Fundamentos de control de sistemas (EL4111-1)
Clase auxiliar 2
Prof. Roberto Cardenas Dobson
Prof. Aux. Osvaldo Jimenez - Erik Sáez
Ayudantes. Simon Arenas- Juan Pablo Baez - Francisco Garces - Sofia Ibarra

1. Considere el siguiente sistema de control visto en Figura 1. Utilizando el método del lugar de la raíz, responda las siguientes preguntas:

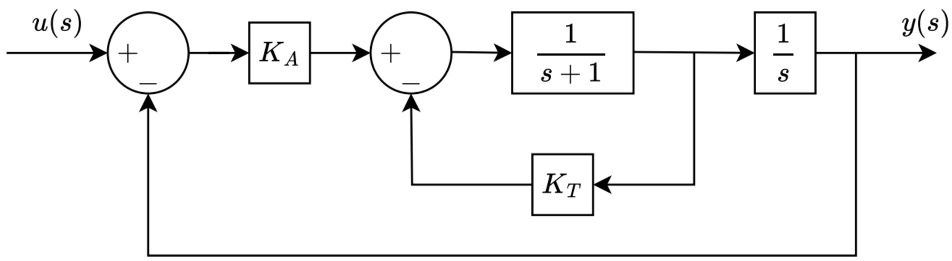


Figura 1: Diagrama de bloques

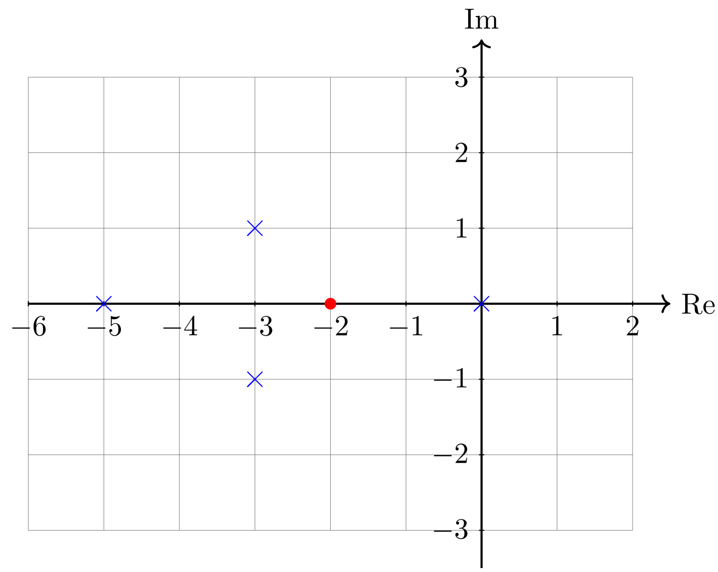
   1. Identifique los puntos en el LGR donde la respuesta del sistema a lazo cerrado no sobrepasará el valor de referencia de entrada con un mínimo tiempo de establecimiento (asuma entrada escalón). Encuentre el valor de K_T en función de la ganancia K_A en esos puntos. Además, explique las condiciones de módulo y de ángulo que utiliza durante el desarrollo.
   2. Repita el análisis anterior, pero considerando que la respuesta ahora tiene un $\xi = 0.707$ en la respuesta a lazo cerrado. De manera análoga, explique las condiciones de módulo y de ángulo que utiliza en su desarrollo.

Solución:

a)

Tenemos que el maximo paso de sobrepaso viene dado por MOV $= 4.3254\%$, ademas dado que se nos entrega la frecuencia natural, $w_n =$

2. Sea el siguiente diagrama:



1. Encuentre la funcion de transferencia del sistema, con esta informacion , obtenga el lugar de la raiz
2. ¿Qué ocurre con el lugar de la raíz si el sistema tiene una ganancia negativa? En este caso, encuentre la ganancia crítica para que el sistema se mantenga estable.

