Electromagnetismo Aplicado (EL3103-1)
Clase auxiliar 5
Prof. Benjamin Jacard H.
Prof. Aux. Erik Saez A.

Constante de propagación: La constante de propagación describe cómo las ondas electromagnéticas se propagan y se atenúan a medida que atraviesan el medio, donde existen dos parámetros de interés

- α : Atenuación del campo electromagnético en el medio. Es la parte real de la constante de propagación.
- $j\beta$: componente imaginaria de la constante de propagación. Está asociado con la variación espacial de la onda y se mide en radianes por unidad de longitud.

La expresión completa viene caracterizada por

$$\gamma = jk = \alpha + j\beta = j\omega\sqrt{\mu\epsilon'\left(1 - j\frac{\epsilon''}{\epsilon'}\right)} \tag{1}$$

Para la gran mayoría de ejercicios se considerara que los campos eléctricos y magnéticos son perpendiculares a la dirección de propagación y por tanto son representados tal que:

$$\vec{E}(z,t) = E_{inc}e^{z(\alpha - j\beta)}e^{j\omega t} + E_{ref}e^{z(\alpha + j\beta)}e^{j\omega t} \tag{2}$$

Donde se tendrá una onda incidente E_{inc} (Que viene de alguna fuente) y una onda reflejada E_{ref} (Producto del cambio de medio), como a su vez una onda que puede ser transmitida que continuara en el otro medio en caso de existir. Ademas debemos considerar que la propagación es en $\hat{k}$ .Sabemos que debido a la notación fasorial podemos expresa el rotor del campo eléctrico como:

$$\nabla \times \vec{E} = -j\omega\mu_0\vec{H} \tag{3}$$

Lo que permite obtener el campo $\vec{H}$ en función de $\vec{E}$ como :

$$\vec{H} = Y\hat{n} \times \vec{E} \tag{4}$$

Donde Y representa la admitancia del medio , la cual viene dada por:

$$Y = Y_0\sqrt{\epsilon_r} \tag{5}$$

$$= \sqrt{\frac{\epsilon_{medio}}{\mu_0}} \tag{6}$$

Es importante recordar las expresiones asociadas a las condiciones de borde así como de Potencia y energía para los próximos ejercicios. Ademas de las siguientes identidades:

$$sen(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \qquad cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{iz}}{2} \tag{7}$$

1. Demuestra la ecuacion de Onda y derive una expresión explicita para la velocidad de propagación de una onda electromagnética en el vacio.

Solución:

Es importante el recordar que los campos eléctricos y magnéticos pueden ser representados mediante ecuaciones de onda. Por ecuaciones de Maxwell se tiene:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \tag{8}$$

$$\tag{9}$$

Luego esto se utilizara en lo siguiente. Haciendo uso de las propiedades de los operadores.

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) - \nabla^2 \vec{B} \tag{10}$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = -\vec{\nabla}^2 \vec{B} \tag{11}$$

$$\vec{\nabla} \times \left(\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = -\vec{\nabla}^2 \vec{B} \tag{12}$$

$$\epsilon_0 \mu_0 \left(\vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = -\vec{\nabla}^2 \vec{B} \tag{13}$$

$$\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\vec{\nabla} \times \vec{E} \right) = -\vec{\nabla}^2 \vec{B} \tag{14}$$

$$\epsilon_0 \mu_0 \left(-\frac{\partial^2 B}{\partial t} \right) = -\nabla^2 \vec{B} \tag{15}$$

$$\nabla^2 \vec{B} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0 \tag{16}$$

Con lo que se logra obtener la ecuación de onda que permite describir el campo magnético, es importante notar que $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$ con c la velocidad de la luz . De manera análoga para el campo eléctrico se tendrá:

$$\nabla^2 \vec{E} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \tag{17}$$

2. Considere una onda plana cuyo campo eléctrico tiene una magnitud E_0 y dirección $\hat{i}$, incidiendo normalmente en una placa dieléctrica perfecta adosada a un plano perfectamente conductor, como se indica la figura .Ademas considere que la frecuencia de operación es f_0 y el espesor de la placa dieléctrica es d = $\lambda/4$ en que λ es la longitud de onda dentro del dieléctrico.

