Unicamp

Marco Lucio Bittencourt - Turma B
Heitor Nigro Lopes - PED

Dinâmica Trabalho 2

Matrizes de Rotação e Range Kutta

Erik Yuji Goto
RA: 234009

Campinas

2021

Sumário

1 Observação

Não está englobado o material da P1

2 Fasores

- Resistor:

$$\underline{V_R} = R\underline{I_R} \tag{1}$$

- Indutor:

$$\underline{V_L} = j\omega L\underline{I_L} \tag{2}$$

- Capacitor:

$$\underline{V_C} = \frac{1}{j\omega C}\underline{I_C} \tag{3}$$

3 Impedância e Admitância

Define-se a impedância(Z) como a relação da tensão fasorial pela corrente fasorial:

$$Z = \frac{V_m}{I_m}\angle(\theta - \phi) = R + jX \tag{4}$$

R é a componente resistivam e X é a componente reativa.
A a admitância Y é o inverso da impedância.

Casos Particulares:

– X=0 → Z = R → “ Circuito puramente Resistivo”.

– R=0 → Z = jLω → “ Circuito Indutivo” (X>0).

– R=0 → Z = 1/(jCω)= - j/(Cω) → “Circuito Capacitivo” (X<0).

Figura 1: Casos Particulares

3.1 Associação de Impedâncias

3.1.1 Série

$$Z_{eq} = Z_1 + Z_2 + ... + Z_k \tag{5}$$

3.1.2 Paralelo

$$\frac{1}{Z_{eq}} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + ... + \frac{1}{Z_k} \tag{6}$$

4 Potência em excitações senoidais

4.1 Potência Média

$$\bar{p} = \frac{V_m I_m}{2} cos\theta \tag{7}$$

4.2 Valores Eficazes

O valor eficaz de uma corrente(tensão) periódica é equivalente a uma corrente(tensão) contínua que entrega a mesma potência média para um resistor:

$$I_{ef} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \tag{8}$$

$$V_{ef} = \frac{V_m}{\sqrt{2}} \tag{9}$$

Portanto, a potência média fica:

$$\bar{p} = I_{ef} V_{ef} cos\theta \tag{10}$$

Onde o produto $I_{ef} * V_{ef}$ é definido como a potência aparente.

4.3 Fator de Potência

O fator de potência (f_p) é definido como a relação entre a potência média e a potência aparente:

$$f_p = cos\theta \tag{11}$$

- Carga RC - fator de potência adiantado;
- Carga RL - fator de potência atrasado;

Na prática é comum acrescentar um elemento puramente reativo (resistência nula) em paralelo com a impedância original, de modo a alterar o fator de potência ao nível desejado.

4.3.1 Correção do fator de Potência

Seja um sistema elétrico representado por uma impedância $Z = R + jX$. Suponha que em paralelo a esta impedância é acrescentado o elemento $Z1 = jX1$. Então, podemos calcular o valor da impedância em paralelo:

$$X_1 = \frac{R^2 + X^2}{R.tg(cos^{-1} f_p) - X} \tag{12}$$

4.4 Potência Complexa

A potência complexa é definida por:

$$S = \underline{V}_{ef}\underline{I}^{*}_{ef} = P + jQ \tag{13}$$

$\underline{I}^{*}_{ef}$ é o conjugado da corrente eficaz.
P é a potência ativa e Q a potência reativa.

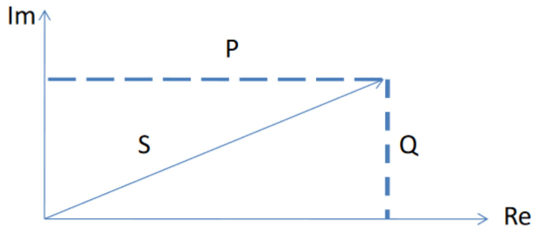

Figura 2: Potência Complexa

O módulo da potência complexa é dado por:

$$|S| = V_{ef}I_{ef} \tag{14}$$

Que é igual à potência aparente. Então, a potência reativa Q é dada por:

$$Q = Im(S) = V_{ef}I_{ef}sin\theta \tag{15}$$

Lembre que, a carga atendida é dada por:

$$Z = R + jX \tag{16}$$

4.5 Correção de f_p em termos de potência

Uma potência complexa S é fornecido à carga Z. A potência fornecida pode ser decomposta em:

$$S = P + jQ \tag{17}$$

Acrescenta-se uma carga de reatância pura Z1 em paralelo com Z. Com isso a potência complexa total fornecida ao circuito será:

$$S_T = P + j(Q + Q_1) \tag{18}$$

5 Sistemas Trifásicos

Os sistemas trifásicos são constituídos de três sistemas monofásicos defasadas de 120. Usualmente as fases são nomeadas em a,b e c:

$$v_a = V_p cos(\omega t) \tag{19}$$

$$v_b = V_p cos(\omega t - 120) \tag{20}$$

$$v_c = V_p cos(\omega t + 120) \tag{21}$$

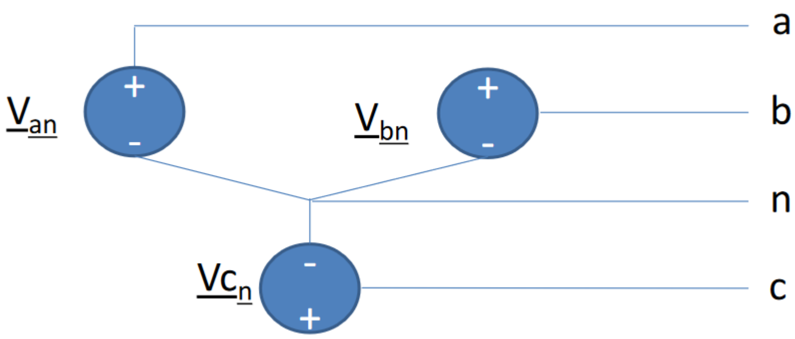

Figura 3: Sistema Trifásico

Tensão de Fase é a tenão nos terminais das fontes trifásicas.

$$\underline{V_{an}} = V_p\angle 0 \tag{22}$$

$$\underline{V_{bn}} = V_p\angle -120 \tag{23}$$

$$\underline{V_{cn}} = V_p\angle 120 \tag{24}$$

Tensão entre fases é dado pela diferença de tensões de fase.

$$\underline{V_{ab}} = \sqrt{3}V_p\angle 30 \tag{25}$$

É importante destacar que no caso da tensão fasorial $\underline{V_{ab}}$ a fase “a” é a referência. Com isso a fase do fasor da tensão entre as fases “a” e “b” é de 30º em relação à fase a.

De forma similar temos:

$$\underline{V_{bc}} = \sqrt{3}V_p\angle -90 \tag{26}$$

$$\underline{V_{ca}} = \sqrt{3}V_p\angle 150 \tag{27}$$

Convenção:

- Os dados e variáveis relativos às conexões entre fontes e cargas são de linhas. Por exemplo, a corrente na conexão entre uma fonte e uma carga é dita corrente de linha;
- Os dados e variáveis relativos às fontes e cargas são de fase. Por exemplo, a tensão em uma carga é denominada tensão de fase.

6 Conexão em Y-Y

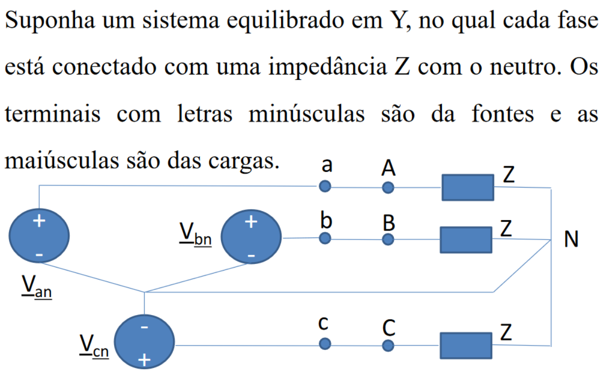

Figura 4: Conexão em Y-Y

Neste caso a impedância Z da fase A está conectada entre a saída da fonte a e o neutro. Então, a corrente sobre esta impedância é dada por:

$$\underline{I_{aA}} = \frac{\underline{V_{an}}}{Z} = I_{aA}\angle-\theta \tag{28}$$

As correntes das outras cargas tem a mesma amplitude e com as fases defasadas de -120 e +120.

$$\underline{I_{bB}} = I_{aA}\angle(-120-\theta) \tag{29}$$

$$\underline{I_{cC}} = I_{aA}\angle(120-\theta) \tag{30}$$

Note que, numa conexão Y-Y equilibrada a quatro fios, a soma das três correntes de linha é nula. Portanto, a corrente pelo neutro é nula.

