masa

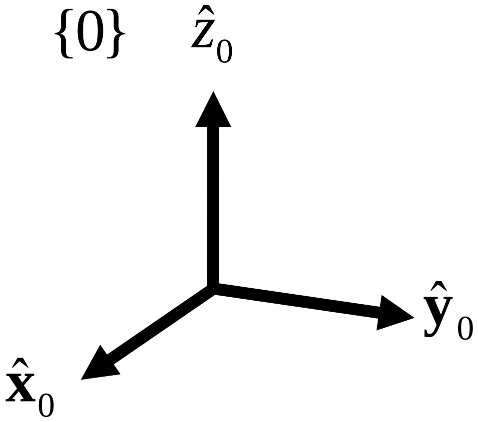
# Antecedentes básicos

## Cuerpo rígido

Otra propiedades físicas que se pueden relacionar con los cuerpos rígidos son la posición y la orientación.

**Posición**



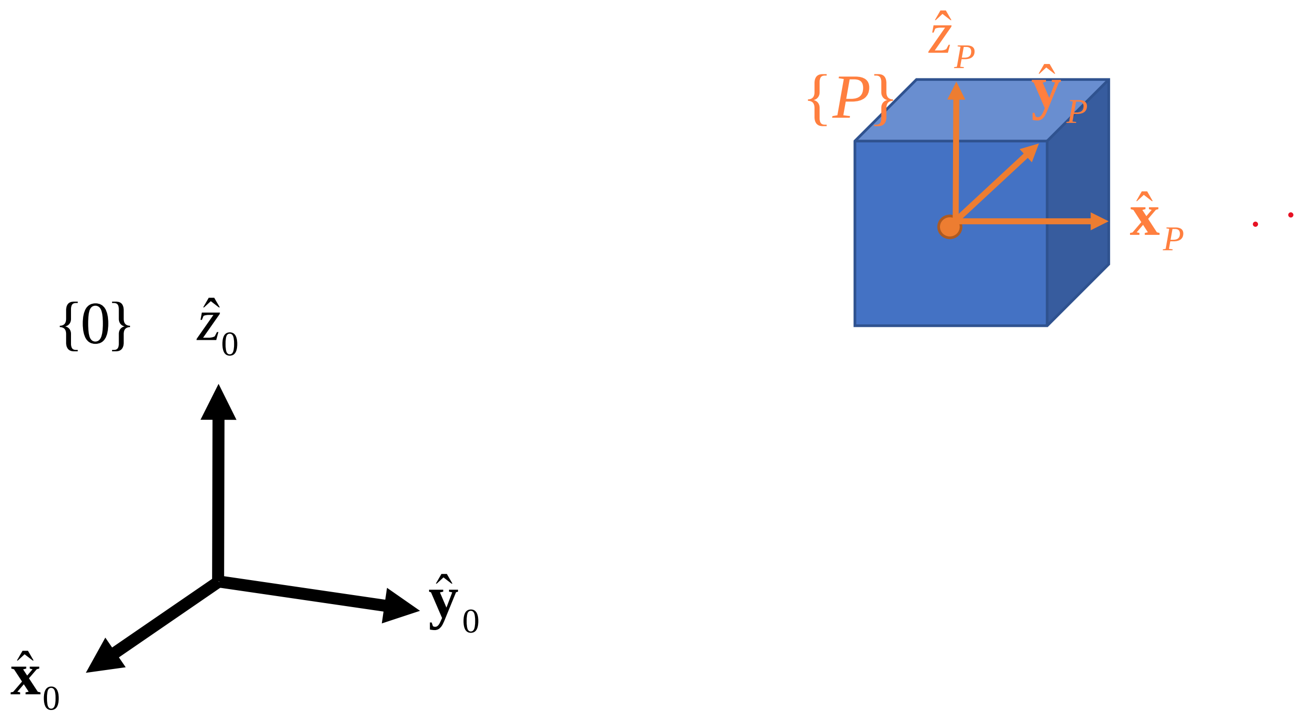



# Antecedentes básicos

## Cuerpo rígido

Otra propiedades físicas que se pueden relacionar con los cuerpos rígidos son la posición y la orientación.

