

Unicamp

Marco Lucio Bittencourt - Turma B
Heitor Nigro Lopes - PED

Dinâmica Trabalho 2

Matrizes de Rotação e Range Kutta

Erik Yuji Goto
RA: 234009

Campinas
2021

Sumário

1	Observação	3
2	Fasores	4
3	Impedância e Admitância	4
3.1	Associação de Impedâncias	4
3.1.1	Série	4
3.1.2	Paralelo	4
4	Potência em excitações senoidais	4
4.1	Potência Média	4
4.2	Valores Eficazes	5
4.3	Fator de Potência	5
4.3.1	Correção do fator de Potência	5
4.4	Potência Complexa	6
4.5	Correção de f_p em termos de potência	6
5	Sistemas Trifásicos	6
6	Conexão em Y-Y	8
7	Conexão em Delta	8
8	Transformação Y - Δ	10
8.1	Transformação de Y para Δ	10
8.2	Transformação de Δ para Y	10
9	Quadripolos	11
9.1	Modelo de Impedâncias	11
9.2	Modelo de Admitância	11
9.3	Modelos com Parâmetros de Trasmissoão	12
9.4	Cálculo de ganhos	12
9.5	Circuitos Equivalente	13
9.6	Associação em paralelo	13
9.7	Associação em série	14
9.8	Associação em cascata	14
10	Transformadores	15
10.1	Primário e secundário em carga	15
10.2	Convenção do ponto	15
10.3	Impedância Refletida	15
10.4	Circuitos Equivalentes	16
10.4.1	Circuito 1	16
10.4.2	Circuito 2	16
10.4.3	Circuito 3	16
10.5	Armazenamento de Energia em Transformadores	17
10.6	Coefficiente de Acoplamento	17
10.7	Transformador Ideal	18

11 Banco de Transformadores	18
11.1 Conexão Y-Y	18
11.2 Conexão Y-Delta	18

1 Observação

Não está englobado o material da P1

2 Fasores

- Resistor:

$$\underline{V_R} = R \underline{I_R} \quad (1)$$

- Indutor:

$$\underline{V_L} = j\omega L \underline{I_L} \quad (2)$$

- Capacitor:

$$\underline{V_C} = \frac{1}{j\omega C} \underline{I_C} \quad (3)$$

3 Impedância e Admitância

Define-se a impedância(Z) como a relação da tensão fasorial pela corrente fasorial:

$$Z = \frac{V_m}{I_m} \angle(\theta - \phi) = R + jX \quad (4)$$

R é a componente resistiva e X é a componente reativa.
A admitância Y é o inverso da impedância.

Casos Particulares:

- $X=0 \rightarrow Z = R \rightarrow$ “Circuito puramente Resistivo”.
- $R=0 \rightarrow Z = jL\omega \rightarrow$ “Circuito Indutivo” ($X>0$).
- $R=0 \rightarrow Z = 1/(jC\omega) = -j/(C\omega) \rightarrow$ “Circuito Capacitivo” ($X<0$).

Figura 1: Casos Particulares

3.1 Associação de Impedâncias

3.1.1 Série

$$Z_{eq} = Z_1 + Z_2 + \dots + Z_k \quad (5)$$

3.1.2 Paralelo

$$\frac{1}{Z_{eq}} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \dots + \frac{1}{Z_k} \quad (6)$$

4 Potência em excitações senoidais

4.1 Potência Média

$$\bar{p} = \frac{V_m I_m}{2} \cos\theta \quad (7)$$

4.2 Valores Eficazes

O valor eficaz de uma corrente(tensão) periódica é equivalente a uma corrente(tensão) contínua que entrega a mesma potência média para um resistor:

$$I_{ef} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \quad (8)$$

$$V_{ef} = \frac{V_m}{\sqrt{2}} \quad (9)$$

Portanto, a potência média fica:

$$\bar{p} = I_{ef} V_{ef} \cos \theta \quad (10)$$

Onde o produto $I_{ef} * V_{ef}$ é definido como a potência aparente.

4.3 Fator de Potência

O fator de potência (f_p) é definido como a relação entre a potência média e a potência aparente:

$$f_p = \cos \theta \quad (11)$$

- Carga RC - fator de potência adiantado;
- Carga RL - fator de potência atrasado;

Na prática é comum acrescentar um elemento puramente reativo (resistência nula) em paralelo com a impedância original, de modo a alterar o fator de potência ao nível desejado.

