

Exponencial matricial e simulação com representação de estados

Erik Yuji Goto

RA: 234009

1 Sistema de Segunda Ordem

A equação do movimento escrita na forma padronizada é:

$$\ddot{q} + 2\xi\omega_n\dot{q} + \omega_n^2q = \omega_n^2u(t) \quad (1)$$

Substituindo pelos valores do enunciado:

$$\ddot{q} + 10\dot{q} + 10^4q = 0 \quad (2)$$

Com isso podemos transformar a equação para a forma matricial:

Definindo um conjunto de variáveis de estado:

$$x_1(t) = q \quad ; \quad x_2(t) = \dot{q}$$
$$x = \begin{bmatrix} q \\ \dot{q} \end{bmatrix}$$

Derivando x :

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix}$$

Substituindo na eq. original:

$$\begin{cases} \dot{x}_2 + 10x_2 + 10^4x_1 = 0 \\ \dot{x}_1 = x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_2 = -10x_2 - 10^4x_1 \\ \dot{x}_1 = x_2 \end{cases}$$
$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10^4 & -10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = Ax$$

Portanto,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10^4 & -10 \end{bmatrix}$$

Figura 1: Encontrando a matriz A

Portanto,

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (3)$$

Onde,

$$Bu = 0 \quad (4)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10^4 & -10 \end{bmatrix} \quad (5)$$

2 Calculando a resposta livre

A resposta livre a uma condição inicial é dada por:

$$x(t) = e^{At}x_0 \quad (6)$$

Portanto, precisamos calcular e^{At}

2.1 Por Autovalores

Handwritten mathematical work showing the calculation of eigenvalues and eigenvectors for a system matrix A .

Step 1: Finding the characteristic equation.

$$\det(A - \lambda I) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -10^4 & -10 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda(10 + \lambda) + 10^4 = 0$$

Step 2: Solving for the eigenvalues.

$$\lambda_1 = -5 + 99,87i$$

$$\lambda_2 = -5 - 99,87i$$

Step 3: Finding the eigenvectors.

Encontrando os autovetores:

For λ_1 :

$$\begin{bmatrix} +5 - 99,87i & 1 \\ -10^4 & -10 + 5 - 99,87i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = 0$$

For λ_2 :

$$\begin{bmatrix} +5 + 99,87i & 1 \\ -10^4 & -10 + 5 + 99,87i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = 0$$

Step 4: Calculating the eigenvectors.

$$v_1 = \begin{bmatrix} -5 \cdot 10^{-4} - 1 \cdot 10^{-2}i \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$v_2 = \begin{bmatrix} -5 \cdot 10^{-4} + 1 \cdot 10^{-2}i \\ 1 \end{bmatrix}$$

Step 5: Constructing the matrices Λ and Σ .

Com isso temos:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -5 + 99,87i & 0 \\ 0 & -5 - 99,87i \end{bmatrix} \Rightarrow e^{\Lambda t} = \begin{bmatrix} e^{(-5 + 99,87i)t} & 0 \\ 0 & e^{(-5 - 99,87i)t} \end{bmatrix}$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} -5 \cdot 10^{-4} - 1 \cdot 10^{-2}i & -5 \cdot 10^{-4} + 1 \cdot 10^{-2}i \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \Sigma^{-1} = \begin{bmatrix} 50,07i & 0,5 + 2,5 \cdot 10^{-2}i \\ -50,07i & 0,5 - 2,5 \cdot 10^{-2}i \end{bmatrix}$$