A potência média entregur pela fase p é:

$$P_p = V_p I_p cos\theta \tag{31}$$

Então a potência total entregue pelas 3 fases é:

$$P = 3P \tag{32}$$

7 Conexão em Delta

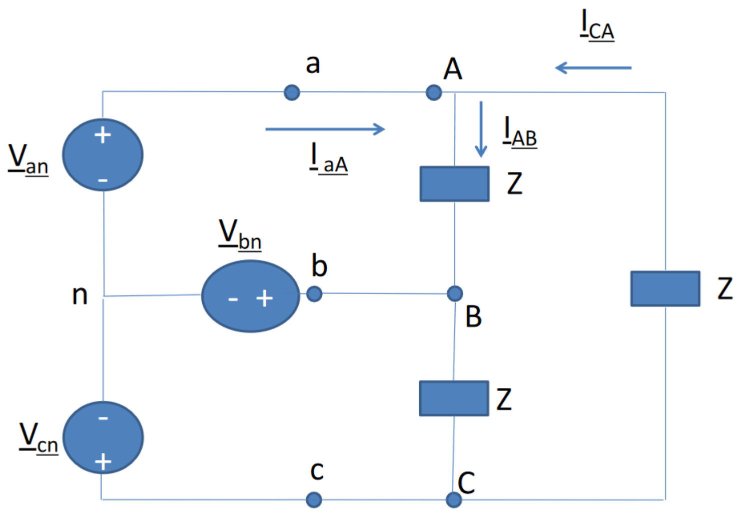

Figura 5: Conexão em Delta

Nesta configuração as impedâncias estão conectadas entre duas fases e não com o neutro.

Já foi visto que as tensões entre fases são dadas por:

$$\underline{V_{AB}} = V_L \angle 30 \tag{33}$$

$$\underline{V_{BC}} = V_L \angle -90 \tag{34}$$

$$\underline{V_{CA}} = V_L \angle 150 \tag{35}$$

Onde,
$V_L = \sqrt{3} V_p$

As correntes de fase são dadas por:

$$\underline{I_{AB}} = \frac{V_L \angle 30}{|Z| \angle \theta} = I_Z \angle (30 - \theta) \tag{36}$$

$$\underline{I_{BC}} = \frac{V_L \angle -90}{|Z| \angle \theta} = I_Z \angle (-90 - \theta) \tag{37}$$

$$\underline{I_{CA}} = \frac{V_L \angle 150}{|Z| \angle \theta} = I_Z \angle (150 - \theta) \tag{38}$$

Por sua vez, a amplitude da corrente de linha é igual à corrente de fase multiplicada por $\sqrt{3}$. E a fase da corrente de linha é igual à fase da corrente na carga subtraída de 30º.

$$\underline{I_{aA}} = \sqrt{3} I_Z \angle -\theta \tag{39}$$

$$\underline{I_{bB}} = \sqrt{3} I_Z \angle (-120 - \theta) \tag{40}$$

$$\underline{I_{cC}} = \sqrt{3} I_Z \angle (120 - \theta) \tag{41}$$

8 Transformação Y - Δ

É possível transformar uma conexão de cargas equilibradas em Y em uma configuração equivalente em Δ, ou vice-versa