Solución:

Resolucion 2.1

Dada la figura de del enunciado , se observa que se tienen 4 polos y un cero, por lo que se tendra:

- Polos : $p_1 = 0$, $p_2 = -3 \pm j$, $p = -5$.
- Cero : $z_1 = -2$

Con lo que la funcion de transferencia a lazo abierto vendra dada por:

$$H(s)G(s) = \frac{(s+2)}{s(s+3+j)(s+3-j)(s+5)} \quad (1)$$

$$= \frac{(s+2)}{s(s^2+6s+10)(s+5)} \quad (2)$$

$$(3)$$

Luego sera de interes encontrar todas las caracteristicas suficientes, tal que nos permitan el obtener el LGR.Comenzamos encontrando los cortes con el eje real , para la cual se utiliza la condicion de angulo en base a la siguiente regla:

- Si la cantidad de polos y ceros es **PAR**, luego esa zona no pertenecerá al LGR.
- Si la cantidad de polos y ceros es **IMPAR**, luego esa zona pertenecerá al LGR.

Se debe tener la precaucion con los polos conjugados,se obtiene por tanto:

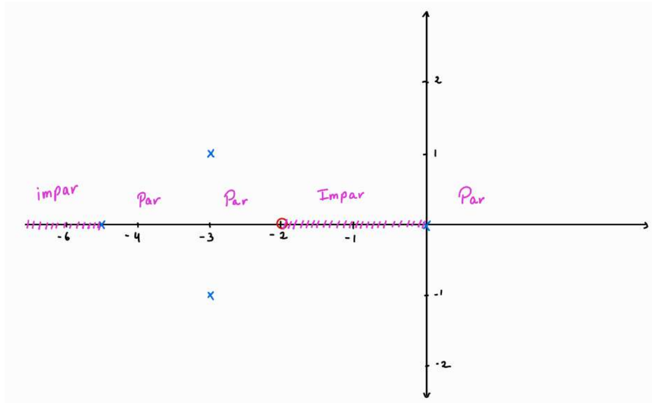


Figura 2: Ubicacion de polos de lazo cerrado en zona real

Se busca el obtener la ubicacion de las asintotas , para lo cual se utiliza la siguiente formula:

$$\sigma_a = \frac{\sum Polos - \sum Ceros}{\#Asintotas} \tag{4}$$

Considerando que la asintotas vienen dadas por $\#Asintotas = \#Polos - \#Ceros = 4 - 1 = 3$ se obtiene:

$$\sigma_a = \frac{0 - 5 - (3 + j) - (3 - j) - (-2)}{3} = -3 \tag{5}$$

La cual se visualiza en lo siguiente:

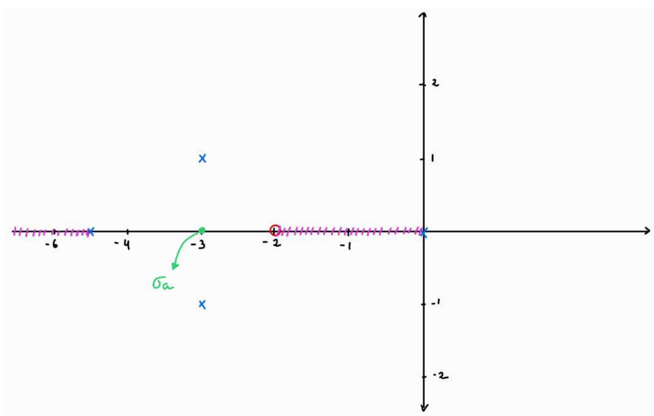


Figura 3: Ubicacion de lugar de la asintota

Para los angulos asociados a las asintotas tenemos que $k \in \{0, \ldots, \#Asintotas - 1\}$ con lo que (Para $k > 0$):

$$\theta_k = \frac{(2k + 1)180}{\#Asintotas} \tag{6}$$

Con lo que se obtiene:

$$\theta_0 = \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow 60^\circ \tag{7}$$

$$\theta_1 = \pi \Leftrightarrow 180^\circ \tag{8}$$

$$\theta_2 = \frac{5\pi}{3} \Leftrightarrow 300^\circ \tag{9}$$

Con lo cual:

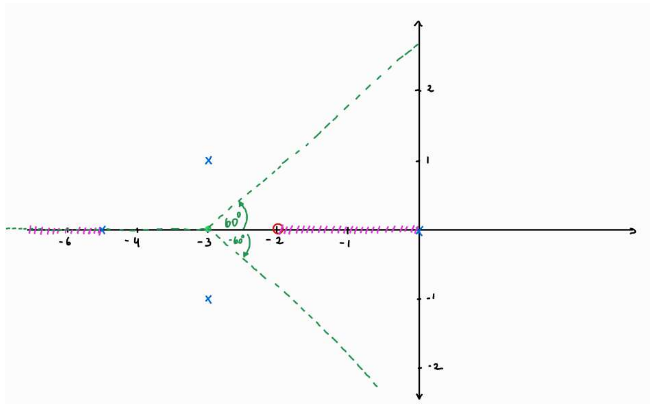


Figura 4: Angulos asociados a las asintotas

Se debe obtener los valores de llegada o salida, para lo cual se utiliza la expresion de lazo cerrado dada por:

$$1 + kG(s)H(s) = 0 \tag{10}$$

$$1 + k\frac{(s+2)}{s(s^2+6s+10)(s+5)} = 0 \tag{11}$$

$$k = \frac{-s(s^2+6s+10)(s+5)}{(s+2)} \tag{12}$$

$$\tag{13}$$

Luego derivamos e igualamos a 0 , con lo que se obtiene que

$$\frac{dK}{ds} = \frac{d}{ds}\left(\frac{-s(s^2+6s+10)(s+5)}{(s+2)}\right) = 0 \tag{14}$$

Se tiene que $s_{1,2} = -3.7293 \pm 0.29837j$ y $s_{3,4} = -1.2707 \pm 0.8757j$ se observa que ambos son complejos por lo que **no existe corte con el eje real**.Se debe analizar si esque existe corte con el eje imaginario, por lo tanto:

$$1 + kG(s)H(s) = 0 \tag{15}$$

$$1 + k\frac{(s+2)}{s(s^2+6s+10)(s+5)} = 0 \tag{16}$$

$$s(s^2+6s+10)(s+5) + k(s+2) = 0 \tag{17}$$

Dado que nos interesa analizar el corte con el eje real, se impone que $s = j\omega$ con lo que se obtiene:

$$j\omega((j\omega)^2 + 6(j\omega) + 10)(j\omega+5) + k(j\omega+2) = 0 \tag{18}$$

$$j\omega(-\omega^2 + 6j\omega + 10)(j\omega+5) + k(j\omega+2) = 0 \tag{19}$$

$$\omega^4 - 40\omega^2 + 2k + j(50\omega + k\omega - 11\omega^3) = 0 \tag{20}$$

Lo anterior sera valido cuando tanto parte real e imaginaria sean nulas, por lo que igualando se obtiene:

$$\omega^4 - 40\omega^2 + 2k = 0 \tag{21}$$

$$50\omega + k\omega - 11\omega^3 = 0 \tag{22}$$

Luego:

$$\omega_{1,2} = \pm 4.7385 \qquad k_{1,2} = 196.99 \tag{23}$$
$$\omega_3 = 0 \qquad k_3 = 0 \tag{24}$$

Con lo que la solucion factible corresponde a $\omega_{1,2} = \pm 4.7385$ y $k_{1,2} = 196.99$, dado que w_3 es infactible dado que es un valor nulo o trivial (Es super importante destacar que la solucion se obtiene considerando $K > 0$, dado que si no se limita esta cantidad, entregara todo el conjunto de soluciones).Finalmente es posible el graficar el lugar geometrico de la raiz el cual vendra dado por lo siguiente:

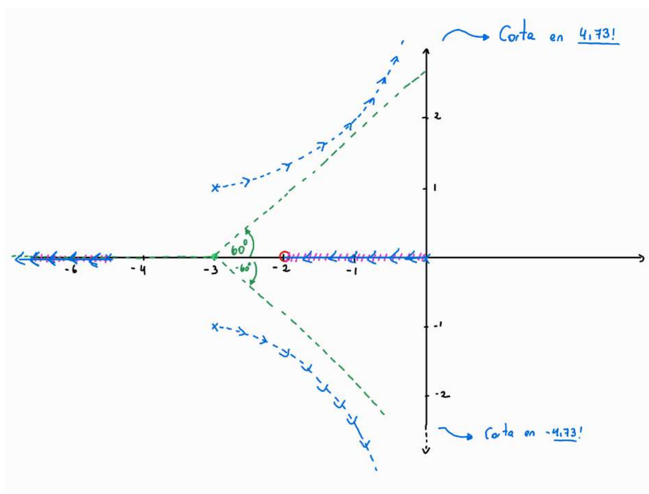


Figura 5: Lugar Geometrico de la Raiz

Resolucion 2.2

Dado que se tiene un sistema con ganancia negativa, se tiene que la funcion de transferencia vendra dada por (Considerando que $k > 0$):

$$1 - kG(s)H(s) = 0 \tag{25}$$

Con lo que la condicion sera:

$$\angle G(s)H(s) = 0 \pm 360^\circ \tag{26}$$

Por lo que notamos que al analizar el corte con el eje real, la condicion que se obtenia antes se invierte, es decir:

- Si la cantidad de polos y ceros es **Impar**, luego esa zona no pertenecerá al LGR.
- Si la cantidad de polos y ceros es **PAR**, luego esa zona pertenecerá al LGR.

