

# Resposta de um sistema de segunda ordem ao degrau

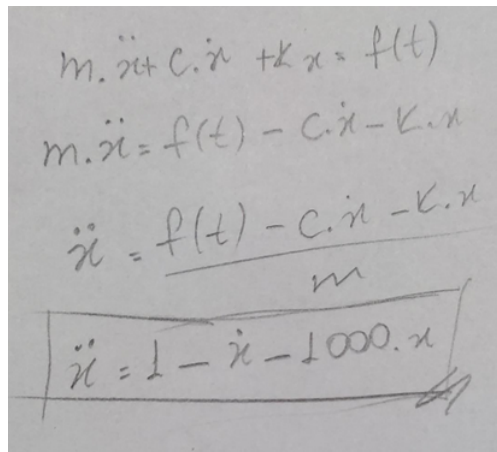
Erik Yuji Goto

RA: 234009

## 1 Modelagem no Simulink

### 1.1 Diagrama de Blocos no Simulink

Para iniciar nossa resolução vamos reorganizar a equação diferencial ( $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t)$ ) e substituir com os valores do enunciado:



Handwritten mathematical derivation of the differential equation:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t)$$
$$m\ddot{x} = f(t) - c\dot{x} - kx$$
$$\ddot{x} = \frac{f(t) - c\dot{x} - kx}{m}$$
$$\ddot{x} = 1 - \dot{x} - 1000x$$

Figura 1: Equação Diferencial

Portanto,

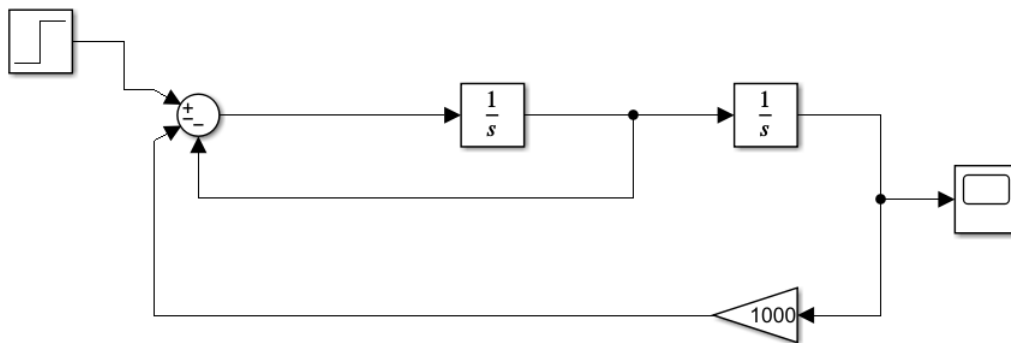


Figura 2: Diagrama de Blocos

$$\ddot{x} = 1 - \dot{x} - 1000x \quad (1)$$

Com a função *Scope* conseguimos visualizar a solução:

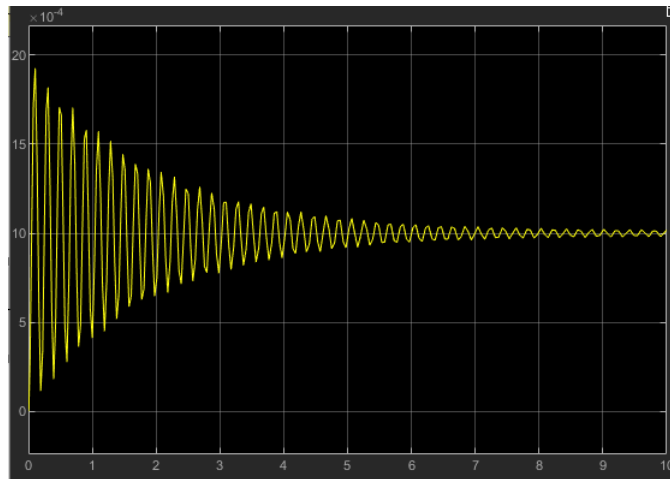


Figura 3: Scope - diagrama de blocos

## 1.2 Função Transferência

Outra forma de resolver a equação no Matlab é pela função transferência. Para começar vamos calcular a função de transferência:

A função de transferência é dada por:

$$H(s) = \frac{X(s)}{F(s)}$$

$$\ddot{x} + \dot{x} + 10^3 x = f(t) \quad \begin{matrix} x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{matrix}$$

$$\mathcal{L}\{\ddot{x} + \dot{x} + 10^3 x\} = \mathcal{L}\{f(t)\} \Rightarrow s^2 X(s) + s X(s) + 10^3 X(s) = F(s) \Rightarrow X(s)(s^2 + s + 10^3) = F(s) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow H(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{(s^2 + s + 10^3)}$$

Figura 4: Cálculo da Função Transferência

Ou seja,

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + s + 10^3} \quad (2)$$

Para usar a função transferência no simulink usamos o bloco *Transfer Fcn*

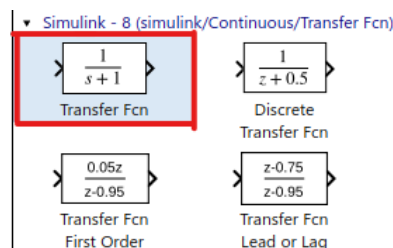


Figura 5: Função Transferencia no Simulink

E a simulação completa fica da seguinte forma:

Note que, a saída do scope retornou exatamente o mesmo gráfico ao usar o diagrama de blocos e o bloco transferência.

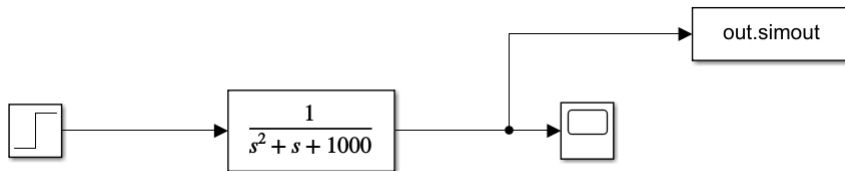


Figura 6: Simulação no Simulink

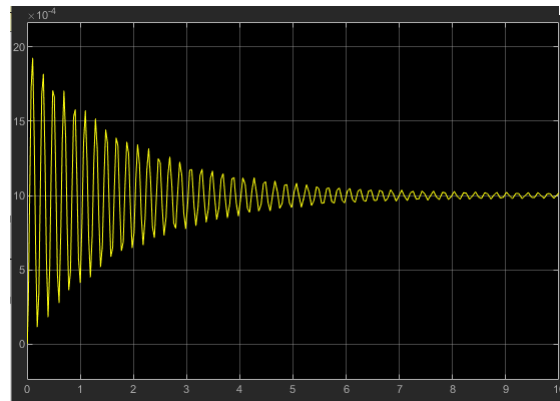


Figura 7: Scope - função transferência

## 2 Solução Analítica - Transformada de Laplace

Outra maneira de resolver a equação diferencial é por meio da *Transformada de Laplace*:

$m\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = F$  ; Condições iniciais  
 $x(0) = 0$   
 $\dot{x}(0) = 0$   
 $\ddot{x} + \dot{x} + 10^3 x = 1 \cdot u$   
 $\mathcal{L}\{\ddot{x} + \dot{x} + 10^3 x\} \cdot \mathcal{L}\{u\} = s^2 X(s) - s x(0) - \dot{x}(0) + s X(s) - x(0) + 10^3 X(s) = \frac{1}{s} \Rightarrow$   
 $\Rightarrow s^2 X(s) + s X(s) + 10^3 X(s) = \frac{1}{s} \Rightarrow X(s) \cdot (s^2 + s + 10^3) = \frac{1}{s} \Rightarrow X(s) = \frac{1}{s(s^2 + s + 10^3)}$   
 $\star \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = x(t)$

Figura 8: Solução por Laplace

Onde chegamos a:

$$X(s) = \frac{1}{s(s^2 + s + 10^3)} \quad (3)$$

Calculamos a anti-transformada (2) com o auxílio do *MatLab*:

```
>> syms s
>> F = 1/(s*(s^2 + s + 10^3));
>> G = ilaplace(F)

G =

1/1000 - (exp(-t/2)*(cos((3999^(1/2)*t)/2) + (3999^(1/2)*sin((3999^(1/2)*t)/2))/3999)/1000
```