8.1 Transformação de Y para Δ

$$Y_{ab} = \frac{Y_a\,Y_b}{Y_a + Y_b + Y_c}$$

$$Y_{bc} = \frac{Y_b\,Y_c}{Y_a + Y_b + Y_c}$$

$$Y_{ca} = \frac{Y_c\,Y_a}{Y_a + Y_b + Y_c}$$

Figura 6: Transformação de Y para Δ

8.2 Transformação de Δ para Y

$$Z_a = \frac{Z_{ab}\,Z_{ca}}{Z_{ab} + Z_{bc} + Z_{ca}}$$

$$Z_b = \frac{Z_{bc}\,Z_{ab}}{Z_{ab} + Z_{bc} + Z_{ca}}$$

$$Z_c = \frac{Z_{ca}\,Z_{bc}}{Z_{ab} + Z_{bc} + Z_{ca}}$$

Figura 7: Transformação de Δ para Y

9 Quadripolos

Um quadripolo é um circuito elétrico com dois pares de terminais, como ilustrado a seguir:

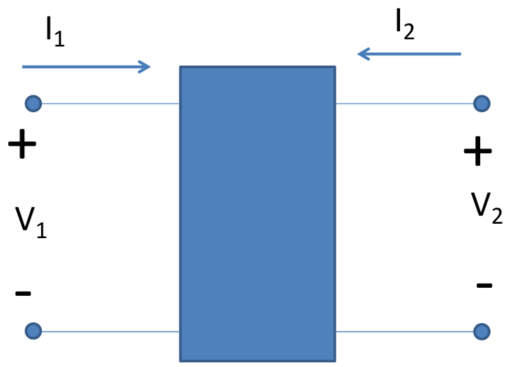

Figura 8: Convenção de um quadripolo

9.1 Modelo de Impedâncias

Para este quadripolo adota-se o seguinte modelo:

$$V_1 = Z_{11} I_1 + Z_{12} I_2 \tag{42}$$

$$V_2 = Z_{21} I_1 + Z_{22} I_2 \tag{43}$$

Os parâmetros podem ser obtidos por:

$$Z_{11} = \frac{V_1}{I_1} \ \textit{(com } I_2 \textit{ = 0)} \tag{44}$$

$$Z_{21} = \frac{V_2}{I_1} \ \textit{(com } I_2 \textit{ = 0)} \tag{45}$$

$$Z_{12} = \frac{V_1}{I_2} \ \textit{(com } I_1 \textit{ = 0)} \tag{46}$$

$$Z_{22} = \frac{V_2}{I_2} \ \textit{(com } I_1 \textit{ = 0)} \tag{47}$$

Z_{11} e Z_{22} são as impedâncias vistas pela entrada e pela saída respectivamente. Z_{12} e Z_{21} são as impedâncias de transferências.

9.2 Modelo de Admitância

$$I_1 = Y_{11} V_1 + Y_{12} V_2 \tag{48}$$

$$I_2 = Y_{21} V_1 + Y_{22} V_2 \tag{49}$$

Calculo de parâmetros de curto circuito($V_1 = 0$ ou $V_2 = 0$):

$$Y_{11} = \frac{I_1}{V_1} \ \textit{(com } V_2 = 0\textit{)} \tag{50}$$

$$Y_{12} = \frac{I_1}{V_2} \; (com \; V_1 = 0) \tag{51}$$

$$Y_{21} = \frac{I_2}{V_1} \; (com \; V_2 = 0) \tag{52}$$

$$Y_{22} = \frac{I_2}{V_2} \; (com \; V_1 = 0) \tag{53}$$

9.3 Modelos com Parâmetros de Trnasmissão

Seja o modelo a seguir:

$$V_1 = AV_2 - BI_2 \tag{54}$$

$$I_1 = CV_2 - DI_2 \tag{55}$$

Estes modelos são úteis em circuitos em cascata.

9.4 Cálculo de ganhos

Usando o modelo da figura 8 e equações 42 e 43, define-se o ganho de tensão (GT) por $GT = \frac{V_2}{V_1}$, com $I_2 = 0$. Ou seja,

$$GT = \frac{V_2}{V_1} = \frac{Z_{21}}{Z_{11}} \tag{56}$$

Define-se o ganho de corrente como $GC = \frac{I_2}{I_1}$, com $V_2 = 0$,

$$GC = \frac{Y_{21}}{Y_{11}} \tag{57}$$

Cálculo de ganhos considerando *impedância interna* do gerador e carga:

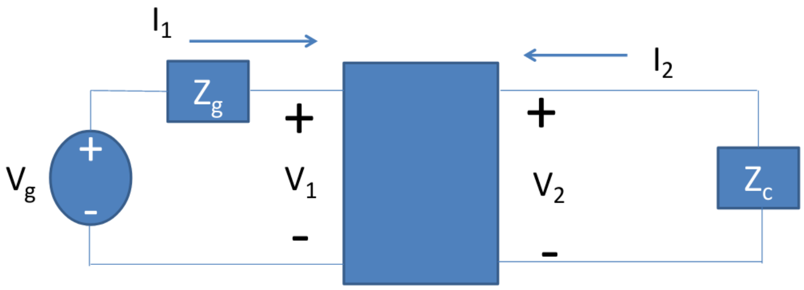

Figura 9: Quadripolo

$$\frac{V_2}{V_g} = \frac{Z_{21}Z_C}{(Z_{11}+Z_g)(Z_{22}+Z_c) - Z_{12}Z_{21}} \tag{58}$$

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{-Z_{21}}{Z_{22}+Z_c} \tag{59}$$

9.5 Circuitos Equivalente

Um quadripolo pode ser substituído por um circuito com fontes vinculadas:

$$V_1 = Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2$$
$$V_2 = Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2$$

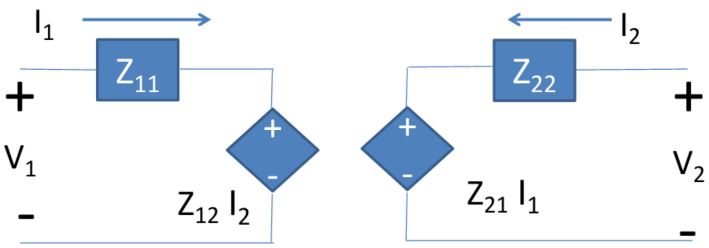

Figura 10: Quadripolo -¿ Fonte vinculada

9.6 Associação em paralelo

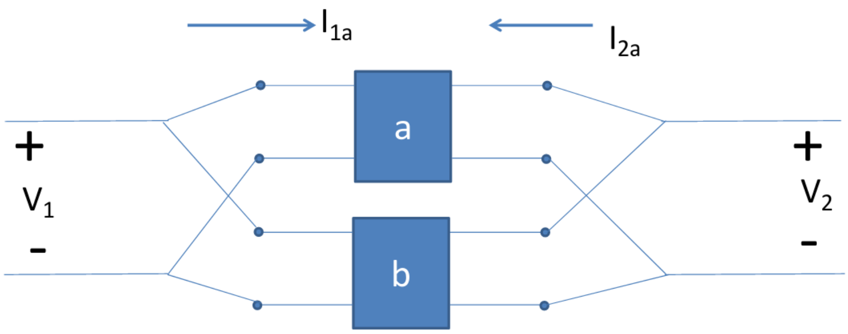

Figura 11: Associação em paralelo

$$I_1 = (Y_{11a} + Y_{11b})V_1 + (Y_{12a} + Y_{12b})V_2 \tag{60}$$

$$I_2 = (Y_{21a} + Y_{21b})V_1 + (Y_{22a} + Y_{22b})V_2 \tag{61}$$

Ou seja, nas associações em paralelo de quadripolos, no modelo com admitâncias, soma-se as admitâncias dos quadripolos da associação.

9.7 Associação em série

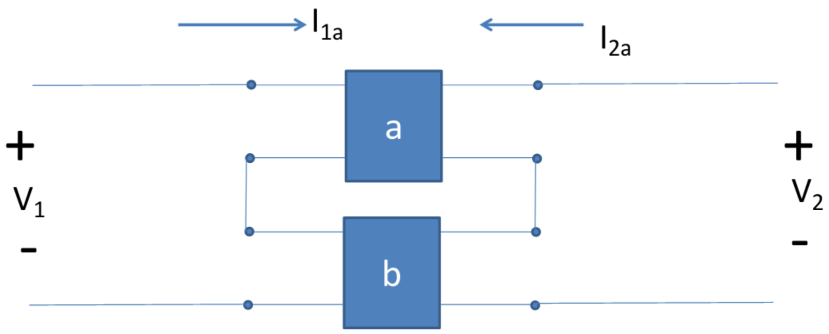

Figura 12: Associação em série

$$V_1 = (Z_{11a} + Z_{11b})I_1 + (Z_{12a} + Z_{12b})I_2 \tag{62}$$

$$V_2 = (Z_{21a} + Z_{21b})I_1 + (Z_{22a} + Z_{22b})I_2 \tag{63}$$

Ou seja, nas associações em série de quadripolos, no modelo com impedâncias, soma-se as impedâncias dos quadripolos da associação.

