Detección, estimación y clasificación bayesiana

García López Erik

Problema 2. Suponga que se tiene una observación:

$R_1 = 5\cos\theta + W_1$

Donde $\boldsymbol{\theta}$ **es un parámetro determinístico** que se desea estimar. W_1 es una variable aleatoria con distribución gaussiana con media cero y varianza 3.

a) Encuentre la estimación de θ con un criterio de máxima verosimilitud.

a)

La función de densidad es:

$$P_{\Theta|R}(\Theta|R) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\cdot\sigma}}\, e^{\left[-\frac{(R_1-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]}$$

$\mu \to$ Media
$\sigma \to$ Varianza

Sustituimos:

$$P_{\Theta|R}(\Theta|R) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(3)}}\, e^{\left[-\frac{(R_1-5\cos\Theta)^2}{2(3^2)}\right]}$$

Aplicamos logaritmo para quitar la exponencial:

$$\ln(P_{\Theta|R}(\Theta|R)) = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{6\pi}}\cdot e^{\left[-\frac{(R_1-5\cos\Theta)^2}{2(3^2)}\right]}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{1}{\sqrt{6\pi}}\right) + \left(\frac{5\cos(\Theta)^2 - R_1}{18}\right)$$

Derivamos respecto a Θ

$$\frac{dl(\Theta)}{d\Theta} = 0 - \frac{1}{3}(R_1 - 5\cos(\Theta))(5\,\text{sen}(\Theta))$$

Reduciendo e igualamos a 0 para encontrar el máximo

$$0 - \tfrac{1}{3}(R_1 - 5\cos(\Theta))(5\,\text{sen}(\Theta)) = 0$$
$$\tfrac{1}{3}(R_1 - 5\cos(\Theta))(5\,\text{sen}(\Theta)) = 0$$
$$R_1 - 5\cos(\Theta) = 0$$
$$R_1 = 5\cos(\Theta)$$

$$\Theta = \cos^{-1}\left(\frac{R_1}{5}\right)$$

b). Suponga que se tiene una segunda observación:

$R_2 = 5\,\text{sen}\,\theta + W_2$

W_2 es otra variable aleatoria, independiente de W_1 , gaussiana, con media cero y varianza 3.

Vuelva a encontrar la estimación de θ con el criterio de máxima verosimilitud tomando en cuenta las dos observaciones.

b)

Funciones de densidad para R_1 y R_2

$$P_{R_1|\Theta}(R_1|\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot 3}} \cdot e^{\left(-\frac{(R_1 - 5\cos\theta)^2}{6}\right)}$$

$$P_{R_2|\Theta}(R_2|\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot 3}} \cdot e^{\left(-\frac{(R_2 - 5\,\text{sen}\,\theta)^2}{6}\right)}$$

Función de verosimilitud conjunta:

$$L(\theta) = \frac{1}{2\pi \cdot 3} \cdot e^{\left(-\frac{(R_1 - 5\cos\theta)^2}{6}\right)} \cdot e^{\left(-\frac{(R_2 - 5\,\text{sen}\,\theta)^2}{6}\right)}$$

Aplicamos logaritmo para quitar la exponencial:

$$\log(L(\theta)) = \log\left(\frac{1}{2\pi \cdot 3}\right) - \frac{(R_1 - 5\cos\theta)^2}{6} - \frac{(R_2 - 5\,\text{sen}\,\theta)^2}{6}$$

Minimizando para encontrar el máximo

$$(R_1 - 5\cos\theta)^2 + (R_2 - 5\,\text{sen}\,\theta)^2$$

Expandiendo:

$$(R_1 - 5\cos\theta)^2 = R_1^2 - 2\cdot 5 R_1 \cos\theta + 25\cos^2\theta$$

$$(R_2 - 5\,\text{sen}\,\theta)^2 = R_2^2 - 2\cdot 5 R_2\,\text{sen}\,\theta + 25\,\text{sen}^2\theta$$

Expresión total:

$$R_1^2 - 2\cdot 5 R_1 \cos\theta + 25\cos^2\theta + R_2^2 - 2\cdot 5 R_2\,\text{sen}\,\theta + 25\,\text{sen}^2\theta$$

Simplificando:

$$R_1^2 + R_2^2 - 2\cdot 5(R_1\cos\theta + R_2\,\text{sen}\,\theta) + 25(\cos^2\theta + \text{sen}^2\theta)$$

Utilizando la identidad $\cos^2\theta + \text{sen}^2\theta = 1$:

$$\cancel{R_1^2 + R_2^2} - 10(R_1\cos\theta + R_2\,\text{sen}\,\theta) + \cancel{25}$$

No dependen de θ

Se maximiza cuando R_1 y R_2 están alineados en la misma dirección que $\cos\theta$ y $\text{sen}\,\theta$, osea: $\tan\theta = \frac{R_2}{R_1}$

$$\therefore\ \theta = \tan^{-1}\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

Problema 3. Suponga que bajo la hipótesis H_1 la variable aleatoria X tiene una función de probabilidad

$p_X(x) = \frac{3}{2}x^2$, para $-1 \leq x \leq 1$

Bajo la hipótesis H_0 la variable aleatoria X es uniformemente distribuida en $[-1,1]$.

