Exponencial matricial e simulação com representação de estados

Erik Yuji Goto

RA: 234009

1 Sistema de Segunda Ordem

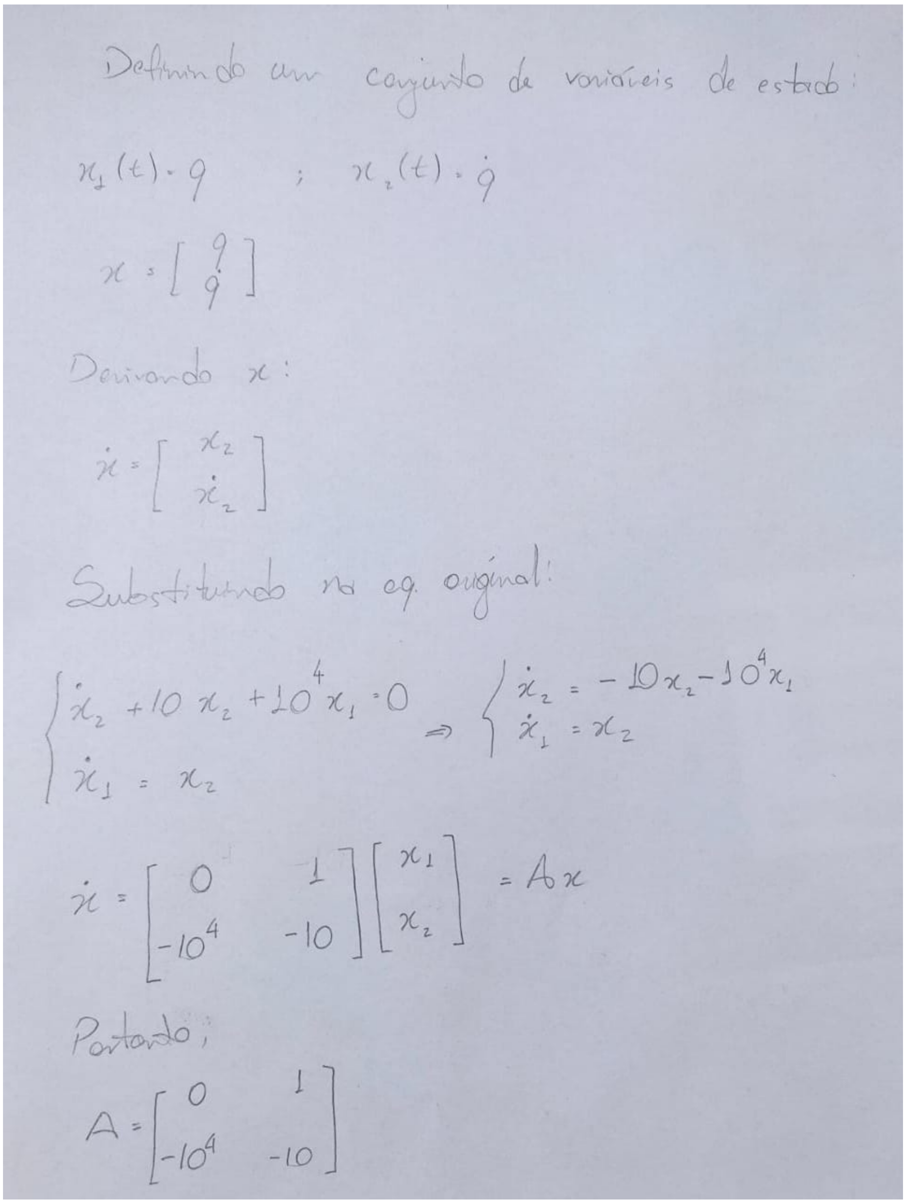
A equação do movimento escrita na forma padronizada é:

$$\ddot{q} + 2\xi\omega_n\dot{q} + \omega_n^2 q = \omega_n^2 u(t) \tag{1}$$

Substituindo pelos valores do enunciado:

$$\ddot{q} + 10\dot{q} + 10^4 q = 0 \tag{2}$$

Com isso podemos transformar a equação para a forma matricial:



Definindo um conjunto de variáveis de estado:

$x_1(t) = q$; $x_2(t) = \dot{q}$

$x = \begin{bmatrix} q \\ \dot{q} \end{bmatrix}$

Derivando x:

$\dot{x} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix}$

Substituindo na eq. original:

$$\begin{cases} \dot{x}_2 + 10x_2 + 10^4 x_1 = 0 \\ \dot{x}_1 = x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_2 = -10x_2 - 10^4 x_1 \\ \dot{x}_1 = x_2 \end{cases}$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10^4 & -10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = Ax$$

