

# Resposta de sistemas de primeira e segunda ordem por Laplace

Erik Yuji Goto

RA: 234009

## 1 Resposta de sistemas de primeira e segunda ordem - Laplace com condições iniciais nulas

### 1.1 1ª equação - Solução analítica

Queremos calcular a resposta ao degrau da seguinte equação diferencial

$$0.1\dot{y} + y = u \quad (1)$$

Resolvendo a partir da transformada de Laplace temos:

The image shows a handwritten derivation for the Laplace transform solution of the differential equation  $0.1\dot{y} + y = u$  with zero initial conditions. The steps are as follows:

- Equation:  $0.1\dot{y} + y = u$  with a note: *\*Condições iniciais nulas*
- Applying Laplace:  $0.1(sY(s) - y(0)) + Y(s) = \frac{1}{s}$
- Simplification:  $0.1sY(s) + Y(s) = \frac{1}{s}$
- Factoring:  $Y(s)(0.1s + 1) = \frac{1}{s}$
- Solving for  $Y(s)$ :  $Y(s) = \frac{1}{s(0.1s + 1)}$
- Partial fraction decomposition:  $Y(s) = \frac{1}{s(0.1s + 1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{0.1s + 1} = \frac{A(0.1s + 1) + B(s)}{s(0.1s + 1)} \Rightarrow A(0.1s + 1) + B(s) = 1$
- Solving for A and B:  $\begin{cases} 0.1A + B = 0 \\ A = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = -0.1 \\ A = 1 \end{cases}$
- Final  $Y(s)$ :  $Y(s) = \frac{1}{s} + \frac{0.1}{0.1s + 1} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s + 10}$
- Inverse Laplace transform:  $\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = u(t) - e^{-10t} \cdot y(t)$

Figura 1: Analítica - Laplace

Obtemos o seguinte gráfico ao plotar no Matlab:

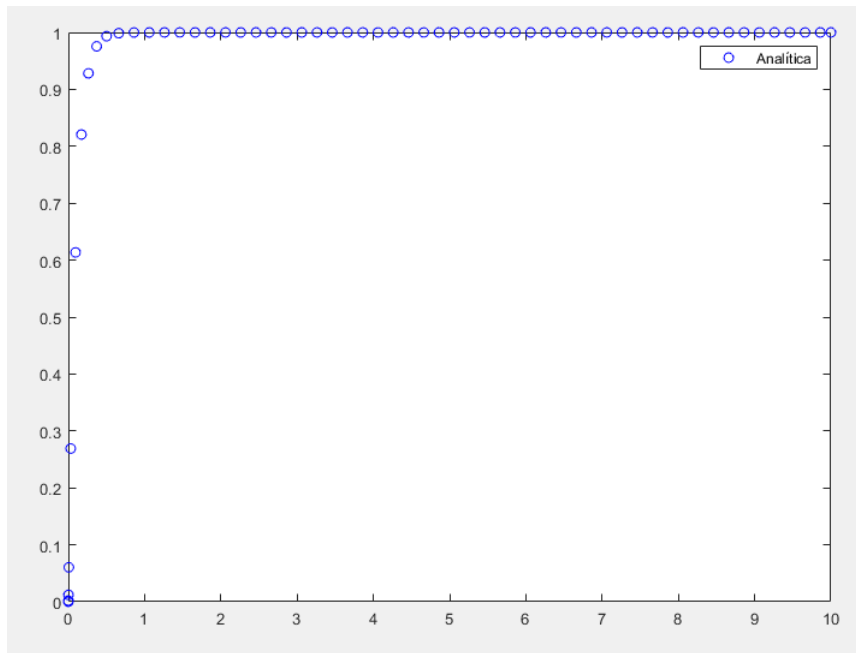


Figura 2: Gráfico resposta ao degrau

## 1.2 1ª equação - Solução simulink

A função transferência da equação é dada por  $H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$ :

