

Problemario de Análisis Vectorial

Barranco Jiménez Marco Antonio
e-mail: mabarrancoj@ipn.mx

June 24, 2004

1 Introducción

La presente selección de problemas resueltos de la materia de Análisis Vectorial, tiene como objetivo principal, el de proporcionar al alumno que cursa la materia, un apoyo bibliográfico más para el entendimiento de la misma, esperando que le sea de gran ayuda, en la aplicación de la teoría adquirida en el salón de clases y poder ejercitar sus conocimientos en la solución de problemas similares.

La mayoría de los problemas, son problemas que se resuelven como ejemplos en el salón de clases tratando en lo que cabe de cubrir el más mínimo detalle algebraico, con la única intención de lograr la mejor comprensión por parte del alumno, como puede observarse en la solución de cada problema. La mayoría de los problemas resueltos, son problemas que están propuestos en libros tradicionales de la materia, como por ejemplo, el libro de Análisis Vectorial de la editorial Mc Graw Hill (serie Schaum), cuyo autor es Murray R. Spiegel y el libro de Análisis Vectorial de la editorial Addison-Wesley Iberoamericana, cuyo autor es Hwei P. Hsu., entre otros.

La idea de escribir esta serie de problemas, es debida principalmente a la experiencia que el autor ha adquirido al impartir la materia en el primer semestre, en la Escuela Superior de Cómputo del IPN, de la carrera de Ingeniería en Sistemas Computacionales, y en la cual el índice de alumnos que no aprueban la materia es muy alto.

La materia de Análisis Vectorial por si sola, es una materia que generalmente es muy complicada para los estudiantes de nuevo ingreso, (aún impartándose ésta en un semestre posterior) en una carrera de Ingeniería en el área de Ciencias Físico-Matemáticas, este hecho tiene distintos puntos de vista; por ejemplo, los pocos conocimientos de las materias básicas de Matemáticas (Álgebra, Geometría Analítica, Cálculo Diferencial e Integral, Trigonometría, etc) con los que cuenta el estudiante al ingresar al nivel superior, sin embargo, como el lector podrá observar, en la solución de cada uno de los problemas resueltos, realmente son mínimos los conocimientos que el alumno necesita de las materias básicas de Matemáticas. Así también, podría ser el desinterés que muestran en general los alumnos hacia la materia, debido a que posiblemente las demás materias, como Matemáticas Discretas y Programación, por mencionar algunas, son materias que en general los conceptos son más "fáciles" de entender por parte del alumno, o son materias de un interés mayor por ser materias dirigidas a su formación.

Y principalmente, en realidad el temario de la materia (mencionando también que en algunos casos puede ser muy extenso para cubrirse en un semestre, como en muchas otras materias básicas), en general es difícil de asimilar por parte de los alumnos, conceptos por ejemplo, por citar algunos, como el de Gradiente, Divergencia y Rotacional, así como la parte de coordenadas curvilíneas que involucran el Cálculo de funciones de más de una variable, matemáticamente son complicados de manejar por los alumnos, sin mencionar la interpretación física de los mismos.

Este punto de vista puede o no ser compartida por muchos profesores que imparten o han impartido alguna vez la materia, y es muy respetable su opinión al respecto, sin embargo, como mencioné anteriormente, la experiencia adquirida al impartir la materia, me permiten hacer estas observaciones.

Los problemas se encuentran distribuidos de la siguiente forma:

En el capítulo 1 se tratan problemas que comprenden lo relacionado al Álgebra de vectores; desde las operaciones básicas de vectores, algunos problemas de aplicación a la Geometría Analítica, pasando por aplicaciones del producto escalar y vectorial, dependencia lineal, triple producto escalar de vectores, hasta ecuaciones de rectas y planos. En este capítulo, se pone énfasis en la aplicación de las propiedades elementales del producto escalar y vectorial entre vectores, los cuales son conceptos básicos muy importantes en un curso tradicional de la materia de Análisis Vectorial.

En el capítulo 2 se tratan problemas relacionados con el Cálculo Diferencial vectorial; desde el concepto de parametrización de curvas y superficies en el espacio, derivación de funciones vectoriales, aplicaciones de Gradiente, Divergencia y Rotacional, hasta llegar a coordenadas curvilíneas.

Así mismo, en el capítulo 3 se tratan problemas relacionados con el Cálculo Integral vectorial, desde ejemplos de integrales de línea, integrales de superficie e integrales de volumen, hasta llegar a problemas de aplicación de los teoremas integrales de Green, de Stokes y de Gauss.

Finalmente, como en cualquier tipo de trabajo, el lector tendrá la última palabra al decidir si se cumple el objetivo principal, así también, el autor está abierto a todo tipo de comentarios y sugerencias que serán bien venidas, para la mejora del presente trabajo.

2 Problemas del capítulo 1.

Problema 1:

Muestre que para cualquier vector $\vec{A} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$ se cumple que:

$$a).- \hat{i} \times [\hat{k} \times (\hat{j} \times \vec{A})] = a_3\hat{k},$$

$$b).- \hat{k} \times [\hat{j} \times (\hat{i} \times \vec{A})] = a_2\hat{j},$$

$$c).- \hat{j} \times [\hat{i} \times (\hat{k} \times \vec{A})] = a_1\hat{i},$$

no aplique la definición del determinante, usar las propiedades del producto vectorial.

Solución:

a).- Aplicando las propiedades del producto vectorial, tenemos

$$\begin{aligned} \hat{i} \times [\hat{k} \times (\hat{j} \times \vec{A})] &= \hat{i} \times [\hat{k} \times (\hat{j} \times (a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}))] \\ &= \hat{i} \times [\hat{k} \times (\hat{j} \times a_1\hat{i} + \hat{j} \times a_2\hat{j} + \hat{j} \times a_3\hat{k})] \\ &= \hat{i} \times [\hat{k} \times (-a_1\hat{k} + a_3\hat{i})] \\ &= \hat{i} \times [-a_1\hat{k} \times \hat{k} + a_3\hat{k} \times \hat{i}] \\ &= \hat{i} \times [a_3\hat{j}] \\ &= a_3\hat{k}. \end{aligned}$$

b) De la misma forma,

$$\begin{aligned} \hat{k} \times [\hat{j} \times (\hat{i} \times \vec{A})] &= \hat{k} \times [\hat{j} \times (\hat{i} \times (a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}))] \\ &= \hat{k} \times [\hat{j} \times (\hat{i} \times a_1\hat{i} + \hat{i} \times a_2\hat{j} + \hat{i} \times a_3\hat{k})] \\ &= \hat{k} \times [\hat{j} \times (a_2\hat{k} - a_3\hat{j})] \\ &= \hat{k} \times [\hat{j} \times a_2\hat{k} + \hat{j} \times a_3\hat{j}] \\ &= \hat{k} \times [a_2\hat{i}] \\ &= a_2\hat{j}. \end{aligned}$$

En forma análoga para el inciso c).

Problema 2.

Probar que

$$\hat{i} \times (\hat{i} \times \vec{A}) + \hat{j} \times (\hat{j} \times \vec{A}) + \hat{k} \times (\hat{k} \times \vec{A}) = -2\vec{A}$$

donde \vec{A} es cualquier vector en el espacio.

Solución:

Sea el vector \vec{A} en el espacio dado por,

$$\vec{A} = a\hat{i} + b\hat{j} + c\hat{k},$$

sustituyendo el vector \vec{A} y aplicando la propiedad distributiva del producto vectorial, obtenemos

$$\begin{aligned} \hat{i} \times (\hat{i} \times \vec{A}) + \hat{j} \times (\hat{j} \times \vec{A}) + \hat{k} \times (\hat{k} \times \vec{A}) &= \hat{i} \times [\hat{i} \times (a\hat{i} + b\hat{j} + c\hat{k})] \\ &\quad + \hat{j} \times [\hat{j} \times (a\hat{i} + b\hat{j} + c\hat{k})] \\ &\quad + \hat{k} \times [\hat{k} \times (a\hat{i} + b\hat{j} + c\hat{k})] \\ &= \hat{i} \times [\hat{i} \times a\hat{i} + \hat{i} \times b\hat{j} + \hat{i} \times c\hat{k}] + \\ &\quad \hat{j} \times [\hat{j} \times a\hat{i} + \hat{j} \times b\hat{j} + \hat{j} \times c\hat{k}] + \\ &\quad \hat{k} \times [\hat{k} \times a\hat{i} + \hat{k} \times b\hat{j} + \hat{k} \times c\hat{k}], \end{aligned}$$

aplicando la definición del producto vectorial para los vectores \hat{i} , \hat{j} y \hat{k} , y nuevamente aplicando la propiedad distributiva obtenemos,

$$\begin{aligned} \hat{i} \times (\hat{i} \times \vec{A}) + \hat{j} \times (\hat{j} \times \vec{A}) + \hat{k} \times (\hat{k} \times \vec{A}) &= \hat{i} \times [b\hat{k} - c\hat{j}] + \hat{j} \times [-a\hat{k} + c\hat{i}] + \hat{k} \times [a\hat{j} + b\hat{i}] \\ &= b\hat{i} \times \hat{k} - c\hat{i} \times \hat{j} - a\hat{j} \times \hat{k} + c\hat{j} \times \hat{i} + a\hat{k} \times \hat{j} - b\hat{k} \times \hat{i} \\ &= -b\hat{j} - c\hat{k} - a\hat{i} - c\hat{k} - a\hat{i} - b\hat{j} \end{aligned}$$

finalmente, obtenemos

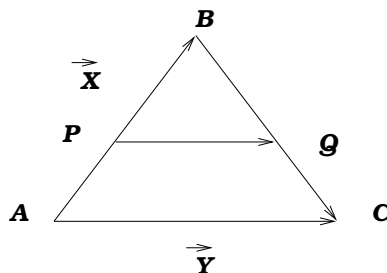
$$\hat{i} \times (\hat{i} \times \vec{A}) + \hat{j} \times (\hat{j} \times \vec{A}) + \hat{k} \times (\hat{k} \times \vec{A}) = -2a\hat{i} - 2b\hat{j} - 2c\hat{k} = -2\vec{A}.$$

Problema 3.

Demostrar que el segmento que une los puntos medios de dos lados de un triángulo es paralelo al tercer lado y tiene la mitad de su longitud.

Solución:

Consideremos un triángulo cuyos vértices son los puntos A , B y C , como se muestra en la figura.



De la figura, obtenemos

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{X}, \\ \overrightarrow{AC} &= \overrightarrow{Y}, \\ \overrightarrow{BC} &= \overrightarrow{Y} - \overrightarrow{X},\end{aligned}$$

por hipótesis tenemos que,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PB} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{X}, \\ \overrightarrow{BQ} &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{Y} - \overrightarrow{X}),\end{aligned}$$

asimismo, de la figura en el triángulo BQ obtenemos,

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BQ}$$

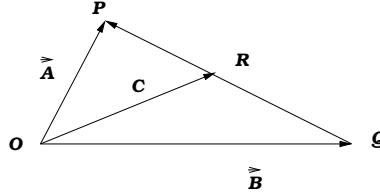
sustituyendo las ecuaciones anteriores,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PQ} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{X} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{Y} - \overrightarrow{X}) \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{Y},\end{aligned}$$

de donde se deduce que $|\overrightarrow{PQ}|$ es paralelo a $|\overrightarrow{Y}|$ y tiene $\frac{1}{2}$ de su longitud.

Problema 4.

Consideremos 3 puntos diferentes en el espacio O , P y Q , y sean $\overrightarrow{OP} = \vec{A}$, $\overrightarrow{OQ} = \vec{B}$ y R el punto medio del segmento \overline{QP} , demostrar como se ilustra en la figura, que el vector \vec{C} se puede escribir de la forma $\vec{C} = \frac{1}{2}(\vec{A} + \vec{B})$.



Solución:

De la figura y por hipótesis del problema se tiene que:

$$(1) \quad \overrightarrow{QR} = \frac{1}{2}\overrightarrow{QP},$$

además, aplicando la suma de vectores en el triángulo OPQ ,

$$(2) \quad \vec{B} + \overrightarrow{QP} = \vec{A},$$

y también de la figura, en el triángulo OQR , obtenemos

$$(3) \quad \vec{B} + \overrightarrow{QR} = \vec{C},$$

sustituyendo la ecuación (1) en la ecuación (3),

$$(4) \quad \vec{B} + \frac{1}{2}\overrightarrow{QP} = \vec{C},$$

por otro lado de la ecuación (2) $\overrightarrow{QP} = \vec{A} - \vec{B}$, sustituyendo en la ecuación (4) obtenemos,

$$\vec{B} + \frac{1}{2}(\vec{A} - \vec{B}) = \vec{C}$$

apicando las propiedades distributiva y asociativa obtenemos,

$$\vec{B} + \frac{1}{2}(\vec{A}) - \frac{1}{2}(\vec{B}) = \vec{C}$$

$$\frac{1}{2}(\vec{A}) + \frac{1}{2}(\vec{B}) = \vec{C}$$

finalmente, obtenemos

$$\vec{C} = \frac{1}{2}(\vec{A} + \vec{B}).$$

Problema 5.

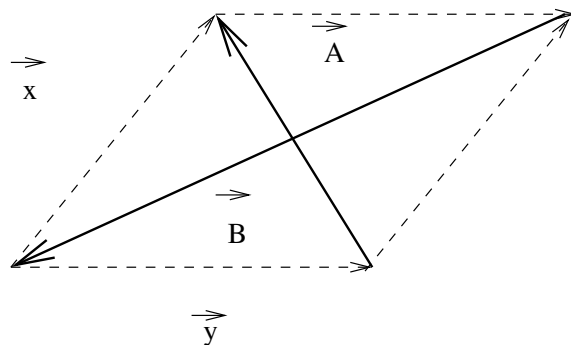
Hallar el área del paralelogramo cuyas diagonales son los vectores,

$$\begin{aligned}\vec{A} &= 3\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}, \\ \vec{B} &= \hat{i} - \hat{j} + 4\hat{k},\end{aligned}$$

Solución:

Geométricamente el producto vectorial de dos vectores \vec{A} y \vec{B} representa el área de un paralelogramo de lados \vec{A} y \vec{B} de la forma,

$$\text{Área} = |\vec{A} \times \vec{B}|,$$



en este caso, tenemos las diagonales del paralelogramo (ver figura), por lo que necesitamos encontrar los lados del paralelogramo en términos de las diagonales. De la figura anterior, obtenemos

$$\begin{aligned}a) \quad \vec{x} + \vec{y} &= -\vec{B} \\ b) \quad \vec{x} - \vec{y} &= \vec{A}\end{aligned}$$

sumamos las ecuaciones $a)$ y $b)$ obtenemos:

$$2\vec{x} = \vec{A} - \vec{B},$$

de donde,

$$c) \quad \vec{x} = \frac{1}{2}(\vec{A} - \vec{B}),$$

de forma análoga restando la ecuación $b)$ de la ecuación $a)$, obtenemos

$$d) \quad \vec{y} = -\frac{1}{2} (\vec{A} + \vec{B}).$$

De esta forma, de las ecuaciones c) y d), el área del paralelogramo está dada por:

$$\begin{aligned} \text{Área} &= |\vec{x} \times \vec{y}| \\ &= \left| \frac{1}{2} (\vec{A} - \vec{B}) \times \left(-\frac{1}{2} (\vec{A} + \vec{B}) \right) \right| \\ &= \left| -\frac{1}{4} (\vec{A} - \vec{B}) \times (\vec{A} + \vec{B}) \right|, \end{aligned}$$

aplicando las propiedades del producto vectorial tenemos,

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \frac{1}{4} |(\vec{A} - \vec{B}) \times \vec{A} + (\vec{A} - \vec{B}) \times \vec{B}| \\ &= \frac{1}{4} |-\vec{A} \times \vec{A} + \vec{A} \times \vec{B} - \vec{B} \times \vec{A} + \vec{B} \times \vec{B}| \\ &= \frac{1}{4} |2\vec{A} \times \vec{B}| \\ &= \frac{1}{2} |\vec{A} \times \vec{B}|, \end{aligned}$$

finalmente al sustituir los vectores dados obtenemos,

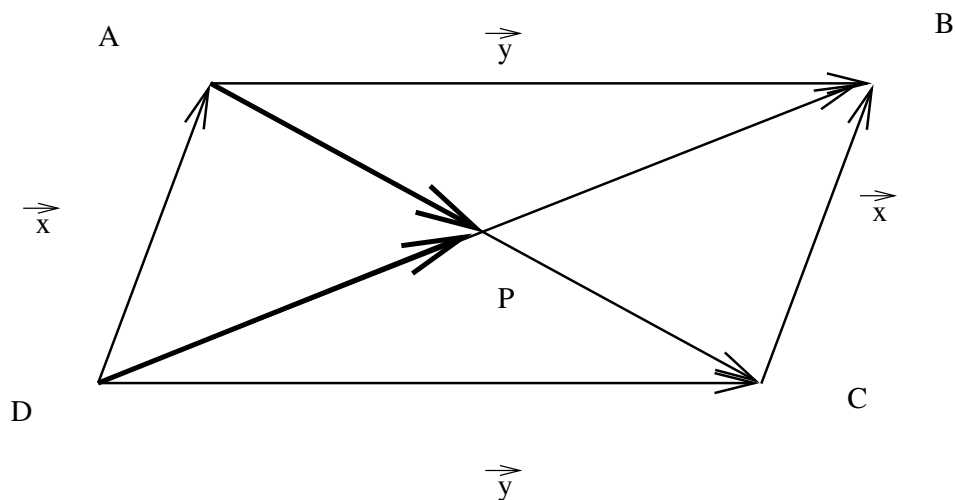
$$\begin{aligned} \text{Área} &= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} |(2\hat{i} - 14\hat{j} - 4\hat{k})| \\ &= | \hat{i} - 7\hat{j} - 2\hat{k} | \\ &= \sqrt{1 + 49 + 4} \\ &= \sqrt{54} \\ &= 3\sqrt{6}. \end{aligned}$$

Problema 6.

Demostrar que las diagonales de un paralelogramo se cortan en su punto medio.

Solución:

Sea el paralelogramo de vértices A , B , C y D , como se ilustra en la siguiente figura.



De la figura, tenemos

$$\begin{aligned}\overrightarrow{DA} &= \vec{x} = \overrightarrow{CB}, \\ \overrightarrow{DC} &= \vec{y} = \overrightarrow{AB},\end{aligned}$$

asimismo, aplicando la suma de vectores

$$(1) \quad \begin{aligned}\overrightarrow{DB} &= \vec{x} + \vec{y}, \\ \overrightarrow{AC} &= \vec{y} - \vec{x},\end{aligned}$$

por otro lado de la definición de paralelismo

$$(2) \quad \begin{aligned}\overrightarrow{DP} &= n\overrightarrow{DB}, \\ \overrightarrow{AP} &= m\overrightarrow{AC},\end{aligned}$$

de las ecuaciones (1) y (2) obtenemos,

$$(3) \quad \begin{aligned}\overrightarrow{DP} &= n(\vec{x} + \vec{y}), \\ \overrightarrow{AP} &= m(\vec{y} - \vec{x}),\end{aligned}$$

por otro lado, en el triángulo DAP , tenemos $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{DP}$, es decir;

$$(4) \quad \vec{x} + \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{DP},$$

sustituyendo las ecuaciones (3) en la ecuación (4) obtenemos,

$$\vec{x} + m(\vec{y} - \vec{x}) = n(\vec{x} + \vec{y}),$$

aplicando las propiedades de la adición de vectores obtenemos,

$$\vec{x} + m\vec{y} - m\vec{x} - n\vec{x} - n\vec{y} = \vec{0},$$

o también,

$$(1 - m - n)\vec{x} + (m - n)\vec{y} = \vec{0},$$

de la ecuación anterior, como los vectores \vec{x} y \vec{y} son distintos del vector $\vec{0}$

y no paralelos, entonces la igualdad anterior sólo se cumple si los escalares son iguales a cero, es decir;

$$\begin{aligned} 1 - m - n &= 0, \\ m - n &= 0, \end{aligned}$$

resolviendo el sistema de ecuaciones para n y m obtenemos,

$$n = m = \frac{1}{2},$$

por lo tanto, sustituyendo en las ecuaciones (2) obtenemos

$$\begin{aligned} \overrightarrow{DP} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{DB}, \\ \overrightarrow{AP} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}. \end{aligned}$$

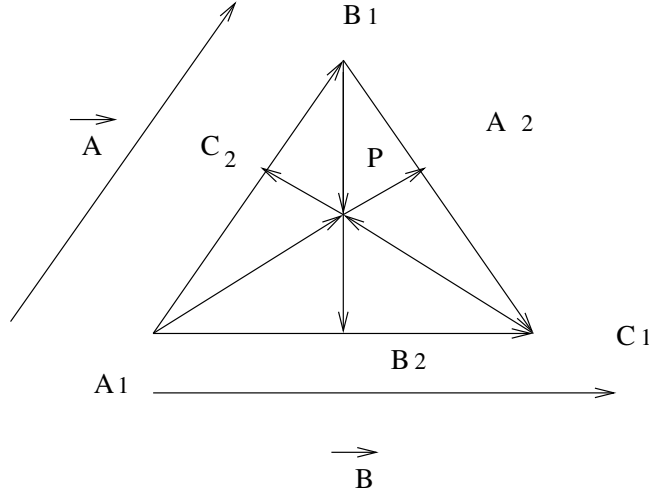
Como se ilustra geométicamente en la figura.

Problema 7.

Demostrar que las medianas de un triángulo se cortan en un punto que esta a $\frac{1}{3}$ del lado y $\frac{2}{3}$ del vértice opuesto para cada mediana respectivamente.

Solución:

Sea el triángulo cuyos vértices son A_1, B_1 y C_1 . Asimismo sean A_2, B_2 y C_2 los puntos medios de cada lado respectivamente, como se ilustra en la figura. Si P es el punto de intersección de las medianas, entonces para demostrar que las medianas se cortan en un punto que esta a $\frac{1}{3}$ del lado y $\frac{2}{3}$ del vértice opuesto para cada mediana debemos mostrar que se cumplen las siguientes relaciones:



$$\begin{aligned}\overrightarrow{A_1P} &= \frac{2}{3}\overrightarrow{A_1A_2}, \\ \overrightarrow{B_1P} &= \frac{2}{3}\overrightarrow{B_1B_2}, \\ \overrightarrow{C_1P} &= \frac{2}{3}\overrightarrow{C_1C_2},\end{aligned}\quad (a)$$

o equivalentemente,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PA_2} &= \frac{1}{3}\overrightarrow{A_1A_2}, \\ \overrightarrow{PB_2} &= \frac{1}{3}\overrightarrow{B_1B_2}, \\ \overrightarrow{PC_2} &= \frac{1}{3}\overrightarrow{C_1C_2},\end{aligned}\quad (b)$$

como se ilustra geométricamente en la figura. Sean los lados del triángulo dados por \vec{A} y \vec{B} , de la figura tenemos las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned}\vec{A} &= \overrightarrow{A_1B_1}, \\ \vec{B} &= \overrightarrow{A_1C_1}, \\ \vec{B} - \vec{A} &= \overrightarrow{B_1C_1}.\end{aligned}$$

Aplicando la definición de paralelismo, de la figura obtenemos

$$\begin{aligned}\overrightarrow{A_1P} &= l \left(\overrightarrow{A_1A_2} \right), \\ \overrightarrow{B_1P} &= m \left(\overrightarrow{B_1B_2} \right), \\ \overrightarrow{C_1P} &= n \left(\overrightarrow{C_1C_2} \right),\end{aligned}\quad (c)$$

por otro lado, aplicando la suma y diferencia de vectores en los triángulos A_1C_1P , B_1C_1P y A_1B_1P obtenemos,

$$\begin{aligned}\vec{B} + \overrightarrow{C_1P} &= \overrightarrow{A_1P}, \\ \left(\vec{B} - \vec{A} \right) + \overrightarrow{C_1P} &= \overrightarrow{B_1P}, \\ \left(\vec{B} - \vec{A} \right) + \overrightarrow{C_1P} &= \overrightarrow{B_1P},\end{aligned}\quad (d)$$

pero, de la figura tenemos también las siguientes relaciones

$$\begin{aligned}\overrightarrow{A_1A_2} &= \vec{A} + \frac{1}{2} \left(\vec{B} - \vec{A} \right) = \frac{1}{2} \left(\vec{A} + \vec{B} \right), \\ \overrightarrow{B_1B_2} &= \frac{1}{2} \vec{B} - \vec{A}, \\ \overrightarrow{C_1C_2} &= \frac{1}{2} \vec{A} - \vec{B},\end{aligned}\quad (e)$$

que resultan de aplicar la suma y diferencia de los vectores en los triángulos $A_1B_1A_2$, $A_1C_1C_2$ y $A_1B_1B_2$ respectivamente. De las ecuaciones (a) y (b) se obtiene,

$$\begin{aligned}\vec{B} + n \left(\overrightarrow{C_1C_2} \right) &= l \left(\overrightarrow{A_1A_2} \right), \\ \left(\vec{B} - \vec{A} \right) + n \left(\overrightarrow{C_1C_2} \right) &= m \left(\overrightarrow{B_1B_2} \right), \\ \vec{A} + m \left(\overrightarrow{B_1B_2} \right) &= n \left(\overrightarrow{A_1A_2} \right),\end{aligned}\quad (f)$$

sustituyendo las ecuaciones (e) en las ecuaciones (f) obtenemos,

$$\begin{aligned}\vec{B} + n \left(\frac{1}{2} \vec{B} - \vec{A} \right) &= l \left(\frac{1}{2} \left(\vec{A} + \vec{B} \right) \right), \\ \left(\vec{B} - \vec{A} \right) + n \left(\frac{1}{2} \vec{B} - \vec{A} \right) &= m \left(\frac{1}{2} \vec{B} - \vec{A} \right), \\ \vec{A} + m \left(\frac{1}{2} \vec{B} - \vec{A} \right) &= \frac{n}{2} \left(\vec{A} + \vec{B} \right),\end{aligned}\quad (g)$$

aplicando las propiedades de la suma de vectores, obtenemos

$$\begin{aligned}
\left(\frac{n}{2} - \frac{l}{2}\right) \vec{A} + \left(1 - n - \frac{l}{2}\right) \vec{B} &= \vec{0}, \\
\left(m + \frac{n}{2} - 1\right) \vec{A} + \left(1 - n - \frac{m}{2}\right) \vec{B} &= \vec{0}, \\
\left(1 - m - \frac{l}{2}\right) \vec{A} + \left(\frac{n}{2} - \frac{l}{2}\right) \vec{B} &= \vec{0}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, como \vec{A} y \vec{B} son vectores distintos de cero, entonces para que se cumplan las ecuaciones anteriores los escalares deben ser cero, es decir;

$$\begin{aligned}
\frac{n}{2} - \frac{l}{2} &= 0 \\
1 - n - \frac{l}{2} &= 0 \\
m + \frac{n}{2} - 1 &= 0 \\
1 - n - \frac{m}{2} &= 0 \\
1 - m - \frac{l}{2} &= 0 \\
\frac{n}{2} - \frac{l}{2} &= 0
\end{aligned}$$

así, al resolver las ecuaciones anteriores obtenemos

$$n = l = m = \frac{2}{3}.$$

Finalmente, al sustituir en las ecuaciones (c) se obtienen las ecuaciones (a) que es el resultado que se pedia demostrar.

Problema 8.

Pruebe que $\left| \vec{A} \right| \vec{B} + \left| \vec{B} \right| \vec{A}$ es perpendicular a $\left| \vec{A} \right| \vec{B} - \left| \vec{B} \right| \vec{A}$, para cualesquiera \vec{A} y \vec{B} .

Solución:

De la definición del producto escalar de dos vectores, si dos vectores \vec{x} y \vec{y} son perpendiculares entonces su producto escalar entre ellos es igual a cero, en este caso \vec{x} y \vec{y} están dados respectivamente por $\left| \vec{A} \right| \vec{B} + \left| \vec{B} \right| \vec{A}$ y $\left| \vec{A} \right| \vec{B} - \left| \vec{B} \right| \vec{A}$, de esta forma debemos verificar que los vectores dados cumplen que,

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = \left(\left| \vec{A} \right| \vec{B} + \left| \vec{B} \right| \vec{A} \right) \cdot \left(\left| \vec{A} \right| \vec{B} - \left| \vec{B} \right| \vec{A} \right) = 0,$$

aplicando la propiedad distributiva del producto escalar tenemos,

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = \left(\left| \vec{A} \right| \vec{B} + \left| \vec{B} \right| \vec{A} \right) \cdot \left| \vec{A} \right| \vec{B} + \left(\left| \vec{A} \right| \vec{B} + \left| \vec{B} \right| \vec{A} \right) \cdot \left(- \left| \vec{B} \right| \vec{A} \right),$$

asimismo, aplicando las propiedades conmutativa y distributiva nuevamente,

tenemos

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = \left| \vec{A} \right| \vec{B} \cdot \left| \vec{A} \right| \vec{B} + \left| \vec{A} \right| \vec{B} \cdot \left| \vec{B} \right| \vec{A} - \left| \vec{B} \right| \vec{A} \cdot \left| \vec{A} \right| \vec{B} - \left| \vec{B} \right| \vec{A} \cdot \left| \vec{B} \right| \vec{A},$$

ahora aplicamos las propiedades asociativa del escalar y la propiedad de la norma,

$$\begin{aligned} \vec{x} \cdot \vec{y} &= \left| \vec{A} \right| \left| \vec{A} \right| \vec{B} \cdot \vec{B} + \left| \vec{A} \right| \left| \vec{B} \right| \vec{B} \cdot \vec{A} - \left| \vec{B} \right| \left| \vec{A} \right| \vec{A} \cdot \vec{B} - \left| \vec{B} \right| \left| \vec{B} \right| \vec{A} \cdot \vec{A} \\ &= A^2 B^2 + AB \vec{B} \cdot \vec{A} - AB \vec{A} \cdot \vec{B} - B^2 A^2 \\ &= 0. \end{aligned}$$

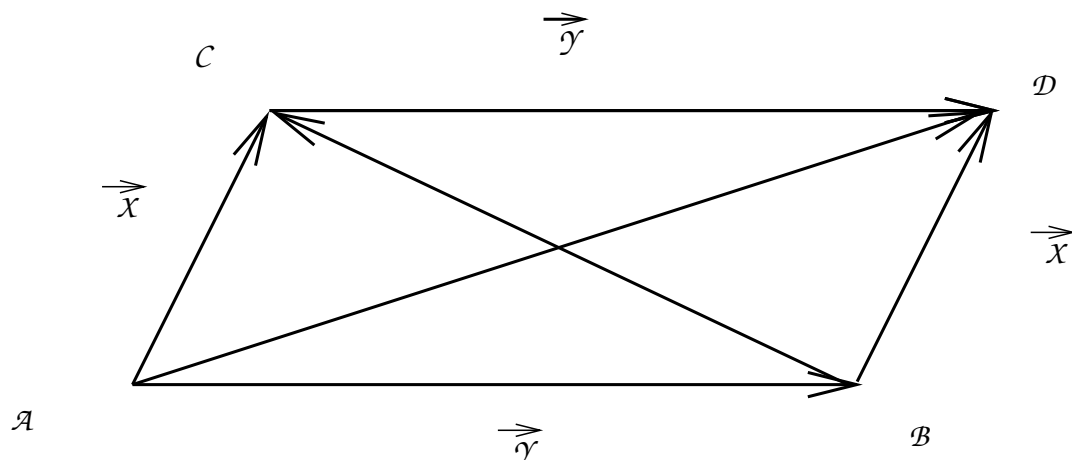
donde se aplicó finalmente la propiedad conmutativa del producto escalar.

Problema 9.

Demostrar que la suma de los cuadrados de las diagonales de un paralelogramo es igual a la suma de los cuadrados de sus lados.

Solución:

Sean A, B, C y D los vértices del paralelogramo como se indica en la figura.



De la figura tenemos que,

$$\begin{aligned}\overline{AC} &= \overline{BD} = |\vec{X}|, \\ \overline{AB} &= \overline{CD} = |\vec{Y}|,\end{aligned}$$

asimismo de la figura, las diagonales del paralelogramo están dadas por

$$\begin{aligned}\overline{BC} &= |\vec{X} + \vec{Y}|, \\ \overline{AD} &= |\vec{X} - \vec{Y}|.\end{aligned}$$

Debemos mostrar que,

$$\begin{aligned}\overline{BC}^2 + \overline{AD}^2 &= \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 + \overline{CD}^2 + \overline{BD}^2 \\ &= 2\overline{AC}^2 + 2\overline{AB}^2,\end{aligned}$$

es decir,

$$\left|\vec{X} + \vec{Y}\right|^2 + \left|\vec{X} - \vec{Y}\right|^2 = 2\left|\vec{X}\right|^2 + 2\left|\vec{Y}\right|^2.$$

En forma análoga, al problema anterior, aplicando las propiedades del producto escalar,

$$\begin{aligned} \left|\vec{X} + \vec{Y}\right|^2 + \left|\vec{X} - \vec{Y}\right|^2 &= (\vec{X} + \vec{Y}) \cdot (\vec{X} + \vec{Y}) + (\vec{X} - \vec{Y}) \cdot (\vec{X} - \vec{Y}) \\ &= (\vec{X} + \vec{Y}) \cdot \vec{X} + (\vec{X} + \vec{Y}) \cdot \vec{Y} + (\vec{X} - \vec{Y}) \cdot \vec{X} + (\vec{X} - \vec{Y}) \cdot \vec{Y} \\ &= \vec{X} \cdot \vec{X} + \vec{X} \cdot \vec{Y} + \vec{X} \cdot \vec{Y} + \vec{Y} \cdot \vec{Y} + \vec{X} \cdot \vec{X} - \vec{X} \cdot \vec{Y} - \vec{X} \cdot \vec{Y} + \vec{Y} \cdot \vec{Y} \\ &= 2\vec{X} \cdot \vec{X} + 2\vec{Y} \cdot \vec{Y} \\ &= 2\left|\vec{X}\right|^2 + 2\left|\vec{Y}\right|^2. \end{aligned}$$

Problema 10.

Sean los vectores \vec{A} y \vec{B} vectores unitarios, calcular $(3\vec{A} - 4\vec{B}) \cdot (2\vec{A} + 5\vec{B})$ si $|\vec{A} + \vec{B}| = \sqrt{2}$.

Solución:

En forma análoga al problema anterior, aplicando las propiedades del producto escalar, tenemos que

$$\begin{aligned}(3\vec{A} - 4\vec{B}) \cdot (2\vec{A} + 5\vec{B}) &= (3\vec{A} - 4\vec{B}) \cdot 2\vec{A} + (3\vec{A} - 4\vec{B}) \cdot 5\vec{B} \\&= 2\vec{A} \cdot 3\vec{A} - 2\vec{A} \cdot 4\vec{B} + 5\vec{B} \cdot 3\vec{A} - 5\vec{B} \cdot 4\vec{B} \\&= 6\vec{A} \cdot \vec{A} + 7\vec{A} \cdot \vec{B} - 20\vec{B} \cdot \vec{B} \\&= 7\vec{A} \cdot \vec{B} - 14\end{aligned}$$

donde se aplicó la hipótesis de que los vectores \vec{A} y \vec{B} son unitarios es decir que cumplen que,

$$\begin{aligned}\vec{A} \cdot \vec{A} &= A^2 = 1, \\ \vec{B} \cdot \vec{B} &= B^2 = 1.\end{aligned}$$

Por otro lado, de la condición $|\vec{A} + \vec{B}| = \sqrt{2}$, elevando al cuadrado ésta expresión y aplicando la propiedad de la norma del producto escalar, obtenemos

$$(\vec{A} + \vec{B}) \cdot (\vec{A} + \vec{B}) = 2$$

de donde,

$$\begin{aligned}(\vec{A} + \vec{B}) \cdot \vec{A} + (\vec{A} + \vec{B}) \cdot \vec{B} &= 2 \\ \vec{A} \cdot \vec{A} + 2\vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{B} \cdot \vec{B} &= 2\end{aligned}$$

de la expresión anterior, obtenemos inmediatamente que $\vec{A} \cdot \vec{B} = 0$. Por lo tanto, sustituyendo este valor, obtenemos finalmente,

$$(3\vec{A} - 4\vec{B}) \cdot (2\vec{A} + 5\vec{B}) = -14.$$

Problema 11.

Determine λ_1 y λ_2 de manera que $\vec{C} - \lambda_1 \vec{A} - \lambda_2 \vec{B}$ sea perpendicular tanto a \vec{A} como a \vec{B} , suponiendo que

$$\begin{aligned}\vec{A} &= \hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k} \\ \vec{B} &= 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k} \\ \vec{C} &= 2\hat{i} - \hat{j} + 4\hat{k}\end{aligned}$$

Solución:

En forma análoga al problema anterior, aplicando la condición de perpendicularidad entre vectores, tenemos

$$\begin{aligned}\vec{A} \cdot (\vec{C} - \lambda_1 \vec{A} - \lambda_2 \vec{B}) &= 0, \\ \vec{B} \cdot (\vec{C} - \lambda_1 \vec{A} - \lambda_2 \vec{B}) &= 0,\end{aligned}$$

usando las propiedades del producto escalar, tenemos

$$\begin{aligned}\vec{A} \cdot \vec{C} - \lambda_1 \vec{A} \cdot \vec{A} - \lambda_2 \vec{A} \cdot \vec{B} &= 0, \\ \vec{B} \cdot \vec{C} - \lambda_1 \vec{B} \cdot \vec{A} - \lambda_2 \vec{B} \cdot \vec{B} &= 0,\end{aligned}$$

que se puede escribir de la forma,

$$\begin{aligned}\lambda_1 \vec{A} \cdot \vec{A} + \lambda_2 \vec{A} \cdot \vec{B} &= \vec{A} \cdot \vec{C}, \\ \lambda_1 \vec{B} \cdot \vec{A} + \lambda_2 \vec{B} \cdot \vec{B} &= \vec{B} \cdot \vec{C},\end{aligned}$$

de los vectores dados, tenemos inmediatamente aplicando la definición del producto escalar para vectores en el espacio,

$$\vec{A} \cdot \vec{A} = 6, \quad \vec{B} \cdot \vec{B} = 6 \quad \vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A} = 3, \quad \vec{A} \cdot \vec{C} = 9 \quad \text{y} \quad \vec{B} \cdot \vec{C} = 9$$

de tal forma, para encontrar λ_1 y λ_2 debemos de resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 6\lambda_1 + 3\lambda_2 &= 9, \\ 3\lambda_1 + 6\lambda_2 &= 9, \end{aligned}$$

obsérvese que la solución del sistema de ecuaciones es inmediata y está dada por:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 1 \\ \lambda_2 &= 1. \end{aligned}$$

Problema 12.

Sean los vectores

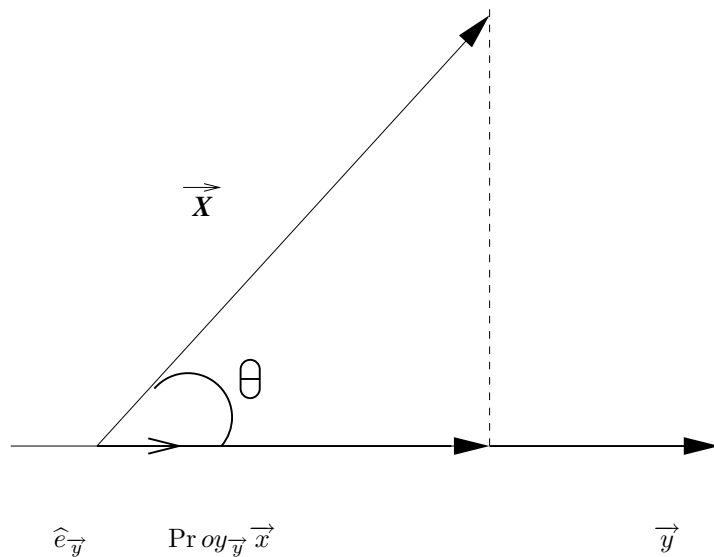
$$\begin{aligned}\vec{A} &= (1, -1, 2), \\ \vec{B} &= (1, 2, 2).\end{aligned}$$

Hallar la proyección del vector \vec{A} sobre el vector \vec{B} y la proyección del vector \vec{B} sobre el vector \vec{A} .

Solución:

Por definición, la proyección de un vector \vec{x} sobre otro vector \vec{y} , es un vector (como se muestra en la figura) y está dado por,

$$\text{Pr } oy_{\vec{y}} \vec{x} = |\vec{x}| \cos \theta \hat{e}_{\vec{y}},$$



en este caso debemos calcular,

$$\begin{aligned}\text{Pr } oy_{\vec{B}} \vec{A} &= |\vec{A}| \cos \theta \hat{e}_{\vec{B}}, \\ \text{Pr } oy_{\vec{A}} \vec{B} &= |\vec{B}| \cos \theta \hat{e}_{\vec{A}},\end{aligned}$$

donde $|\vec{A}|$ es la magnitud del vector \vec{A} , $|\vec{B}|$ es la magnitud del vector \vec{B} , θ el

ángulo formado entre los dos vectores, $\widehat{e}_{\vec{A}}$ un vector unitario en la dirección del vector \vec{A} y $\widehat{e}_{\vec{B}}$ un vector unitario en la dirección del vector \vec{B} . De la definición del producto escalar podemos calcular el coseno del ángulo entre dos vectores de la forma,

$$\cos \theta = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{A}| |\vec{B}|},$$

y empleando la definición de vectores unitarios, los vectores de proyección están dados por,

$$\begin{aligned} \text{Pr}_{oy_{\vec{B}}} \vec{A} &= |\vec{A}| \left(\frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{A}| |\vec{B}|} \right) \frac{\vec{B}}{|\vec{B}|} = \left(\frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{B^2} \right) \vec{B}, \\ \text{Pr}_{oy_{\vec{A}}} \vec{B} &= |\vec{B}| \left(\frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{A}| |\vec{B}|} \right) \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|} = \left(\frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{A^2} \right) \vec{A}, \end{aligned}$$

finalmente, calculando el producto escalar de los vectores dados y la magnitudes de los vectores \vec{A} y \vec{B} , obtenemos

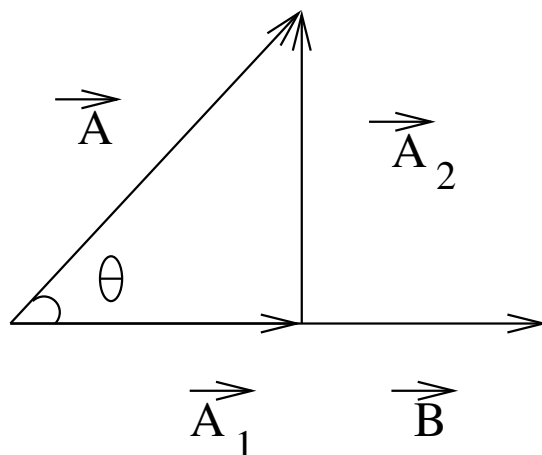
$$\text{Pr}_{oy_{\vec{B}}} \vec{A} = \frac{3}{9} \vec{B} = \frac{1}{3} \vec{B},$$

y

$$\text{Pr}_{oy_{\vec{A}}} \vec{B} = \frac{3}{6} \vec{A} = \frac{1}{2} \vec{A}.$$

Problema 13:

Considere la siguiente figura,



demostrar que

$$\vec{A} = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{\vec{B} \cdot \vec{B}} \vec{B} + \frac{(\vec{B} \times \vec{A}) \times \vec{B}}{\vec{B} \cdot \vec{B}}.$$

Solución:

De la figura, el vector $\vec{A} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2$, el vector \vec{A}_1 es la proyección del vector \vec{A} sobre el vector \vec{B} dada por

$$\vec{A}_1 = \text{proy}_{\vec{B}} \vec{A} = |\vec{A}| \cos \theta \hat{e}_{\vec{B}},$$

de la definición del producto escalar de dos vectores \vec{A} y \vec{B} distintos del vector $\vec{0}$, dada por,

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| |\vec{B}| \cos \theta,$$

podemos calcular el ángulo entre los dos vectores, de esta forma la proyección del vector \vec{A} sobre el vector \vec{B} está dada por:

$$\begin{aligned}
\text{proy}_{\vec{B}} \vec{A} &= |\vec{A}| \left[\frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{A}| |\vec{B}|} \right] \frac{\vec{B}}{|\vec{B}|} \\
&= \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{B}|^2} \vec{B} \\
&= \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{\vec{B} \cdot \vec{B}} \vec{B},
\end{aligned}$$

donde se aplicó la propiedad de la norma del producto escalar. Para vector \vec{A}_2 ,

obsérvese que el vector $\vec{C} = \vec{B} \times \vec{A}$ es perpendicular tanto al vector \vec{A} como al vector \vec{B} , es decir, saliendo de la hoja, de tal forma que el vector $\vec{C} \times \vec{A}$ será un vector que está en la dirección de \vec{A}_2 , es decir, el vector $(\vec{B} \times \vec{A}) \times \vec{A}$ esta en dirección de \vec{A} , de tal forma que la magnitud de este vector está dada por:

$$|(\vec{B} \times \vec{A}) \times \vec{B}| = |\vec{B} \times \vec{A}| |\vec{B}| \sin \phi,$$

donde el ángulo ϕ entre los vectores $\vec{B} \times \vec{A}$ y \vec{B} es de 90° , de esta forma

como $\sin 90^\circ = 1$, obtenemos

$$|(\vec{B} \times \vec{A}) \times \vec{B}| = |\vec{B}| |\vec{A}| \sin \theta |\vec{B}|,$$

es decir,

$$|(\vec{B} \times \vec{A}) \times \vec{B}| = |\vec{A}| |\vec{B}|^2 \sin \theta,$$

por otro lado, de la figura

$$|\vec{A}_2| = |\vec{A}| \sin \theta,$$

por lo tanto,

$$\vec{A}_2 = \frac{(\vec{B} \times \vec{A}) \times \vec{B}}{\vec{B} \cdot \vec{B}},$$

finalmente, sustituyendo los valores de los vectores \vec{A}_1 y \vec{A}_2 obtenemos,

$$\vec{A} = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{\vec{B} \cdot \vec{B}} \vec{B} + \frac{(\vec{B} \times \vec{A}) \times \vec{B}}{\vec{B} \cdot \vec{B}}.$$

Problema 14.