**Posición**

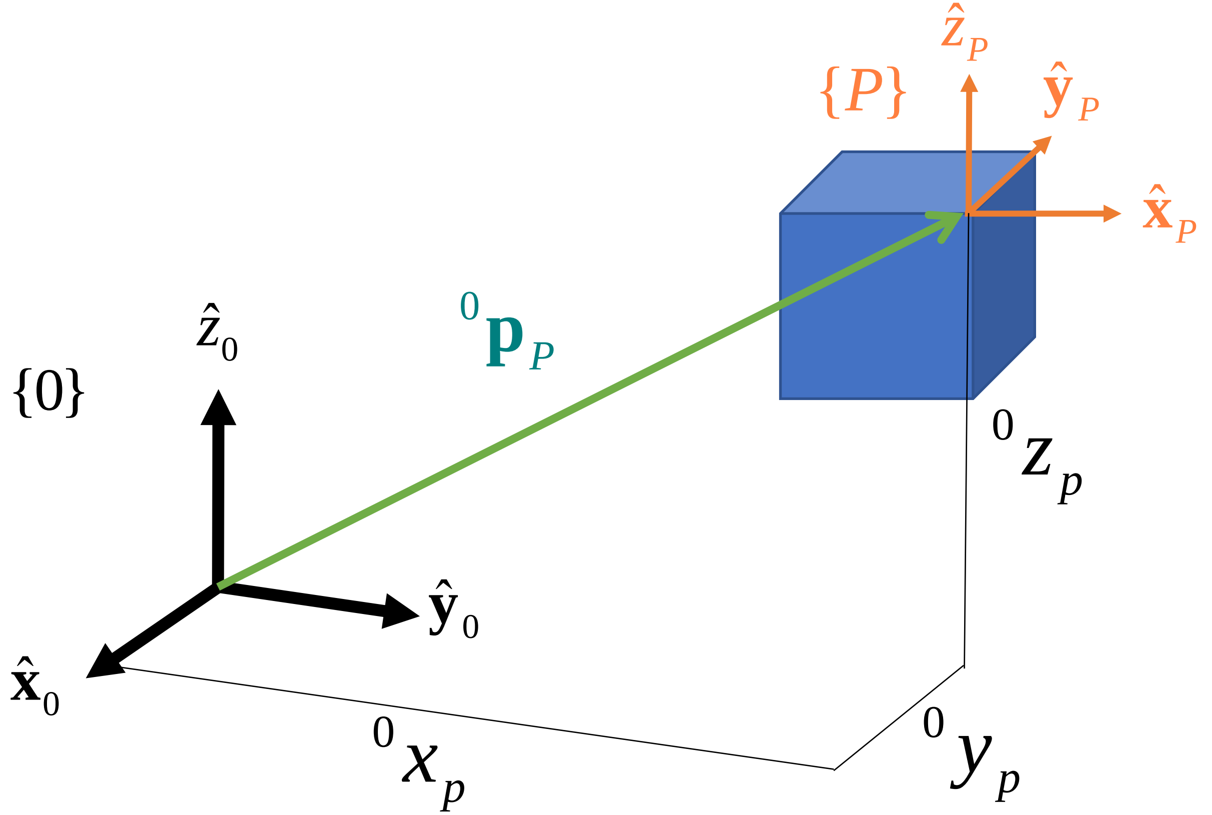


# Antecedentes básicos

## Cuerpo rígido

Otra propiedades físicas que se pueden relacionar con los cuerpos rígidos son la posición y la orientación.