Note que, a função transferência será dada por:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} \quad ; \text{ onde } X(s) \text{ é a entrada}$$

$$0,1s \cdot Y(s) + Y(s) = X(s)$$

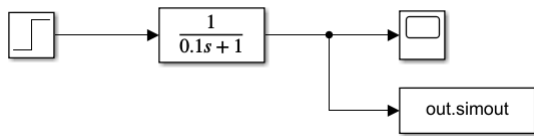
$$Y(s)(0,1s + 1) = X(s)$$

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{0,1s + 1} = H(s)$$

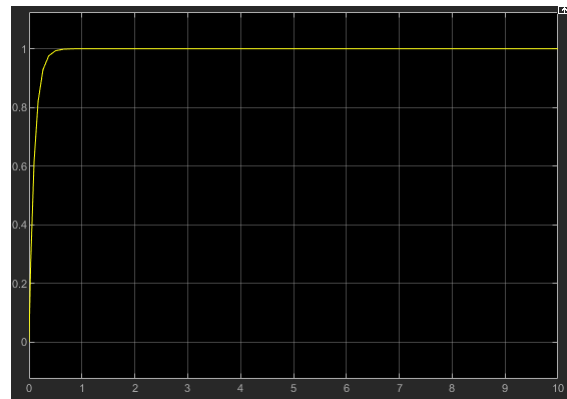
Figura 3: Cálculo da função transferência

$$H(s) = \frac{1}{0,1s + 1} \quad (2)$$

No Simulink o diagrama de blocos com a função transferência fica da seguinte maneira:



(a) Diagrama de Blocos



(b) Saída no Scope

Figura 4: Resolução no Simulink

### 1.3 1ª equação - Analítica x Simulink

Vamos plotar as soluções analítica e pelo simulink para compará-las

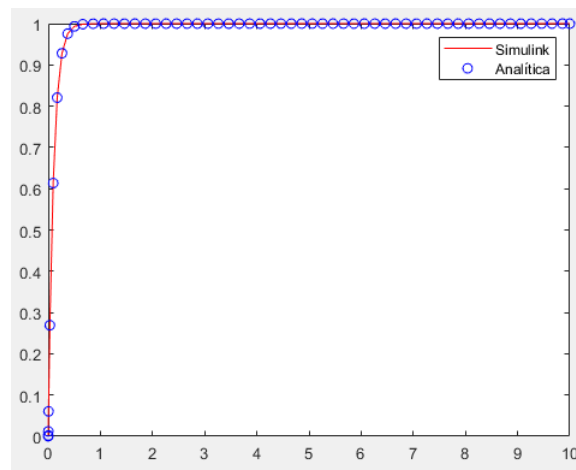


Figura 5: Gráfico Analítica x Simulink

```

Editor - C:\Users\55189\Desktop\matlab\ES601\Trab_3\eq_1_cond_nulas.m
eq_1_cond.m  eq_2_cond.m  eq_1_cond_nulas.m  +
1 -  clc
2 -
3 -  t = out.tout
4 -  y = 1 - exp(-10*t);
5 -
6 -  plot(out.tout, out.simout, "r-", t, y, "bo");
7 -  legend("Simulink", "Analítica")

```

Figura 6: Script Matlab

Conseguimos o mesmo plot para ambas as soluções, como era esperado.

## 1.4 2ª equação - Solução analítica

Queremos calcular a resposta ao degrau da seguinte equação diferencial

$$\ddot{y} + 20\dot{y} + 10^4 y = u \quad (3)$$

Resolvendo a partir da transformada de Laplace temos:

Handwritten solution of the differential equation  $\ddot{y} + 20\dot{y} + 10^4 y = u$  using Laplace transforms. The solution starts with the equation and initial conditions, then applies the Laplace transform to get  $s^2 Y(s) - s y(0) - \dot{y}(0) + 20(s Y(s) - y(0)) + 10^4 Y(s) = \frac{1}{s}$ . This simplifies to  $Y(s) (s^2 + 20s + 10^4) = \frac{1}{s}$ , leading to  $Y(s) = \frac{1}{s(s^2 + 20s + 10^4)}$ . The partial fraction decomposition is shown as  $Y(s) = \frac{A}{s} + \frac{Bs + C}{s^2 + 20s + 10^4}$ . The coefficients are found to be  $A = \frac{1}{10^4}$ ,  $B = -\frac{1}{10^4}$ , and  $C = -\frac{20}{10^4}$ . The inverse Laplace transform is then calculated, resulting in  $y = \frac{1}{10000} - \frac{1}{10000} (e^{-10t} (\cos(30\sqrt{11}t) + 11 \sin(30\sqrt{11}t)) / 33)$ .

