

Unicamp  
[Matéria]  
[Professor]

# TÍTULO

Subtítulo

Erik Yuji Goto

Campinas  
2020

# Sumário

<b>1</b>	<b>Conceitos Iniciais</b>	<b>3</b>
1.1	Velocidade Instantânea . . . . .	3
1.2	Aceleração Instantânea . . . . .	3
1.3	Velocidade Angular . . . . .	3
1.4	Aceleração Angular . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Movimento Retilíneo da Partícula</b>	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>Movimento Curvilíneo da Partícula</b>	<b>4</b>
3.1	Coordenadas Cartesianas . . . . .	4
3.2	Coordenadas Normal-Tangencial . . . . .	4
3.3	Coordenadas Polares . . . . .	4
<b>4</b>	<b>Movimento Circular</b>	<b>5</b>
<b>5</b>	<b>Movimento Curvilíneo Espacial da Partícula</b>	<b>5</b>
5.1	Coordenadas Cartesianas . . . . .	5
5.2	Coordenadas Cilíndricas . . . . .	6
5.3	Coordenadas Esféricas . . . . .	7
<b>6</b>	<b>Transformações de Coordenadas</b>	<b>7</b>
<b>7</b>	<b>Movimento Relativo</b>	<b>8</b>
7.1	Plano - Eixos de Referência em Translação . . . . .	8
7.2	Plano - Eixos de Referência em Rotação . . . . .	8
7.3	Plano - Eixos de Referência em Movimento Geral . . . . .	9
<b>8</b>	<b>Propriedades de Inércia de Corpos Rígidos</b>	<b>9</b>
8.1	Posição do Centro de Massa de um Corpo Rígido . . . . .	9
8.2	Posição do Centro de Massa de corpos de geometria composta . . . . .	9
8.3	Momento de inércia de massa de um corpo rígido em relação a um eixo. Raio de giração . . . . .	10
8.4	Teorema dos Eixos Paralelos para os momentos de inércia de massa . . . . .	11
8.5	Momentos de inércia de massa expressos em coordenadas cartesianas . . . . .	11
8.6	Momentos de inércia de corpos de geometria composta . . . . .	12
8.7	Momentos de inércia de massa em relação a um eixo orientado arbitraria- mente. Produtos de inércia . . . . .	12
8.8	Teorema dos Eixos Paralelos para momentos de inércia e produtos de inércia expressos em coordenadas cartesianas . . . . .	13
8.9	Eixos principais de inércia e momentos principais de inércia . . . . .	13
<b>9</b>	<b>Dinâmica dos Corpos rígidos</b>	<b>15</b>
9.1	Quantidade de movimento linear e quantidade de movimento angular de corpos rígidos . . . . .	15
9.2	Equações de Newton-Euler . . . . .	15
9.3	Equações de Newton-Euler para corpos rígidos em movimento de translação	16
9.4	Equações de Newton-Euler para corpos rígidos em movimento plano . . . . .	16
9.4.1	Equações de Newton-Euler para o movimento plano de rotação ba- ricêntrica . . . . .	16

9.4.2	Equações de Newton-Euler para o movimento plano de rotação não baricêntrica . . . . .	17
9.5	Equações de Newton-Euler para corpos rígidos em movimento tridimensional	17
9.5.1	Equações de Newton-Euler para corpos rígidos em movimento tridimensional de rotação em torno de um eixo fixo . . . . .	17

# 1 Conceitos Iniciais

## 1.1 Velocidade Instantânea

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} \left[ \frac{m}{s} \right]$$

## 1.2 Aceleração Instantânea

$$\vec{a}(t)_m = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \left[ \frac{m^2}{s} \right]$$