**Posición**



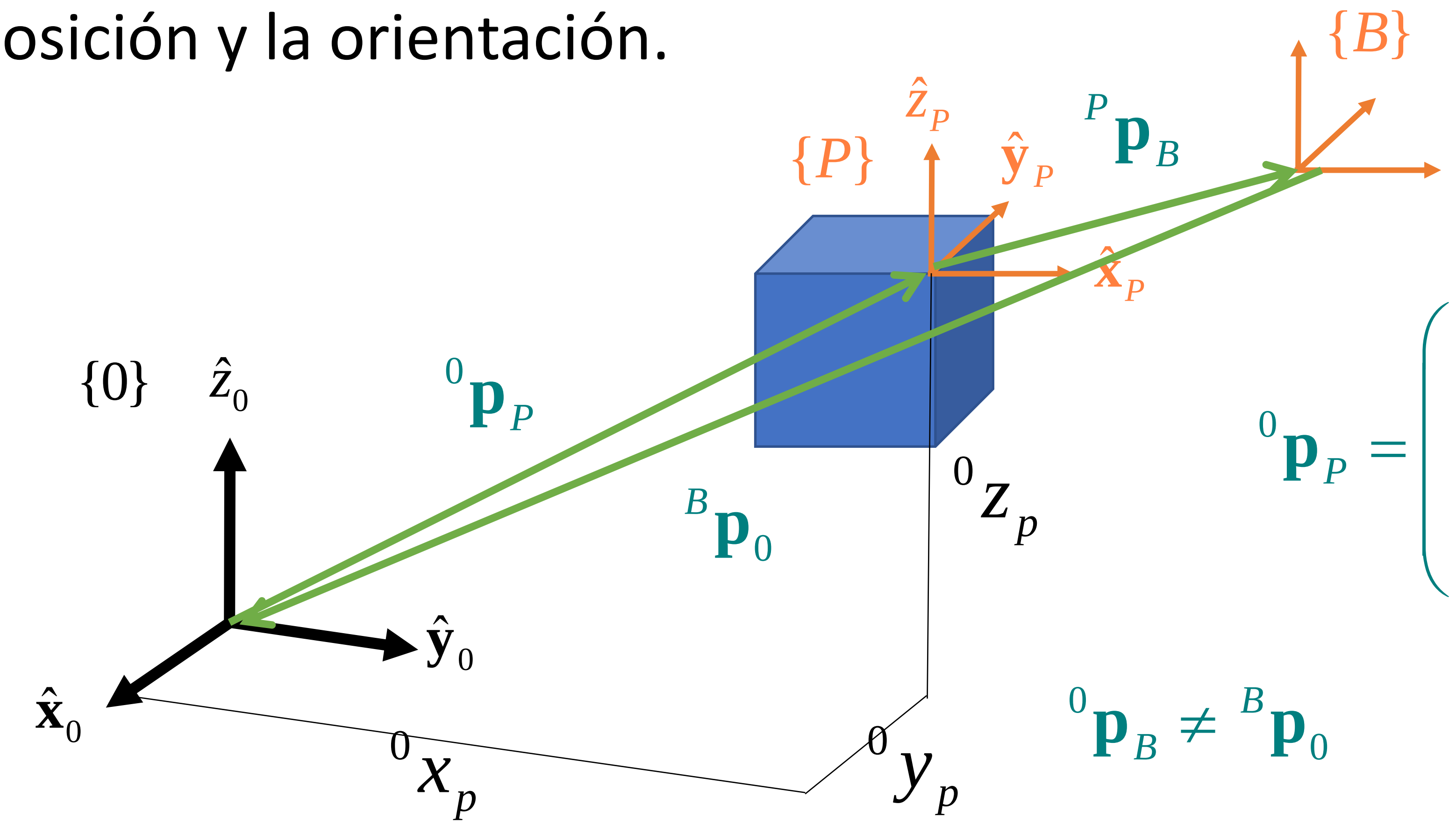

$$^0\mathbf{p}_P = \begin{pmatrix} ^0x_p \\ ^0y_p \\ ^0z_p \end{pmatrix}$$

# Antecedentes básicos

## Cuerpo rígido

Otra propiedades físicas que se pueden relacionar con los cuerpos rígidos son la posición y la orientación.

**Posición**




$${}^0\mathbf{p}_P = \begin{pmatrix} {}^0x_p \\ {}^0y_p \\ {}^0z_p \end{pmatrix}$$

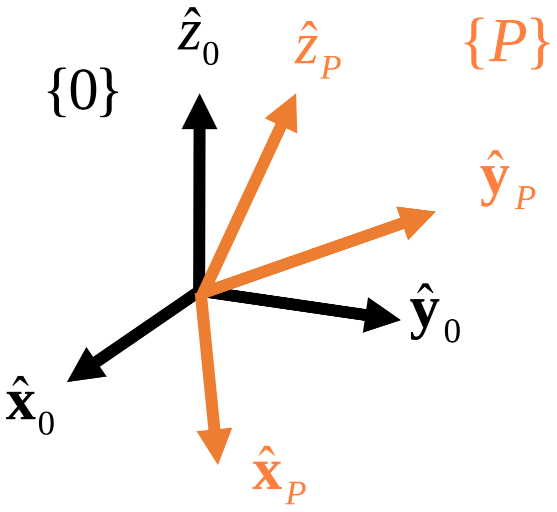
$${}^0\mathbf{p}_B \neq {}^B\mathbf{p}_0$$

# Antecedentes básicos

## Cuerpo rígido

Otra propiedades físicas que se pueden relacionar con los cuerpos rígidos son la posición y la orientación.

**Orientación**

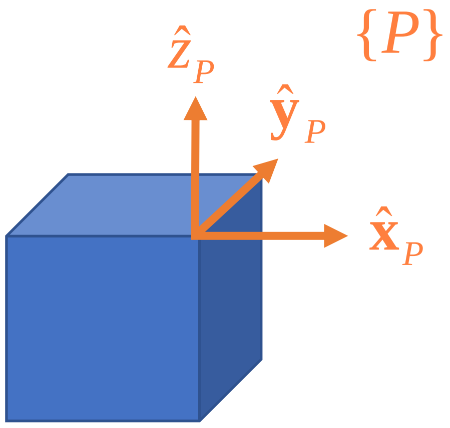


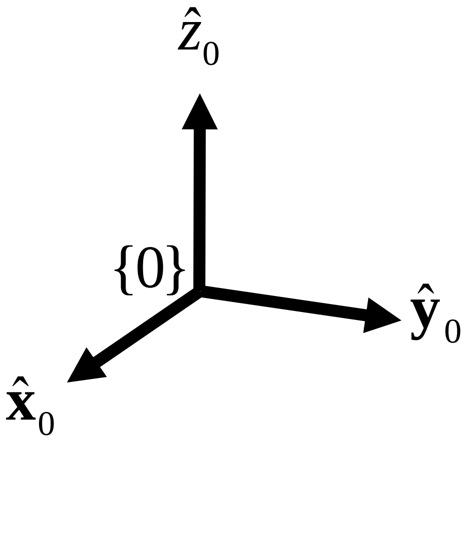
# Antecedentes básicos

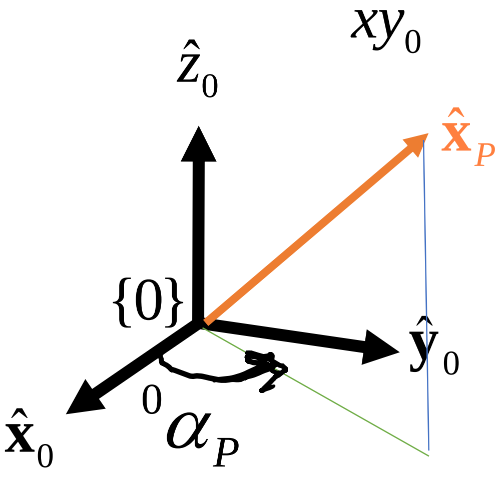
## Cuerpo rígido

Otra propiedades físicas que se pueden relacionar con los cuerpos rígidos son la posición y la orientación.