   1. Determine los campos totales E(z) y H(z) en todas partes. Ademas bosqueje $\|E(z)\|$ y $\|H(z)\|$
   2. Determine el coeficiente de reflexión Γ(z) en z=-d
   3. Determine la densidad de potencia (Por unidad de área en el plano xy) incidente y reflejada para cualquier z<-d

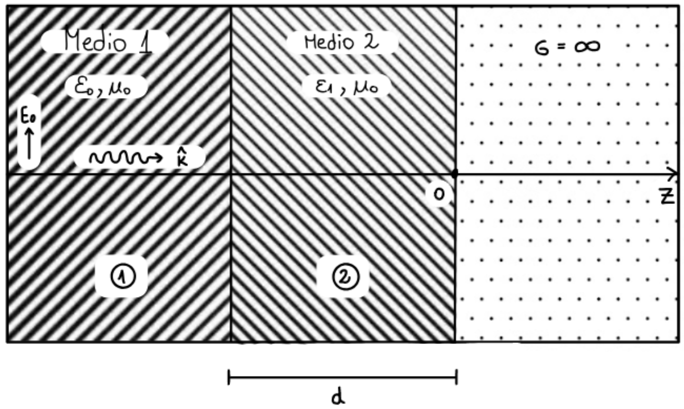


Figura 1: Esquema de los dielectricos

Solución:

1. Se busca el obtener los campos E(z) y H(z) en todos los medios , se tendrá que analizar en cada uno de estos, además de analizar sus condiciones de borde:

   Campo eléctrico Medio 1

   $$E_1(z) = (E_1^+ e^{jw_o t} e^{-jk_0 z} + E_1^- e^{jw_o t} e^{jk_0 z})\hat{i} \tag{18}$$

   Campo eléctrico Medio 2

   $$E_2(z) = (E_2^+ e^{jw_o t} e^{-jk_1 z} + E_2^- e^{jw_o t} e^{jk_1 z})\hat{i} \tag{19}$$

   Luego buscamos analizar las condiciones de borde por tanto se considera los casos en que z = -d y z = 0.

   Caso 1 $E_1(z = -d) = E_2(z = -d)$

   Sabemos por condiciones de borde, que dichos campos eléctricos en la interfaz deberán ser iguales, por lo que igualando se tiene que:

   $$(E_1^+ e^{jw_o t} e^{jk_0 d} + E_1^- e^{jw_o t} e^{-jk_0 d}) = (E_2^+ e^{jw_o t} e^{jk_1 d} + E_2^- e^{jw_o t} e^{-jk_1 d}) \tag{20}$$

   Notamos que la componente asociada a la frecuencia puede ser eliminada , por lo que reduciendo la expresión *(Muchas veces la omitiremos por el mismo motivo dado que entre medios su variante temporal debe ser la misma)* .

   $$(E_1^+ e^{jk_0 d} + E_1^- e^{-jk_0 d}) = (E_2^+ e^{jk_1 d} + E_2^- e^{-jk_1 d}) \tag{21}$$

Caso 2 $E_2(z=0) = E_3(z=0)$

Se tendrá una condición de conductividad infinita, eso implicara que no existirá onda transmitida y por lo tanto se tendrá directamente que $E_3 = 0$, es decir:

$$(E_2^+ e^{jw_o t} e^{-jk_1 \cdot 0} + E_2^- e^{jw_o t} e^{jk_1 \cdot 0}) = E_3 = 0 \tag{22}$$

$$E_2^+ + E_2^- = 0 \tag{23}$$

$$E_2^+ = -E_2^- \tag{24}$$

Lo cual es consistente con el hecho de que no se esta transmitiendo campo eléctrico en el medio 3 , por lo que las amplitudes incidente y reflejada deben ser iguales y por tanto no existe perdida. Luego deberemos obtener mas ecuaciones para poder encontrar las expresiones particulares de los campos eléctricos , esto se logra relacionando las ecuaciones de intensidad magnética , y teniendo en consideración que son perpendiculares:

Intensidad de campo magnético para ambos medios

$$H_1 = Y_0(\hat{k}) \times (E_1^+ e^{jw_o t} e^{-jk_0 z})(\hat{\imath}) + Y_0(-\hat{k}) \times (E_1^- e^{jw_o t} e^{jk_0 z})(\hat{\imath}) \tag{25}$$

Dado que sabemos que la propagación va en $\hat{z}$, luego se tendrá que H deberá ir en $\hat{\jmath}$, lo cual es consistente con la expresión anterior:

$$H_1 = (Y_0 E_1^+ e^{jw_o t} e^{-jk_0 z} - Y_0 E_1^- e^{jw_o t} e^{jk_0 z})(\hat{\jmath}) \tag{26}$$

Análogamente se tiene que para el medio 2

$$H_2 = (Y_1 E_2^+ e^{jw_o t} e^{-jk_1 z} - Y_1 E_2^- e^{jw_o t} e^{jk_1 z})(\hat{\jmath}) \tag{27}$$

Bajo el mismo argumento anterior tendremos que las intensidades de campo magnético deberán ser iguales y por lo tanto:

Caso 2 $H_1(z=-d) = H_2(z=-d)$

Utilizando la igualdad se obtiene que:

$$(Y_0 E_1^+ e^{jk_0 d} - Y_0 E_1^- e^{-jk_0 d}) = (Y_1 E_2^+ e^{jk_1 d} - Y_1 E_2^- e^{-jk_1 d}) \tag{28}$$

$$Y_0(E_1^+ e^{jk_0 d} - E_1^- e^{-jk_0 d}) - Y_1(E_2^+ e^{jk_1 d} - E_2^- e^{-jk_1 d}) = 0 \tag{29}$$

Dada la expresión general, nos enfocaremos en el caso particular d= $\lambda/4$, por lo que reemplazando sobre las ecuaciones anteriores y recordando que:

$$k_0 = \beta = \frac{2\pi}{\lambda} \tag{30}$$

Luego

$$d \cdot k_0 = \frac{\lambda}{4} \cdot \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\pi}{2} \tag{31}$$

Por lo que tenemos que:

$$e^{\pm j\frac{\pi}{2}} = \pm j \tag{32}$$

Por lo que reemplazando sobre lo anterior:

$$E_1^+ j - E_1^- j = E_2^+ j - E_2^- j \tag{33}$$
$$E_1^+ - E_1^- = E_2^+ - E_2^- \tag{34}$$

Pero anteriormente se verifico que $E_2^- = -E_2^+$, por lo que reemplazando tenemos:

$$E_1^+ - E_1^- = 2E_2^+ \tag{35}$$

Por otro lado tenemos que para la intensidad de campo magnético sigue que:

$$Y_0(E_1^+ e^{jk_0 d} - E_1^- e^{-jk_0 d}) = Y_1(E_2^+ e^{jk_1 d} - E_2^- e^{-jk_1 d}) \tag{36}$$
$$Y_0(E_1^+ j + E_1^- j) = Y_1(E_2^+ j + E_2^- j) \tag{37}$$
$$Y_0(E_1^+ + E_1^-) = Y_1(E_2^+ + E_2^-) \tag{38}$$
$$Y_0(E_1^+ + E_1^-) = Y_1(E_2^+ + E_2^-) = 0 \tag{39}$$
$$E_1^+ = -E_1^- \tag{40}$$

Tenemos además que $E_1^+ = E_0$ por lo tanto:

$$E_0 = -E_1^- \tag{41}$$

De esta forma,

$$E_1^+ - E_1^- = 2E_2^+ \tag{42}$$
$$E_0 + E_0 = 2E_2^+ \tag{43}$$
$$E_0 = E_2^+ \tag{44}$$

Finalmente los campos serán de la siguiente forma (*Utilizaremos las expresiones de seno y coseno vistas en el resumen)*:

$$E_1(z) = E_0 e^{-jk_0 z} + E_1^- e^{jk_0 z} \tag{45}$$
$$= E_0 e^{-jk_0 z} - E_0^- e^{jk_0 z} \tag{46}$$
$$= E_0(E_0 e^{-jk_0 z} - E_0^- e^{jk_0 z}) \tag{47}$$
$$= -2jE_0 sen(k_0 z) \tag{48}$$

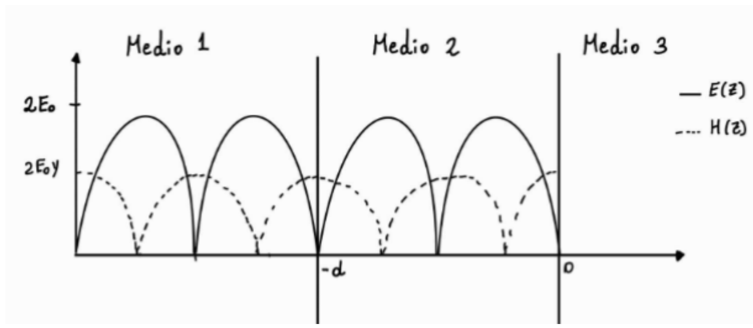
$$E_2(z) = E_2^+ e^{-jk_1 z} + E_2^- e^{jk_1 z} \tag{49}$$
$$= E_2^+ e^{-jk_1 z} - E_2^+ e^{jk_1 z} \tag{50}$$
$$= E_2^+(e^{-jk_1 z} - e^{jk_1 z}) \tag{51}$$
$$= -2jE_0 sen(k_1 z) \tag{52}$$

Por otro lado para la intensidad de campo magnético tenemos que :

$$H_1(z) = Y_0 E_1^+ e^{-jk_0 z} - Y_0 E_1^- e^{jk_0 z} \tag{53}$$
$$= Y_0 E_0^+ e^{-jk_0 z} + Y_0 E_0^- e^{jk_0 z} \tag{54}$$
$$= Y_0 E_0(e^{-jk_0 z} + e^{jk_0 z}) \tag{55}$$
$$= 2Y_0 E_0 cos(k_0 z) \tag{56}$$

$$
\begin{aligned}
H_2(z) &= Y_1 E_2^+ e^{-jk_1 z} - Y_1 E_2^- e^{jk_1 z} && (57)\\
&= Y_1 E_2^+ e^{-jk_0 z} + Y_1 E_2^- e^{jk_0 z} && (58)\\
&= Y_1 E_0 (e^{-jk_0 z} + e^{jk_0 z}) && (59)\\
&= 2 Y_1 E_0 cos(k_1 z) && (60)
\end{aligned}
$$

Con lo que se obtienen finalmente los campos E(z,t) y H(z,t) para ambos medios, luego graficando tenemos lo siguiente:



.