## 1.3 Velocidade Angular

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \left[ \frac{rad}{s} \right]$$

$$\vec{\omega} = \hat{\theta} \hat{k}$$

## 1.4 Aceleração Angular

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} \left[ \frac{rad}{s^2} \right]$$

$$\vec{\alpha} = \hat{\omega} \hat{k}$$

# 2 Movimento Retilíneo da Partícula

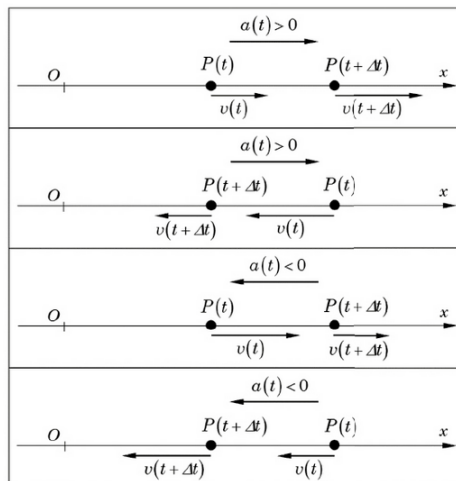


Figura 1: Movimentos retilíneos

1.  $v(t) = v_0 + at$
2.  $x(t) = x_0 + v_0t + \frac{1}{2}at^2$
3.  $v^2(x) = v_0^2 + 2a(x - x_0)$  - Torricelli
4.  $x(t) = x_0 + vt$

### 3 Moviento Curvilíneo da Partícula

#### 3.1 Coordenadas Cartesianas

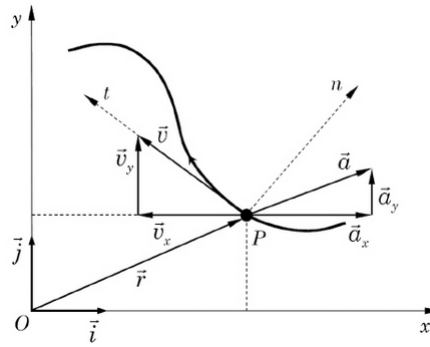


Figura 2: Cartesianas

1.  $\vec{v}(t) = \dot{x}(t)\vec{i} + \dot{y}(t)\vec{j}$
2.  $\vec{a}(t) = \ddot{x}(t)\vec{i} + \ddot{y}(t)\vec{j}$

#### 3.2 Coordenadas Normal-Tangencial

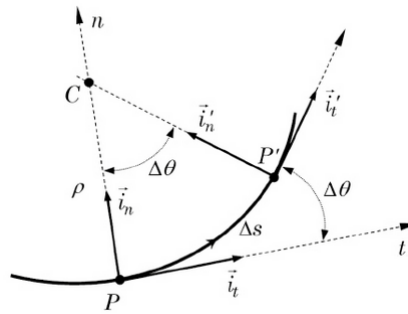


Figura 3: Normal-tangencial

1.  $\vec{v}(t) = v(t)\hat{i}_t$
2.  $\vec{a}(t) = \frac{dv}{dt}\hat{i}_t + \frac{v^2}{\rho}\hat{i}_n$

#### 3.3 Coordenadas Polares

1.  $\vec{v}(t) = \dot{r}\vec{i}_r + r\dot{\theta}\vec{i}_\theta$
2.  $\vec{a}(t) = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{i}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\vec{i}_\theta$