Figura 2: Autovalores

Realizando o cálculo de e^{At} pelo matlab:

$$\begin{aligned} & \text{syms } t; \\ & [U, L] = \text{eig}(A); \\ & e^{At} = U * \text{diag}(\exp(\text{diag}(L * t))) * \text{inv}(U) \end{aligned}$$

$$e^{At} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad (7)$$

Onde,

$$a = \exp(t * (-5 + 399^{(1/2)} * 5i)) * (\frac{1}{2} - 0.0250i) + \exp(-t * (5 + 399^{(1/2)} * 5i)) * (\frac{1}{2} + 0.0250i)$$

$$b = -\exp(t * (-5 + 399^{(1/2)} * 5i)) * (10001^{(1/2)} / 200 + 0.0250i) * (5 * 10^{-4} + 0.01i) - \exp(-t * (5 + 399^{(1/2)} * 5i)) * (10001^{(1/2)} / 200 - 0.0250i) * (5 * 10^{-4} - 0.01i)$$

$$c = 10001^{(1/2)} * \exp(t * (-5 + 399^{(1/2)} * 5i)) * 0.5i - 10001^{(1/2)} * \exp(-t * (5 + 399^{(1/2)} * 5i)) * 0.5i$$

$$d = (100 * 10001^{(1/2)} * \exp(t * (-5 + 399^{(1/2)} * 5i)) * (10001^{(1/2)} / 200 + 0.025i)) / 10001 + (100 * 10001^{(1/2)} * \exp(-t * (5 + 399^{(1/2)} * 5i)) * (10001^{(1/2)} / 200 - 0.025i)) / 10001$$

2.2 Por Laplace

Usaremos a relação $e^{At} = L^{-1}[(sI - A)^{-1}]$

Handwritten derivation for the Laplace transform method:

$$(sI - A) = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 10^4 & s + 10 \end{bmatrix} \Rightarrow (sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{s+10}{s^2+10s+10^4} & \frac{1}{s^2+10s+10^4} \\ \frac{-10^4}{s^2+10s+10^4} & \frac{s}{s^2+10s+10^4} \end{bmatrix}$$

Com isso, temos:

$$e^{At} = L^{-1}[(sI - A)^{-1}] = \begin{bmatrix} e^{-st} \cdot \cos(99,87 \cdot t) + 0,05 \cdot \sin(99,87 \cdot t) & \frac{19,98 \cdot e^{-st} \cdot \sin(99,87 \cdot t)}{1995} \\ \frac{-4 \cdot 10^4 \cdot e^{-st} \cdot \sin(99,87 \cdot t)}{399} & \frac{e^{-st} \cdot (\cos(99,87 \cdot t) - 19,97 \cdot \sin(99,87 \cdot t))}{399} \end{bmatrix}$$

Figura 3: Laplace

2.3 Por Cayley-Hamilton

Usamos a equação $e^{At} = \sum_{l=0}^{n-1} \alpha_l A^l$ Para encontrar as constantes α_l resolvemos o sistema de equações:

Por Cayley-Hamilton:

Usamos a expressão $e^{At} = \sum_{l=0}^{n-1} \alpha_l(t) A^l$

$$\begin{bmatrix} 1 & -5+99,87i \\ 1 & -5-99,87i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{(-5+99,87i)t} \\ e^{(-5-99,87i)t} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-10t} \cdot e^{\frac{t(5-9987i)}{100}} \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{250i}{9987}\right) + e^{\frac{t(5+9987i)}{100}} \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{250i}{9987}\right) \\ e^{-10t} \cdot e^{\frac{t(5-9987i)}{100}} \cdot \frac{50i}{9987} - e^{\frac{t(5+9987i)}{100}} \cdot \frac{50i}{9987} \end{bmatrix}$$

Figura 4: Cayley-Hamilton

Pelo Matlab, calculamos $e^{At} = \alpha_0 I + \alpha_1 A$:

$$e^{At} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad (8)$$

Onde,

$$a = \exp(-10 * t) * (\exp(t * (5 - 9987i/100)) * (1/2 + 250i/9987) + \exp(t * (5 + 9987i/100)) * (1/2 - 250i/9987))$$

$$b = \exp(-10 * t) * ((\exp(t * (5 - 9987i/100)) * 50i)/9987 - (\exp(t * (5 + 9987i/100)) * 50i)/9987)$$

$$c = -10000 * \exp(-10 * t) * ((\exp(t * (5 - 9987i/100)) * 50i)/9987 - (\exp(t * (5 + 9987i/100)) * 50i)/9987)$$

$$d = \exp(t * (-5 - 9987i/100)) * (1/2 - 250i/9987) + \exp(t * (-5 + 9987i/100)) * (1/2 + 250i/9987)$$