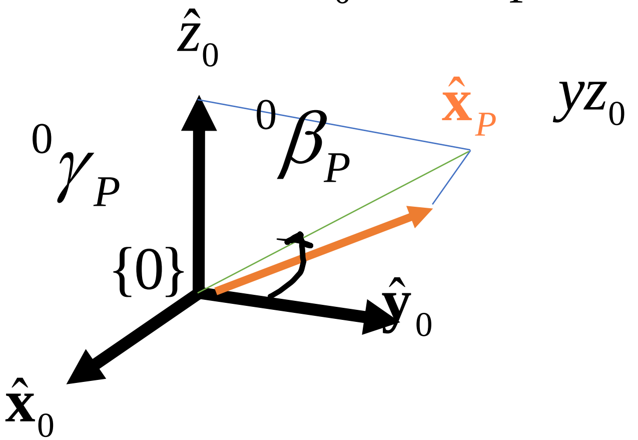
**Orientación**

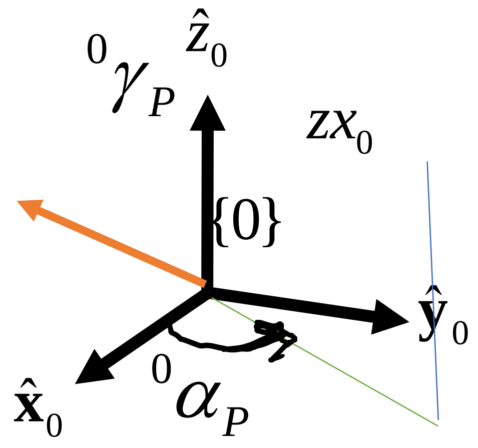



$${}^{0}\boldsymbol{\theta}_P = \begin{pmatrix} {}^{0}\alpha_P \\ {}^{0}\beta_P \\ {}^{0}\gamma_P \end{pmatrix}$$