Por lo que se obtiene lo opuesto a lo ya visto con anterioridad, es decir:

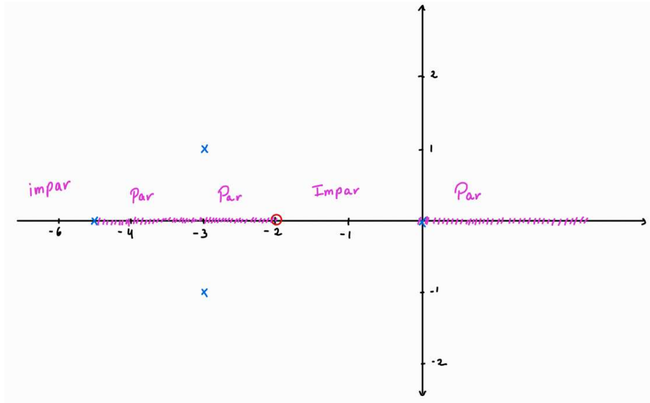


Figura 6: Lugar Geometrico de la Raiz

Luego la posicion de las asintotas no cambiara, pero si los angulos, estos vendran asociados a los numeros pares, es decir:

$$\theta_k = \frac{2k\pi}{\#Asintotas} \tag{27}$$

Con lo que se obtiene que:

$$\theta_0 = \Leftrightarrow 0^\circ \tag{28}$$

$$\theta_1 = \frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow 120^\circ \tag{29}$$

$$\theta_2 = \frac{4\pi}{3} \Leftrightarrow 240^\circ \tag{30}$$

De esta manera al ubicarlos:

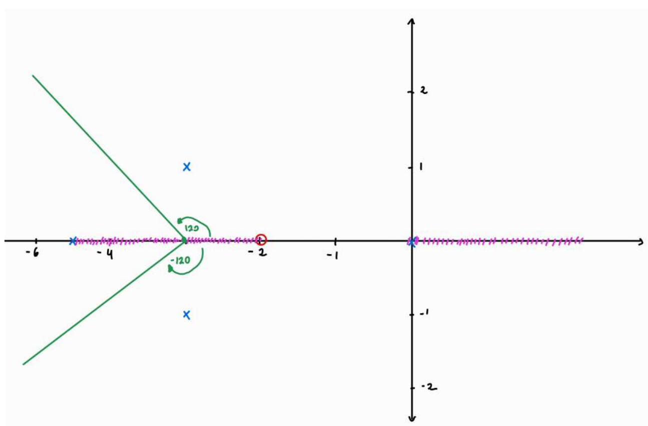


Figura 7: Lugar Geometrico de la Raiz

Notamos que los valores de llegada o salida **no se ven afectados por el signo de la ganancia**, por lo que se concluye de manera directa que nuevamente no habra corte en el eje real. Finalmente queda analizar el corte con el eje imaginario , el cual vendra dado por:

$$1 - kG(s)H(s) = 0 \tag{31}$$

$$1 - k\frac{(s+2)}{s(s^2+6s+10)(s+5)} = 0 \tag{32}$$

$$s(s^2+6s+10)(s+5) - k(s+2) = 0 \tag{33}$$

Reemplazando por $s = j\omega$ se obtiene:

$$\omega^4 - 40\omega^2 - 2k + j(50\omega - k\omega - 11\omega^3) = 0 \tag{34}$$

Que separando parte rteal e imaginaria se obtiene:

$$\omega^4 - 40\omega^2 - 2k = 0 \tag{35}$$
$$50\omega - k\omega - 11\omega^3 = 0 \tag{36}$$

