

Unicamp

Marco Lucio Bittencourt - Turma B  
Heitor Nigro Lopes - PED

# **Dinâmica Trabalho 2**

**Matrizes de Rotação e Range Kutta**

Erik Yuji Goto  
RA: 234009

Campinas  
2021

# Sumário

<b>1</b>	<b>Observação</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Fasores</b>	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>Impedância e Admitância</b>	<b>3</b>
3.1	Associação de Impedâncias . . . . .	3
3.1.1	Série . . . . .	3
3.1.2	Paralelo . . . . .	3
<b>4</b>	<b>Potência em excitações senoidais</b>	<b>3</b>
4.1	Potência Média . . . . .	3
4.2	Valores Eficazes . . . . .	4
4.3	Fator de Potência . . . . .	4
4.3.1	Correção do fator de Potência . . . . .	4
4.4	Potência Complexa . . . . .	5
4.5	Correção de $f_p$ em termos de potência . . . . .	5
<b>5</b>	<b>Sistemas Trifásicos</b>	<b>5</b>
<b>6</b>	<b>Conexão em Y-Y</b>	<b>7</b>
<b>7</b>	<b>Conexão em Delta</b>	<b>7</b>
<b>8</b>	<b>Transformação Y - <math>\Delta</math></b>	<b>9</b>
8.1	Transformação de Y para $\Delta$ . . . . .	9
8.2	Transformação de $\Delta$ para Y . . . . .	9
<b>9</b>	<b>Quadripolos</b>	<b>10</b>
9.1	Modelo de Impedâncias . . . . .	10
9.2	Modelo de Admitância . . . . .	10
9.3	Modelos com Parâmetros de Trasmissoão . . . . .	11
9.4	Cálculo de ganhos . . . . .	11
9.5	Circuitos Equivalente . . . . .	12
9.6	Associação em paralelo . . . . .	12
9.7	Associação em série . . . . .	13
9.8	Associação em cascata . . . . .	13
<b>10</b>	<b>Transformadores</b>	<b>14</b>
10.1	Primário e secundário em carga . . . . .	14
10.2	Convenção do ponto . . . . .	14
10.3	Impedância Refletida . . . . .	14
10.4	Circuitos Equivalentes . . . . .	15
10.4.1	Circuito 1 . . . . .	15
10.4.2	Circuito 2 . . . . .	15
10.4.3	Circuito 3 . . . . .	15
10.5	Armazenamento de Energia em Transformadores . . . . .	16
10.6	Coefficiente de Acoplamento . . . . .	16
10.7	Transformador Ideal . . . . .	17

# 1 Observação

Não está englobado o material da P1

## 2 Fasores

- Resistor:

$$\underline{V_R} = R \underline{I_R} \quad (1)$$

- Indutor:

$$\underline{V_L} = j\omega L \underline{I_L} \quad (2)$$

- Capacitor:

$$\underline{V_C} = \frac{1}{j\omega C} \underline{I_C} \quad (3)$$

## 3 Impedância e Admitância

Define-se a impedância( $Z$ ) como a relação da tensão fasorial pela corrente fasorial:

$$Z = \frac{V_m}{I_m} \angle(\theta - \phi) = R + jX \quad (4)$$

$R$  é a componente resistiva e  $X$  é a componente reativa.  
A admitância  $Y$  é o inverso da impedância.

Casos Particulares:

- $X=0 \rightarrow Z = R \rightarrow$  “Circuito puramente Resistivo”.
- $R=0 \rightarrow Z = jL\omega \rightarrow$  “Circuito Indutivo” ( $X>0$ ).
- $R=0 \rightarrow Z = 1/(jC\omega) = -j/(C\omega) \rightarrow$  “Circuito Capacitivo” ( $X<0$ ).