Encuentre un vector unitario perpendicular a los vectores

$$\begin{aligned}\vec{A} &= 2\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}, \\ \vec{B} &= \hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k},\end{aligned}$$

- a) Aplicando el producto escalar.
b) Aplicando el producto vectorial (sin hacer uso de la definición del determinante).

Solución:

a) Debemos encontrar un vector $\vec{C} = (C_1, C_2, C_3)$ que sea perpendicular a los vectores \vec{A} y \vec{B} simultáneamente, es decir que cumpla que,

$$\begin{aligned}\vec{A} \cdot \vec{C} &= 0, \\ \vec{B} \cdot \vec{C} &= 0,\end{aligned}$$

realizando el producto escalar de los vectores dados obtenemos,

$$\begin{aligned}2C_1 + 2C_2 - 3C_3 &= 0, \\ C_1 + 3C_2 + C_3 &= 0,\end{aligned}$$

resolviendo el sistema de ecuaciones (multiplicando la segunda ecuación por -2 y sumando ésta con la primera ecuación) obtenemos,

$$-4C_2 - 5C_3 = 0,$$

de donde,

$$C_2 = \frac{-5}{4}C_3,$$

sustituyendo este valor para C_2 , en por ejemplo la segunda ecuación, obtenemos

$$\begin{aligned}C_1 &= -3\left(\frac{-5}{4}C_3\right) - C_3 \\ &= \frac{11}{4}C_3.\end{aligned}$$

De esta forma, el vector buscado tiene la forma,

$$\vec{C} = \frac{11}{4}C_3\hat{i} - \frac{5}{4}C_3\hat{j} + C_3\hat{k},$$

además el vector buscado, \vec{C} , debe cumplir que sea unitario, es decir que cumpla que,

$$|\vec{C}| = 1,$$

aplicando la definición para calcular la magnitud de un vector, obtenemos

$$\begin{aligned} \sqrt{\left(\frac{11}{4}C_3\right)^2 + \left(\frac{5}{4}C_3\right)^2 + C_3^2} &= 1 \\ \sqrt{\frac{C_3^2}{16}(121 + 25 + 16)} &= 1 \\ C_3^2 \left(\frac{\sqrt{162}}{4}\right) &= 1 \end{aligned}$$

despejando C_3 , obtenemos

$$C_3 = \pm \frac{4}{\sqrt{162}} = \pm \frac{4}{9\sqrt{2}}$$

finalmente, al sustituir el valor de C_3 , en la expresión para el vector \vec{C} , obtenemos

$$\vec{C} = \pm \frac{1}{9\sqrt{2}}(11\hat{i} - 5\hat{j} + 4\hat{k})$$

b) En esta parte, como se nos pide que no hagamos uso del determinante para calcular el producto vectorial, que como se sabe $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$, es un vector que por definición es perpendicular tanto a \vec{A} como a \vec{B} , debemos emplear las propiedades (anticonmutativa, asociativa, distributiva, etc.) que cumple el producto vectorial, por lo tanto

$$\begin{aligned} \vec{A} \times \vec{B} &= (2\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}) \times (\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}) \\ &= (2\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}) \times \hat{i} + (2\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}) \times (3\hat{j}) + (2\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}) \times \hat{k} \\ &= -\hat{i} \times (2\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}) - 3\hat{j}(2\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}) - \hat{k} \times (2\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}) \\ &= -2 \times \hat{i} - 2\hat{i} \times \hat{j} + 3\hat{j} \times \hat{k} - 6\hat{j} \times \hat{i} - 6\hat{j} \times \hat{j} + 9\hat{j} \times \hat{k} - 2\hat{k} \times \hat{i} - 2\hat{k} \times \hat{j} + 3\hat{k} \times \hat{k} \\ &= -2\hat{k} - 3\hat{j} + 6\hat{k} + 9\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{i} \\ &= 11\hat{i} - 5\hat{j} + 4\hat{k}, \end{aligned}$$

finalmente, el vector unitario estará dado por:

$$\hat{e}_{\vec{A} \times \vec{B}} = \frac{\vec{A} \times \vec{B}}{|\vec{A} \times \vec{B}|} = \frac{11\hat{i} - 5\hat{j} + 4\hat{k}}{\sqrt{121 + 25 + 16}} = \pm \frac{1}{9\sqrt{2}} (11\hat{i} - 5\hat{j} + 4\hat{k}).$$

Problema 15.

Hallar un vector unitario que forme un ángulo de 45° con el vector $\vec{A} =$

$2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ y un ángulo de 60° con el vector $\vec{B} = \hat{j} - \hat{k}$.

Solución:

Buscamos un vector de la forma $\vec{C} = (C_1, C_2, C_3)$ donde el vector \vec{C} debe cumplir,

$$\begin{aligned}\vec{A} \cdot \vec{C} &= AC \cos 45^\circ \\ \vec{B} \cdot \vec{C} &= BC \cos 60^\circ\end{aligned}$$

y

$$|\vec{C}| = 1$$

es decir,

$$\begin{aligned}(2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}) \cdot (C_1\hat{i} + C_2\hat{j} + C_3\hat{k}) &= \sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ (\hat{j} - \hat{k}) \cdot (C_1\hat{i} + C_2\hat{j} + C_3\hat{k}) &= \sqrt{1^2 + (-1)^2} \left(\frac{1}{2}\right) \\ \sqrt{(C_1)^2 + (C_2)^2 + (C_3)^2} &= 1\end{aligned}$$

que resulta,

$$\begin{aligned}(1) \quad 2C_1 + 2C_2 - C_3 &= \frac{3}{\sqrt{2}} \\ (2) \quad C_2 - C_3 &= \frac{\sqrt{2}}{2} \\ (3) \quad \sqrt{(C_1)^2 + (C_2)^2 + (C_3)^2} &= 1\end{aligned}$$

así, se tienen 3 ecuaciones con 3 incógnitas. Por lo tanto, la solución del problema se tendrá al resolver simultáneamente las ecuaciones (1), (2) y (3).

De la ecuación (2), obtenemos $C_3 = C_2 - \frac{\sqrt{2}}{2}$, sustituyendo en la ecuación (1) obtenemos,

$$\begin{aligned}2C_1 + 2C_2 - \left(C_2 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) &= \frac{3}{\sqrt{2}} \\ 2C_1 + 2C_2 - C_2 + \frac{1}{\sqrt{2}} &= \frac{3}{\sqrt{2}} \\ 2C_1 + C_2 &= \frac{2}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

finalmente, obtenemos

$$C_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{C_2}{2}.$$

Por lo tanto el vector \vec{C} será de la forma,

$$4) \quad \vec{C} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{C_2}{2}\right)\hat{i} + C_2\hat{j} + \left(C_2 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\hat{k},$$

aplicando la ecuación (3),

$$\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{C_2}{2}\right)^2 + (C_2)^2 + \left(C_2 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = 1,$$

realizando un poco de álgebra se obtiene,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} - 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{C_2}{2}\right) + \frac{(C_2)^2}{4} + (C_2)^2 + (C_2)^2 - 2C_2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{2} &= 1 \\ \frac{1}{2} - \frac{C_2}{\sqrt{2}} + \frac{(C_2)^2}{4} + (C_2)^2 + (C_2)^2 - 2C_2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{2} &= 1 \\ \frac{9}{4}(C_2)^2 - \left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)C_2 &= 0 \\ \left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)C_2\left(\frac{3\sqrt{2}}{4}C_2 - 1\right) &= 0 \end{aligned}$$

por lo tanto las soluciones para C_2 son:

$$C_{21} = 0,$$

y

$$C_{22} = \frac{4}{3\sqrt{2}},$$

sustituyendo en la ecuación (4) finalmente obtenemos,

$$\vec{C}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{k} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right),$$

y

$$\begin{aligned}
\vec{C_2} &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} \left(\frac{4}{3\sqrt{2}} \right) \right) \hat{i} + \frac{4}{3\sqrt{2}} \hat{j} + \left(\frac{4}{3\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \hat{k} \\
&= \left(\frac{1}{3\sqrt{2}} \right) \hat{i} + \frac{4}{3\sqrt{2}} \hat{j} + \frac{1}{3\sqrt{2}} \hat{k} \\
&= \left(\frac{1}{3\sqrt{2}}, \frac{4}{3\sqrt{2}}, \frac{1}{3\sqrt{2}} \right)
\end{aligned}$$

Problema 16.

Escriba un vector de magnitud 5, paralelo al plano $3x + 4y + 5z = 10$ y perpendicular al vector $\widehat{i} + 2\widehat{j} + 2\widehat{k}$.

Solución:

Se pide un vector de la forma $\vec{C} = C_1\widehat{i} + C_2\widehat{j} + C_3\widehat{k}$ que sea paralelo al plano $3x + 4y + 5z = 10$ y perpendicular al vector $\vec{A} = \widehat{i} + 2\widehat{j} + 2\widehat{k}$, es decir, que cumpla las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned}\vec{C} \cdot \vec{A} &= 0, \\ \vec{C} \cdot \vec{N} &= 0,\end{aligned}$$

donde $\vec{N} = 3\widehat{i} + 4\widehat{j} + 5\widehat{k}$, es el vector normal al plano. Calculando los productos escalares, las condiciones anteriores se pueden escribir de la forma,

$$\begin{aligned}C_1 + 2C_2 + 2C_3 &= 0, \\ 3C_1 + 4C_2 + 5C_3 &= 0,\end{aligned}$$

resolviendo simultáneamente las ecuaciones anteriores obtenemos,

$$\begin{aligned}C_1 &= -2C_2, \\ C_3 &= -2C_2,\end{aligned}$$

por lo tanto, el vector \vec{C} será de la forma,

$$\vec{C} = 2C_2\widehat{i} + C_2\widehat{j} - 2C_2\widehat{k},$$

y aplicando la condición de que el vector debe ser de magnitud 5, es decir

$|\vec{C}| = 5$, obtenemos

$$\begin{aligned}5 &= \sqrt{4C_2^2 + C_2^2 + 4C_2^2} \\ &= \sqrt{9C_2^2} \\ &= \pm 3C_2,\end{aligned}$$

de donde,

$$C_2 = \pm \frac{5}{3},$$

finalmente, el vector pedido es de la forma,

$$\vec{C} = \pm \frac{5}{3} \left(2\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k} \right).$$

Problema 17.

Hallar un vector unitario paralelo al plano XY y perpendicular al vector $4\hat{i} - 3\hat{j} - \hat{k}$.

Solución:

Se pide un vector \vec{C} de la forma, $\vec{C} = C_1\hat{i} + C_2\hat{j}$, la componente C_3 es cero debido a que el vector \vec{C} debe ser paralelo al plano XY y por lo tanto no tiene componente en \hat{k} , además el vector \vec{C} debe ser perpendicular al vector $\vec{A} = 4\hat{i} - 3\hat{j} - \hat{k}$, por lo tanto cumple la condición,

$$\vec{C} \cdot \vec{A} = 0,$$

es decir,

$$(C_1\hat{i} - C_2\hat{j}) \cdot (4\hat{i} - 3\hat{j} - \hat{k}) = 0,$$

de donde obtenemos,

$$C_1 = \frac{3}{4}C_2.$$

Por lo tanto, el vector pedido tendrá la forma $\vec{C} = \frac{3}{4}C_2\hat{i} + C_2\hat{j}$. También por hipótesis, se pide que el vector \vec{C} sea unitario, es decir que cumpla que $|\vec{C}| = 1$, por lo tanto

$$1 = |\vec{C}| = \sqrt{\left(\frac{3}{4}C_2\right)^2 + (C_2)^2} = \sqrt{(C_2)^2 \left(1 + \frac{9}{16}\right)} = \pm \frac{5}{4}C_2,$$

de donde, obtenemos

$$C_2 = \pm \frac{4}{5},$$

y

$$C_1 = \frac{3}{4} \left(\pm \frac{4}{5}\right) = \pm \frac{3}{5},$$

finalmente, el vector pedido está dado por,

$$\vec{C} = \pm \frac{3}{4}\hat{i} \pm \frac{4}{5}\hat{j}.$$

Problema 18.

a) Hallar un vector unitario que forme un ángulo de 30^0 con el vector \hat{j} y formando ángulos iguales con los vectores \hat{i} y \hat{k} ($\cos 30^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$).

Solución:

El vector que estamos buscando es de la forma $\vec{C} = (C_1, C_2, C_3)$ donde el vector \vec{C} debe cumplir que,

$$\begin{aligned} 1) \quad \vec{C} \cdot \hat{i} &= |\vec{C}| |\hat{i}| \cos \theta = \cos \theta, \\ 2) \quad \vec{C} \cdot \hat{k} &= |\vec{C}| |\hat{k}| \cos \theta = \cos \theta, \\ 3) \quad \vec{C} \cdot \hat{j} &= |\vec{C}| |\hat{j}| \cos 30^0 = \cos 30^0, \end{aligned}$$

por definición de los vectores unitarios $\hat{i} = (1, 0, 0)$, $\hat{j} = (0, 0, 1)$ y $\hat{k} = (0, 0, 1)$,

aplicando la definición del producto escalar para vectores en el espacio, y de las ecuaciones 1) y 2) obtenemos,

$$C_1 = C_3,$$

asimismo de la ecuación 3), se tiene

$$C_2 = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

sustituyendo las ecuaciones anteriores, el vector pedido tiene la forma,

$$\vec{C} = \left(C_1, \frac{\sqrt{3}}{2}, C_1 \right),$$

para encontrar la componente C_1 aplicamos la condición de que tiene que ser el vector \vec{C} unitario, es decir, $|\vec{C}| = 1$, de esta forma

$$\sqrt{C_1^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 + C_1^2} = 1,$$

de donde obtenemos,

$$C_1 = \pm \frac{1}{\sqrt{8}},$$

por lo tanto, el vector pedido tiene la forma,

$$\vec{C} = \pm \left(\frac{1}{\sqrt{8}}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{\sqrt{8}} \right).$$

Problema 19.

Siendo el vector de posición \vec{a} de un punto dado (x_0, y_0, z_0) y \vec{r} el vector de posición de un punto cualquiera (x, y, z) , hallar el lugar geométrico de \vec{r} si:

$$a).- (\vec{r} - \vec{a}) \cdot \vec{a} = 0$$

$$b).- (\vec{r} - \vec{a}) \cdot \vec{r} = 0$$

Solución:

a) Sean los vectores

$$\vec{a} = (x_0, y_0, z_0),$$

$$\vec{r} = (x, y, z),$$

entonces,

$$(\vec{r} - \vec{a}) \cdot \vec{a} = 0,$$

$$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) \cdot (x_0, y_0, z_0) = 0,$$

$$x_0(x - x_0) + y_0(y - y_0) + z_0(z - z_0) = 0,$$

si hacemos $d = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2$, la ecuación anterior se puede escribir de la forma,

$$x_0x + y_0y + z_0z = d,$$

que es la ecuación de un plano que pasa por un extremo del vector \vec{a} y es perpendicular al vector \vec{a} .

En forma análoga al inciso a), tenemos

$$(\vec{r} - \vec{a}) \cdot \vec{r} = 0$$

$$x(x - x_0) + y(y - y_0) + z(z - z_0) = 0,$$

$$x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - xx_0 - yy_0 - zz_0 = 0,$$

completando cuadrados en la expresión anterior, obtenemos

$$(x - \frac{x_0}{2})^2 + (y - \frac{y_0}{2})^2 + (z - \frac{z_0}{2})^2 = \frac{1}{4}(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2),$$

que es la ecuación de una esfera con centro en el punto $(\frac{x_0}{2}, \frac{y_0}{2}, \frac{z_0}{2})$ y radio

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}.$$

Problema 20.

Determine el ángulo entre el plano $x + y + z = 21$ y la línea recta $x - 1 = y + 2 = 2z + 3$.

Solución:

Sabemos que la ecuación $ax + by + cz = d$, es la ecuación de un plano que pasa por un punto y tiene como normal al vector $\vec{N} = (a, b, c)$, asimismo, la ecuación $\frac{x-x_0}{a_1} = \frac{y-y_0}{b_1} = \frac{z-z_0}{c_1}$, representa la ecuación de una línea recta que pasa por el punto $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ y es paralela al vector $\vec{A} = (a_1, b_1, c_1)$, por lo tanto, para calcular el ángulo entre el plano y la línea recta es equivalente a calcular el ángulo entre los vectores \vec{N} y \vec{A} . En este caso, para el plano dado tenemos que el vector normal está dado por $\vec{N} = (1, 1, 1)$ y para identificar el vector paralelo a la recta dada, reescribimos la ecuación de la recta de la forma,

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-(-2)}{1} = \frac{z-(-\frac{3}{2})}{\frac{1}{2}}$$

de donde, obtenemos

$$\begin{aligned}\vec{r}_0 &= (-1, -2, -3/2), \\ \vec{A} &= (1, 1, 1/2).\end{aligned}$$

Para obtener el ángulo entre los vectores \vec{N} y \vec{A} , aplicamos la definición del producto escalar de dos vectores dado por,

$$\vec{N} \cdot \vec{A} = |\vec{N}| |\vec{A}| \cos \theta,$$

de donde,

$$\theta = \cos^{-1} \left(\frac{\vec{A} \cdot \vec{N}}{|\vec{A}| |\vec{N}|} \right),$$

sustituyendo los vectores \vec{A} y \vec{N} , obtenemos

$$\begin{aligned}\theta &= \cos^{-1} \left(\frac{(1, 1, 1/2) \cdot (1, 1, 1)}{\sqrt{(1)^2 + (1)^2 + (\frac{1}{2})^2} \sqrt{(1)^2 + (1)^2 + (1)^2}} \right) \\ \theta &= \cos^{-1} \left(\frac{5/2}{\sqrt{\frac{27}{4}}} \right) \\ &= \cos^{-1} \left(\frac{5}{3\sqrt{3}} \right).\end{aligned}$$

Problema 21.

Encuentre una combinación lineal (si existe) para los siguientes vectores:

$$\begin{aligned}\vec{A_1} &= -2\hat{i} + 12\hat{j} - 4\hat{k}, \\ \vec{A_2} &= \hat{i} - 6\hat{j} + 2\hat{k}, \\ \vec{A_3} &= 2\hat{j} + 7\hat{k},\end{aligned}$$

Solución:

Para verificar si existe una combinación lineal entre los vectores, debemos encontrar escalares x , y y z para verificar si al menos uno de éstos escalares es distinto de cero, tal que se cumpla que:

$$x\vec{A_1} + y\vec{A_2} + z\vec{A_3} = \vec{0},$$

es decir,

$$\begin{aligned}x(-2, 12, -4) + y(1, -6, 2) + z(0, 2, 7) &= (0, 0, 0) \\ (-2x + y, 12x - 6y + 2z, -4x + 2y + 7z) &= (0, 0, 0)\end{aligned}$$

aplicando igualdad de vectores en el espacio (dos vectores son iguales si son iguales componente a componente), obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones,

$$\begin{aligned}-2x + y &= 0, \\ 12x - 6y + 2z &= 0, \\ -4x + 2y + 7z &= 0.\end{aligned}$$

Al resolver este sistema de ecuaciones (se obtiene la solución si se aplica, por ejemplo el método de Gauss), el sistema es equivalente al sistema,

$$\begin{aligned}-2x + y &= 0 \\ z &= 0\end{aligned}$$

la solución del sistema anterior, es de la forma

$$\begin{aligned}y &= 2x, \\ x &= \alpha \in R \\ z &= 0\end{aligned}$$

es decir, la solución del sistema es la terna,

$$(x, y, z) = (\alpha, 2\alpha, 0) = \alpha(1, 2, 0),$$

para toda $\alpha \in R$, así por ejemplo si $\alpha = 1$, entonces una solución del sistema será de la forma,

$$\begin{aligned}x &= 1, \\y &= 2, \\z &= 0,\end{aligned}$$

por lo tanto, la combinación lineal de los vectores $\overrightarrow{A_1}$, $\overrightarrow{A_2}$ y $\overrightarrow{A_3}$ está dada por:

$$\overrightarrow{A_1} + 2\overrightarrow{A_2} + 0\overrightarrow{A_3} = \overrightarrow{0}$$

o también

$$\overrightarrow{A_1} = -2\overrightarrow{A_2}.$$

Problema 22.

Encuentre una combinación lineal (si existe) de los vectores

$$\begin{aligned}\vec{A} &= 2\hat{i} + \hat{j} - 3\hat{k}, \\ \vec{B} &= \hat{i} - 2\hat{j} - 4\hat{k}, \\ \vec{C} &= 4\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k},\end{aligned}$$

Solución:

Verifiquemos primeramente si los vectores son *l.i.* o *l.d.*, para esto apliquemos la propiedad del producto triple escalar que establece la condición necesaria para la dependencia lineal, es decir; si $\vec{A} \bullet \vec{B} \times \vec{C} = 0$, entonces los vectores están en un plano y son linealmente dependientes, de esta forma,

$$\begin{aligned}\vec{A} \bullet \vec{B} \times \vec{C} &= \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & -4 \\ 4 & 3 & -1 \end{vmatrix} \\ &= 2(2 + 12) - 1(-1 + 16) - 3(3 + 8) \\ &= 2(14) - 1(15) - 3(11) \\ &= 28 - 15 - 33 \\ &= -20,\end{aligned}$$

de lo anterior, como $\vec{A} \bullet \vec{B} \times \vec{C} \neq 0$, entonces los vectores \vec{A} , \vec{B} y \vec{C} son linealmente independientes, y por lo tanto, no existe combinación lineal de ellos.

Problema 23.

Encontrar un vector unitario perpendicular a la línea recta dada por las ecuaciones paramétricas,

$$\begin{aligned}x &= 2t - 1, \\y &= -t - 1, \\z &= t + 2,\end{aligned}$$

y perpendicular al vector $\hat{i} - \hat{j}$.

Solución:

Las ecuaciones paramétricas de la recta dada son equivalentes a la ecuación vectorial

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + t\vec{A},$$

que representa a una recta L en forma paramétrica que pasa por el punto $\vec{r}_0 = (-1, -1, 2)$ y que es paralela al vector $\vec{A} = (2, -1, 1)$.

Se pide un vector de la forma $\vec{C} = C_1\hat{i} + C_2\hat{j} + C_3\hat{k}$ que tenga magnitud uno, además que sea perpendicular a la recta $\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + t\vec{A}$, es decir perpendicular al vector \vec{A} , y también perpendicular al vector $\vec{B} = \hat{i} - \hat{j}$, es decir, que cumpla las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned}1) \quad & |\vec{C}| = 1, \\2) \quad & \vec{C} \cdot \vec{A} = 0, \\3) \quad & \vec{C} \cdot \vec{B} = 0,\end{aligned}$$

de las condiciones 2) y 3), calculando el producto escalar, obtenemos

$$\begin{aligned}2C_1 - C_2 + C_3 &= 0, \\C_1 - C_2 &= 0,\end{aligned}$$

de donde obtenemos inmediatamente que,

$$\begin{aligned}C_1 &= C_2, \\C_3 &= -C_2,\end{aligned}$$

por lo tanto, el vector pedido tendrá la forma

$$\vec{C} = C_2\hat{i} + C_2\hat{j} - C_2\hat{k}.$$

Aplicando la condición 1), obtenemos

$$\sqrt{(C_2)^2 + (C_2)^2 + (-C_2)^2} = \sqrt{3(C_2)^2} = 1,$$

de donde,

$$C_2 = \pm \sqrt{\frac{1}{3}},$$

finalmente, el vector pedido tiene la forma

$$\vec{C} = \sqrt{\frac{1}{3}} (\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}).$$

Problema 24.

Demuestre que la línea recta $x = y = \frac{1}{3}(z + 2)$ es paralela al plano $2x + 8y + 2z = 5$.

Solución:

La ecuación de la recta dada se puede reescribir de la forma,

$$\frac{x - 0}{1} = \frac{y - 0}{1} = \frac{z - (-2)}{3},$$

esta ecuación, representa a una recta que pasa por el punto $\vec{r}_0 = (0, 0, -2)$

y es paralela al vector $\vec{A} = (1, 1, 3)$. Por otro lado, de la ecuación del plano, tenemos que el vector $\vec{N} = (2, 8, 2)$ es un vector normal al plano, de esta forma para mostrar que la recta y el plano son paralelos, debemos mostrar que el vector \vec{N} , que es normal al plano y el vector \vec{A} , que es paralelo a la recta son perpendiculares, es decir que satisfacen la condición $\vec{N} \cdot \vec{A} = 0$.

Calculando el producto escalar del vector normal \vec{N} y el vector \vec{A} , obtenemos

$$\vec{N} \cdot \vec{A} = (2, -8, 2) \cdot (1, 1, 3) = 0,$$

por lo tanto, se comprueba que el vector \vec{A} es perpendicular al vector normal \vec{N} del plano, y como el vector \vec{A} es paralelo a la recta, luego entonces también es paralelo al plano y por lo tanto, la recta dada también es paralela al plano.

Problema 25.

Las ecuaciones paramétricas de una recta son:

$$\begin{aligned}x &= 3t + 1, \\y &= -2t + 4, \\z &= t - 3,\end{aligned}$$

encuentre la ecuación del plano que contiene a dicha recta.

Solución:

Las ecuaciones paramétricas de la recta dada son equivalentes a la ecuación vectorial de la forma,

$$\vec{r}(t) = (1, 4, -3) + t(3, -2, 1),$$

que por definición es la ecuación de una recta en forma paramétrica que pasa por un punto cuyo vector de posición está dado por $\vec{r}_0 = (1, 4, -3)$ y es paralela al vector $\vec{A} = (3, -2, 1)$. Si hacemos $\vec{r}_0 \times \vec{A} = \vec{N}$ que es un vector perpendicular al vector \vec{A} y también perpendicular a \vec{r}_0 , entonces, la ecuación del plano pedida será de la forma,

$$ax + by + cz = d,$$

donde

$$d = \vec{r}_0 \cdot \vec{N},$$

y

$$\vec{N} = a\hat{i} + b\hat{j} + c\hat{k},$$

es decir,

$$\vec{N} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 4 & -3 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -2\hat{i} - 10\hat{j} - 14\hat{k}$$

asimismo,

$$\begin{aligned}d &= \vec{N} \cdot \vec{r}_0 \\&= (-2\hat{i} - 10\hat{j} - 14\hat{k}) \cdot (\hat{i} + 4\hat{j} - 3\hat{k}) \\&= -2 - 40 + 42 = 0,\end{aligned}$$

por lo tanto, la ecuación del plano será de la forma $-2x - 10y - 14z = 0$, que se puede escribir finalmente como,

$$x + 5y + 7z = 0.$$

Problema 26.

Determine las ecuaciones de la línea recta (en forma paramétrica y simétrica) que pasa por el punto $(3, 2, -4)$, paralela a la línea de intersección de los planos

$$\begin{aligned}x + 3y - 2z &= 8, \\x - 3y + z &= 0.\end{aligned}$$

Solución:

De las ecuaciones de los planos, los vectores

$$\begin{aligned}\vec{N}_1 &= \hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k}, \\ \vec{N}_2 &= \hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k},\end{aligned}$$

son vectores normales a cada plano respectivamente, de esta forma $\vec{N}_1 \times \vec{N}_2$ resulta ser un vector que es perpendicular tanto a \vec{N}_1 como a \vec{N}_2 , por lo que el vector $\vec{N}_1 \times \vec{N}_2$ será paralelo a ambos planos y por lo tanto $\vec{N}_1 \times \vec{N}_2$ será paralelo a la línea de intersección de ambos planos. Calculando el producto vectorial de las normales,

$$\vec{A} = \vec{N}_1 \times \vec{N}_2 = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = -3\hat{i} - 3\hat{j} - 6\hat{k},$$

por lo tanto, la ecuación de la recta en forma paramétrica será de la forma,

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + t\vec{A}$$

es decir,

$$\vec{r}(t) = (3, 2, -4) + t(-3, -3, -6),$$

y para determinar la forma simétrica de la recta, debemos eliminar el parámetro t de la ecuación vectorial, para hacer esto, escribimos las componentes de esta ecuación vectorial de la forma,

$$\begin{aligned}x &= 3 - 3t, \\ y &= 2 - 3t, \\ z &= -4 - 6t,\end{aligned}$$

despejando el parámetro t e igualando obtenemos,

$$\frac{x-3}{-3} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z+4}{-6}$$

o también,

$$x-3 = y-2 = \frac{z+4}{2}.$$

Problema 27.

Encontrar el punto de intersección (si es que se intersectan) de las siguientes líneas rectas.

$$\begin{aligned} a).- \quad \vec{r}_1(t) &= \left(5\hat{i} + 4\hat{j} + 5\hat{k} \right) t + 7\hat{i} + 6\hat{j} + 8\hat{k}, \\ \vec{r}_2(t) &= \left(6\hat{i} + 4\hat{j} + 6\hat{k} \right) t + 8\hat{i} + 6\hat{j} + 9\hat{k}, \\ b).- \quad \vec{r}_1(t) &= 2\hat{k} + \left(3\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k} \right) t, \\ \vec{r}_2(t) &= 3\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k} + \left(6\hat{i} + 4\hat{j} + 2\hat{k} \right) t, \end{aligned}$$

Solución:

a).- Las ecuaciones anteriores son de la forma,

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + t\vec{A},$$

que representa la ecuación paramétrica de una recta L que pasa por el punto

(x_0, y_0, z_0) y es paralela al vector \vec{A} . La ecuación anterior es equivalente a las ecuaciones

$$\begin{aligned} x &= x_0 + at, \\ y &= y_0 + bt, \\ z &= z_0 + ct, \end{aligned}$$

que también se les llaman las ecuaciones paramétricas de la recta L , éstas ecuaciones son equivalentes a las ecuaciones no paramétricas de la recta L dadas por,

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}.$$

De lo anterior, para las rectas dadas tenemos las siguientes ecuaciones paramétricas para cada recta,

$$\begin{aligned} x &= 7 + 5t, & x &= 8 + 6t, \\ y &= 6 + 4t, & y &= 6 + 4t, \\ z &= 8 + 5t, & z &= 9 + 6t, \end{aligned}$$

que son equivalentes a las siguientes ecuaciones no paramétricas respectiva-

mente,

$$\begin{aligned}\frac{x-7}{5} &= \frac{y-6}{4} = \frac{z-8}{5}, \\ \frac{x-8}{6} &= \frac{y-6}{4} = \frac{z-9}{6}.\end{aligned}$$

Las ecuaciones anteriores constituyen un conjunto de cuatro ecuaciones que han de satisfacer las 3 incógnitas x , y y z , si consideramos las tres primeras ecuaciones, obtenemos

$$\begin{aligned}1) \quad & \frac{x-7}{5} = \frac{y-6}{4}, \\ 2) \quad & \frac{y-6}{4} = \frac{z-8}{5}, \\ 3) \quad & \frac{x-8}{6} = \frac{y-6}{4}.\end{aligned}$$

Resolviendo el sistema, de las ecuaciones 1) y 3), obtenemos

$$\frac{x-7}{5} = \frac{x-8}{6},$$

de donde obtenemos que $x = 2$, sustituyendo en la ecuación 1),

$$\frac{2-7}{5} = \frac{y-6}{4},$$

de donde $y = 2$, finalmente de la ecuación 2) obtenemos $z = 3$. Nótese que éstos

valores también satisfacen la cuarta ecuación $\frac{y-6}{4} = \frac{z-9}{6}$. Por lo tanto, el punto de intersección de las dos rectas tiene al vector $2\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ como vector de posición.

b).— Como se indicó anteriormente, las ecuaciones para $\vec{r}_1(t)$ y $\vec{r}_2(t)$ son de la forma $\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + t\vec{A}$, en este caso los vectores $\vec{A}_1 = 3\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ y $\vec{A}_2 = 6\hat{i} + 4\hat{j} + 2\hat{k}$, son vectores paralelos a cada recta respectivamente, pero $\vec{A}_2 = 2(3\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}) = 2\vec{A}_1$, es decir, $\vec{A}_1 \parallel \vec{A}_2$, por lo que ambas líneas rectas son paralelas que pasan por los puntos $(0, 0, 2)$ y $(3, 2, 3)$ y por lo tanto, nunca se van a intersectar.

Problema 28.

Encontrar la ecuación del plano que contiene a las siguientes líneas rectas,

$$2 + x = \frac{3-y}{2} = z \quad \text{y} \quad \frac{x-2}{2} = \frac{2y+1}{2} = z - 1$$

Solución:

Por definición, la ecuación de un plano es de la forma,

$$ax + by + cz = d,$$

donde $d = \vec{r}_0 \cdot \vec{N}$, \vec{r}_0 es el vector de posición de un punto que este en el plano y $\vec{N} = (a, b, c)$ es un vector normal o perpendicular al plano. De esta forma para encontrar la ecuación del plano necesitamos un punto en o sobre éste y un vector normal o perpendicular al mismo.

Las ecuaciones anteriores se pueden reescribir de la siguiente forma,

$$\begin{aligned} \frac{x - (-2)}{1} &= \frac{y - 3}{-2} = \frac{z - 0}{1}, \\ \frac{x - 2}{2} &= \frac{y - (-\frac{1}{2})}{1} = \frac{z - 1}{1}, \end{aligned}$$

si comparamos estas ecuaciones con la ecuación general de la recta $\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$, que son equivalentes a la ecuación vectorial $\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + t\vec{A}$, que representa la ecuación paramétrica de una recta L que pasa por el punto (x_0, y_0, z_0) y es paralela al vector \vec{A} , las ecuaciones de las rectas dadas son equivalentes a las ecuaciones,

$$\begin{aligned} \vec{r}_1(t) &= \vec{r}_{01} + t\vec{A} = (-2, 3, 0) + t(1, -2, 1), \\ \vec{r}_2(t) &= \vec{r}_{02} + t\vec{B} = (2, -\frac{1}{2}, 1) + t(2, 1, 1). \end{aligned}$$

De las ecuaciones anteriores, si hacemos el producto vectorial de los vectores paralelos a cada recta, obtendremos un vector normal o perpendicular a cada recta, y por lo tanto perpendicular al plano buscado que contiene a las dos rectas, de esta forma calculando el producto vectorial,

$$\vec{N} = \vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -3\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k},$$

por lo tanto, sustituyendo en la ecuación general de un plano, el vector \vec{N} y cualquier punto que este sobre el plano, por ejemplo el punto $(-2, 3, 0)$ por donde pasa la primera recta, obtenemos

$$-3x + y + 3z = (-2, 3, 0) \cdot (-3, 1, 3),$$

finalmente, la ecuación del plano pedida está dada por,

$$-3x + y + 3z = 9$$

Problema 29.

Sean $\vec{P} = 3\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$ y $\vec{Q} = \hat{i} - 2\hat{j} - 4\hat{k}$ los vectores de posición de los puntos P y Q respectivamente.

a) Hallar la distancia d desde el punto $(-1, 1, 1)$ a la recta que une los puntos P y Q .

b) Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto P y es perpendicular a la recta \overline{PQ} .

c) Hallar la distancia D del punto $(-1, 1, 1)$ al plano calculado en b).

Solución:

a) Por definición, la distancia de un punto de coordenadas (x_1, y_1, z_1) a una recta de la forma $\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + t\vec{A}$, está dada por:

$$d = \frac{|(\vec{r}_1 - \vec{r}_0) \times \vec{A}|}{|\vec{A}|}$$

donde \vec{r}_0 es el vector de posición del punto por donde pasa la recta L , \vec{r}_1 es el vector de posición del punto a donde se quiere calcular la distancia a la recta L y el vector \vec{A} es un vector que es paralelo a la recta L . Por lo tanto, para calcular la distancia del punto $(-1, 1, 1)$ a la recta que une los puntos P y Q , escribamos dicha ecuación de la recta en la forma $\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + t\vec{A}$ para así aplicar la ecuación anterior.

Aplicando la ecuación $\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + t\vec{A}$, para los vectores de posición de los puntos P y Q , la ecuación de la recta que une los puntos P y Q se puede escribir vectorialmente de la forma,

$$\vec{r}(t) = \vec{P} + t(\vec{Q} - \vec{P})$$

es decir,

$$\vec{r}(t) = 3\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k} + t[(\hat{i} - 2\hat{j} - 4\hat{k}) - (3\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k})]$$

$$\vec{r}(t) = 3\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k} + t(-2\hat{i} - 3\hat{j} - 6\hat{k})$$

por lo tanto, en la ecuación anterior tenemos que,

$$\begin{aligned}\vec{r}_0 &= (3, 1, 2) \\ \vec{A} &= (-2, -3, -6)\end{aligned}$$

además,

$$\vec{r}_1 = (-1, 1, 1)$$

aplicando la ecuación para la distancia de un punto a una recta obtenemos,

$$\begin{aligned} d &= \frac{|[(-1, 1, 1) - (3, 1, 2)] \times (-2, -3, -6)|}{|(-2, -3, -6)|} \\ &= \frac{|(-4, 0, -1) \times (-2, -3, -6)|}{\sqrt{4 + 9 + 36}} \end{aligned}$$

calculando el producto vectorial,

$$(-4, 0, -1) \times (-2, -3, -6) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -4 & 0 & -1 \\ -2 & -3 & -6 \end{vmatrix} = -3\hat{i} - 22\hat{j} + 12\hat{k}$$

Finalmente, la distancia del punto $(-1, 1, 1)$ a la recta que une los puntos P y Q está dada por:

$$d = \frac{|-3\hat{i} - 22\hat{j} + 12\hat{k}|}{\sqrt{49}} = \frac{\sqrt{9 + 484 + 144}}{7} = \frac{\sqrt{637}}{7}$$

b) Por definición la ecuación

$$(\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \vec{N} = 0,$$

representa la ecuación de un plano que contiene a un punto de coordenadas (x_0, y_0, z_0) y un vector normal $\vec{N} = a\hat{i} + b\hat{j} + c\hat{k}$. En este, caso la ecuación del plano que pasa por el punto P y es perpendicular a la recta \overline{PQ} se puede escribir vectorialmente de la forma,

$$(\vec{r} - \vec{P}) \cdot (\vec{Q} - \vec{P}) = 0$$

donde $\vec{Q} - \vec{P}$ es un vector que es paralelo a la recta y que es perpendicular al plano buscado, sustituyendo los valores para los vectores \vec{P} y \vec{Q} , obtenemos

$$(x - 3, y - 1, z - 2) \cdot (-2, -3, -6) = 0$$

calculando el producto escalar se obtiene,

$$2x + 3y + 6z = 21$$

que es la ecuación del plano que contiene al punto de coordenadas $(3, 1, 2)$ y es perpendicular a la recta \overline{PQ} .

c) Por definición, la ecuación que proporciona la distancia de un punto de coordenadas (x_1, y_1, z_1) al plano $ax + by + cz = d$ está dada por:

$$D = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}},$$

donde $d = \vec{N} \cdot \vec{r}_0 = ax_0 + by_0 + cz_0$.

Aplicando la ecuación anterior, y la ecuación para el plano calculada en el inciso b) obtenemos,

$$D = \frac{|2(-1) + 3(1) + 6(1) - 21|}{\sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2}} = \frac{|7 - 21|}{\sqrt{49}} = 2$$

que es la distancia del punto $(-1, 1, 1)$ al plano $2x + 3y + 6z = 21$.

Problema 30.

Calcule la distancia entre los planos

$$\begin{aligned}x + 2y + 3z &= 5, \\x + 2y + 3z &= 19.\end{aligned}$$

Solución:

Para encontrar la distancia entre los planos, tomemos un punto arbitrario en el primer plano (observe que los planos dados son paralelos), por ejemplo el punto $(0, 1, 1)$ y apliquemos la expresión para calcular la distancia de un punto de coordenadas (x_1, y_1, z_1) al plano $ax + by + cz = d$, dada por la expresión:

$$D = \frac{|ax_1 + by_1 + z_1 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}},$$

donde a , b y c , son las componentes del vector normal al plano y $d = \vec{N} \cdot \vec{r}_0$, siendo \vec{r}_0 el vector de posición de un punto sobre el plano. En este caso, tenemos

$$\begin{aligned}\vec{N} &= (a, b, c) = (1, 2, 3), \\ \vec{r}_1 &= (x_1, y_1, z_1) = (0, 1, 1),\end{aligned}$$

y

$$d = 19,$$

sustituyendo los valores anteriores en la expresión para la distancia, obtenemos

$$\begin{aligned}D &= \frac{|1(0) + 2(1) + 3(1) - 19|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2}} \\ &= \frac{|2 + 3 - 19|}{\sqrt{14}} = \frac{|-14|}{\sqrt{14}} \\ &= \frac{14}{\sqrt{14}} = \sqrt{14}.\end{aligned}$$

Obsérvese que como los planos son paralelos, el problema también se puede resolver al considerar cualquier punto en el segundo plano y en ese caso $d = 5$.

3 Problemas del capítulo 2.

Problema 1.

Escribir las ecuaciones paramétricas y no paramétricas, de los siguientes círculos:

- a) centro en $(0, 1, 0)$, radio 2, paralelo al plano XZ ,
- b) centro en $(1, 1, 1)$, radio $\sqrt{3}$, paralelo al plano XY ,
- c) centro en $(-1, 2, 3)$, radio 9, paralelo al plano XZ ,
- d) centro en $(-1, 3, -1)$, radio 5, paralelo al plano YZ .

Solución.

Por definición, la ecuación

$$(*) \quad \vec{R}(\theta) = \vec{R}_0 + (a \cos \theta) \hat{e}_1 + (a \sin \theta) \hat{e}_2,$$

representa un círculo con centro en el punto (x_0, y_0, z_0) y paralelo al plano formado por los vectores unitarios \hat{e}_1 y \hat{e}_2 que son mutuamente perpendiculares, donde θ está entre 0 y 2π .