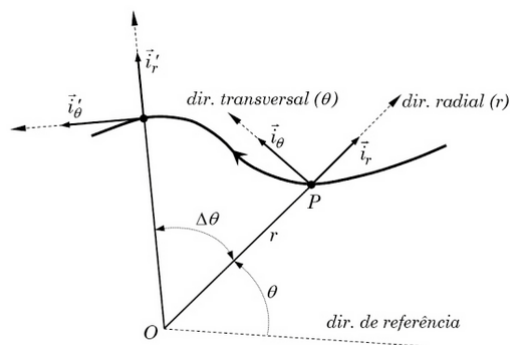


Figura 4: Polares

## 4 Movimento Circular

$$\vec{v} = (r\omega)\vec{i}_\theta$$

$$\vec{a} = (-r\omega^2)\vec{i}_r + (r\alpha)\vec{i}_\theta$$

ou

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

$$\vec{a} = \vec{\alpha} \times \vec{r} - \omega^2 \vec{r}$$

## 5 Movimento Curvilíneo Espacial da Partícula

### 5.1 Coordenadas Cartesianas

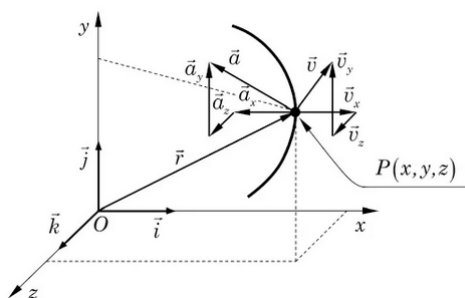


Figura 5: Cartesianas

**Vetor posição**

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k} \quad [\text{m}];$$

$$\|\vec{r}(t)\| = \sqrt{x^2(t) + y^2(t) + z^2(t)} \quad [\text{m}];$$

**Vetor velocidade**

$$\vec{v}(t) = \dot{x}(t)\vec{i} + \dot{y}(t)\vec{j} + \dot{z}(t)\vec{k} \quad [\text{m/s}];$$

$$\|\vec{v}(t)\| = \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)} \quad [\text{m/s}];$$

**Vetor aceleração**

$$\vec{a}(t) = \ddot{x}(t)\vec{i} + \ddot{y}(t)\vec{j} + \ddot{z}(t)\vec{k} \quad [\text{m/s}^2];$$

$$\|\vec{a}(t)\| = \sqrt{\ddot{x}^2(t) + \ddot{y}^2(t) + \ddot{z}^2(t)} \quad [\text{m/s}^2].$$

Figura 6: Cartesianas

## 5.2 Coordenadas Cilíndricas

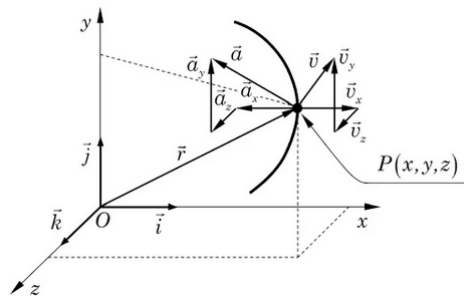


Figura 7: Cilíndricas

1.  $\vec{v} = \dot{r}\vec{i}_r + r\dot{\theta}\vec{i}_\theta + \dot{z}\vec{k}$
2.  $\vec{a} = (\ddot{r} - \dot{r}\dot{\theta}^2)\vec{i}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\vec{i}_\theta + \ddot{z}\vec{k}$

## 5.3 Coordenadas Esféricas

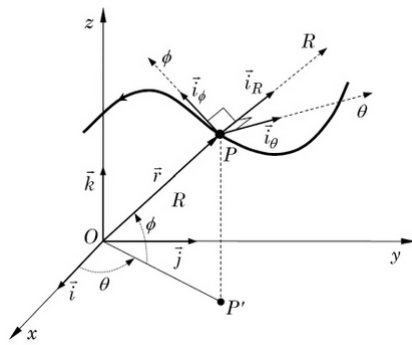


Figura 8: Esféricas

1.  $\vec{v} = \dot{R}\vec{i}_R + R\dot{\theta}\cos\phi\vec{i}_\theta + R\dot{\phi}\vec{i}_\phi$
- 2.

$$\vec{a} = a_R\vec{i}_R + a_\theta\vec{i}_\theta + a_\phi\vec{i}_\phi;$$

$$a_R = \ddot{R} - R\dot{\phi}^2 - R\dot{\theta}^2\cos^2\phi;$$

$$a_\theta = R\ddot{\theta}\cos\phi + 2\dot{R}\dot{\theta}\cos\phi - 2R\dot{\theta}\dot{\phi}\sin\phi;$$

$$a_\phi = R\ddot{\phi} + 2\dot{R}\dot{\phi} + R\dot{\theta}^2\sin\phi\cos\phi;$$

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{a_R^2 + a_\theta^2 + a_\phi^2}.$$