Figura 1: Casos Particulares

### 3.1 Associação de Impedâncias

#### 3.1.1 Série

$$Z_{eq} = Z_1 + Z_2 + \dots + Z_k \quad (5)$$

#### 3.1.2 Paralelo

$$\frac{1}{Z_{eq}} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \dots + \frac{1}{Z_k} \quad (6)$$

## 4 Potência em excitações senoidais

### 4.1 Potência Média

$$\bar{p} = \frac{V_m I_m}{2} \cos\theta \quad (7)$$

## 4.2 Valores Eficazes

O valor eficaz de uma corrente(tensão) periódica é equivalente a uma corrente(tensão) contínua que entrega a mesma potência média para um resistor:

$$I_{ef} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \quad (8)$$

$$V_{ef} = \frac{V_m}{\sqrt{2}} \quad (9)$$

Portanto, a potência média fica:

$$\bar{p} = I_{ef} V_{ef} \cos \theta \quad (10)$$

Onde o produto  $I_{ef} * V_{ef}$  é definido como a potência aparente.

## 4.3 Fator de Potência

O fator de potência ( $f_p$ ) é definido como a relação entre a potência média e a potência aparente:

$$f_p = \cos \theta \quad (11)$$

- Carga RC - fator de potência adiantado;
- Carga RL - fator de potência atrasado;

Na prática é comum acrescentar um elemento puramente reativo (resistência nula) em paralelo com a impedância original, de modo a alterar o fator de potência ao nível desejado.

### 4.3.1 Correção do fator de Potência

Seja um sistema elétrico representado por uma impedância  $Z = R + jX$ . Suponha que em paralelo a esta impedância é acrescentado o elemento  $Z1 = jX1$ . Então, podemos calcular o valor da impedância em paralelo:

$$X_1 = \frac{R^2 + X^2}{R \cdot \tan(\cos^{-1} f_p) - X} \quad (12)$$

## 4.4 Potência Complexa

A potência complexa é definida por:

$$S = \underline{V}_{ef} \underline{I}_{ef}^* = P + jQ \quad (13)$$

$\underline{I}_{ef}^*$  é o conjugado da corrente eficaz.

P é a potência ativa e Q a potência reativa.

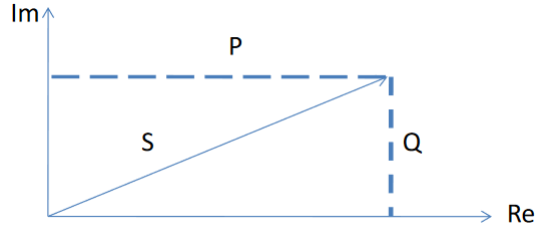


Figura 2: Potência Complexa

O módulo da potência complexa é dado por:

$$|S| = V_{ef} I_{ef} \quad (14)$$

Que é igual à potência aparente. Então, a potência reativa Q é dada por:

$$Q = \text{Im}(S) = V_{ef} I_{ef} \sin \theta \quad (15)$$

Lembre que, a carga atendida é dada por:

$$Z = R + jX \quad (16)$$

## 4.5 Correção de $f_p$ em termos de potência

Uma potência complexa S é fornecida à carga Z. A potência fornecida pode ser decomposta em:

$$S = P + jQ \quad (17)$$

Acrescenta-se uma carga de reatância pura Z1 em paralelo com Z. Com isso a potência complexa total fornecida ao circuito será:

$$S_T = P + j(Q + Q_1) \quad (18)$$

## 5 Sistemas Trifásicos

Os sistemas trifásicos são constituídos de três sistemas monofásicos defasados de 120. Usualmente as fases são nomeadas em a, b e c:

$$v_a = V_p \cos(\omega t) \quad (19)$$

$$v_b = V_p \cos(\omega t - 120) \quad (20)$$

$$v_c = V_p \cos(\omega t + 120) \quad (21)$$

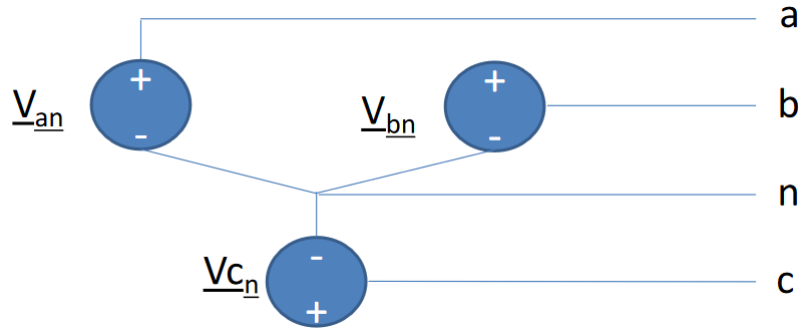


Figura 3: Sistema Trifásico

**Tensão de Fase** é a tensão nos terminais das fontes trifásicas.

$$\underline{V_{an}} = V_p \angle 0 \quad (22)$$

$$\underline{V_{bn}} = V_p \angle -120 \quad (23)$$

$$\underline{V_{cn}} = V_p \angle 120 \quad (24)$$

**Tensão entre fases** é dado pela diferença de tensões de fase.

$$\underline{V_{ab}} = \sqrt{3}V_p \angle 30 \quad (25)$$

É importante destacar que no caso da tensão fasorial  $\underline{V_{ab}}$  a fase “a” é a referência. Com isso a fase do fasor da tensão entre as fases “a” e “b” é de  $30^\circ$  em relação à fase a.

De forma similar temos:

$$\underline{V_{bc}} = \sqrt{3}V_p \angle -90 \quad (26)$$

$$\underline{V_{ca}} = \sqrt{3}V_p \angle 150 \quad (27)$$

**Convenção:**

- Os dados e variáveis relativos às conexões entre fontes e cargas são de linhas. Por exemplo, a corrente na conexão entre uma fonte e uma carga é dita corrente de linha;
- Os dados e variáveis relativos às fontes e cargas são de fase. Por exemplo, a tensão em uma carga é denominada tensão de fase.

## 6 Conexão em Y-Y

Suponha um sistema equilibrado em Y, no qual cada fase está conectada com uma impedância  $Z$  com o neutro. Os terminais com letras minúsculas são das fontes e as maiúsculas são das cargas.

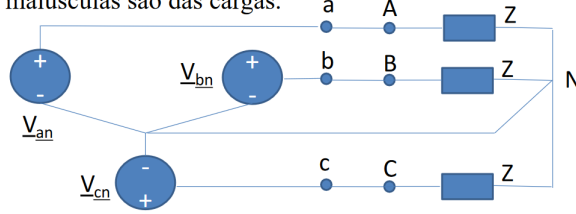


Figura 4: Conexão em Y-Y

Neste caso a impedância  $Z$  da fase A está conectada entre a saída da fonte a e o neutro. Então, a corrente sobre esta impedância é dada por:

$$\underline{I_{aA}} = \frac{\underline{V_{an}}}{Z} = I_{aA} \angle -\theta \quad (28)$$

As correntes das outras cargas tem a mesma amplitude e com as fases defasadas de  $-120$  e  $+120$ .

$$\underline{I_{bB}} = I_{aA} \angle (-120 - \theta) \quad (29)$$

$$\underline{I_{cC}} = I_{aA} \angle (120 - \theta) \quad (30)$$

Note que, numa conexão Y-Y equilibrada a quatro fios, a soma das três correntes de linha é nula. Portanto, a corrente pelo neutro é nula.

A potência média entregur pela fase p é:

$$P_p = V_p I_p \cos \theta \quad (31)$$

Então a potência total entregue pelas 3 fases é:

$$P = 3P \quad (32)$$

## 7 Conexão em Delta



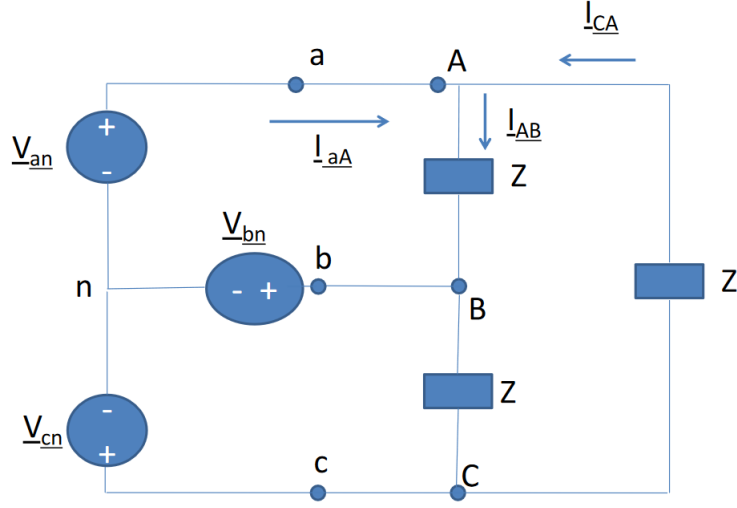


Figura 5: Conexão em Delta

Nesta configuração as impedâncias estão conectadas entre duas fases e não com o neutro.

Já foi visto que as tensões entre fases são dadas por:

$$\underline{V_{AB}} = V_L \angle 30 \quad (33)$$

$$\underline{V_{BC}} = V_L \angle -90 \quad (34)$$

$$\underline{V_{CA}} = V_L \angle 150 \quad (35)$$

Onde,  
 $V_L = \sqrt{3}V_p$

As correntes de fase são dadas por:

$$\underline{I_{AB}} = \frac{V_L \angle 30}{|Z| \angle \theta} = I_Z \angle (30 - \theta) \quad (36)$$

$$\underline{I_{BC}} = \frac{V_L \angle -90}{|Z| \angle \theta} = I_Z \angle (-90 - \theta) \quad (37)$$

$$\underline{I_{CA}} = \frac{V_L \angle 150}{|Z| \angle \theta} = I_Z \angle (150 - \theta) \quad (38)$$

Por sua vez, a amplitude da corrente de linha é igual à corrente de fase multiplicada por  $\sqrt{3}$ . E a fase da corrente de linha é igual à fase da corrente na carga subtraída de  $30^\circ$ .

$$\underline{I_{aA}} = \sqrt{3}I_Z \angle -\theta \quad (39)$$

$$\underline{I_{bB}} = \sqrt{3}I_Z \angle (-120 - \theta) \quad (40)$$

$$\underline{I_{cC}} = \sqrt{3}I_Z \angle (120 - \theta) \quad (41)$$

## 8 Transformação Y - $\Delta$

É possível transformar uma conexão de cargas equilibradas em Y em uma configuração equivalente em  $\Delta$ , ou vice-versa

### 8.1 Transformação de Y para $\Delta$

$$Y_{ab} = \frac{Y_a Y_b}{Y_a + Y_b + Y_c}$$

$$Y_{bc} = \frac{Y_b Y_c}{Y_a + Y_b + Y_c}$$

$$Y_{ca} = \frac{Y_c Y_a}{Y_a + Y_b + Y_c}$$

Figura 6: Transformação de Y para  $\Delta$

### 8.2 Transformação de $\Delta$ para Y

$$Z_a = \frac{Z_{ab} Z_{ca}}{Z_{ab} + Z_{bc} + Z_{ca}}$$

$$Z_b = \frac{Z_{bc} Z_{ab}}{Z_{ab} + Z_{bc} + Z_{ca}}$$

$$Z_c = \frac{Z_{ca} Z_{bc}}{Z_{ab} + Z_{bc} + Z_{ca}}$$

Figura 7: Transformação de  $\Delta$  para Y

## 9 Quadripolos

Um quadripolo é um circuito elétrico com dois pares de terminais, como ilustrado a seguir:

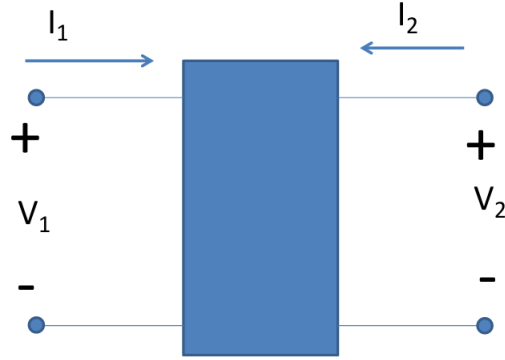


Figura 8: Convenção de um quadripolo

### 9.1 Modelo de Impedâncias

Para este quadripolo adota-se o seguinte modelo:

$$V_1 = Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2 \quad (42)$$

$$V_2 = Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2 \quad (43)$$

Os parâmetros podem ser obtidos por:

$$Z_{11} = \frac{V_1}{I_1} \text{ (com } I_2 = 0) \quad (44)$$

$$Z_{21} = \frac{V_2}{I_1} \text{ (com } I_2 = 0) \quad (45)$$

$$Z_{12} = \frac{V_1}{I_2} \text{ (com } I_1 = 0) \quad (46)$$

$$Z_{22} = \frac{V_2}{I_2} \text{ (com } I_1 = 0) \quad (47)$$

$Z_{11}$  e  $Z_{22}$  são as impedâncias vistas pela entrada e pela saída respectivamente.  $Z_{12}$  e  $Z_{21}$  são as impedâncias de transferências.

### 9.2 Modelo de Admitância

$$I_1 = Y_{11}V_1 + Y_{12}V_2 \quad (48)$$

$$I_2 = Y_{21}V_1 + Y_{22}V_2 \quad (49)$$

Cálculo de parâmetros de curto circuito ( $V_1 = 0$  ou  $V_2 = 0$ ):

$$Y_{11} = \frac{I_1}{V_1} \text{ (com } V_2 = 0) \quad (50)$$

$$Y_{12} = \frac{I_1}{V_2} \text{ (com } V_1 = 0) \quad (51)$$

$$Y_{21} = \frac{I_2}{V_1} \text{ (com } V_2 = 0) \quad (52)$$

$$Y_{22} = \frac{I_2}{V_2} \text{ (com } V_1 = 0) \quad (53)$$

### 9.3 Modelos com Parâmetros de Trnasmissão

Seja o modelo a seguir:

$$V_1 = AV_2 - BI_2 \quad (54)$$

$$I_1 = CV_2 - DI_2 \quad (55)$$

Estes modelos são úteis em circuitos em cascata.

### 9.4 Cálculo de ganhos

Usando o modelo da figura 8 e equações 42 e 43, define-se o ganho de tensão (GT) por  $GT = \frac{V_2}{V_1}$ , com  $I_2 = 0$ . Ou seja,

$$GT = \frac{V_2}{V_1} = \frac{Z_{21}}{Z_{11}} \quad (56)$$

Define-se o ganho de corrente como  $GC = \frac{I_2}{I_1}$ , com  $V_2 = 0$ ,

$$GC = \frac{Y_{21}}{Y_{11}} \quad (57)$$

Cálculo de ganhos considerando *impedância interna* do gerador e carga:

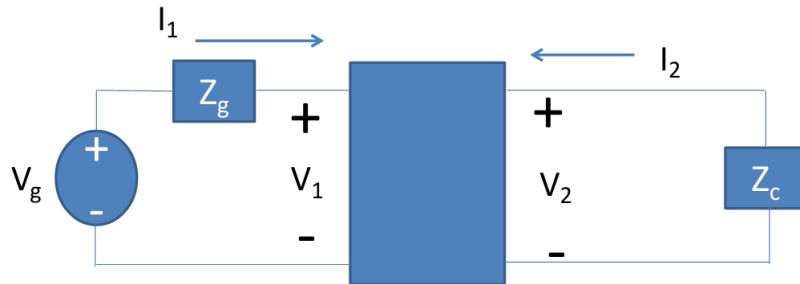


Figura 9: Quadripolo

$$\frac{V_2}{V_g} = \frac{Z_{21}Z_c}{(Z_{11} + Z_g)(Z_{22} + Z_c) - Z_{12}Z_{21}} \quad (58)$$

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{-Z_{21}}{Z_{22} + Z_c} \quad (59)$$