- a) Aplicando la ecuación anterior en este caso,

$$\begin{aligned} a &= 2 \\ \hat{e}_1 &= \hat{i} \\ \hat{e}_2 &= \hat{k} \\ \vec{R}_0 &= (0, 1, 0), \end{aligned}$$

por lo tanto, la ecuación pedida es

$$\vec{R}(\theta) = (0, 1, 0) + (2 \cos \theta) \hat{i} + (2 \sin \theta) \hat{k}$$

o bien,

$$\vec{R}(\theta) = 2 \cos \theta \hat{i} + \hat{j} + 2 \sin \theta \hat{k}$$

es decir, las ecuaciones paramétricas de un círculo de radio 2 paralelo al plano XZ con centro en $(0, 1, 0)$ son:

$$\begin{aligned} x &= 2 \cos \theta, \\ y &= 1, \\ z &= 2 \sin \theta, \end{aligned}$$

que son equivalentes a las ecuaciones no paramétricas,

$$\begin{aligned} x^2 + z^2 &= 4, \\ y &= 1. \end{aligned}$$

b) En este caso tenemos, aplicando la ecuación (*) obtenemos,

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{3} \\ \hat{e}_1 &= \hat{i} \\ \hat{e}_2 &= \hat{j} \\ \vec{R}_0 &= (1, 1, 1), \end{aligned}$$

por lo tanto, la ecuación pedida es

$$\vec{R}(\theta) = (1, 1, 1) + (\sqrt{3} \cos \theta) \hat{i} + (\sqrt{3} \sin \theta) \hat{j},$$

o bien,

$$\vec{R}(\theta) = (1 + \sqrt{3} \cos \theta) \hat{i} + (1 + \sqrt{3} \sin \theta) \hat{j} + \hat{k},$$

que es equivalente a las siguientes ecuaciones paramétricas:

$$\begin{aligned} x &= 1 + \sqrt{3} \cos \theta, \\ y &= 1 + \sqrt{3} \sin \theta, \\ z &= 1, \end{aligned}$$

de donde obtenemos las ecuaciones no paramétricas, de la forma

$$\begin{aligned} (x - 1)^2 + (y - 1)^2 &= 3, \\ z &= 1. \end{aligned}$$

c) Análogamente, de la ecuación (*) obtenemos

$$\begin{aligned} a &= 9 \\ \hat{e}_1 &= \hat{i} \\ \hat{e}_2 &= \hat{k} \\ \vec{R}_0 &= (1, 2, 3), \end{aligned}$$

por lo tanto, la ecuación del círculo en forma paramétrica está dada por,

$$\vec{R}(\theta) = (1 + 9 \cos \theta) \hat{i} + 2\hat{j} + (3 + 9 \sin \theta) \hat{k},$$

que es equivalente a las siguientes ecuaciones paramétrica:

$$\begin{aligned} x &= 1 + 9 \cos \theta, \\ y &= 2, \\ z &= 3 + 9 \sin \theta, \end{aligned}$$

de donde obtenemos las ecuaciones no paramétricas, de la forma

$$\begin{aligned}(x-1)^2 + (z-3)^2 &= 81, \\ y &= 2.\end{aligned}$$

d) De un procedimiento similar a los incisos anteriores se obtiene,

$$\vec{R}(\theta) = -\hat{i} + (3 + 5 \sin \theta) \hat{j} + (-1 + 5 \sin \theta) \hat{k},$$

y

$$\begin{aligned}(y-3)^2 + (z+1)^2 &= 25, \\ x &= -1.\end{aligned}$$

Problema 2.

Dada la curva

$$\vec{R} = \frac{t^2}{2}\hat{i} + \frac{t^3}{3}\hat{k}; \quad 0 \leq t \leq 2,$$

encontrar un vector unitario $\hat{T}(s)$, donde s es la longitud de arco.

Solución.

Para encontrar $\hat{T}(s)$, primero debemos reparametrizar la curva en términos de la longitud de arco s , es decir; obtener $\vec{R}(s)$ para así calcular:

$$\hat{T}(s) = \frac{d\vec{R}(s)}{ds},$$

sabemos que la longitud de arco está dada por la expresión:

$$s(t) = \int_0^t |\vec{R}'(t)| dt,$$

de la ecuación de la curva obtenemos,

$$\vec{R}'(t) = t\hat{i} + t^2\hat{k};$$

de donde,

$$|\vec{R}'(t)| = \sqrt{t^2 + t^4} = t\sqrt{1 + t^2},$$

sustituyendo en la expresión para la longitud de arco,

$$s(t) = \int_0^t t\sqrt{1 + t^2} dt.$$

Para resolver la integral, hacemos un simple cambio de variable de la forma

$$\begin{aligned} u &= 1 + t^2, \\ du &= 2t dt, \\ dt &= \frac{du}{2t}, \end{aligned}$$

de esta forma,

$$\begin{aligned} s(t) &= \int_0^t t u^{\frac{1}{2}} \frac{du}{2t} = \frac{1}{2} \int_0^t u^{\frac{1}{2}} du \\ &= \left[\frac{(1 + t^2)^{\frac{3}{2}}}{3} \right]_0^t = \frac{1}{3} \left[(1 + t^2)^{\frac{3}{2}} - 1 \right], \end{aligned}$$

por lo tanto, la longitud de arco de la curva está dada por,

$$s(t) = \frac{1}{3} \left[(1+t^2)^{\frac{3}{2}} - 1 \right]$$

de esta expresión, despejamos el parámetro t de la forma;

$$(3s+1)^{\frac{2}{3}} = 1+t^2;$$

$$t(s) = \left[(3s+1)^{\frac{2}{3}} - 1 \right]^{\frac{1}{2}},$$

sustituyendo en la expresión para $\vec{R}(t(s))$, obtenemos

$$\vec{R}(s) = \frac{1}{2} \left[(3s+1)^{\frac{2}{3}} - 1 \right] \hat{i} + \frac{1}{3} \left[(3s+1)^{\frac{2}{3}} - 1 \right]^{\frac{3}{2}} \hat{k},$$

derivando esta expresión con respecto al parámetro s ,

$$\hat{T}(s) = \frac{1}{2} \left[\frac{2}{3} (3s+1)^{-\frac{1}{3}} (3) \right] \hat{i} + \left(\frac{1}{3} \right) \left(\frac{2}{3} \right) \left[(3s+1)^{\frac{2}{3}} - 1 \right]^{\frac{1}{2}} \left[\frac{2}{3} (3s+1)^{-\frac{1}{3}} (3) \right] \hat{k},$$

finalmente, el vector unitario está dado por:

$$\hat{T}(s) = \frac{1}{(3s+1)^{\frac{1}{3}}} \hat{i} + \frac{1}{(3s+1)^{\frac{1}{3}}} \left[(3s+1)^{\frac{2}{3}} - 1 \right]^{\frac{1}{2}} \hat{k}.$$

Observemos que inmediatamente se puede verificar que $|\hat{T}(s)| = 1$, aplicando la definición de la magnitud de un vector tenemos,

$$\begin{aligned} |\hat{T}(s)| &= \sqrt{\frac{1}{(3s+1)^{\frac{2}{3}}} + \frac{1}{(3s+1)^{\frac{2}{3}}} \left[(3s+1)^{\frac{2}{3}} - 1 \right]} \\ &= \sqrt{\frac{1}{(3s+1)^{\frac{2}{3}}} \left[1 + \left((3s+1)^{\frac{2}{3}} - 1 \right) \right]} \\ &= \sqrt{\frac{(3s+1)^{\frac{2}{3}}}{(3s+1)^{\frac{2}{3}}}} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Problema 3:

Dada la curva cuyas ecuaciones paramétricas son:

$$\begin{aligned}x &= \frac{t}{2\pi}, \\y &= \sin t, \\z &= \cos t,\end{aligned}$$

calcular la longitud de arco entre el punto $(0, 0, 1)$ y el punto $(1, 0, 1)$. ¿Cuál es el vector unitario tangente a la curva dada en el punto $(0, 0, 1)$?

Solución:

De las ecuaciones paramétricas, la curva está dada por la ecuación

$$\vec{r}(t) = \frac{t}{2\pi}\hat{i} + \sin t\hat{j} + \cos t\hat{k},$$

donde $0 \leq t \leq 2\pi$. Por definición la longitud de una curva en el espacio desde el punto en $t = a$, al punto en $t = b$, está dada por:

$$l(t) = \int_{t=a}^{t=b} \left| \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \right| dt,$$

de la ecuación de la curva dada, obtenemos

$$\frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{1}{2\pi}\hat{i} + \cos t\hat{j} - \sin t\hat{k},$$

de donde,

$$\left| \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \right| = \sqrt{\frac{1}{4\pi^2} + \cos^2 t + \sin^2 t} = \sqrt{\frac{1 + 4\pi^2}{4\pi^2}},$$

sustituyendo en la expresión para calcular la longitud de la curva obtenemos,

$$l = \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{1+4\pi^2}}{2\pi} dt = \left[\frac{\sqrt{1+4\pi^2}}{2\pi} t \right]_{t=0}^{t=2\pi} = \sqrt{1+4\pi^2}.$$

Así mismo por definición, el vector tangente a una curva en cualquier punto del espacio está dado por:

$$T(t) = \frac{\frac{d\vec{r}(t)}{dt}}{\left| \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \right|},$$

en el punto $(0, 0, 1)$, es decir, en $t = 0$, obtenemos

$$\frac{d\vec{r}(t=0)}{dt} = \frac{1}{2\pi} \hat{i} + \hat{j},$$

y

$$\left| \frac{d\vec{r}(t=0)}{dt} \right| = \frac{\sqrt{1+4\pi^2}}{2\pi},$$

por lo tanto el vector unitario pedido está dado por:

$$T = \frac{\hat{i} + 2\pi\hat{j}}{\sqrt{1+4\pi^2}}.$$

Problema 4:

Si \hat{T} denota la tangente unitaria a la curva,

$$\begin{aligned}x &= t, \\y &= 2t + 5, \\z &= 3t,\end{aligned}$$

demuestre que

$$\frac{d\hat{T}}{dt} = 0,$$

interprete este resultado en forma geométrica.

Solución:

En este caso, sustituyendo las ecuaciones paramétricas, la curva está dada por la ecuación

$$\vec{r}(t) = t\hat{i} + (2t + 5)\hat{j} + 3t\hat{k}.$$

En forma análoga al problema anterior, el vector tangente a una curva en cualquier punto del espacio está dado por:

$$\hat{T}(t) = \frac{\frac{d\vec{r}(t)}{dt}}{\left|\frac{d\vec{r}(t)}{dt}\right|},$$

de esta forma, de la ecuación de la curva obtenemos,

$$\hat{T} = \frac{\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}}{\sqrt{1^2 + 4 + 9}} = \frac{\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}}{\sqrt{14}}$$

de donde obtenemos,

$$\frac{d\hat{T}}{dt} = 0.$$

Por otro lado, obsérvese que las ecuaciones paramétricas de la curva dada son equivalentes a la ecuación,

$$\frac{x-0}{1} = \frac{y-5}{2} = \frac{z-0}{3},$$

que es la ecuación de una línea recta que pasa por el punto de coordenadas

$(0, 5, 0)$ y es paralela al vector $\vec{A} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$, como se ilustra esquemáticamente en la siguiente figura.

ftbpF260.9375pt294.5pt0ptFigure

Por lo tanto, la expresión $\frac{d\hat{T}}{dt} = 0$ indica que el vector \hat{T} es constante a lo largo de la línea recta, por lo que la dirección de la curva debe estar dada por un vector unitario en la dirección del vector \vec{A} , como era de esperarse.

Problema 5:

a) Determine la longitud de arco de la curva dada por las siguientes ecuaciones paramétricas,

$$\begin{aligned}x &= e^t \cos t, \\y &= e^t \sin t, \\z &= 0,\end{aligned}$$

entre $t = 0$ y $t = 1$.

b) Reparametrizar la curva en términos de la longitud de arco.

Solución:

a) De las ecuaciones paramétricas, la curva está dada por la ecuación

$$\vec{r}(t) = e^t \cos t \hat{i} + e^t \sin t \hat{j},$$

donde $0 \leq t \leq 1$. Por definición la longitud de una curva en el espacio desde el punto en $t = a$, al punto en $t = b$, está dada por:

$$l(t) = \int_{t=a}^{t=b} \left| \frac{d\vec{r}}{dt}(t) \right| dt,$$

de la ecuación de la curva dada, obtenemos

$$\frac{d\vec{r}}{dt}(t) = [-e^t (\sin t) + e^t \cos t] \hat{i} + [e^t \cos t + e^t \sin t] \hat{j},$$

de donde,

$$\begin{aligned}\left| \frac{d\vec{r}}{dt}(t) \right| &= \sqrt{[e^t (-\sin t + \cos t)]^2 + [e^t (\cos t + \sin t)]^2} \\&= \sqrt{e^{2t} (\sin^2 t + \cos^2 t - 2 \sin t \cos t) + e^{2t} (\cos^2 t + \sin^2 t + 2 \sin t \cos t)} \\&= \sqrt{2e^{2t}} \\&= \sqrt{2}e^t,\end{aligned}$$

sustituyendo en la expresión para calcular la longitud de la curva obtenemos,

$$l = \sqrt{2} \int_0^1 e^t dt = \sqrt{2} [e^t]_0^1 = \sqrt{2} [e - 1].$$

b) Para reparametrizar la curva en términos de la longitud de arco s , tenemos por definición, que la longitud de arco $s(t)$ está dada por la expresión,

$$s = s(t) = \int_{t=t_1}^t \left| \frac{d\vec{r}}{dt}(t) \right| dt,$$

para $t \geq t_1$, en este caso escogemos $t_1 = 0$. Por lo tanto la longitud de arco está dada por:

$$\begin{aligned} s(t) &= \sqrt{2} \int_0^t e^t dt \\ &= \sqrt{2} [e^t - 1], \end{aligned}$$

de la expresión anterior despejamos a t en función de la longitud de arco s , de la forma

$$e^t = \frac{1}{\sqrt{2}}s + 1,$$

es decir,

$$t(s) = \log \left(\frac{s}{\sqrt{2}} + 1 \right) = \log \left(\frac{s + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \right),$$

por lo tanto, la ecuación de la curva en términos de la longitud de arco s está dada por:

$$\vec{r}(t(s)) = \exp \left[\log \left(\frac{s + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \right) \right] \left\{ \cos \left[\log \frac{s + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \right] \hat{i} + \sin \left[\log \frac{s + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \right] \hat{j} \right\},$$

finalmente obtenemos,

$$\vec{r}(s) = \frac{s + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \left[\cos \log \left(\frac{s + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \right) \hat{i} + \sin \log \left(\frac{s + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \right) \hat{j} \right].$$

Problema 6:

Para la curva dada por las ecuaciones paramétricas,

$$\begin{aligned}x &= \sin t - t \cos t, \\y &= \cos t + t \sin t, \\z &= t^2,\end{aligned}$$

encontrar,

a) La longitud de arco entre el punto $(0, 1, 0)$ y el punto $(-2\pi, 1, 4\pi^2)$

b) $T(t)$.

c) $T(\pi)$.

Solución:

En forma análoga a los problemas anteriores, en este caso la longitud de la curva estará dada por:

$$l = \int_0^{2\pi} \left| \frac{d\vec{r}}{dt}(t) \right| dt$$

en este caso,

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{r}}{dt}(t) &= (\cos t - \cos t + t \sin t)\hat{i} + (-\sin t + \sin t + t \cos t)\hat{j} + 2t\hat{k} \\&= t \sin t \hat{i} + t \cos t \hat{j} + 2t\hat{k}\end{aligned}$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned}l &= \int_0^{2\pi} \sqrt{t^2 \sin^2 t + t^2 \cos^2 t + 4t^2} dt \\&= \int_0^{2\pi} \sqrt{5t^2} dt = \left[\frac{\sqrt{5}}{2} t^2 \right]_0^{2\pi} \\&= \frac{\sqrt{5}}{2} 4\pi^2,\end{aligned}$$

finalmente la longitud de la curva desde el punto $(0, 1, 0)$ al punto $(-2\pi, 1, 4\pi^2)$,

está dada por

$$l = 2\sqrt{5}\pi^2.$$

b) En forma análoga a los problemas anteriores, en este caso, el vector

tangente a la curva en cualquier punto del espacio está dado por:

$$\begin{aligned}\widehat{T}(t) &= \frac{\vec{r}'(t)}{|\vec{r}'(t)|} \\ &= \frac{t \sin t \widehat{i} + \cos t \widehat{j} + 2t \widehat{k}}{\sqrt{t^2 \sin^2 t + t^2 \cos^2 t + 4t^2}} \\ &= \frac{t \sin t \widehat{i} + t \cos t \widehat{j} + 2t \widehat{k}}{t\sqrt{5}},\end{aligned}$$

finalmente,

$$\widehat{T}(t) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\sin t \widehat{i} + \cos t \widehat{j} + 2\widehat{k} \right].$$

c) Así mismo en el punto $t = \pi$, el vector tangente está dado por:

$$\widehat{T}(t = \pi) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[-\widehat{j} + 2\widehat{k} \right].$$

Problema 7.

a) Sea el campo escalar ϕ dado por:

$$\phi(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

Calcular el gradiente de ϕ en el punto $(1, 0, -1)$.

Solución.

Aplicando la definición del gradiente, obtenemos

$$\begin{aligned}\nabla\phi &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right), \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right), \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right) \right) \\ &= -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \right) (2x\hat{i} + 2y\hat{j} + 2z\hat{k}) \\ &= - \left(\frac{x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \right)\end{aligned}$$

por lo tanto en el punto $(1, 0, -1)$, el gradiente de ϕ está dado por:

$$\nabla\phi(1, 0, -1) = -\frac{1}{(1 + 0 + 1)^{\frac{3}{2}}}(\hat{i} - \hat{k})$$

es decir,

$$\nabla\phi(1, 0, -1) = \frac{1}{2\sqrt{2}}(-\hat{i} + \hat{k}).$$

b) Dado el campo vectorial

$$\vec{f}(x, y, z) = \frac{x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

calcular

i) $\nabla \cdot \vec{f}$ en $(1, -2, 1)$.

j) $\nabla \times \vec{f}$ en $(1, -2, 1)$.

Solución.

i) El campo vectorial es de la forma:

$$\vec{f}(x, y, z) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\hat{i} + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\hat{j} + \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\hat{k}$$

Aplicando la definición de la divergencia, se tiene

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_1}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right) \\
&= \frac{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} - x \left(\frac{1}{2} \left((x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} \right) 2x \right)}{(x^2 + y^2 + z^2)} \\
&= \frac{(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} (x^2 + y^2 + z^2 - x^2)}{(x^2 + y^2 + z^2)}
\end{aligned}$$

finalmente,

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{y^2 + z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

de forma análoga obtenemos,

$$\frac{\partial f_2}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right) = \frac{x^2 + z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

y

$$\frac{\partial f_3}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right) = \frac{x^2 + y^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

por lo tanto la divergencia de la función vectorial dada resulta,

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \vec{f} &= \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} (y^2 + z^2 + x^2 + z^2 + x^2 + y^2) \\
&= \frac{2(x^2 + y^2 + z^2)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)}}
\end{aligned}$$

por lo tanto, la divergencia del campo vectorial evaluado en el punto $(1, -2, 1)$ resulta

$$\nabla \cdot \vec{f}(1, -2, 1) = \frac{2}{\sqrt{(1^2 + (-2)^2 + 1^2)}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

Solución alternativa.

a) El campo vectorial $\vec{f}(x, y, z)$ se puede representar de la siguiente forma:

$$\vec{f}(x, y, z) = \phi(x, y, z) \vec{A}(x, y, z)$$

donde:

$$\begin{aligned}\phi(x, y, z) &= \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\ \vec{A}(x, y, z) &= \vec{r}.\end{aligned}$$

Si aplicamos la siguiente propiedad del operador vectorial nabra obtenemos

$$1) \quad \nabla \cdot (\phi \vec{r}) = \nabla \phi \cdot \vec{r} + \phi \nabla \cdot \vec{r},$$

pero del inciso *a*) se obtuvo que,

$$\nabla \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right) = - \frac{x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

que se puede escribir como

$$(2) \quad \nabla \phi = - \frac{\vec{r}}{r^3},$$

donde r es la magnitud del vector de posición \vec{r} .

Por otro lado de la definición de la divergencia se tiene,

$$(3) \quad \nabla \cdot \vec{r} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3,$$

sustituyendo las ecuaciones (2) y (3) en la ecuación (1) obtenemos,

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (\phi \vec{r}) &= - \frac{\vec{r}}{r^3} \cdot \vec{r} + \frac{3}{r} \\ &= \frac{2}{r}\end{aligned}$$

que es el mismo resultado que se obtuvo anteriormente.

En general si un campo escalar $\phi(x, y, z)$ se puede representar de la forma,

$$\phi(x, y, z) \rightarrow \phi(r)$$

donde r es la magnitud del vector de posición, entonces

$$\nabla \phi(r) = \frac{\partial \phi}{\partial r} \hat{e}_{\vec{r}}$$

donde $r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ y $\hat{e}_r = \frac{\vec{r}}{r}$.

Por ejemplo, si

$$\phi(x, y, z) = \ln \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

que se puede escribir como

$$\phi(r) = \ln \frac{1}{r^3} = -3 \ln r$$

de donde,

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} = -\frac{3}{r}$$

y por lo tanto,

$$\nabla \phi(r) = \frac{\partial \phi}{\partial r} \hat{e}_r = -\frac{3}{r} \left(\frac{\vec{r}}{r} \right) = -\frac{3}{r^2} \vec{r}.$$

Por otro lado, si aplicamos la definición del gradiente, tenemos

$$\nabla \phi(x, y, z) = \frac{3}{2} \left(\frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} \right) (2x\hat{i} + 2y\hat{j} + 2z\hat{k})$$

es decir,

$$\nabla \phi(x, y, z) = \left(\frac{3}{x^2 + y^2 + z^2} \right) (x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}) = \frac{3}{r^2} \vec{r}.$$

j) Si el campo vectorial esta dado como

$$\vec{f}(x, y, z) = \frac{x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

Por definición del rotacional tenemos,

$$\nabla \times \vec{f} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} & \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \end{vmatrix}$$

calculando las derivadas parciales, obtenemos

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{f} &= \left(-\frac{yz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{yz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \hat{i} \\ &\quad - \left(-\frac{xz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{xz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \hat{j} \\ &\quad + \left(-\frac{xy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{xy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \hat{k} \end{aligned}$$

es decir,

$$\nabla \times \vec{f} = \vec{0}$$

Solución alternativa.

De la misma forma que en el inciso i) si aplicamos la propiedad del operador "NABLA" $\nabla \times (\phi(r) \vec{A}) = \nabla \phi(r) \times \vec{A} + \phi(r) \nabla \times \vec{A}$, identificando a $\phi(r) = \frac{1}{r}$ y $\vec{A} = \vec{r}$ tenemos,

$$(4) \quad \nabla \times \left(\frac{\vec{r}}{r} \right) = \nabla \left(\frac{1}{r} \right) \times \vec{r} + \frac{1}{r} \nabla \times \vec{r},$$

además, de la definición del rotacional tenemos que,

$$(5) \quad \nabla \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix} = \vec{0},$$

y del inciso a), obtenemos

$$(6) \quad \nabla \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{\vec{r}}{r^3},$$

sustituyendo las ecuaciones (5) y (6) en la ecuación (4), obtenemos

$$\nabla \times \left(\frac{\vec{r}}{r} \right) = \left(-\frac{\vec{r}}{r^3} \right) \times \vec{r},$$

aplicando la definición del producto vectorial de dos vectores

$$\vec{r} \times \vec{r} = \vec{0},$$

finalmente obtenemos,

$$\nabla \times \left(\frac{\vec{r}}{r} \right) = \vec{0},$$

que es el mismo resultado que se obtuvo aplicando la definición del determinante para el rotacional.

Problema 8.

El potencial electrostático V debido a dos filamentos paralelos infinitos de densidades lineales λ y $-\lambda$ está dado por,

$$V = \frac{\partial}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right),$$

donde

$$r_1^2 = (x - x_0)^2 + y^2,$$

y

$$r_2^2 = (x + x_0)^2 + y^2,$$

consideremos los filamentos en la dirección z , pasando por el plano XY en

$(-x_0, 0, 0)$ y $(x_0, 0, 0)$. Verificar que:

$$\nabla V(x, y) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \left[\left(\frac{x + x_0}{r_1^2} - \frac{x - x_0}{r_2^2} \right) \hat{i} + 2y \left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2} \right) \hat{j} \right]$$

Solución:

Sustituyendo los valores de r_1^2 y r_2^2 , y aplicando la propiedad de los logaritmos, obtenemos

$$V(x, y) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \left[\frac{(x + x_0)^2 + y^2}{(x - x_0)^2 + y^2} \right]^{\frac{1}{2}} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \left[\frac{(x + x_0)^2 + y^2}{(x - x_0)^2 + y^2} \right].$$

Por definición, sabemos que

$$\nabla V(x, y) \equiv \frac{\partial V}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial V}{\partial y} \hat{j}.$$

Calculemos primeramente la derivada con respecto a x ,

$$\frac{\partial V(x, y)}{\partial x} = k \frac{\partial}{\partial x} \left[\ln \left(\frac{(x + x_0)^2 + y^2}{(x - x_0)^2 + y^2} \right) \right],$$

donde

$$k = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0},$$

de esta forma,

$$\frac{\partial V(x, y)}{\partial x} = k \left\{ \frac{(x - x_0)^2 + y^2}{(x + x_0)^2 + y^2} \left[\frac{[(x - x_0)^2 + y^2] 2(x + x_0) - [(x + x_0)^2 + y^2] 2(x - x_0)}{[(x - x_0)^2 + y^2]^2} \right] \right\},$$

sustituyendo

$$r_1^2 = (x - x_0)^2 + y^2,$$

y

$$r_2^2 = (x + x_0)^2 + y^2,$$

obtenemos,

$$\begin{aligned} \frac{\partial V(x, y)}{\partial x} &= k \left\{ \frac{r_1^2}{r_2^2} \left[\frac{2(x + x_0)r_1^2 - 2(x - x_0)r_2^2}{r_1^4} \right] \right\} \\ &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{2(x + x_0)r_1^2 - 2(x - x_0)r_2^2}{r_1^2 r_2^2} \right\} \\ &= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{(x + x_0)}{r_2^2} - \frac{(x - x_0)}{r_1^2} \right\}. \end{aligned}$$

Análogamente, para la derivada con respecto a y obtenemos,

$$\begin{aligned} \frac{\partial V(x, y)}{\partial y} &= k \frac{\partial}{\partial y} \left[\ln \left(\frac{(x + x_0)^2 + y^2}{(x - x_0)^2 + y^2} \right) \right] \\ &= k \left\{ \frac{(x - x_0)^2 + y^2}{(x + x_0)^2 + y^2} \left[\frac{(x - x_0)^2 + y^2 - 2y \{ (x + x_0)^2 + y^2 \} 2y}{[(x - x_0)^2 + y^2]^2} \right] \right\} \\ &= k \left\{ \frac{r_1^2}{r_2^2} \left[\frac{2y(r_1^2 - r_2^2)}{r_1^4} \right] \right\} \\ &= k 2y \left[\frac{1}{r_2^2} - \frac{1}{r_1^2} \right] \hat{j}. \end{aligned}$$

Finalmente, sumando las derivadas parciales con respecto a x y a y obtenemos,

$$\nabla V(x, y) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \left[\left(\frac{x + x_0}{r_1^2} - \frac{x - x_0}{r_2^2} \right) \hat{i} + 2y \left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2} \right) \hat{j} \right].$$

Problema 9.

Hallar:

- a) La derivada direccional de $\phi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ en la dirección del punto $P(1, 1, 0)$ al punto $Q(2, 1, 1)$ y
b) Su valor máximo y dirección en el punto $(1, 1, 0)$.

Solución:

a) Sean \vec{r}_P y \vec{r}_Q los vectores de posición de los puntos P y Q respectivamente, es decir

$$\begin{aligned}\vec{r}_P &= \hat{i} + \hat{j} \\ \vec{r}_Q &= 2\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}\end{aligned}$$

por lo tanto,

$$\hat{u} = \frac{\vec{r}_Q - \vec{r}_P}{|\vec{r}_Q - \vec{r}_P|} = \frac{(2\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}) - (\hat{i} + \hat{j})}{\sqrt{(2-1)^2 + (1-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{i} + \hat{k})$$

asimismo, de la definición del gradiente dada por la ecuación, $\nabla\phi(x, y, z) \equiv \frac{\partial V}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{k}$ obtenemos,

$$\nabla\phi = 2x\hat{i} + 2y\hat{j} + 2z\hat{k}$$

sustituyendo en la expresión para la derivada direccional,

$$\begin{aligned}\frac{d\phi}{ds} &= \nabla\phi \cdot \hat{u} \\ &= (2x\hat{i} + 2y\hat{j} + 2z\hat{k}) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{i} + \hat{k}) \\ &= \frac{2}{\sqrt{2}}(x + z)\end{aligned}$$

evaluando en el punto $(1, 1, 0)$ finalmente obtenemos,

$$\frac{d\phi(1, 1, 0)}{ds} = \sqrt{2}.$$

Es decir, el campo escalar se incrementa a una razón de $\sqrt{2}$ por unidad de distancia cuando se avanza del punto $P(1, 1, 0)$ al punto $Q(2, 1, 1)$.

b) Por definición aplicando la propiedad del gradiente que establece, el valor máximo de $\frac{d\phi}{ds}$ será igual a la magnitud del gradiente de ϕ , es decir;

$$\left(\frac{d\phi}{ds}\right)_{\max} = |\nabla\phi| = 2\sqrt{2}$$

y también de la propiedad del gradiente, el valor máximo de $\frac{d\phi}{ds}$ se tendrá en la dirección del gradiente $\nabla\phi(1, 1, 0) = 2(1)\hat{i} + 2(1)\hat{j} + 2(0)\hat{k}$, es decir, en la dirección del vector $2\hat{i} + 2\hat{j}$.

Problema 10.

Hallar la derivada de $P = 4 \exp(2x - y + z)$ en el punto $(1, 1, -1)$ en dirección del vector $(-3, 5, 6)$.

Solución:

Por definición la derivada direccional está dada por:

$$\frac{\partial \phi}{\partial s} = \nabla \phi \cdot \hat{u},$$

en este caso, la derivada direccional estará dada por,

$$\frac{\partial P}{\partial s} = \nabla P \cdot \hat{u},$$

calculando el gradiente de la función P ,

$$\begin{aligned} \nabla P &= \frac{\partial}{\partial x} (4 \exp(2x - y + z)) \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} (4 \exp(2x - y + z)) \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} (4 \exp(2x - y + z)) \hat{k} \\ &= \exp(2x - y + z) (8\hat{i} - 4\hat{j} + 4\hat{k}), \end{aligned}$$

la dirección está dada en este caso por el vector,

$$\hat{u} = \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = \frac{-3\hat{i} + 5\hat{j} + 6\hat{k}}{\sqrt{70}},$$

por lo tanto la derivada de la función P en el punto $(1, 1, -1)$ está dada por:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P(1, 1, -1)}{\partial s} &= \nabla P(1, 1, -1) \cdot \hat{u} \\ &= \exp(2(1) - (1) + (-1)) (8\hat{i} - 4\hat{j} + 4\hat{k}) \cdot \frac{-3\hat{i} + 5\hat{j} + 6\hat{k}}{\sqrt{70}} \\ &= \frac{-24 - 20 + 24}{\sqrt{70}} \\ &= -\frac{20}{\sqrt{70}}. \end{aligned}$$

Problema 11

Calcule la derivada direccional de $f(x, y, z) = x^{yz}$ en el punto $(e, e, 0)$ y en la dirección del punto $(1, 2, 3)$ hacia el punto $(0, 3, 2)$.

Solución:

Para calcular la derivada direccional de $f(x, y, z)$, tenemos por definición que

$$\frac{df}{ds} = \nabla f \cdot \hat{u},$$

donde, ∇f es el gradiente de la función dada y \hat{u} es el vector que indica la dirección, que en este caso, está dada por el vector,

$$\vec{u} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = (0, 3, 2) - (1, 2, 3) = (-1, 1, -1),$$

de esta forma,

$$\hat{u} = \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1, 1, 1).$$

Aplicando la definición del gradiente, obtenemos

$$\begin{aligned} \nabla f &= \frac{\partial}{\partial x} [x^{yz}] \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} [x^{yz}] \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} [x^{yz}] \hat{k} \\ &= \frac{\partial}{\partial x} [e^{\ln x^{yz}}] \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} [e^{\ln x^{yz}}] \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} [e^{\ln x^{yz}}] \hat{k} \\ &= \left[e^{\ln x^{yz}} \left(\frac{\partial}{\partial x} (\ln x^{yz}) \right) \right] \hat{i} + e^{\ln x^{yz}} \left[\frac{\partial}{\partial y} (\ln x^{yz}) \right] \hat{j} + e^{\ln x^{yz}} \left[\frac{\partial}{\partial z} (\ln x^{yz}) \right] \hat{k} \\ &= \left[e^{\ln x^{yz}} \right] \left[\frac{1}{x^{yz}} (yzx^{yz-1}) \hat{i} + \frac{1}{x^{yz}} (z \ln x) \hat{j} + \frac{1}{x^{yz}} (y \ln x) \hat{k} \right], \end{aligned}$$

que se puede escribir de la forma,

$$\nabla f = (yzx^{yz-1}) \hat{i} + z \ln x \hat{j} + y \ln x \hat{k},$$

de esta forma en el punto $(e, e, 0)$, el gradiente está dado por:

$$\begin{aligned} \nabla f(e, e, 0) &= 0\hat{i} + 0\hat{j} + e \ln(e) \hat{k} \\ &= e(0, 0, 1), \end{aligned}$$

Finalmente la derivada direccional está dada por:

$$\begin{aligned}
\frac{df}{ds} &= e(0,0,1) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}(-1,1,1) \\
&= \frac{e}{\sqrt{3}}.
\end{aligned}$$

Problema 12.

Encontrar los valores de las constantes a, b y c de forma que la derivada de la función

$$\phi(x, y, z) = axy^2 + byz + cx^3z^2$$

en el punto $(1, 2, -1)$ tenga un máximo de magnitud 64 en la dirección paralela al eje Z .

Solución:

Por definición, la derivada direccional está dada por:

$$\frac{d\phi}{ds} = \nabla\phi \cdot \hat{u}$$

Aplicando las hipótesis del problema, ésta derivada será máxima en dirección paralela al eje Z , es decir en dirección del vector \hat{k} por lo tanto,

$$(1) \quad \nabla\phi \cdot \hat{k} = 64,$$

$$(2) \quad \nabla\phi \cdot \hat{j} = 0,$$

$$(3) \quad \nabla\phi \cdot \hat{i} = 0,$$

aplicando la definición del gradiente obtenemos,

$$\nabla\phi = (ay^2 + 3cx^2z^2)\hat{i} + (2axy + bz)\hat{j} + (by + 2cx^3z)\hat{k}$$

evaluando en el punto $(1, 2, -1)$, obtenemos

$$\nabla\phi(1, 2, -1) = (4a + 3c)\hat{i} + (4a - b)\hat{j} + (2b - 2c)\hat{k}$$

por lo tanto, de las ecuaciones (1), (2) y (3) obtenemos

$$(1a) \quad 2b - 2c = 64,$$

$$(2a) \quad 4a + 3c = 0,$$

$$(3a) \quad 4a - b = 0,$$

de las ecuaciones (2a) y (3a) obtenemos,

$$b = -3c$$

al sustituir en la ecuación (1a) obtenemos,

$$c = -8$$

nuevamente empleando las ecuaciones (21) y (3a) obtenemos,

$$\begin{aligned} a &= 6 \\ b &= 24 \end{aligned}$$

Problema 13.

Dado el campo escalar,

$$\phi(x, y, z) = 2xz + e^y z^2$$

- a) Encontrar $\frac{d\phi}{ds}$ en el punto $(2, 1, 1)$ y en la dirección del vector $2\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$.
b)Cuál es la dirección del máximo cambio de $\phi(x, y, z)$ en el punto $(2, 1, 1)$ y que valor tiene éste máximo cambio.
c) Encuentre la ecuación del plano tangente a $\phi(x, y, z) = 4 + e$ en el punto $(2, 1, 1)$.

Problema:

Por definición, sabemos que la derivada direccional está dada por:

$$\frac{df}{ds} = \nabla f \cdot \hat{u},$$

donde, ∇f es el gradiente de la función dada y \hat{u} es el vector que indica la dirección, que en este caso, está dada por el vector,

$$\hat{u} = \frac{1}{\sqrt{14}} (2, 3, -1),$$

así mismo,

$$\nabla \phi \equiv \frac{\partial \phi}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \hat{k} = 2z\hat{i} + e^y z^2 \hat{j} + (2x + e^y z) \hat{k},$$

de tal forma que en el punto $(2, 1, 1)$, el gradiente está dado por:

$$\nabla \phi = 2\hat{i} + e\hat{j} + (4 + 2e)\hat{k}$$

Por lo tanto, la derivada direccional está dada por:

$$\begin{aligned} \frac{df}{ds} &= (2\hat{i} + e\hat{j} + (4 + 2e)\hat{k}) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{14}} (2, 3, -1) \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{14}} [4 + 3e - 4 - 2e] = \frac{e}{\sqrt{14}}. \end{aligned}$$

b) La dirección en el cual el campo escalar ϕ está cambiando más rápido, está dada en la dirección gradiente, de esta forma en el punto $(2, 1, 1)$, tenemos

$$\nabla \phi(2, 1, 1) = 2\hat{i} + e\hat{j} + (4 + 2e)\hat{k},$$

y su máximo valor está dada por:

$$\begin{aligned} |\nabla \phi(2, 1, 1)| &= \sqrt{2^2 + e^2 + (4 + 2e)^2} \\ &= \sqrt{20 + 16e + 5e^2}. \end{aligned}$$

c) El vector normal a la superficie en el punto $(2, 1, 1)$ está dado por el gradiente,

$$\nabla\phi(2, 1, 1) = 2\hat{i} + e\hat{j} + (4 + 2e)\hat{j},$$

De esta forma, la ecuación del plano tangente a $\phi(2, 1, 1) = 4 + e$, está dada por

$$\nabla\phi \bullet (\vec{r} - \vec{r}_0) = 0,$$

es decir,

$$2(x - 2) + e(y - 1) + (4 + 2e)(z - 1) = 0,$$

que también se puede escribir de la forma,

$$2x + ey + 4z = 8 + 3e.$$

Problema 14.

La temperatura de los puntos en el espacio está dada por:

$$T(x, y, z) = x^2 + y^2 - z$$

a) Si un mosquito situado en el punto $(1, 1, 2)$ se está muriendo de frío. ¿En qué dirección deberá volar para que no se muera?

b) Si el mosquito vuela a una razón de 5 unidades de distancia por segundo en dirección del vector $4\hat{i} + 4\hat{j} - 2\hat{k}$.

¿Cuál es la razón de cambio de aumento en la temperatura por unidad de tiempo en el momento en que pasa el mosquito por el punto $(1, 1, 2)$?

Solución:

a) Como el gradiente de T apunta en la máxima razón de cambio de la temperatura y el mosquito en el punto $(1, 1, 2)$ se está muriendo de frío, deberá moverse en la dirección del gradiente para calentarse.

Aplicando la definición del gradiente,

$$\nabla T(x, y, z) \equiv \frac{\partial T}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial T}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial T}{\partial z} \hat{k},$$

en este caso, tenemos

$$\nabla T(x, y, z) = 2x\hat{i} + 2y\hat{j} - \hat{k},$$

de esta forma, en el punto $(1, 1, 2)$ el gradiente está dado por

$$\nabla T(1, 1, 2) = 2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k},$$

así que el mosquito deberá moverse en la dirección del vector $(2, 2, -1)$.

b) Aplicando regla de la cadena, la razón de cambio en la temperatura esta dada por:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{dT}{ds} \frac{ds}{dt},$$

donde

$$\frac{dT}{ds} = \nabla T \cdot \hat{u},$$

es la derivada direccional, y $\frac{ds}{dt}$, es la rapidez con la que se mueve el mosquito. Por hipótesis del problema, la dirección está dada por el vector unitario,

$$\hat{u} = \frac{4\hat{i} + 4\hat{j} - 2\hat{k}}{\sqrt{16 + 16 + 4}} = \left(\frac{4}{6}, \frac{4}{6}, -\frac{2}{6} \right),$$

de esta forma la derivada direccional estará dada por

$$\frac{dT}{ds} = (2, 2, -1) \cdot \frac{1}{3}(2, 2, -1) = \frac{4}{3} + \frac{4}{3} + \frac{1}{3} = 3,$$

y como $\frac{ds}{dt} = 5$, finalmente el cambio en la temperatura estará dada de la forma,

$$\frac{dT}{dt} = 15 \frac{^{\circ}C}{seg}.$$

Problema 15.

El capitán Peluches tiene dificultades cerca del lado soleado de Mercurio. La temperatura del casco de la nave, cuando él esta en la posición (x, y, z) está dada por:

$$T(x, y, z) = e^{-x-y-z},$$

donde x, y y z están medidas en metros. Actualmente él está en el punto $(2, 2, 2)$.

a) ¿En qué dirección deberá avanzar para disminuir más rapido la temperatura?

b) Si la nave viaja a $e^8 \frac{m}{s}$, ¿con qué rapidez decaerá la temperatura si avanza en esa dirección?

Solución:

a) Si el campo escalar de temperaturas, está dado por

$$T(x, y, z) = e^{-x-y-z},$$

de la definición de la derivada direccional $\frac{dT}{ds} = \nabla T \cdot \hat{u}$, que físicamente nos da la razón de cambio del campo escalar (temperatura) en la dirección del vector \hat{u} , la máxima razón de cambio de aumento de la temperatura estará dada por

$$\left(\frac{dT}{ds} \right)_{\max} = |\nabla T|,$$

es decir, cuando ∇T apunta en la dirección de \hat{u} . Por lo tanto, si el capitán Peluches está en el punto $(2, 2, 2)$ se tiene que mover en dirección contraria al gradiente. Aplicando la definición del gradiente, tenemos

$$\begin{aligned} \nabla T &= \frac{\partial T}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial T}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial T}{\partial z} \hat{k} \\ \nabla T &= -e^{-x-y-z} \hat{i} - e^{-x-y-z} \hat{j} - e^{-x-y-z} \hat{k} \\ \nabla [T(2, 2, 2)] &= -e^{-2-2-2} (\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}) = -e^{-6} (\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}), \end{aligned}$$

de esta forma, el capitán Peluches se tiene que mover en dirección del vector $e^{-6} (\hat{i} + \hat{j} + \hat{k})$.

b) Si la nave viaja una rapidez de $e^8 m/s \left(\frac{ds}{dt} \right)$, entoces la rapidez con la cual disminuye la temperatura, está dada por (aplicando regla de la cadena):

$$\frac{dT}{dt} = \frac{dT}{ds} \frac{ds}{dt},$$

donde

$$\frac{dT}{ds} = \nabla T \bullet \hat{u},$$

y

$$\hat{u} = \frac{\nabla T}{|\nabla T|} = \frac{e^{-6}(\hat{i} + \hat{j} + \hat{k})}{\sqrt{e^{-12}3}} = \frac{(\hat{i} + \hat{j} + \hat{k})}{\sqrt{3}},$$

por lo tanto,

$$\frac{dT}{ds} = \nabla T \bullet \frac{\nabla T}{|\nabla T|} = \frac{|\nabla T|^2}{|\nabla T|} = |\nabla T| = e^{-6}\sqrt{3} \left(\frac{{}^0C}{m} \right),$$

finalmente, la rapidez con la que disminuye la temperatura está dada por:

$$\frac{dT}{dt} = \sqrt{3} \left(\frac{{}^0C}{m} \right) \left(e^8 \frac{m}{s} \right) = \sqrt{3} (e^8) \frac{{}^0C}{seg}.$$

Problema 16.

a) La temperatura en una caja rectangular está dada aproximadamente por

$$T(x, y, z) = x(1 - x)(2 - y)(3 - z),$$

donde $0 < x < 1$, $0 < y < 2$ y $0 < z < 3$. Si un mosquito se localiza en el punto $(0, 1, -2)$, en que dirección deberá volar para enfriarse lo más rápido posible. Explique su respuesta.

b) Si el mosquito está volando a una velocidad de 1.5 metros por segundo. Con qué rapidez está cambiando la temperatura de la caja cuando se mueve en dirección paralela al eje x ?