$\ddot{y} + 20\dot{y} + 10^4 y = u$  \* Condições iniciais nulas  
 Aplicando Laplace:  
 $s^2 Y(s) - s y(0) - \dot{y}(0) + 20(s Y(s) - y(0)) + 10^4 Y(s) = \frac{1}{s}$   
 $s^2 Y(s) + 20s Y(s) + 10^4 Y(s) = \frac{1}{s}$   
 $Y(s) (s^2 + 20s + 10^4) = \frac{1}{s}$   
 $Y(s) = \frac{1}{s(s^2 + 20s + 10^4)}$   
 $Y(s) = \frac{1}{s(s^2 + 20s + 10^4)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs + C}{s^2 + 20s + 10^4} = \frac{A(s^2 + 10s + 10^4) + (Bs + C)s}{(s^2 + 20s + 10^4)s}$   
 $As^2 + 20As + 10^4 A + Bs^2 + Cs = 1$   
 $\begin{cases} A + B = 0 \\ 20A + C = 0 \\ 10^4 A = 1 \end{cases} \quad \begin{aligned} A &= \frac{1}{10^4} \\ B &= -\frac{1}{10^4} \\ C &= -\frac{20}{10^4} \end{aligned}$   
 $Y(s) = \frac{1}{10^4 s} + \frac{-\frac{1}{10^4} s - \frac{20}{10^4}}{(s^2 + 20s + 10^4)} = \frac{1}{10^4 s} + \frac{-s - 20}{10^4 (s^2 + 20s + 10^4)}$   
 $\mathcal{L}^{-1}(I) = \frac{1}{10^4} u$   
 $\frac{-s - 20}{10^4 (s^2 + 20s + 10^4)} = -\frac{1}{10^4} \left( \frac{s + 10}{(s + 10)^2 + 9900} + \frac{10}{(s + 10)^2 + 9900} \right)$   
 $\mathcal{L}^{-1}(II) = -\left[ e^{-10t} (\cos(30\sqrt{11}t) + 11 \sin(30\sqrt{11}t)) / 33 \right] / 10^4$

$$y = 1/10000 - (exp(-10*t) * (cos(30*11^{1/2}*t) + (11^{1/2} * sin(30*11^{1/2}*t)) / 33)) / 10000; \quad (4)$$

Obtemos o seguinte gráfico ao plotar no Matlab:

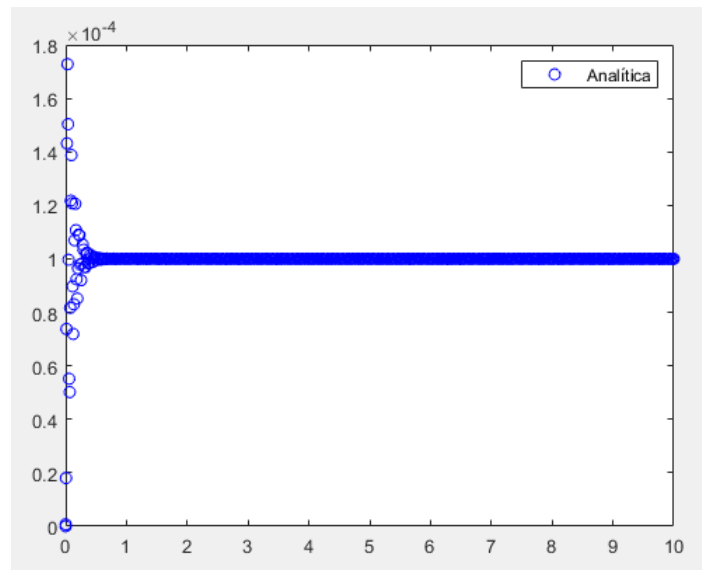
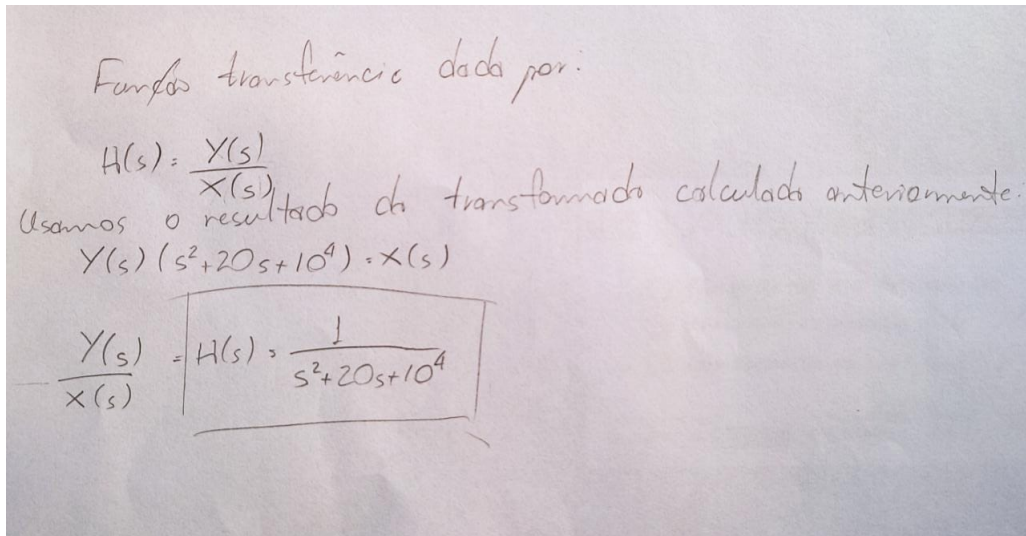