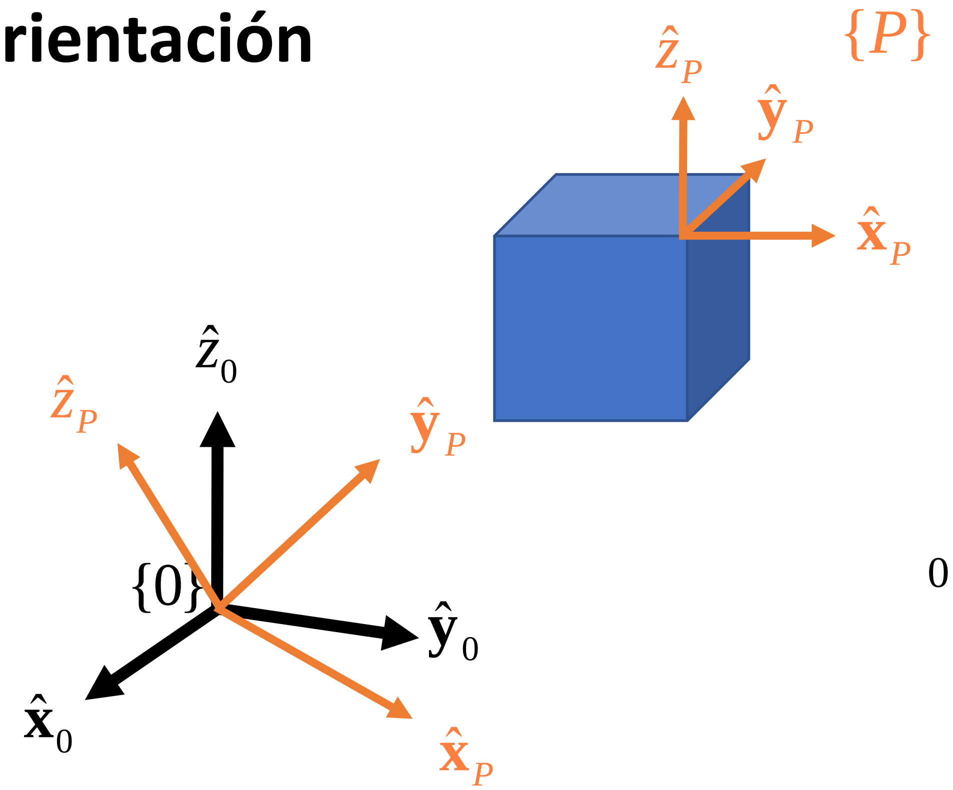



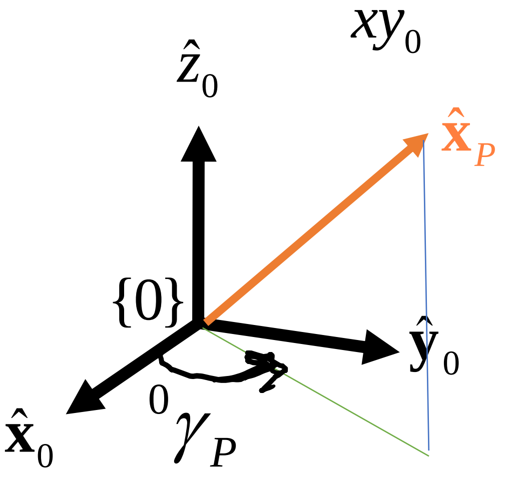
# Antecedentes básicos

## Cuerpo rígido

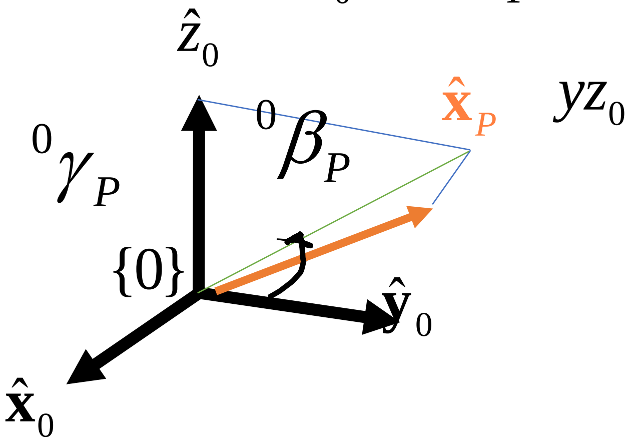
Otra propiedades físicas que se pueden relacionar con los cuerpos rígidos son la posición y la orientación.

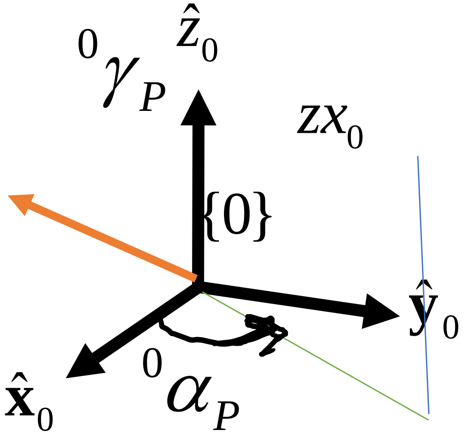
**Orientación**




$${}^0\boldsymbol{\theta}_P = \begin{pmatrix} {}^0\gamma_P \\ {}^0\beta_P \\ {}^0\alpha_P \end{pmatrix}$$

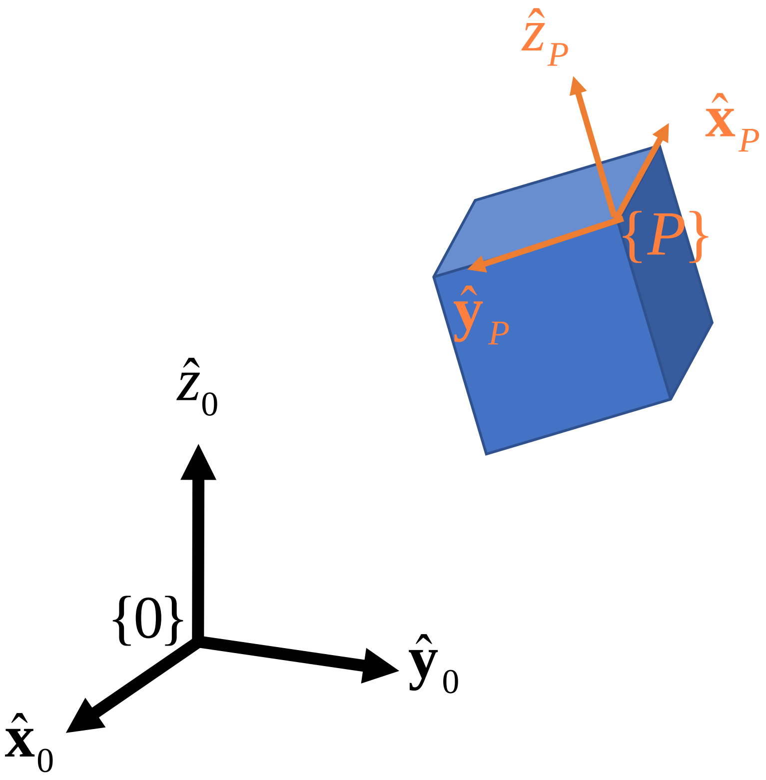


# Antecedentes básicos

## Grado de libertad

Un grado de libertad es la cantidad de variables (físicas) necesarias para establecer el estado de un elementos o sistema.