4.3.1 Correção do fator de Potência

Seja um sistema elétrico representado por uma impedância $Z = R + jX$. Suponha que em paralelo a esta impedância é acrescentado o elemento $Z1 = jX1$. Então, podemos calcular o valor da impedância em paralelo:

$$X_1 = \frac{R^2 + X^2}{R \cdot \tan(\cos^{-1} f_p) - X} \quad (12)$$

4.4 Potência Complexa

A potência complexa é definida por:

$$S = \underline{V}_{ef} \underline{I}_{ef}^* = P + jQ \quad (13)$$

\underline{I}_{ef}^* é o conjugado da corrente eficaz.

P é a potência ativa e Q a potência reativa.

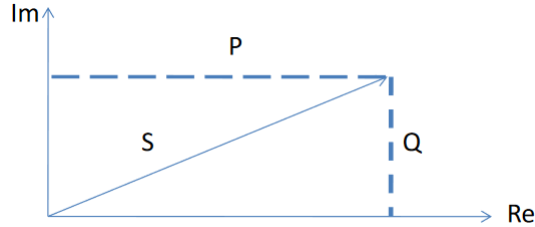


Figura 2: Potência Complexa

O módulo da potência complexa é dado por:

$$|S| = V_{ef} I_{ef} \quad (14)$$

Que é igual à potência aparente. Então, a potência reativa Q é dada por:

$$Q = \text{Im}(S) = V_{ef} I_{ef} \sin \theta \quad (15)$$

Lembre que, a carga atendida é dada por:

$$Z = R + jX \quad (16)$$

4.5 Correção de f_p em termos de potência

Uma potência complexa S é fornecida à carga Z. A potência fornecida pode ser decomposta em:

$$S = P + jQ \quad (17)$$

Acrescenta-se uma carga de reatância pura Z1 em paralelo com Z. Com isso a potência complexa total fornecida ao circuito será:

$$S_T = P + j(Q + Q_1) \quad (18)$$

5 Sistemas Trifásicos

Os sistemas trifásicos são constituídos de três sistemas monofásicos defasados de 120. Usualmente as fases são nomeadas em a, b e c:

$$v_a = V_p \cos(\omega t) \quad (19)$$

$$v_b = V_p \cos(\omega t - 120) \quad (20)$$

$$v_c = V_p \cos(\omega t + 120) \quad (21)$$

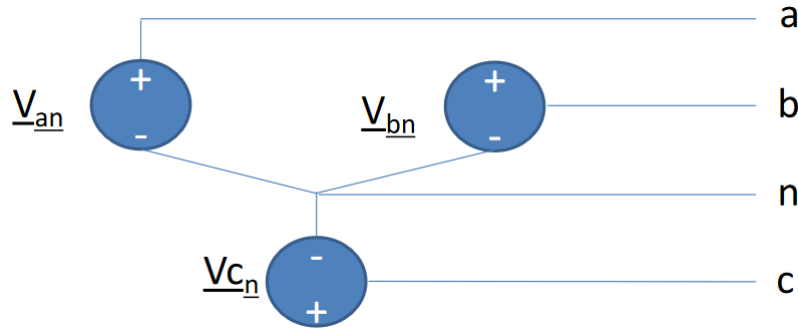


Figura 3: Sistema Trifásico

Tensão de Fase é a tensão nos terminais das fontes trifásicas.

$$\underline{V_{an}} = V_p \angle 0 \quad (22)$$

$$\underline{V_{bn}} = V_p \angle -120 \quad (23)$$

$$\underline{V_{cn}} = V_p \angle 120 \quad (24)$$

Tensão entre fases é dado pela diferença de tensões de fase.

$$\underline{V_{ab}} = \sqrt{3}V_p \angle 30 \quad (25)$$

É importante destacar que no caso da tensão fasorial $\underline{V_{ab}}$ a fase “a” é a referência. Com isso a fase do fasor da tensão entre as fases “a” e “b” é de 30° em relação à fase a.

