Resposta de sistemas de primeira e segunda ordem por Laplace

Erik Yuji Goto

RA: 234009

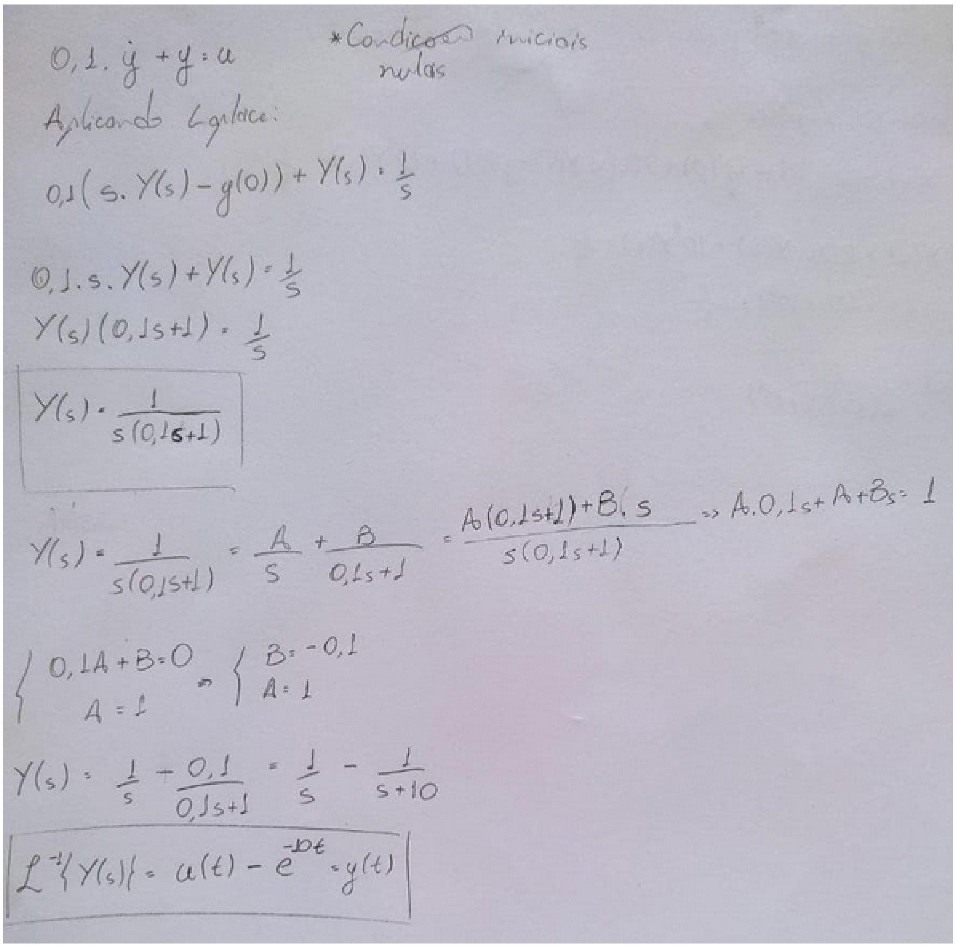
1 Resposta de sistemas de primeira e segunda ordem - Laplace com condições iniciais nulas

1.1 1ª equação - Solução analítica

Queremos calcular a resposta ao degrau da seguinte equação diferencial

$$0.1\dot{y} + y = u \tag{1}$$

Resolvendo a partir da transformada de Laplace temos:



$0{,}1 . \dot{y} + y = u$ *Condições iniciais nulas

Aplicando Laplace:

$0{,}1(s . Y(s) - y(0)) + Y(s) = \frac{1}{s}$

$0{,}1 . s . Y(s) + Y(s) = \frac{1}{s}$

$Y(s)(0{,}1s+1) = \frac{1}{s}$

$\boxed{Y(s) = \frac{1}{s(0{,}1s+1)}}$

$Y(s) = \frac{1}{s(0{,}1s+1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{0{,}1s+1} = \frac{A(0{,}1s+1)+B . s}{s(0{,}1s+1)} \Rightarrow A . 0{,}1s + A + Bs = 1$

$\begin{cases} 0{,}1A + B = 0 \\ A = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = -0{,}1 \\ A = 1 \end{cases}$

$Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{0{,}1}{0{,}1s+1} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+10}$

$\boxed{\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = u(t) - e^{-10t} = y(t)}$

Figura 1: Analítica - Laplace

Obtemos o seguinte gráfico ao plotar no Matlab:

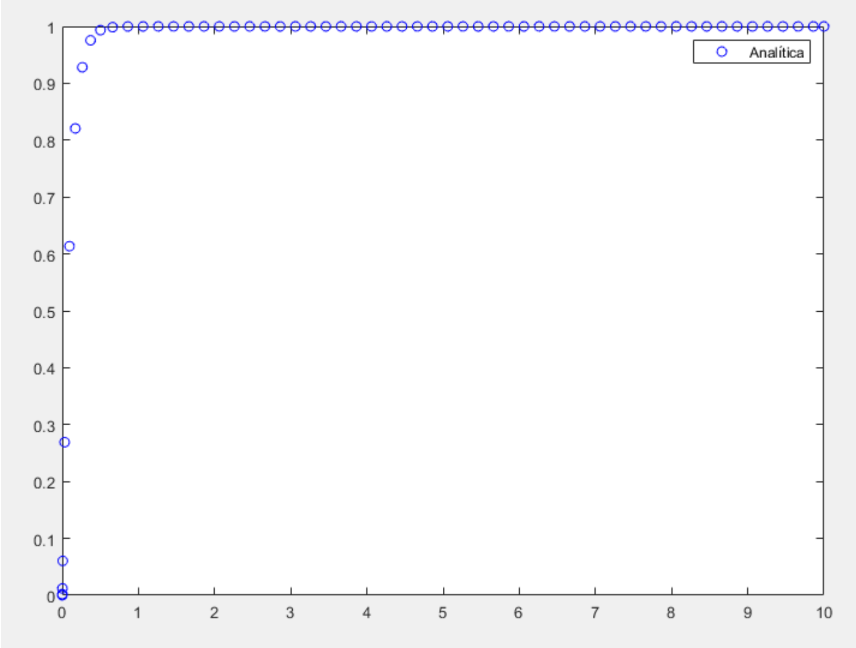


Figura 2: Gráfico resposta ao degrau

1.2 1ª equação - Solução simulink

A função transferência da equação é dada por $H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$:

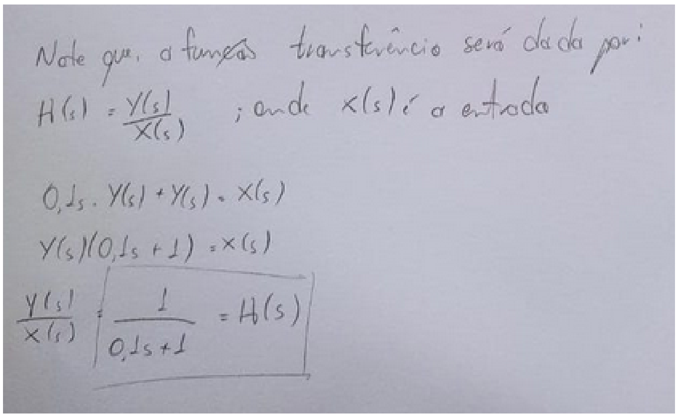
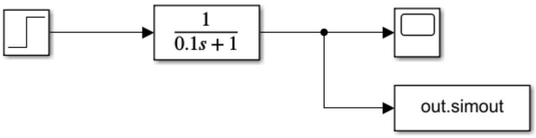


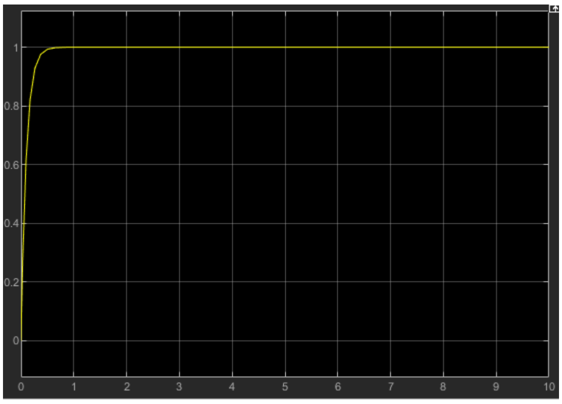
Figura 3: Cáculo da função transferência

$$H(s) = \frac{1}{0,1s + 1} \tag{2}$$

No Simulink o diagrama de blocos com a função transferência fica da seguinte maneira:



(a) Diagrama de Blocos



(b) Saída no Scope

Figura 4: Resolução no Simulink

1.3 1ª equação - Analítica x Simulink

Vamos plotar as soluções analítica e pelo simulink para compará-las

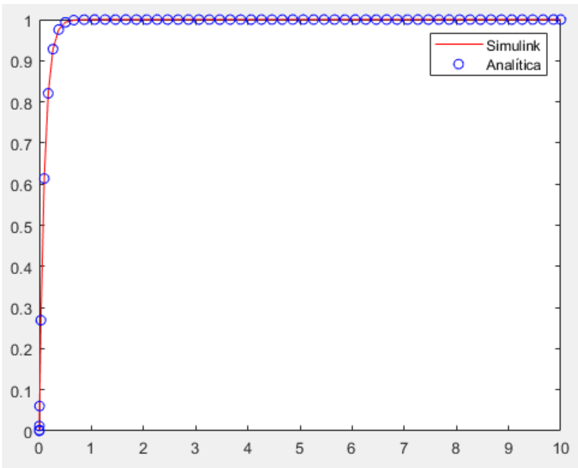
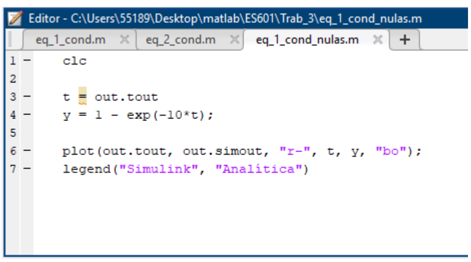


Figura 5: Gráfico Analítica x Simulink




```
clc

t = out.tout
y = 1 - exp(-10*t);

plot(out.tout, out.simout, "r-", t, y, "bo");
legend("Simulink", "Analitica")
```