Portanto;

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10^4 & -10 \end{bmatrix}$$

Figura 1: Encontrando a matriz A

Portanto,

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{3}$$

Onde,

$$Bu = 0 \tag{4}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10^4 & -10 \end{bmatrix} \tag{5}$$

2 Calculando a resposta livre

A resposta livre a uma condição inicial é dada por:

$$x(t) = e^{At} x_0 \tag{6}$$

Portanto, precisamos calcular e^{At}

2.1 Por Autovalores

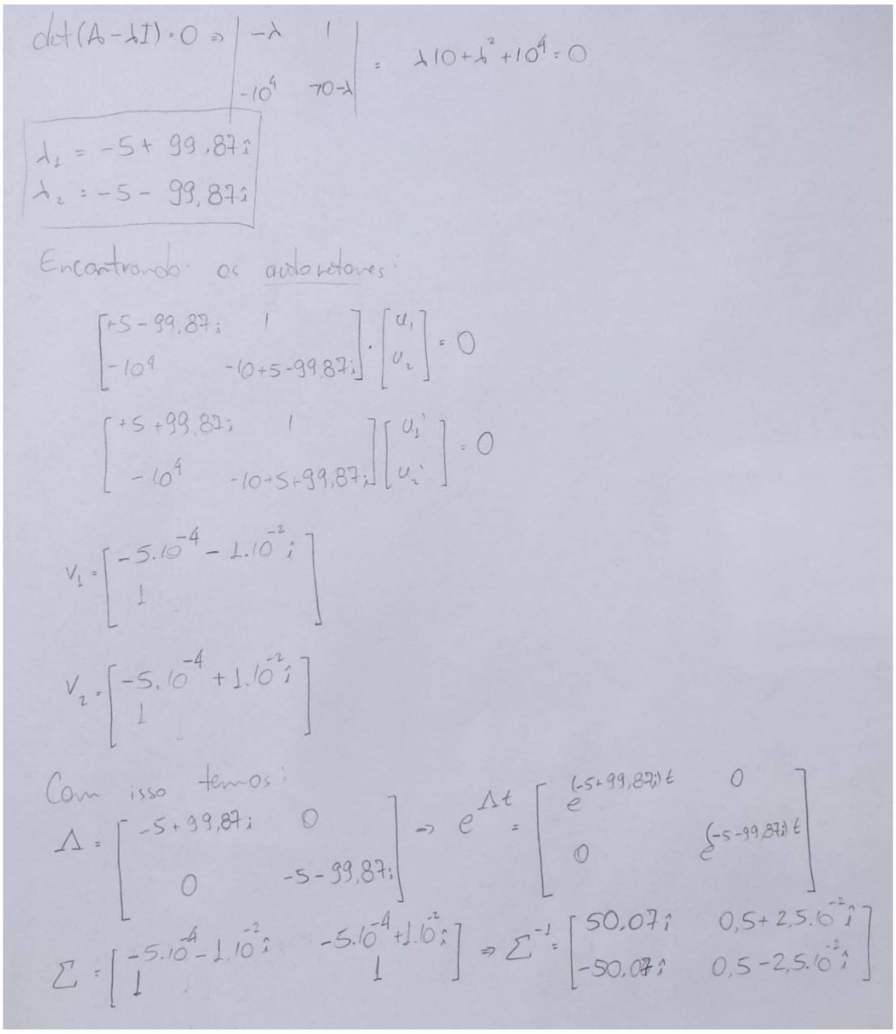


Figura 2: Autovalores

Realizando o cálculo de e^{At} pelo matlab:

$$syms\ \texttt{t};$$
$$[U, L] = eig(A);$$
$$e^{At} = U * diag(exp(diag(L * t))) * inv(U)$$

$$e^{At} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \tag{7}$$

Onde,

$a = exp(t*(-5+399^{(1/2)}*5i))*(\frac{1}{2}-0.0250i)+exp(-t*(5+399^{(}1/2)*5i))*(\frac{1}{2}+0.0250i)$

$b = -exp(t*(-5+399^{(}1/2)*5i))*(10001^{(1/2)}/200+0.0250i)*(5*10^{-4}+0.01i) - exp(-t*(5+399^{(1/2)}*5i))*(10001^{(1/2)}/200-0.0250i)*(5*10^{-4}-0.01i)$

