Unicamp

Marco Lucio Bittencourt - Turma B
Heitor Nigro Lopes - PED

Dinâmica Trabalho 2

Matrizes de Rotação e Range Kutta

Erik Yuji Goto
RA: 234009

Campinas
2021

Sumário

1 Matrizes de transformação de coordenadas

1.1 De I para B_1

$$T_\lambda = \begin{bmatrix} cos\alpha & sen\alpha & 0 \\ -sen\alpha & cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1}$$

1.2 De B_1 para B_2

$$T_\beta = \begin{bmatrix} cos\beta & sen\beta & 0 \\ -sen\beta & cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2}$$

2 Velocidade e aceleração angulares absolutas das bases

2.1 Base B_1

2.1.1 Velocidade angular

$$\dot{\lambda}^I = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\lambda} \end{bmatrix} \tag{3}$$

2.1.2 Aceleração angular

$$\ddot{\lambda}^I = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\lambda} \end{bmatrix} \tag{4}$$

2.2 Base B_2

2.2.1 Velocidade angular

$$\dot{\beta}^{B_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\beta} \end{bmatrix} \tag{5}$$

$$\dot{\beta}^I = T_\lambda^T \dot{\beta}^{B_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\beta} \end{bmatrix} \tag{6}$$

$$\dot{\beta}^I_{B_2} = \dot{\beta}^I + \dot{\lambda}^I = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\beta} + \dot{\lambda} \end{bmatrix} \tag{7}$$

2.2.2 Aceleração angular

$$\ddot{\beta}^{B_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\beta} \end{bmatrix} \tag{8}$$

$$\ddot{\beta}^{I} = T_\lambda^T \ddot{\beta}^{B_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\beta} \end{bmatrix} \tag{9}$$

$$\ddot{\beta}_{B_2}^{I} = \ddot{\beta}^{I} + \ddot{\lambda}^{I} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\beta} + \ddot{\lambda} \end{bmatrix} \tag{10}$$

3 Vetores de aceleração linear absoluta das massas A e B

3.1 Massa B

A aceleração é dada por:

$$\vec{a}_B^I = \vec{a}_O^I + \vec{a}_B^{B_1} + \ddot{\lambda}^I \times \vec{r}_{OB}^I + \dot{\lambda}^I \times (\dot{\lambda}^I \times \vec{r}_{OB}^I) + 2\dot{\lambda}^I \times \vec{v}_B^{B_1} \tag{11}$$

- Vetor posição expresso em relação ao sistema I:

$$\vec{r}_{OB}^{B_1} = -l_1\hat{j} \Rightarrow \vec{r}_{OB}^I = T_\lambda^T \vec{r}_{OB}^{B_1} = \begin{bmatrix} l_1 sen\alpha \\ -l_1 cos\alpha \\ 0 \end{bmatrix} \tag{12}$$

- O vetor posição é constante $\Rightarrow \vec{v}_B^{B_1} = \vec{a}_B^{B_1} = 0$
- A aceleração do sistema inercial é zero $\Rightarrow \vec{a}_O^I = 0$

Portanto, a aceleração do ponto B fica sendo:

$$\vec{a}_B^I = \ddot{\lambda}^I \times \vec{r}_{OB}^I + \dot{\lambda}^I \times (\dot{\lambda}^I \times \vec{r}_{OB}^I) \tag{13}$$

$$\vec{a}_B^I = \begin{bmatrix} -l_1 sin\alpha * \dot{\lambda}^2 + l_1 * \ddot{\lambda} cos\alpha \\ -l_1 cos\alpha * \dot{\lambda}^2 + l_1 * \ddot{\lambda} sin\alpha \\ 0 \end{bmatrix} \tag{14}$$

3.2 Massa A

A aceleração é dada por:

$$\vec{a}_A^I = \vec{a}_B^I + \vec{a}_A^{B_2} + \ddot{\beta}_{B_2}^I \times \vec{r}_{BA}^I + \dot{\beta}_{B_2}^I \times (\dot{\beta}_{B_2}^I \times \vec{r}_{BA}^I) + 2\dot{\beta}_{B_2}^I \times \vec{v}_A^{B_2} \tag{15}$$

- Vetor posição expresso em relação ao sistema I:

$$\vec{r}_{BA}^{B_2} = -l_2\hat{j} \Rightarrow \vec{r}_{BA}^I = T_\beta^T T_\lambda^T \vec{r}_{BA}^{B_2} = \begin{bmatrix} l_2(cos\alpha sen\beta + cos\beta sen\alpha) \\ l_2(sen\alpha sen\beta - cos\alpha cos\beta) \\ 0 \end{bmatrix} \tag{16}$$