Figura 7: Gráfico resposta ao degrau

## 1.5 2ª equação - Solução simulink

A função transferência da equação é dada por  $H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$ :



Função transferência dada por:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

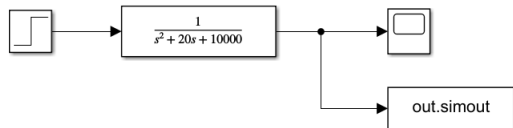
Usamos o resultado da transformada calculado anteriormente:

$$Y(s)(s^2 + 20s + 10^4) = X(s)$$
$$\frac{Y(s)}{X(s)} = H(s) = \frac{1}{s^2 + 20s + 10^4}$$

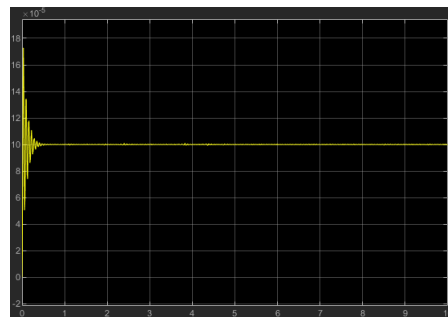
Figura 8: Cálculo da função transferência

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + 20s + 10^4} \quad (5)$$

No Simulink o diagrama de blocos com a função transferência fica da seguinte maneira:



(a) Diagrama de Blocos



(b) Saída no Scope

Figura 9: Resolução no Simulink

## 1.6 2ª equação - Analítica x Simulink

Vamos plotar as soluções analítica e pelo simulink para compará-las

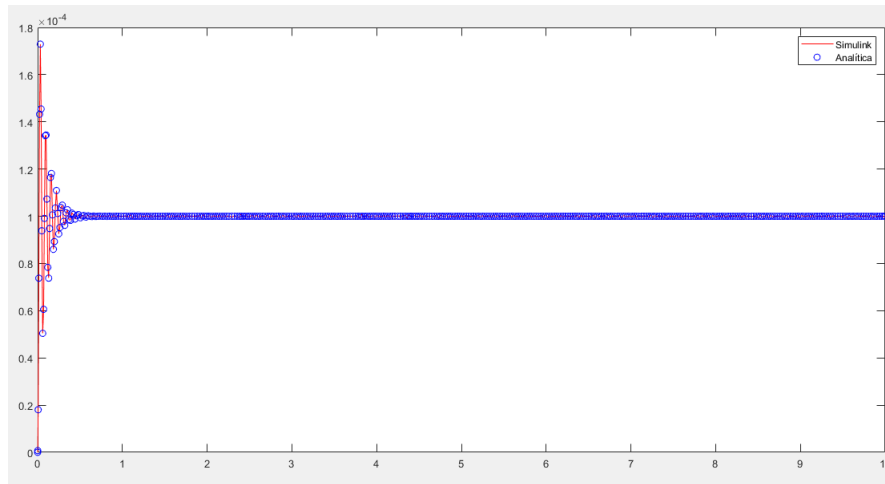


Figura 10: Gráfico Analítica x Simulink

```
Editor - C:\Users\55189\Desktop\matlab\ES601\Trab_3\eq_2_cond_nulas.m
eq_2_cond.m  eq_2_cond_nulas.m  +
1 - clc
2 -
3 - t = out.tout;
4 - y = 1/10000 - (exp(-10.*t).*(cos(30*11^(1/2).*t) + (11^(1/2).*sin(30*11^(1/2).*t))/33))/10000;
5 -
6 - plot(out.tout, out.simout, "x-", t, y, "bo");
7 - legend("Simulink", "Analítica")
```

Figura 11: Script Matlab

Conseguimos o mesmo plot para ambas as soluções, como era esperado.

## 2 Resposta de sistemas de primeira e segunda ordem - Com condições iniciais não nulas

### 2.1 1ª equação - Solução analítica

Queremos calcular a resposta ao degrau da seguinte equação diferencial com condições iniciais não nulas:

$$0.1\dot{y} + y = u; y(0) = 10 \quad (6)$$

Resolvendo a partir da transformada de Laplace temos:

The image shows a handwritten derivation on a piece of paper. It starts with the differential equation  $0.1\dot{y} + y = u$  and the initial condition  $y(0) = 10$ . A note in Portuguese says "\* Condição inicial não nula". The derivation proceeds as follows:

$$\begin{aligned}
 0.1(s \cdot Y(s) - y(0)) + Y(s) &= \frac{1}{s} \\
 0.1(s \cdot Y(s) - 10) + Y(s) &= \frac{1}{s} \\
 0.1s \cdot Y(s) - 1 + Y(s) &= \frac{1}{s} \\
 Y(s)(0.1s + 1) &= \frac{1}{s} + 1 \\
 Y(s) &= \left( \frac{1}{s} + 1 \right) \left( \frac{1}{0.1s + 1} \right) = \frac{1}{s(0.1s + 1)} + \frac{1}{0.1s + 1} = \frac{1}{s(0.1s + 1)} + \frac{10}{s + 10} \\
 \mathcal{L}^{-1}(Y(s)) &= u(t) - e^{-10t} + 10e^{-10t} = u(t) + 9e^{-10t}
 \end{aligned}$$

Figura 12: Condição Inicial não Nula

$$y = u(t) + 9e^{-10t} \quad (7)$$

Obtemos o seguinte gráfico ao plotar no Matlab:



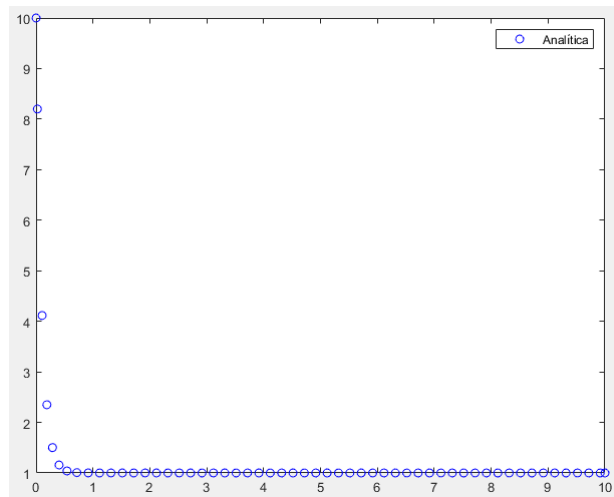
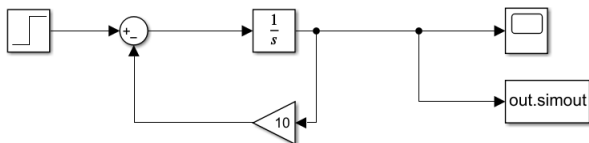