Figura 6: Script Matlab

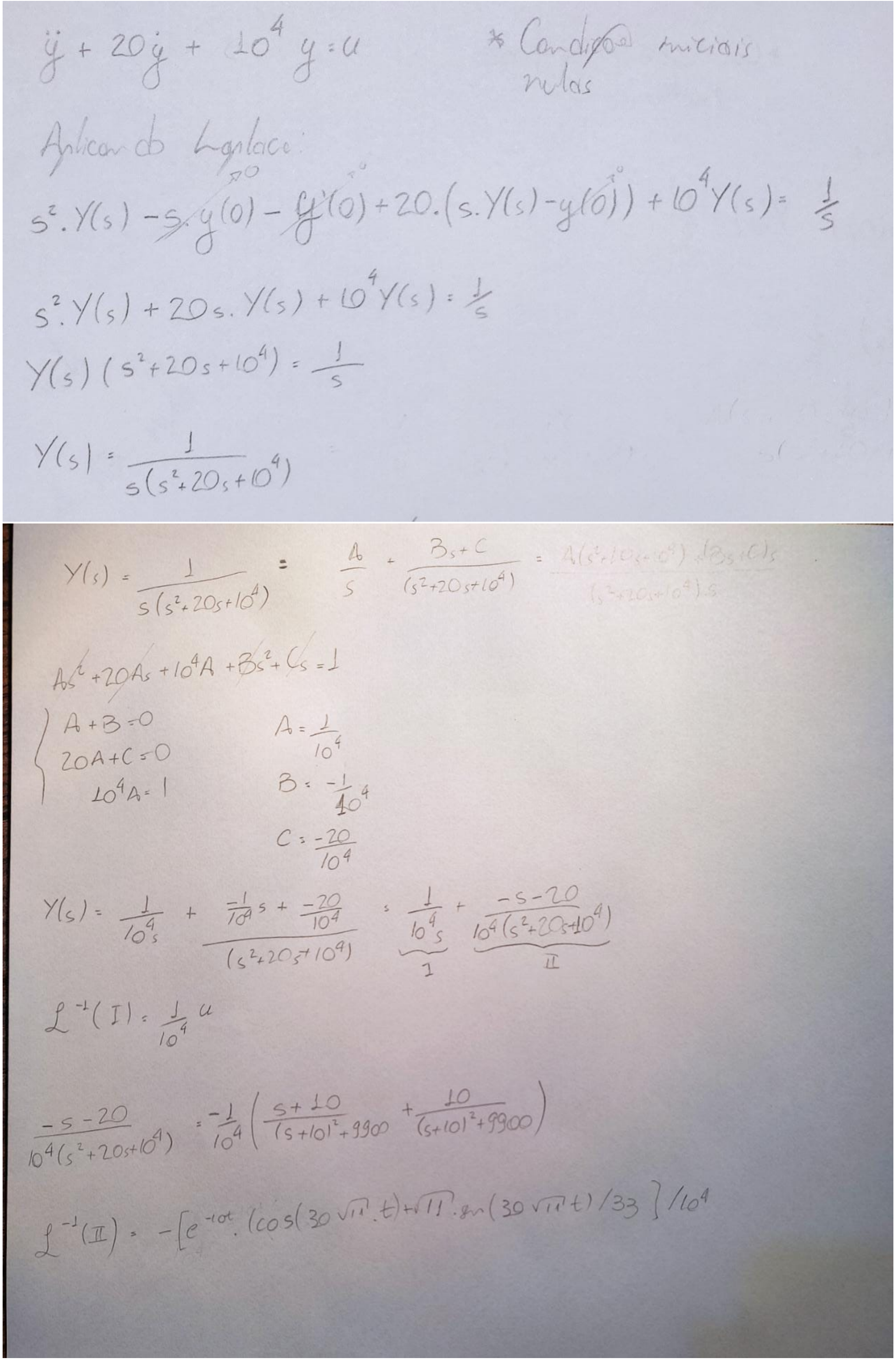
Conseguimos o mesmo plot para ambas as soluções, como era esperado.

1.4 2ª equação - Solução analítica

Queremos calcular a resposta ao degrau da seguinte equação diferencial

$$\ddot{y} + 20\dot{y} + 10^4 y = u \tag{3}$$

Resolvendo a partir da transformada de Laplace temos:



$\ddot{y} + 20\dot{y} + 10^4 y = u$ * Condições iniciais nulas

Aplicando Laplace:

$$s^2.Y(s) - \cancel{s.y(0)} - \cancel{\dot{y}(0)} + 20.(s.Y(s) - \cancel{y(0)}) + 10^4 Y(s) = \frac{1}{s}$$

$$s^2.Y(s) + 20s.Y(s) + 10^4 Y(s) = \frac{1}{s}$$

$$Y(s)(s^2+20s+10^4) = \frac{1}{s}$$

$$Y(s) = \frac{1}{s(s^2+20s+10^4)}$$

$$Y(s) = \frac{1}{s(s^2+20s+10^4)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{(s^2+20s+10^4)} = \frac{A(s^2+20s+10^4)+(Bs+C)s}{(s^2+20s+10^4).s}$$

$$As^2 + 20As + 10^4A + Bs^2 + Cs = 1$$

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ 20A + C = 0 \\ 10^4 A = 1 \end{cases} \qquad A = \frac{1}{10^4} \quad B = \frac{-1}{10^4} \quad C = \frac{-20}{10^4}$$

$$Y(s) = \frac{1}{10^4 s} + \frac{\frac{-1}{10^4}s + \frac{-20}{10^4}}{(s^2+20s+10^4)} = \underbrace{\frac{1}{10^4 s}}_{I} + \underbrace{\frac{-s-20}{10^4(s^2+20s+10^4)}}_{II}$$

$$\mathcal{L}^{-1}(I) = \frac{1}{10^4}u$$

$$\frac{-s-20}{10^4(s^2+20s+10^4)} = \frac{-1}{10^4}\left(\frac{s+10}{(s+10)^2+9900} + \frac{10}{(s+10)^2+9900}\right)$$

$$\mathcal{L}^{-1}(II) = -[e^{-10t}.(\cos(30\sqrt{11}.t)+\sqrt{11}.\text{sen}(30\sqrt{11}t)/33]/10^4$$

$$y = 1/10000 - (exp(-10*t)*(cos(30*11^{1/2}*t) + (11^{1/2}*sin(30*11^{1/2}*t))/33))/10000; \tag{4}$$