$c = 10001^{(1/2)}*exp(t*(-5+399^{(1/2)}*5i))*0.5i - 10001^{(1/2)}*exp(-t*(5+399^{(}1/2)*5i))0.5i$

$d = (100*10001^{(}1/2)*exp(t*(-5+399^{(}1/2)*5i))*(10001^{(}1/2)/200+0.025i))/10001 + (100*10001^{(}1/2)*exp(-t*(5+399^{(}1/2)*5i))*(10001^{(}1/2)/200-0.025i))/10001$

2.2 Por Laplace

Usaremos a relação $e^{At} = L^{-1}[(sI - A)^{-1}]$

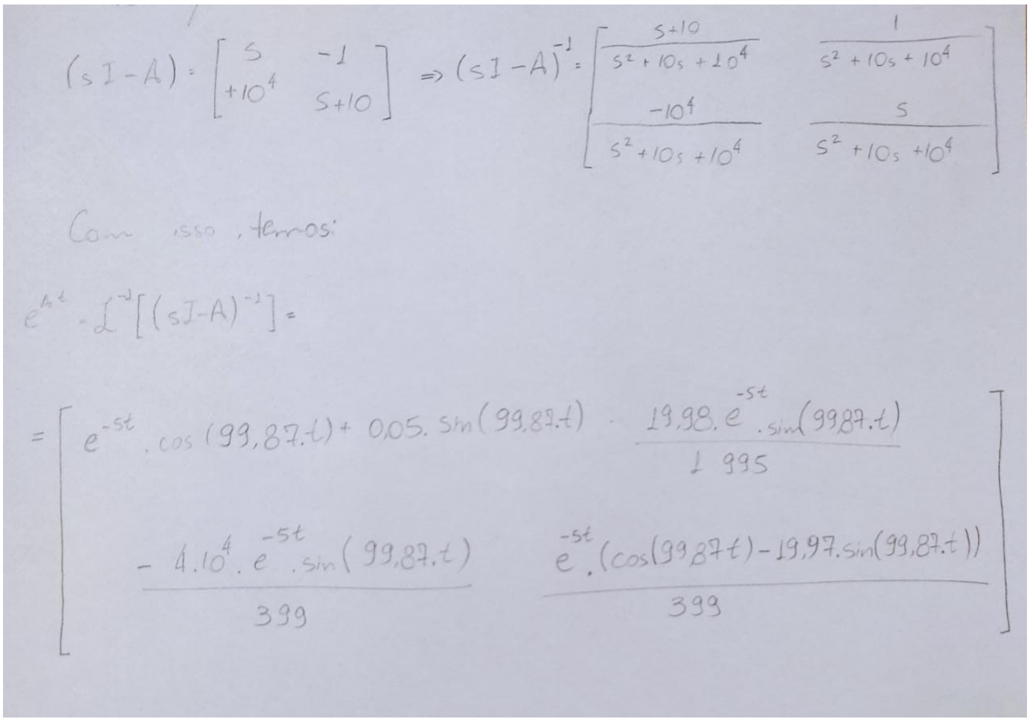
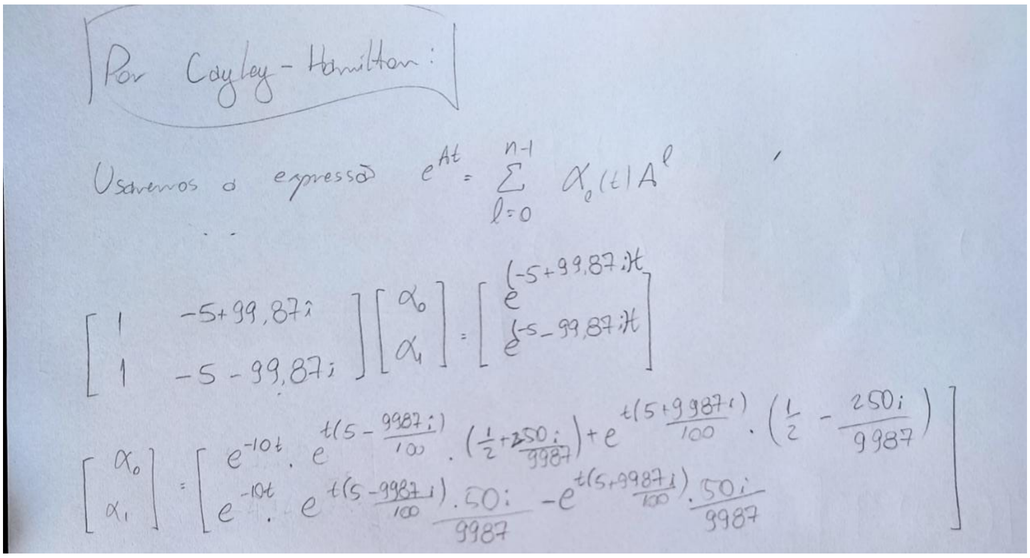