De forma similar temos:

$$\underline{V_{bc}} = \sqrt{3}V_p \angle -90 \quad (26)$$

$$\underline{V_{ca}} = \sqrt{3}V_p \angle 150 \quad (27)$$

Convenção:

- Os dados e variáveis relativos às conexões entre fontes e cargas são de linhas. Por exemplo, a corrente na conexão entre uma fonte e uma carga é dita corrente de linha;
- Os dados e variáveis relativos às fontes e cargas são de fase. Por exemplo, a tensão em uma carga é denominada tensão de fase.

6 Conexão em Y-Y

Suponha um sistema equilibrado em Y, no qual cada fase está conectada com uma impedância Z com o neutro. Os terminais com letras minúsculas são das fontes e as maiúsculas são das cargas.

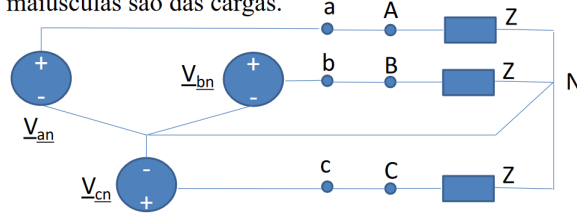


Figura 4: Conexão em Y-Y

Neste caso a impedância Z da fase A está conectada entre a saída da fonte a e o neutro. Então, a corrente sobre esta impedância é dada por:

$$\underline{I_{aA}} = \frac{\underline{V_{an}}}{Z} = I_{aA} \angle -\theta \quad (28)$$

As correntes das outras cargas tem a mesma amplitude e com as fases defasadas de -120 e $+120$.

$$\underline{I_{bB}} = I_{aA} \angle (-120 - \theta) \quad (29)$$

$$\underline{I_{cC}} = I_{aA} \angle (120 - \theta) \quad (30)$$

Note que, numa conexão Y-Y equilibrada a quatro fios, a soma das três correntes de linha é nula. Portanto, a corrente pelo neutro é nula.

A potência média entregur pela fase p é:

$$P_p = V_p I_p \cos \theta \quad (31)$$

Então a potência total entregue pelas 3 fases é:

$$P = 3P \quad (32)$$

7 Conexão em Delta

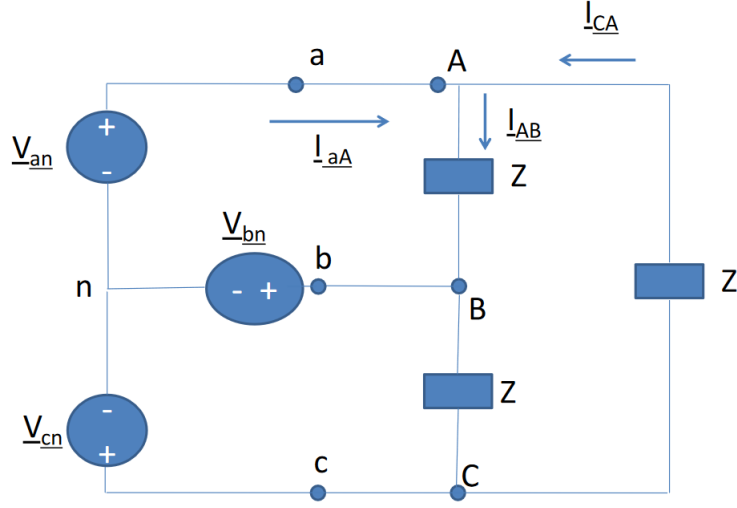


Figura 5: Conexão em Delta

Nesta configuração as impedâncias estão conectadas entre duas fases e não com o neutro.

Já foi visto que as tensões entre fases são dadas por:

$$\underline{V_{AB}} = V_L \angle 30 \quad (33)$$

$$\underline{V_{BC}} = V_L \angle -90 \quad (34)$$

$$\underline{V_{CA}} = V_L \angle 150 \quad (35)$$

Onde,
 $V_L = \sqrt{3}V_p$

As correntes de fase são dadas por:

$$\underline{I_{AB}} = \frac{V_L \angle 30}{|Z| \angle \theta} = I_Z \angle (30 - \theta) \quad (36)$$

$$\underline{I_{BC}} = \frac{V_L \angle -90}{|Z| \angle \theta} = I_Z \angle (-90 - \theta) \quad (37)$$

$$\underline{I_{CA}} = \frac{V_L \angle 150}{|Z| \angle \theta} = I_Z \angle (150 - \theta) \quad (38)$$