2.4 Por expm

Pelo comando $\text{expm}(A * t)$ é possível calcular a exponencial matricial, portanto a resposta livre:

$$e^{At} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad (9)$$

Onde,

$$a = \exp(-5 * t - 399^{(1/2)} * t * 5i)/2 + \exp(-5 * t + 399^{(1/2)} * t * 5i)/2 + (399^{(1/2)} * \exp(-5 * t - 399^{(1/2)} * t * 5i) * 1i)/798 - (399^{(1/2)} * \exp(-5 * t + 399^{(1/2)} * t * 5i) * 1i)/798$$

$$b = (399^{(1/2)} * \exp(-5 * t - 399^{(1/2)} * t * 5i) * 1i)/3990 - (399^{(1/2)} * \exp(-5 * t + 399^{(1/2)} * t * 5i) * 1i)/3990$$

$$c = -(399^{(1/2)} * \exp(-5 * t - 399^{(1/2)} * t * 5i) * 1000i)/399 + (399^{(1/2)} * \exp(-5 * t + 399^{(1/2)} * t * 5i) * 1000i)/399$$

$$d = \exp(-5 * t - 399^{(1/2)} * t * 5i) / 2 + \exp(-5 * t + 399^{(1/2)} * t * 5i) / 2 - (399^{(1/2)} * \exp(-5 * t - 399^{(1/2)} * t * 5i) * 1i) / 798 + (399^{(1/2)} * \exp(-5 * t + 399^{(1/2)} * t * 5i) * 1i) / 798$$

3 Simulink e Resposta forçada

Primeiro vamos definir as matrizes A, B, C e D.
A foi definido anteriormente. Já a matriz B usaremos o fato de que:

$$\ddot{q} = \omega_n^2 u(t) - 2\xi\omega_n \dot{q} - \omega_n^2 q \quad (10)$$

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (11)$$

Portanto,

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_n^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 10^4 \end{bmatrix} \quad (12)$$

Suponha que a resposta desejada seja a posição e a velocidade, então as matrizes C e D ficam sendo:

$$C = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (14)$$

Para uma entrada degrau $u(t) = \mu(t)$, e condições iniciais $x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$ temos o seguinte diagrama de blocos no simulink:

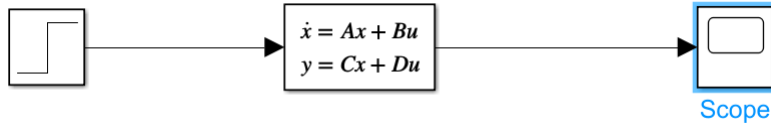


Figura 5: Simulink

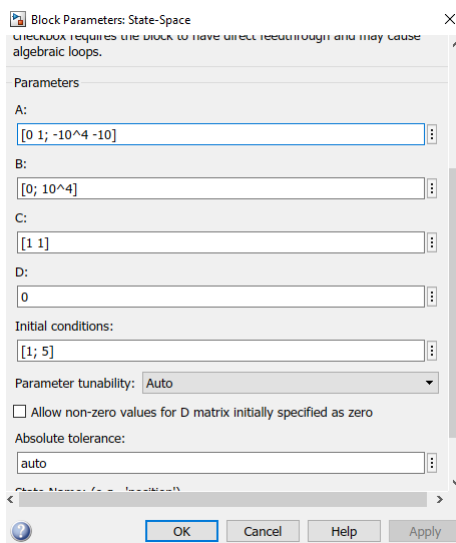


Figura 6: Configurações State-Space

Com a seguinte resposta:

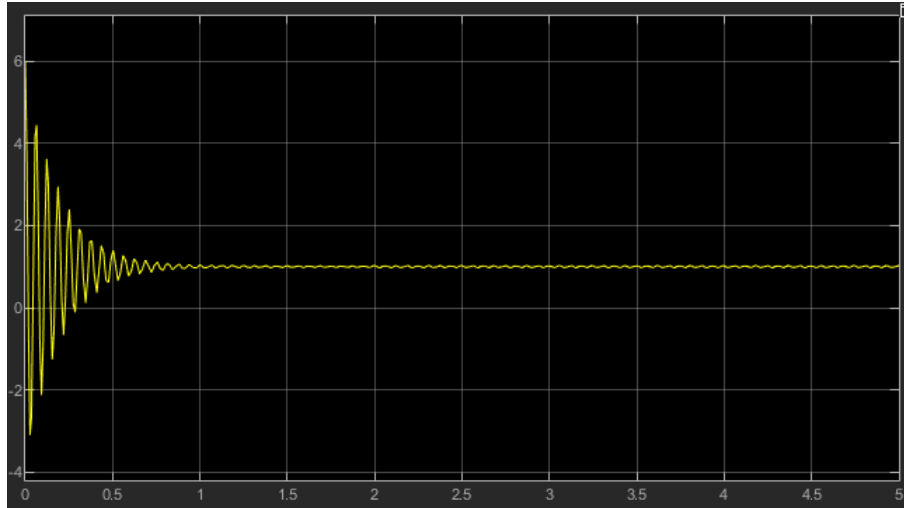


Figura 7: Resposta ao degrau

4 Funções ss, ss2tf e tf2ss

Pelo comando ss2tf conseguimos encontrar o denominador e o numerador da função transferência, usando como parâmetros as matrizes A, B, C e D:

```
19 %Conversão para a função transferência
20 [N, D] = ss2tf(A, B, C, D);
21 H = tf(N, D)
```

Figura 8: Função ss2tf

Disso, temos que a função transferência é:

$$H = \frac{1000s + 10^4}{s^2 + 10s + 10^4} \quad (15)$$

Note que, pela propriedade da função transferência H não ser possível definir *valores iniciais*, não conseguimos montar um diagrama de blocos para comparar os resultados usando o bloco *Função transferência* e o bloco *State-Space*, pois neste último definimos os valores iniciais $x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$.

Caso já tivermos o valor da função transferência, e queremos resolver usando as matrizes de estado usamos o comando tf2ss:

```
23 %A partir da função transferência conseguir o valor das matrizes
24 [a, b, c, d] = tf2ss(N,D)
```

Figura 9: Função tf2ss

Ao executar esta linha, o resultado são as matrizes de estado:

```

a =

    1.0e+04 *

    -0.0010    -1.0000
    0.0001         0

b =

     1
     0

c =

    1.0e+04 *

    1.0000    1.0000

d =

     0

```

Figura 10: Matrizes de Estado

5 Usando o comando lsim

Uma maneira mais simples de encontrar a resposta do sistema sabendo as matrizes é pelo comando lsim:

```

script.m  x +
1  %Matrizes
2  A = [0 1; -10^4 -10];
3  B = [0; 10^4];
4  C = [1 1];
5  D = [0];
6  %Condição inicial
7  x0 = [1; 5];
8
9  %Sistema
10 sys = ss(A, B, C, D)
11 %Entrada degrau
12 sympref('HeavisideAtOrigin',1);
13 t = 0:0.01:10;
14 u = heaviside(t);
15
16 y = lsim(sys, u, t, x0);
17 plot(t, y);
18
19

