Exponencial matricial e simulação com representação de estados

Erik Yuji Goto

RA: 234009

1 Sistema de Segunda Ordem

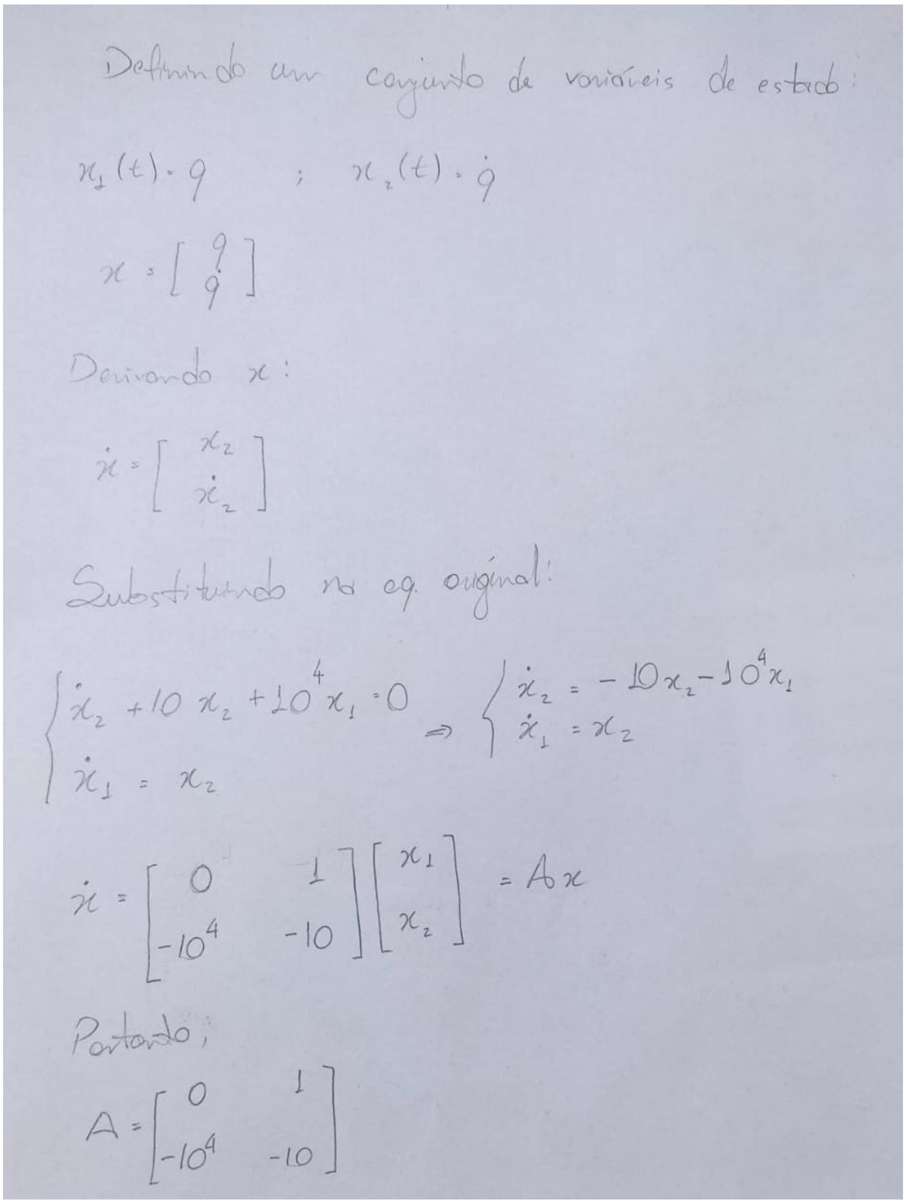
A equação do movimento escrita na forma padronizada é:

$$\ddot{q} + 2\xi\omega_n\dot{q} + \omega_n^2 q = 0 \tag{1}$$

Substituindo pelos valores do enunciado:

$$\ddot{q} + 10\dot{q} + 10^4 q = 0 \tag{2}$$

Com isso podemos transformar a equação para a forma matricial:



Definindo um conjunto de variáveis de estado:

$x_1(t) = q$; $x_2(t) = \dot{q}$

$$x = \begin{bmatrix} q \\ \dot{q} \end{bmatrix}$$

Derivando x:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix}$$

Substituindo na eq. original:

$$\begin{cases} \dot{x}_2 + 10x_2 + 10^4 x_1 = 0 \\ \dot{x}_1 = x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_2 = -10x_2 - 10^4 x_1 \\ \dot{x}_1 = x_2 \end{cases}$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10^4 & -10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = Ax$$

Portanto;

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10^4 & -10 \end{bmatrix}$$

Figura 1: Encontrando a matriz A

Portanto,

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{3}$$

Onde,

$$Bu = 0 \tag{4}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10^4 & -10 \end{bmatrix} \tag{5}$$

2 Calculando a resposta livre

A resposta livre a uma condição inicial é dada por:

$$x(t) = e^{At}x_0 \tag{6}$$

Portanto, precisamos calcular e^{At}

2.1 Por Autovalores

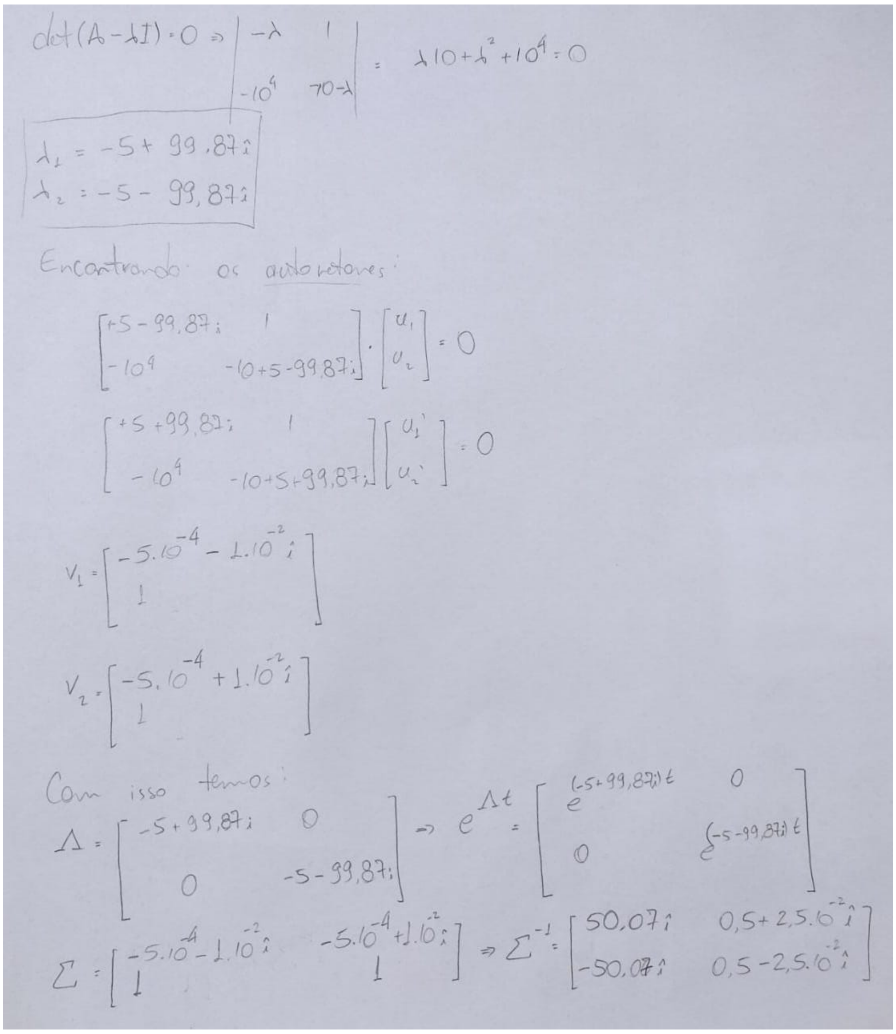


Figura 2: Autovalores

Realizando o cálculo de e^{At} pelo matlab:

$$syms\ \mathtt{t};$$
$$[U, L] = eig(A);$$
$$e^{At} = U * diag(exp(diag(L * t))) * inv(U)$$

$$e^{At} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \tag{7}$$

Onde,

$a = (exp(-t*(5+399^(1/2)*5i))*(exp(399^(1/2)*t*10i)*(649037107316853271723688571817328-32492496402889698541231938784245i) + 649037107316853363837439069708896 + 32492496402889703152687390203090i))/1298074214633706907132624082305024$