Por sua vez, a amplitude da corrente de linha é igual à corrente de fase multiplicada por $\sqrt{3}$. E a fase da corrente de linha é igual à fase da corrente na carga subtraída de 30° .

$$\underline{I_{aA}} = \sqrt{3}I_Z \angle -\theta \quad (39)$$

$$\underline{I_{bB}} = \sqrt{3}I_Z \angle (-120 - \theta) \quad (40)$$

$$\underline{I_{cC}} = \sqrt{3}I_Z \angle (120 - \theta) \quad (41)$$

8 Transformação Y - Δ

É possível transformar uma conexão de cargas equilibradas em Y em uma configuração equivalente em Δ , ou vice-versa

8.1 Transformação de Y para Δ

$$Y_{ab} = \frac{Y_a Y_b}{Y_a + Y_b + Y_c}$$

$$Y_{bc} = \frac{Y_b Y_c}{Y_a + Y_b + Y_c}$$

$$Y_{ca} = \frac{Y_c Y_a}{Y_a + Y_b + Y_c}$$

Figura 6: Transformação de Y para Δ

8.2 Transformação de Δ para Y

$$Z_a = \frac{Z_{ab} Z_{ca}}{Z_{ab} + Z_{bc} + Z_{ca}}$$

$$Z_b = \frac{Z_{bc} Z_{ab}}{Z_{ab} + Z_{bc} + Z_{ca}}$$

$$Z_c = \frac{Z_{ca} Z_{bc}}{Z_{ab} + Z_{bc} + Z_{ca}}$$

Figura 7: Transformação de Δ para Y

9 Quadripolos

Um quadripolo é um circuito elétrico com dois pares de terminais, como ilustrado a seguir:

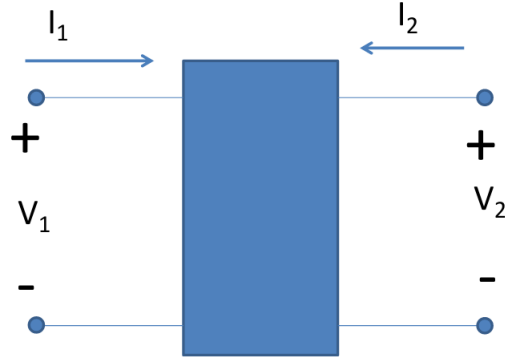


Figura 8: Convenção de um quadripolo

9.1 Modelo de Impedâncias

Para este quadripolo adota-se o seguinte modelo:

$$V_1 = Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2 \quad (42)$$

$$V_2 = Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2 \quad (43)$$

Os parâmetros podem ser obtidos por:

$$Z_{11} = \frac{V_1}{I_1} \text{ (com } I_2 = 0) \quad (44)$$

$$Z_{21} = \frac{V_2}{I_1} \text{ (com } I_2 = 0) \quad (45)$$

$$Z_{12} = \frac{V_1}{I_2} \text{ (com } I_1 = 0) \quad (46)$$

$$Z_{22} = \frac{V_2}{I_2} \text{ (com } I_1 = 0) \quad (47)$$

Z_{11} e Z_{22} são as impedâncias vistas pela entrada e pela saída respectivamente. Z_{12} e Z_{21} são as impedâncias de transferências.

9.2 Modelo de Admitância

$$I_1 = Y_{11}V_1 + Y_{12}V_2 \quad (48)$$

$$I_2 = Y_{21}V_1 + Y_{22}V_2 \quad (49)$$

Cálculo de parâmetros de curto circuito ($V_1 = 0$ ou $V_2 = 0$):

$$Y_{11} = \frac{I_1}{V_1} \text{ (com } V_2 = 0) \quad (50)$$

$$Y_{12} = \frac{I_1}{V_2} \text{ (com } V_1 = 0) \quad (51)$$

$$Y_{21} = \frac{I_2}{V_1} \text{ (com } V_2 = 0) \quad (52)$$

$$Y_{22} = \frac{I_2}{V_2} \text{ (com } V_1 = 0) \quad (53)$$

9.3 Modelos com Parâmetros de Trnasmissão

Seja o modelo a seguir:

$$V_1 = AV_2 - BI_2 \quad (54)$$

$$I_1 = CV_2 - DI_2 \quad (55)$$

Estes modelos são úteis em circuitos em cascata.