## 9.5 Circuitos Equivalente

Um quadripolo pode ser substituído por um circuito com fontes vinculadas:

$$V_1 = Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2$$

$$V_2 = Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2$$

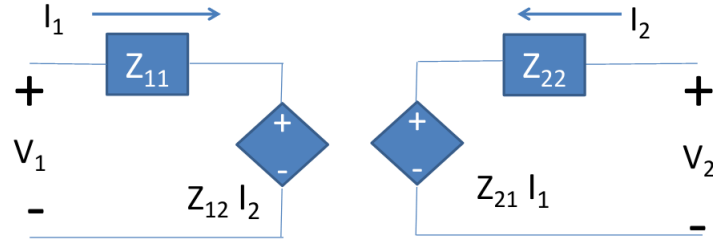


Figura 10: Quadripolo -j Fonte vinculada

## 9.6 Associação em paralelo

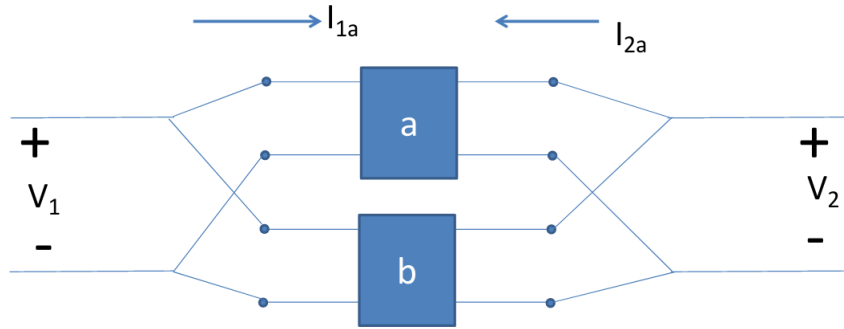


Figura 11: Associação em paralelo

$$I_1 = (Y_{11a} + Y_{11b})V_1 + (Y_{12a} + Y_{12b})V_2 \quad (60)$$

$$I_2 = (Y_{21a} + Y_{21b})V_1 + (Y_{22a} + Y_{22b})V_2 \quad (61)$$

Ou seja, nas associações em paralelo de quadripolos, no modelo com admitâncias, soma-se as admitâncias dos quadripolos da associação.

## 9.7 Associação em série

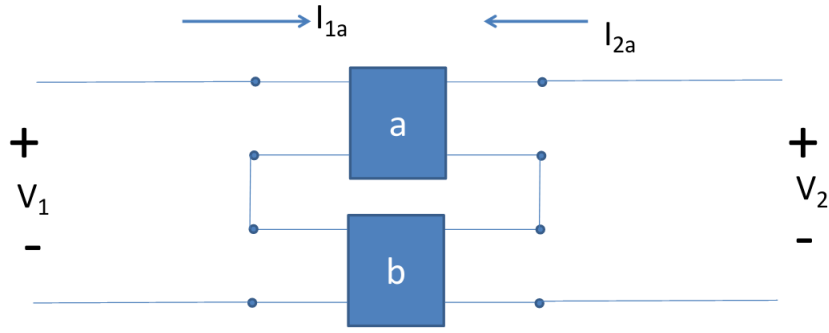


Figura 12: Associação em série

$$V_1 = (Z_{11a} + Z_{11b})I_1 + (Z_{12a} + Z_{12b})I_2 \quad (62)$$

$$V_2 = (Z_{21a} + Z_{21b})I_1 + (Z_{22a} + Z_{22b})I_2 \quad (63)$$

Ou seja, nas associações em série de quadripolos, no modelo com impedâncias, soma-se as impedâncias dos quadripolos da associação.