Figura 3: Laplace

2.3 Por Cayley-Hamilton

Usamos a equação $e^{At} = \sum_{l=0}^{n-1} \alpha_l A^l$ Para encontrar as constantes α_l resolvemos o sistema de equações:



Por Cayley-Hamilton:

Usaremos a expressão $e^{At} = \sum_{l=0}^{n-1} \alpha_l(t) A^l$,

$$\begin{bmatrix} 1 & -5+99,87i \\ 1 & -5-99,87i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{(-5+99,87i)t} \\ e^{(-5-99,87i)t} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-10t} . e^{t(5-\frac{9987i}{100})} . (\frac{1}{2}+\frac{250i}{9987}) + e^{t(5+\frac{9987i}{100})} . (\frac{1}{2}-\frac{250i}{9987}) \\ e^{-10t} . e^{t(5-\frac{9987i}{100})} . \frac{50i}{9987} - e^{t(5+\frac{9987i}{100})} . \frac{50i}{9987} \end{bmatrix}$$

Figura 4: Cayley-Hamilton

Pelo Matlab, calculamos $e^{At} = \alpha_0 I + \alpha_1 A$:

$$e^{At} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \tag{8}$$

Onde,
$a = exp(-10*t)*(exp(t*(5-9987i/100))*(1/2+250i/9987)+exp(t*(5+9987i/100))*(1/2-250i/9987))$

$b = exp(-10*t)*((exp(t*(5-9987i/100))*50i)/9987-(exp(t*(5+9987i/100))*50i)/9987)$

$c = -10000*exp(-10*t)*((exp(t*(5-9987i/100))*50i)/9987-(exp(t*(5+9987i/100))*50i)/9987)$

$d = exp(t*(-5-9987i/100))*(1/2-250i/9987)+exp(t*(-5+9987i/100))*(1/2+250i/9987)$

2.4 Por expm

Pelo comando *expm(A*t)* é possível calcular a exponencial matricial, portanto a resposta livre:

$$e^{At} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \tag{9}$$

Onde,
$a = exp(-5*t-399^{(1/2)}*t*5i)/2+exp(-5*t+399^{(1/2)}*t*5i)/2+(399^{(1/2)}*exp(-5*t-399^{(1/2)}*t*5i)*1i)/798-(399^{(1/2)}*exp(-5*t+399^{(1/2)}*t*5i)*1i)/798$

$b = (399^{(1/2)}*exp(-5*t-399^{(1/2)}*t*5i)*1i)/3990-(399^{(1/2)}*exp(-5*t+399^{(1/2)}*t*5i)*1i)/3990$

$c = -(399^{(1/2)}*exp(-5*t-399^{(1/2)})*t*5i)*1000i)/399+(399^{(1/2)}*exp(-5*t+399^{(1/2)}*t*5i)*1000i)/399$

$d = exp(-5*t-399^{(1/2)}*t*5i)/2+exp(-5*t+399^{(1/2)}*t*5i)/2-(399^{(1/2)}*exp(-5*t-399^{(1/2)}*t*5i)*1i)/798+(399^{(1/2)}*exp(-5*t+399^{(1/2)}*t*5i)*1i)/798$

3 Simulink e Resposta forçada

Primeiro vamos definir as matrizes A, B, C e D.
A foi definido anteriormente. Já a matriz B usaremos o fato de que:

$$\ddot{q} = \omega_n^2 u(t) - 2\xi\omega_n \dot{q} - \omega_n^2 q \tag{10}$$

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{11}$$

Portanto,

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_n^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 10^4 \end{bmatrix} \tag{12}$$

Suponha que a resposta desejada seja a posição e a velocidade, então as matrizes C e D ficam sendo:

$$C = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{13}$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{14}$$

Para uma entrada degrau $u(t) = \mu(t)$, e condições iniciais $x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$ temos o seguinte diagrama de blocos no simulink:

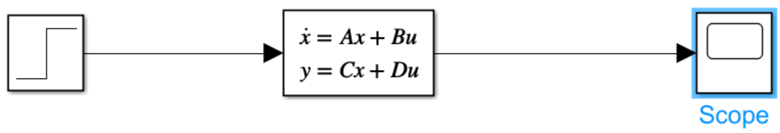


Figura 5: Simulink

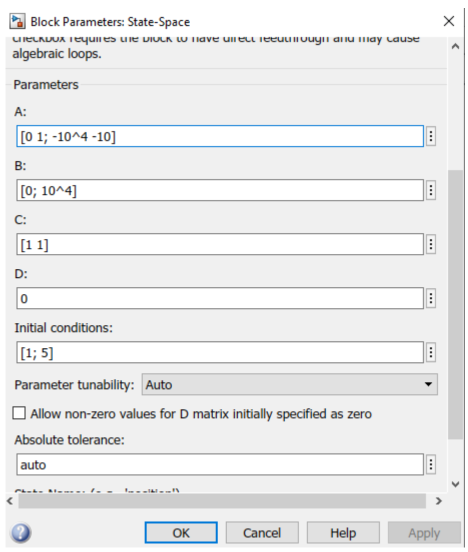


Figura 6: Configurações State-Space

Com a seguinte resposta:

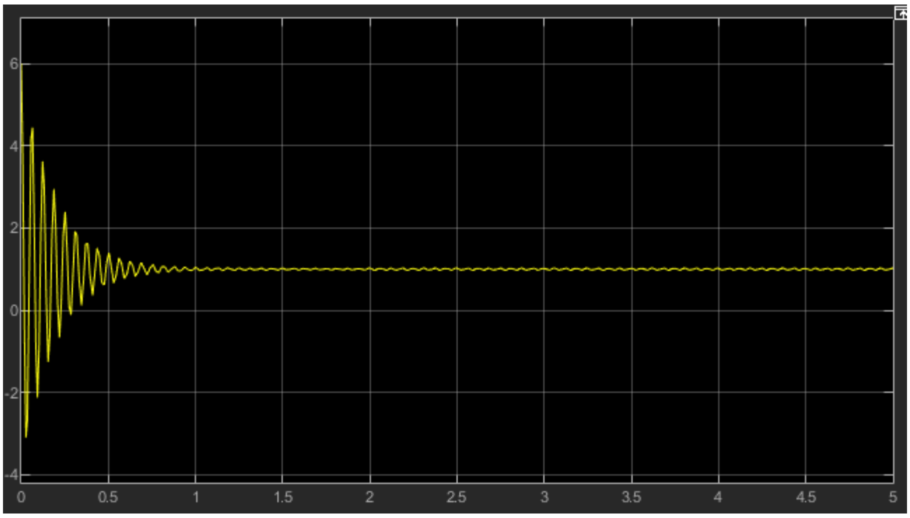


Figura 7: Resposta ao degrau

4 Funções ss, ss2tf e tf2ss

Pelo comando ss2tf conseguimos encontrar o denominador e o numerador da função transferência, usando como parâmetros as matrizes A, B, C e D:

```
%Conversão para a função transferência
[N, D] = ss2tf(A, B, C, D);
H = tf(N, D)
```

Figura 8: Função ss2tf

Disso, temos que a função transferência é:

$$H = \frac{1000s + 10^4}{s^2 + 10s + 10^4} \tag{15}$$

Note que, pela propriedade da função transferência H não ser possível definir *valores iniciais* , não conseguimos montar um diagrama de blocos para comparar os resultados usando o bloco *Função transferência* e o bloco *State-Space*, pois neste último definimos os valores iniciais $x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$.

Caso já tivermos o valor da função transferência, e queremos resolver usando as matrizes de estado usamos o comando tf2ss:

```
%A partir da função transferência conseguir o valor das matrizes
[a, b, c, d] = tf2ss(N,D)
```

Figura 9: Função tf2ss

Ao executar esta linha, o resultado são as matrizes de estado:

```
a =

   1.0e+04 *

   -0.0010   -1.0000
    0.0001         0


b =

     1
     0


c =

   1.0e+04 *

    1.0000    1.0000


d =

     0
```

Figura 10: Matrizes de Estado

5 Usando o comando lsim

Uma maneira mais simples de encontrar a resposta do sistema sabendo as matrizes é pelo comando lsim:

```
%Matrizes
A = [0 1; -10^4 -10];
B = [0; 10^4];
C = [1 1];
D = [0];
%Condição inicial
x0 = [1; 5];

%Sitema
sys = ss(A, B, C, D)
%Entrada degrau
sympref('HeavisideAtOrigin',1);
t = 0:0.01:10;
u = heaviside(t);

y = lsim(sys, u, t, x0);
plot(t, y);
```