Obtemos o seguinte gráfico ao plotar no Matlab:

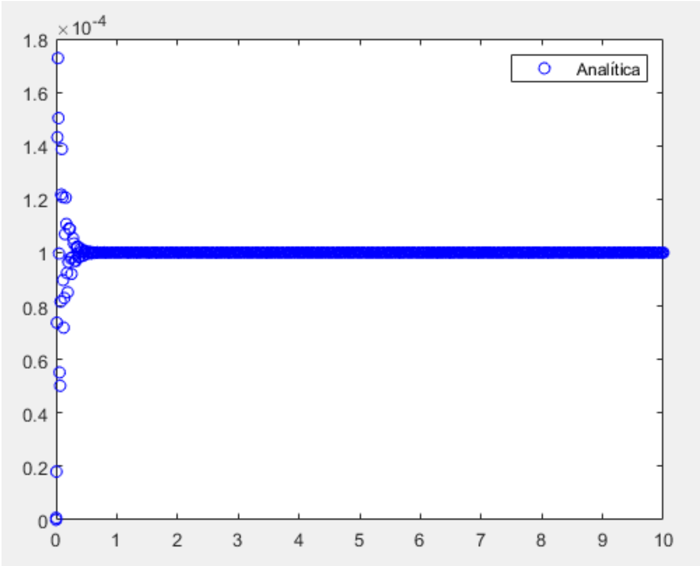


Figura 7: Gráfico resposta ao degrau

1.5 2ª equação - Solução simulink

A função transferência da equação é dada por $H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$:

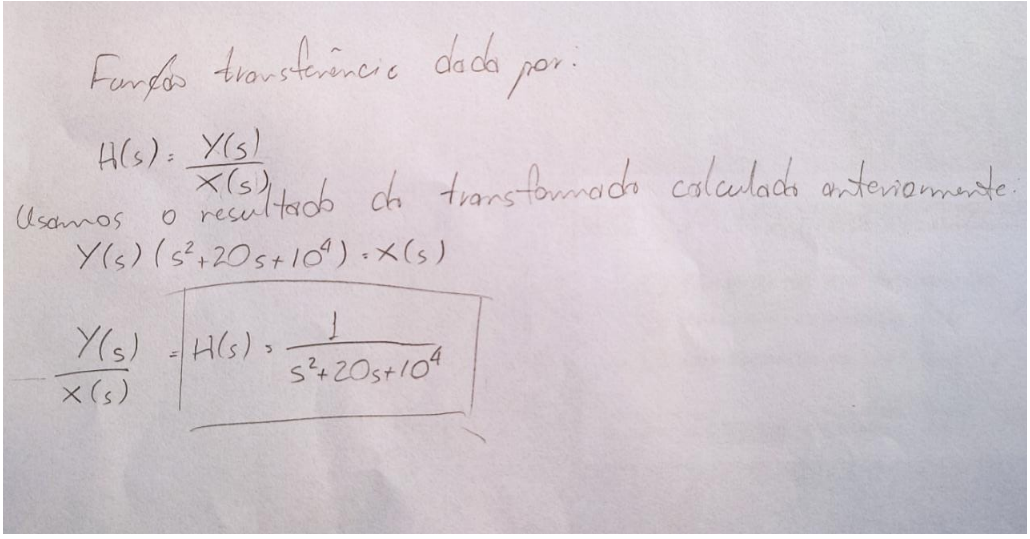
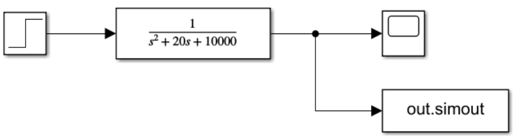


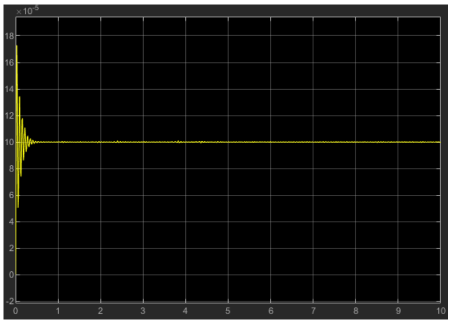
Figura 8: Cáculo da função transferência

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + 20s + 10^4} \tag{5}$$

No Simulink o diagrama de blocos com a função transferência fica da seguinte maneira:



(a) Diagrama de Blocos



(b) Saída no Scope

Figura 9: Resolução no Simulink

1.6 2ª equação - Analítica x Simulink

Vamos plotar as soluções analítica e pelo simulink para compará-las

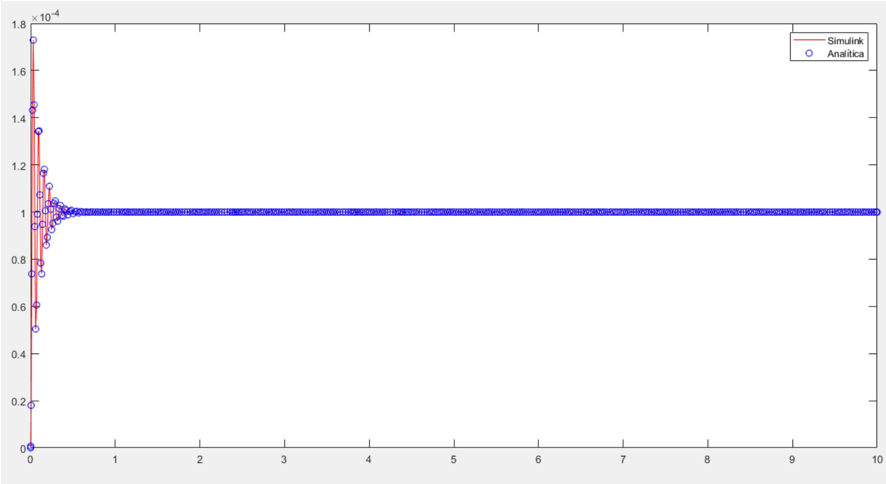
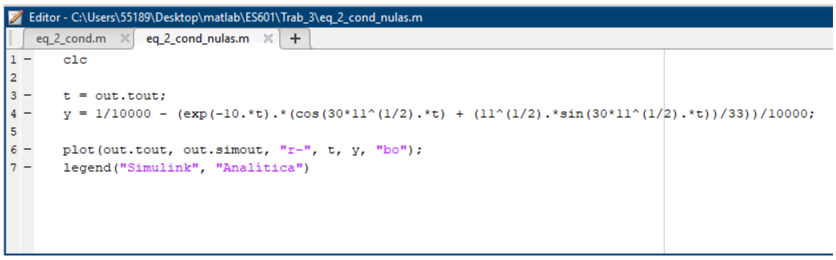


Figura 10: Gráfico Analítica x Simulink




```
clc

t = out.tout;
y = 1/10000 - (exp(-10.*t).*(cos(30*11^(1/2).*t) + (11^(1/2).*sin(30*11^(1/2).*t))/33))/10000;

plot(out.tout, out.simout, "r-", t, y, "bo");
legend("Simulink", "Analítica")
```

Figura 11: Script Matlab

Conseguimos o mesmo plot para ambas as soluções, como era esperado.

2 Resposta de sistemas de primeira e segunda ordem - Com condições iniciais não nulas

2.1 1ª equação - Solução analítica

Queremos calcular a resposta ao degrau da seguinte equação diferencial com condições iniciais não nulas:

$$0.1\dot{y} + y = u; y(0) = 10 \tag{6}$$

Resolvendo a partir da transformada de Laplace temos:

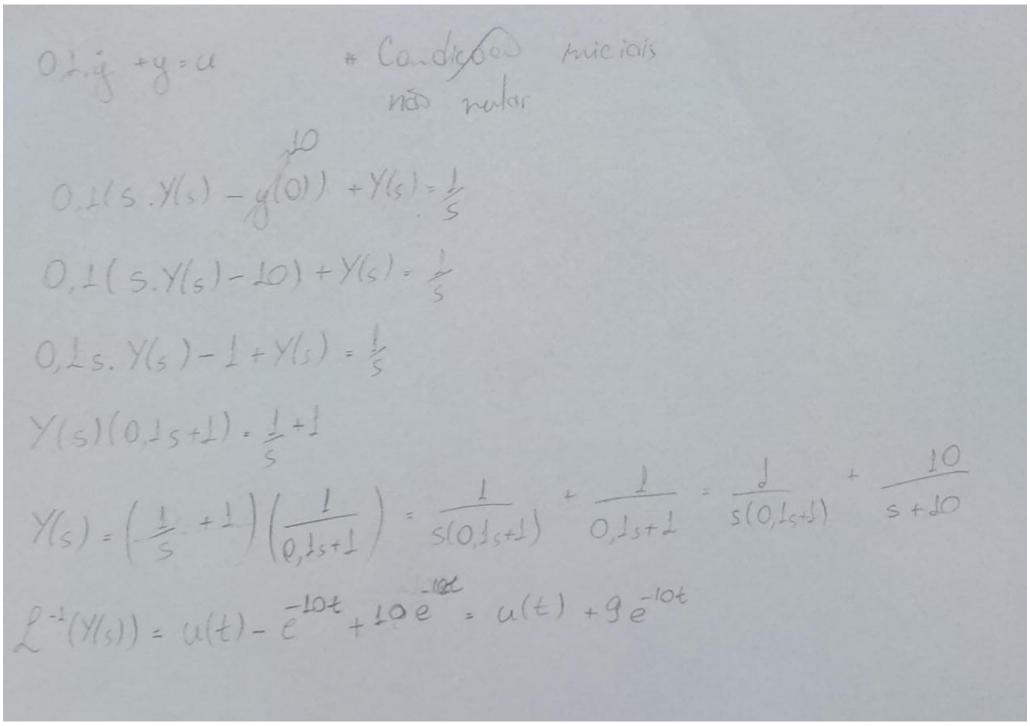


Figura 12: Condição Inicial não Nula

$$y = u(t) + 9e^{-10t} \tag{7}$$

Obtemos o seguinte gráfico ao plotar no Matlab:

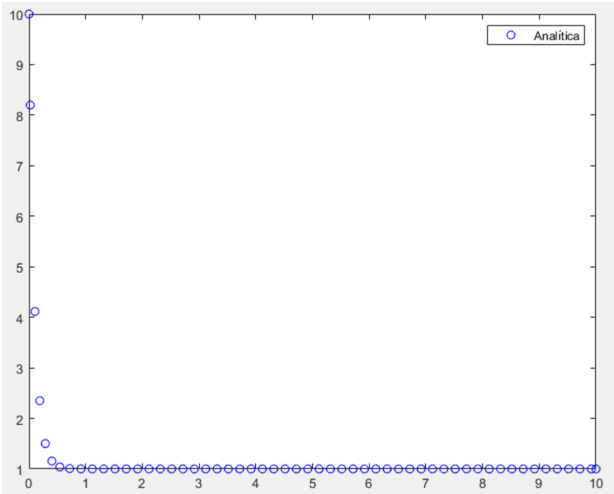
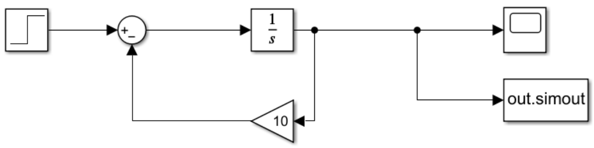


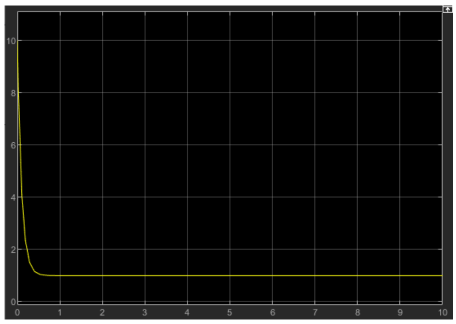
Figura 13: Gráfico resposta ao degrau

2.2 1ª equação - Solução simulink

O diagrama de blocos construído no Simulink será:



(a) Diagrama de Blocos



(b) Saída no Scope

Figura 14: Resolução no Simulink

2.3 1ª equação - Analítica x Simulink

Vamos plotar as soluções analítica e pelo simulink para compará-las

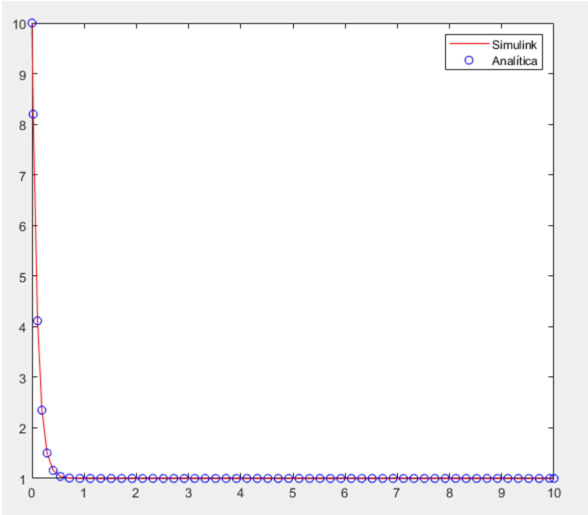


Figura 15: Gráfico Analítica x Simulink

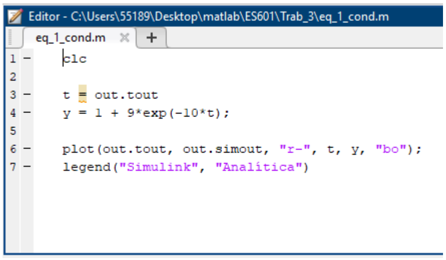


Figura 16: Script Matlab

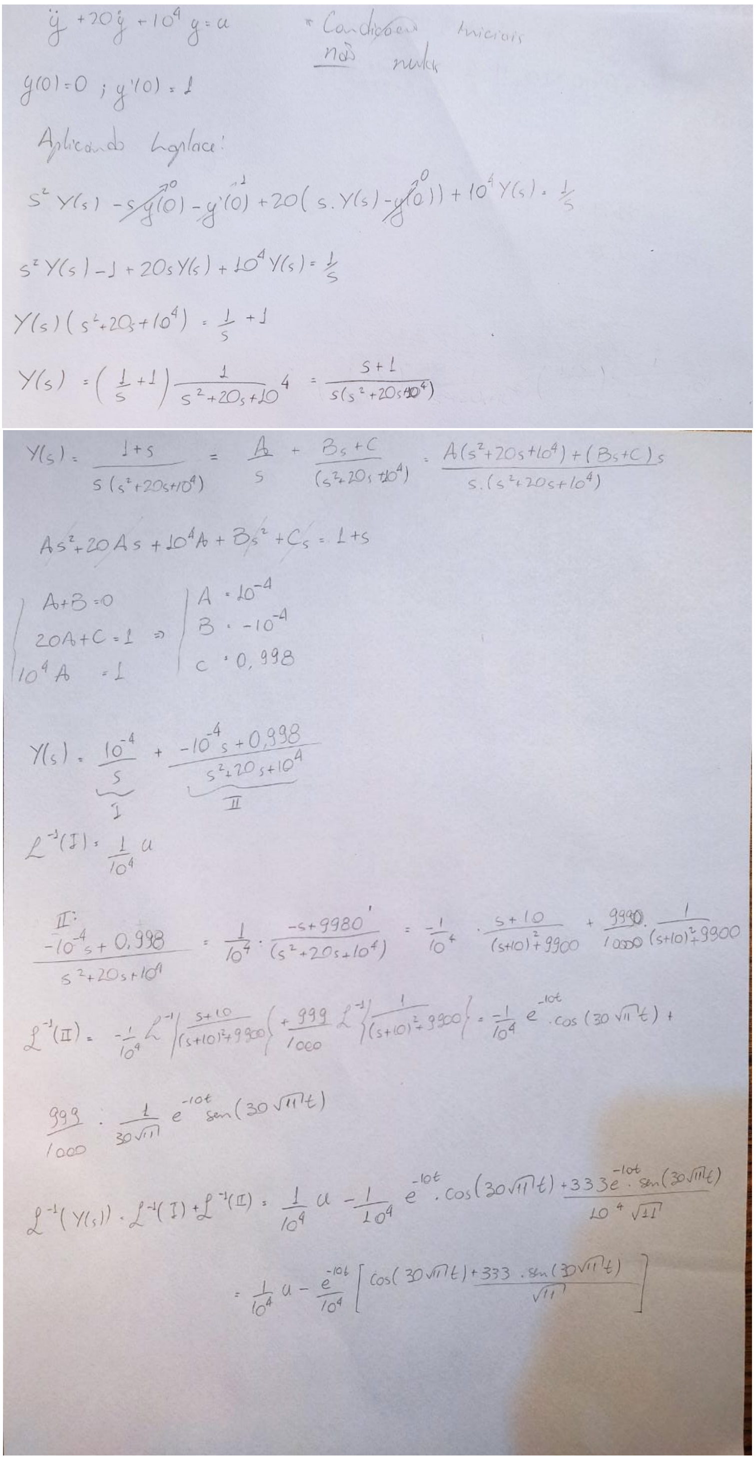
Conseguimos o mesmo plot para ambas as soluções, como era esperado.