Solución.

a) El gradiente apunta donde la razón de cambio del incremento de temperatura es máxima, por lo que el mosquito debe moverse en dirección opuesta al gradiente. Por definición, el gradiente de una función escalar está dado por,

$$\nabla T = \frac{\partial T}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial T}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial T}{\partial z} \hat{k},$$

en este caso,

$$T(x, y, z) = x(1 - x)(2 - y)(3 - z),$$

luego entonces

$$\begin{aligned} \nabla T &= \frac{\partial T}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial T}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial T}{\partial z} \hat{k} \\ \nabla T &= [(1 - x) - x] (2 - y) (3 - z) \hat{i} - x (1 - x) (3 - z) \hat{j} - x (1 - x) (2 - y) \hat{k} \\ &= (1 - 2x) (2 - y) (3 - z) \hat{i} - x (1 - x) (3 - z) \hat{j} - x (1 - x) (2 - y) \hat{k} \end{aligned}$$

evaluando en el punto donde esta el mosquito, tenemos

$$\begin{aligned} \nabla T(0, 1, -2) &= (1 - 2(0)) (2 - (1)) (3 - (-2)) \hat{i} + 0 \hat{j} + 0 \hat{k} \\ &= 5 \hat{i} \end{aligned}$$

es decir, el mosquito debe volar en dirección del vector $-5 \hat{i}$ para enfriarse.

b) Si el mosquito vuela a una rapidez de $v = 1.5 \frac{m}{seg} = \frac{ds}{dt}$, entonces aplicando la regla de la cadena, tenemos

$$\frac{dT}{dt} = \frac{dT}{ds} \frac{ds}{dt},$$

donde

$$\frac{dT}{ds} = \nabla T \bullet \hat{u},$$

y

$$\hat{u} = (1, 0, 0)$$

puesto que se mueve en dirección paralela al eje x , por lo tanto

$$\begin{aligned}\frac{dT}{dt} &= 1.5 (\nabla T \cdot \hat{u}) \\ &= 1.5 \left[(5\hat{i}) \cdot \hat{i} \right],\end{aligned}$$

finalmente, la rapidez con la cual está cambiando la temperatura de la caja cuando el mosquito se mueve en dirección paralela al eje x , está dada por

$$\frac{dT}{dt} = 7.5 \frac{{}^{\circ}C}{seg}.$$

Problema 17.

- a) Defina el concepto de conjunto de nivel.
- b) Defina el concepto de gráfica de una función.
- c) Describa el comportamiento, conforme varía c , del conjunto de nivel para la siguiente función.

$$f(x, y) = 1 - x^2 - y^2,$$

- d) Cual es el conjunto de nivel si $c > 1$.

Solución:

a) Sea $f : U \subset R^n \longrightarrow R$, se define el conjunto de nivel como el conjunto de puntos $\vec{x} \in U$ que satisfacen,

$$L_c = \{ \vec{x} \in U : f(\vec{x}) = C \in R \}.$$

- b) Sea

$$f : U \subset R^n \longrightarrow R,$$

se define la gráfica de la función f como el conjunto de puntos

$$(x_1, x_2, \dots, x_n, f(x_1, x_2, \dots, x_n)),$$

que pertenecen a R^{n+1} para

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \in U,$$

es decir, el conjunto

$$\{ ((x_1, x_2, \dots, x_n, f(x_1, x_2, \dots, x_n)) \in R^{n+1} : (x_1, \dots, x_n) \in U \}.$$

c) Si $f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$; en este caso el conjunto de nivel es una curva en R^2 tal que cumple:

$$L_c = \{ (x, y) : 1 - x^2 - y^2 = c \},$$

o también,

$$L_c = \{ (x, y) : x^2 + y^2 = 1 - c \},$$

es decir, conforme c varíe las curvas del nivel son círculos de radio $\sqrt{1 - c}$.

- d) Si $c > 1$ el conjunto de nivel es el conjunto vacío.

Problema 18.

Hallar un vector unitario normal a la superficie S representada por las ecuaciones paramétricas $x = u \cos v$, $y = u \sin v$, y $z = z(u)$.

Solución:

Por definición, una superficie S en el espacio está descrita por una función vectorial de la forma:

$$\vec{r}(u, v) = x(u, v)\hat{i} + y(u, v)\hat{j} + z(u, v)\hat{k},$$

donde u y v son parámetros (variables), en forma análoga al parámetro t para una trayectoria curva en el espacio representada por $\vec{f}(t)$; así mismo, las ecuaciones

$$\begin{aligned}x &= x(u, v), \\y &= y(u, v), \\z &= z(u, v),\end{aligned}$$

son las ecuaciones paramétricas de la superficie S .

En este caso, la ecuación paramétrica para la superficie S está dada por:

$$\vec{r}(u, v) = u \cos v \hat{i} + u \sin v \hat{j} + z(u) \hat{k}$$

por lo tanto, un vector normal unitario en cada punto de la superficie S representada por la ecuación anterior estará dado por:

$$\hat{n} = \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|},$$

donde los vectores \vec{r}_u y \vec{r}_v son vectores tangentes a las líneas coordenadas u y v respectivamente, éstos vectores están dados por:

$$\vec{r}_u \equiv \frac{\partial \vec{r}(u, v)}{\partial u} = \cos v \hat{i} + \sin v \hat{j} + z'(u) \hat{k},$$

y

$$\vec{r}_v \equiv \frac{\partial \vec{r}(u, v)}{\partial v} = -u \sin v \hat{i} + u \cos v \hat{j}.$$

Calculando el producto vectorial de estos vectores, obtenemos

$$\vec{r}_u \times \vec{r}_v = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \cos v & \sin v & z'(u) \\ -u \sin v & u \cos v & 0 \end{vmatrix} = (-u \cos v z'(u)) \hat{i} - (u \sin v z'(u)) \hat{j} + (u \cos^2 v + u \sin^2 v) \hat{k}$$

es decir,

$$\vec{r}_u \times \vec{r}_v = (-u \cos v z'(u)) \hat{i} - (u \sin v z'(u)) \hat{j} + u \hat{k},$$

la magnitud de este vector está dada por,

$$|\vec{r}_u \times \vec{r}_v| = \sqrt{(-u \cos vz'(u))^2 + (u \sin vz'(u))^2 + u^2} = u\sqrt{1 + [z'(u)]^2},$$

sustituyendo los resultados anteriores en la expresión para el vector unitario \hat{n} , obtenemos

$$\hat{n} = \frac{-\cos vz'(u)\hat{i} - \sin vz'(u)\hat{j} + \hat{k}}{\sqrt{1 + [z'(u)]^2}}$$

Problema 19.

Demostrar que $\vec{f} = r^2 \vec{r}$ es un campo vectorial conservativo y encontrar el potencial escalar del cual se deriva.

Solución:

Para mostrar que $\vec{f} = r^2 \vec{r}$ es un campo conservativo debemos verifica que $\nabla \times \vec{f} = \vec{O}$.

Calculando el rotacional de \vec{f} , usando la propiedad distributiva del producto de un campo escalar por un campo vectorial obtenemos,

$$\nabla \times (r^2 \vec{r}) = \nabla r^2 \times \vec{r} + r^2 \nabla \times \vec{r},$$

aplicando las siguientes propiedades del operador nabla,

$$\nabla r^n = nr^{n-2} \vec{r},$$

que se demuestra en el problema 22, y la propiedad

$$\nabla \times \vec{r} = \vec{O},$$

obtenemos,

$$\nabla \times (r^2 \vec{r}) = 2\vec{r} \times \vec{r} = \vec{O},$$

es decir, $\vec{f} = r^2 \vec{r}$, es un campo vectorial conservativo.

Ahora debemos encontrar el potencial $\phi(r)$ tal que $\vec{f}(r) = \nabla \phi(r)$. Para hacer esto, aplicamos la siguiente expresión para el gradiente de una función que solamente depende de $r = |\vec{r}|$, y que resulta de aplicar la regla de la cadena,

$$\begin{aligned} \nabla \phi(r) &= \frac{\partial \phi(r)}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial \phi(r)}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial \phi(r)}{\partial z} \hat{k}, \\ &= \frac{\partial \phi}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial \phi}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial \phi}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial z} \hat{k}, \\ &= \phi'(r) \nabla r, \\ &= \phi'(r) \hat{e}_r, \end{aligned}$$

de esta forma, el campo vectorial dado, se puede escribir como,

$$\vec{f} = r^2 \vec{r} = r^3 \hat{e}_r,$$

por lo tanto, aplicando el hecho de que el campo vectorial es conservativo, es decir $\vec{f}(r) = \nabla \phi(r)$, obtenemos

$$\phi'(r) = r^3,$$

de donde, integrando obtenemos inmediatamente,

$$\phi(r) = \frac{r^4}{4} + C,$$

donde C es una constante de integración que depende de las condiciones iniciales.

Problema 20.

- a) Mostrar que $\nabla \bullet [f(r) \vec{r}] = 3f(r) + rf'(r)$.
b) Calcule $\nabla \times [f(r) \vec{r}]$ (no aplique la definición del determinante).

Solución:

Aplicando la propiedad de la divergencia del producto de una función escalar por una función vectorial, dada por:

$$\nabla \cdot [f(r) \vec{r}] = \nabla f(r) \cdot \vec{r} + f(r) \nabla \cdot \vec{r},$$

como el campo escalar $f(r)$, sólo depende de $r = |\vec{r}|$, podemos aplicar

$$\nabla f(r) = f'(r) \nabla r = f'(r) \frac{\vec{r}}{r},$$

además, por definición de la divergencia de un campo vectorial, tenemos

$$\nabla \bullet \vec{r} = 3,$$

entonces

$$\nabla \bullet [f(r) \vec{r}] = f'(r) \frac{\vec{r}}{r} \bullet \vec{r} + 3f(r) = rf'(r) + 3f(r),$$

b) En forma análoga al inciso a) aplicando la propiedad del rotacional del producto de una función escalar por una función vectorial, dada por:

$$\nabla \times [f(r) \vec{r}] = f(r) \nabla \times \vec{r} + \nabla f(r) \times \vec{r},$$

por definición, sabemos que $\nabla \times \vec{r} = \vec{0}$, y aplicando la expresión para el gradiente de una función que sólo depende de r , donde $r = |\vec{r}|$, obtenemos

$$\nabla f(r) \times \vec{r} = \frac{f'(r)}{r} \vec{r} \times \vec{r} = \vec{0},$$

finalmente se demuestra que

$$\nabla \times [f(r) \vec{r}] = \vec{0}.$$

Problema 21.

Hallar el campo vectorial \vec{F} tal que $\vec{F} = f(r)\vec{r}$ y $\text{div}\vec{F} = 0$, es decir; halle la función $f(r)$.

Solución:

Aplicando la siguiente propiedad del operador nabla,

$$\nabla \cdot \Phi \vec{A} = \nabla \Phi \cdot \vec{A} + \Phi \nabla \cdot \vec{A},$$

en este caso, tenemos

$$\begin{aligned}\Phi &= f(r), \\ \vec{A} &= \vec{r},\end{aligned}$$

$$\nabla \cdot [f(r)\vec{r}] = \nabla f(r) \cdot \vec{r} + f(r)\nabla \cdot \vec{r}$$

como el campo escalar f , sólo depende de $r = |\vec{r}|$, podemos aplicar

$$\nabla f(r) = f'(r) \nabla r = f'(r) \frac{\vec{r}}{r},$$

que se demuestra aplicando regla de la cadena (ver problema 19). Por otro lado, de la definición de la divergencia de un campo vectorial, tenemos

$$\nabla \cdot \vec{r} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (x, y, z) = 3,$$

entonces

$$\begin{aligned}\nabla \cdot [f(r)\vec{r}] &= f'(r) \frac{\vec{r}}{r} \cdot \vec{r} + 3f(r) \\ &= f'(r)r + 3f(r),\end{aligned}$$

aplicando la hipótesis del problema dada por $\nabla \cdot [f(r)\vec{r}] = 0$, obtenemos

$$\frac{f'(r)}{f(r)}r + 3 = 0,$$

o también,

$$\frac{1}{f(r)}df(r) = -\frac{3}{r}dr,$$

integrando, obtenemos

$$\begin{aligned}
\int \frac{df(r)}{f(r)} &= -3 \int \frac{dr}{r} \\
\ln f(r) + cte &= -3(\ln r + cte) \\
\ln f(r) &= \ln r^{-3} + cte \\
e^{\ln f(r)} &= e^{(\ln r^{-3} + cte)},
\end{aligned}$$

finalmente, la función escalar está dada por:

$$f(r) = Ar^{-3} = \frac{A}{r^3}.$$

donde A es una constante de integración.

Problema 22.

a) Si $\vec{r} = |\vec{r}|$ demostrar las siguientes identidades,

$$\begin{aligned} I) \quad & \nabla r^n = nr^{n-2} \vec{r} \\ II) \quad & \nabla^2 r^n = n(n+1)r^{n-2} \\ III) \quad & \nabla \cdot (r^n \vec{r}) = (n+3)r^n \end{aligned}$$

b) Aplique los resultados del inciso a) para calcular,

$$\begin{aligned} I) \quad & \nabla \left(\frac{1}{r} \right) \\ II) \quad & \nabla^2 (1/r^{3/2}) \\ III) \quad & \nabla \cdot \left(\frac{\vec{r}}{r^3} \right) \end{aligned}$$

Solucion:

a) Por definición, el vector de posición de un punto en el espacio está dado por,

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k},$$

de donde, la magnitud del vector esta dada por $r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.
Aplicando la definición del operador vectorial nabla ∇ dado por,

$$\nabla \equiv \frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k},$$

obtenemos para I),

$$\nabla r^n = \frac{\partial r^n}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial r^n}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial r^n}{\partial z} \hat{k},$$

sustituyendo la magnitud del vector de posición, tenemos

$$\begin{aligned} \nabla r^n &= \frac{\partial}{\partial x} (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{n}{2}} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{n}{2}} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{n}{2}} \hat{k} \\ &= \frac{n}{2} (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{n}{2}-1} (2x) \hat{i} + \frac{n}{2} (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{n}{2}-1} (2y) \hat{j} + \frac{n}{2} (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{n}{2}-1} (2z) \hat{k} \\ &= n (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{n-2}{2}} (x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}) \\ &= n |\vec{r}|^{n-2} \vec{r}, \end{aligned}$$

finalmente,

$$\nabla r^n = nr^{n-2} \vec{r}.$$

II) Para este caso, sabemos que el operador laplaciano está dado por,

$$\nabla^2 \equiv \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

de esta forma, sustituyendo la magnitud del vector \vec{r} , obtenemos

$$\nabla^2 r^n = \frac{\partial^2}{\partial x^2} (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{n}{2}} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{n}{2}} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{n}{2}},$$

observese por la forma de la función escalar dada, sólo necesitamos calcular las derivadas parciales con respecto a x , las derivada con respecto a y y z son análogas, sin embargo podemos usar el resultado del inciso anterior de la forma,

$$\nabla^2 r^n \equiv \nabla \cdot \nabla r^n = \nabla \cdot (nr^{n-2} \vec{r}),$$

y en este caso podemos aplicar la siguiente propiedad del operador nabla,

$$\nabla \cdot (\Phi \vec{A}) = \nabla \Phi \cdot \vec{A} + \Phi \nabla \cdot \vec{A},$$

donde,

$$\begin{aligned} \Phi &= nr^{n-2}, \\ \vec{A} &= \vec{r}, \end{aligned}$$

por lo tanto,

$$\nabla^2 r^n \equiv \nabla \cdot (nr^{n-2} \vec{r}) = \nabla (nr^{n-2}) \cdot \vec{r} + nr^{n-2} \nabla \cdot \vec{r},$$

aplicando la divergencia de una función vectorial tenemos que $\nabla \cdot \vec{r} = 3$ y el resultado del inciso anterior, en este caso $\nabla r^{n-2} = (n-2)r^{n-4} \vec{r}$, de esta forma,

$$\begin{aligned} \nabla^2 r^n &= n(n-2)r^{n-4} \vec{r} \cdot \vec{r} + 3nr^{n-2}, \\ &= n(n-2)r^{n-2} + 3nr^{n-2}, \end{aligned}$$

donde aplicamos el hecho de que $\vec{r} \cdot \vec{r} = |\vec{r}|^2 = r^2$, finalmente obtenemos

$$\nabla^2 r^n = n(n+2)r^{n-2}.$$

III). En forma análoga al inciso *a*) parte *II*), aplicando la propiedad de la divergencia de un campo escalar por un campo vectorial, en este caso las funciones escalares y vectoriales están dadas por,

$$\begin{aligned} \Phi &= r^n, \\ \vec{A} &= \vec{r}, \end{aligned}$$

por lo tanto,

$$\nabla \cdot (r^n \vec{r}) = \nabla r^n \cdot \vec{r} + r^n \nabla \cdot \vec{r}$$

usando los resultado de los incisos anteriores obtenemos,

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (r^n \vec{r}) &= nr^{n-2} \vec{r} \cdot \vec{r} + 3r^n \\ &= nr^n + 3r^n \\ &= (n+3)r^n. \end{aligned}$$

b) Aplicando los resultados del inciso a) obtenemos,

$$\begin{aligned} I) \quad & \nabla \left(\frac{1}{r} \right) = \nabla (r^{-1}) = (-1)r^{-2} \vec{r} = -\frac{\vec{r}}{r^2}. \\ II) \quad & \nabla^2 (1r^{3/2}) = \nabla^2 \left(r^{-\frac{3}{2}} \right) = -\frac{3}{2} \left(-\frac{3}{2} + 1 \right) r^{(-\frac{3}{2}-2)} = \frac{3}{4} r^{-\frac{7}{2}} = \frac{3}{4\sqrt{r^7}}. \\ III) \quad & \nabla \cdot \left(\frac{\vec{r}}{r^3} \right) = \nabla \cdot (r^{-3} \vec{r}) = 0. \end{aligned}$$

Problema 23.

Dado el campo vectorial,

$$\vec{F} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^k},$$

donde $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$. Para qué valor de la constante k , la divergencia de \vec{F} es igual a cero?.

Solución:

Las componentes del campo vectorial \vec{F} están dadas por:

$$\begin{aligned} F_x &= \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{k}{2}}}, \\ F_y &= \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{k}{2}}}, \\ F_z &= \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{k}{2}}}, \end{aligned}$$

como la divergencia de una campo vectorial $\vec{F} = F_x\hat{i} + F_y\hat{j} + F_z\hat{k}$, está dada por

$$\nabla \cdot \vec{F} \equiv \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

sólamente necesitamos calcular una derivada parcial, de esta forma

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_x}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{k}{2}}} \right] \\ &= \frac{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{k}{2}} - x \left[\frac{k}{2} (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{k}{2}-1} (2x) \right]}{(x^2 + y^2 + z^2)^k} \\ &= \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{k}{2}}} - \frac{kx^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{k}{2}+1}}. \end{aligned}$$

Análogamente para las derivadas parciales con respecto a y y z , obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_y}{\partial y} &= \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{k}{2}}} - \frac{ky^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{k}{2}+1}}. \\ \frac{\partial F_z}{\partial z} &= \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{k}{2}}} - \frac{kz^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{k}{2}+1}}. \end{aligned}$$

sumando los resultados anteriores, la divergencia del campo vectorial \vec{F} , está dada por

$$\nabla \cdot \vec{F} = \frac{3}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{k}{2}}} - \frac{k(x^2 + y^2 + z^2)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{k}{2}+1}} = \frac{3-k}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{k}{2}}}.$$

de lo anterior, vemos que si $k = 3$, entonces la divergencia de \vec{F} es igual a cero.

Solución alternativa:

Como el campo vectorial es de la forma,

$$\vec{F} = f(r) \vec{r},$$

en este caso podemos aplicar la siguiente propiedad del operador nabla,

$$\nabla \cdot (f(r) \vec{A}) = \nabla f(r) \cdot \vec{A} + f(r) \nabla \cdot \vec{A},$$

donde,

$$\begin{aligned} f(r) &= |\vec{r}|^{-k}, \\ \vec{A} &= \vec{r}, \end{aligned}$$

de esta forma,

$$\nabla \cdot \left[\left(|\vec{r}|^{-k} \right) \vec{r} \right] = \nabla \left(|\vec{r}|^{-k} \right) \cdot \vec{r} + \left(|\vec{r}|^{-k} \right) \nabla \cdot \vec{r},$$

aplicando el resultado

$$\nabla f(r) = \frac{df(r)}{dr} \hat{e}_r,$$

que se cumple para campos escalares que solamente dependen de r , donde $r = |\vec{r}|$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \left[\left(|\vec{r}|^{-k} \right) \vec{r} \right] &= -|\vec{r}|^{-k-1} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \cdot \vec{r} + 3 \left(|\vec{r}|^{-k} \right) \\ &= -|\vec{r}|^{-k-2} |\vec{r}|^2 + 3 \left(|\vec{r}|^{-k} \right) \\ &= \frac{3-k}{|\vec{r}|^k}, \end{aligned}$$

donde se aplicó también la propiedad de la norma del producto escalar de vectores y el hecho de que

$$\nabla \cdot \vec{r} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3.$$

De la misma forma, si $k = 3$, entonces $\nabla \cdot \vec{F} = 0$.

Problema 24.

Dado el campo vectorial,

$$\vec{F} = \frac{-y\hat{i} + x\hat{j}}{(x^2 + y^2)^{\frac{k}{2}}}.$$

Hallar el valor de la constante k , de forma que \vec{F} sea irrotacional, es decir que $\nabla \times \vec{F} = \vec{0}$.

Solución.

Aplicando la siguiente propiedad del operador nabla,

$$\nabla \times (\Phi \vec{A}) = \nabla \Phi \times \vec{A} + \Phi \nabla \times \vec{A},$$

donde en este caso,

$$\begin{aligned}\Phi &= (x^2 + y^2)^{-\frac{k}{2}}, \\ \vec{A} &= -y\hat{i} + x\hat{j},\end{aligned}$$

obtenemos,

$$\nabla \times \left[\left((x^2 + y^2)^{\frac{k}{2}} \right) (-x\hat{i} + y\hat{j}) \right] = \nabla \left((x^2 + y^2)^{-\frac{k}{2}} \right) \times (-y\hat{i} + x\hat{j}) + \left((x^2 + y^2)^{-\frac{k}{2}} \right) \nabla \times (-y\hat{i} + x\hat{j}),$$

del problema anterior, obtenemos

$$\nabla \left((x^2 + y^2)^{-\frac{k}{2}} \right) = \frac{-k}{(x^2 + y^2)^{\frac{k}{2}+1}} (x\hat{i} + y\hat{j})$$

de esta forma,

$$\nabla \times \left[(x^2 + y^2)^{-\frac{k}{2}} (-x\hat{i} + y\hat{j}) \right] = \frac{-k}{(x^2 + y^2)^{\frac{k}{2}+1}} (x\hat{i} + y\hat{j}) \times (-y\hat{i} + x\hat{j}) + (x^2 + y^2)^{-\frac{k}{2}} \nabla \times (-y\hat{i} + x\hat{j})$$

calculando el producto vectorial y el rotacional,

$$\begin{aligned}(x\hat{i} + y\hat{j}) \times (-y\hat{i} + x\hat{j}) &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x & y & 0 \\ -y & x & 0 \end{vmatrix} = (x^2 + y^2) \hat{k} \\ \nabla \times (-y\hat{i} + x\hat{j}) &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ -y & x & 0 \end{vmatrix} = 2\hat{k}\end{aligned}$$

sustituyendo, obtenemos

$$\begin{aligned}
\nabla \times \left[\left((x^2 + y^2)^{\frac{k}{2}} \right) (-x\hat{i} + y\hat{j}) \right] &= \frac{-k}{(x^2 + y^2)^{\frac{k}{2}+1}} (x^2 + y^2) \hat{k} + \frac{2\hat{k}}{(x^2 + y^2)^{\frac{k}{2}}} \\
&= \frac{2-k}{(x^2 + y^2)^{\frac{k}{2}}} \hat{k}.
\end{aligned}$$

De lo anterior, si $k = 2$, entonces $\nabla \times \vec{F} = \vec{0}$.

Problema 25.

a) Calcular las constantes a, b y c , de forma que el campo vectorial

$$\vec{A} = (x + 2y + az)\hat{i} + (bx - 3y - z)\hat{j} + (4x + cy + 2z)\hat{k}$$

sea irrotacional.

b) Si el campo vectorial es irrotacional, encontrar el campo escalar del cual se deriva éste campo vectorial .

Solución:

a) Por definición, si \vec{A} es irrotacional debe cumplir que $\nabla \times \vec{A} = \vec{0}$, por lo tanto

$$\begin{aligned}\nabla \times \vec{A} &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x + 2y + az & bx - 3y - z & 4x + cy + 2z \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial y}(4x + cy + 2z) - \frac{\partial}{\partial z}(bx - 3y - z) \right) \hat{i} \\ &\quad - \left(\frac{\partial}{\partial x}(4x + cy + 2z) - \frac{\partial}{\partial z}(x + 2y + az) \right) \hat{j} \\ &\quad + \left(\frac{\partial}{\partial x}(bx - 3y - z) - \frac{\partial}{\partial y}(x + 2y + az) \right) \hat{k}\end{aligned}$$

aplicando la hipótesis de que el campo vectorial debe ser conservativo, entonces

$$\begin{aligned}c + 1 &= 0 \\ -a + 4 &= 0 \\ b - 2 &= 0\end{aligned}$$

de las ecuaciones anteriores obtenemos inmediatamente $a = 4$, $b = 2$ y $c = -1$.

Por lo tanto, el campo vectorial que es irrotacional está dado por:

$$\vec{A} = (x + 2y + 4z)\hat{i} + (2x - 3y - z)\hat{j} + (4x - y + 2z)\hat{k}$$

b) Debido a que si $\nabla \times \vec{A} = \vec{0}$ entonces, $\vec{A} = \nabla\phi(x, y, z)$, por lo tanto

$$(x + 2y + 4z)\hat{i} + (2x - 3y - z)\hat{j} + (4x - y + 2z)\hat{k} = \frac{\partial\phi}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\hat{k},$$

de donde,

$$\begin{aligned}\frac{\partial \phi}{\partial x} &= x + 2y + 4z, \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} &= 2x - 3y - z, \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} &= 4x - y + 2z,\end{aligned}$$

Integrando parcialmente con respecto a x , y y z respectivamente, obtenemos:

$$(1) \quad \phi(x, y, z) = \frac{x^2}{2} + 2xy + 4xz + f(y, z),$$

$$(2) \quad \phi(x, y, z) = 2xy - \frac{3}{2}y^2 - yz + g(x, z),$$

$$(3) \quad \phi(x, y, z) = 4xz - yz + z^2 + h(x, y),$$

derivando parcialmente con respecto a y , de las ecuaciones (1) y (2) obtenemos,

$$\begin{aligned}\frac{\partial \phi}{\partial y} &= 2x + \frac{\partial f(y, z)}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} &= 2x - 3y - z\end{aligned}$$

de las ecuaciones anteriores se obtiene,

$$\frac{\partial f(y, z)}{\partial y} = -3y - z$$

integrando nuevamente con respecto a y obtenemos,

$$f(y, z) = -\frac{3}{2}y^2 - yz + m(z)$$

substituyendo en la ecuación (1) obtenemos,

$$(4) \quad \phi(x, y, z) = \frac{x^2}{2} + 2xy + 4xz - \frac{3}{2}y^2 - yz + m(z).$$

Aplicando nuevamente el mismo procedimiento, es decir; de las ecuaciones (3) y (4) derivando parcialmente con respecto a z , obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{\partial \phi}{\partial z} &= 4x - y + \frac{\partial m(z)}{\partial z} \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} &= 4x - y + 2z\end{aligned}$$

de lo anterior, se tiene

$$\begin{aligned}4x - y + \frac{\partial m(z)}{\partial z} &= 4x - y + 2z \\ \frac{dm(z)}{dz} &= 2z\end{aligned}$$

finalmente obtenemos,

$$m(z) = z^2 + cte,$$

por lo tanto, la función escalar $\phi(x, y, z)$ tal que $\vec{A} = \nabla\phi(x, y, z)$ está dada por:

$$\phi(x, y, z) = \frac{x^2}{2} + 2xy + 4xz - \frac{3}{2}y^2 - yz + z^2 + cte$$

nótese que:

$$\nabla\phi(x, y, z) = (x + 2y + 4z)\hat{i} + (2x - 3y - z)\hat{j} + (4x - y + 2z)\hat{k} = \vec{A}.$$

Problema 26.

a) Demostrar

$$\vec{A} = (6xy + z^3)\hat{i} + (3x^2 - z)\hat{j} + (3xz^2 - y)\hat{k}$$

que es irrotacional.

b) Hallar ϕ tal que $\vec{A} = \nabla\phi$.

Solución:

a) Verifiquemos primeramente si el campo vectorial dado es irrotacional

$$\begin{aligned}\nabla \times \vec{A} &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 6xy + z^3 & 3x^2 - z & 3xz^2 - y \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial y}(3xz^2 - y) - \frac{\partial}{\partial z}(3x^2 - z) \right) \hat{i} \\ &\quad - \left(\frac{\partial}{\partial x}(3xz^2 - y) - \frac{\partial}{\partial z}(6xy + z^3) \right) \hat{j} \\ &\quad + \left(\frac{\partial}{\partial x}(3x^2 - z) - \frac{\partial}{\partial y}(6xy + z^3) \right) \hat{k} \\ &= (-1 + 1)\hat{i} - (3z^2 - 3z^2)\hat{j} + (6x - 6x)\hat{k}.\end{aligned}$$

Por lo tanto como $\nabla \times \vec{A} = \vec{0}$ entonces \vec{A} es irrotacional.

b) del resultado anterior, se tiene que $\vec{A} = \nabla\phi$ por lo tanto

$$\begin{aligned}\frac{\partial\phi}{\partial x} &= 6xy + z^3, \\ \frac{\partial\phi}{\partial y} &= 3x^2 - z, \\ \frac{\partial\phi}{\partial z} &= 3xz^2 - y.\end{aligned}$$

Integrando parcialmente con respecto a x , y y z respectivamente, obtenemos:

$$(1) \quad \phi(x, y, z) = 3x^2y + xz^3 + f(y, z),$$

$$(2) \quad \phi(x, y, z) = 3x^2y - yz + g(x, z),$$

$$(3) \quad \phi(x, y, z) = xz^3 - yz + h(x, y),$$

derivando parcialmente con respecto a z las ecuaciones (1) y (3) obtenemos,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial z} &= 3xz^2 + \frac{\partial f(y, z)}{\partial z}, \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} &= 3xz^2 - y, \end{aligned}$$

de las ecuaciones anteriores se obtiene,

$$\frac{\partial f(y, z)}{\partial y} = -y,$$

integrando nuevamente con respecto a y obtenemos,

$$f(y, z) = -yz + m(y),$$

substituyendo en la ecuación (1) obtenemos,

$$(4) \quad \phi(x, y, z) = 3x^2y + xz^3 - yz + m(y).$$

Aplicando nuevamente el mismo procedimiento, es decir; de las ecuaciones (2) y (4) derivando parcialmente con respecto a y , obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial y} &= 3x^2 - z + \frac{\partial m(y)}{\partial y}, \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} &= 3x^2 - z, \end{aligned}$$

de lo anterior, se tiene

$$\begin{aligned} 3x^2 - z + \frac{\partial m(y)}{\partial y} &= 3x^2 - z, \\ \frac{dm(y)}{dy} &= 0, \end{aligned}$$

finalmente obtenemos

$$m(z) = cte,$$

por lo tanto, la función escalar $\phi(x, y, z)$ tal que $\vec{A} = \nabla\phi(x, y, z)$ está dada por:

$$\phi(x, y, z) = 3x^2y + xz^3 - yz + cte.$$

Problema 27.

Verificar si el campo vectorial

$$\vec{f} = 3x^2y\hat{i} + (x^3 + 1)\hat{j} + 9z^2\hat{k}$$

se puede obtener a partir del gradiente de una función escalar. Si es así, obtenga el campo escalar.

Solución:

Verifiquemos si el rotacional del campo vectorial dado es igual al vector $\vec{0}$.

$$\nabla \times \vec{f} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 3x^2y & x^3 + 1 & 9z^2 \end{vmatrix},$$

de lo anterior se deduce inmediatamente que,

$$\nabla \times \vec{f} = \vec{0}.$$

Por lo tanto el campo vectorial es un campo conservativo, así que se puede deducir a partir del gradiente de una función escalar, es decir;

$$\vec{f} = \nabla\phi.$$

De la expresión para el campo vectorial \vec{f} y de la definición para el gradiente, obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial\phi}{\partial x} &= 3x^2y, \\ \frac{\partial\phi}{\partial y} &= x^3 + 1, \\ \frac{\partial\phi}{\partial z} &= 9z^2. \end{aligned}$$

Integrando parcialmente con respecto a x , y y z respectivamente, obtenemos:

$$(1) \quad \phi(x, y, z) = x^3y + f(y, z),$$

$$(2) \quad \phi(x, y, z) = x^3y + y + g(x, z),$$

$$(3) \quad \phi(x, y, z) = 3z^3 + h(x, y),$$

derivando parcialmente con respecto a x las ecuaciones (1) y (3) e igualando las ecuaciones resultantes, obtenemos

$$\frac{\partial h(x, y)}{\partial x} = 3x^2y$$

integrando nuevamente con respecto a x obtenemos,

$$h(x, y) = x^3y + m(y)$$

substituyendo en la ecuación (3) obtenemos,

$$(4) \quad \phi(x, y, z) = 3z^3 + x^3y + m(y).$$

Aplicando nuevamente el mismo procedimiento, es decir; de las ecuaciones (2) y (4) derivando parcialmente con respecto a y e igualando las ecuaciones resultantes, obtenemos

$$\frac{dm(y)}{dy} = 1$$

finalmente obtenemos,

$$m(y) = y + cte$$

por lo tanto, la función escalar ϕ tal que $\vec{f} = \nabla\phi$ está dada por:

$$\phi(x, y, z) = 3z^3 + x^3y + y + cte.$$

Problema 28.

a) Demostrar que el campo vectorial definido por,

$$\vec{E} = \frac{\vec{r}}{r^2}$$

es irrotacional.

b) Encontrar ϕ de forma que $\vec{E} = -\nabla\phi$, con la condición de que $\phi(a) = 0$, siendo $a = cte > 0$.

Solución:

a) Para demostrar que el rotacional del campo vectorial dado es igual al vector $\vec{0}$, aplicaremos la siguiente propiedad del operador nabla

$$\nabla \times (\phi \vec{A}) = \nabla\phi \times \vec{A} + \phi \nabla \times \vec{A}$$

en este caso, identificamos a $\phi = \phi(r) = \frac{1}{r^2}$ y $\vec{A} = \vec{r}$, aplicando la ecuación anterior obtenemos:

$$\nabla \times \left(\frac{\vec{r}}{r^2} \right) = \nabla \left(\frac{1}{r^2} \right) \times \vec{r} + \left(\frac{1}{r^2} \right) \nabla \times \vec{r},$$

aplicando la siguiente ecuación

$$\nabla\phi(r) = \phi'(r)\hat{e}_r,$$

que es válida para campos escalares donde $r = |\vec{r}|$, obtenemos

$$\nabla \left(\frac{1}{r^2} \right) = -\frac{\vec{r}}{r^3},$$

además como $\nabla \times \vec{r} = \vec{0}$. Al sustituir las expresiones anteriores, obtenemos finalmente

$$\nabla \times \vec{E} = \nabla \times \left(\frac{\vec{r}}{r^2} \right) = \vec{0}$$

b) Como ya se demostró que

$$\nabla \times \vec{E} = \vec{0}$$

entonces

$$\vec{E} = -\nabla\phi$$

aplicando nuevamente la ecuación $\nabla\phi(r) = \phi'(r)\hat{e}_r$, identificando en este caso correctamente la expresión para la función escalar, obtenemos

$$\frac{d\phi(r)}{dr} = -\frac{1}{r}$$

integrando, obtenemos

$$\phi(r) = -\ln\left(\frac{1}{r}\right) + cte$$

aplicando la condición de que $\phi(a) = 0$ siendo $a > 0$, obtenemos el valor de la constante de integración dada por

$$cte = \ln a$$

finalmente, obtenemos

$$\phi(r) = \ln\left(\frac{a}{r}\right).$$

Problema 29.

Considere la siguiente transformación

$$\begin{aligned}x &= w, \\y &= e^v \cos u, \\z &= e^v \sin u,\end{aligned}$$

- a) Calcule los factores de escala.
- b) Verifique si el sistema de coordenadas (u, v, w) es ortogonal.
- c) Hallar el elemento dS^2 .

Solución:

a) En términos de la transformación dada, el vector de posición está dado por:

$$\vec{r} = w\hat{i} + e^v \cos u\hat{j} + e^v \sin u\hat{k}.$$

Por definición, los factores de escala, están dados por:

$$\begin{aligned}h_u &\equiv \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \right| = \sqrt{e^{2v} [\sin^2 u + \cos^2 u]} = e^v, \\h_v &\equiv \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right| = \sqrt{e^{2v} [\cos^2 u + \sin^2 u]} = e^v, \\h_w &\equiv \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial w} \right| = 1.\end{aligned}$$

- b) Para verificar si el sistema es ortogonal debemos mostrar que

$$\hat{e}_u \cdot \hat{e}_v = \hat{e}_u \cdot \hat{e}_w = \hat{e}_v \cdot \hat{e}_w = 0,$$

así como,

$$\hat{e}_u \cdot \hat{e}_u = \hat{e}_v \cdot \hat{e}_v = \hat{e}_w \cdot \hat{e}_w = 1.$$

Calculemos primero los vectores \hat{e}_u , \hat{e}_v y \hat{e}_w , que son los vectores unitarios tangentes a las líneas coordenadas u , v y w respectivamente. Por definición tenemos,

$$\begin{aligned}\hat{e}_u &\equiv \frac{\partial \vec{r} / \partial u}{|\partial \vec{r} / \partial u|} = \frac{e^v \sin u \hat{j} + e^v \cos u \hat{k}}{\sqrt{e^{2v} [\sin^2 u + \cos^2 u]}} = -\sin u \hat{j} + \cos u \hat{k}, \\ \hat{e}_v &\equiv \frac{\partial \vec{r} / \partial v}{|\partial \vec{r} / \partial v|} = \frac{e^v \cos u \hat{j} + e^v \sin u \hat{k}}{\sqrt{e^{2v} [\cos^2 u + \sin^2 u]}} = \cos u \hat{j} + \sin u \hat{k}, \\ \hat{e}_w &\equiv \frac{\partial \vec{r} / \partial w}{|\partial \vec{r} / \partial w|} = \frac{\hat{i}}{|\hat{i}|} = \hat{i},\end{aligned}$$

de las ecuaciones anteriores, obtenemos

$$\begin{aligned}
\hat{e}_u \cdot \hat{e}_w &= (-\sin u \hat{j} + \cos u \hat{k}) \cdot (\cos u \hat{j} + \sin u \hat{k}) \\
&= -\sin u \cos u \hat{j} \cdot \hat{j} - \sin^2 u \hat{j} \cdot \hat{k} + \cos^2 u \hat{k} \cdot \hat{j} + \sin u \cos u \hat{k} \cdot \hat{k} \\
&= 0
\end{aligned}$$

también, en forma inmediata se observa que se cumple

$$\hat{e}_v \cdot \hat{e}_w = \hat{e}_u \cdot \hat{e}_v = 0,$$

así como

$$\hat{e}_u \cdot \hat{e}_u = \hat{e}_v \cdot \hat{e}_v = \hat{e}_w \cdot \hat{e}_w = 1$$

c) Por definición, el elemento dS^2 está dado por,

$$dS^2 = d\vec{r} \cdot d\vec{r},$$

donde

$$d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} du + \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} dv + \frac{\partial \vec{r}}{\partial w} dw,$$

los vectores, $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}$, $\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}$ y $\frac{\partial \vec{r}}{\partial w}$ son vectores tangentes a las líneas coordenada u , v y w respectivamente y están dados por

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} &= e^v \sin u \hat{j} + e^v \cos u \hat{k} \\
\frac{\partial \vec{r}}{\partial v} &= e^v \cos u \hat{j} + e^v \sin u \hat{k} \\
\frac{\partial \vec{r}}{\partial w} &= \hat{i}
\end{aligned}$$

De esta forma, el elemento dS^2 está dado por,

$$\begin{aligned}
dS^2 &= dw^2 + e^{2v} (\sin^2 u du^2 - 2 \sin u du \cos u dv + \sin^2 u dv^2) \\
&\quad + e^{2v} (\cos^2 u du^2 + 2 \cos u dv \sin u dv + \sin^2 u dv^2) \\
&= dw^2 + e^{2v} \sin^2 u du^2 + e^{2v} \cos^2 u dv^2 + e^{2v} \cos^2 u du^2 + e^{2v} \sin^2 u dv^2 \\
&= du^2 [e^{2v} (\sin^2 u + \cos^2 u)] + dv^2 [e^{2v} (\cos^2 u + \sin^2 u)] + dw^2 \\
dS^2 &= e^{2v} du^2 + e^{2v} dv^2 + dw^2.
\end{aligned}$$

Con lo cual se comprueba que es ortogonal, ya que no hay términos cruzados.

Problema 30.