9.8 Associação em cascata

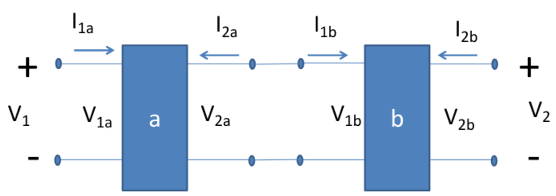

Figura 13: Associação em cascata

Seja o modelo de transmissão:

$$V_1 = AV_2 - BI_2 \tag{64}$$

$$I_1 = CV_2 - DI_2 \tag{65}$$

Donde tem-se:

$$V_1 = (A_aA_b + B_aC_b)V_2 - (A_aB_b + B_aD_b)I_2 \tag{66}$$

$$I_1 = (C_aA_b + D_aC_b)V_2 - (C_aB_b + D_aD_b)I_2 \tag{67}$$

Este modelo pode ser reescrito em termos de parâmetros de transmissão equivalentes:

$$V_1 = A_{eq}V_2 - B_{eq}I_2 \tag{68}$$

$$I_1 = C_{eq}V_2 - D_{eq}I_2 \tag{69}$$

Onde,

$$\begin{bmatrix} A_{eq} & B_{eq} \\ C_{eq} & D_{eq} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_a & B_a \\ C_a & D_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_b & B_b \\ C_b & D_b \end{bmatrix} \tag{70}$$

10 Transformadores

Os transformadores em circuitos elétricos são importantes pois possibilitam a transmissão em alta tensão, viabilizando a transmissão a longa distância.

Um dos enrolamentos é conectado a uma *fonte*; este enrolamento é denominado o **primário** do transformador. O outro terminal é dito o **secundário**, ao qual usualmente se conecta a *carga*.

10.1 Primário e secundário em carga

Quando tanto o primário como o secundário estão com correntes não nulas, então o fluxo magnético total em cada um dos enrolamentos é composto do fluxo gerado no próprio enrolamento e do fluxo mútuo recebido do outro enrolamento. E temos as seguintes equações:

$$v_1 = L_1 \frac{d_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \tag{71}$$

$$v_2 = M \frac{d_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} \tag{72}$$

10.2 Convenção do ponto

Uma corrente i que entra num terminal com ponto (sem ponto) em um enrolamento induz uma tensão $M\frac{di}{dt}$ com polaridade positiva no terminal com ponto (sem ponto) do outro enrolamento.

10.3 Impedância Refletida

Seja o seguinte circuito

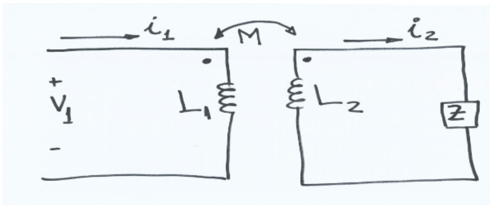

Figura 14: Impedância Refletida

O modelo do circuito é:

$$\underline{V_1} = j\omega L_1 \underline{I_1} - j\omega M \underline{I_2} \tag{73}$$

$$0 = -j\omega M \underline{I_1} + (Z + j\omega L_2)\underline{I_2} \tag{74}$$

Donde tem-se que:

$$\underline{V_1} = (j\omega L_1 + \frac{\omega^2 M^2}{Z + j\omega L_2})\underline{I_1} \tag{75}$$

Assim, a impedância vista pelos terminais do primário, a impedância equivalente, será:

$$\underline{Z_e} = j\omega L_1 + \frac{\omega^2 M^2}{Z + j\omega L_2} \tag{76}$$

O primeiro termo é a impedância própria e o segundo termo é a impedância do acoplamento, também conhecido como impedância refletida. Ela representa a carga adicional para o primário devido ao acoplamento eletromagnético e à carga Z do secundário.