## 6 Transformações de Coordenadas



## 7 Movimento Relativo

### 7.1 Plano - Eixos de Referência em Translação

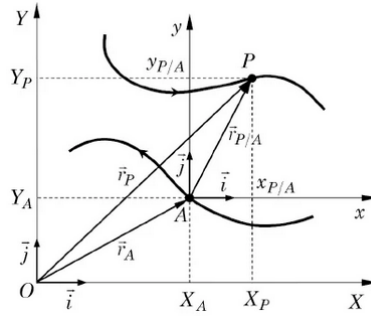


Figura 9: Cilíndricas

1.  $\vec{r}_p = \vec{r}_A + \vec{r}_{P/A}$
2.  $\vec{v}_p = \vec{v}_A + \vec{v}_{P/A}$
3.  $\vec{a}_p = \vec{a}_A + \vec{a}_{P/A}$

### 7.2 Plano - Eixos de Referência em Rotação

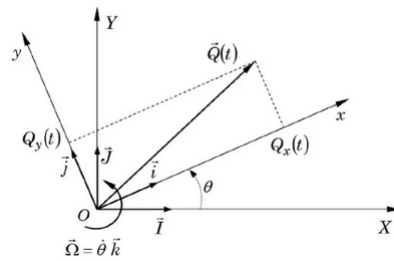


Figura 10: Cilíndricas

1.  $\vec{v}_p|_{OXY} = \vec{r}_P|_{Oxy} + \vec{\Omega} \times \vec{r}_P$
2.  $\vec{a}_P|_{OXY} = \ddot{\vec{r}}_P|_{Oxy} + \dot{\vec{\Omega}} \times \vec{r}_p - \vec{\Omega}^2 \vec{r}_P + 2\vec{\Omega} \times \vec{r}_P|_{Oxy}$

### 7.3 Plano - Eixos de Referência em Movimento Geral

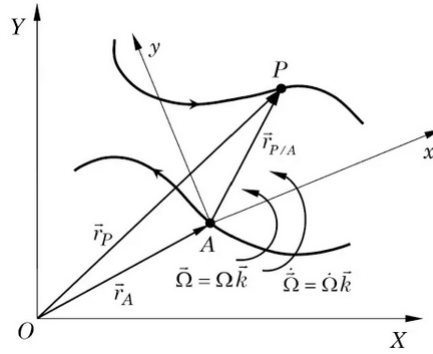


Figura 11: Cilíndricas

1.  $\vec{v}_P|_{OXY} = \vec{r}_A|_{OXY} + \vec{r}_{P/A}|_{Axy} + \vec{\Omega} \times \vec{r}_{P/A}$
2.  $\vec{a}_P|_{OXY} = \vec{r}_A|_{OXY} + \vec{r}_{P/A}|_{Axy} + \vec{\Omega} \times \vec{r}_{P/A} - \vec{\Omega}^2 \vec{r}_{P/A} + 2\vec{\Omega} \times \vec{r}_{P/A}|_{Axy}$

## 8 Propriedades de Inércia de Corpos Rígidos

### 8.1 Posição do Centro de Massa de um Corpo Rígido

$$x_G = \frac{1}{m} = \int_{vol} x dm \quad (1)$$

$$y_G = \frac{1}{m} = \int_{vol} y dm \quad (2)$$

$$z_G = \frac{1}{m} = \int_{vol} z dm \quad (3)$$

### 8.2 Posição do Centro de Massa de corpos de geometria composta

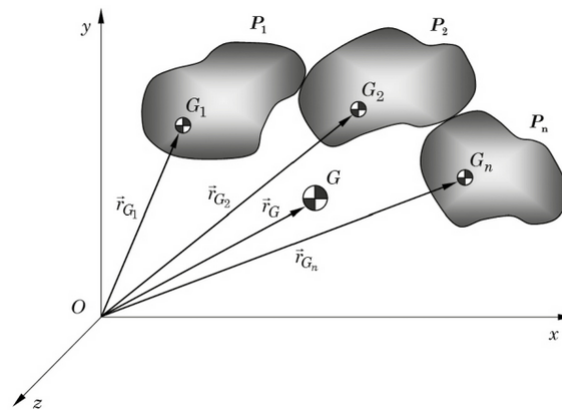


Figura 12: Corpos compostos

$$\vec{r}_G = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_{G_i} \quad (4)$$