Figura 9: Anti-transformada

Portanto,

$$G = x(t) = \frac{1}{1000} - (e^{-t/2}(\cos(\frac{3999^{1/2}t}{2}) + 3999^{1/2}\frac{\text{sen}(\frac{3999^{1/2}t}{2})}{3999}))/1000 \quad (4)$$

Agora que temos  $x(t)$  conseguimos plotar o gráfico da solução analítica:

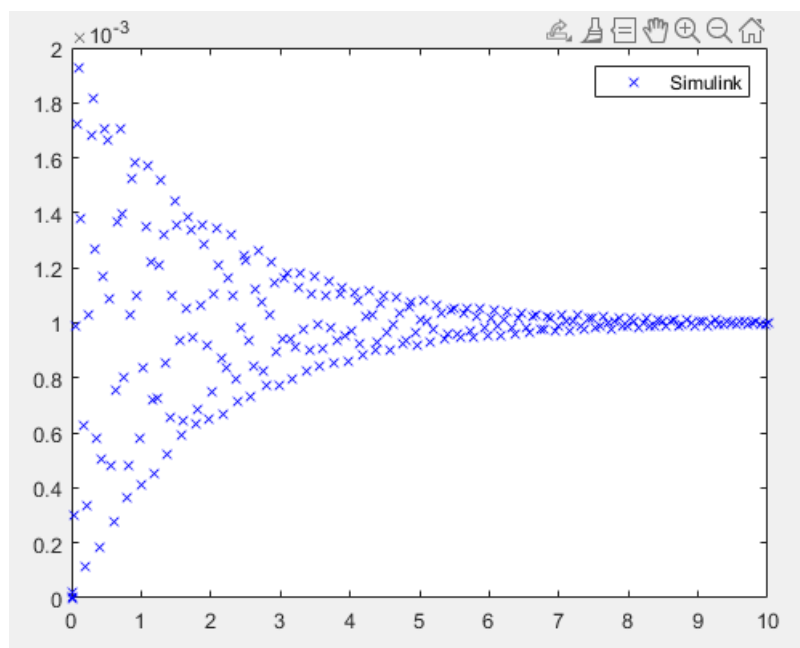


Figura 10: Gráfico da solução analítica

### 3 Análise dos Resultados

Para comparar as duas soluções vamos plotar em um único gráfico:

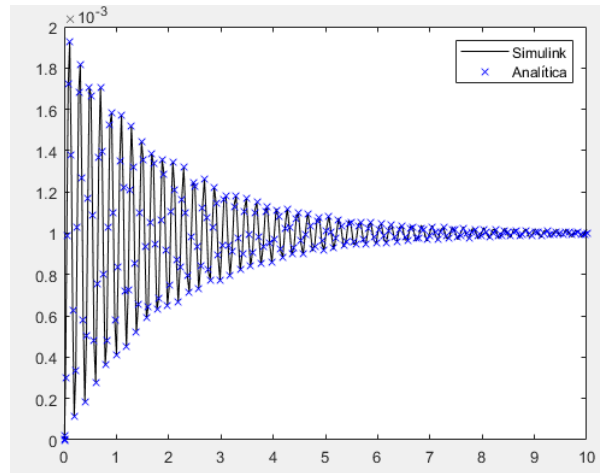


Figura 11: Comparação entre as duas soluções

```
1 - clc
2 - t = out.tout;
3
4
5
6 - syms s
7 - F = 1/(s*(s^2 + s + 10^3));
8 - G = ilaplace(F)
9
10 %Resultado de G = x_t
11 - x_t = 1/1000 - (exp(-t/2).*(cos((3999^(1/2).*t)/2) + (3999^(1/2).*sin((3999^(1/2).*t)/2))/3999))/1000;
12
13 - plot(t, out.simout, "k-", t, x_t, "bx")
14 - legend("Simulink", "Analítica")
```

Figura 12: Código no Matlab