Pose

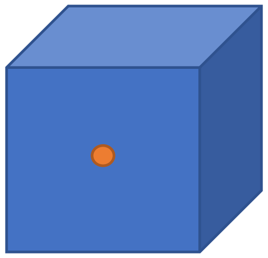
$$^{0}\mathbf{p}_P = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$

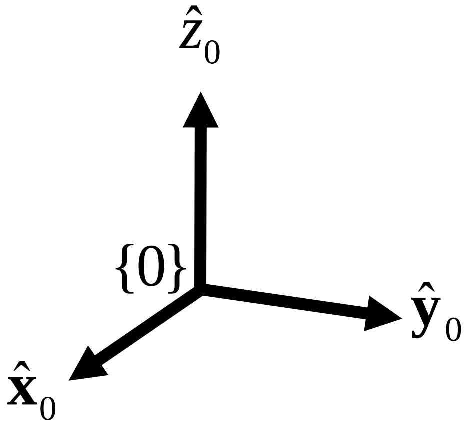
$$^{0}\boldsymbol{\theta}_P = \begin{pmatrix} ^{0}\gamma_P \\ ^{0}\beta_P \\ ^{0}\alpha_P \end{pmatrix}$$

$$^{0}\boldsymbol{\xi}_P = \begin{pmatrix} ^{0}\mathbf{p}_P \\ ^{0}\boldsymbol{\theta}_P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ ^{0}\gamma_P \\ ^{0}\beta_P \\ ^{0}\alpha_P \end{pmatrix}$$

# Antecedentes básicos

## Centro de masa

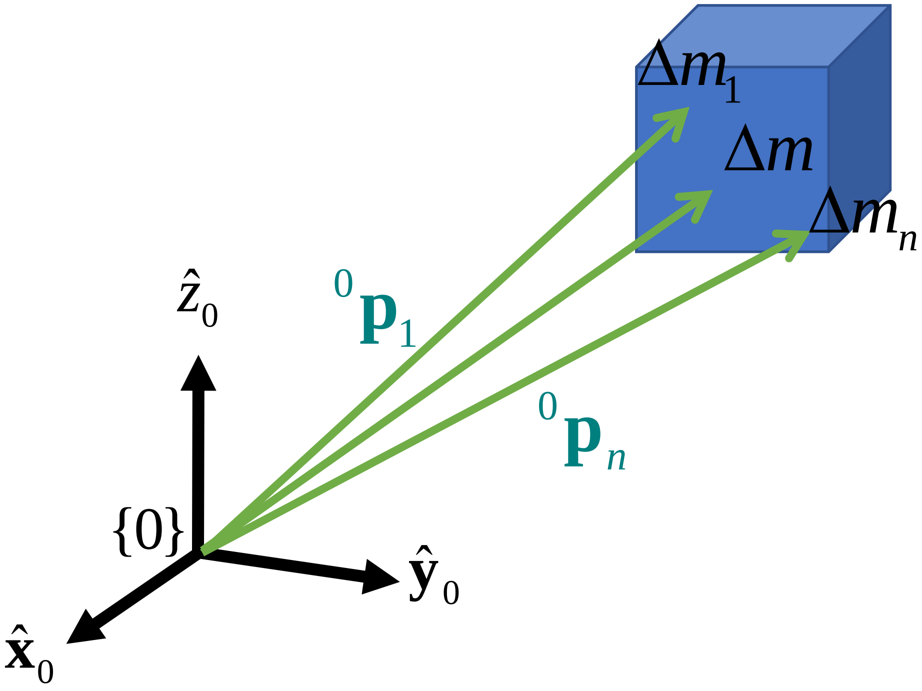




# Antecedentes básicos

## Centro de masa

$$1 = 1$$




$${}^0\mathbf{p}_c m = \sum_i^n {}^0\mathbf{p}_i \Delta m_i$$

$${}^0\mathbf{p}_c = \frac{\sum_i^n {}^0\mathbf{p}_i \Delta m_i}{m}$$

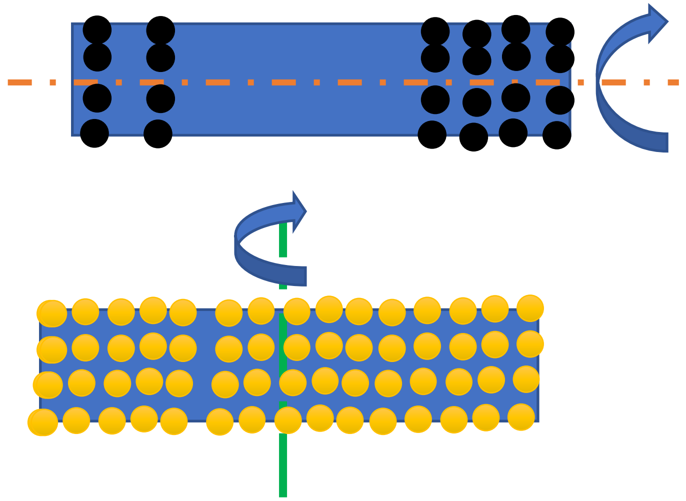
# Leyes del movimiento (Leyes de Newton)