### 8.3 Momento de inércia de massa de um corpo rígido em relação a um eixo. Raio de giração

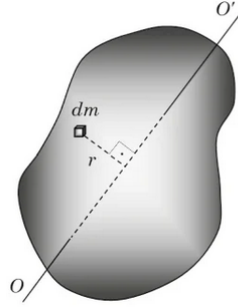


Figura 13: Momentos de inércia

O momento de inércia de massa do corpo rígido em relação ao eixo indicado é definido segundo:

$$J_{OO'} = \int_{vol} r^2 dm \quad (5)$$

Nos casos em que o corpo é constituído de um material uniforme, a densidade  $\rho$  é constante em todo seu volume a equação fica:

$$J_{OO'} = \rho \int_{vol} r^2 dV \quad (6)$$

O raio de giração de massa do corpo rígido em relação ao eixo OO', designado por  $k_{OO'}$ , é definido sob a forma:

$$k_{OO'} = \sqrt{\frac{J_{OO'}}{m}} \Leftrightarrow J_{OO'} = k_{OO'}^2 m \quad (7)$$

## 8.4 Teorema dos Eixos Paralelos para os momentos de inércia de massa

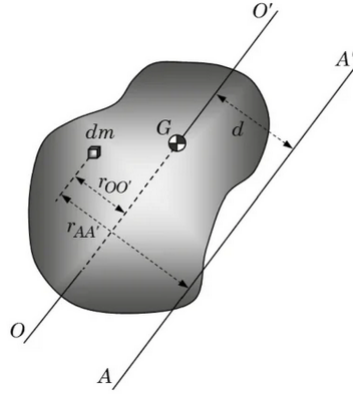


Figura 14: Ilustração de um corpo rígido e dois eixos paralelos entre si, sendo um deles baricêntrico.

Note que, um dos eixos precisa ser baricêntrico, passando pelo CG.

Segundo o **Teorema dos Eixos Paralelos**:

$$J_{AA'} = J_{OO'} + d^2 m \quad (8)$$

$$k_{AA'}^2 = k_{OO'}^2 + d^2 \quad (9)$$

Sendo "d" a distância perpendicular entre os dois eixos.

## 8.5 Momentos de inércia de massa expressos em coordenadas cartesianas

Caso o corpo rígido seja constituído de um material uniforme, com densidade  $\rho$  constante sobre seu volume, seus momentos de inércia podem ser expressas sob a forma:

$$J_x = \rho \int_{vol} (y^2 + z^2) dV \quad (10)$$

$$J_y = \rho \int_{vol} (x^2 + z^2) dV \quad (11)$$

$$J_z = \rho \int_{vol} (y^2 + x^2) dV \quad (12)$$

No Apêndice B do Rade tem uma tabela com as propriedades do momento de inércia de alguns sólidos comuns.

## 8.6 Momentos de inércia de corpos de geometria composta

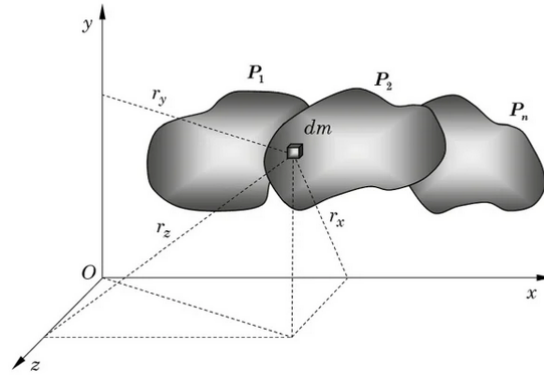


Figura 15: Ilustração de um sólido composto pela associação de várias partes

$$J_x = J_x|_{P1} + J_x|_{P2} + \dots + J_x|_{Pn} \quad (13)$$

$$J_y = J_y|_{P1} + J_y|_{P2} + \dots + J_y|_{Pn} \quad (14)$$

$$J_z = J_z|_{P1} + J_z|_{P2} + \dots + J_z|_{Pn} \quad (15)$$

## 8.7 Momentos de inércia de massa em relação a um eixo orientado arbitrariamente. Produtos de inércia

Considerando a figura, desejamos expressar o momento de inércia de massa do corpo rígido em relação ao eixo  $OO'$ , orientado arbitrariamente, em função dos momentos de inércia  $J_x$ ,  $J_y$  e  $J_z$ , relativos aos eixos coordenados  $x$ ,  $y$  e  $z$ . Nesta figura, o vetor  $\vec{u} = u_x\vec{i} + u_y\vec{j} + u_z\vec{k}$  é o vetor unitário na direção do eixo  $OO'$ .