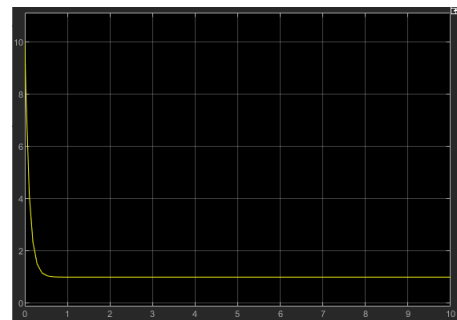
Figura 13: Gráfico resposta ao degrau

## 2.2 1ª equação - Solução simulink

O diagrama de blocos construído no Simulink será:



(a) Diagrama de Blocos



(b) Saída no Scope

Figura 14: Resolução no Simulink

## 2.3 1ª equação - Analítica x Simulink

Vamos plotar as soluções analítica e pelo simulink para compará-las

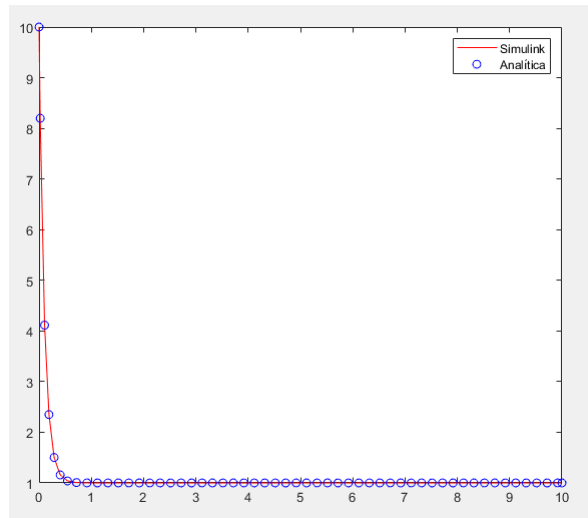


Figura 15: Gráfico Analítica x Simulink

```
Editor - C:\Users\55189\Desktop\matlab\ES601\Trab_3\eq_1_cond.m
eq_1_cond.m  x  +
1 -  clc
2 -
3 -  t = out.tout
4 -  y = 1 + 9*exp(-10*t);
5 -
6 -  plot(out.tout, out.simout, "r-", t, y, "bo");
7 -  legend("Simulink", "Analítica")
```

Figura 16: Script Matlab

Conseguimos o mesmo plot para ambas as soluções, como era esperado.

## 2.4 2ª equação - Solução analítica

Queremos calcular a resposta ao degrau da seguinte equação diferencial

$$\ddot{y} + 20\dot{y} + 10^4 = u; y(0) = 0, \dot{y}(0) = 10 \quad (8)$$

Resolvendo a partir da transformada de Laplace temos:

Handwritten solution of the differential equation  $\ddot{y} + 20\dot{y} + 10^4 y = u$  with initial conditions  $y(0) = 0$  and  $\dot{y}(0) = 10$ . The solution involves Laplace transforms and partial fraction decomposition.

Equation:  $\ddot{y} + 20\dot{y} + 10^4 y = u$  (Condition: mais nulas)

Initial conditions:  $y(0) = 0; \dot{y}(0) = 10$

Applying Laplace:

$$s^2 Y(s) - s y(0) - \dot{y}(0) + 20(s Y(s) - y(0)) + 10^4 Y(s) = \frac{1}{s}$$

$$s^2 Y(s) - 10 + 20s Y(s) + 10^4 Y(s) = \frac{1}{s}$$

$$Y(s) (s^2 + 20s + 10^4) = \frac{1}{s} + 10$$

$$Y(s) = \left( \frac{1}{s} + 10 \right) \frac{1}{s^2 + 20s + 10^4} = \frac{s+10}{s(s^2 + 20s + 10^4)}$$