a) Encuentre el radio de verosimilitud

b) Encuentre regla de decisión siguiendo el criterio de Bayes, suponiendo probabilidades a priori iguales, costos de decisiones correctas igual a cero y costos de error iguales.

c) Encuentre la regla de decisión que maximiza la probabilidad de detección con la restricción de que la probabilidad de falsa alama sea menor o igual a 0.1.

d) Grafique la curva ROC

a)

Dos hipótesis

H_1: $\quad p_X(x|H_1) = \frac{3}{2}x^2, \quad -1 \leq x \leq 1$

H_0: $\quad p_X(x|H_0) = \frac{1}{2}, \quad -1 \leq x \leq 1$

Radio de verosimilitud

$$\Lambda(x) = \frac{p_X(x|H_1)}{p_X(x|H_0)}$$

Sustituyendo

$$\Lambda(x) = \frac{\frac{3}{2}x^2}{\frac{1}{2}} = 3x^2$$

b)

Probabilidades a priori: $P(H_0) = P(H_1) = 0.5$

Costos de decisiones correctas $= 0$

Costos de error (Falsas alarmas y fallos) son iguales

Decisión basada en el criterio de Bayes

H_1 si:

$$\Lambda(x) = \frac{p_X(x|H_1)}{p_X(x|H_0)} > \frac{P(H_0)}{P(H_1)} \times \frac{C_{10}}{C_{01}}$$

C_{10}: Costo de decidir H_1 cuando H_0 es verdadera

C_{01}: Costo de decidir H_0 cuando H_1 es verdadera

Como $C_{10} = C_{01}$ y $P(H_0) = P(H_1) = 0.5$ se simplifica a:

$$\frac{P(H_0)}{P(H_1)} \times \frac{C_{10}}{C_{01}} = 1$$

Regla de decisión

- Decidir H_1 si $\Lambda(x) > 1$
- Decidir H_0 si $\Lambda(x) \leq 1$

Aplicación con el radio de verosimilitud

Tenemos que: $\Lambda(x) = 3x^2$

- Decidir H_1 si $\Lambda(x) > 1$
- Decidir H_0 si $\Lambda(x) \leq 1$

Resolviendo $3x^2 > 1$:

$x^2 > 1/3$

$|x| > 1/\sqrt{3} \approx 0.577$

Regla de decisión final:

- Decidir H_1 (hipótesis alternativa) si $|x| > 0.577$
- Decidir H_0 (hipótesis nula) si $|x| \leq 0.577$

c) Funciones de densidad

Bajo H_0: $\quad p_X(x \mid H_0) = \frac{1}{2}, \quad -1 \le x \le 1$

Bajo H_1: $\quad p_X(x \mid H_1) = \frac{3}{2}x^2, \quad -1 \le x \le 1$

Radio de verosimilitud

$$\Lambda(x) = \frac{p_X(x \mid H_1)}{p_X(x \mid H_0)} = 3x^2$$

Para maximizar P_D con $P_{FA} \le 0.1$, establecemos un umbral η tal que:

Decidir H_1 si $\Lambda(x) > \eta$, es decir, si $3x^2 > \eta$

Esto implica:

$$x^2 > \frac{\eta}{3}$$

Determinación del umbral η utilizando la restricción de Falsa alarma

$$P_{FA} = P(\text{decidir } H_1 \mid H_0) = P\left(|x| > \sqrt{\tfrac{\eta}{3}} \mid H_0\right) \le 0.1$$

Dado que x bajo H_0 es uniforme en $[-1, 1]$:

$$P_{FA} = 2 \times P\left(x > \sqrt{\tfrac{\eta}{3}}\right) = 2 \times \left(1 - \sqrt{\tfrac{\eta}{3}}\right)$$

Igualando a 0.1

$$2 \times \left(1 - \sqrt{\tfrac{\eta}{3}}\right) = 0.1 \longrightarrow 1 - \sqrt{\tfrac{\eta}{3}} = 0.05 \longrightarrow \sqrt{\tfrac{\eta}{3}} = 0.95 \longrightarrow \frac{\eta}{3} = 0.9025$$
$$\longrightarrow \eta = 2.7075$$

Regla de decisión Final

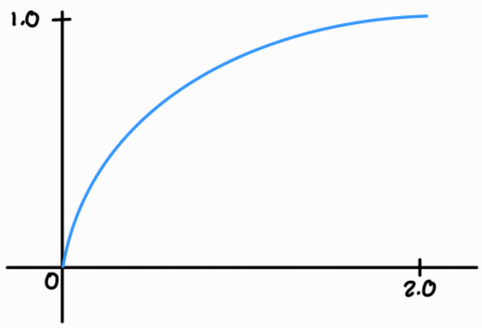
Con $\eta = 2.7075$, la regla de decisión es:

- Decidir H_1 si $3x^2 > 2.7075$, es decir:

$$x^2 > \frac{2.7075}{3} \approx 0.9025$$
$$|x| > \sqrt{0.9025} \approx 0.95$$

- Decidir H_0 si $|x| \le 0.95$

d)