Encuentre la relación de los vectores unitarios en coordenadas esféricas y rectangulares, es decir, encuentre:

$$\begin{aligned}\hat{i} &= \hat{i}(\hat{e}_r, \hat{e}_\theta, \hat{e}_\phi), \\ \hat{j} &= \hat{j}(\hat{e}_r, \hat{e}_\theta, \hat{e}_\phi), \\ \hat{k} &= \hat{k}(\hat{e}_r, \hat{e}_\theta, \hat{e}_\phi),\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\hat{e}_r &= \hat{e}_r(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}), \\ \hat{e}_\theta &= \hat{e}_\theta(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}), \\ \hat{e}_\phi &= \hat{e}_\phi(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}),\end{aligned}$$

Solución:

La transformación entre coordenadas rectangulares y esféricas está dada por:

$$\begin{aligned}x &= r \sin \theta \cos \phi, \\ y &= r \sin \theta \sin \phi, \\ z &= r \cos \theta\end{aligned}$$

donde, $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \phi \leq 2\pi$ y $0 \leq r$. El vector de posición de un punto en el espacio en coordenadas esféricas está dado por:

$$\vec{r} = r \sin \theta \cos \phi \hat{i} + r \sin \theta \sin \phi \hat{j} + r \cos \theta \hat{k}$$

de esta forma, los vectores unitarios tangentes a las líneas coordenadas r , θ y ϕ están dados por,

$$\begin{aligned}\hat{e}_r &= \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial r}}{\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} \right|} = \frac{\sin \theta \cos \phi \hat{i} + \sin \theta \sin \phi \hat{j} + \cos \theta \hat{k}}{\sqrt{\sin^2 \theta (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) + \cos^2 \theta}}, \\ \hat{e}_\theta &= \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta}}{\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \right|} = \frac{r \cos \theta \cos \phi \hat{i} + r \cos \theta \sin \phi \hat{j} - r \sin \theta \hat{k}}{\sqrt{r^2 \cos^2 \theta (\sin^2 \phi + \sin^2 \phi) - r^2 \sin^2 \theta}}, \\ \hat{e}_\phi &= \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi}}{\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} \right|} = \frac{-r \sin \theta \sin \phi \hat{i} + r \sin \theta \cos \phi \hat{j}}{\sqrt{r^2 \sin^2 \theta (\sin^2 \phi \cos^2 \phi)}},\end{aligned}$$

que se pueden escribir finalmente de la forma,

$$\begin{aligned} (a) \quad \hat{e}_r &= \sin \theta \cos \phi \hat{i} + \sin \theta \sin \phi \hat{j} + \cos \theta \hat{k}, \\ (b) \quad \hat{e}_\theta &= \cos \theta \cos \phi \hat{i} + \cos \theta \sin \phi \hat{j} - \sin \theta \hat{k}, \\ (c) \quad \hat{e}_\phi &= -\sin \phi \hat{i} + \cos \phi \hat{j}. \end{aligned}$$

Ahora para encontrar la dependencia de los vectores \hat{i} , \hat{j} y \hat{k} , en términos de los vectores \hat{e}_r , \hat{e}_θ y \hat{e}_ϕ , aplicamos la siguiente relación vectorial

$$\vec{A} = (\vec{A} \cdot \hat{u}_1) \hat{u}_1 + (\vec{A} \cdot \hat{u}_2) \hat{u}_2 + (\vec{A} \cdot \hat{u}_3) \hat{u}_3,$$

para cualquier vector \vec{A} , que es válida para los vectores \hat{u}_1 , \hat{u}_2 y \hat{u}_3 , que

forman una base ortonormal, es decir que cumplen que $\hat{u}_i \cdot \hat{u}_j = \delta_{ij}$, donde δ_{ij} es la función delta de Kronecker y está dada por,

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

De esta forma, como los vectores unitarios \hat{i} , \hat{j} y \hat{k} y \hat{e}_r , \hat{e}_θ y \hat{e}_ϕ forman una base ortonormal, aplicando la expresión anterior escribimos a los vectores \hat{i} , \hat{j} y \hat{k} en términos de los vectores \hat{e}_r , \hat{e}_θ y \hat{e}_ϕ de la forma,

$$\begin{aligned} (1) \quad \hat{i} &= (\hat{i} \cdot \hat{e}_r) \hat{e}_r + (\hat{i} \cdot \hat{e}_\theta) \hat{e}_\theta + (\hat{i} \cdot \hat{e}_\phi) \hat{e}_\phi, \\ (2) \quad \hat{j} &= (\hat{j} \cdot \hat{e}_r) \hat{e}_r + (\hat{j} \cdot \hat{e}_\theta) \hat{e}_\theta + (\hat{j} \cdot \hat{e}_\phi) \hat{e}_\phi, \\ (3) \quad \hat{k} &= (\hat{k} \cdot \hat{e}_r) \hat{e}_r + (\hat{k} \cdot \hat{e}_\theta) \hat{e}_\theta + (\hat{k} \cdot \hat{e}_\phi) \hat{e}_\phi, \end{aligned}$$

por otro lado de las ecuaciones (a), (b) y (c), aplicando la de definición del producto escalar, obtenemos

$$\begin{aligned} \hat{i} \cdot \hat{e}_r &= \sin \theta \cos \phi, & \hat{i} \cdot \hat{e}_\theta &= \cos \theta \cos \phi, & \hat{i} \cdot \hat{e}_\phi &= -\sin \phi, \\ \hat{j} \cdot \hat{e}_r &= \sin \theta \sin \phi, & \hat{j} \cdot \hat{e}_\theta &= \cos \theta \sin \phi, & \hat{j} \cdot \hat{e}_\phi &= \cos \phi, \\ \hat{k} \cdot \hat{e}_r &= \cos \theta, & \hat{k} \cdot \hat{e}_\theta &= -\sin \theta, & \hat{k} \cdot \hat{e}_\phi &= 0, \end{aligned}$$

sustituyendo los resultados anteriores en las ecuaciones (1), (2) y (3), final-

mente se obtiene

$$\begin{aligned}\hat{i} &= \sin \theta \cos \phi \hat{e}_r + \cos \theta \cos \phi \hat{e}_\theta - \sin \phi \hat{e}_\phi \\ \hat{j} &= \sin \theta \sin \phi \hat{e}_r + \cos \theta \sin \phi \hat{e}_\theta + \cos \phi \hat{e}_\phi \\ \hat{k} &= \cos \theta \hat{e}_r - \sin \theta \hat{e}_\theta.\end{aligned}$$

Problema 31.

Transformar la siguiente función vectorial

$$\vec{f} = \frac{1}{r \sin \theta} \hat{e}_\varphi,$$

que está en coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) , a coordenadas rectangulares.

Solución:

Por definición, las coordenadas esféricas están dadas por la transformación:

$$\begin{aligned}x &= r \sin \theta \cos \varphi, \\ y &= r \sin \theta \sin \varphi, \\ z &= r \cos \theta,\end{aligned}$$

por lo tanto, el vector de posición de un punto en el espacio en coordenadas esféricas, está dado por:

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} = r \sin \theta \cos \varphi \hat{i} + r \sin \theta \sin \varphi \hat{j} + r \cos \theta \hat{k},$$

de esta expresión, debemos calcular primero el vector unitario tangente a la línea coordenada φ de la forma,

$$\begin{aligned}\hat{e}_\varphi &\equiv \frac{\partial \vec{r} / \partial \varphi}{|\partial \vec{r} / \partial \varphi|} = \frac{-r \sin \theta \sin \varphi \hat{i} + r \sin \theta \cos \varphi \hat{j}}{\sqrt{(r \sin \theta \sin \varphi)^2 + (r \sin \theta \cos \varphi)^2}} \\ &= \frac{-r \sin \theta \sin \varphi \hat{i} + r \sin \theta \cos \varphi \hat{j}}{\sqrt{r^2 \sin^2 \theta (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi)}},\end{aligned}$$

por lo tanto,

$$\hat{e}_\varphi = -\sin \varphi \hat{i} + \cos \varphi \hat{j},$$

sustituyendo en la expresión para \vec{f} , obtenemos

$$\vec{f} = \frac{1}{r \sin \theta} \hat{e}_\varphi = \frac{1}{r \sin \theta} (-\sin \varphi \hat{i} + \cos \varphi \hat{j}),$$

y de las ecuaciones de transformación, obtenemos:

$$\begin{aligned}\sin \varphi &= \frac{y}{r \sin \theta}, \\ \cos \varphi &= \frac{x}{r \sin \theta},\end{aligned}$$

sustituyendo, obtenemos

$$\vec{f} = -\frac{y}{r^2 \sin^2 \theta} \hat{i} + \frac{x}{r^2 \sin^2 \theta} \hat{j},$$

por otro lado, de las ecuaciones de transformación también tenemos que,

$$x^2 + y^2 = r^2 \sin^2 \theta,$$

finalmente, sustituyendo la ecuación anterior obtenemos

$$\vec{f} = -\frac{y}{x^2 + y^2} \hat{i} + \frac{x}{x^2 + y^2} \hat{j}.$$

Problema 32.

Transformar la función vectorial

$$\vec{F} = \rho \hat{e}_\rho + \rho \hat{e}_\phi,$$

que está en coordenadas cilíndricas, a coordenadas rectangulares.

Solución:

El vector de posición de un punto P en el espacio esta dado por

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

sustituyendo las ecuaciones de transformación de coordenadas cilíndricas y rectangulares, dadas por las ecuaciones

$$\begin{aligned}x &= \rho \cos \phi, \\y &= \rho \sin \phi, \\z &= z,\end{aligned}$$

obtenemos

$$\vec{r} = \rho \cos \phi \hat{i} + \rho \sin \phi \hat{j} + z\hat{k},$$

por lo tanto, los vectores unitarios tangentes a las líneas coordenadas ρ y ϕ están dados por:

$$\begin{aligned}\hat{e}_\rho &\equiv \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho}}{\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} \right|} = \frac{\cos \phi \hat{i} + \sin \phi \hat{j}}{\sqrt{\cos^2 \phi + \sin^2 \phi}} = \cos \phi \hat{i} + \sin \phi \hat{j}, \\ \hat{e}_\phi &\equiv \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi}}{\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} \right|} = \frac{-\rho \sin \phi \hat{i} + \rho \cos \phi \hat{j}}{\sqrt{\rho^2 \cos^2 \phi + \rho^2 \sin^2 \phi}} = -\sin \phi \hat{i} + \cos \phi \hat{j},\end{aligned}$$

De la transformación inversa, tenemos

$$\rho = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}},$$

sustituyendo las expresiones para los vectores unitarios \hat{e}_ρ y \hat{e}_ϕ , y la ecuación anterior, en la función vectorial, obtenemos

$$\begin{aligned}\vec{F} &= \left((x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} \right) \left(\cos \phi \hat{i} + \sin \phi \hat{j} \right) + \left((x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} \right) \left(-\sin \phi \hat{i} + \cos \phi \hat{j} \right) \\ &= \left((x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} \right) \left(\cos \phi \hat{i} + \sin \phi \hat{j} - \sin \phi \hat{i} + \cos \phi \hat{j} \right) \\ &= \left((x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} \right) (\cos \phi - \sin \phi) \hat{i} + (\sin \phi + \cos \phi) \hat{j}\end{aligned}$$

y de las ecuaciones de transformación, obtenemos

$$\vec{F} = \left((x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} \right) \left(\frac{x}{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{y}{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}} \right) \hat{i} + \left(\frac{x}{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{y}{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}} \right) \hat{j}$$

finalmente se obtiene,

$$\vec{F} = (x - y)\hat{i} + (x + y)\hat{j}$$

Problema 33.

Para las coordenadas cilíndricas parabólicas (ξ, η, ϕ) , las ecuaciones de transformación a coordenadas rectangulares están dadas por,

$$\begin{aligned}x &= \xi\eta \cos \phi, \\y &= \xi\eta \sin \phi, \\z &= \frac{1}{2} (\eta^2 - \xi^2) .\end{aligned}$$

a) Hallar los factores de escala.

b) Mostrar que $\hat{e}_\eta \times \hat{e}_\xi = \hat{e}_\phi$.

Solución:

a) Por definición sabemos que el vector de posición de un punto en el espacio está dado por,

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k},$$

sustituyendo las ecuaciones de transformación, tenemos

$$\vec{r}(\xi, \eta, \phi) = \xi\eta \cos \phi \hat{i} + \xi\eta \sin \phi \hat{j} + \frac{1}{2} (\eta^2 - \xi^2) \hat{k},$$

de donde, los factores de escala están dados por,

$$\begin{aligned}h_\xi &\equiv \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi} \right| = \sqrt{\eta^2 \cos^2 \phi + \eta^2 \sin^2 \phi + \xi^2} = \sqrt{\eta^2 + \xi^2}, \\h_\eta &\equiv \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \eta} \right| = \sqrt{\xi^2 \cos^2 \phi + \xi^2 \sin^2 \phi + \eta^2} = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}, \\h_\phi &\equiv \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} \right| = \sqrt{\sin^2 \phi + \cos^2 \phi} = 1.\end{aligned}$$

b) Por definición, los vectores unitarios tangentes a las líneas coordenadas ξ , η y ϕ para este caso están dados por,

$$\begin{aligned}
\widehat{e}_\xi &\equiv \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi}}{\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi} \right|} = \frac{\eta \cos \phi \widehat{i} + \eta \sin \phi \widehat{j} - \xi \widehat{k}}{\sqrt{\eta^2 + \xi^2}}, \\
\widehat{e}_\eta &\equiv \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial \eta}}{\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \eta} \right|} = \frac{\xi \cos \phi \widehat{i} + \xi \sin \phi \widehat{j} - \eta \widehat{k}}{\sqrt{\eta^2 + \xi^2}}, \\
\widehat{e}_\phi &\equiv \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi}}{\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} \right|} = \frac{-\sin \phi \widehat{i} + \cos \phi \widehat{j}}{1},
\end{aligned}$$

tambi3n se pueden representar de la siguiente forma,

$$\begin{aligned}
\widehat{e}_\xi &= \frac{1}{h_\xi} \left(\eta \cos \phi \widehat{i} + \eta \sin \phi \widehat{j} - \xi \widehat{k} \right), \\
\widehat{e}_\eta &= \frac{1}{h_\eta} \left(\xi \cos \phi \widehat{i} + \xi \sin \phi \widehat{j} - \eta \widehat{k} \right), \\
\widehat{e}_\phi &= -\sin \phi \widehat{i} + \cos \phi \widehat{j}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, calculando el producto vectorial de los vectores unitarios \widehat{e}_ξ y \widehat{e}_η , obtenemos

$$\begin{aligned}
\widehat{e}_\xi \times \widehat{e}_\eta &= \frac{1}{h_\xi} \frac{1}{h_\eta} \begin{vmatrix} \widehat{i} & \widehat{j} & \widehat{k} \\ \eta \cos \phi & \eta \sin \phi & -\xi \\ \xi \cos \phi & \xi \sin \phi & -\eta \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{(\eta^2 + \xi^2)} \left[(\eta^2 \sin \phi + \xi^2 \sin \phi) \widehat{i} - (\eta^2 \cos \phi + \xi^2 \cos \phi) \widehat{j} \right] \\
&= \frac{1}{(\eta^2 + \xi^2)} \left[(\eta^2 + \xi^2) \sin \phi \widehat{i} - (\eta^2 + \xi^2) \cos \phi \widehat{j} \right] \\
&= \sin \phi \widehat{i} - \cos \phi \widehat{j} = \widehat{e}_\phi.
\end{aligned}$$

4 Problemas del capítulo 3.

Problema 1.

Si $\phi(x, y) = xy$ Calcular $\int \phi d\vec{r}$ desde el punto $(0, 0, 0)$ hasta el punto $(1, 1, 0)$ a lo largo de:

- a) La curva $y = x^2, z = 0$.
- b) La línea recta que une los puntos $(0, 0, 0)$ y $(1, 1, 0)$.

Solución:

a) La ecuación de la parábola $y = x^2, z = 0$, se puede representar en forma paramétrica de la forma,

$$\vec{r}(t) = t\hat{i} + t^2\hat{j}$$

donde $0 \leq t \leq 1$. Por lo tanto el elemento de desplazamiento diferencial $d\vec{r}$ está dado por:

$$d\vec{r}(t) = dt\hat{i} + 2t dt\hat{j}$$

así la integral de línea resulta,

$$\begin{aligned}\int_C \phi d\vec{r} &= \int_{(0,0,0)}^{(1,1,0)} \phi(x, y) d\vec{r} = \int_{t=0}^1 t (t^2) (dt\hat{i} + 2t dt\hat{j}) \\ &= \hat{i} \int_{t=0}^1 t^3 dt + \hat{j} \int_{t=0}^1 2t^4 dt\end{aligned}$$

al resolver la integral, obtenemos

$$\int_C \phi d\vec{r} = \frac{1}{4}\hat{i} + \frac{2}{5}\hat{j}$$

b) Recordemos que la ecuación paramétrica de una recta que pasa por dos puntos está dada por:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_1 + t(\vec{r}_2 - \vec{r}_1),$$

donde \vec{r}_1 y \vec{r}_2 son los vectores de posición de los puntos (x_1, y_1, z_1) y (x_2, y_2, z_2)

respectivamente por donde pasa la recta. En este caso los puntos son: $(0, 0, 0)$ y $(1, 1, 0)$, por lo tanto la ecuación de la recta en forma paramétrica que va del punto $(0, 0, 0)$ y $(1, 1, 0)$ está dada por,

$$\vec{r}(t) = t(1, 1, 0),$$

es decir,

$$\vec{r}(t) = t\hat{i} + t\hat{j},$$

así, en este caso el vector de desplazamiento diferencial está dado por:

$$d\vec{r}(t) = dt\hat{i} + dt\hat{j}$$

la integral de línea resulta,

$$\begin{aligned} \int_C \phi d\vec{r} &= \int_{(0,0,0)}^{(1,1,0)} \phi(x, y) d\vec{r} = \int_{t=0}^1 (t^2) (dt\hat{i} + dt\hat{j}) \\ &= \hat{i} \int_{t=0}^1 t^2 dt + \hat{j} \int_{t=0}^1 t^2 dt \end{aligned}$$

finalmente al resolver la integral, obtenemos

$$\int_C \phi d\vec{r} = \frac{1}{3}\hat{i} + \frac{1}{3}\hat{j}$$

Soluciones alternativas:

a) La curva está descrita por las ecuaciones,

$$\begin{aligned} y &= x^2 \\ z &= 0. \end{aligned}$$

Si escogemos a la variable x como parámetro, entonces las ecuaciones paramétricas de la curva dada son :

$$\begin{aligned}x &= x \\ y &= x^2,\end{aligned}$$

por lo que la ecuación de la curva en forma paramétrica está dada por:

$$\vec{r}(x) = x\hat{i} + x^2\hat{j}; \quad 0 \leq x \leq 1$$

de donde obtenemos,

$$d\vec{r} = dx\hat{i} + 2xdx\hat{j}$$

por lo que la integral se puede calcular de la siguiente forma:

$$\int_{(0,0,0)}^{(1,1,0)} \phi d\vec{r} = \int_0^1 x^3(dx\hat{i} + 2xdx\hat{j}) = \dots = \frac{1}{4}\hat{i} + \frac{2}{5}\hat{j}.$$

Análogamente, si escogemos a y como parámetro, las ecuaciones paramétricas serán:

$$\begin{aligned}x &= \sqrt{y} \\ y &= y,\end{aligned}$$

por lo que la ecuación de la curva en forma paramétrica está dada por:

$$\vec{r}(y) = \sqrt{y}\hat{i} + y\hat{j}; \quad 0 \leq y \leq 1$$

de donde obtenemos,

$$d\vec{r} = \frac{1}{2\sqrt{y}}dy\hat{i} + dy\hat{j},$$

por lo que la integral se puede calcular de la siguiente forma:

$$\int_{(0,0,0)}^{(1,1,0)} \phi d\vec{r} = \int_0^1 y^{\frac{5}{2}} \left(\frac{1}{2\sqrt{y}} dy \hat{i} + dy \hat{j} \right)$$

al hacer un poco de álgebra, obtenemos

$$\begin{aligned} \int_{(0,0,0)}^{(1,1,0)} \phi d\vec{r} &= \hat{i} \int_0^1 \frac{y}{2} dy + \hat{j} \int_0^1 y^{\frac{5}{2}} dy \\ &= \hat{i} \left[\frac{y^2}{4} \right]_0^1 + \hat{j} \left[\frac{2}{5} y^{\frac{5}{2}} \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{4} \hat{i} + \frac{2}{5} \hat{j} \end{aligned}$$

b) Análogamente al inciso a) de la solución alternativa si escogemos a la variable x como parámetro la ecuación paramétrica de la curva está dada por:

$$\vec{r}(x) = x\hat{i} + x\hat{j}; \quad 0 \leq x \leq 1$$

de donde obtenemos,

$$d\vec{r} = dx\hat{i} = dx\hat{j},$$

finalmente, al resolver la integral de línea se obtiene,

$$\int_{(0,0,0)}^{(1,1,0)} \phi d\vec{r} = \int x^2 (dx\hat{i} + dx\hat{j}) = \dots = \frac{1}{3} \hat{i} + \frac{1}{3} \hat{j}.$$

Problema 2.

Calcular $\int_C \phi d\vec{r}$ para $\phi = x^3y + zy$ desde el punto $(1, 1, 0)$ al punto $(2, 4, 0)$,

a) a lo largo de la parábola $y = x^2$ $z = 0$,

b) la recta que une $(1, 1, -0)$ y $(2, 4, 0)$.

Solución:

a) Si tomamos como parámetro a x , donde $1 \leq x \leq 2$, la ecuación de la parábola en forma paramétrica está dada por:

$$\vec{r}(x) = x\hat{i} + x^2\hat{j},$$

por lo tanto, el elemento diferencial de línea está dado por,

$$d\vec{r} = dx\hat{i} + 2xdx\hat{j},$$

luego entonces,

$$\int_C \phi d\vec{r} = \int_{(1,1,0)}^{(2,4,0)} (x^3y + zy) d\vec{r},$$

sustituyendo la parametrización de la trayectoria, obtenemos

$$\begin{aligned} \int_C \phi d\vec{r} &= \int_1^2 (x^3x^2 + 2x^2) (dx\hat{i} + 2xdx\hat{j}) \\ &= \int_1^2 (x^5 + 2x^2) (dx\hat{i} + 2xdx\hat{j}) = \int_1^2 [(x^5 + 2x^2) dx\hat{i} + (x^5 + 2x^2) (2x) dx\hat{j}] \\ &= \int_1^2 (x^5 + 2x^2) dx\hat{i} + \int_1^2 (2x^6 + 4x^3) dx\hat{j} \\ &= \left[\frac{x^6}{6} + \frac{2}{3}x^3 \right]_1^2 \hat{i} + \left[\frac{2}{7}x^7 + x^4 \right]_1^2 \hat{j} \\ &= \left[\left(\frac{2^6}{6} + \frac{2(2)^3}{3} \right) - \left(\frac{1}{6} + \frac{2}{3} \right) \right] \hat{i} + \left[\left(\frac{2}{7}(2)^7 + (2)^4 \right) - \left(\frac{2}{7}(1)^7 + (1)^4 \right) \right] \hat{j} \\ &= \left(\frac{64 + 32 - 1 - 4}{6} \right) \hat{i} + \left(\frac{256 + 112 - 2 - 7}{7} \right) \hat{j}, \end{aligned}$$

finalmente, se obtiene

$$\int_C \phi d\vec{r} = \left(\frac{91}{6}, \frac{359}{7}, 0 \right)$$

b) Se sabe que la ecuación paramétrica de una recta que pasa por dos puntos está dada por:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_1 + t(\vec{r}_2 - \vec{r}_1),$$

donde \vec{r}_1 y \vec{r}_2 son los vectores de posición de los puntos (x_1, y_1, z_1) y (x_2, y_2, z_2)

respectivamente por donde pasa la recta. En este caso los puntos son: $(1, 1, 0)$ y $(2, 4, 0)$, por lo tanto la ecuación de la recta en forma paramétrica que va del punto $(1, 1, 0)$ al punto $(2, 4, 0)$ está dada por,

$$\vec{r}(t) = (1, 1, 0) + t(1, 3, 0),$$

donde $0 \leq t \leq 1$, o también,

$$\vec{r}(t) = (1, t + 3t, 0),$$

así, en este caso el vector de desplazamiento diferencial está dado por:

$$d\vec{r}(t) = dt\hat{i} + 3dt\hat{j},$$

y las ecuaciones paramétricas de la recta están dadas por:

$$\begin{aligned} x &= 1 + t, \\ y &= 1 + 3t, \\ z &= 0. \end{aligned}$$

De esta forma, sustituyendo las ecuaciones paramétricas la función ϕ está dada por:

$$\phi = (1 + t)^3(1 + 3t) + 2 + 6t,$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\int_C \phi d\vec{r} &= \int_{(1,1,0)}^{(2,4,0)} (x^3 y + zy) d\vec{r} = \\
&= \int_{t=0}^{t=1} \left[(1+t)^3 (1+3t) + 2 + 6t \right] (dt\hat{i} + 3dt\hat{j}) \\
&= \int_{t=0}^{t=1} \left[(1+3t+3t^2+t^3) (1+3t) + 2 + 6t \right] (dt\hat{i} + 3dt\hat{j}) \\
&= \int_{t=0}^{t=1} (3+12t+12t^2+10t^3+3t^4) dt\hat{i} + 3 \int_{t=0}^{t=1} (3+12t+12t^2+10t^3+3t^4) dt\hat{j} \\
&= \left[\left(3t+6t^2+4t^3+\frac{5}{2}t^4+\frac{3}{5}t^5 \right) \right]_0^1 \hat{i} + 3 \left[\left(3t+6t^2+4t^3+\frac{5}{2}t^4+\frac{3}{5}t^5 \right) \right]_0^1 \hat{j} \\
&= \left[\left(3+6+4+\frac{5}{2}+\frac{3}{5} \right) - 0 \right] \hat{i} + 3 \left[\left(3+6+4+\frac{5}{2}+\frac{3}{5} \right) - 0 \right] \hat{j} \\
&= \left(\frac{30+60+40+25+6}{10} \right) \hat{i} + 3 \left(\frac{30+60+40+25+6}{10} \right) \hat{j}
\end{aligned}$$

finalmente, se obtiene

$$\int_C \phi d\vec{r} = \frac{161}{10} \hat{i} + \frac{483}{10} \hat{j}.$$

Problema 3.

Calcular $\int_c \vec{f} \cdot d\vec{r}$ para $\vec{f} = y\hat{i} + (x+z)^2\hat{j} + (x-z)^2\hat{k}$ desde el punto $(0, 0, 0)$ al punto $(2, 4, 0)$,

- a) a lo largo de la parábola $y = x^2$ $z = 0$,
- b) la recta $y = 2x$.

Solución:

En forma análoga al problema anterior, si tomamos como parámetro a x , donde $0 \leq x \leq 2$, las ecuaciones paramétricas de la curva están dadas por:

$$\begin{aligned}x &= x \\y &= x^2 \\z &= 0\end{aligned}$$

así, la ecuación paramétrica de la parábola está dada por,

$$\vec{r}(x) = x\hat{i} + x^2\hat{j},$$

por lo tanto, el elemento diferencial de línea está dado por,

$$d\vec{r} = dx\hat{i} + 2xdx\hat{j}$$

de esta forma, la integral de línea esta dada por:

$$\begin{aligned}\int_c \vec{f} \cdot d\vec{r} &= \int_{(0,0,0)}^{(2,4,0)} \left(y\hat{i} + (x+z)^2\hat{j} + (x-z)^2\hat{k} \right) \cdot \left(dx\hat{i} + 2xdx\hat{j} \right) \\&= \int_0^2 \left(x^2\hat{i} + x^2\hat{j} + x^2\hat{k} \right) \cdot \left(dx\hat{i} + 2xdx\hat{j} \right) \\&= \int_0^2 (x^2 dx + x^2 (2x) dx) = \int_0^2 (x^2 + 2x^3) dx \\&= \left(\frac{x^3}{3} + \frac{2x^4}{4} \right)_0^2 \\&= \left(\frac{2^3}{3} + 2\frac{(2)^4}{4} \right)\end{aligned}$$

finalmente, obtenemos

$$\int_C \vec{f} \cdot d\vec{r} = \frac{128}{12} = \frac{32}{3}.$$

b) En forma análoga, si tomamos a x , como parametro, la ecuación de la recta en forma paramétrica está dada por,

$$\vec{r}(x) = x\hat{i} + 2x\hat{j},$$

donde $0 \leq x \leq 2$, por lo tanto, el elemento diferencial de línea en este caso está dado por,

$$d\vec{r} = dx\hat{i} + 2dx\hat{j},$$

de esta forma, la integral de línea esta dada por:

$$\begin{aligned} \int_c \vec{f} \cdot d\vec{r} &= \int_0^2 (2x\hat{i} + x^2\hat{j} + x^2\hat{k}) \cdot (dx\hat{i} + 2dx\hat{j}) \\ &= \int_0^2 (2x + 2x^2) dx = \left[\left(x^2 + \frac{2}{3}x^3 \right) \right]_0^2 \\ &= \left(4 + \frac{2(2)^3}{3} \right) \\ &= \frac{28}{3}. \end{aligned}$$

Problema 4.

Dado el campo vectorial $\vec{F} = 3x\hat{i} + (2xz - y)\hat{j} + z\hat{k}$. Calcular $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ desde el punto $(0, 0, 0)$ hasta $(2, 1, 3)$ a lo largo de,

- a) la curva $x = 2t^2$, $y = t$, $z = 4t^2 - t$, para $0 \leq t \leq 1$.
- b) La recta que une a esos puntos.

Solución:

La ecuación de la curva en forma paramétrica está dada por:

$$\vec{r}(t) = 2t^2\hat{i} + t\hat{j} + (4t^2 - t)\hat{k},$$

donde $0 \leq t \leq 1$, por lo tanto el elemento diferencial de línea está dado por:

$$d\vec{r}(t) = 4tdt\hat{i} + dt\hat{j} + (8t - 1)dt\hat{k}.$$

Por lo tanto, la integral de línea está dada por:

$$\begin{aligned} \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_{(0,0,0)}^{(1,1,0)} \vec{F}(x, y, z) \cdot d\vec{r}(x, y, z) \\ &= \int_{t=0}^{t=1} [3(2t^2)\hat{i} + (2(2t^2)(4t^2 - t) - t)\hat{j} + (4t^2 - t)\hat{k}] \cdot [4tdt\hat{i} + dt\hat{j} + (8t - 1)dt\hat{k}] \end{aligned}$$

haciendo un poco de álgebra obtenemos,

$$\begin{aligned} \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= 24 \int_0^1 t^3 dt + 16 \int_0^1 t^4 dt - 4 \int_0^1 t^3 dt + 32 \int_0^1 t^3 dt - 12 \int_0^1 t^2 dt \\ &= \left[6t^4 + \frac{16}{5}t^5 - t^4 - t^2 + 8t^4 - 4t^3 + t^2 \right]_0^1 \\ &= \left[\frac{16}{5}t^5 + 13t^4 - 4t^3 \right]_0^1 \\ &= \frac{16}{5} + 13 - 4 = \frac{16 + 65 - 20}{5} \\ &= \frac{61}{5}. \end{aligned}$$

Problema 5.

Calcular $\int_C \vec{r} \times d\vec{r}$ a lo largo de la trayectoria representada por la ecuación,

$$x^2 + 2x + y^2 = 9.$$

Solucion:

Completando cuadrados en la ecuación de la trayectoria, obtenemos

$$(x+1)^2 + y^2 = 10,$$

que es la ecuación de un círculo con centro en el punto $(-1, 0)$ y radio $\sqrt{10}$. Las ecuaciones paramétricas de esta trayectoria están dadas por,

$$\begin{aligned}x &= -1 + \sqrt{10} \cos \theta, \\y &= \sqrt{10} \sin \theta,\end{aligned}$$

donde $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Por lo tanto, la ecuación de la trayectoria en forma paramétrica está dada por,

$$\vec{r}(\theta) = (-1, 0) + \sqrt{10} \cos \theta \hat{i} + \sqrt{10} \sin \theta \hat{j},$$

de donde, el elemento diferencial de línea está dado por,

$$d\vec{r} = -\sqrt{10} \sin \theta \hat{i} + \sqrt{10} \cos \theta \hat{j}.$$

Calculando el producto vectorial de \vec{r} y $d\vec{r}$ obtenemos,

$$\vec{r} \times d\vec{r} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \sqrt{10} \cos \theta & \sqrt{10} \sin \theta & 0 \\ -\sqrt{10} \sin \theta & \sqrt{10} \cos \theta & 0 \end{vmatrix} = (\sqrt{10})^2 \cos^2 \theta + (\sqrt{10})^2 \sin^2 \theta \hat{k} = 10\hat{k},$$

de esta forma, la integral de línea está dada por,

$$\int_C \vec{r} \times d\vec{r} = \int_{\theta=0}^{2\pi} 10 d\theta \hat{k} = \left[10\hat{k}\theta \right]_{\theta=0}^{2\pi} = 20\pi \hat{k}.$$

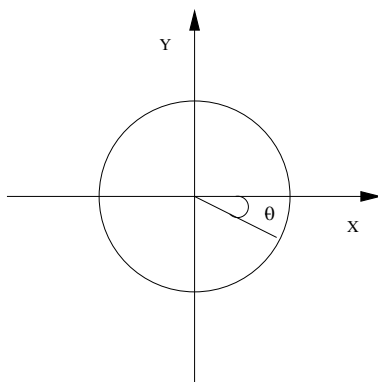
Problema 6.

Dada la función vectorial

$$\vec{A} = (y - 2x)\hat{i} + (3x + 2y)\hat{j},$$

hallar la integral de línea de \vec{A} a lo largo de la trayectoria C , que es un círculo en el plano XY con centro en el origen y radio 2, sabiendo que C se recorre en sentido negativo, es decir en sentido de las manecillas del reloj.

Solución:



Como se observa en la figura, y debido a que la trayectoria se recorre en sentido a favor de las manecillas del reloj, las ecuaciones paramétricas de la trayectoria C están dadas por:

$$\begin{aligned}x &= 2 \cos \theta, \\y &= -2 \sin \theta,\end{aligned}$$

donde

$$0 \leq \theta \leq 2\pi,$$

como la integral de línea está definida por $\int \vec{A} \bullet d\vec{r}$, debemos de calcular primero el elemento diferencial de línea $d\vec{r}$. El vector de posición en cualquier punto de la trayectoria C está dado por $\vec{r} = 2 \cos \theta \hat{i} - 2 \sin \theta \hat{j}$, de donde obtenemos,

$$d\vec{r} = -2 \sin \theta d\theta \hat{i} - 2 \cos \theta d\theta \hat{j},$$

asimismo, el campo vectorial está dado por,

$$\vec{A} = (-2 \sin \theta - 4 \cos \theta) \hat{j} + (6 \cos \theta - 4 \sin \theta) \hat{j},$$

por lo tanto,

$$\vec{A} \cdot d\vec{r} = [4 \sin^2 \theta + 4 \sin \theta \cos \theta + (8 \sin \theta \cos \theta - 12 \cos^2 \theta)] d\theta,$$

de esta forma la integral de línea está dada por,

$$\begin{aligned} \int_c \vec{A} \cdot d\vec{r} &= \int_{\theta=0}^{2\pi} (\sin^2 \theta + 12 \sin \theta \cos \theta - 12 \cos^2 \theta) d\theta \\ &= 4 \int_{\theta=0}^{2\pi} \sin \theta \cos \theta d\theta - 12 \int_{\theta=0}^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta \\ &= 4 \left[\frac{\theta}{2} - \frac{\sin 2\theta}{4} \right]_{\theta=0}^{2\pi} + \left[12 \frac{\sin^2 \theta}{2} \right]_{\theta=0}^{2\pi} - 12 \left[\frac{\theta}{2} + \frac{\sin 2\theta}{4} \right]_{\theta=0}^{2\pi} \\ &= 4 \left(\frac{2\pi}{2} \right) - 12 \left(\frac{2\pi}{2} \right) = -8\pi. \end{aligned}$$

Notese que si la trayectoria C se recorre en sentido positivo, las ecuaciones paramétricas de C estarían dadas por $x = 2 \cos \theta$ y $y = 2 \sin \theta$, y por lo tanto, el resultado sería de la forma

$$\int_c \vec{A} \cdot d\vec{r} = 8\pi.$$

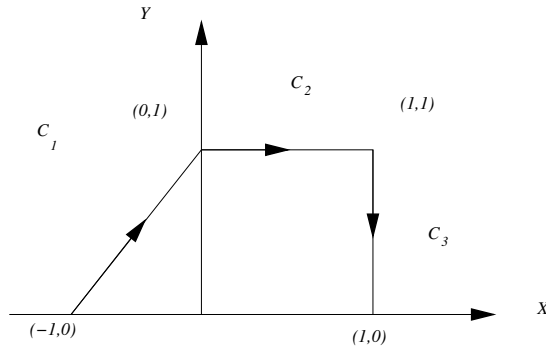
Problema 7.

Dado el siguiente campo vectorial

$$\vec{F}(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2} \hat{i} - \frac{x}{x^2 + y^2} \hat{j},$$

calcular la integral de la componente tangencial de \vec{F} de $(-1, 0)$ a $(1, 0)$;

- A lo largo del semicírculo que une esos puntos,
- A lo largo de la trayectoria poligonal que se muestra en la siguiente figura.



Solución:

a) Sabemos que $x^2 + y^2 = 1$, es la ecuación de un círculo de radio 1, entonces la ecuación del semicírculo sería:

$$y = \sqrt{1 - x^2},$$

si escogemos a x como parámetro, entonces la ecuación de la trayectoria curva que es el semicírculo está dada por:

$$\vec{r}(x) = x\hat{i} + (\sqrt{1 - x^2})\hat{j}$$

donde $-1 \leq x \leq 1$, de la ecuación anterior el elemento diferencial de línea está dado por:

$$d\vec{r} = dx\hat{i} + \frac{xdx}{\sqrt{1 - x^2}}(-2x)dx\hat{j}$$

es decir,

$$d\vec{r} = dx\hat{i} - \left(\frac{xdx}{\sqrt{1 - x^2}}\right)\hat{j}$$

por lo tanto, la componente tangencial de \vec{F} a lo largo del semicírculo

$$\int_{(-1,0)}^{(1,0)} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{-1}^1 \left[\left(\frac{\sqrt{1 - x^2}}{x^2 + 1 - x^2} \right) + \left(\frac{-x}{x^2 + 1 - x^2} \right) \left(-\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} \right) \right] dx$$

$$\int_{(-1,0)}^{(1,0)} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{-1}^1 \left(\sqrt{1-x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx = \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

La integral anterior es del tipo de integrales que se resuelven con cambios de variable trigonométricos y es relativamente sencilla. Antes de resolver la integral, observemos que se puede resolver seleccionando adecuadamente la parametrización de la trayectoria.

En este caso, sabemos que

$$\begin{aligned} x(\theta) &= \cos \theta, \\ y(\theta) &= \sin \theta, \end{aligned}$$

donde $0 \leq \theta \leq 2\pi$, son las ecuaciones paramétricas de un círculo de radio 1. Por lo tanto la ecuación en forma paramétrica de la trayectoria semicircular está dada por:

$$\vec{r}(\theta) = \cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{j}; \quad \theta \in [0, \pi]$$

observe que el parámetro θ no va de 0 a π . De la ecuación anterior, el elemento diferencial de línea está dado por:

$$d\vec{r}(\theta) = -\sin \theta d\theta \hat{i} + \cos \theta d\theta \hat{j}.$$

Por lo tanto, la integral de línea de la componente tangencial del campo \vec{F} a lo largo de la trayectoria semicircular resulta ser,

$$\begin{aligned} \int_{(-1,0)}^{(1,0)} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_{\theta=\pi}^{\theta=0} (\cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{j}) \cdot (-\sin \theta d\theta \hat{i} + \cos \theta d\theta \hat{j}) \\ &= - \int_{\pi}^0 (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) d\theta = \int_0^{\pi} d\theta = \pi. \end{aligned}$$

Este último resultado muestra que la selección adecuada de la parametrización de la trayectoria semicircular conduce a un resultado relativamente más fácil que la selección del parámetro x .

Por otro lado, notemos que para encontrar la integral de línea para el inciso b) tenemos que resolver dicha integral en tres partes de la forma;

$$\int_{(-1,0)}^{(1,0)} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{C_3} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

donde \int_{C_1} , \int_{C_2} y \int_{C_3} son las integrales de línea a lo largo de las trayectorias rectas como se muestran en la figura. La ecuación anterior sin necesidad de

hacer cálculos muestran que el procedimiento es un poco laborioso. Por lo tanto, analizemos el campo vectorial dado.

Si calculamos el rotacional de \vec{F} obtenemos:

$$\begin{aligned}\nabla \times \vec{F} &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{y}{x^2+y^2} & -\frac{x}{x^2+y^2} & 0 \end{vmatrix} \\ &= 0\hat{i} + 0\hat{j} + \left[\frac{-x^2 - y^2 + 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{x^2 + y^2 - 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right] \hat{k} \\ &= \vec{0}\end{aligned}$$

es decir, \vec{F} es irrotacional. Por lo tanto, si $\nabla \times \vec{F} = \vec{0}$ (que quiere decir también que es un campo vectorial conservativo) entonces existe una función escalar ϕ tal que :

$$\vec{F} = \nabla \phi$$

luego entonces, sustituyendo este resultado en la integral de línea obtenemos

$$\begin{aligned}\int_{(-1,0)}^{(1,0)} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_{(-1,0)}^{(1,0)} \nabla \phi \cdot d\vec{r} \\ &= \int_{(-1,0)}^{(1,0)} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \phi}{\partial z} dz \right) \\ &= \int_{(-1,0)}^{(1,0)} d\phi\end{aligned}$$

el resultado anterior muestra que la integral de línea depende solamente de los puntos inicial y final de la trayectoria. Luego entonces, para el inciso b) donde la trayectoria de integración es la trayectoria poligonal que se muestra en la figura, se obtiene el siguiente resultado

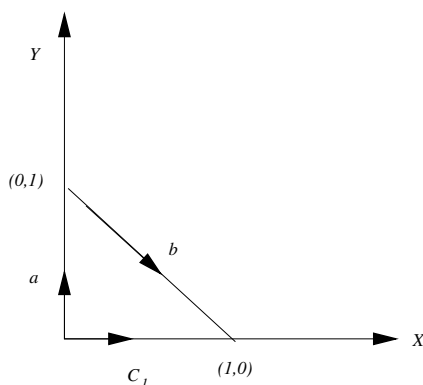
$$\int_{(-1,0)}^{(1,0)} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{C_3} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \pi.$$

Problema 8.

Demostrar que $\vec{f} = xy^2\hat{i} + x^3y\hat{j}$ no es conservativo sin aplicar el resultado del irrotacional, es decir sin aplicar que $\nabla \times \vec{f} = \vec{0}$.

Solución:

Para mostrar que \vec{f} no es conservativo, calculamos la integral de línea del campo vectorial \vec{f} por ejemplo, del punto $(0,0)$ al punto $(1,0)$ a lo largo de dos trayectorias diferentes C_1 y C_2 como se ilustra en la siguiente figura.



Para C_1 :

Las ecuaciones paramétricas de la curva están dadas por:

$$\begin{aligned}x &= x \\ y &= 0\end{aligned}$$

donde $0 \leq x \leq 1$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\vec{r}(x) &= x\hat{i}, \\ d\vec{r}(x) &= dx\hat{i},\end{aligned}$$

por lo tanto para el campo vectorial dado, obtenemos

$$\int_{C_1} \vec{f} \cdot d\vec{r} = \int_{(0,0)}^{(1,0)} \vec{f} \cdot d\vec{r} = \int_{x=0}^1 (0\hat{i} + 0\hat{j}) \cdot dx\hat{i} = 0.$$

Para C_2 , se tiene que

$$\int_{C_2} \vec{f} \cdot d\vec{r} = \int_a \vec{f} \cdot d\vec{r} + \int_b \vec{f} \cdot d\vec{r}$$

para la trayectoria a ; las ecuaciones paramétricas son:

$$\begin{aligned}x &= 0 \\ y &= y\end{aligned}$$

donde $0 \leq y \leq 1$, de donde se obtiene

$$\begin{aligned}\vec{r}(y) &= y\hat{j} \\ d\vec{r}(y) &= dy\hat{j}\end{aligned}$$

para la trayectoria b , la ecuación paramétrica de la recta está dada por:

$$\begin{aligned}\vec{r}(t) &= (0, 1) + t(1, -1) \\ &= t\hat{i} + (1-t)\hat{j}\end{aligned}$$

donde $0 \leq t \leq 1$, es decir las ecuaciones paramétricas de la curva son:

$$\begin{aligned}x &= t \\ y &= 1-t\end{aligned}$$

por lo tanto para la trayectoria C_2 tenemos:

$$\begin{aligned}\int_{C_2} \vec{f} \cdot d\vec{r} &= \int_{y=0}^1 (0i + 0j) dy\hat{j} + \int_{t=0}^1 [t(1-2t+t^2) - t^3(1-t)] dt \\ &= \int_0^1 [t(1-2t+t^2) - t^3 + t^4] dt \\ &= \int_0^1 (t^4 - 2t^2 + t) dt = \frac{1}{5} - \frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{6-20+25}{30}\end{aligned}$$

finalmente obtenemos,

$$\int_{C_2} \vec{r} \cdot d\vec{r} = \frac{1}{30}.$$

Por lo tanto, de los resultados anteriores, la integral de línea sí depende de la trayectoria de integración, luego entonces, el campo vectorial \vec{f} no es conservativo.

Solución alternativa:

Supongamos que \vec{f} es conservativo, por lo tanto si $\nabla \times \vec{f} = \vec{0}$ entonces existe una función escalar ϕ tal que $\vec{f} = \nabla\phi$ es decir;

$$\begin{aligned}\frac{\partial\phi}{\partial x} &= xy^2 \\ \frac{\partial\phi}{\partial y} &= x^3y,\end{aligned}$$

pero esto no puede ser, porque de las ecuaciones anteriores obtenemos:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) &= 2xy \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right) &= 3x^2y\end{aligned}$$

es decir;

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \neq \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x}$$

que contradice el resultado fundamental del Cálculo Diferencial que establece que :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x}.$$

Por lo tanto, la hipótesis original (\vec{f} es conservativo) no es correcta, así el campo vectorial \vec{f} no es conservativo.