```

Figura 11: Solução usando lsim

E tem como resultado o seguinte plot

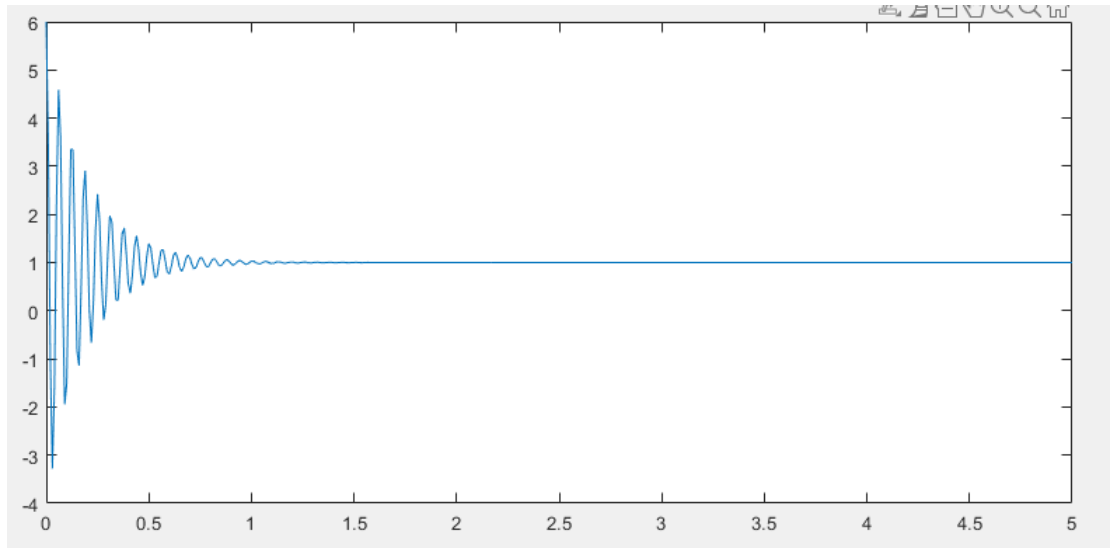


Figura 12: Plot usando lsim

5.1 Comparação Simulink x lsim

Usando o simout conseguimos comparar o gráfico gerado pelo Simulink e pelo lsim

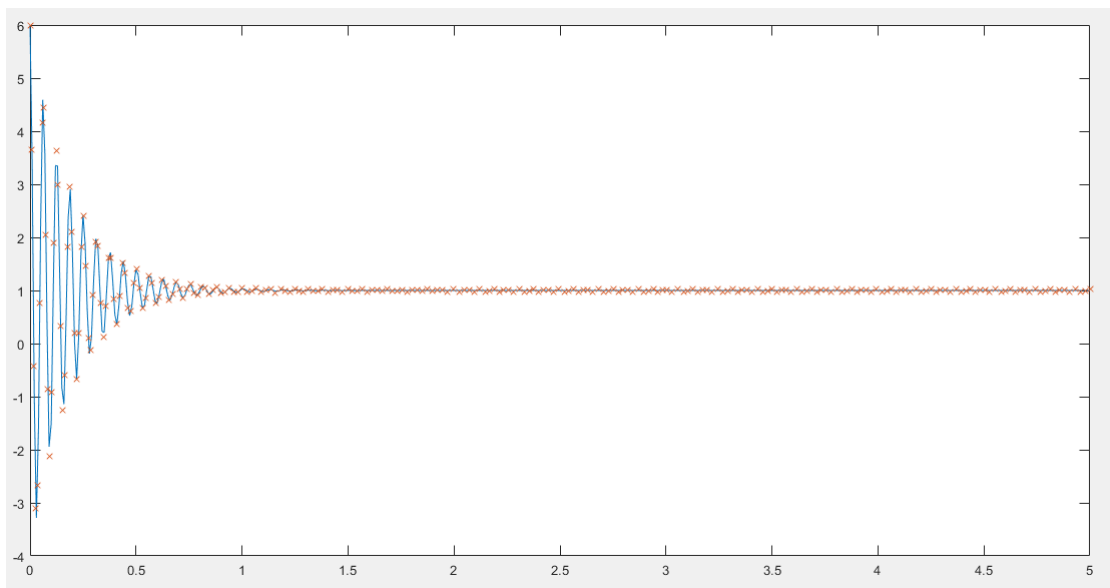


Figura 13: Plot comparação