9.4 Cálculo de ganhos

Usando o modelo da figura 8 e equações 42 e 43, define-se o ganho de tensão (GT) por $GT = \frac{V_2}{V_1}$, com $I_2 = 0$. Ou seja,

$$GT = \frac{V_2}{V_1} = \frac{Z_{21}}{Z_{11}} \quad (56)$$

Define-se o ganho de corrente como $GC = \frac{I_2}{I_1}$, com $V_2 = 0$,

$$GC = \frac{Y_{21}}{Y_{11}} \quad (57)$$

Cálculo de ganhos considerando *impedância interna* do gerador e carga:

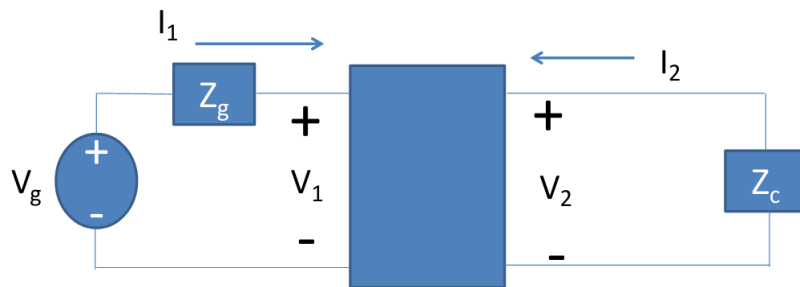


Figura 9: Quadripolo

$$\frac{V_2}{V_g} = \frac{Z_{21}Z_c}{(Z_{11} + Z_g)(Z_{22} + Z_c) - Z_{12}Z_{21}} \quad (58)$$

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{-Z_{21}}{Z_{22} + Z_c} \quad (59)$$

9.5 Circuitos Equivalente

Um quadripolo pode ser substituído por um circuito com fontes vinculadas:

$$V_1 = Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2$$

$$V_2 = Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2$$

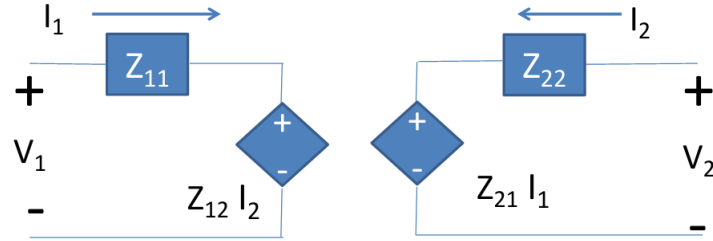


Figura 10: Quadripolo -j Fonte vinculada

9.6 Associação em paralelo

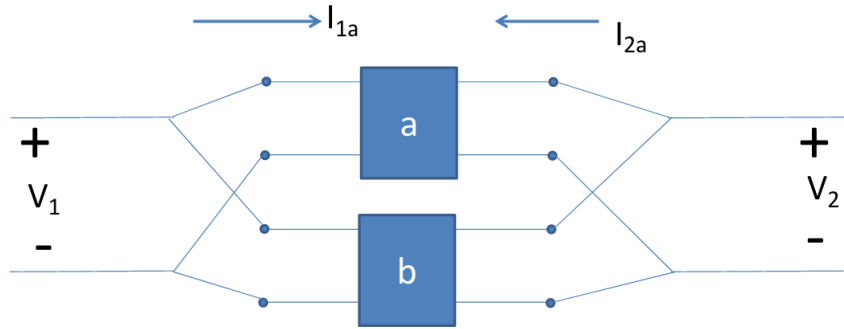


Figura 11: Associação em paralelo

$$I_1 = (Y_{11a} + Y_{11b})V_1 + (Y_{12a} + Y_{12b})V_2 \quad (60)$$

$$I_2 = (Y_{21a} + Y_{21b})V_1 + (Y_{22a} + Y_{22b})V_2 \quad (61)$$

Ou seja, nas associações em paralelo de quadripolos, no modelo com admitâncias, soma-se as admitâncias dos quadripolos da associação.