Finalmente se obtienen los valores de ω y k que son:

$$\omega_{1,2} = \pm 2.110j \qquad k_1 = -98.990 \tag{37}$$

Se observa que son infactibles debido a que $w_{1,2}$ es un valor complejo , por lo que no cortara al eje imaginario, de esta manera podemos graficar el LGR el cual vendra dado por lo siguiente:

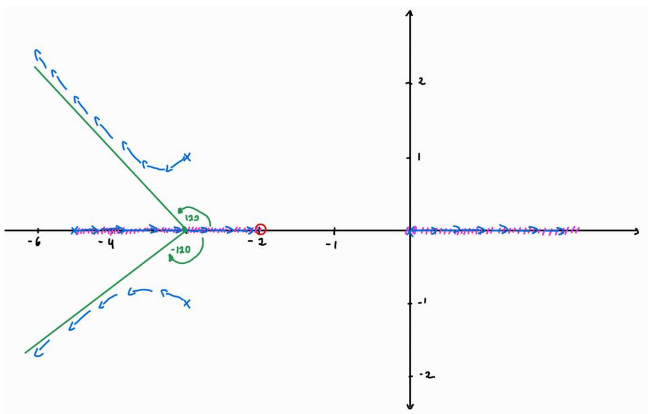


Figura 8: Lugar Geometrico de la Raiz

3. Encuentre los cortes al eje imaginario de la planta:

$$H(s)G(s) = \frac{(s+3)}{s^2 - s - 2} \tag{38}$$

Solución:

Resolucion 3.1 (Forma 1)

Dada la funcion de transferencia de la planta,

$$H(s)G(s) = \frac{(s+3)}{s^2 - s - 2} \tag{39}$$
$$= \frac{(s+3)}{(s-2)(s+1)} \tag{40}$$

Con lo que tenemos que los polos de la planta vendran dados por $p_1 = 2$ y $p_2 = -1$ y el cero $z_1 = -3$. Se debe analizar el corte con el eje imaginario, para lo cual se considera el criterio de Routh-Hurwitz,el cual nos permite analizar los rangos de ganancia que permiten la estabilidad del sistema en base a una tabla y los cambios de signos de la misma.Para esto se debe expresar la funcion de transferencia de lazo cerrado en forma polinomica, con lo que se obtiene:

$$1 + kG(s)H(s) = 0 \tag{41}$$

$$1 + k\frac{(s+3)}{(s-2)(s+1)} = 0 \tag{42}$$

$$(s-2)(s+1) + k(s+3) = 0 \tag{43}$$

$$s^2 - s - 2 + ks + 3k = 0 \tag{44}$$

$$s^2 + (k-1)s - 2 + 3k = 0 \tag{45}$$

Luego utilizamos la tabla tal que:

s^2	1	-2+3k
s^1	k-1	0
s^0	α_1	α_2

Donde para obtener los valores de α_1 y α_2 se utilizan las formulas asociadas:

$$\alpha_1 = \frac{(3k-2)(k-1) - 0}{k-1} = (3k-2) \tag{46}$$

$$\alpha_2 = 0 \tag{47}$$

(Yo suelo utilizar este ayuda memoria para no olvidarme)

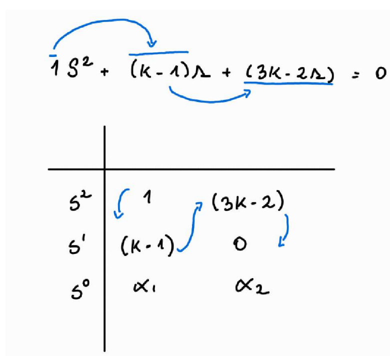


Figura 9: La idea es situar en la columna de la izquierda el mayor de grado hasta el menor grado, posteriormente reconocemos los coeficientes del polinomio y trazamos las flechas azules, desde la esquina superior izquierda bajando y luego subiendo hasta completar todo los coeficientes del polinomio (En caso de no haber se rellena con 0).