Problema 9.

Calcular el trabajo realizado por un campo de fuerzas \vec{F} dado por

$$\vec{F}(x, y, z) = (y + 2x)\hat{i} + (5y - x)\hat{j},$$

que actúa sobre una partícula que se mueve sobre la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, en sentido opuesto a las manecillas del reloj como se ilustra en la siguiente figura.

fhFU3.5258in2.4327in0ptTrayectoria de integración.dibujoellipse.bmp

Solución:

Como el trabajo realizado por el campo de fuerzas \vec{F} está definido por:

$$W = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r},$$

se puede calcular la integral de línea tomando la parametrización

$$\begin{aligned}x &= a \cos \phi \\y &= b \sin \phi\end{aligned}$$

donde $0 \leq \phi \leq 2\pi$. Sin embargo aplicaremos el teorema de Green, en este caso si

$$\begin{aligned}M(x, y) &= y + 2x \\N(x, y) &= 5y - x,\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}\frac{\partial N}{\partial x} &= -1 \\ \frac{\partial M}{\partial y} &= 1,\end{aligned}$$

por lo tanto,

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_{Rxy} \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dxdy = \iint_{Rxy} [(-1) - 1] dxdy = -2 \iint_{Rxy} dxdy = -2A,$$

donde A es el área de la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ que es igual πab .

Por lo tanto el trabajo realizado por el campo de fuerzas \vec{F} está dado por:

$$W = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = -2\pi ab.$$

Problema 10.

a) Verificar si $\vec{f} = 3x^2y\hat{i} + (x^3 + 1)\hat{j} + 9z^2\hat{k}$ es conservativo.

b) Dependiendo de su respuesta en el inciso anterior calcule la integral de línea de \vec{f} desde el punto $(-1, 0, 2)$ hasta el punto $(1, 2, 4)$.

Solución:

a) Para verificar que $\vec{f} = 3x^2y\hat{i} + (x^3 + 1)\hat{j} + 9z^2\hat{k}$ es conservativo, calculemos el rotacional del campo vectorial \vec{f} .

$$\begin{aligned}\nabla \times \vec{f} &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 3x^2y & x^3 + 1 & 9z^2 \end{vmatrix} \\ &= (0 - 0)\hat{i} - (0 - 0)\hat{j} + (3x^2 - 3x^2)\hat{k} \\ &= \vec{0}.\end{aligned}$$

Por lo tanto, el campo vectorial \vec{f} es conservativo.

b) Si $\nabla \times \vec{f} = \vec{0}$, entonces existe una función escalar tal que $\vec{f} = \nabla\phi$, es decir;

$$3x^2y\hat{i} + (x^3 + 1)\hat{j} + 9z^2\hat{k} = \frac{\partial\phi}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\hat{k},$$

de donde obtenemos,

$$\begin{aligned}\frac{\partial\phi}{\partial x} &= 3x^2y, \\ \frac{\partial\phi}{\partial y} &= (x^3 + 1), \\ \frac{\partial\phi}{\partial z} &= 9z^2,\end{aligned}$$

integrando parcialmente,

$$1) \quad \phi(x, y, z) = x^3y + f(y, z),$$

$$2) \quad \phi(x, y, z) = x^3y + y + g(x, z),$$

$$3) \quad \phi(x, y, z) = 3z^3 + h(x, y),$$

derivando parcialmente con respecto a la variable y , de las ecuaciones 1) y 2)

obtenemos,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial y} &= x^3 + \frac{\partial f(y, z)}{\partial y}, \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} &= x^3 + 1, \end{aligned}$$

de las ecuaciones anteriores obtenemos

$$\frac{\partial f(y, z)}{\partial y} = 1,$$

integrando nuevamente parcialmente con respecto a la variable y , obtenemos

$$f(y, z) = y + \Psi(z),$$

sustituyendo en la ecuación 1) obtenemos,

$$4) \quad \phi(x, y, z) = x^3 y + y + \Psi(z).$$

Aplicando nuevamente el mismo procedimiento, es decir; de las ecuaciones 3) y 4), derivamos parcialmente ahora con respecto a la variable z y obtenemos,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial z} &= 9z^2 \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} &= \frac{\Psi(z)}{\partial z} \end{aligned}$$

igualando las ecuaciones anteriores obtenemos,

$$\Psi(z) = 3z^2 + cte,$$

finalmente la función escalar $\phi(x, y, z)$ tal que $\vec{f} = \nabla \phi$ está dada por,

$$\phi(x, y, z) = x^3y + y + 3z^2 + cte.$$

Por lo tanto, aplicando el teorema de campos conservativos

$$\begin{aligned} \int_C \vec{f} \cdot d\vec{r} &= \int_{(-1,0,2)}^{(1,2,4)} \nabla\phi \cdot d\vec{r} = \int_{(-1,0,2)}^{(1,2,4)} d\phi(x, y, z) \\ &= \phi(1, 2, 4) - \phi(-1, 0, 2) \\ &= 52 - 48 = 4. \end{aligned}$$

Problema 11.

Calcular el área de una superficie esférica.

Solución:

La ecuación de una superficie S se puede representar mediante una función vectorial de la forma :

$$\vec{r}(u, v) = x(u, v)\hat{i} + y(u, v)\hat{j} + z(u, v)\hat{k},$$

donde u y v son parámetros. Asimismo, los elementos diferenciables de línea tangentes a las líneas coordenadas u y v están dadas por:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} du &= \vec{r}_u du, \\ \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} dv &= \vec{r}_v dv,\end{aligned}$$

de donde, se define el elemento diferencial de superficie $d\vec{S}$ como:

$$(1) \quad \begin{aligned}d\vec{S} &= \vec{r}_u du \times \vec{r}_v dv \\ &= \vec{r}_u \times \vec{r}_v dudv,\end{aligned}$$

y su magnitud está dado por:

$$(2) \quad dS = \left| d\vec{S} \right| = |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| dudv.$$

Recordemos también que $\vec{r}_u \times \vec{r}_v$ es un vector normal en cada punto de la superficie S definida por $\vec{r}(u, v)$, así de las ecuaciones anteriores, el elemento diferencial de superficie está dado por :

$$d\vec{S} = \hat{n}dS,$$

donde \hat{n} es un vector unitario normal en cada punto de la superficie S y está dado por:

$$\hat{n} = \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|}.$$

De la ecuación (2), integrando la magnitud del elemento diferencial dS , sobre toda la superficie de la esfera se puede obtener el área de la superficie S es decir:

$$S = \iint_S |d\vec{S}| = \iint_S \hat{n} \cdot d\vec{S}.$$

Como sabemos, para una superficie esférica la forma paramétrica para la superficie está dada por:

$$\vec{r}(\theta, \phi) = a \sin \theta \cos \phi \hat{i} + a \sin \theta \sin \phi \hat{j} + a \cos \theta \hat{k},$$

donde, $0 \leq \theta \leq \pi$ y $0 \leq \phi \leq 2\pi$. Por lo tanto, los vectores tangentes a las líneas coordenadas θ y ϕ están dados por,

$$\vec{r}_\theta \equiv \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = a \cos \theta \cos \phi \hat{i} + a \cos \theta \sin \phi \hat{j} + a \sin \theta \hat{k}$$

y

$$\vec{r}_\phi \equiv \frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} = a \sin \theta \sin \phi \hat{i} + a \sin \theta \cos \phi \hat{j}$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned} \vec{r}_\theta \times \vec{r}_\phi &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a \cos \theta \cos \phi & a \cos \theta \sin \phi & a \sin \theta \\ a \sin \theta \sin \phi & a \sin \theta \cos \phi & 0 \end{vmatrix} \\ &= a^2 \sin^2 \theta \cos \phi \hat{i} + a^2 \sin^2 \theta \sin \phi \hat{j} + a^2 \sin \theta \cos \theta (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) \hat{k} \\ &= a^2 \sin^2 \theta \cos \phi \hat{i} + a^2 \sin^2 \theta \sin \phi \hat{j} + a^2 \sin \theta \cos \theta \hat{k}, \end{aligned}$$

de lo anteriormente aplicando la ecuación (2), la magnitud del elemento de superficie para este caso está dado por:

$$dS = |d\vec{S}| = |\vec{r}_\theta \times \vec{r}_\phi| d\theta d\phi,$$

donde,

$$\begin{aligned}
 |\vec{r}_\theta \times \vec{r}_\phi| &= \sqrt{a^4 \{ \sin^4 \theta [\cos^2 \phi + \sin^2 \phi] + \sin^2 \theta \cos^2 \theta \}} \\
 &= \sqrt{a^4 \{ \sin^2 \theta [\sin^2 \theta + \cos^2 \theta] \}} \\
 &= a^2 \sin \theta,
 \end{aligned}$$

por lo tanto, el área de una superficie esférica está dado por:

$$\begin{aligned}
 S &= \iint_S dS = \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} a^2 \sin \theta d\theta d\phi = a^2 \int_{\phi=0}^{2\pi} d\phi \int_{\theta=0}^{\pi} \sin \theta d\theta = a^2 (\phi \big|_0^{2\pi}) (\cos \theta \big|_0^{\pi}) \\
 &= -a^2 (2\pi) [(\cos(\pi) - \cos(0))] \\
 &= 4\pi a^2.
 \end{aligned}$$

Problema 12.

Calcular $\iint_S d\vec{S}$ donde S es la parte $z > 0$ de una esfera.

Solución:

Para el caso de una superficie esférica donde $z > 0$, la ecuación paramétrica de dicha superficie está dada por :

$$\vec{r}(\theta, \phi) = a \sin \theta \cos \phi \hat{i} + a \sin \theta \sin \phi \hat{j} + a \cos \theta \hat{k},$$

donde;

$$\begin{aligned} 0 &\leq \theta \leq \pi/2, \\ 0 &\leq \phi \leq 2\pi. \end{aligned}$$

En este caso, la integral de superficie resulta

$$1) \quad \iint_S d\vec{S} = \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi/2} (\vec{r}_\theta \times \vec{r}_\phi) d\theta d\phi$$

del ejemplo anterior un vector normal a la superficie de la esfera está dado por:

$$\vec{r}_\theta \times \vec{r}_\phi = a^2 \sin^2 \theta \cos \phi \hat{i} + a^2 \sin^2 \theta \sin \phi \hat{j} + a^2 \sin \theta \cos \theta \hat{k},$$

sustituyendo en la integral de superficie obtenemos,

$$\begin{aligned} \iint_S d\vec{S} &= a^2 \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi/2} \left[\sin^2 \theta \cos \phi \hat{i} + \sin^2 \theta \sin \phi \hat{j} + \sin \theta \cos \theta \hat{k} \right] d\theta d\phi \\ &= a^2 \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi/2} \sin^2 \theta \cos \phi d\theta d\phi \hat{i} + a^2 \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi/2} \sin^2 \theta \sin \phi d\theta d\phi \hat{j} + \\ &\quad a^2 \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi/2} \sin \theta \cos \theta d\theta d\phi \hat{k}, \end{aligned}$$

las integrales de las componentes \hat{i} y \hat{j} se pueden separar de la forma,

$$\begin{aligned} a^2 \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta \cos \phi d\theta d\phi &= a^2 \int_{\phi=0}^{2\pi} \cos \phi d\phi \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta d\theta \\ a^2 \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta \sin \phi d\theta d\phi &= a^2 \int_{\phi=0}^{2\pi} \sin \phi d\phi \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta d\theta, \end{aligned}$$

pero

$$\int_{\phi=0}^{2\pi} \cos \phi d\phi = \int_{\phi=0}^{2\pi} \sin \phi d\phi = 0.$$

Por lo tanto la integral de superficie resulta ser,

$$\begin{aligned} \iint_S d\vec{S} &= a^2 \int_{\phi=0}^{2\pi} d\phi \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \cos \theta d\theta \hat{k} \\ &= 2a^2 \pi \left(\left[\frac{\sin^2 \theta}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \right) \\ &= 2a^2 \pi \left[\frac{1}{2} \left(\sin^2 \left(\frac{\pi}{2} \right) - \sin^2 (0) \right) \right], \end{aligned}$$

finalmente obtenemos,

$$2) \quad \iint_S d\vec{S} = \pi a^2 \hat{k}.$$

Problema 13.

Calcular $\iint_S d\vec{S}$ donde S es una esfera.

Solución:

La integral original se puede escribir como:

$$\iint_S d\vec{S} = \iint_{S_1} d\vec{S} + \iint_{S_2} d\vec{S},$$

donde S_1 es la parte de la esfera $z \geq 0$ y S_2 es la parte de la esfera $z \leq 0$. Así

del problema anterior usando la ecuación 2) se tiene,

$$\iint_{S_1} d\vec{S} = \pi a^2 \hat{k}.$$

Análogamente, para la parte de la esfera $z \leq 0$ aplicando la ecuación 1) del problema anterior obtenemos,

$$\begin{aligned} \iint_{S_2} d\vec{S} &= \iint_{S_2} (\vec{r}_\theta \times \vec{r}_\phi) d\theta d\phi \\ &= a^2 \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin \theta \cos \theta d\theta d\phi \hat{k} \\ &= a^2 \int_{\phi=0}^{2\pi} d\phi \int_{\theta=\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin \theta \cos \theta d\theta \hat{k} \\ &= a^2 [2\pi] \left[\frac{1}{2} \left(\sin^2(\pi) - \sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right) \right) \right] \hat{k} \\ &= -\pi a^2 \hat{k}, \end{aligned}$$

finalmente obtenemos,

$$\iint_S d\vec{S} = \vec{0}.$$

Problema 14:

Sea $\vec{E} = -\text{grad} \left[\frac{1}{|\vec{r}|} \right]$ donde $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$. Calcular $\int_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$, donde S es la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

Solución:

Por definición si $\phi = \phi(r)$, donde $r = |\vec{r}|$ entonces, el gradiente está dado por la expresión,

$$\nabla \phi(r) = \phi'(r) \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|},$$

en este caso tenemos que la función dada es igual a $\phi(r) = \frac{1}{|\vec{r}|}$, por lo tanto el

campo vectorial \vec{E} está dado por:

$$\vec{E} = -\nabla \left(\frac{1}{|\vec{r}|} \right) = -\nabla |\vec{r}|^{-1} = - \left(-|\vec{r}|^{-2} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \right),$$

es decir,

$$\vec{E} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}.$$

Por otro lado, el elemento diferencial de superficie $d\vec{S}$ está dado por:

$$d\vec{S} = \hat{n}dS,$$

donde el vector \hat{n} , es un vector unitario normal a la superficie, que en este caso

es una esfera, y aplicando la propiedad que establece que el gradiente es normal o perpendicular a una superficie, este vector esta dado por:

$$\hat{n} = \frac{\nabla \phi(x, y, z)}{|\nabla \phi(x, y, z)|} = \frac{\nabla (x^2 + y^2 + z^2)}{|\nabla (x^2 + y^2 + z^2)|} = \frac{2x\hat{i} + 2y\hat{j} + 2z\hat{k}}{|2x\hat{i} + 2y\hat{j} + 2z\hat{k}|} = \frac{x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

es decir,

$$\hat{n} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|},$$

este resultado se pudo haber obtenido inmediatamente aplicando el resultado

de que $\phi = \phi(r)$, donde $r = |\vec{r}|$, tomando $\phi(r) = r^2$.

Por lo tanto sustituyendo el resultado para el campo vectorial \vec{E} y el resultado para el vector $d\vec{S}$, la integral de superficie resulta ser,

$$\begin{aligned} \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} &= \int_S \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} \cdot \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} dS \\ &= \frac{1}{|\vec{r}|^2} \int_S dS \end{aligned}$$

donde, de la ecuación para la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, se tiene que $|\vec{r}|^2 =$

$x^2 + y^2 + z^2 = 9$. Finalmente aplicando el resultado del problema 11, la integral está dada por:

$$\int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{9} (4\pi (3)^2) = 4\pi.$$

Problema 15.

Calcular

$$\iint_S \frac{dS}{[a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2]^{\frac{1}{2}}},$$

sobre la superficie del elipsoide dada por la ecuación $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$.

Solución:

La integral de superficie se puede calcular en forma paramétrica de la forma,

$$\iint_S f dS = \iint_T f(\vec{r}(u, v)) \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right| du dv,$$

analizando la ecuación del elipsoide, una parametrización para la superficie S , está dada por las ecuaciones paramétricas,

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{\sqrt{a}} \sin \theta \cos \phi, \\ y &= \frac{1}{\sqrt{b}} \sin \theta \sin \phi, \\ z &= \frac{1}{\sqrt{c}} \cos \theta, \end{aligned}$$

así, la ecuación del elipsoide en forma paramétrica está dada por,

$$\vec{r}(\theta, \phi) = \frac{1}{\sqrt{a}} \sin \theta \cos \phi \hat{i} + \frac{1}{\sqrt{b}} \sin \theta \sin \phi \hat{j} + \frac{1}{\sqrt{c}} \cos \theta \hat{k},$$

por lo tanto, los vectores tangentes a las líneas coordenadas θ y ϕ están dados por,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} &= \frac{1}{\sqrt{a}} \cos \theta \cos \phi \hat{i} + \frac{1}{\sqrt{b}} \cos \theta \sin \phi \hat{j} - \frac{1}{\sqrt{c}} \sin \theta \hat{k} \\ \frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} &= \frac{1}{\sqrt{a}} \sin \theta \sin \phi \hat{i} + \frac{1}{\sqrt{b}} \sin \theta \cos \phi \hat{j} \end{aligned}$$

de esta forma, el vector normal a la superficie está dado por,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{1}{\sqrt{a}} \cos \theta \cos \phi & \frac{1}{\sqrt{b}} \cos \theta \sin \phi & -\frac{1}{\sqrt{c}} \sin \theta \\ -\frac{1}{\sqrt{a}} \sin \theta \sin \phi & \frac{1}{\sqrt{b}} \sin \theta \cos \phi & 0 \end{vmatrix} \\ &= \sin \theta \left[\frac{1}{\sqrt{bc}} \sin \theta \cos \phi \hat{i} - \frac{1}{\sqrt{ac}} \sin \theta \sin \phi \hat{j} + \left(\frac{1}{\sqrt{ab}} \cos^2 \phi \cos \theta + \frac{1}{\sqrt{ab}} \cos \theta \sin^2 \phi \right) \hat{k} \right] \\ &= \sin \theta \left(\frac{1}{\sqrt{bc}} \sin \theta \cos \phi \hat{i} - \frac{1}{\sqrt{ac}} \sin \theta \sin \phi \hat{j} + \frac{1}{\sqrt{ab}} \cos \theta \hat{k} \right), \end{aligned}$$

y la magnitud está dada por,

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} \right| &= \sin \theta \sqrt{\frac{a \sin^2 \theta \cos^2 \phi}{abc} + \frac{b \sin^2 \theta \sin^2 \phi}{abc} + \frac{c \cos^2 \theta}{abc}} \\ &= \frac{\sin \theta}{\sqrt{abc}} \sqrt{a \sin^2 \theta \cos^2 \phi + b \sin^2 \theta \sin^2 \phi + c \cos^2 \theta} \end{aligned}$$

así también, en términos de las ecuaciones paramétricas, la función escalar f se puede escribir de la forma,

$$f(\vec{r}(\theta, \phi)) = \frac{1}{[a \sin^2 \theta \cos^2 \phi + b \sin^2 \theta \sin^2 \phi + c \cos^2 \theta]^{\frac{1}{2}}}$$

por lo tanto, la integral de superficie está dada por:

$$_S f dS = \int \frac{\sin \theta}{\sqrt{abc}} \frac{[a \sin^2 \theta \cos^2 \phi + b \sin^2 \theta \sin^2 \phi + c \cos^2 \theta]^{\frac{1}{2}}}{[a \sin^2 \theta \cos^2 \phi + b \sin^2 \theta \sin^2 \phi + c \cos^2 \theta]^{\frac{1}{2}}} d\theta d\phi,$$

que se reduce simplemente a la forma,

$$\begin{aligned} _S f dS &= \frac{1}{\sqrt{abc}} \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = \frac{1}{\sqrt{abc}} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin \theta d\theta \\ &= \frac{2\pi}{\sqrt{abc}} \int_0^\pi \sin \theta d\theta = \frac{2\pi}{\sqrt{abc}} [(-\cos \theta)_0^\pi] \\ &= \frac{2\pi}{\sqrt{abc}} [-(\cos \pi - \cos 0)] \end{aligned}$$

finalmente se obtiene,

$$_S \frac{dS}{[a^2 x^2 + b^2 y^2 + c^2 z^2]^{\frac{1}{2}}} = \frac{4\pi}{\sqrt{abc}}.$$

Problema 16.

Calcular $\iint_S \vec{f} \cdot d\vec{S}$ donde $\vec{f} = x^2\hat{i} + xy\hat{j} - xz\hat{k}$ y S la superficie del plano que contiene a los puntos $(1, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$ y $(0, 0, 3)$ limitado en el primer octante.

Solución:

Primero debemos escribir la ecuación de la superficie S de la forma,

$$ax + by + cz = d,$$

donde $\vec{N} = (a, b, c)$ será un vector normal al plano que contiene a los tres puntos dados. Sean los puntos P , Q y R que están en el plano con sus respectivos vectores de posición \vec{r}_P , \vec{r}_Q y \vec{r}_R , en términos de estos vectores de posición podemos encontrar dos vectores sobre el plano y calculando su producto vectorial entre ellos podemos encontrar un vector perpendicular a ambos y por lo tanto perpendicular al plano, de la forma

$$\begin{aligned}\vec{N} &= (\vec{r}_P - \vec{r}_Q) \times (\vec{r}_R - \vec{r}_Q) \\ &= (1, -2, 0) \times (0, -2, 3) \\ &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 3 \end{vmatrix} \\ &= -6\hat{i} - 3\hat{j} - 2\hat{k},\end{aligned}$$

además,

$$d = \vec{N} \cdot \vec{r}_P = (-6, -3, -2) \cdot (1, 0, 0) = -6.$$

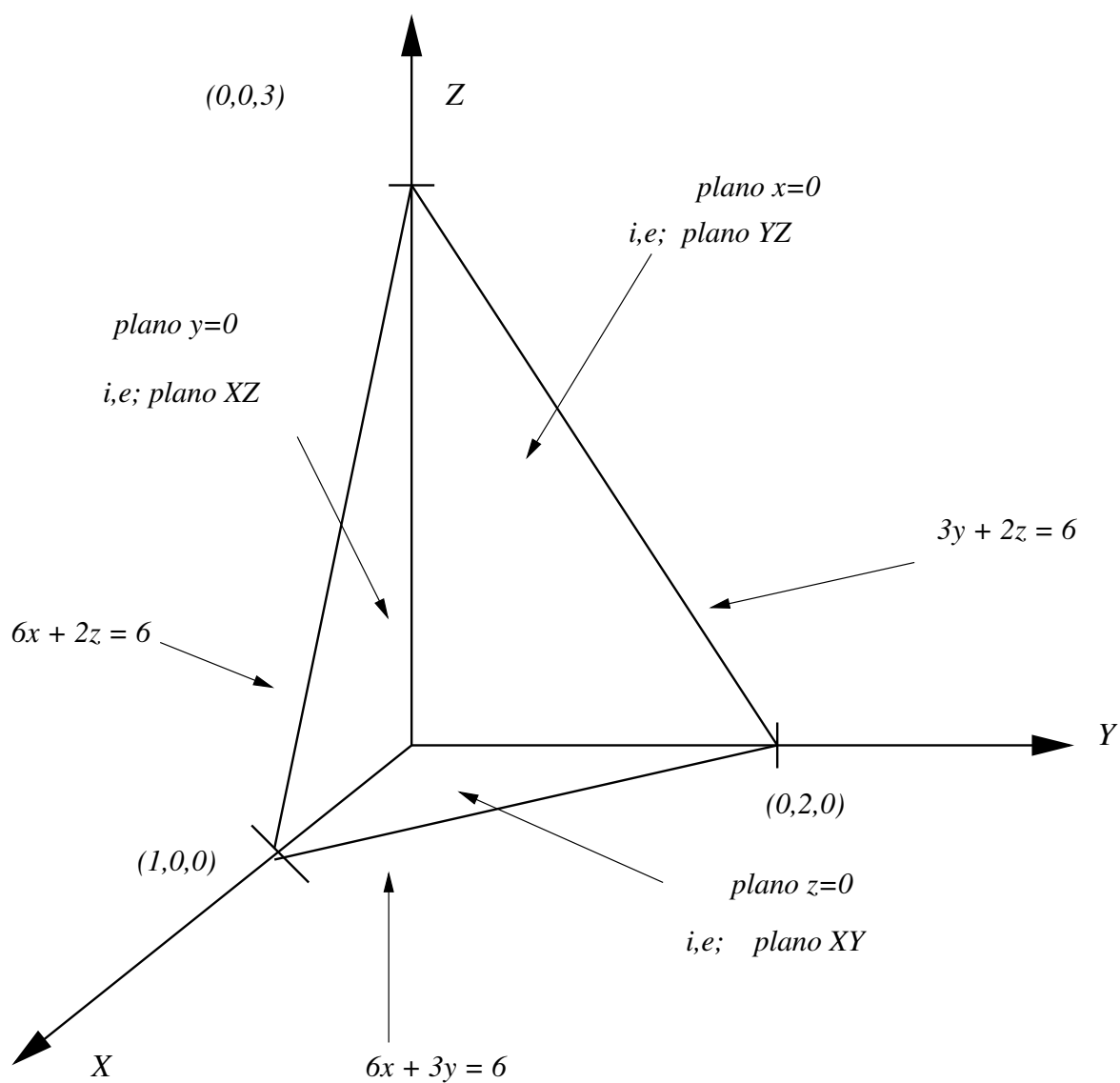
Por lo tanto, la ecuación del plano que contiene a los puntos $(1, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$ y $(0, 0, 3)$ está dado por:

$$-6x - 3y - 2z = -6,$$

que se puede escribir de la forma,

$$x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{3}z = 1.$$

La superficie de integración esta representada en la siguiente figura.



Por lo tanto, aplicando el teorema de la proyección de la superficie en el plano coordenado rectangular XY , la integral de superficie está dada por:

$$\iint_S \vec{f} \cdot \hat{n} dS = \iint_{R_{xy}} \frac{\vec{f} \cdot \hat{n}}{|\hat{n} \cdot \hat{k}|} dx dy,$$

donde el vector unitario normal al plano está dado por:

$$\begin{aligned}\widehat{n} &= \frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|} = \frac{\widehat{i} + \frac{1}{2}\widehat{j} + \frac{1}{3}\widehat{k}}{\sqrt{1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9}}} \\ &= \frac{\widehat{i} + \frac{1}{2}\widehat{j} + \frac{1}{3}\widehat{k}}{\frac{7}{6}}\end{aligned}$$

de donde obtenemos,

$$\begin{aligned}\vec{f} \cdot \widehat{n} &= \left(x^2\widehat{i} + xy\widehat{j} + xz\widehat{k}\right) \cdot \left(\widehat{i} + \frac{1}{2}\widehat{j} + \frac{1}{3}\widehat{k}\right) \frac{6}{7} \\ \widehat{n} \cdot \widehat{k} &= \frac{2}{7},\end{aligned}$$

así, al sustituir en la integral de superficie obtenemos,

$$\begin{aligned}\iint_{R_{xy}} \frac{\vec{f} \cdot \widehat{n}}{|\widehat{n} \cdot \widehat{k}|} dxdy &= \iint_{R_{xy}} \left[\frac{\left(x^2 + \frac{xy}{2} + \frac{xz}{3}\right) \frac{6}{7}}{\frac{2}{7}} \right] dxdy \\ &= 3 \iint_{R_{xy}} \left(x^2 + \frac{xy}{2} + \frac{xz}{3}\right) dxdy\end{aligned}$$

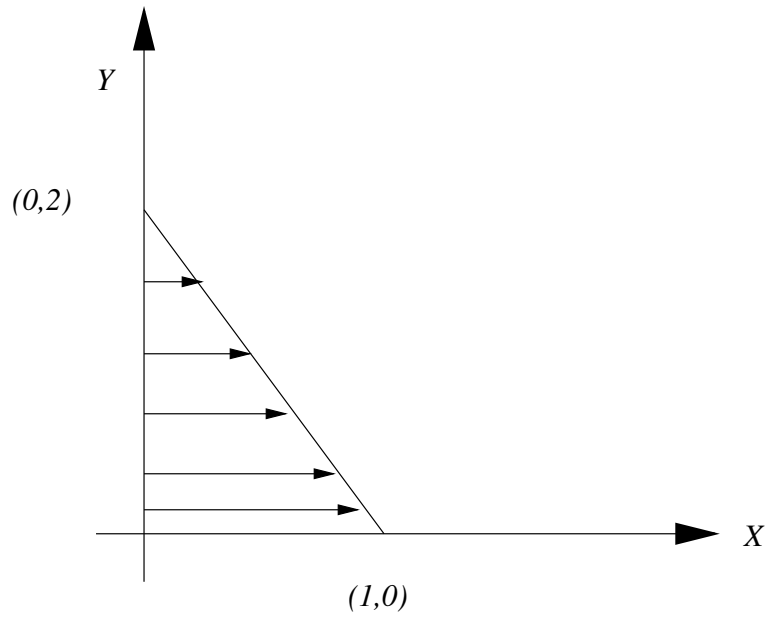
pero de la ecuación del plano tenemos que $z = 3\left(1 - x - \frac{y}{2}\right)$, sustituyendo en

la ecuación anterior tenemos,

$$\begin{aligned}\iint_{R_{xy}} \frac{\vec{f} \cdot \widehat{n}}{|\widehat{n} \cdot \widehat{k}|} dxdy &= 3 \iint_{R_{xy}} \left[x^2 + \frac{xy}{2} + x\left(1 - x - \frac{y}{2}\right)\right] dxdy \\ &= 3 \iint_{R_{xy}} x dxdy,\end{aligned}$$

para resolver la integral exterior, observemos la región en el plano XY , el orden

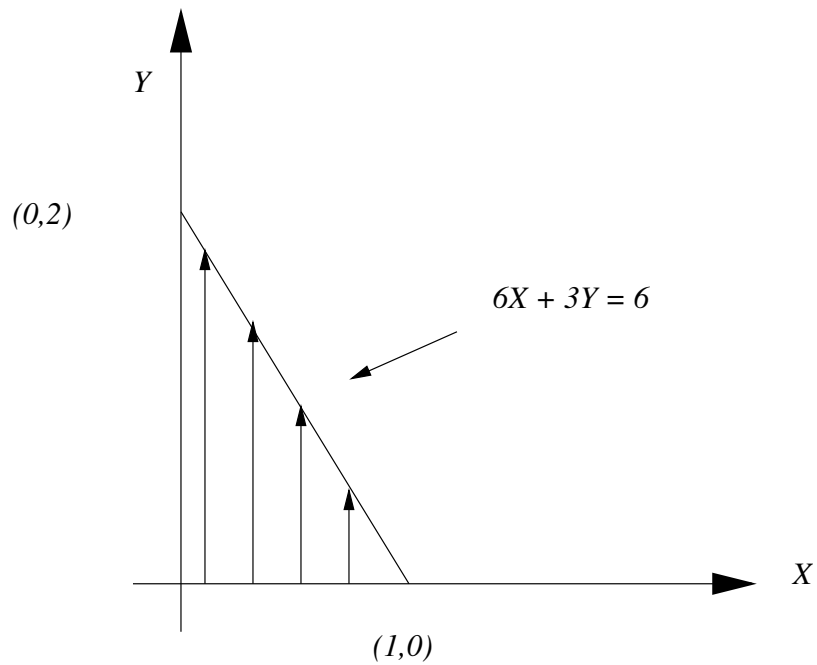
de integración se muestra esquemáticamente en la figura siguiente.



Mantenemos fijo a y e integramos con respecto a x desde $x = 0$ hasta la recta $x = 1 - \frac{1}{2}y$; finalmente integramos y desde $y = 0$ hasta $y = 2$, es decir;

$$\begin{aligned}
 3 \iint_{Rxy} x dx dy &= 3 \int_{y=0}^2 \left(\int_{x=0}^{x=1-\frac{1}{2}y} x dx \right) dy = 3 \int_{y=0}^2 \left[\left(\frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^{(1-\frac{y}{2})} \right] dy \\
 &= \frac{3}{2} \int_{y=0}^2 \left(1 - \frac{y}{2} \right)^2 dy = \left(\frac{-3(1-\frac{y}{2})^3}{3} \right) \Big|_0^2 = +\frac{3}{3} = 1.
 \end{aligned}$$

También como se muestra esquemáticamente en la figura, podemos resolver la integral en el siguiente orden de integración, manteniendo fijo a x e integrando con respecto a y desde $y = 0$ hasta la recta $y = 2(1 - x)$, finalmente integramos con respecto a x desde $x = 0$ hasta $x = 1$, es decir;



$$\begin{aligned}
 3 \iint_{R_{xy}} x dx dy &= \int_{x=0}^1 \left(\int_{y=0}^{y=2(1-x)} x dy \right) dx = 3 \int_{x=0}^1 \left[(xy) \Big|_0^{2(1-x)} \right] dx \\
 &= 3 \int_{x=0}^1 x(1-x) dx = 6 \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = 6 \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right] = 1.
 \end{aligned}$$

Los resultados anteriores muestran que el resultado de una integral doble es independiente del orden de integración.

Problema 17.

Calcular la integral $\iint_S \vec{f} \cdot d\vec{S}$ para $\vec{f} = y\hat{i} + 2x\hat{j} - z\hat{k}$, donde S es la superficie del plano $2x + y + 2z = 6$ situado en el primer octante.

Solución:

Aplicando el gradiente, un vector normal unitario a la superficie S , que en este caso es un plano, está dado por,

$$\hat{n} = \frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|} = \frac{2\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}}{3},$$

de donde:

$$\begin{aligned}\vec{f} \cdot \hat{n} &= \frac{1}{3} [2y + 2x - 2z], \\ \hat{n} \cdot \hat{k} &= \frac{2}{3},\end{aligned}$$

por lo tanto,

$$\iint_{R_{xy}} \frac{\vec{f} \cdot \hat{n}}{|\hat{n} \cdot \hat{k}|} dx dy = \iint_{R_{xy}} \frac{\frac{1}{3} (2x + 2y - 2z)}{\frac{2}{3}} dx dy,$$

pero de la expresión para la superficie tenemos $z = 3 - x - \frac{1}{2}y$, sustituyendo en la integral anterior obtenemos

$$\begin{aligned}\iint_{R_{xy}} \frac{\vec{f} \cdot \hat{n}}{|\hat{n} \cdot \hat{k}|} dx dy &= \iint_{R_{xy}} \left[x + y - (3 - x - \frac{1}{2}y) \right] dx dy \\ &= \iint_{R_{xy}} \left(2x + \frac{3}{2}y - 3 \right) dx dy.\end{aligned}$$

Después de algunos cálculos algebraicos análogos al problema anterior obtenemos,

$$\iint_{R_{xy}} \frac{\vec{f} \cdot \hat{n}}{|\hat{n} \cdot \hat{k}|} dx dy = 18.$$

Problema 18.

Calcular el flujo de campo $\vec{f} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ donde S es un cubo unitario (es decir la superficie limitada por los planos $x = 0, y = 0, z = 0, x = 1, y = 1, z = 1$).

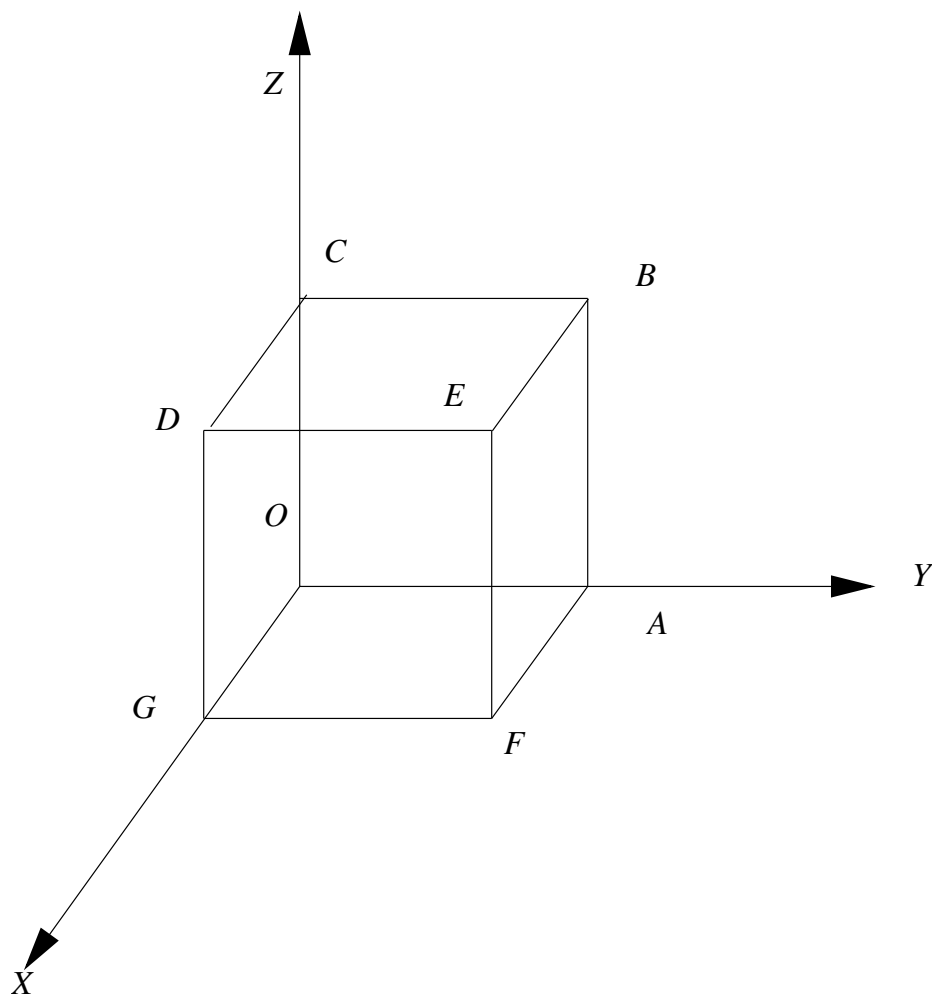
Solución:

Como se muestra en la figura, el flujo a través del cubo tiene 6 contribuciones debidas a las 6 superficies (caras) del cubo unitario, es decir los planos ($x = 0, y = 0, z = 0, x = 1, y = 1, z = 1$), por lo tanto la integral de flujo original está dada por:

$$\iint_S \vec{f} \cdot d\vec{S} = \iint_{S_1} \vec{f} \cdot d\vec{S} + \iint_{S_2} \vec{f} \cdot d\vec{S} + \iint_{S_3} \vec{f} \cdot d\vec{S} + \cdots + \iint_{S_6} \vec{f} \cdot d\vec{S}$$

donde, como se muestra en la figura tenemos

$$\begin{array}{lll} S_1 (DEFG); & x = 1 & d\vec{S} = \hat{n}dS = \hat{i}dydz \\ S_2 (ABCO); & x = 0 & d\vec{S} = \hat{n}dS = -\hat{i}dydz \\ S_3 (ABEF); & y = 1 & d\vec{S} = \hat{n}dS = \hat{j}dxdz \\ S_4 (0GDC'); & y = 0 & d\vec{S} = \hat{n}dS = -\hat{j}dxdz \\ S_5 (BCDE); & z = 1 & d\vec{S} = \hat{n}dS = \hat{k}dxdy \\ S_6 (AFGO); & z = 0 & d\vec{S} = \hat{n}dS = -\hat{k}dxdy. \end{array}$$



Por lo tanto, para la superficie S_1 tenemos,

$$\begin{aligned}
 \iint_{s_1} \vec{f} \cdot d\vec{s} &= \iint_{R_{xy}} (x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}) \cdot \hat{i} dydz \\
 &= \int_{y=0}^1 \int_{z=0}^1 x dydz = \int_{y=0}^1 \int_{z=0}^1 dydz = 1,
 \end{aligned}$$

análogamente para la superficie S_2 tenemos,

$$\begin{aligned}
\iint_{s_2} \vec{f} \cdot d\vec{s} &= \iint_{Rxy} (x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}) \cdot (-\hat{i}dydz) \\
&= - \iint_{Rxy} xdydz = 0.
\end{aligned}$$

Similarmente para las superficies S_3 , S_4 , S_5 y S_6 obtenemos;

$$\begin{aligned}
\iint_{S_3} \vec{f} \cdot d\vec{S} &= \iint_{S_5} \vec{f} \cdot d\vec{S} = 1, \\
\iint_{S_4} \vec{f} \cdot d\vec{S} &= \iint_{S_6} \vec{f} \cdot d\vec{S} = 0,
\end{aligned}$$

por lo tanto el flujo a través del cubo unitario está dado por:

$$\iint_S \vec{f} \cdot d\vec{S} = \iint_{S_1} \vec{f} \cdot d\vec{S} + \iint_{S_2} \vec{f} \cdot d\vec{S} + \iint_{S_3} \vec{f} \cdot d\vec{S} + \cdots + \iint_{S_6} \vec{f} \cdot d\vec{S} = 3.$$

El resultado anterior se puede obtener aplicando el teorema de Gauss, este teorema establece lo siguiente:

$$\iint_s \vec{f} \cdot d\vec{s} = \iiint_V (\nabla \cdot \vec{f}) dV$$

en este caso:

$$\vec{f} = \vec{r},$$

por lo tanto,

$$\iiint_V \nabla \cdot \vec{f} dV = 3 \iiint_V dV = 3,$$

donde $\iiint_V dV$ es el volumen de un cubo unitario.

Problema 19.

Calcule el flujo del campo vectorial $\vec{F} = \hat{i} + xy\hat{j}$ a lo largo de la superficie S dada por las ecuaciones paramétricas:

$$\begin{aligned}x &= u + v, \\y &= u - v, \\z &= u^2,\end{aligned}$$

donde,

$$\begin{aligned}0 &\leq u \leq 1 \\0 &\leq v \leq 1.\end{aligned}$$

Solución:

El flujo del campo vectorial \vec{F} a través de la superficie S (que generalmente se representa por Φ) esta dado por:

$$\Phi = \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S},$$

donde

$$d\vec{S} = \hat{n}dS,$$

y

$$\hat{n} = \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|},$$

es un vector normal unitario en cada punto de la superficie S dada por la ecuación,

$$\vec{r} = \vec{r}(u, v),$$

donde los vectores \vec{r}_u y \vec{r}_v , son vectores tangentes a las líneas coordenadas u y v respectivamente. Asimismo, la magnitud del elemento diferencial de superficie está dada por,

$$dS = |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| du dv$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned} d\vec{S} &= \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|} |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| dudv \\ &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} dudv, \end{aligned}$$

que es el elemento diferencial de área normal a la superficie S . De las ecuaciones

paramétrica para la superficie S , el vector de posición se puede escribir de la forma,

$$\vec{r}(u, v) = (u + v)\hat{i} + (u - v)\hat{j} + u^2\hat{k},$$

calculando el vector normal a la superficie, obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} &= \hat{i} + \hat{j} + 2u\hat{k}, \\ \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} &= \hat{i} - \hat{j}, \end{aligned}$$

de donde obtenemos,

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 1 & 2u \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 2u\hat{i} + 2u\hat{j} - 2\hat{k},$$

por lo tanto, el flujo del campo vectorial \vec{F} a través de la superficie S está dado

por,

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_S [\hat{i} + (u + v)(u - v)\hat{j}] \cdot [2u\hat{i} + 2u\hat{j} - 2\hat{k}] dudv,$$

calculando el producto escalar,

$$\begin{aligned}
\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} &= \int_{v=0}^{v=1} \int_{u=0}^{u=1} (2u + 2u(u^2 - v^2)) \, du \, dv \\
&= \int_{v=0}^1 \int_{u=0}^1 (2u^3 - 2uv^2 + 2u) \, du \, dv \\
&= \int_{v=0}^1 \left[\frac{2}{4}u^4 - u^2v^2 + u^2 \right]_{u=0}^1 \, dv \\
&= \int_{v=0}^1 \left(\frac{1}{2} - v^2 + 1 \right) \, dv \\
&= \int_{v=0}^1 \left(\frac{3}{2} - v^2 \right) \, dv = \left[\frac{3}{2}v - \frac{v^3}{3} \right]_0^1,
\end{aligned}$$

finalmente, obtenemos

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \frac{7}{6}.$$

Problema 20.