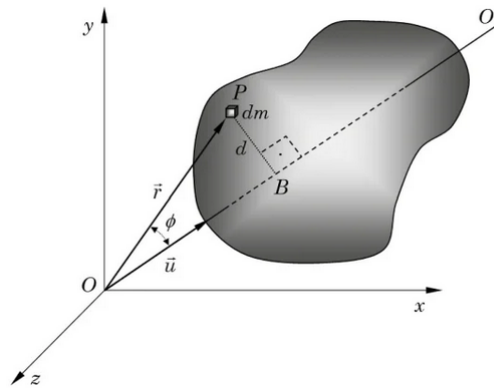


Figura 16: Imagem que ilustra a determinação do momento de inércia de um corpo rígido em relação a um eixo orientado arbitrariamente

$$J_{OO'} = J_x u_x^2 + J_y u_y^2 + J_z u_z^2 - 2P_{xy} u_x u_y - 2P_{xz} u_x u_z - 2P_{yz} u_y u_z \quad (16)$$

Onde,

$$P_{xy} = \int_{vol} xy dm \quad (17)$$

$$P_{xz} = \int_{vol} xz dm \quad (18)$$

$$P_{yz} = \int_{vol} yz dm \quad (19)$$

Em forma matricial temos:

$$J_{OO'} = \begin{bmatrix} u_x & u_y & u_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_x & -P_{xy} & -P_{xz} \\ -P_{xy} & J_y & -P_{yz} \\ -P_{xz} & -P_{yz} & J_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix} \quad (20)$$

## 8.8 Teorema dos Eixos Paralelos para momentos de inércia e produtos de inércia expressos em coordenadas cartesianas

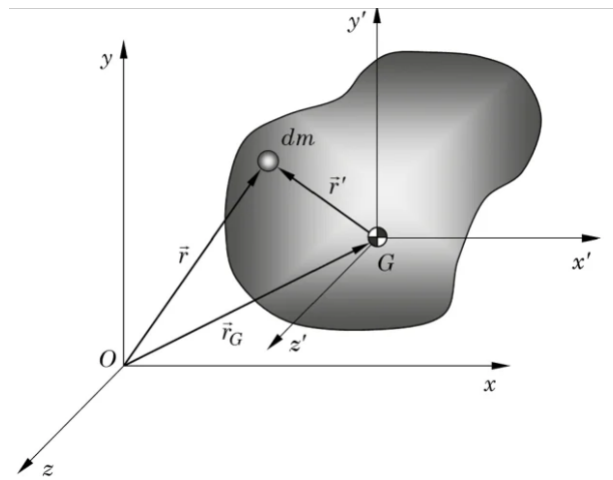


Figura 17: Ilustração de um corpo rígido e dois sistemas de referência, sendo um deles baricêntrico

Teorema dos Eixos Paralelos para os momentos de inércia expressos em coordenadas cartesianas:

$$J_x = J_{x'} + (y_G^2 + z_G^2)m \quad (21)$$

$$J_y = J_{y'} + (z_G^2 + x_G^2)m \quad (22)$$

$$J_z = J_{z'} + (y_G^2 + x_G^2)m \quad (23)$$

Teorema dos Eixos Paralelos para os produtos de inércia em coordenadas cartesianas:

$$P_{xy} = P_{x'y'} + x_G y_G m \quad (24)$$

$$P_{xz} = P_{x'z'} + x_G z_G m \quad (25)$$

$$P_{yz} = P_{y'z'} + y_G z_G m \quad (26)$$

## 8.9 Eixos principais de inércia e momentos principais de inércia

Sempre podemos encontrar um sistema triortogonal de eixos em relação aos quais todos os *produtos de inércia* são *nulos* simultaneamente. Neste caso, o tensor de inércia resulta ser uma matriz diagonal.