- O vetor posição $\vec{r}_{BA}$ é constante $\Rightarrow \vec{v}_A^I = \vec{a}_A^I = 0$
- A aceleração do sistema B_1 foi calculada anteriormente

Portanto, a aceleração do ponto A fica sendo:

$$\vec{a}_A^I = \vec{a}_B^I + \ddot{\vec{\beta}}_{B_2}^I \times \vec{r}_{BA}^I + \dot{\vec{\beta}}_{B_2}^I \times (\dot{\vec{\beta}}_{B_2}^I \times \vec{r}_{BA}^I) \tag{17}$$

$$\vec{a}_A^I = [-l_2*(\ddot{\beta}+\ddot{\lambda})*(sin(\alpha)*sin(\beta)-cos(\alpha)*cos(\beta))-l_2*(\dot{\beta}+\dot{\lambda})^2*(cos(\alpha)*sin(\beta)+cos(\beta)*sin(\alpha))$$

$$+-l_1 sin\alpha*\dot{\lambda}^2+l_1*\ddot{\lambda}cos\alpha]\hat{i}$$

$$[+l2*(\ddot{\beta}+\ddot{\lambda})*(cos(\alpha)*sin(\beta)+cos(\beta)*sin(\alpha))-l_2*(\dot{\beta}+\dot{\lambda})^2*(sin(\alpha)*sin(\beta)$$

$$-cos(\alpha)*cos(\beta))+-l_1 cos\alpha*\dot{\lambda}^2+l_1*\ddot{\lambda}sin\alpha]\hat{j}$$

4 Equilíbrio dinâmico das partículas

4.1 Partícula B

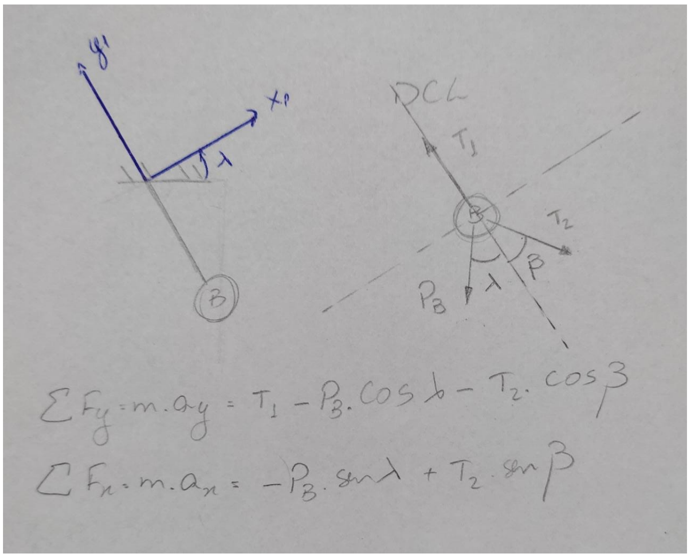

Figura 1: Equilíbrio partícula B

4.2 Partícula A

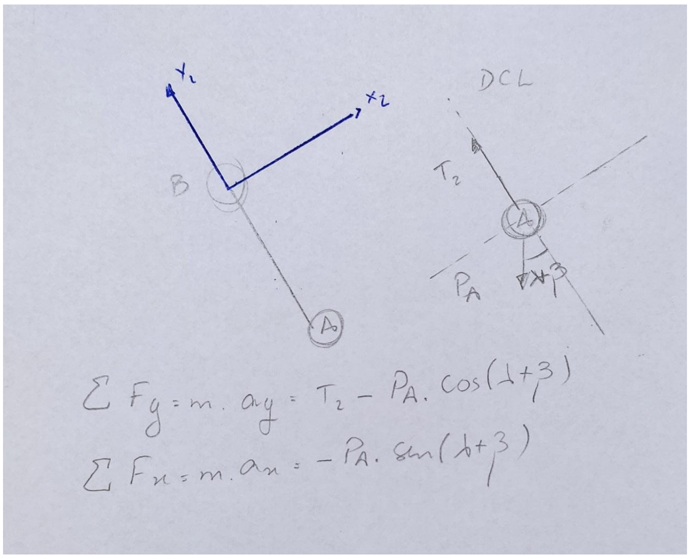

Figura 2: Equilíbrio partícula A

5 Método de Runge-Kutta

- $m_1 = m_2 = 0.0046kg$
- $l_1 = l_2 = 0.07m$
- $g = 9.81m/s^2$
- $\lambda(0) = -\pi/4$
- $\dot{\lambda}(0) = \dot{\beta}(0) = 0$