9.7 Associação em série

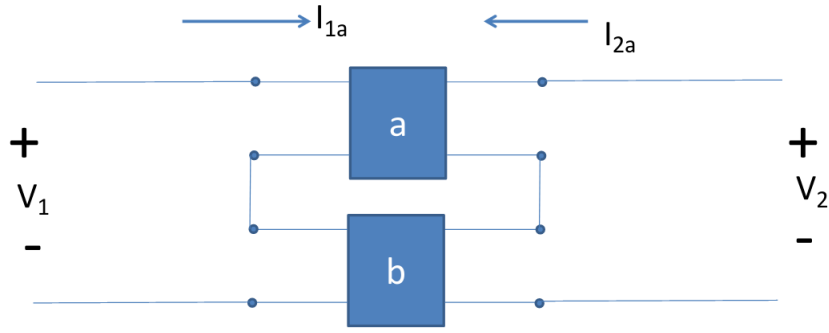


Figura 12: Associação em série

$$V_1 = (Z_{11a} + Z_{11b})I_1 + (Z_{12a} + Z_{12b})I_2 \quad (62)$$

$$V_2 = (Z_{21a} + Z_{21b})I_1 + (Z_{22a} + Z_{22b})I_2 \quad (63)$$

Ou seja, nas associações em série de quadripolos, no modelo com impedâncias, soma-se as impedâncias dos quadripolos da associação.

9.8 Associação em cascata

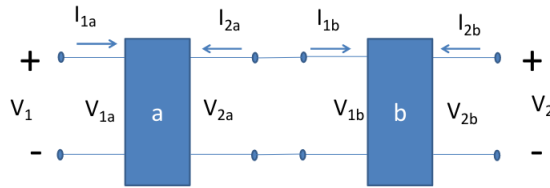


Figura 13: Associação em cascata

Seja o modelo de transmissão:

$$V_1 = AV_2 - BI_2 \quad (64)$$

$$I_1 = CV_2 - DI_2 \quad (65)$$

Donde tem-se:

$$V_1 = (A_a A_b + B_a C_b)V_2 - (A_a B_b + B_a D_b)I_2 \quad (66)$$

$$I_1 = (C_a A_b + D_a C_b)V_2 - (C_a B_b + D_a D_b)I_2 \quad (67)$$

Este modelo pode ser reescrito em termos de parâmetros de transmissão equivalentes:

$$V_1 = A_{eq}V_2 - B_{eq}I_2 \quad (68)$$

$$I_1 = C_{eq}V_2 - D_{eq}I_2 \quad (69)$$

Onde,

$$\begin{bmatrix} A_{eq} & B_{eq} \\ C_{eq} & D_{eq} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_a & B_a \\ C_a & D_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_b & B_b \\ C_b & D_b \end{bmatrix} \quad (70)$$

10 Transformadores

Os transformadores em circuitos elétricos são importantes pois possibilitam a transmissão em alta tensão, viabilizando a transmissão a longa distância.

Um dos enrolamentos é conectado a uma *fonte*; este enrolamento é denominado o **primário** do transformador. O outro terminal é dito o **secundário**, ao qual usualmente se conecta a *carga*.

10.1 Primário e secundário em carga

Quando tanto o primário como o secundário estão com correntes não nulas, então o fluxo magnético total em cada um dos enrolamentos é composto do fluxo gerado no próprio enrolamento e do fluxo mútuo recebido do outro enrolamento. E temos as seguintes equações:

$$v_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \quad (71)$$

$$v_2 = M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} \quad (72)$$

10.2 Convenção do ponto

Uma corrente i que entra num terminal com ponto (sem ponto) em um enrolamento induz uma tensão $M \frac{di}{dt}$ com polaridade positiva no terminal com ponto (sem ponto) do outro enrolamento.

10.3 Impedância Refletida

Seja o seguinte circuito

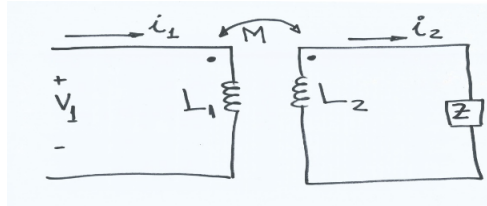


Figura 14: Impedância Refletida

O modelo do circuito é:

$$\underline{V}_1 = j\omega L_1 \underline{I}_1 - j\omega M \underline{I}_2 \quad (73)$$

$$0 = -j\omega M \underline{I}_1 + (Z + j\omega L_2) \underline{I}_2 \quad (74)$$

Donde tem-se que:

$$\underline{V}_1 = (j\omega L_1 + \frac{\omega^2 M^2}{Z + j\omega L_2}) \underline{I}_1 \quad (75)$$

Assim, a impedância vista pelos terminais do primário, a impedância equivalente, será:

$$\underline{Z}_e = j\omega L_1 + \frac{\omega^2 M^2}{Z + j\omega L_2} \quad (76)$$

O primeiro termo é a impedância própria e o segundo termo é a impedância do acoplamento, também conhecido como impedância refletida. Ela representa a carga adicional para o primário devido ao acoplamento eletromagnético e à carga Z do secundário.