Os eixos em relação aos quais os produtos de inércia são nulos são chamados Eixos Principais de Inércia (EPI), e os momentos de inércia em relação a estes eixos são denominados Momentos Principais de Inércia (MPI).

Para encontrar Eixos Principais de Inércia e os Momentos Principais de Inércia é necessário calcular os autovetores e autovalores:

$$([J_{xyz}] - \lambda_i[I_3])\{v_i\} = \{0\} \quad (27)$$

- Os autovalores  $\lambda_i$  correspondem aos valores dos três momentos principais de inércia, que designaremos por  $J_x$ ,  $J_y$ ,  $J_z$ .
- Os autovetores  $\{v_i\}$  são os vetores cujas componentes são os cossenos diretores dos três eixos principais de inércia, em relação ao sistema de referência Oxyz.

## 9 Dinâmica dos Corpos rígidos

### 9.1 Quantidade de movimento linear e quantidade de movimento angular de corpos rígidos

$$\vec{L} = m\vec{v}_G \quad (28)$$

$$\vec{H}_O = \int_{vol} \vec{r} \times \vec{v} dm \quad (29)$$

$$\vec{H}_G = \int_{vol} \vec{r}' \times \vec{v}' dm \quad (30)$$

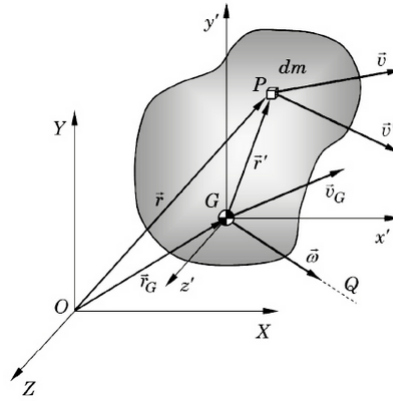


Figura 18: Ilustração de um corpo rígido e de dois sistemas de referência

Usando o tensor de inércia conseguimos calcular o momento angular:

$$\{H_G\} = [J_{Gx'y'z'}]\{\omega\} \quad (31)$$

E, também temos:

$$\vec{H}_O = \vec{H}_G + m(\vec{r}_G \times \vec{v}_G) \quad (32)$$

### 9.2 Equações de Newton-Euler

$$\sum \vec{F} = \dot{\vec{L}} = m\vec{a}_G \quad (33)$$

$$\sum \vec{M}_O = \dot{\vec{H}}_O \quad (34)$$

$$\sum \vec{M}_G = \dot{\vec{H}}_G \quad (35)$$

As equações acima, estendidas para um corpo livre, são conhecidas como Equações de Newton-Euler. Como as Equações 34 e 35 não são independentes entre si, dentre as Equações 33 a 35 geralmente opta-se por utilizar apenas as Equações 33 e 35.



### 9.3 Equações de Newton-Euler para corpos rígidos em movimento de translação

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}_G \quad (36)$$

$$\sum \vec{M}_G = \vec{0} \quad (37)$$

Um corpo estará em translação quando o momento resultante dos esforços externos em relação ao centro de massa for nulo. Esta condição implica que nos casos em que houver apenas forças externas aplicadas ao corpo rígido, a linha de ação da resultante destas forças deve passar pelo centro de massa do corpo.

### 9.4 Equações de Newton-Euler para corpos rígidos em movimento plano

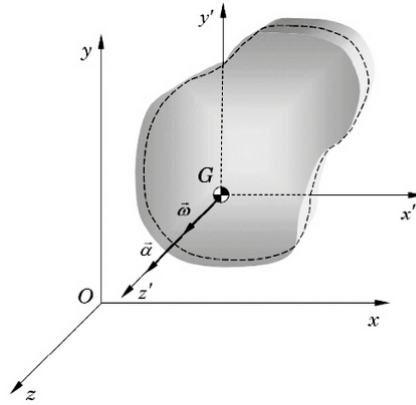


Figura 19: Corpo rígido realizando movimento plano

Os produtos de inércia que envolvem o eixo perpendicular ao plano de referência são nulos ( $P_{xz} = P_{yz} = 0$ ,  $P_{x'z'} = P_{y'z'} = 0$ ). Portanto a quantidade de movimento angular em relação ao centro de massa  $G$  é:

$$\{H_G\} = \begin{bmatrix} J_{x'} & -P_{x'y'} & 0 \\ -P_{x'y'} & J_{y'} & 0 \\ 0 & 0 & J_{z'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ J_{z'}\omega \end{bmatrix} \quad (38)$$