Problema 4. Considere los datos de la siguiente tabla

Muestra	E Escurrimiento nasal	T Tos	D Dolor de cabeza	F Fiebre	clasificación
1	Si	Si	Si	No	COVID-19
2	Si	Si	No	No	COVID-19
3	No	No	Si	Si	COVID-19
4	Si	No	No	No	Negativo
5	No	No	No	No	Negativo
6	No	Si	Si	No	Negativo

a) Encuentre las probabilidades necesarias para aplicar un criterio de Naive Bayes para predecir si una persona está enferma de COVID-19.

b) Clasifique tres pacientes en dos clases COVID-19 o negativo. Los síntomas de cada persona son:

Paciente 1) tos y fiebre ($\bar{E}$,T,$\bar{D}$,F)

Paciente 2) escurrimiento nasal y fiebre (E,$\bar{T}$,$\bar{D}$,F)

Paciente 3) escurrimiento nasal y dolor de cabeza (E,$\bar{T}$,D,$\bar{F}$)

a)

Tipo	Positivo	Negativo
E	2	1
T	2	1
D	2	1
F	1	0
E-	1	2
T-	1	2
D-	1	2
F-	2	3

Probabilidades a priori:

Total muestras: 6
Muestran con covid: 3
Muestras negativas: 3

P(covid 19) = 0.5
$\therefore$ P(Negativo) = 0.5

Probabilidades

Tipo	Positivo	Negativo
E	2/12 = 0.17	1/12 = 0.08
T	2/12 = 0.17	1/12 = 0.08
D	2/12 = 0.17	1/12 = 0.08
F	1/12 = 0.08	0
E-	1/12 = 0.08	2/12 = 0.17
T-	1/12 = 0.08	2/12 = 0.17
D-	1/12 = 0.08	2/12 = 0.17
F-	2/12 = 0.17	3/12 = 0.25
Total	1	1

Hay un dato con 0, por lo que

Aplicamos Smoothing:

Tipo	Positivo	Negativo
E	$(2+1)/12+8=0.15$	$(1+1)/12+8=0.1$
T	$(2+1)/12+8=0.15$	$(1+1)/12+8=0.1$
D	$(2+1)/12+8=0.15$	$(1+1)/12+8=0.1$
F	$(1+1)/12+8=0.1$	$(0+1)/12+8=0.05$
$\bar{E}$	$(1+1)/12+8=0.1$	$(2+1)/12+8=0.15$
$\bar{T}$	$(1+1)/12+8=0.1$	$(2+1)/12+8=0.15$
$\bar{D}$	$(1+1)/12+8=0.1$	$(2+1)/12+8=0.15$
$\bar{F}$	$(2+1)/12+8=0.15$	$(3+1)/12+8=0.2$
Total	1	1

b) Resolviendo con las probabilidades del Smoothing:

Paciente 1) tos y Fiebre $(\bar{E}, T, \bar{D}, F)$

- $P(covid \mid \bar{E}, T, \bar{D}, F) = P(\bar{E}, T, \bar{D}, F \mid covid)\, P(covid)$
  $= P(\bar{E} \mid covid) \cdot P(T \mid covid) \cdot P(\bar{D} \mid covid) \cdot P(F \mid covid) \cdot P(covid)$
  $= (0.1)(0.15)(0.1)(0.1)(0.5) = 0.000075$

- $P(\bar{E} \mid neg) \cdot P(T \mid neg) \cdot P(\bar{D} \mid neg) \cdot P(F \mid neg) \cdot P(neg)$
  $= (0.15)(0.1)(0.15)(0.05)(0.5) = 0.00005625$

$0.000075 > 0.00005625$ $\therefore$ Positivo a covid //

Paciente 2) Escurrimiento nasal y fiebre $(E, \bar{T}, \bar{D}, F)$

- $P(E \mid covid) \cdot P(\bar{T} \mid covid) \cdot P(\bar{D} \mid covid) \cdot P(F \mid covid) \cdot P(covid)$
  $= (0.15)(0.1)(0.1)(0.1)(0.5) = 0.000075$

- $P(E \mid neg) \cdot P(\bar{T} \mid neg) \cdot P(\bar{D} \mid neg) \cdot P(F \mid neg) \cdot P(neg)$
  $= (0.1)(0.15)(0.15)(0.05)(0.5) = 0.00005625$

$0.000075 > 0.00005625$ $\therefore$ Positivo a covid //

Paciente 3) Escurrimiento nasal y dolor de cabeza $(E, \bar{T}, D, \bar{F})$

- $P(E \mid covid) \cdot P(\bar{T} \mid covid) \cdot P(D \mid covid) \cdot P(\bar{F} \mid covid) \cdot P(covid)$
  $= (0.15)(0.1)(0.15)(0.15)(0.5) = 0.00016875$

- $P(E \mid neg) \cdot P(\bar{T} \mid neg) \cdot P(D \mid neg) \cdot P(\bar{F} \mid neg) \cdot P(neg)$
  $= (0.1)(0.15)(0.1)(0.2)(0.5) = 0.00015$

$0.00016875 > 0.00015$ $\therefore$ Positivo a covid