10.4 Circuitos Equivalentes

10.4.1 Circuito 1

Como a impedância equivalente (76) leva em conta o acoplamento eletromagnético e a carga no secundário, então o circuito com o transformador e carga pode ser representado de forma equivalente pelo circuito mostrado na figura a seguir:

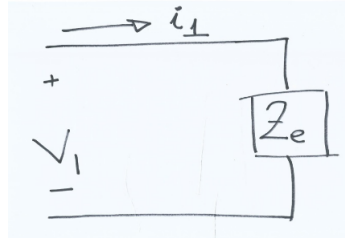


Figura 15: Circuito 1

10.4.2 Circuito 2

Sejam as equações a seguir:

$$v_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + m \frac{di_2}{dt} \quad (77)$$

$$v_2 = M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} \quad (78)$$

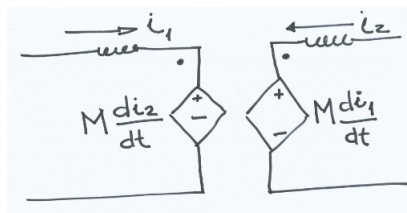


Figura 16: Circuito 2

10.4.3 Circuito 3

$$v_1 = (L_1 - M) \frac{di_1}{dt} + M \left(\frac{di_1}{dt} + \frac{di_2}{dt} \right) \quad (79)$$

$$v_2 = M \left(\frac{di_1}{dt} + \frac{di_2}{dt} \right) + (L_2 - M) \frac{di_2}{dt} \quad (80)$$

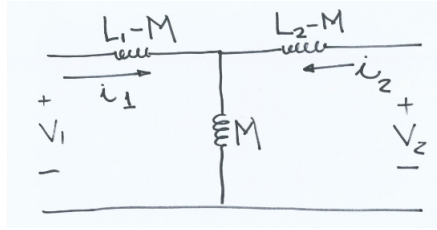


Figura 17: Circuito 3

10.5 Armazenamento de Energia em Transformadores

Sejam duas bobinas acopladas conforme a figura a seguir. A energia total fornecida

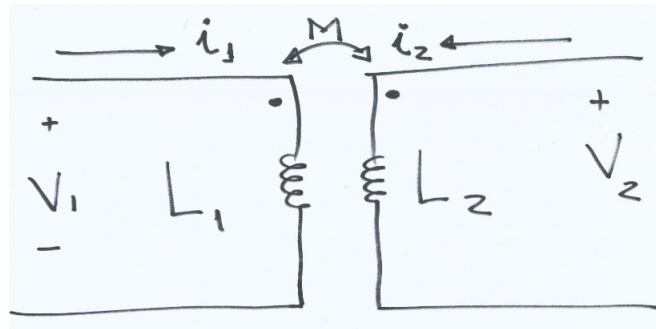


Figura 18: Bobinas Acopladas

pelos terminais é:

$$w = \frac{1}{2}L_1I_1^2 \pm MI_1I_2 + \frac{1}{2}L_2I_2^2 \quad (81)$$

O sinal de M depende da configuração de pontos.

