Unicamp
Unicamp
Marco Lucio Bittencourt - Turma B

Dinâmica Trabalho 1

Movimento Relativo: Matrizes de Rotação

Erik Yuji Goto

Campinas
2021

Sumário

1 Matrizes de transformação de coordenadas

Das coordenadas móveis B_1 para o sistema inercial I:

$$T_\beta = \begin{bmatrix} cos\beta & 0 & -sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ sin\beta & 0 & cos\beta \end{bmatrix} \tag{1}$$

Das coordenadas móveis B_1 para o sistema móvel B_2:

$$T_\lambda = \begin{bmatrix} cos\lambda & 0 & -sin\lambda \\ 0 & 1 & 0 \\ sin\lambda & 0 & cos\lambda \end{bmatrix} \tag{2}$$

2 Velocidades angulares dos sistemas móveis de referência

2.1 Velocidade angular da base B_1 com eixo de rotação Y do sistema absoluto

$$\omega_1^I = \begin{Bmatrix} 0 \\ \omega_1 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{3}$$

2.2 Velocidade angular da base B_2 com eixo de rotação Y do sistema absoluto

Primeiro representamos na base móvel B_1

$$\omega_2^{B_1} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \omega_2 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{4}$$

Transformando para as coordenadas inerciais:

$$\omega_2^I = T_\beta^T \omega_2^{\beta 1} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \omega_2 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{5}$$

Agora que sabemos os valores dos vetores de velocidade angular das duas bases móveis podemos calcular a velocidade angular absoluta do sistema móvel B_2 ao somar os vetores ω_1 e ω_2:

$$\omega_{B_2}^I = \omega_1^I + \omega_2^I = \begin{Bmatrix} 0 \\ \omega_1 + \omega_2 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{6}$$

3 Acelerações angulares dos sistemas móveis de referência

3.1 Aceleração angular da base B_1 com eixo de rotação Y do sistema absoluto

$$\alpha_1^I = \begin{Bmatrix} 0 \\ \alpha_1 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{7}$$

3.2 Aceleração angular da base B_2 com eixo de rotação Y do sistema absoluto

Primeiro representamos na base móvel B_1

$$\alpha_2^{B_1} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \alpha_2 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{8}$$

Transformando para as coordenadas inerciais:

$$\alpha_2^I = T_\beta^T \alpha_2^{\beta 1} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \alpha_2 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{9}$$

Agora que sabemos os valores dos vetores de aceleração angular das duas bases móveis podemos calcular a aceleração angular absoluta do sistema móvel B_2 ao somar os vetores α_1 e α_2:

$$\alpha_{B_2}^I = \alpha_1^I + \alpha_2^I = \begin{Bmatrix} 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{10}$$

4 Vetores posição

4.1 Vetor posição entre os pontos O e C no sistema inercial

$$r_{OC}^{B_1} = \begin{Bmatrix} 0 \\ c + a \\ -b \end{Bmatrix} \Rightarrow r_{OC}^I = T_\beta^T r_{OC}^{B_1} = \begin{Bmatrix} -bsin\beta \\ c + a \\ -bcos\beta \end{Bmatrix} \tag{11}$$

4.2 Vetor posição entre os pontos C e D no sistema inercial

$$r_{CD}^{B_2} = \begin{Bmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow r_{CD}^I = T_\beta^T T_\lambda^T r_{CD}^{B_2} = \begin{Bmatrix} rcos\lambda cos\beta + rsin\lambda sin\beta \\ 0 \\ rcos\lambda sin\beta - rsin\lambda cos\beta \end{Bmatrix} \tag{12}$$

A posição do ponto D em relação ao sistema inercial será:

$$r_{OD}^I = r_{OC}^I + r_{CD}^I = \begin{Bmatrix} rcos\lambda cos\beta + rsin\lambda sin\beta - bsin\beta \\ c + a \\ rcos\lambda sin\beta - rsin\lambda cos\beta - bcos\beta \end{Bmatrix} \tag{13}$$

5 Velocidade linear absoluta do ponto D

A velocidade linear absoluta é calculada por:

$$v_D^I = \underbrace{v_C^I}_{\mathrm{I}} + \underbrace{\dot{\omega}_{B_2}^I \times r_{CD}^I}_{\mathbf{II}} + \underbrace{v_{CD}^I}_{\mathrm{III}} \tag{14}$$

I. Velocidade absoluta da origem C do sistema de referência B_2;

II. Velocidade tangencial;

III. Velocidade relativa entre o ponto C e D, note que o vetor posição $\vec{CD}$ é constante portanto, a velocidade relativa é igua a zero. $v_{CD}^I = 0$.