## 9.8 Associação em cascata

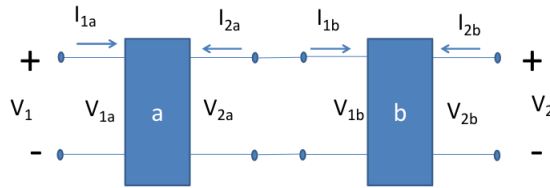


Figura 13: Associação em cascata

Seja o modelo de transmissão:

$$V_1 = AV_2 - BI_2 \quad (64)$$

$$I_1 = CV_2 - DI_2 \quad (65)$$

Donde tem-se:

$$V_1 = (A_a A_b + B_a C_b)V_2 - (A_a B_b + B_a D_b)I_2 \quad (66)$$

$$I_1 = (C_a A_b + D_a C_b)V_2 - (C_a B_b + D_a D_b)I_2 \quad (67)$$

Este modelo pode ser reescrito em termos de parâmetros de transmissão equivalentes:

$$V_1 = A_{eq}V_2 - B_{eq}I_2 \quad (68)$$

$$I_1 = C_{eq}V_2 - D_{eq}I_2 \quad (69)$$

Onde,

$$\begin{bmatrix} A_{eq} & B_{eq} \\ C_{eq} & D_{eq} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_a & B_a \\ C_a & D_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_b & B_b \\ C_b & D_b \end{bmatrix} \quad (70)$$

## 10 Transformadores

Os transformadores em circuitos elétricos são importantes pois possibilitam a transmissão em alta tensão, viabilizando a transmissão a longa distância.

Um dos enrolamentos é conectado a uma *fonte*; este enrolamento é denominado o **primário** do transformador. O outro terminal é dito o **secundário**, ao qual usualmente se conecta a *carga*.

### 10.1 Primário e secundário em carga

Quando tanto o primário como o secundário estão com correntes não nulas, então o fluxo magnético total em cada um dos enrolamentos é composto do fluxo gerado no próprio enrolamento e do fluxo mútuo recebido do outro enrolamento. E temos as seguintes equações:

$$v_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \quad (71)$$

$$v_2 = M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} \quad (72)$$

### 10.2 Convenção do ponto

Uma corrente  $i$  que entra num terminal com ponto (sem ponto) em um enrolamento induz uma tensão  $M \frac{di}{dt}$  com polaridade positiva no terminal com ponto (sem ponto) do outro enrolamento.

### 10.3 Impedância Refletida

Seja o seguinte circuito

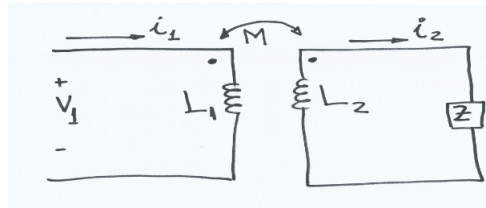


Figura 14: Impedância Refletida

O modelo do circuito é:

$$\underline{V}_1 = j\omega L_1 \underline{I}_1 - j\omega M \underline{I}_2 \quad (73)$$

$$0 = -j\omega M \underline{I}_1 + (Z + j\omega L_2) \underline{I}_2 \quad (74)$$

Donde tem-se que:

$$\underline{V}_1 = (j\omega L_1 + \frac{\omega^2 M^2}{Z + j\omega L_2}) \underline{I}_1 \quad (75)$$

Assim, a impedância vista pelos terminais do primário, a impedância equivalente, será:

$$\underline{Z}_e = j\omega L_1 + \frac{\omega^2 M^2}{Z + j\omega L_2} \quad (76)$$

O primeiro termo é a impedância própria e o segundo termo é a impedância do acoplamento, também conhecido como impedância refletida. Ela representa a carga adicional para o primário devido ao acoplamento eletromagnético e à carga  $Z$  do secundário.

## 10.4 Circuitos Equivalentes

### 10.4.1 Circuito 1

Como a impedância equivalente (76) leva em conta o acoplamento eletromagnético e a carga no secundário, então o circuito com o transformador e carga pode ser representado de forma equivalente pelo circuito mostrado na figura a seguir:

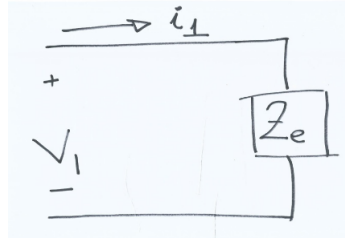


Figura 15: Circuito 1

### 10.4.2 Circuito 2

Sejam as equações a seguir:

$$v_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + m \frac{di_2}{dt} \quad (77)$$

$$v_2 = M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} \quad (78)$$

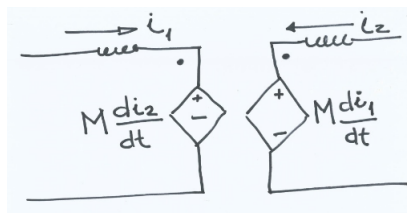


Figura 16: Circuito 2

### 10.4.3 Circuito 3

$$v_1 = (L_1 - M) \frac{di_1}{dt} + M \left( \frac{di_1}{dt} + \frac{di_2}{dt} \right) \quad (79)$$

$$v_2 = M \left( \frac{di_1}{dt} + \frac{di_2}{dt} \right) + (L_2 - M) \frac{di_2}{dt} \quad (80)$$



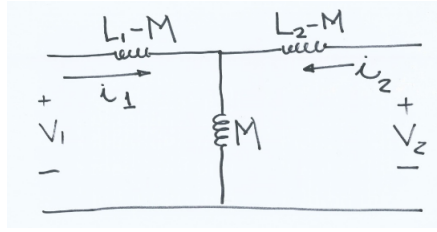


Figura 17: Circuito 3

## 10.5 Armazenamento de Energia em Transformadores

Sejam duas bobinas acopladas conforme a figura a seguir. A energia total fornecida

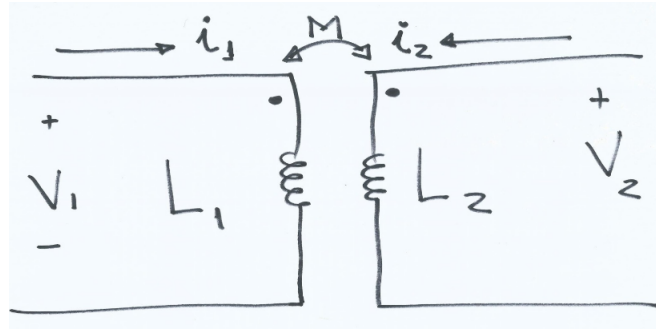


Figura 18: Bobinas Acopladas

pelos terminais é:

$$w = \frac{1}{2}L_1I_1^2 \pm MI_1I_2 + \frac{1}{2}L_2I_2^2 \quad (81)$$

O sinal de M depende da configuração de pontos.

## 10.6 Coeficiente de Acoplamento

Define-se o coeficiente de acoplamento por:

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1L_2}} \quad (82)$$

Onde,

$0 \leq k \leq 1$ , quando  $k = 0$  as bobinas não são acopladas, e  $k = 1$  são totalmente acopladas. Se  $k \leq 0.5$  é dito fracamente acoplada, e se  $k > 0.5$  é fortemente acoplado. Portanto, os limites de acoplamento são:

$$0 \leq M \leq \sqrt{L_1L_2} \quad (83)$$

## 10.7 Transformador Ideal

Um transformador ideal tem as seguintes características:

1. Sem perdas;
2. Acoplamento unitário;

$$M = \sqrt{L_1 L_2} \quad (84)$$

3. Indutâncias próprias infinitas, mas sua relação é finita.

Além disso, temos:

$$\frac{L_2}{L_1} = \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 = n^2 \quad (85)$$

$$\frac{V_2}{V_1} = n \quad (86)$$

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{1}{n} \quad (87)$$

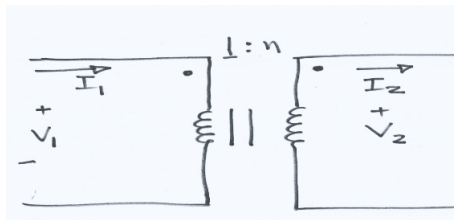


Figura 19: Transformador Ideal

Para esta configuração de pontos e de correntes as relações são para  $n$  positivo. Uma alteração nesta configuração torna as relações negativas ( $-n$ )