Figura 11: Solução usando lsim

E tem como resultado o seguinte plot

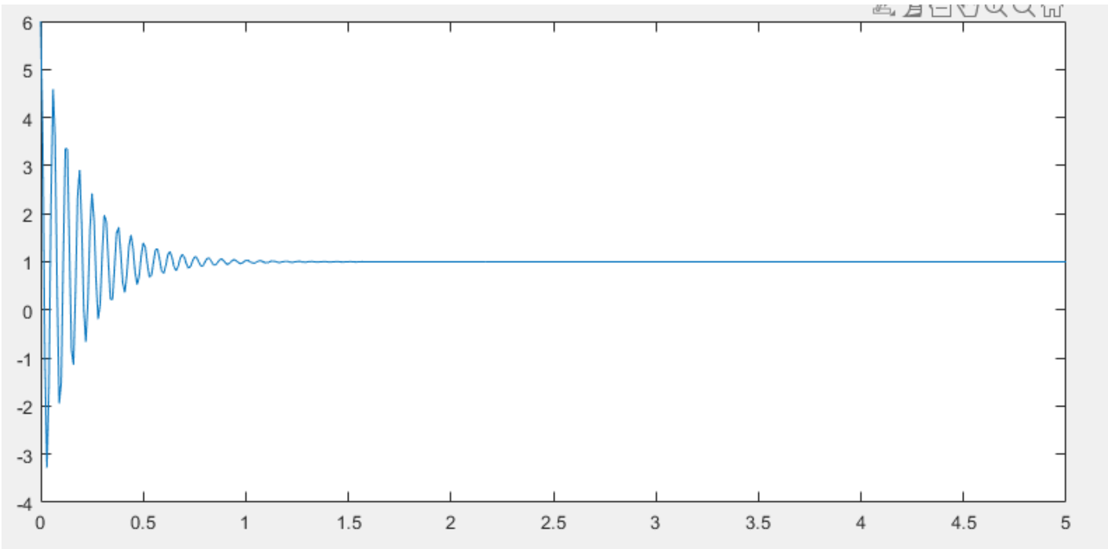


Figura 12: Plot usando lsim

5.1 Comparação Simulink x lsim

Usando o simout conseguimos comparar o gráfico gerado pelo Simulink e pelo lsim

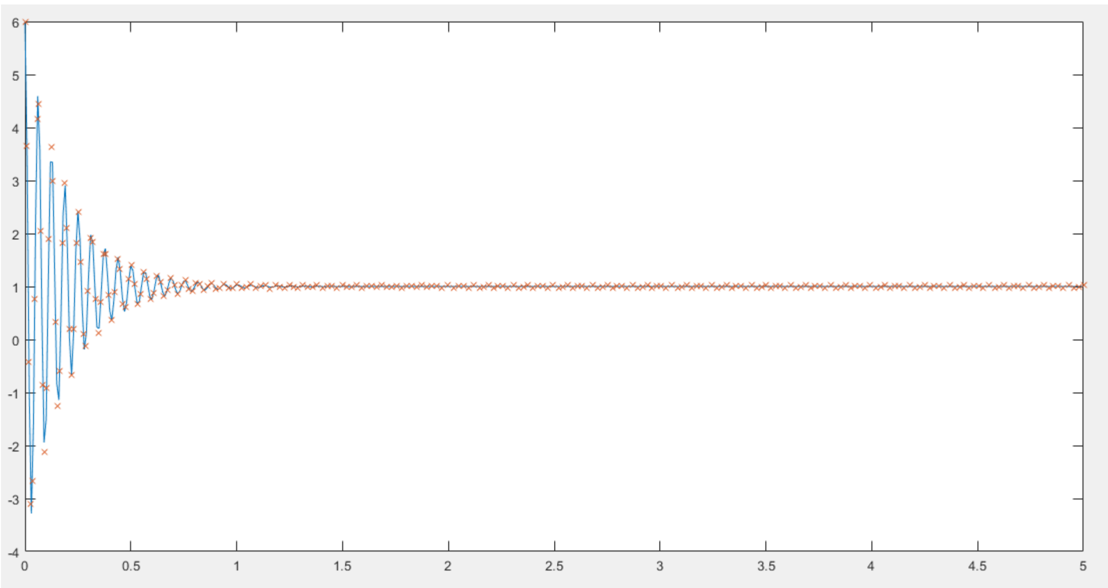


Figura 13: Plot comparação