$b = -exp(t*(-5+399^(1/2)*5i))*(10001^(1/2)/200+3607572128482979i/144115188075855872)*(4611455451418845/9223372036854775808 + 5757109406118223i/576460752303423488) - exp(-t*(5+399^(1/2)*5i))*(10001^(1/2)/200-7215144256965959i/288230376151711744)*(4611455451418845/9223372036854775808 - 5757109406118223i/576460752303423488)$

$c = (25*10001^(1/2)*exp(-t*(5+399^(1/2)*5i))*(exp(399^(1/2)*t*10i)*7046039313443321i-7046039313443322i))/351878905260408832$

$d = (100*10001^(1/2)*exp(t*(-5+399^(1/2)*5i))*(10001^(1/2)/200+3607572128482979i/144115188075855872))/10001+(100*10001^(1/2)*exp(-t*(5+399^(1/2)*5i))*(10001^(1/2)/200-7215144256965959i/288230376151711744))/10001$

2.2 Por Laplace

Usaremos a relação $e^{At} = L^{-1}[(sI - A)^{-1}]$

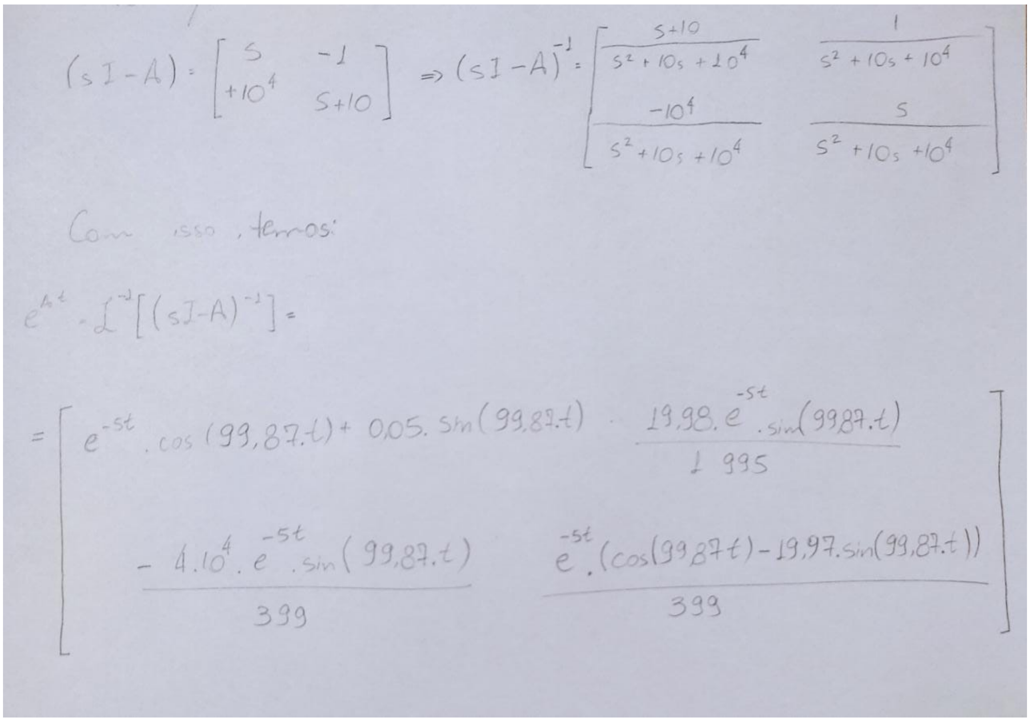


Figura 3: Laplace

2.3 Por Cayley-Hamilton

Usamos a equação $e^{At} = \sum_{l=0}^{n-1} \alpha_0 A^l$