2.4 2ª equação - Solução analítica

Queremos calcular a resposta ao degrau da seguinte equação diferencial

$$\ddot{y} + 20\dot{y} + 10^4 = u; y(0) = 0, \dot{y}(0) = 10 \tag{8}$$

Resolvendo a partir da transformada de Laplace temos:



$\ddot{y} + 20\dot{y} + 10^4 y = u$ * Condições iniciais não nulas

$y(0)=0$; $y'(0)=1$

Aplicando Laplace:

$s^2 Y(s) - s\cancel{y(0)} - y'(0) + 20(s.Y(s) - \cancel{y(0)}) + 10^4 Y(s) = \frac{1}{s}$

$s^2 Y(s) - 1 + 20sY(s) + 10^4 Y(s) = \frac{1}{s}$

$Y(s)(s^2+20s+10^4) = \frac{1}{s} + 1$

$Y(s) = \left(\frac{1}{s}+1\right)\frac{1}{s^2+20s+10^4} = \frac{s+1}{s(s^2+20s+10^4)}$

$Y(s) = \frac{1+s}{s(s^2+20s+10^4)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{(s^2+20s+10^4)} = \frac{A(s^2+20s+10^4)+(Bs+C)s}{s.(s^2+20s+10^4)}$

$As^2 + 20As + 10^4A + Bs^2 + Cs = 1+s$

$\begin{cases} A+B=0 \\ 20A+C=1 \\ 10^4 A = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 10^{-4} \\ B = -10^{-4} \\ C = 0,998 \end{cases}$

$Y(s) = \underbrace{\frac{10^{-4}}{s}}_{I} + \underbrace{\frac{-10^{-4}s+0,998}{s^2+20s+10^4}}_{II}$

$\mathcal{L}^{-1}(I) = \frac{1}{10^4}u$

II: $\frac{-10^{-4}s+0,998}{s^2+20s+10^4} = \frac{1}{10^4}\cdot\frac{-s+9980}{(s^2+20s+10^4)} = \frac{-1}{10^4}\cdot\frac{s+10}{(s+10)^2+9900} + \frac{9990}{10000}\cdot\frac{1}{(s+10)^2+9900}$

$\mathcal{L}^{-1}(II) = -\frac{1}{10^4}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+10}{(s+10)^2+9900}\right\} + \frac{999}{1000}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+10)^2+9900}\right\} = \frac{-1}{10^4}e^{-10t}.\cos(30\sqrt{11}t) +$

$\frac{999}{1000}\cdot\frac{1}{30\sqrt{11}}e^{-10t}\operatorname{sen}(30\sqrt{11}t)$

$\mathcal{L}^{-1}(Y(s)) = \mathcal{L}^{-1}(I) + \mathcal{L}^{-1}(II) = \frac{1}{10^4}u - \frac{1}{10^4}e^{-10t}.\cos(30\sqrt{11}t) + \frac{333e^{-10t}.\operatorname{sen}(30\sqrt{11}t)}{10^4\sqrt{11}}$

$= \frac{1}{10^4}u - \frac{e^{-10t}}{10^4}\left[\cos(30\sqrt{11}t) + \frac{333.\operatorname{sen}(30\sqrt{11}t)}{\sqrt{11}}\right]$

$$y = 1/10000-(exp(-10*t)*(cos(30*11^{1/2}*t)-(333*11^{1/2}*sin(30*11^{1/2}*t))/11))/10000; \tag{9}$$

Obtemos o seguinte gráfico ao plotar no Matlab:

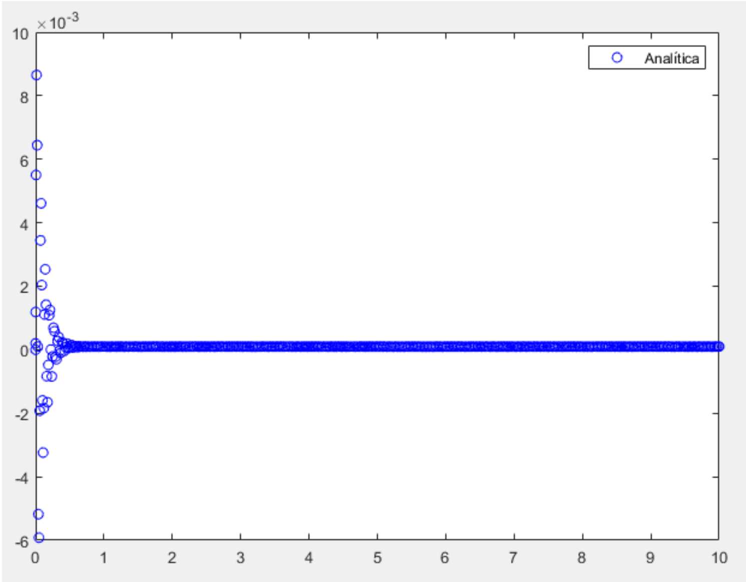
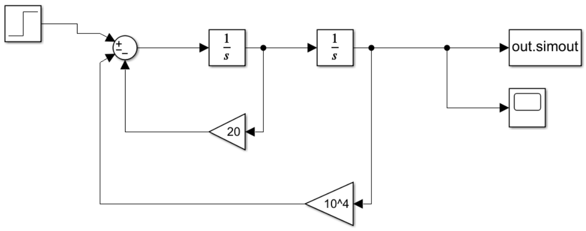


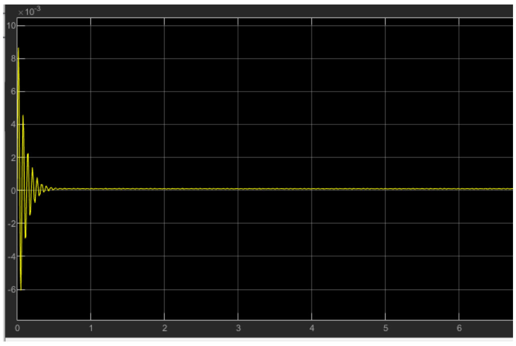
Figura 17: Gráfico resposta ao degrau

2.5 2ª equação - Solução simulink

A solução por diagrama de blocos é dado por:



(a) Diagrama de Blocos



(b) Saída no Scope

Figura 18: Resolução no Simulink

2.6 2ª equação - Analítica x Simulink

Vamos plotar as soluções analítica e pelo simulink para compará-las

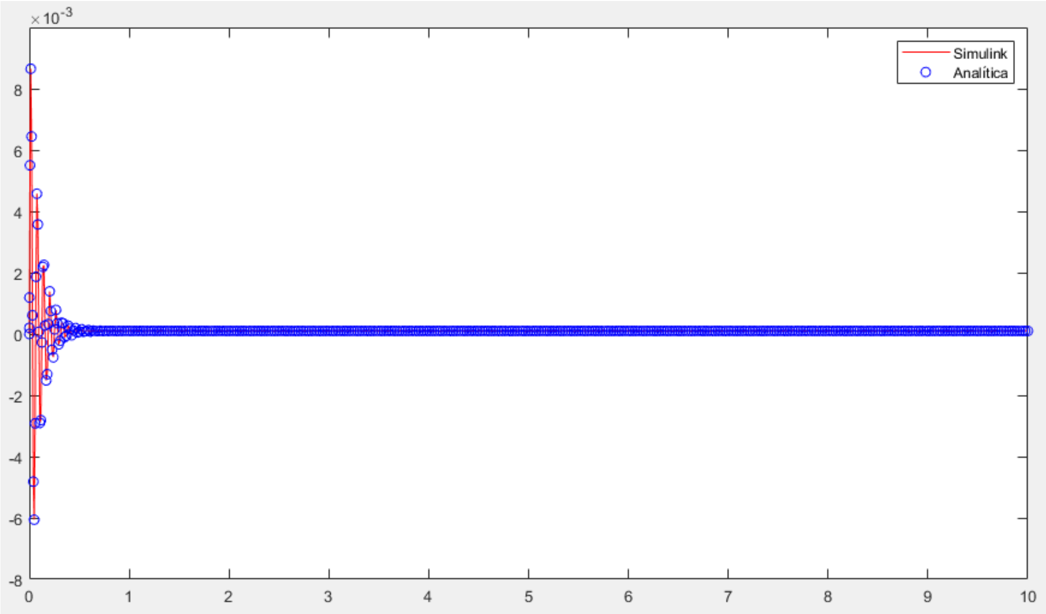
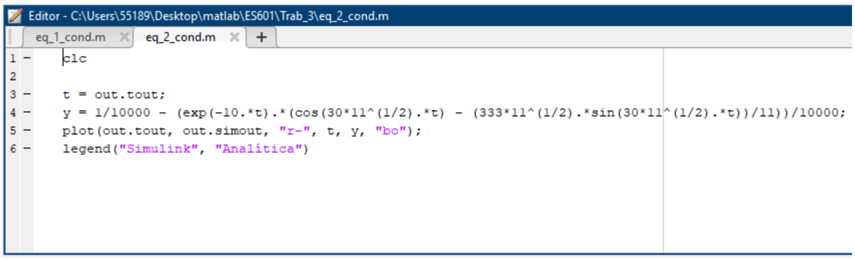


Figura 19: Gráfico Analítica x Simulink



Editor - C:\Users\55189\Desktop\matlab\ES601\Trab_3\eq_2_cond.m

eq_1_cond.m | eq_2_cond.m

```
clc

t = out.tout;
y = 1/10000 - (exp(-10.*t).*(cos(30*11^(1/2).*t) - (333*11^(1/2).*sin(30*11^(1/2).*t))/11))/10000;
plot(out.tout, out.simout, "r-", t, y, "bo");
legend("Simulink", "Analítica")
```

Figura 20: Script Matlab

Conseguimos o mesmo plot para ambas as soluções, como era esperado.