10.4 Circuitos Equivalentes

10.4.1 Circuito 1

Como a impedância equivalente (76) leva em conta o acoplamento eletromagnético e a carga no secundário, então o circuito com o transformador e carga pode ser representado de forma equivalente pelo circuito mostrado na figura a seguir:

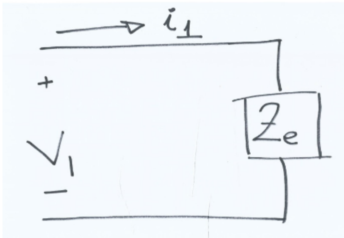

Figura 15: Circuito 1

10.4.2 Circuito 2

Sejam as equações a seguir:

$$v_1 = L_1 \frac{i_1}{dt} + m \frac{di_2}{dt} \tag{77}$$

$$v_2 = M \frac{i_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} \tag{78}$$

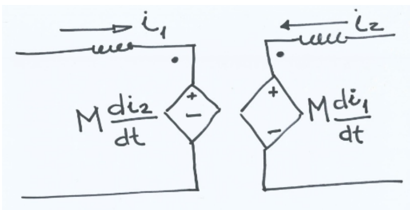

Figura 16: Circuito 2

10.4.3 Circuito 3

$$v_1 = (L_1 - M) \frac{di_1}{dt} + M(\frac{di_1}{dt} + \frac{di_2}{dt}) \tag{79}$$

$$v_2 = M(\frac{di_1}{dt} + \frac{di_2}{dt}) + (L_2 - M) \frac{di_2}{dt} \tag{80}$$

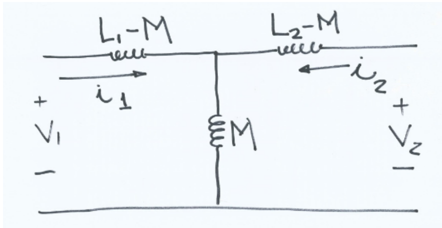

Figura 17: Circuito 3

10.5 Armazenamento de Energia em Transformadores

Sejam duas bobinas acopladas conforme a figura a seguir. A energia total fornecida

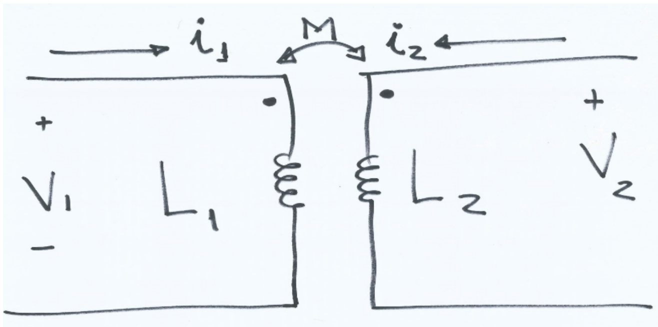

Figura 18: Bobinas Acopladas

pelos terminais é:

$$w = \frac{1}{2}L_1 I_1^2 \pm M I_1 I_2 + \frac{1}{2}L_2 I_2^2 \tag{81}$$

O sinal de M depende da configuração de pontos.

10.6 Coeficiente de Acoplamento

Define-se o coeficiente de acoplamento por:

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} \tag{82}$$

Onde,
$0 \leq k \leq 1$, quando k = 0 as bobinas não são acopladas, e k = 1 são totalmente acopladas. Se $k \leq 0.5$ é dito fracamente acolpada, e se $k > 0.5$ é fortemente acoplado. Portanto, os limites de acoplamento são:

$$0 \leq M \leq \sqrt{L_1 L_2} \tag{83}$$

1

10.7 Transformador Ideal

Um transformador ideal tem as seguintes características:

1. Sem perdas;
2. Acoplamento unitário;
$$M = \sqrt{L_1 L_2} \tag{84}$$
3. Indutâncias próprias infinitas, mas sua relação é finita.