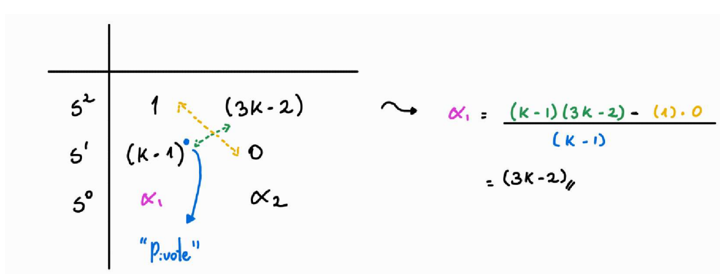


Figura 10: Una vez ubicados los coeficientes se deben calcular los coeficientes, por lo que por ejemplo para calcular α_1 se utiliza el termino superior y se realiza un *Pivote* y luego se realizan las multiplicaciones diagonales y se restan y se dividen por el *Pivote*.

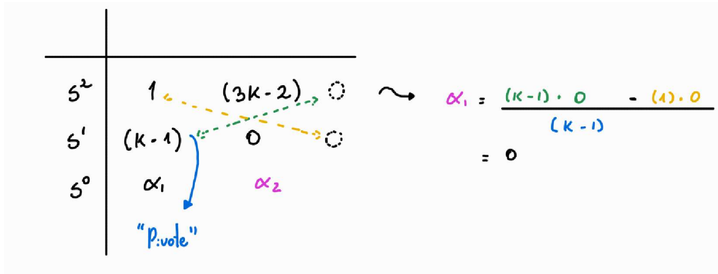


Figura 11: Para α_2 se utiliza el mismo procedimiento

Esta metodologia utilizaba para no olvidarme, pero siempre es a criterio personal.Luego tenemos que la matriz vendra dada por:

s^2	1	3k-2
s^1	k-1	0
s^0	$3k-2$	0

El criterio de Routh-width se basa en analizar la segunda columna, para la cual el cambio de signo es equivalente a entrar a zona donde este sea inestable, o equivalentemente cruze el semiplano derecho, por lo que se debera cumplir que en todo momento la primera columna sea positiva, por lo que se obtiene un intervalo vendra dado por (Es importante destacar que este analisis se realiza considerando que $k > 0$):

$$k - 1 > 0 \tag{48}$$

$$3k - 2 > 0 \tag{49}$$

Con lo que se debe cumplir en simultaneo que $k > 1$ y $k > \frac{2}{3}$, por lo que se obtiene que $k > 1$ cumplira ambas condiciones que permitira la estabilidad .Finalmente se obtiene que el corte con el eje imaginario vendra dado por los momentos en que existe cambio de signo, por lo que estos correpsonden a $k_1 = \frac{2}{3}$ y $k_2 = 1$, con lo que reemplazando sobre la funcion de transferencia de los polos de lazo cerrado se obtiene que:

Caso 1: $K = \frac{2}{3}$

$$s^2 + (k-1)s - 2 + 3k = 0 \tag{50}$$

$$(jw)^2 + (k-1)jw - 2 + 3 \cdot \left|\frac{2}{3}\right| = 0 \tag{51}$$

$$-w^2 + jw\frac{-1}{3} + 0 = 0 \tag{52}$$

$$\tag{53}$$

Luego igualamos separamos parte real e imaginaria y obtenemos que:

$$-w^2 = 0 \tag{54}$$

$$-\frac{1}{3}w = 0 \tag{55}$$

Con lo que se obtiene que $s = 0$, por lo que el corte se obtiene en el origen.

Caso 2: K=1

Analogamente tenemos que:

$$s^2 + (k-1)s - 2 + 3k = 0 \tag{56}$$
$$(jw)^2 + (k-1)jw - 2 + 3 \cdot 1 = 0 \tag{57}$$
$$-w^2 + jw(1-1) - 2 + 3 = 0 \tag{58}$$
$$\tag{59}$$

Luego tenemos solo parte real,:

$$w^2 = \pm 1 \tag{60}$$

De esta manera tenemos que los cortes se cumplen para $s = \pm j$.

Resolucion 3.2 (Forma 2)

Otra condicion que se utilizara con mucha mas frecuencia es a la condicion de angulo , la cual vendra dada por:

$$\angle \sum \Theta_{polos} - \sum \Theta_{ceros} = \pm 180^\circ + n360^\circ \tag{61}$$

De esta manera tenemos que encontrar los angulos asociados a los polos y ceros deberan cumplir tal condicion, pero ademas deberemos considerar que s=jw , dado nos interesa el corte en el eje real que cumpla dicha condicion de angulo.Retomando la funcion de transferencia:

$$H(s)G(s) = \frac{(s+3)}{s^2 - s - 2} \tag{62}$$
$$= \frac{(s+3)}{(s-2)(s+1)} \tag{63}$$