Velocidade absoluta do ponto C - Origem do sistema móvel

$$v_C^I = v_O^I + \dot{\omega}_1^I \times r_{OC}^I + v_{OC}^I \tag{15}$$

Note que, $v_O^I = 0$, pois o ponto O é o centro do sistema inercial. Além disso, $v_{OC}^I = 0$ já que $\vec{OC}$ é constante.

Concluímos que a velocidade absoluta do ponto C é dada por:

$$v_C^I = \dot{\omega}_1^I \times r_{OC}^I = \begin{Bmatrix} -\omega_1 bcos\beta \\ 0 \\ \omega_1 bsin\beta \end{Bmatrix} \tag{16}$$

Velocidade Tangencial
O vetor valocidade tangencial é dado por:

$$\dot{\omega}_{B_2}^I \times r_{CD}^I = \begin{Bmatrix} (\omega_1 + \omega_{B_2})rcos\lambda sin\beta - rsin\lambda cos\beta \\ 0 \\ -(\omega_1 + \omega_{B_2})rcos\lambda cos\beta + rsin\lambda sin\beta \end{Bmatrix} \tag{17}$$

Agora que sabemos os componentes da velocidade tangencial e velocidade do ponto C conseguimos encontrar a velocidade absoluta do ponto D:

$$v_D^I = \begin{Bmatrix} (\omega_1 + \omega_{B_2})rcos\lambda sin\beta - rsin\lambda cos\beta - \omega_1 bcos\beta \\ 0 \\ -(\omega_1 + \omega_{B_2})rcos\lambda cos\beta + rsin\lambda sin\beta + \omega_1 bsin\beta \end{Bmatrix} \tag{18}$$

6 Aceleração linear absoluta do ponto D

A aceleração linear absoluta é calculada por:

$$a_D^I = a_C^I + \dot{\omega}_{B_2}^I \times \dot{\omega}_{B_2}^I \times r_{CD}^I + \ddot{\omega}_{B_2}^I \times r_{CD}^I + 2\dot{\omega}_{B_2}^I \times v_{CD}^I + a_{CD}^I \tag{19}$$

Podemos simplificar a equação acima:

- O vetor posição $\vec{CD}$ é constante
  - $v_{CD}^I = 0$
  - $a_{CD}^I = 0$

A equação final para a aceleração aplicada ao nosso problema fica:

$$a_D^I = \underbrace{a_C^I}_{\text{I}} + \underbrace{\dot{\omega}_{B_2}^I \times \dot{\omega}_{B_2}^I \times r_{CD}^I}_{\text{II}} + \underbrace{\ddot{\omega}_{B_2}^I \times r_{CD}^I}_{\text{III}} \tag{20}$$

I. Aceleração absoluta do ponto C

II. Aceleração normal do ponto D

III. Aceleração tangencial

Aceleração absoluta do ponto C

$$a_C^I = a_O^I + \dot{\omega}_1^I \times \dot{\omega}_1^I \times r_{OC}^I + \ddot{\omega}_1^I \times r_{OC}^I + 2\dot{\omega}_1^I \times v_{OC}^I + a_{OC}^I \tag{21}$$

Para simplificar a equação acima vamos usar como hipósteses:

- O vetor posição $\vec{OC}$ é constante
  - $v_{OC}^I = 0$
  - $a_{OC}^I = 0$
- O ponto O é origem do sistema inercial
  - $a_O^I = 0$

Portanto, a aceleração do ponto C é dada por:

$$a_C^I = \dot{\omega}_1^I \times \dot{\omega}_1^I \times r_{OC}^I + \ddot{\omega}_1^I \times r_{OC}^I = \begin{Bmatrix} \omega_1^2 bsin\beta - \alpha_1 bcos\beta \\ 0 \\ \omega_1^2 bcos\beta + \alpha_1 bsen\beta \end{Bmatrix} \tag{22}$$

Aceleração Normal do ponto D

$$\dot{\omega}_{B_2}^I \times \dot{\omega}_{B_2}^I \times r_{CD}^I = \begin{Bmatrix} -(\omega_1 + \omega_2)^2(rcos\lambda cos\beta + rsen\lambda sen\beta) \\ 0 \\ -(\omega_1 + \omega_2)^2(rcos\lambda sen\beta - rsen\lambda cos\beta) \end{Bmatrix} \tag{23}$$

Aceleração Tangencial do ponto D

$$\ddot{\omega}_{B_2}^I \times r_{CD}^I = \begin{Bmatrix} (\alpha_1 + \alpha_2)(rcos\lambda sen\beta - rsen\lambda cos\beta) \\ 0 \\ -(\alpha_1 + \alpha_2)(rcos\lambda cos\beta + rsen\lambda sen\beta) \end{Bmatrix} \tag{24}$$