Las leyes de Newton son:

1. Inercia

$$\mathbf{P} = m\mathbf{v}$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{I}\dot{\boldsymbol{\omega}}$$



2. Fuerza (variación de movimiento)

3. Principio de acción y reacción

# Leyes del movimiento (Leyes de Newton)

Las leyes de Newton son:

1. Inercia

$$\mathbf{P} = m\mathbf{v}$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{I}\dot{\boldsymbol{\omega}}$$

2. Fuerza (variación de movimiento)


$$\mathbf{P} = m\mathbf{v}$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{I}\dot{\boldsymbol{\omega}}$$


$$\frac{d}{dt}\mathbf{P} = \frac{\partial}{\partial m}\mathbf{P}\dot{m} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}}\mathbf{P}$$

$$\frac{d}{dt}\mathbf{P} = \mathbf{F}$$

3. Principio de acción y reacción

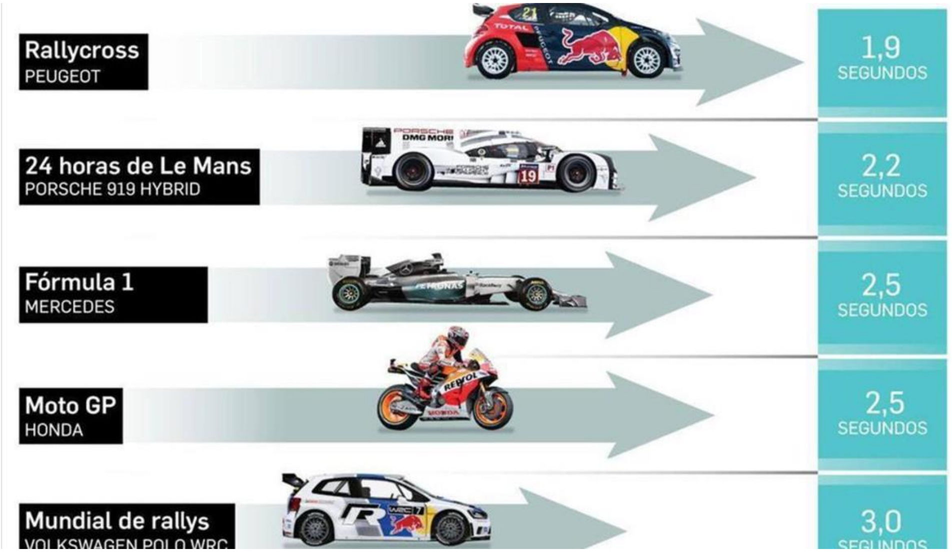
# Leyes del movimiento (Leyes de Newton)

## 2. Fuerza (variación de movimiento)

$$\mathbf{F} = \dot{\mathbf{P}} = \frac{d}{dt} m\mathbf{v} = \frac{d}{dm} m\mathbf{v} \cdot \dot{m} + \frac{d}{dv} m\mathbf{v} \cdot \dot{v}$$