Tenemos luego que existe $p_1 = -1$,$p_2 = 2$ y $z_1 = -3$, con lo que luego tenemos que se debe cumplir que:

$$\theta_{z_1} - (\theta_{p_1} + \theta_{p_2}) = 180 \tag{64}$$

Que graficamente correspondera a lo siguiente (Debemos recordar siempre como es la apertura de los angulos):

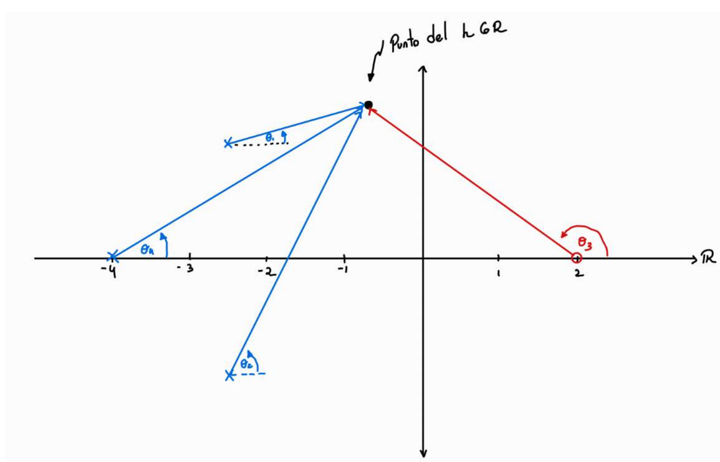


Figura 12: Recordatorio de como se miden los angulos para algun punto que pertenece al LGR

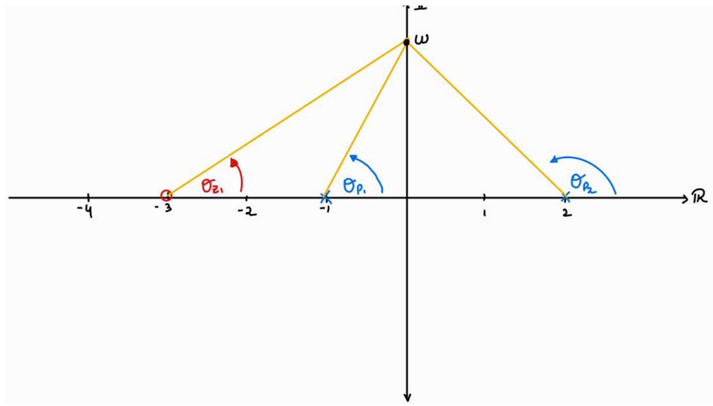


Figura 13: Angulos para la funcion de transferencia vista con anterioridad

$$tan(\theta_{p_1}) = \frac{w}{1} \tag{65}$$
$$tan(\theta_{p_2}) = \frac{w}{2} \tag{66}$$
$$tan(\theta_{z_1}) = \frac{w}{3} \tag{67}$$

Con lo que sus respectivos angulos corresponderan a:

$$\theta_{p_1} = atan(\frac{w}{1}) \tag{68}$$
$$\theta_{p_2} = 180 - atan(\frac{w}{2}) \tag{69}$$
$$\theta_{z_1} = atan(\frac{w}{1}) \tag{70}$$

Con lo que reemplazando en la condicion de angulo se obtiene que:

$$atan(\frac{w}{3}) - (atan(\frac{w}{1}) + 180 - atan(\frac{w}{2})) = 180 \tag{71}$$
$$atan(\frac{w}{3}) - atan(\frac{w}{1}) - 180 + atan(\frac{w}{2}) = 180 \tag{72}$$
$$atan(\frac{w}{3}) - atan(\frac{w}{1}) + atan(\frac{w}{2}) = 360 \tag{73}$$

Donde ademas sabemos que 360 es equivalente a 0, por lo que se obtiene que:

$$atan(\frac{w}{3}) - atan(\frac{w}{1}) + atan(\frac{w}{2}) = 0 \tag{74}$$

Luego queda por resolver la ecuacion , la cual entrega tres soluciones:

$$w_1 = 0 \tag{75}$$
$$w_2 = +j \tag{76}$$
$$w_3 = -j \tag{77}$$

Mismas obtenidas con anterioridad.