Si $\vec{f} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ Calcular $\int_S \vec{f} \cdot d\vec{S}$, donde S es la superficie cilíndrica representada por la ecuación

$$\vec{r} = \cos u \hat{i} + \sin u \hat{j} + v \hat{k}.$$

donde,

$$\begin{aligned} 0 &\leq u \leq 2\pi, \\ 0 &\leq v \leq 1, \end{aligned}$$

y el elemento diferencial está dado por $d\vec{S} = \hat{n}dS$, y \hat{n} es el vector unitario normal exterior a la superficie.

Solución:

Por definición, sabemos que el vector

$$\hat{n} = \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|},$$

es un vector normal unitario en cada punto de la superficie S dada por la ecuación,

$$\vec{r} = \vec{r}(u, v)$$

los vectores \vec{r}_u y \vec{r}_v , son vectores tangentes a las líneas coordenadas u y v respectivamente. Por otro lado, si el elemento diferencial de superficie está dado por

$$d\vec{S} = \hat{n}dS,$$

y su magnitud está dada por,

$$dS = |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| du dv$$

entonces,

$$\begin{aligned} d\vec{S} &= \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|} |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| du dv \\ &= \vec{r}_u \times \vec{r}_v du dv \end{aligned}$$

Para la ecuación de la superficie dada, los vectores tangentes a las líneas coordenada están dados por,

$$\begin{aligned}\vec{r}_u &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} = -\sin u \hat{i} + \cos u \hat{j}, \\ \vec{r}_v &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \hat{k},\end{aligned}$$

de donde,

$$\vec{r}_u \times \vec{r}_v = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -\sin u & \cos u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \cos u \hat{i} + \sin u \hat{j},$$

por otro lado, de las ecuaciones paramétricas de la superficie cilíndrica, el campo vectorial está dado por

$$\vec{f} = (\cos u \hat{i} + \sin u \hat{j} + v \hat{k}),$$

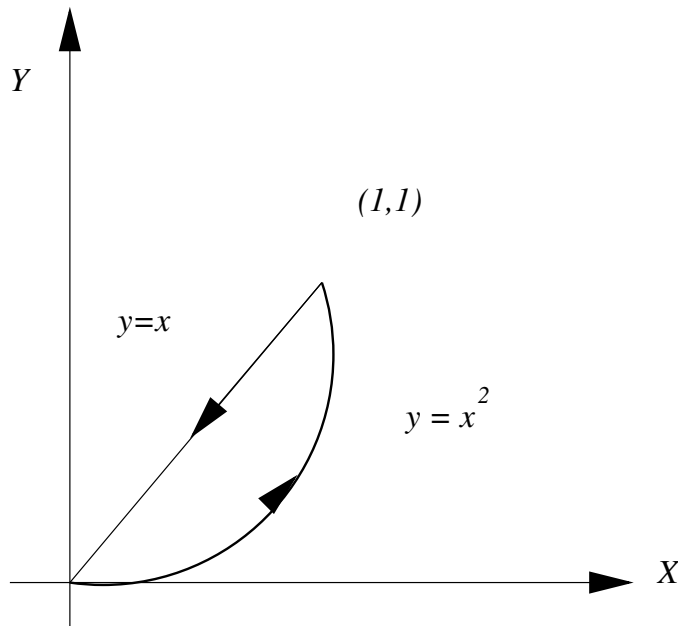
por lo tanto, la integral de flujo resulta

$$\begin{aligned}{}_s \vec{f} \cdot d\vec{S} &= \int_{v=0}^{v=1} \int_{u=0}^{u=2\pi} (\cos u \hat{i} + \sin u \hat{j} + v \hat{k}) \cdot (\cos u \hat{i} + \sin u \hat{j}) \, du dv \\ &= \int_{v=0}^{v=1} \int_{u=0}^{u=2\pi} (\cos^2 u + \sin^2 u) \, du dv \\ &= \int_{v=0}^{v=1} \int_{u=0}^{u=2\pi} du dv \\ &= \int_{v=0}^{v=1} dv \int_{u=0}^{u=2\pi} du \\ &= 2\pi.\end{aligned}$$

Problema 21.

Calcular $\oint_C \vec{f} \cdot d\vec{r}$ donde C es la trayectoria cerrada que se muestra en la figura y el campo vectorial está dado por: $\vec{f} = (x - y)\hat{i} + (x + y)\hat{j}$

- a) Calculando la integral de línea directamente y
b) Aplicando el Teorema de Green en el plano



Solución:

- a) De la figura, la trayectoria curva C se divide en dos trayectorias C_1 ($y = x^2$) y C_2 ($y = x$), por lo tanto, la integral de línea se expresa de la forma:

$$\oint_C \vec{f} \cdot d\vec{r} = \int_{C_1} \vec{f} \cdot d\vec{r} + \int_{C_2} \vec{f} \cdot d\vec{r}$$

Para la trayectoria C_1 las ecuaciones paramétricas están dadas por:

$$\begin{aligned} x &= x \\ y &= x^2, \end{aligned}$$

de donde, el elemento diferencial de línea está dado por:

$$d\vec{r} = dx\hat{i} + 2xdx\hat{j},$$

por lo tanto, la integral de línea para la trayectoria C_1 está dada por:

$$\begin{aligned}
\int_{C_1} \vec{f} \cdot d\vec{r} &= \int_{x=0}^1 (x-x^2)dx + (x+x^2)2xdx \\
&= \int_0^1 (x+x^2+2x^3)dx = \left[\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{2} \right]_0^1 \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{3}{3} = \frac{4}{3}.
\end{aligned}$$

Asimismo para la trayectoria C_2 las ecuaciones paramétricas están dadas por:

$$\begin{aligned}
x &= x \\
y &= x,
\end{aligned}$$

de donde, el elemento diferencial de línea está dado por:

$$d\vec{r} = dx\hat{i} + dx\hat{j},$$

por lo tanto la integral de línea para la trayectoria C_2 está dada por:

$$\begin{aligned}
\int_{C_2} \vec{f} \cdot d\vec{r} &= \int_1^0 (x-x)dx + 2xdx \\
&= [x^2]_1^0 = -1 = -\frac{3}{3}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto la integral de línea a lo largo de la trayectoria C que se muestra en la figura está dado por:

$$\oint_C \vec{f} \cdot d\vec{r} = \int_{C_1} \vec{f} \cdot d\vec{r} + \int_{C_2} \vec{f} \cdot d\vec{r} = \frac{4}{3} - \frac{3}{3} = \frac{1}{3}$$

b) En este caso

$$\begin{aligned}
M(x,y) &= x-y \\
N(x,y) &= x+y,
\end{aligned}$$

de donde se tiene,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial N}{\partial x} &= 1 \\
\frac{\partial M}{\partial y} &= -1,
\end{aligned}$$

aplicando el teorema de Green en el plano, obtenemos

$$\begin{aligned}\oint_C (Mdx + Ndy) &= \iint_{R_{xy}} \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dxdy \\ &= \iint_{R_{xy}} (1 - (-1)) dxdy = 2 \iint_{R_{xy}} dxdy,\end{aligned}$$

para evaluar la integral doble hacemos uso de la figura, integrando primeramente desde la recta $y = x$ a la parábola $y = x^2$ para después integrar la variable y desde $y = 0$ hasta $y = 1$, es decir;

$$\begin{aligned}2 \iint_{R_{xy}} dxdy &= 2 \int_{y=0}^1 \int_{x=y}^{x=\sqrt{y}} dxdy = 2 \int_{y=0}^1 ([x]_y^{\sqrt{y}}) dy \\ &= 2 \int_{y=0}^1 (\sqrt{y} - y) dy = \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

La integral doble también se puede resolver integrando primeramente en la variable y , posteriormente la variable x de la siguiente forma,

$$\begin{aligned}2 \iint_{R_{xy}} dydx &= \int_{x=0}^1 \int_{y=x^2}^{y=x} dydx = 2 \int_{x=0}^1 ([y]_{x^2}^x) dx \\ &= 2 \int_0^1 (x - x^2) dx = 2 \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

Problema 22:

Verificar el Teorema de Green en el plano para el campo vectorial,

$$\vec{F} = (3x^2 + 2y)\hat{i} - (x + 3\cos y)\hat{j}$$

donde C es la trayectoria que se muestra en la siguiente figura.

ftbpF206.4375pt130.125pt0ptFigure

Solución:

Debemos verificar que,

$$\int_C Mdx + Ndy = \iint_{R_{xy}} \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dxdy,$$

en este caso;

$$(*) \quad \begin{aligned} M &= (3x^2 + 2y), \\ N &= -(x + 3\cos y). \end{aligned}$$

Primero calculemos la integral de línea a lo largo de las cuatro trayectorias rectas que se muestran en la figura que es un paralelogramo, para después sumar todos los resultados, es decir,

$$\int_C Mdx + Ndy = \int_{C_1} + \int_{C_2} + \int_{C_3} + \int_{C_4}.$$

Para C_1 :

De la figura, la recta que va del punto $(0,0)$ al punto $(2,0)$, está dada por las ecuaciones paramétricas

$$\begin{aligned} x &= x, \\ y &= 0, \end{aligned}$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned} \int_{(0,0)}^{(2,0)} Mdx + Ndy &= \int_{x=0}^{x=2} (3x^2 + 2y) dx \\ &= [x^3 + 2y]_0^2 = 8. \end{aligned}$$

Para C_2 :

De la figura, la recta que va del punto $(2,0)$ al punto $(3,1)$, está dada por la ecuación,

$$x = y + 2,$$

si escogemos como parámetro a la variable y , obtenemos

$$\begin{aligned}
 \int_{(2,0)}^{(3,1)} Mdx + Ndy &= \int_{y=0}^{y=1} \left(3(y+2)^2 + 2y - (y+2) - 3\cos y \right) dy \\
 &= \int_{y=0}^{y=1} (3y^2 + 12y + 12 + 2y + y - 2 - 3\cos y) dy \\
 &= \int_{y=0}^{y=1} (3y^2 + 12y + 10 - 3\cos y) dy \\
 &= \left[y^3 + \frac{13}{2}y^2 + 10y - 3\sin(1) \right]_0^1 \\
 &= 1 + \frac{13}{2} + 10 - 3\sin(1) \\
 &= \frac{35}{2} - 3\sin(1).
 \end{aligned}$$

Para C_3 :

De la figura, la recta que va del punto $(3, 1)$ al punto $(1, 1)$, está dada por las ecuaciones paramétricas,

$$\begin{aligned}
 x &= x, \\
 y &= y,
 \end{aligned}$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned}
 \int_{(3,1)}^{(1,1)} Mdx + Ndy &= \int_{x=1}^{x=3} (3x^2 + 2y) dx \\
 &= -[x^3 + 2y]_1^3 = -30.
 \end{aligned}$$

Para C_4 :

De la figura, la recta que va del punto $(1, 1)$ al punto $(0, 0)$, está dada por la ecuación,

$$x = y,$$

si escogemos como parámetro a la variable y , obtenemos

$$\begin{aligned}
 \int_{(1,1)}^{(0,0)} Mdx + Ndy &= \int_{y=0}^{y=1} (3y^2 + 2y)dy - (y + 3\cos y) dy \\
 &= -\left[y^3 + y^2 - \frac{y^2}{2} - 3\sin(y) \right]_0^1 \\
 &= -\frac{3}{2} + 3\sin(1),
 \end{aligned}$$

sumando los resultados obtenidos para las cuatro trayectorias rectas, obtenemos

$$\int_C Mdx + Ndy = 8 + \frac{35}{2} - 3 \sin(1) - 30 - \frac{3}{2} + 3 \sin(1),$$

de donde,

$$(1) \quad \int_C Mdx + Ndy = -6.$$

Ahora para calcular la integral doble sobre la región que encierra el paralelogramo, tenemos de las ecuaciones (*) que,

$$\frac{\partial N}{\partial x} = -1,$$

y

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2,$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned} \int_{R_{xy}} \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx dy &= \int_{R_{xy}} (-1 - 2) dx dy = -3 \int_{y=0}^{y=1} \left[x \right]_{x=y}^{x=y+2} dy \\ &= -3 \int_{y=0}^{y=1} [x]_{x=y}^{x=y+2} dy = -3 \int_{y=0}^{y=1} 2 dy, \end{aligned}$$

finalmente,

$$(2) \quad \int_{R_{xy}} \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx dy = -6.$$

Este resultado se pudo haber obtenido por simple observación, puesto que $\int_{R_{xy}} dx dy$ es igual al área del paralelogramo que tiene base igual a dos y altura uno.

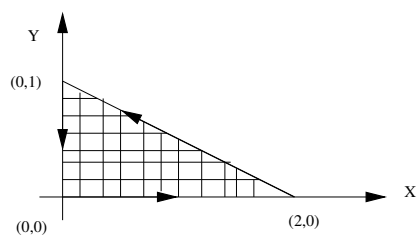
Así, de los resultados (1) y (2), se comprueba el Teorema de Green en el plano.

Problema 23.

Aplique el teorema de Green en el plano para calcular la integral,

$$\int_C (x + y)dx + x^2 dy,$$

donde C es el triángulo con vértices $(0,0)$, $(2,0)$ y $(0,1)$, que se muestra en la siguiente figura.



Solución:

Por definición, el teorema de Green en el plano establece que

$$\int_C Mdx + Ndy = \iint_{R_{xy}} \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx dy,$$

donde la trayectoria curva C encierra la región que R_{xy} que está en el plano XY .

En este caso,

$$\begin{aligned} M &= x + y, \\ N &= x^2, \end{aligned}$$

de donde se obtiene,

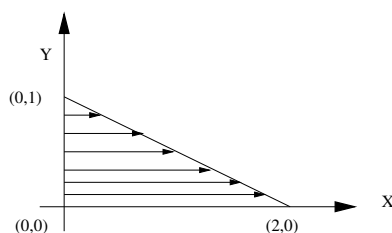
$$\begin{aligned} \frac{\partial N}{\partial x} &= 2x, \\ \frac{\partial M}{\partial y} &= 1, \end{aligned}$$

por lo tanto, aplicando el teorema de Green en el plano, obtenemos

$$\int_C (x+y)dx + x^2 dy = \iint_{R_{xy}} (2x-1) dx dy,$$

para resolver la integral interior, mantenemos fijo a y e integramos con respecto

a x , desde la recta $x=0$, hasta la recta $x=2(1-y)$, como se muestra en la siguiente figura, y finalmente integramos y desde $y=0$ hasta $y=2$.



de esta forma, obtenemos

$$\int_C (x+y)dx + x^2 dy = \int_{y=0}^1 \int_{x=0}^{x=2(1-y)} (2x-1) dx dy,$$

calculando las integrales obtenemos

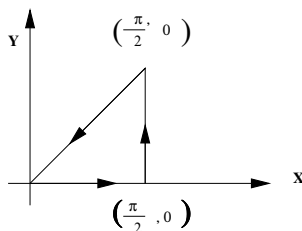
$$\begin{aligned} \int_C (x+y)dx + x^2 dy &= \int_{y=0}^1 \left([x^2 - x]_{x=0}^{x=2(1-y)} \right) dy \\ &= \int_{y=0}^1 [4(1-y)^2 - 2(1-y)] dy \\ &= 4 \int_{y=0}^1 (1-y)^2 dy - 2 \int_{y=0}^1 (1-y) dy \\ &= \left[-\frac{4}{3} (1-y)^3 + (1-y)^2 \right]_{y=0}^1 \\ &= -\frac{4}{3} (1-1)^3 + (1-1)^2 - \left[-\frac{4}{3} (1-0)^3 + (1-0)^2 \right] \\ &= -\left[-\frac{4}{3} + \frac{6}{3} \right] \\ &= -\frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Problema 24.

Aplique el teorema de Green en el plano para calcular

$$\oint_C (y - \sin x) dx + \cos x dy,$$

donde C es el triángulo que se muestra en la siguiente figura.



Solución:

En forma análoga al problema anterior, en este caso

$$\begin{aligned} M(x, y) &= y - \sin x \\ N(x, y) &= \cos x, \end{aligned}$$

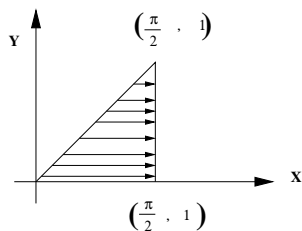
de donde se tiene,

$$\begin{aligned} \frac{\partial N}{\partial x} &= -\sin x \\ \frac{\partial M}{\partial y} &= 1, \end{aligned}$$

aplicando el teorema de Green en el plano, obtenemos

$$\oint_C (y - \sin x) dx + \cos x dy = \iint_{R_{xy}} (-\sin x - 1) dx dy.$$

Para evaluar la integral doble, integrando primeramente la variable y , desde la recta $y = 0$ a la recta $y = \frac{2}{\pi}x$, para después integrar la variable x , desde $x = 0$ hasta $x = \frac{\pi}{2}$, como se esquematiza en la siguiente figura.



Por lo tanto la integral doble resulta,

$$\begin{aligned}
\iint_{R_{xy}} (-\sin x - 1) dy dx &= - \int_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}} \left(\int_{y=0}^{y=\frac{\pi}{2}x} (\sin x + 1) dy \right) dx \\
&= - \int_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}} \left[(\sin x)y + y \right]_{y=0}^{\frac{\pi}{2}x} dx \\
&= - \int_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}} \frac{\pi}{2} x [\sin x + 1] dx = -\frac{\pi}{2} \left[(-x \cos x)_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}} + \int_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}} \cos x dx + \left(\frac{x^2}{2} \right)_{y=0}^{\frac{\pi}{2}x} \right] \\
&= -\frac{2}{\pi} \left[-x \cos x + \sin x + \frac{x^2}{2} \right]_{y=0}^{\frac{\pi}{2}x} = -\frac{2}{\pi} \left[-\frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} + \sin \frac{\pi}{2} + \frac{(\frac{\pi}{2})^2}{2} \right] \\
&= -\frac{2}{\pi} \left[1 + \frac{\pi^2}{8} \right] = -\frac{2}{\pi} \left(\frac{\pi^2 + 8}{4\pi} \right),
\end{aligned}$$

finalmente, obtenemos

$$\iint_{R_{xy}} (-\sin x - 1) dy dx = - \left(\frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi} \right).$$

Problema 25.

Calcular la integral

$$\iint_S \vec{F} \cdot \hat{n} dS,$$

donde \vec{F} está dado por:

$$\vec{F}(x, y, z) = [2x + \cos(yz)]\hat{i} - [\sin(xz) + 5y]\hat{j} + [\arcsin(x^2y)]\hat{k},$$

y S es la parte superior del plano XY de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

Solución:

Obsérvese que sí se quiere calcular directamente la integral de superficie resulta ser una integral muy laboriosa, sin embargo si aplicamos el teorema de la Divergencia de Gauss el problema es relativamente simple, puesto que $\nabla \cdot \vec{F} = 7$, así aplicando el teorema de la divergencia de Gauss obtenemos,

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint_V (\nabla \cdot \vec{F}) dV = 7 \iiint_V dV,$$

donde $\iiint_V dV$ es el volumen de la esfera, pero como se pide solamente la parte

$z > 0$, entonces

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = 7 \left(\frac{2}{3} \pi a^3 \right) = \frac{14}{3} \pi a^3.$$

Problema 26.

Verificar el teorema del rotacional de Stokes para $\vec{F} = (x + 2y)\hat{i} + 3z\hat{j} + yz\hat{k}$ y S la superficie de la mitad superior de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

Solución:

El teorema del rotacional de Stokes matemáticamente se expresa de la forma,

$$\oint_C \vec{\nabla} \times \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r},$$

es decir, la integral de superficie de la componente normal del rotacional de un campo vectorial, tomada sobre una superficie cerrada, es igual a la integral de línea de la componente tangencial del campo vectorial, tomada sobre la curva cerrada que limita o rodea a la superficie. Primero calcularemos la integral de línea.

Si proyectamos a la esfera en el plano XY , tenemos una circunferencia de radio a con centro en el origen cuyas ecuaciones paramétricas están dadas por,

$$\begin{aligned}x &= a \cos \theta, \\y &= a \sin \theta, \\z &= 0,\end{aligned}$$

donde $0 < \theta < 2\pi$. En términos de estas ecuaciones paramétricas, el campo vectorial está dado por

$$\vec{F} = (a \cos \theta + 2a \sin \theta)\hat{i} + 0\hat{j} + 0\hat{k}.$$

Asimismo, el vector de posición \vec{r} , está dado por,

$$\vec{r} = a \cos \theta \hat{i} + a \sin \theta \hat{j},$$

de donde, el elemento diferencial de línea está dado por,

$$d\vec{r} = -a \sin \theta d\theta \hat{i} + a \cos \theta d\theta \hat{j}.$$

Calculando la integral de línea en sentido positivo (como lo establece el teorema) tenemos,

$$\begin{aligned}
\int \vec{F} \cdot d\vec{r} &= - \int_{\theta=0}^{2\pi} \left[(a \cos \theta + 2a \sin \theta) \hat{i} \right] \cdot \left[-a \sin \theta \hat{i} + a \cos \theta \hat{j} \right] d\theta \\
&= -a^2 \int_{\theta=0}^{2\pi} \cos \theta \sin \theta d\theta - 2a \int_{\theta=0}^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta \\
&= -a^2 \left[\frac{\sin^2 \theta}{2} \right]_{\theta=0}^{2\pi} - a^2 \left[\theta - \frac{1}{2} \sin(2\theta) \right]_{\theta=0}^{2\pi} \\
&= -a^2 \left[\frac{\sin^2(2\pi)}{2} \right] - a^2 \left[2\pi - \frac{1}{2} \sin(2(2\pi)) \right] \\
&= -a^2 \left[2\pi - \frac{1}{2} \sin 2(2\pi) \right] = -2a^2 \pi.
\end{aligned}$$

Ahora, calculemos la integral de superficie, para hacer esto calculamos primeramente el $\nabla \times \vec{F}$,

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x+2y & 3z & yz \end{vmatrix} = (z-3)\hat{i} + 2\hat{k}$$

Por otro lado, sabemos que la transformación de coordenadas esféricas y rectangulares está dada por.

$$\begin{aligned}
x &= a \sin \theta \cos \phi, \\
y &= a \sin \theta \sin \phi, \\
z &= a \cos \theta,
\end{aligned}$$

donde $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ y $0 \leq \phi \leq 2\pi$. Por lo tanto, la ecuación de la superficie S , en forma paramétrica está dada por,

$$\vec{r}(\theta, \phi) = a \sin \theta \cos \phi \hat{i} + a \sin \theta \sin \phi \hat{j} + a \cos \theta \hat{k}.$$

de donde, el elemento diferencial de superficie está dado por,

$$d\vec{S} = (\vec{r}_\theta \times \vec{r}_\phi) d\theta d\phi = \left(a^2 \sin^2 \theta \cos \phi \hat{i} + a^2 \sin^2 \theta \sin \phi \hat{j} + a^2 \sin \theta \cos \theta \hat{k} \right) d\theta d\phi,$$

de esta forma, la integral de superficie de la componente normal del campo \vec{F} ,

está dada por,

$$\begin{aligned}
{}_S \nabla x \vec{F} \cdot d\vec{S} &= {}_S \left[(z-3)\hat{i} + 2\hat{k} \right] \cdot \left[a^2 \sin^2 \theta \cos \phi \hat{i} + a^2 \sin^2 \theta \sin \phi \hat{j} + a^2 \sin \theta \cos \theta \hat{k} \right] d\theta d\phi \\
&= \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} a^2 [(\cos \theta - 3) \sin^2 \theta \cos \phi + 2 \sin \theta \cos \theta] d\theta d\phi \\
&= \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} a^2 (\cos \theta - 3) \sin^2 \theta \cos \phi d\theta d\phi + 2a^2 \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \sin \theta \cos \theta d\theta d\phi,
\end{aligned}$$

como podemos observar la primera integral es igual a cero, debido a que $\int_{\theta=0}^{\pi} \cos \phi d\phi =$

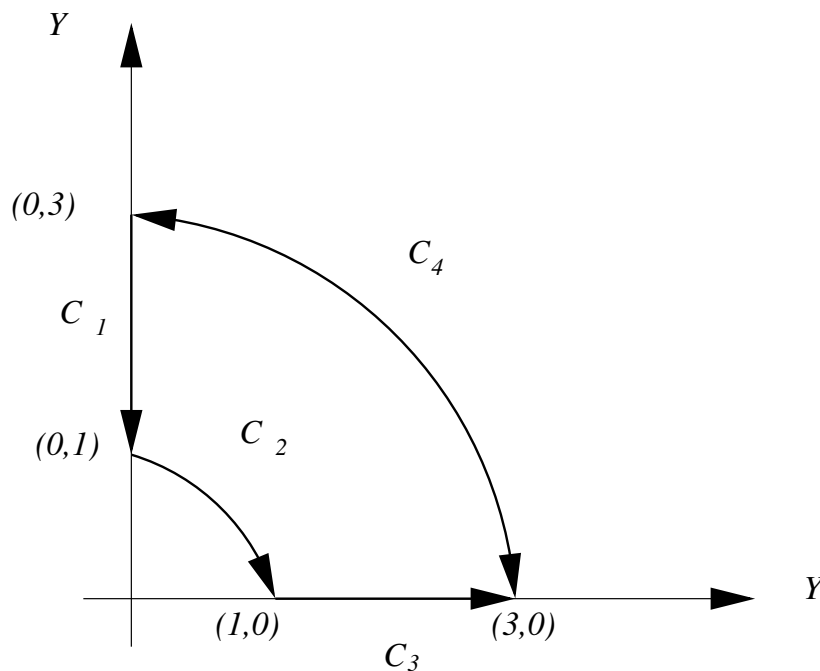
0, por lo tanto,

$$\begin{aligned}
{}_S \nabla x \vec{F} \cdot d\vec{S} &= 2a^2 \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \sin \theta \cos \theta d\theta d\phi = 2a^2 \left\{ \int_{\phi=0}^{2\pi} d\phi \right\} \left\{ \int_{\theta=0}^{\pi} \sin \theta \cos \theta d\theta \right\} \\
&= 2a^2 \left[2\pi \frac{(\sin^2 \theta)}{2} \right]_{\theta=0}^{\pi} \\
&= 2\pi a^2 \left(\frac{1}{2} \right) = 2\pi a^2.
\end{aligned}$$

Problema 27.

Comprobar el Teorema de Green en el plano para la integral $\int_C (2x - y^3) dx - xydy$ siendo C el contorno de la región en el primer cuadrante, limitada por las circunferencias $x^2 + y^2 = 1$ y $x^2 + y^2 = 9$, como se muestra en la siguiente figura.

Solución:



Por definición, el teorema de Green en el plano establece que,

$$\int_C Mdx + Ndy = \iint_{R_{xy}} \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dxdy,$$

donde la trayectoria curva C encierra la región que R_{xy} que está en el plano XY . Como se observa en la figura, para calcular la integral de línea debemos calcular cuatro integrales a lo largo de las trayectorias C_1 , C_2 , C_3 y C_4 , para esto primero necesitamos escribir en forma paramétrica las ecuaciones de cada trayectoria, de esta forma;

para C_1 :

$$\begin{aligned} x &= 0; \\ d\vec{r} &= -dy\hat{j}; \\ 3 &\leq y \leq 1, \end{aligned}$$

para C_2 :

$$\begin{aligned}x &= \cos \theta; \\y &= \sin \theta; \\\pi/2 &\leq \theta \leq 0; \\d\vec{r} &= -\sin \theta d\theta \hat{i} + \cos \theta d\theta \hat{j};\end{aligned}$$

para C_3 :

$$\begin{aligned}y &= 0; \\d\vec{r} &= dx \hat{i}; \\1 &\leq x \leq 3;\end{aligned}$$

para C_4 :

$$\begin{aligned}x &= 3 \cos \theta; \\y &= 3 \sin \theta; \\0 &\leq \theta \leq \pi/2; \\d\vec{r} &= -3 \sin \theta d\theta \hat{i} + 3 \cos \theta d\theta \hat{j};\end{aligned}$$

de esta forma, la integral de línea está dada por,

$$\begin{aligned}\int \vec{f} \cdot d\vec{r} &= \int_{C_1} (-y^3 \hat{i} - 0 \hat{j}) \cdot (dy \hat{j}) \\&+ \int_{C_2} ((2 \cos \theta - \sin^3 \theta) \hat{i} - \cos \theta \sin \theta \hat{j}) \cdot (-\sin \theta d\theta \hat{i} + \cos \theta d\theta \hat{j}) \\&+ \int_{C_3} (2x \hat{i} - 0 \hat{j}) \cdot (dx \hat{i}) \\&+ \int_{C_4} ((6 \cos \theta - 27 \sin^3 \theta) \hat{i} - 9 \sin \theta \cos \theta \hat{j}) \cdot (-3 \sin \theta d\theta \hat{i} + 3 \cos \theta d\theta \hat{j}) \\&= \int_{\theta=0}^{\pi/2} (-2 \cos \theta \sin \theta d\theta + \sin^4 \theta d\theta - \cos^2 \theta \sin \theta d\theta) \\&+ \int_{x=1}^3 2x dx \\&+ \int_{\theta=0}^{\pi/2} (-18 \cos \theta \sin \theta d\theta + 81 \sin^4 \theta d\theta - 27 \cos^2 \theta \sin \theta d\theta) \\&= \int_{\theta=0}^{\pi/2} (-16 \cos \theta \sin \theta d\theta) + \int_{\theta=0}^{\pi/2} 80 \sin^4 \theta d\theta - \int_{\theta=0}^{\pi/2} 26 \cos^2 \theta \sin \theta d\theta + [x^2]_{x=1}^{x=3},\end{aligned}$$

para resolver las integrales de senos y cosenos, hacemos el siguiente cambio de variable

$$\begin{aligned}
u &= \cos \theta, \\
du &= -\sin \theta d\theta, \\
d\theta &= -\frac{du}{\sin \theta},
\end{aligned}$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\int \vec{f} \cdot d\vec{r} &= 16 \int_{\theta=0}^{\pi/2} u du + 26 \int_{\theta=0}^{\pi/2} u^2 du + 40 \int_{\theta=0}^{\pi/2} \sin^2 \theta (1 \cos 2\theta) d\theta + 8 \\
&= \frac{16u^2}{2} \int_{\theta=0}^{\pi/2} + \frac{26u^3}{3} \int_{\theta=0}^{\pi/2} + 40 \int_{\theta=0}^{\pi/2} \sin^2 \theta d\theta - 40 \int_{\theta=0}^{\pi/2} \sin^2 \theta \cos 2\theta d\theta + 8 \\
&= [8 \cos^2 \theta]_0^{\pi/2} + \left[\frac{26}{3} \cos^3 \theta \right]_0^{\pi/2} + 20 \int_{\theta=0}^{\pi/2} (1 - \cos 2\theta) d\theta - 20 \int_{\theta=0}^{\pi/2} (1 - \cos 2\theta) \cos 2\theta d\theta + 8 \\
&= -8 - \frac{26}{3} + [20\theta]_0^{\pi/2} - [10 \sin 2\theta]_0^{\pi/2} - 20 \int_{\theta=0}^{\pi/2} \cos 2\theta d\theta + 20 \int_{\theta=0}^{\pi/2} \cos^2 2\theta d\theta + 8 \\
&= -8 - \frac{26}{3} + 10\pi - [10 \sin 2\theta]_0^{\pi/2} + 10 \int_{\theta=0}^{\pi/2} (1 + \cos 4\theta) d\theta + 8 \\
&= -\frac{26}{3} + 10\pi + [10\theta]_0^{\pi/2} + \left[\frac{10}{4} \sin 4\theta \right]_0^{\pi/2} = -\frac{26}{3} + 10\pi + 5\pi \\
&= -\frac{26}{3} + 15\pi.
\end{aligned}$$

Ahora debemos calcular la integral doble sobre la región del plano XY que encierra el contorno C , en este caso tenemos

$$\begin{aligned}
M &= 2x - y^3, \\
N &= -xy,
\end{aligned}$$

por lo tanto,

$$\int (2x - y^3) dx - xy dy =_{R_{xy}} \left[\frac{\partial(-xy)}{\partial x} - \frac{\partial(2x - y^3)}{\partial y} \right] dxdy =_{R_{xy}} (-y + 3y^2) dxdy$$

para resolver la integral anterior, es más conveniente usar coordenadas polares,

donde el elemento diferencial de área está dado por,

$$dA = dxdy = r dr d\theta,$$

donde

$$y = r \sin \theta.$$

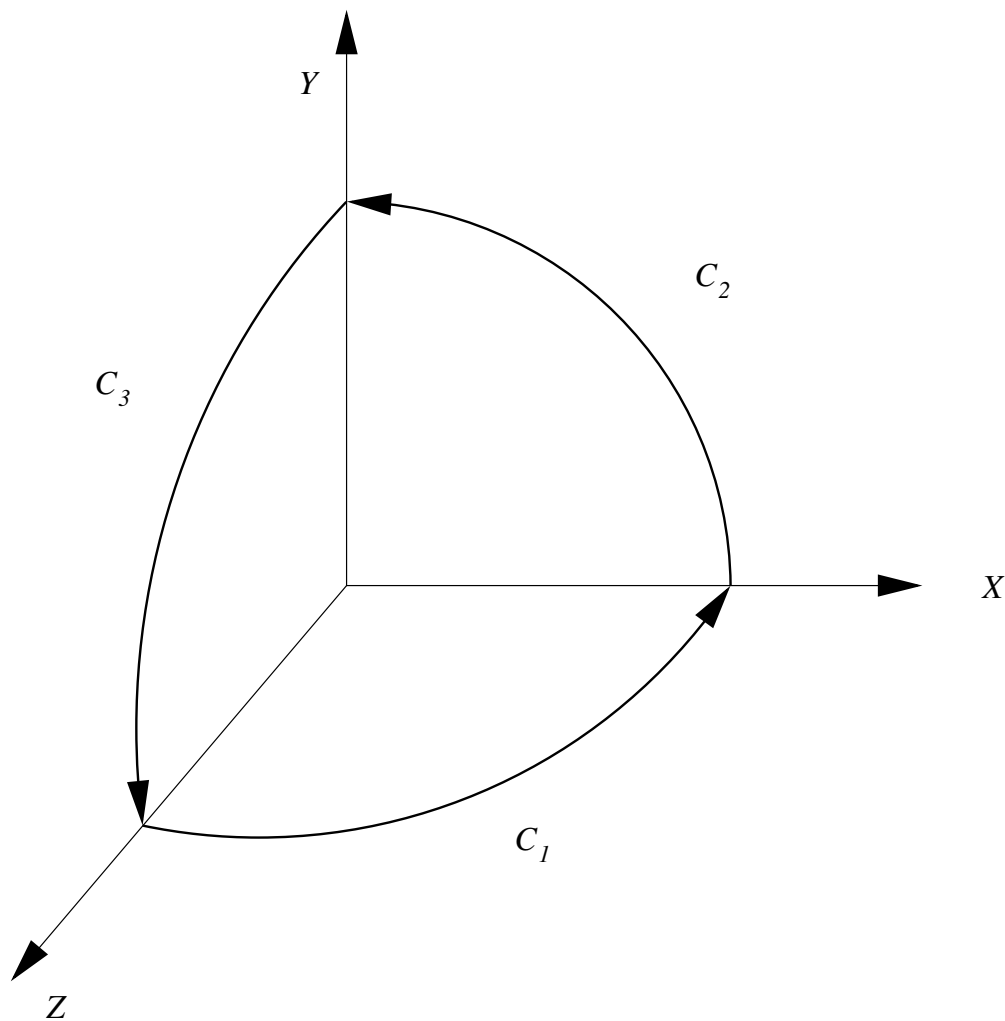
de esta forma, la integral resulta

$$\begin{aligned}
 R_{xy}(-y + 3y^2) dx dy &= \int_{\theta=0}^{\pi/2} \int_{r=1}^{r=3} (-r \sin \theta + 3r^2 \sin^2 \theta) r dr d\theta \\
 &= \int_{\theta=0}^{\pi/2} \int_{r=1}^{r=3} [-r^2 \sin \theta + 3r^3 \sin^2 \theta] d\theta dr \\
 &= - \int_{r=1}^{r=3} r^2 \int_{\theta=0}^{\pi/2} \sin \theta d\theta + 3 \int_{r=1}^{r=3} r^3 dr \int_{\theta=0}^{\pi/2} \sin^2 \theta d\theta \\
 &= - \left[\frac{r^3}{3} \right]_1^3 (-\cos \theta)_{\theta=0}^{\pi/2} + 3 \left[\frac{r^4}{4} \right]_1^3 \left(\frac{1}{2} \int_{\theta=0}^{\pi/2} (1 - \cos 2\theta) d\theta \right) \\
 &= - \left(\frac{27}{3} - \frac{1}{3} \right) + 3 \left[\frac{3^4}{4} - \frac{1}{4} \right] \frac{1}{2} \left[(\theta)_{\theta=0}^{\pi/2} - \left(\frac{1}{2} \sin 2\theta \right)_{\theta=0}^{\pi/2} \right] \\
 &= -\frac{26}{3} + (3)(20) \left(\frac{1}{2} \right) \left(\frac{\pi}{2} \right) \\
 &= -\frac{26}{3} + 15\pi.
 \end{aligned}$$

Por lo tanto se comprueba el teorema de Green.

Problema 28.

La esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ intersecta a los ejes positivos X , Y y Z en los puntos A , B y C respectivamente. La curva cerrada C consiste de tres arcos circulares AB , BC y CA , como se muestra en la figura.



Si el campo vectorial está dado por,

$$\vec{F} = (y + z)\hat{i} + (z + x)\hat{j} + (x + z)\hat{k},$$

calcular

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Solución:

Como se observa en la figura, para calcular la integral de línea debemos calcular tres integrales a lo largo de las trayectorias C_1 , C_2 , y C_3 , para esto primero necesitamos escribir en forma paramétrica las ecuaciones de cada trayectoria, de esta forma;

para la curva C_1 :

$$\begin{aligned}x &= a \cos \theta, \\y &= a \sin \theta, \\z &= 0, \\0 &\leq \theta \leq 2\pi,\end{aligned}$$

de donde, el elemento diferencial de línea está dada por,

$$d\vec{r}_1 = -a \sin \theta d\theta \hat{i} + a \cos \theta d\theta \hat{j}.$$

para la curva C_2 :

$$\begin{aligned}y &= a \cos \theta, \\z &= a \sin \theta, \\x &= 0, \\0 &\leq \theta \leq 2\pi,\end{aligned}$$

de donde, el elemento diferencial de línea está dada por,

$$d\vec{r}_2 = -a \sin \theta d\theta \hat{j} + a \cos \theta d\theta \hat{k},$$

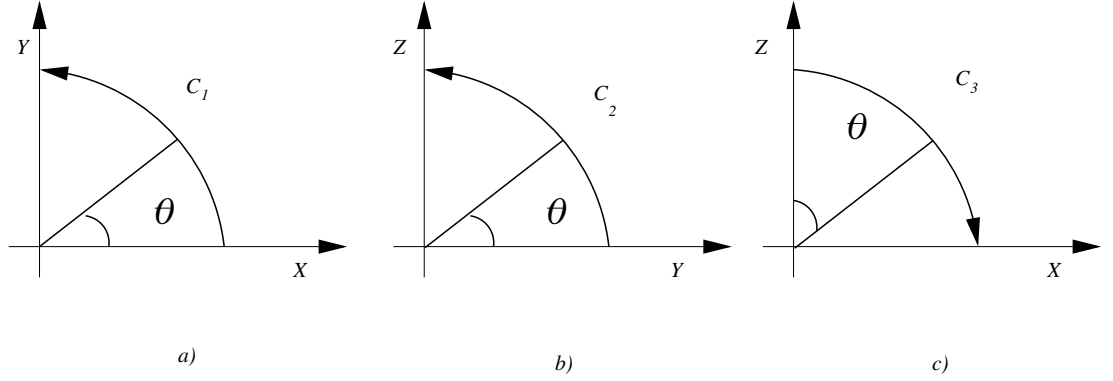
para la curva C_3 :

$$\begin{aligned}z &= a \cos \theta, \\x &= a \sin \theta, \\y &= 0, \\0 &\leq \theta \leq 2\pi,\end{aligned}$$

de donde, el elemento diferencial de línea está dada por,

$$d\vec{r}_3 = a \cos \theta d\theta \hat{i} - a \sin \theta d\theta \hat{k},$$

las parametrizaciones anteriores se muestran en las figuras a), b) y c) respectivamente.



Por lo tanto, la integral de línea estará dada por:

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r}_1 + \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}_2 + \int_{C_3} \vec{F} \cdot d\vec{r}_3$$

es decir,

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{(a,0,0)}^{(0,a,0)} \vec{F} \cdot d\vec{r}_1 + \int_{(0,a,0)}^{(0,0,a)} \vec{F} \cdot d\vec{r}_2 + \int_{(0,0,a)}^{(a,0,0)} \vec{F} \cdot d\vec{r}_3$$

sustituyendo la parametrización de cada curva obtenemos,

$$\begin{aligned} \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} (a \sin \theta, a \cos \theta, a \cos \theta) \cdot (-a \sin \theta d\theta, a \cos \theta d\theta, 0) \\ &+ \int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} (a \cos \theta + a \sin \theta, a \sin \theta, a \sin \theta) \cdot (0, -a \sin \theta d\theta, a \cos \theta d\theta) \\ &+ \int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} (a \cos \theta, a \cos \theta + a \sin \theta, a \cos \theta + a \sin \theta) \cdot (a \cos \theta d\theta, 0, -a \sin \theta d\theta), \end{aligned}$$

calculando los productos escalares y haciendo un poco de álgebra obtenemos

$$\begin{aligned} \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} a^2 [\cos^2 \theta - \sin^2 \theta + \sin \theta \cos \theta - \sin^2 \theta + \cos^2 \theta - \sin^2 \theta - \sin \theta \cos \theta] d\theta \\ &= a^2 \int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} [2 \cos^2 \theta - 3 \sin^2 \theta] d\theta \end{aligned}$$

aplicando las identidades trigonométricas del seno cuadrado y coseno cuadrado, obtenemos

$$\begin{aligned}
 \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= a^2 \int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} \left[2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\theta \right) - 3 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\theta \right) \right] d\theta \\
 &= a^2 \int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} \left[1 + \cos 2\theta - \frac{3}{2} + \frac{3}{2} \cos 2\theta \right] d\theta \\
 &= a^2 \int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} \left[1 + \cos 2\theta - \frac{3}{2} + \frac{3}{2} \cos 2\theta \right] d\theta \\
 &= a^2 \int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} \left[-\frac{1}{2} + \frac{5}{2} \cos 2\theta \right] d\theta \\
 &= a^2 \left[-\frac{1}{2} \int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} d\theta + \frac{5}{2} \int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} \cos 2\theta d\theta \right],
 \end{aligned}$$

finalmente, obtenemos

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\frac{\pi a^2}{4}.$$

Problema 29.

Dada la función vectorial

$$\vec{F} = axi + byj + czk,$$

calcular $\int_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$, sobre cualquier superficie que encierre una región de volumen V .