10.6 Coeficiente de Acoplamento

Define-se o coeficiente de acoplamento por:

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1L_2}} \quad (82)$$

Onde,

$0 \leq k \leq 1$, quando $k = 0$ as bobinas não são acopladas, e $k = 1$ são totalmente acopladas. Se $k \leq 0.5$ é dito fracamente acoplada, e se $k > 0.5$ é fortemente acoplado. Portanto, os limites de acoplamento são:

$$0 \leq M \leq \sqrt{L_1L_2} \quad (83)$$

10.7 Transformador Ideal

Um transformador ideal tem as seguintes características:

1. Sem perdas;
2. Acoplamento unitário;

$$M = \sqrt{L_1 L_2} \quad (84)$$

3. Indutâncias próprias infinitas, mas sua relação é finita.

Além disso, temos:

$$\frac{L_2}{L_1} = \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 = n^2 \quad (85)$$

$$\frac{V_2}{V_1} = n \quad (86)$$

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{1}{n} \quad (87)$$

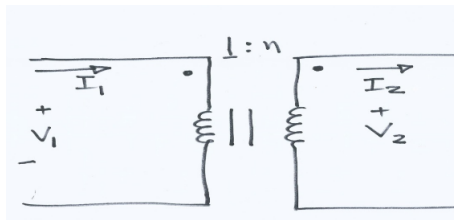


Figura 19: Transformador Ideal

Para esta configuração de pontos e de correntes as relações são para n positivo. Uma alteração nesta configuração torna as relações negativas ($-n$)

11 Banco de Transformadores

11.1 Conexão Y-Y

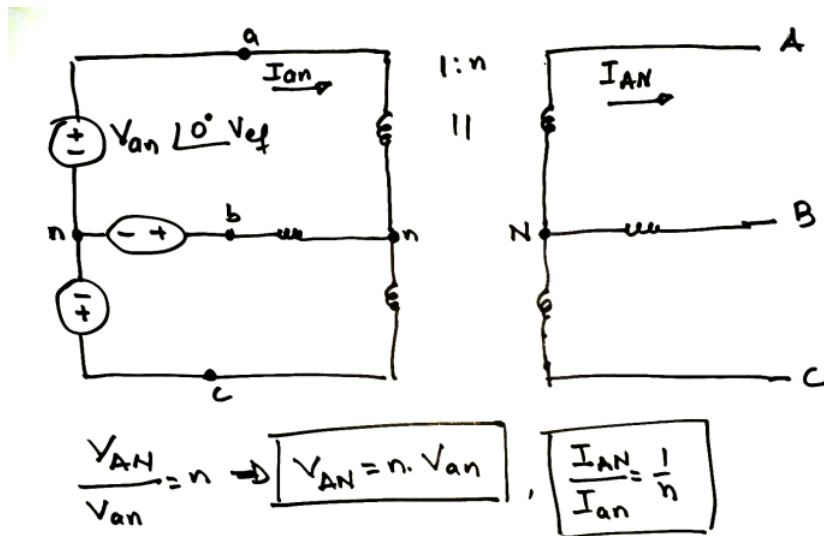


Figura 20: Y-Y

11.2 Conexão Y-Delta

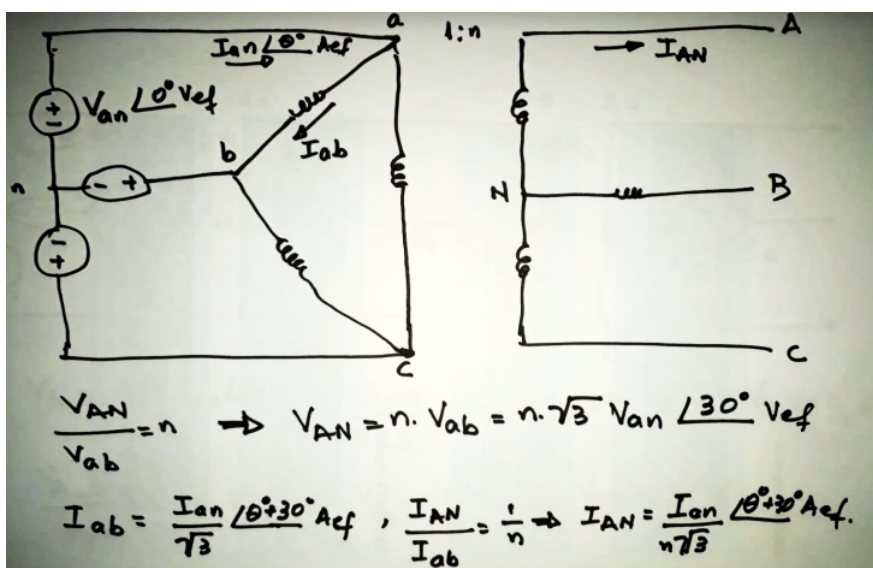


Figura 21: Y-Delta