Além disso, temos:

$$\frac{L_2}{L_1} = (\frac{n_2}{n_1})^2 = n^2 \tag{85}$$

$$\frac{\underline{V_2}}{\underline{V_1}} = n \tag{86}$$

$$\frac{\underline{I_2}}{\underline{I_1}} = \frac{1}{n} \tag{87}$$

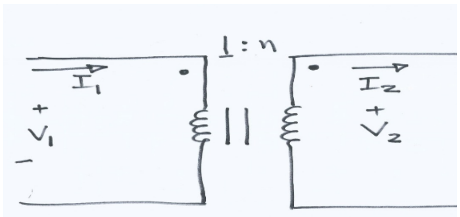

Figura 19: Transformador Ideal

Para esta configuração de pontos e de correntes as relações são para n positivo. Uma alteração nesta configuração torna as relações negativas (-n)

11 Banco de Transformadores

11.1 Conexão Y-Y

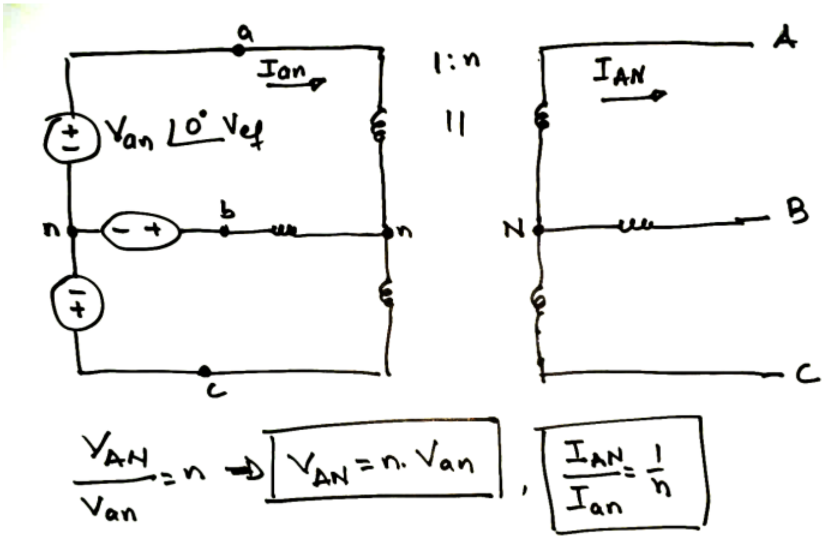

Figura 20: Y-Y

11.2 Conexão Y-Delta

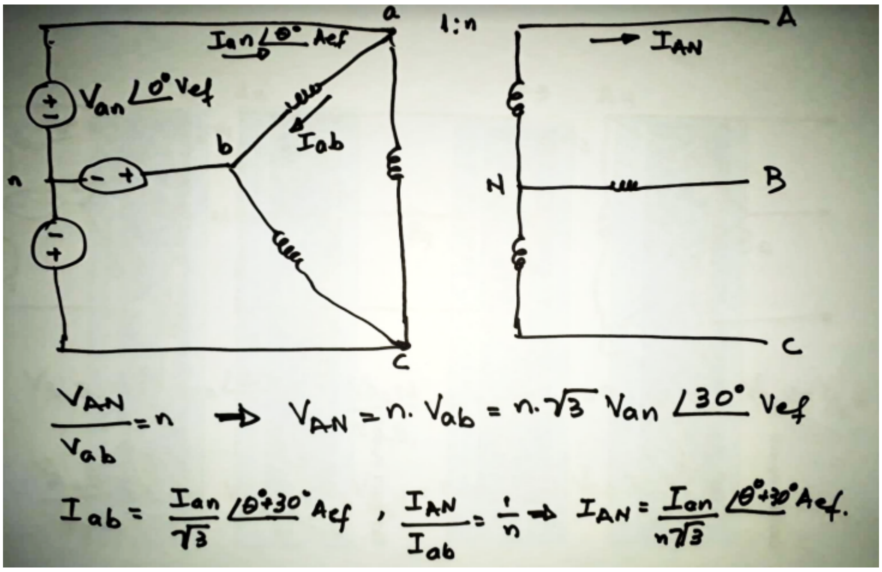

Figura 21: Y-Delta