Solución:

Para resolver este problema, aplicamos el teorema de Gauss o Teorema de la divergencia, que establece que

$$\int_S \vec{f} \cdot d\vec{S} = \int_V (\nabla \cdot \vec{F}) dV,$$

aplicando la definición de la divergencia de un campo vectorial, tenemos

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{F} &= \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (ax, by, cz) \\ &= a + b + c, \end{aligned}$$

por lo tanto, aplicando el teorema de la divergencia obtenemos,

$$\begin{aligned} \int_S \vec{F} \cdot d\vec{S} &= (a + b + c)_V dV \\ &= (a + b + c) V. \end{aligned}$$

donde V es el volumen encerrado por cualquier superficie S .

Problema 30.

Calcular la siguiente integral de volumen

$$\iiint_V xyz dV,$$

donde V es el volumen limitado por los planos coordenados $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ y el plano $x + 2y + z = 6$.

Solución:

Obsérvese que en las integrales de volumen existen 6 posibles tipos de integrales dependiendo del orden de integración en el que aparezcan las variables x , y e z . Por ejemplo el orden de integración en el que aparece la siguiente integral,

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \int_{z=z_1}^{z=z_2} \left\{ \int_{y=g_1(z)}^{y=g_2(z)} \left[\int_{x=\varphi_1(y,z)}^{x=\varphi_2(y,z)} f(x, y, z) dx \right] dy \right\} dz$$

indica que primero se debe integrar la variable x , manteniendo fijas las variables y e z , por lo que los límites de integración para la variable x deben ser dos funciones φ_1 y φ_2 de las variables y e z , este paso nos lleva finalmente a resolver una integral doble. Así los límites de integración para la variable y son dos funciones g_1 y g_2 de la variable z y finalmente los límites de integración para la variable z son dos constantes z_1 y z_2 .

Para nuestro problema, podemos emplear por ejemplo el siguiente orden de integración,

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \int_{x=x_1}^{x=x_2} \left\{ \int_{y=t_1(x)}^{y=t_2(x)} \left[\int_{z=\psi_1(x,y)}^{z=\psi_2(x,y)} f(x, y, z) dz \right] dy \right\} dx$$

El volumen V se encuentra representado en la figura.

ftbpF357.8125pt299.9375pt0ptFigure

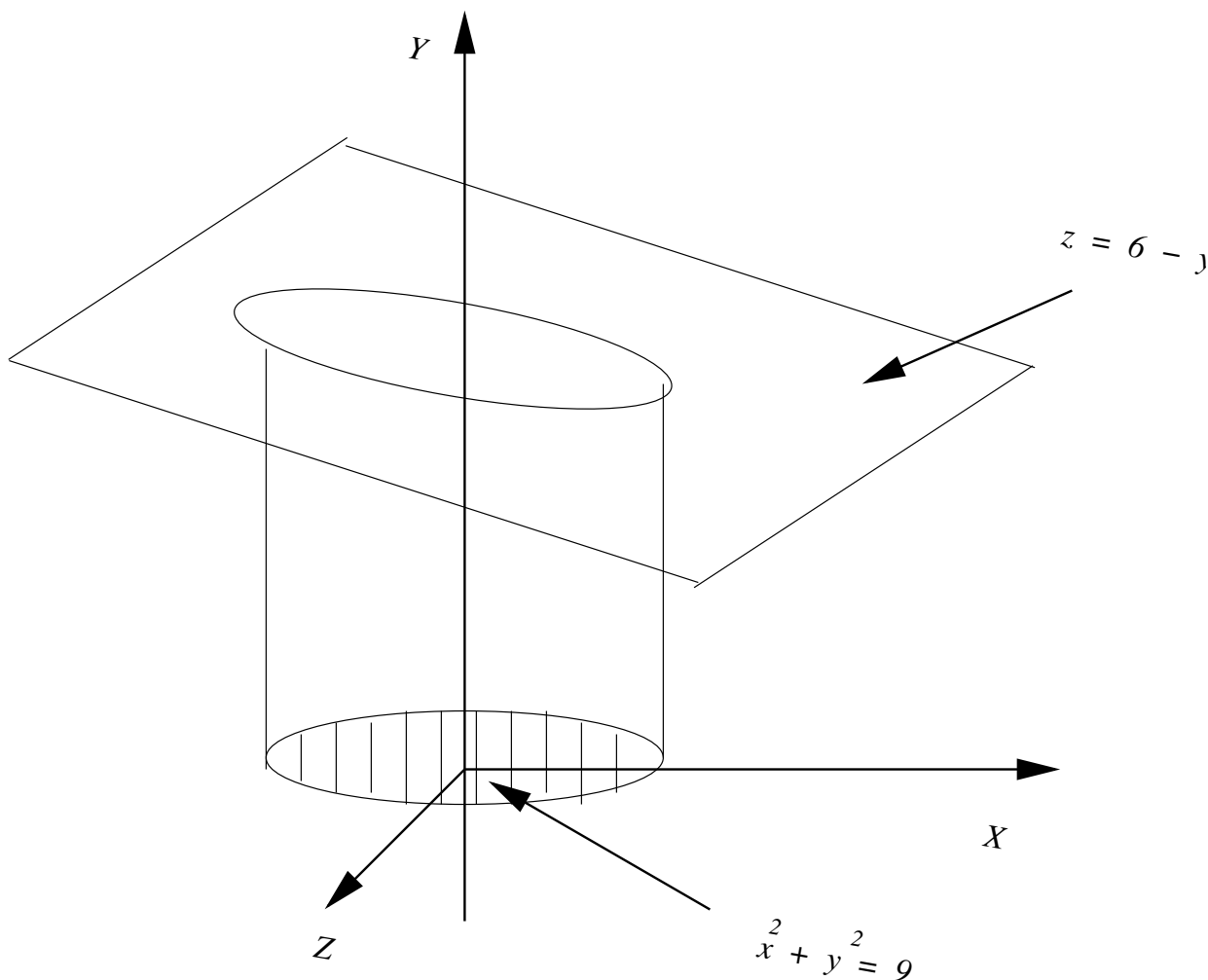
De esta forma el volumen pedido está dado por,

$$\begin{aligned}
\iiint_V xyz dV &= \int_{x=0}^{x=6} \left\{ \int_{y=0}^{y=\frac{6-x}{2}} \left[\int_{z=0}^{z=6-x-2y} xyz dz \right] dy \right\} dx \\
&= \int_{x=0}^{x=6} \left\{ \int_{y=0}^{y=\frac{6-x}{2}} \left[xy \left[\frac{z^2}{2} \right]_0^{6-x-2y} dz \right] dy \right\} dx \\
&= \int_{x=0}^{x=6} \left\{ \int_{y=0}^{y=\frac{6-x}{2}} [x(6-x)^2 - x(6-x)y^2 + 4xy^3] dy \right\} dx = \dots = \frac{9}{5}.
\end{aligned}$$

Se deja como ejercicio para el lector, resolver la integral empleando cualquier otro posible orden de integración, por ejemplo puede ser el mencionado anteriormente.

Problema 31.

Considerado el sólido limitado por la superficie que se muestra en la siguiente figura. Calcule el volumen bajo el plano $z = 6 - y$ y sobre la región $x^2 + y^2 = 9$.



Solución:

En coordenadas cartesianas, para este problema podemos emplear por ejemplo el siguiente orden de integración, que de la figura se observa que es el más conveniente,

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \int_{y=y_1}^{y=y_2} \left\{ \int_{x=\phi_1(y)}^{x=\phi_2(y)} \left[\int_{z=\psi_1(x,y)}^{z=\psi_2(x,y)} f(x, y, z) dz \right] dx \right\} dy.$$

El volumen V se encuentra representado en la figura, en este caso $f(x, y, z) =$
 1. De esta forma, el volumen pedido está dado por,

$$\begin{aligned}
 V &= \int_{y=-3}^3 \left\{ \int_{x=-\sqrt{9-y^2}}^{x=\sqrt{9-y^2}} \left[\int_{z=0}^{z=6-y} dz \right] dx \right\} dy \\
 &= \int_{y=-3}^3 \left[\int_{x=-\sqrt{9-y^2}}^{x=\sqrt{9-y^2}} (6-y) dx \right] dy \\
 &= 2 \int_{y=-3}^3 \left[(6-y) \left[x \right]_{x=0}^{x=\sqrt{9-y^2}} \right] dy \\
 &= 2 \int_{y=-3}^3 \left[(6-y) \sqrt{9-y^2} \right] dy \\
 &= 12 \int_{y=-3}^3 \left(\sqrt{9-y^2} \right) dy - 2 \int_{y=-3}^3 \left(y \sqrt{9-y^2} \right) dy.
 \end{aligned}$$

La primera integral, se resuelve aplicando el siguiente cambio trigonométrico:

$$\begin{aligned}
 y &= 3 \sin \theta \\
 dy &= 3 \cos \theta d\theta
 \end{aligned}$$

por lo que, el integrando se transforma como,

$$\sqrt{9-y^2} \longrightarrow \sqrt{9(1-\sin^2 \theta)} \longrightarrow 3 \cos \theta,$$

donde los límites de integración son ahora desde $\theta = 0$, hasta $\theta = \frac{\pi}{2}$. Por lo tanto la primera integral está dada por:

$$\begin{aligned}
 12 \int_{y=-3}^3 \left(\sqrt{9-y^2} \right) dy &= 24 \int_{y=0}^3 \left(\sqrt{9-y^2} \right) dy \\
 &= 24(3)(3) \int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta d\theta \\
 &= 12(3)(3) \int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2\theta) d\theta \\
 &= 12(3)(3) \left[\theta + \frac{1}{2\theta} \sin 2\theta \right]_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} \\
 &= 54\pi,
 \end{aligned}$$

obsérvese que en la segunda integral, la función a integrar es una función impar,

por lo tanto esa integral es igual a cero.

Finalmente, el volumen limitado por el plano $z = 6 - y$ y la región $x^2 + y^2 + 9$, como se muestra en la figura está dado por:

$$V = 54\pi.$$

Solución Alternativa:

Este problema también se puede resolver en coordenadas cilíndricas, por definición la transformación de coordenadas cilíndricas y rectangulares está dada por:

$$\begin{aligned}x &= \rho \cos \phi, \\y &= \rho \sin \phi, \\z &= z,\end{aligned}$$

de esta forma, el elemento diferencial de volumen está dado por,

$$dV = \rho d\rho d\phi dz,$$

por lo tanto, el volumen pedido está dado por,

$$V = \iiint_V \rho d\rho d\phi dz,$$

por comodidad, seleccionamos el siguiente orden de integración,

$$V = \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} \left\{ \int_{\rho=0}^{\rho=3} \left[\int_{z=0}^{z=6-\rho \sin \phi} \rho dz \right] \right\} d\rho d\phi,$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned}
V &= \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} \left\{ \int_{\rho=0}^{\rho=3} \left[\rho [z]_{z=0}^{z=6-\rho \sin \phi} \right] \right\} d\rho d\phi \\
&= \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} \left\{ \int_{\rho=0}^{\rho=3} \rho (6 - \rho \sin \phi) d\rho \right\} d\phi \\
&= \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} \left\{ \int_{\rho=0}^{\rho=3} \left[3\rho^2 - \sin \phi \frac{\rho^3}{3} \right]_{\rho=0}^{\rho=3} \right\} d\phi \\
&= \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} \left\{ 27 - \frac{27}{3} \sin \phi \right\} d\phi,
\end{aligned}$$

finalmente obtenemos,

$$\begin{aligned}
V &= \left[27\phi + \frac{27}{3} \cos \phi \right]_{\phi=0}^{\phi=2\pi} \\
&= \left(27(2\pi) + \frac{27}{3} \cos(2\pi) \right) - \left(0 + \frac{27}{3} \cos(0) \right) \\
&= 54\pi + \frac{27}{3} - \frac{27}{3} \\
&= 54\pi.
\end{aligned}$$

Como se puede observar, en coordenadas cilíndricas es más simple la solución.

Problema 32:

Dado el campo vectorial $\vec{F} = 2xy\hat{i} + 3yz\hat{j} + 4xz\hat{k}$ calcular,

$$\int_V (\nabla \times \vec{F}) dV,$$

siendo V , el volumen limitado por los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ y $2x + 2y + z = 4$.

Solución:

Para nuestro problema, podemos emplear por ejemplo el siguiente orden de integración,

$$\iiint_V (\nabla \times \vec{F}) dxdydz = \int_{x=x_1}^{x=x_2} \left\{ \int_{y=t_1(x)}^{y=t_2(x)} \left[\int_{z=\psi_1(x,y)}^{z=\psi_2(x,y)} (\nabla \times \vec{F}) dz \right] dy \right\} dx$$

El volumen V de integración se encuentra representado en la figura.

ftbpF291.9375pt280.6875pt0ptFigure

Calculemos primero el rotacional del campo vectorial \vec{F} de la forma,

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{F} &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2zy & 3yz & 4xz \end{vmatrix} = -3y\hat{i} - (4z - 0)\hat{j} + zx\hat{k} \\ \nabla \times \vec{F} &= -3y\hat{i} - 4z\hat{j} - 2x\hat{k}. \end{aligned}$$

De la figura, nuestros límites de integración están dados por:

$$\begin{aligned} 0 &\leq z \leq 4 - 2x - 2y \\ 0 &\leq y \leq 2 - x \\ 0 &\leq x \leq 2 \end{aligned}$$

de esta manera podemos escribir nuestra integral de volumen de la forma,

$$\begin{aligned} \int_V (\nabla \times \vec{F}) dV &= - \int_{x=0}^2 \int_{y=0}^{2-x} \left[\int_{z=0}^{4-2x-2y} (3y, 4z, 2x) dz dy dx \right] \\ &= - \int_{x=0}^2 \left[\int_{y=0}^{2-x} \left([3yz]_{z=0}^{4-2x-2y}, [2z^2]_{z=0}^{4-2x-2y}, [2xz]_{z=0}^{4-2x-2y} \right) dy \right] dx \\ &= - \int_{x=0}^2 \left[\int_{y=0}^{2-x} \left((12y - 6xy - 6y^2), 2(4 - 2x - 2y)^2, (8x - 4x^2 - 4xy) \right) dy \right] dx, \end{aligned}$$

obsérvese que las integrales con respecto a la variable y son inmediatas, aún así, para la integral de la componente en y hacemos el siguiente cambio de variable,

$$\begin{aligned} u &= 4 - 2x - 2y, \\ du &= -2dy \end{aligned}$$

por lo tanto,

$$\int_V (\nabla \times \vec{F}) dV = - \int_{x=0}^2 \left[\left([6y^2 - 3xy^2 - 2y^3]_{y=0}^{2-x}, - \left[\frac{(4 - 2x - 2y)^3}{3} \right]_{y=0}^{2-x}, [8xy - 4x^2 - 4xy^2]_{y=0}^{2-x} \right) \right] dx,$$

al evaluar los límites de integración de la variable y , despues de algunos pasos algebraicos obtenemos,

$$\int_V (\nabla \times \vec{F}) dV = - \int_{x=0}^2 \left[\left\langle (2-x)^3, \frac{1}{3} (4-2x)^3, (2x^3 - 8x^2 + 8x) \right\rangle \right] dx$$

de donde, al integral la variable x , obtenemos

$$\begin{aligned} \int_V (\nabla \times \vec{F}) dV &= - \left[\left(-\frac{(2-x)^4}{4}, -\frac{1}{24} (4-2x)^4, \left(\frac{x^4}{2} - \frac{8}{3} x^3 + 4x^2 \right) \right) \right]_{x=0}^2 \\ &= \left(-\left(0 - \frac{2^4}{4} \right), -\frac{1}{24} (0 - 4^4), \left(8 - \frac{64}{3} + 16 \right) \right) \\ &= -\left(4, \frac{32}{3}, \frac{8}{3} \right), \end{aligned}$$

finalmente, obtenemos

$$\int_V (\nabla \times \vec{F}) dV = -4\hat{i} - \frac{32}{3}\hat{j} - \frac{8}{3}\hat{k}.$$

El problema también se puede resolver, considerando el siguiente orden de integración,

$$\int_V (\nabla \times \vec{F}) dV = \int_{z=0}^4 \int_{y=0}^{2-\frac{z}{2}} \int_{x=0}^{2-y-\frac{1}{2}z} (-3y, -4z, -2x) dx dy dz$$

donde nuestra región de integración se encuentra ahora en el plano YZ , es decir,

$$\begin{aligned} 0 &\leq x \leq z - y - \frac{1}{2}z, \\ 0 &\leq y \leq 2 - \frac{z}{2}, \\ 0 &\leq z \leq 4, \end{aligned}$$

efectuando la integración primero con respecto a la variable x obtenemos,

$$\begin{aligned} \int_V (\nabla \times \vec{F}) dV &= \int_{z=0}^4 \int_{y=0}^{2-\frac{z}{2}} \left[\left\langle -3y \left(2 - y - \frac{z}{2} \right), -4z \left(2 - y - \frac{z}{2} \right), - \left(2 - y - \frac{z}{2} \right)^2 \right\rangle dy \right] dz \\ &= \int_{z=0}^4 \left[\left[\left\langle \left(-3y^2 + y^3 + \frac{3}{4}y^2z \right), (-8yz + 2y^2z + 2yz^2), \frac{1}{3} \left(2 - y - \frac{z}{2} \right)^3 \right\rangle \right]_{y=0}^{2-\frac{z}{2}} \right] dz \\ &\quad \dots \\ &= \int_{z=0}^4 \left\langle \left(\frac{z^3}{16} - \frac{3}{4}z^2 + 3z - 4 \right), \left(-\frac{z^3}{2} + 4z^2 - 8z \right), -\frac{1}{3} \left(2 - \frac{z}{2} \right)^3 \right\rangle dz \\ &= \left[\left\langle \left(\frac{z^4}{64} - \frac{1}{4}z^3 + \frac{3}{2}z^2 - 4z \right), \left(-\frac{z^4}{8} + \frac{4}{3}z^3 - 4z^2 \right), \frac{1}{6} \left(2 - \frac{z}{2} \right)^4 \right\rangle \right]_{z=0}^4, \end{aligned}$$

finalmente al evaluar los límites de la variable z , obtenemos

$$\int_V \nabla \times \vec{F} dV = -4\hat{i} - \frac{32}{3}\hat{j} - \frac{8}{3}\hat{k}.$$

Donde los pasos intermedios que faltan, el lector los puede completar y son análogos a los del primer orden de integración.

Problema 33.

Dado el campo vectorial $\vec{F}(x, y, z) = 2yz\hat{i} - (x+3y-2)\hat{j} + (x^2+z)\hat{k}$, Calcular la integral de superficie $\iint_S \nabla \times \vec{F} \cdot d\vec{S}$ extendida a la superficie de intersección de los cilindros $x^2 + y^2 = a^2$ y $x^2 + z^2 = a^2$ situada en el primer octante.

Solución:

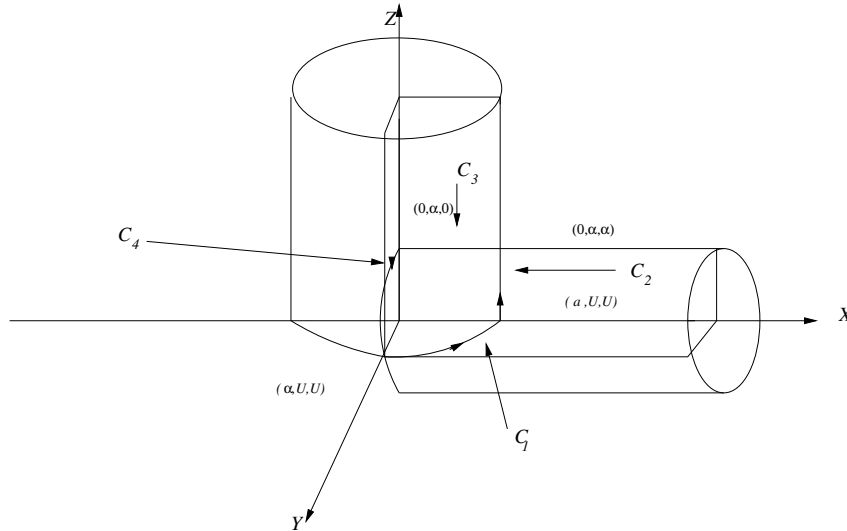
En este problema, aplicaremos el teorema del rotacional de Stokes que establece,

$$\iint_S \nabla \times \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r},$$

es decir, la integral de superficie de la componente normal del rotacional de un

campo vectorial, tomada sobre una superficie cerrada, es igual a la integral de línea de la componente tangencial del campo vectorial, tomada sobre la curva cerrada que limita o rodea a la superficie.

La siguiente figura muestra la intersección de los cilindros. Aplicando el teorema del rotacional de Stokes, la integral de superficie será igual a la integral de línea formada por las trayectorias C_1 , C_2 , C_3 y C_4 como se ilustra en la figura, es decir una curva simple que encierra la intersección de los cilindros está formada por dos trayectorias rectas C_2 y C_3 y dos arcos circulares C_1 y C_4 .



Aplicando el teorema del rotacional de Stokes obtenemos,

$$\begin{aligned}
\iint_S \nabla \times \vec{F} \cdot d\vec{S} &= \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} \\
&= \oint_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \oint_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \oint_{C_3} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \oint_{C_4} \vec{F} \cdot d\vec{r}.
\end{aligned}$$

Para la primera trayectoria recta C_2 (ver figura) las ecuaciones paramétricas están dadas por:

$$\begin{aligned}
x &= 0 \\
y &= a \\
0 &\leq z \leq a,
\end{aligned}$$

de donde $\vec{r} = a\hat{j} + z\hat{k}$, así el elemento diferencial de línea está dado por:

$$d\vec{r} = dz\hat{k},$$

por lo tanto la integral de línea para la trayectoria C_2 está dada por:

$$\begin{aligned}
\oint_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \oint_{C_1} [2az\hat{i} - (3a-2)\hat{j} + z\hat{k}] \cdot [dz\hat{k}] \\
&= \int_{z=0}^a z dz = \left[\frac{z^2}{2} \right]_0^a = \frac{a^2}{2}.
\end{aligned}$$

Para la segunda trayectoria recta C_3 (ver figura) las ecuaciones paramétricas están dadas por:

$$\begin{aligned}
x &= 0 \\
z &= a \\
0 &\leq y \leq a,
\end{aligned}$$

de donde $\vec{r} = y\hat{j} + a\hat{k}$, así el elemento diferencial de línea está dado por:

$$d\vec{r} = dy\hat{j},$$

por lo tanto la integral de línea para la trayectoria C_3 está dada por:

$$\begin{aligned}\oint_{C_3} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \oint_{C_3} [2ya\hat{i} - (3y-2)\hat{j} + a\hat{k}] \cdot [dy\hat{j}] \\ &= - \left[\int_{y=0}^a 2dy - \int_{y=0}^a 3ydy \right] = \left[-2y + \frac{3y^2}{2} \right]_0^a,\end{aligned}$$

finalmente obtenemos,

$$\oint_{C_3} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{3a^2}{2} - 2a.$$

Para la primera trayectoria circular C_1 (ver figura) las ecuaciones paramétricas están dadas por:

$$\begin{aligned}x &= a \cos \phi, \\ z &= a \sin \phi, \\ y &= 0,\end{aligned}$$

en donde el parámetro $\phi \in [0, \frac{\pi}{2}]$, en este caso se tiene $\vec{r} = a \cos \phi \hat{i} + a \sin \phi \hat{k}$,

así el elemento diferencial de línea está dado por:

$$d\vec{r} = -a \sin \phi d\phi \hat{i} + a \cos \phi d\phi \hat{k},$$

por lo tanto la integral de línea para la trayectoria circular C_1 está dada por:

$$\begin{aligned}\oint_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \oint_{C_1} [-(3a \sin \phi - 2)\hat{j} + ((a \cos \phi)^2 + a \sin \phi)\hat{k}] \cdot [-a \sin \phi d\phi \hat{i} + a \cos \phi d\phi \hat{k}] \\ &= - \int_{\phi=0}^{\frac{\pi}{2}} [a^3 \cos^3 \phi + a^2 \sin \phi \cos \phi] d\phi = -a^3 \int_{\phi=0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \phi d\phi - a^2 \int_{\phi=0}^{\frac{\pi}{2}} \sin \phi \cos \phi d\phi,\end{aligned}$$

la primera integral se evalua aplicando la identidad trigonométrica

$$\cos^3 = \cos^2 \phi \cos \phi = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\phi \right) \cos \phi,$$

la segunda integral es inmediata de la forma $u du$, finalmente al integrar y evaluar

las integrales obtenemos,

$$\begin{aligned} \oint_{C_3} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= a^3 \left[\frac{\sin^3 \phi}{3} - \sin \phi \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + a^2 \left[\frac{\cos^2 \phi}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= -\frac{2}{3}a^3 - \frac{a^2}{2}. \end{aligned}$$

Finalmente para la trayectoria circular C_4 (ver figura) las ecuaciones paramétricas están dadas por:

$$\begin{aligned} x &= a \cos \phi \\ y &= a \sin \phi \\ z &= 0, \end{aligned}$$

en donde el parámetro $\phi \in [0, \frac{\pi}{2}]$, en este caso se tiene $\vec{r} = a \cos \phi \hat{i} + a \sin \phi \hat{j}$,

así el elemento diferencial de línea está dado por:

$$d\vec{r} = -a \sin \phi d\phi \hat{i} + a \cos \phi d\phi \hat{j},$$

por lo tanto la integral de línea para la trayectoria circular C_4 está dada por:

$$\begin{aligned} \oint_{C_4} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \oint_{C_3} \left[-(a \cos \phi + 3a \sin \phi - 2)\hat{j} + ((a \cos \phi)^2 + a \sin \phi)\hat{k} \right] \cdot \\ &\quad \left[-a \sin \phi d\phi \hat{i} + a \cos \phi d\phi \hat{j} \right], \end{aligned}$$

es decir,

$$\begin{aligned}
\oint_{C_4} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_{\phi=0}^{\frac{\pi}{2}} [-a^2 \cos^2 \phi d\phi - 3a^2 \sin \phi \cos \phi d\phi + 2a \cos \phi d\phi] \\
&= -a^2 \int_{\phi=0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \phi d\phi - 3a^2 \int_{\phi=0}^{\frac{\pi}{2}} \sin \phi \cos \phi d\phi + 2a \int_{\phi=0}^{\frac{\pi}{2}} \cos \phi d\phi,
\end{aligned}$$

la primera integral se evalua aplicando la identidad trigonométrica,

$$\cos^2 \phi = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\phi \right),$$

la segunda y tercera integrales son inmediatas, por lo tanto

$$\oint_{C_4} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -a^2 \left[\frac{\phi}{2} - \frac{\sin 2\phi}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + 3a^2 \left[\frac{\cos^2 \phi}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + [2a \sin \phi]_0^{\frac{\pi}{2}},$$

finalmente al evaluar las integrales obtenemos,

$$\oint_{C_4} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\frac{\pi a^2}{4} - \frac{3}{2}a^2 + 2a.$$

Por lo tanto, la integral de línea a lo largo de la trayectoria curva simple que encierra la intersección de los cilindros como se muestra en la figura, se obtiene al sumar los resultados de las trayectorias C_1 , C_2 , C_3 y C_4 es decir;

$$\begin{aligned}
\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \oint_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \oint_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \oint_{C_3} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \oint_{C_4} \vec{F} \cdot d\vec{r} \\
&= \left[\frac{a^2}{2} \right] + \left[\frac{3a^2}{2} - 2a \right] + \left[-\frac{2}{3}a^3 - \frac{a^2}{2} \right] + \left[-\frac{\pi a^2}{4} - \frac{3}{2}a^2 + 2a \right] \\
&= -\frac{2}{3}a^3 - \frac{\pi a^2}{4}.
\end{aligned}$$

Finalmente, aplicando el teorema del rotacional de Stokes se obtiene

$$\iint_S \nabla \times \vec{F} \cdot d\vec{S} = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\frac{2}{3}a^3 - \frac{\pi a^2}{4}.$$

Problema 34.

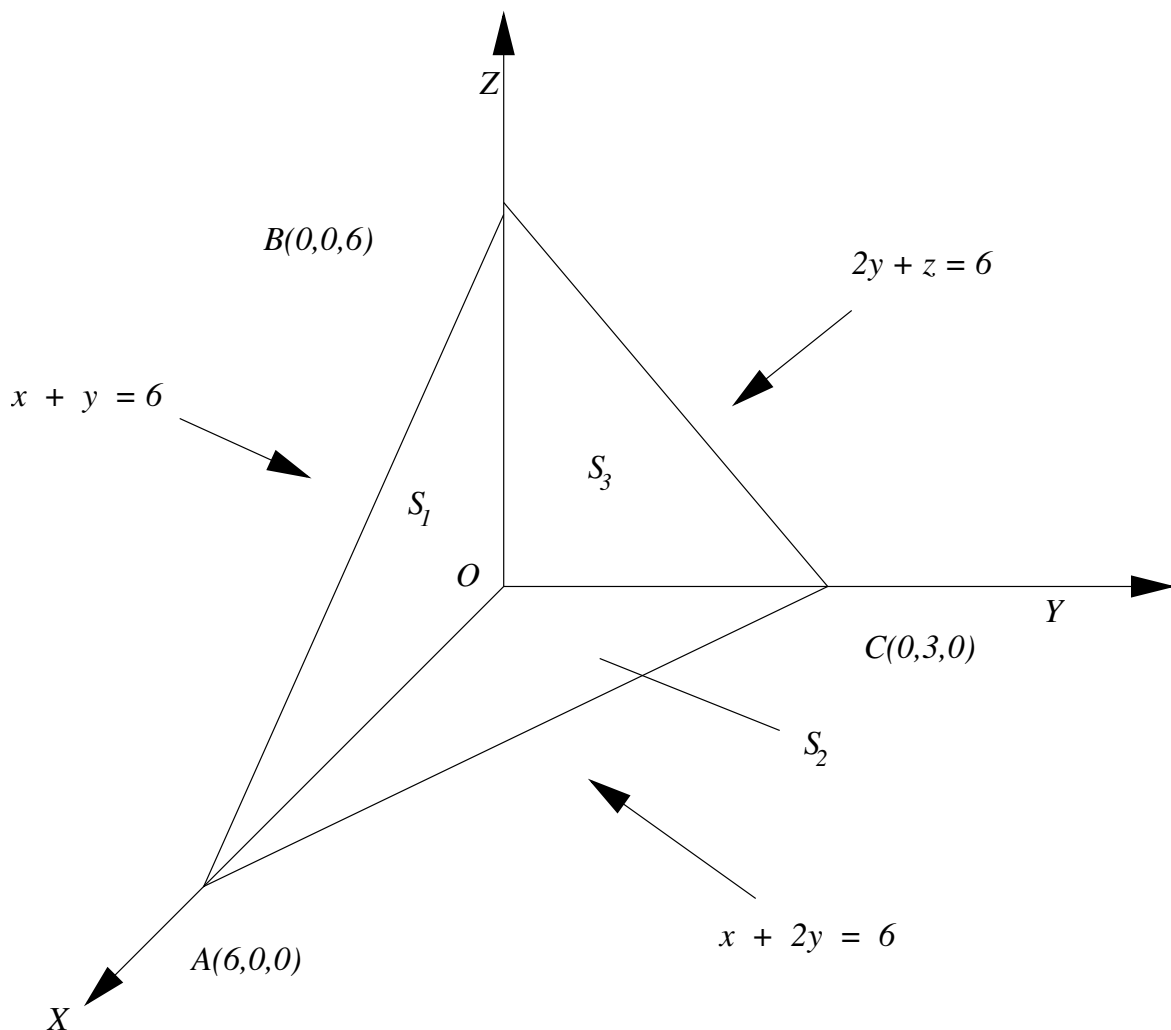
Verificar el teorema de la divergencia de Gauss para

$$\vec{F}(x, y, z) = (2x - y)\hat{i} - (2y - z)\hat{j} + z\hat{k},$$

donde V es el volumen encerrado por la superficie S formada por los planos coordenados $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ y el plano $x + 2y + z = 6$.

Solución:

El volumen V que encierra la superficie S se muestra en la siguiente figura.



Como se muestra en la figura, la superficie S está formada por 4 superficies $S_1(ABO)$, $S_2(ACO)$, $S_3(BCO)$ y $S_4(ABC)$, por lo tanto para calcular la inte-

gral de superficie debemos de calcular el flujo de \vec{F} a través de cada superficie, es decir;

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_{S_1} \vec{F} \cdot \hat{n} dS + \iint_{S_2} \vec{F} \cdot \hat{n} dS + \iint_{S_3} \vec{F} \cdot \hat{n} dS + \iint_{S_4} \vec{F} \cdot \hat{n} dS$$

De la figura se observa lo siguiente:

Para la superficie $S_1(ABO)$;

$$y = 0, \quad \hat{n} = -\hat{j} \quad y \quad dS = dx dz.$$

Para la superficie $S_2(ACO)$;

$$z = 0, \quad \hat{n} = -\hat{k} \quad y \quad dS = dx dy$$

Para la superficie $S_3(ABO)$;

$$x = 0, \quad \hat{n} = -\hat{i} \quad y \quad dS = dy dz.$$

por lo tanto, las integrales para estas superficies resultan,

$$\iint_{S_1} \vec{F} \cdot \hat{n} dS = \iint_{S_1} \left[(2x - y)\hat{i} - 2y\hat{j} \right] \cdot (-\hat{k}) dx dy = 0$$

$$\begin{aligned} \iint_{S_2} \vec{F} \cdot \hat{n} dS &= \iint_{S_2} \left[(2x\hat{i} + z\hat{j} + z\hat{k}) \cdot (-\hat{j}) \right] dx dz \\ &= - \int_{z=0}^6 \int_{x=0}^{x=6-z} z dx dz = - \int_{z=0}^6 z(6-z) dz \\ &= \left(-3z^2 + \frac{z^3}{3} \right)_{z=0}^6 = -36. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \iint_{S_3} \vec{F} \cdot \hat{n} dS &= \iint_{S_3} \left[(-y\hat{i} - (2y-z)\hat{j} + z\hat{k}) \cdot (-\hat{i}) \right] dy dz \\ &= - \int_{z=0}^6 \int_{y=0}^{y=\frac{6-z}{2}} y dy dz = \int_{z=0}^6 \frac{(6-z)^2}{8} dz \\ &= \left(-\frac{(6-z)^3}{24} \right)_{z=0}^6 = 9. \end{aligned}$$

Para resolver la integral sobre la superficie $S_4(ABC)$, aplicamos el teorema de la proyección de la superficie sobre un plano coordenado, que establece

$$\iint_{S_4} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_{R_{xy}} \frac{\vec{f} \cdot \hat{n}}{|\hat{n} \cdot \hat{k}|} dx dy.$$

Para la superficie $S_4(ABC)$ aplicando la definición del gradiente, un vector normal a la superficie está dado por $\vec{N} = \hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$, así en este caso el vector \hat{n} está dado por $\hat{n} = \frac{\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}}{\sqrt{6}}$ de donde se sigue que:

$$\begin{aligned} \vec{F} \cdot \hat{n} &= \left[(2x - y)\hat{i} - (2y - z)\hat{j} + z\hat{k} \right] \cdot \left[\frac{\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}}{\sqrt{6}} \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{6}} (2x - 5y + 3z), \end{aligned}$$

empleando la ecuación para la superficie $S_4(ABC)$ se tiene $z = 6 - x - 2y$, sustituyendo en la expresión anterior obtenemos

$$\vec{F} \cdot \hat{n} = \frac{1}{\sqrt{6}} (18 - x - 11y),$$

también obtenemos,

$$\hat{n} \cdot \hat{k} = \left(\frac{\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}}{\sqrt{6}} \right) \cdot \hat{k} = \frac{1}{\sqrt{6}}.$$

De los resultados anteriores, la integral para la superficie $S_4(ABC)$ está dada por:

$$\begin{aligned} \iint_{S_4} \vec{F} \cdot d\vec{S} &= \iint_{R_{xy}} \left[\frac{\frac{1}{\sqrt{6}} (18 - x - 11y)}{\frac{1}{\sqrt{6}}} \right] dx dy = \int_{y=0}^6 \int_{x=0}^{x=6-2y} [18 - x - 11y] dx dy \\ &= \int_{y=0}^6 \left[\left(18 - \frac{x^2}{2} - 11xy \right)_{x=0}^{6-2y} \right] dy = \int_{y=0}^6 [90(1 - y) + 20y^2] dy, \end{aligned}$$

finalmente al calcular la integral en y , evaluando los límites de integración obtenemos,

$$\iint_{S_4} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \left[90y - 45y^2 - \frac{20y^3}{3} \right]_{y=0}^3 = 45,$$

sumando los resultados obtenidos para las superficies $S_1(ABO)$, $S_2(ACO)$, $S_3(BCO)$ y $S_4(ABC)$, obtenemos

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = (-36) + 0 + 9 + 45 = 18.$$

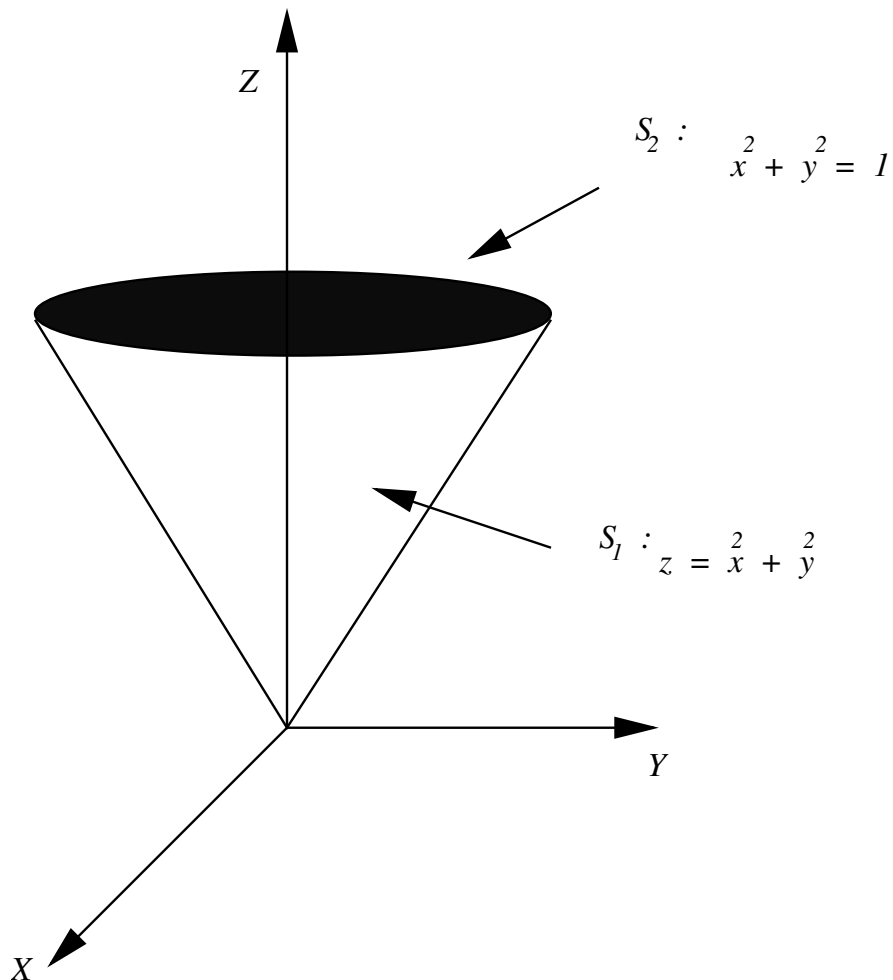
Para resolver la integral de volumen, si aplicamos la definición de la divergencia de un campo vectorial \vec{F} en este problema tenemos que $\nabla \cdot \vec{F} = 1$; por otro lado, observemos en la figura la región de volumen que encierran las superficies $S_1(ABO)$, $S_2(ACO)$, $S_3(BCO)$ y $S_4(ABC)$, por lo tanto

$$\begin{aligned} \iiint_V \nabla \cdot \vec{F} dV &= \int_{z=0}^6 \int_{y=0}^{\frac{6-z}{2}} \int_{x=0}^{6-2y-z} dx dy dz \\ &= \int_{z=0}^6 \left\{ \int_{y=0}^{\frac{6-z}{2}} [6-2y-z] dy \right\} dz = \int_{z=0}^6 [y(6-z) - y^2]_{y=0}^{\frac{6-z}{2}} dy \\ &= \int_{z=0}^6 \left[(6-z) \frac{(6-z)^2}{2} - \frac{(6-z)^2}{4} \right] dz = \frac{1}{4} \int_{z=0}^6 (6-z)^2 dz \\ &= - \left[\frac{(6-z)^3}{12} \right]_{z=0}^6 = 18, \end{aligned}$$

que es el mismo resultado que se obtuvo al calcular la integral de superficie. Por lo tanto, se ha verificado el teorema de la divergencia de Gauss.

Problema 35.

Sea $\vec{F} = \vec{r}$, verificar el teorema de la divergencia de Gauss donde S es la superficie que consta del cono $z^2 = x^2 + y^2$ para $0 \leq x^2 + y^2 \leq 1$ y la superficie que es el disco $x^2 + y^2 \leq 1$, $z = 1$ como se muestra en la siguiente figura:



Solución:

Debemos verificar que,

$$\oint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_V (\nabla \cdot \vec{F}) dV,$$

primeramente calculemos la integral de superficie, como se ilustra en la figura anterior, la superficie S está formada por las superficies S_1 y S_2 , de esta forma

$$\int_S \vec{r} \cdot d\vec{S} = \int_{S_1} \vec{r} \cdot d\vec{S} + \int_{S_2} \vec{r} \cdot d\vec{S}$$

Para S_1 :

Aplicando la definición del gradiente, donde $\phi(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2 = 0$ obtenemos,

$$\begin{aligned} \hat{n} &= \frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|} \\ &= \frac{2x\hat{i} + 2y\hat{j} - 2z\hat{k}}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 4z^2}} \\ &= \frac{x\hat{i} + y\hat{j} - z\hat{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \end{aligned}$$

observe que el vector $\hat{n} = \frac{x\hat{i} + y\hat{j} - z\hat{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$, es normal interior (hacia adentro de S_1),

por lo tanto

$$\begin{aligned} \int_{S_1} \vec{r} \cdot d\vec{S} &= \int_{S_1} \vec{r} \cdot \hat{n} dS \\ &= \int_{S_1} [x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}] \cdot \left[\frac{x\hat{i} + y\hat{j} - z\hat{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right] dS \\ &= \int_{S_2} \left(\frac{x^2 + y^2 - z^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right) dS \\ &= 0. \end{aligned}$$

Para S_2 :

De la figura, obsérvese que el vector unitario normal a S_2 es $\hat{n} = \hat{k}$, de donde obtenemos inmediatamente que

$$\hat{n} \cdot \vec{r} = z,$$

además como $z = 1$, entonces la integral sobre la superficie S_2 está dada por:

$$\int_{S_2} \vec{r} \cdot \hat{n} dS = \int_{S_2} dS,$$

pero $\int_{S_2} dS_2 = \pi (1)^2$, es decir, el área de un círculo de radio 1, por lo tanto

$$\int_{S_2} \vec{r} \cdot d\vec{S} = \pi.$$

Por lo tanto la integral sobre la superficie S del problema está dada por:

$$(1) \quad \int_S \vec{r} \cdot d\vec{S} = \int_{S_1} \vec{r} \cdot d\vec{S} + \int_{S_2} \vec{r} \cdot d\vec{S} = \pi.$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \int_V \nabla \cdot \vec{r} &= \int_V 3 dV \\ &= 3 \left[\frac{1}{3} (\pi (1)^2 (1)) \right] \end{aligned}$$

que es igual al volumen de un cono de altura uno y radio 1, finalmente obtenemos

$$(2) \quad \int_V \nabla \cdot \vec{r} = \pi$$

Por lo tanto, de los resultados (1) y (2) se verifica el Teorema de la divergencia de Gauus, es decir,

$$\int_S \vec{r} \cdot d\vec{S} = \int_V \nabla \cdot \vec{r} dv = \pi.$$