Ou,

$$\vec{H}_G = J_{z'}\omega\vec{k} \quad (39)$$

Equações de Euler:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}_G \quad (40)$$

$$\sum \vec{M}_G = J_{z'}\alpha\vec{k} \quad (41)$$

#### 9.4.1 Equações de Newton-Euler para o movimento plano de rotação baricêntrica

Entendemos por rotação baricêntrica o caso de movimento plano em que, devido à existência de restrições cinemáticas, o corpo rígido gira em torno de um eixo perpendicular ao plano de referência que passa pelo seu centro de massa.

$$\sum \vec{F} = 0 \quad (42)$$

$$\sum \vec{M}_G = J_{z'} \alpha \vec{k} \quad (43)$$

#### 9.4.2 Equações de Newton-Euler para o movimento plano de rotação não baricêntrica

A rotação não baricêntrica é o caso de movimento plano em que, devido à existência de restrições cinemáticas, o corpo rígido gira em torno de um eixo perpendicular ao plano de referência que passa por um ponto O não coincidente com seu centro de massa.

As equações de Newton Euler assumem as seguintes formas:

$$\sum \vec{F} = m \alpha \vec{k} \times \vec{OG} - m \omega^2 \vec{OG} \quad (44)$$

$$\sum \vec{M}_O = J_z \alpha \vec{k} \quad (45)$$

De acordo com o Teoremas dos Eixos Paralelos para os momentos de inércia de massa:

$$J_z = J_{z'} + m |\vec{OG}|^2 \quad (46)$$

### 9.5 Equações de Newton-Euler para corpos rígidos em movimento tridimensional

#### 9.5.1 Equações de Newton-Euler para corpos rígidos em movimento tridimensional de rotação em torno de um eixo fixo

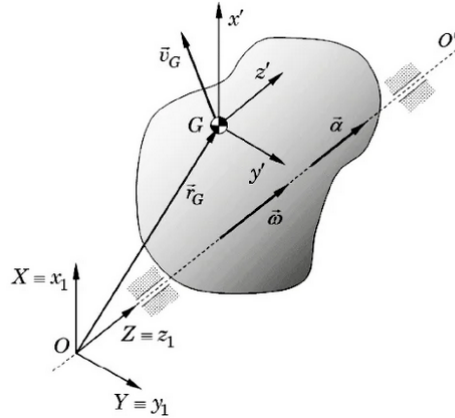


Figura 20: Corpo rígido desenvolvendo movimento tridimensional de rotação em torno de um eixo fixo

$$\{H_O\} = [J_{OXYZ}] \{\omega\} \quad (47)$$

Pelo teorema dos eixos paralelos:

$$[J_{OXYZ}] = \begin{bmatrix} J_{x'} & -P_{x'y'} & -P_{x'z'} \\ -P_{x'y'} & J_{y'} & -P_{y'z'} \\ -P_{x'z'} & -P_{y'z'} & J_{z'} \end{bmatrix} + m \begin{bmatrix} Y_G^2 + Z_G^2 & -X_G Y_G & -X_G Z_G \\ -X_G Y_G & X_G^2 + Z_G^2 & -Y_G Z_G \\ -X_G Z_G & -Y_G Z_G & X_G^2 + Y_G^2 \end{bmatrix} \quad (48)$$

Ao derivar  $\{H_O\}$ , temos a seguinte relação

$$\sum \{M_O\} = [J_{OX_1Y_1Z_1}] \frac{d\{\omega\}}{dt} \Big|_{Ox_1y_1z_1} + \{\omega\} \times \{H_O\} \quad (49)$$

E para as forças

$$\sum F = m a_G \quad (50)$$