Partial fraction decomposition:

$$Y(s) = \frac{s+10}{s(s^2 + 20s + 10^4)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{(s^2 + 20s + 10^4)}$$

$$As^2 + 20As + 10^4 A + Bs^2 + Cs = s + 10$$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ 20A+C=1 \\ 10^4 A=10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 10^{-4} \\ B = -10^{-4} \\ C = 0.998 \end{cases}$$

$$Y(s) = \frac{10^{-4}}{s} + \frac{-10^{-4}s + 0.998}{s^2 + 20s + 10^4}$$

Inverse Laplace transform:

$$\mathcal{L}^{-1}(I) = \frac{1}{10^4} u$$

$$\frac{-10^{-4}s + 0.998}{s^2 + 20s + 10^4} = \frac{1}{10^4} \cdot \frac{-s + 9980}{(s+10)^2 + 9900} = \frac{1}{10^4} \cdot \frac{s+10}{(s+10)^2 + 9900} + \frac{9990}{10000} \cdot \frac{1}{(s+10)^2 + 9900}$$

$$\mathcal{L}^{-1}(II) = \frac{1}{10^4} \mathcal{L}^{-1} \left( \frac{s+10}{(s+10)^2 + 9900} \right) + \frac{999}{1000} \mathcal{L}^{-1} \left( \frac{1}{(s+10)^2 + 9900} \right) = \frac{1}{10^4} e^{-10t} \cos(30\sqrt{11}t) + \frac{999}{1000} \cdot \frac{1}{30\sqrt{11}} e^{-10t} \sin(30\sqrt{11}t)$$

$$\mathcal{L}^{-1}(Y(s)) = \mathcal{L}^{-1}(I) + \mathcal{L}^{-1}(II) = \frac{1}{10^4} u - \frac{1}{10^4} e^{-10t} \cos(30\sqrt{11}t) + \frac{333}{10^4 \sqrt{11}} e^{-10t} \sin(30\sqrt{11}t)$$

$$= \frac{1}{10^4} u - \frac{e^{-10t}}{10^4} \left[ \cos(30\sqrt{11}t) - \frac{333}{\sqrt{11}} \sin(30\sqrt{11}t) \right]$$

$$y = 1/10000 - (exp(-10*t) * (cos(30*11^{1/2}*t) - (333*11^{1/2} * sin(30*11^{1/2}*t))/11)) / 10000; \quad (9)$$

Obtemos o seguinte gráfico ao plotar no Matlab:

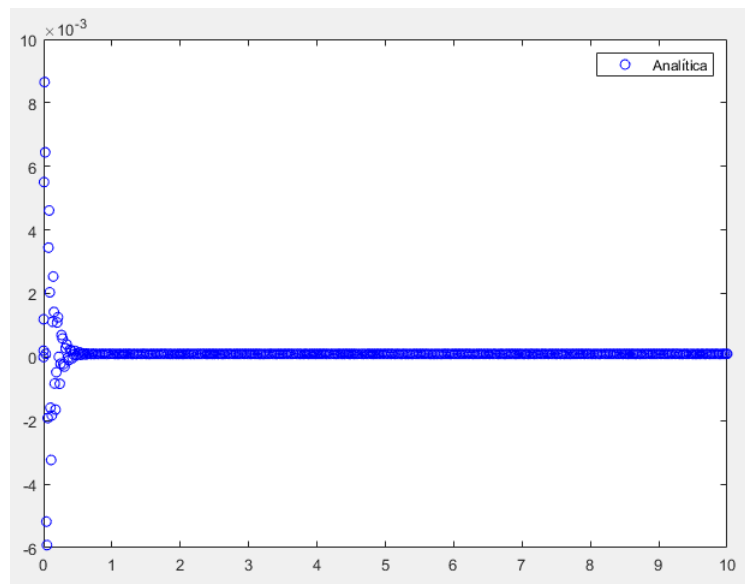


Figura 17: Gráfico resposta ao degrau

## 2.5 2ª equação - Solução simulink

A solução por diagrama de blocos é dado por:

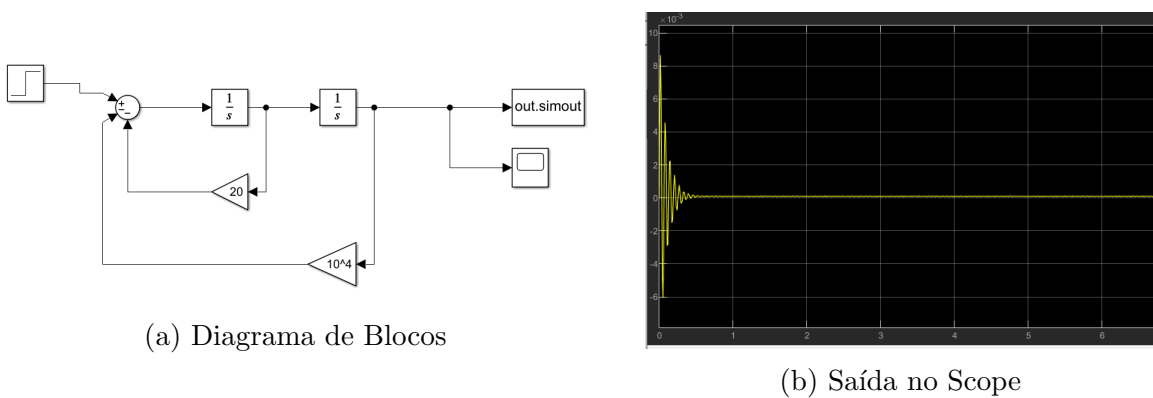


Figura 18: Resolução no Simulink

## 2.6 2ª equação - Analítica x Simulink

Vamos plotar as soluções analítica e pelo simulink para compará-las

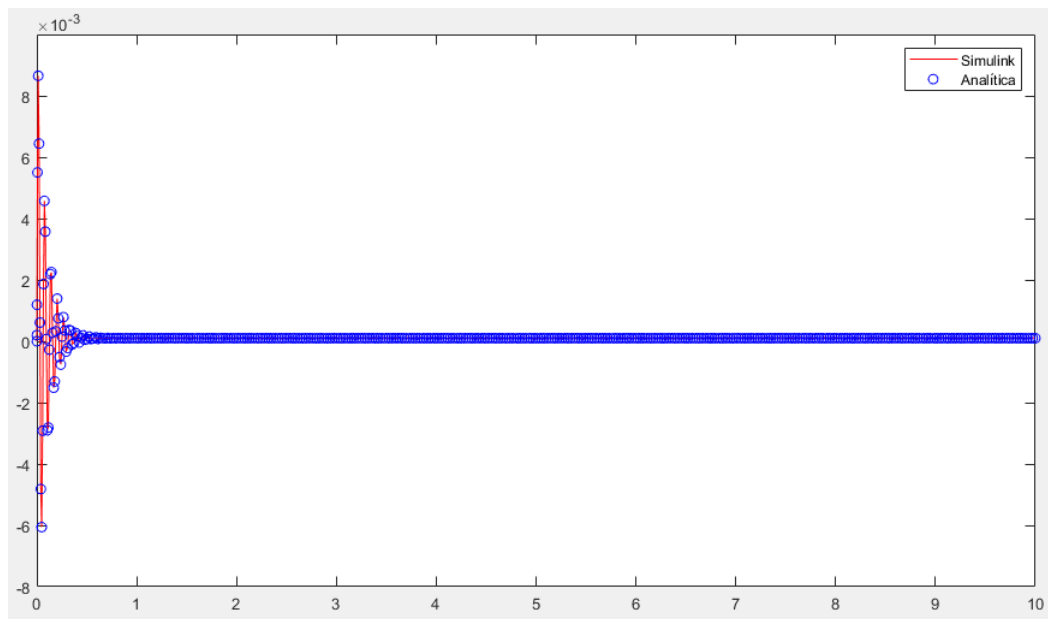


Figura 19: Gráfico Analítica x Simulink

```
Editor - C:\Users\55189\Desktop\matlab\ES601\Trab_3\eq_2_cond.m
eq_1_cond.m  eq_2_cond.m  +
1 -  clc
2 -
3 -  t = out.tout;
4 -  y = 1/10000 - (exp(-10.*t).*(cos(30*11^(1/2).*t) - (333*11^(1/2).*sin(30*11^(1/2).*t))/11))/10000;
5 -  plot(out.tout, out.simout, "r-", t, y, "bo");
6 -  legend("Simulink", "Analitica")
```

Figura 20: Script Matlab

Conseguimos o mesmo plot para ambas as soluções, como era esperado.