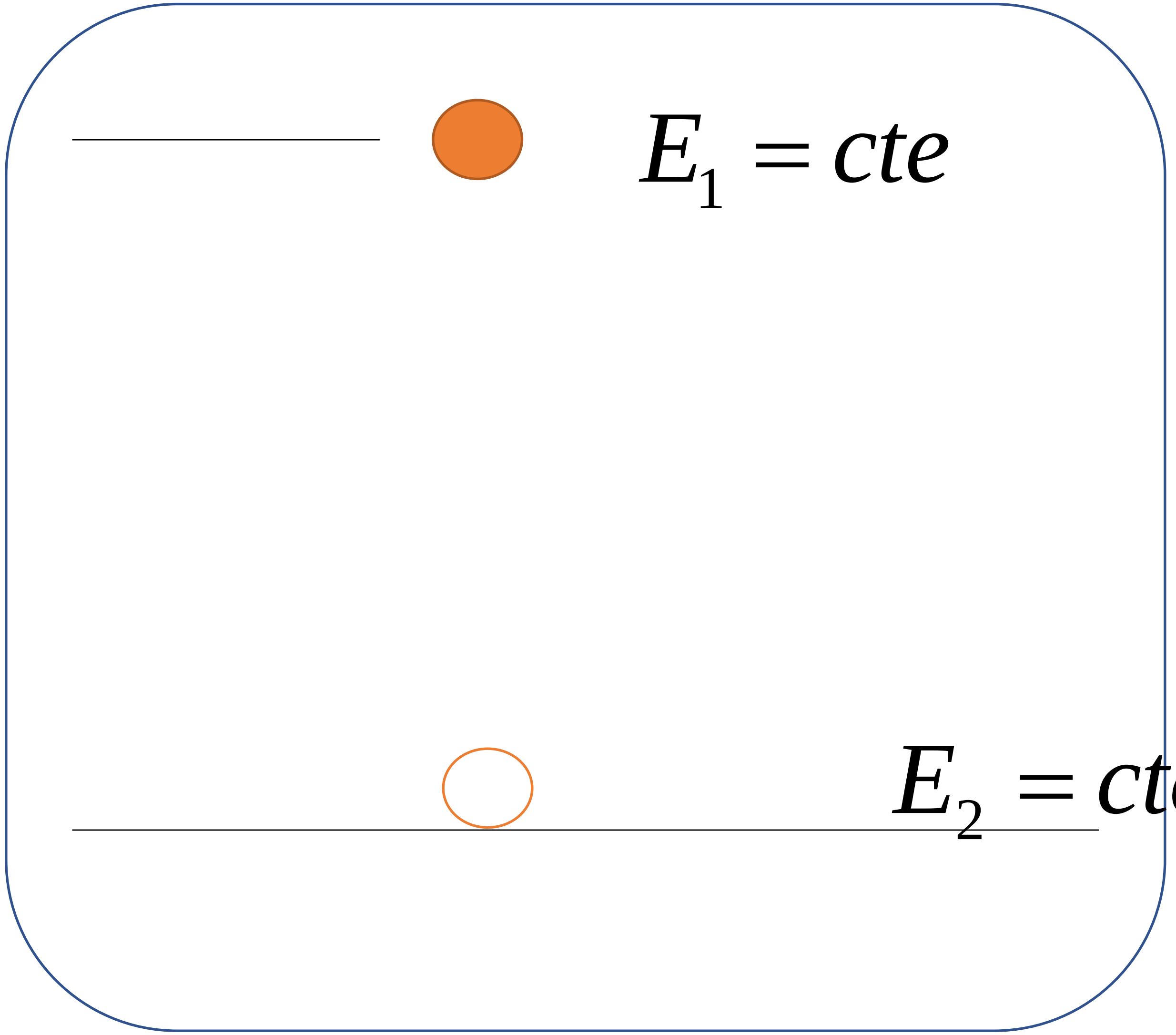
$$\mathbf{F} = \dot{\mathbf{P}} = \frac{d}{dm} m\mathbf{v} \cdot \dot{m}$$

$$\mathbf{F} = \dot{\mathbf{P}} = \frac{d}{dv} m\mathbf{v} \cdot \dot{v} = m\mathbf{a}$$



$$E(m, v, g) = cte$$

$$1 = 1$$



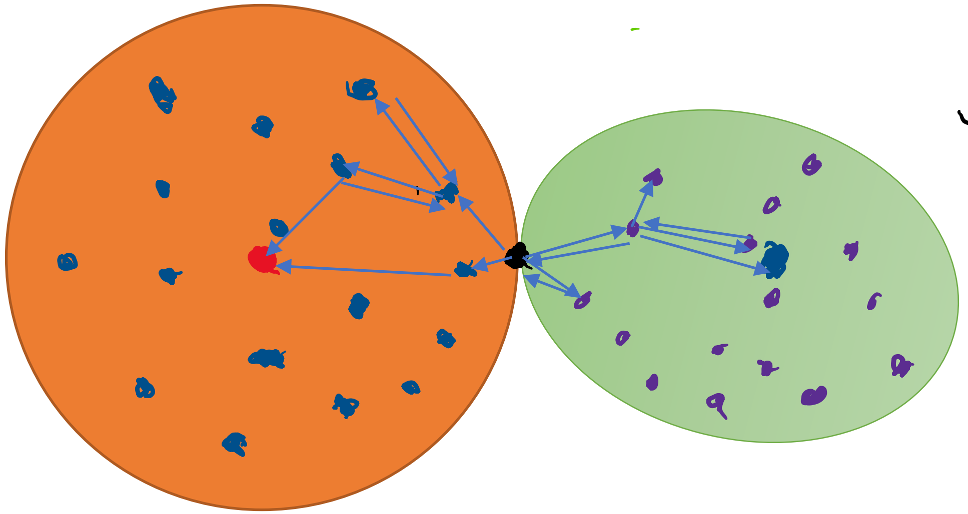

$$E_1 = E_2 = cte$$

# Leyes del movimiento (Leyes de Newton)

## 3. Principio de acción y reacción

$$\mathbf{P}_1 = m_1\mathbf{v}_1 \qquad \mathbf{P}_2 = m_2\mathbf{v}_2$$

$$\mathbf{H}_1 = \mathbf{I}_1\dot{\boldsymbol{\omega}}_1 \qquad \mathbf{H}_2 = \mathbf{I}_2\dot{\boldsymbol{\omega}}_2$$



$$P = m_1\mathbf{v}_1 = m_2\mathbf{v}_2$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{I}_1\dot{\boldsymbol{\omega}}_1 = \mathbf{I}_2\dot{\boldsymbol{\omega}}_2$$

# Leyes del movimiento (Leyes de Newton)

## 3. Principio de acción y reacción

$$f_{ij} + f_{ji} + F_c = ma$$

$$f_{ij} = -f_{ji}$$

$$F_c = ma$$

$$N_c = I_c \ddot{\omega}$$