2. Se busca determinar el coeficiente de reflexión en Γ ,lo obtendremos de manera general (*Es posible obtenerlo directamente de lo visto anteriormente, pero por completitud se obtendrá la expresión general*), por lo que volviendo sobre las ecuaciones anteriores:

$$(E_1^+ e^{jk_0 d} + E_1^- e^{-jk_0 d}) = (E_2^+ e^{jk_1 d} + E_2^- e^{-jk_1 d}) \tag{61}$$

De las relaciones anteriores se obtiene ($E_2^- = E_2^+$),

$$
\begin{aligned}
(E_1^+ e^{jk_0 d} + E_1^- e^{-jk_0 d}) &= (E_2^+ e^{jk_1 d} + E_2^- e^{-jk_1 d}) && (62)\\
&= 2jE_2^+ sen(k_1 d) && (63)\\
(E_1^+ e^{jk_0 d} + E_1^- e^{-jk_0 d}) &= 2jE_2^+ sen(k_1 d) && (64)
\end{aligned}
$$

En relación a la intensidad de campo magnético.

$$Y_0 E_0 e^{jk_0 d} - Y_0 E_1^- e^{-jk_o d} = 2 Y_1 E_2^+ cos(k_1 d) \tag{65}$$

Recordemos que el coeficiente de reflexión vendrá dado por

$$
\begin{aligned}
\Gamma(z) &= \frac{E_1^- e^{-jk_o z}}{E_1^+ e^{jk_o z}} && (66)\\
&= \frac{E_1^-}{E_1^+} e^{-j2k_0 d} && (67)
\end{aligned}
$$

Es por esto que nos interesa dejar esta relación en términos de expresiones conocidas, en particular de E_1^- con respecto a $E_0 = E_1^+$, por lo que debemos despejar el termino reflejado (E_1^-) dividiendo las ecuaciones anteriores, se obtiene lo siguiente:

$$\frac{E_1^+ e^{jk_0 d} + E_1^- e^{-jk_0 d}}{Y_0 (E_0 e^{jk_0 d} - E_1^- e^{-jk_o d})} = \frac{1}{Y_1} j tan(k_1 d) \tag{68}$$

Luego despejando E_1^- tendremos la siguiente expresión:

$$E_1^- = E_0 e^{j2k_0d} \frac{\left(\frac{Y_0}{Y_1} jtg(k_1d) - 1\right)}{\left(\frac{Y_0}{Y_1} jtg(k_1d) + 1\right)} \tag{69}$$

Que reemplazando sobre la ecuación del coeficiente de reflexión:

$$\Gamma(z = -d) = \frac{\left(\frac{Y_0}{Y_1} jtg(k_1d) - 1\right)}{\left(\frac{Y_0}{Y_1} jtg(k_1d) + 1\right)} \tag{70}$$

Donde utilizando la siguiente relación:

$$Y_0 = \frac{1}{Z_0} \qquad\qquad Y_1 = \frac{1}{Z_1} \tag{71}$$

Tal que la expresión:

$$\Gamma(z = -d) = \frac{jZ_1tg(k_1d) - Z_0}{jZ_1tg(k_1d) + Z_0} \tag{72}$$

Se obtiene una expresión muy útil que se utilizara mas adelante *(En la siguiente unidad)*, y nos da una expresión que permite obtener el coeficiente de reflexión en cualquier punto que sea de interés, por ahora nos reduciremos a evaluarla en $d = \lambda/4$ por lo que se obtiene:

$$\Gamma(z = -\frac{\lambda}{4}) = \frac{jZ_1tg(k_1\frac{\lambda}{4}) - Z_0}{jZ_1tg(k_1\frac{\lambda}{4}) + Z_0} \tag{73}$$

$$= 1 \tag{74}$$

Luego, tendremos que cuando $d = \frac{\lambda}{4}$, el modulo de las amplitudes del campo reflejado y transmitido son iguales y en la misma fase con respecto a la onda incidente.

3. Se busca obtener la densidad de potencia (Por unidad de área en plano xy) por tanto se utilizara el vector de Poynting tal que:

$$P_1^+ = \frac{1}{2} Re(E_1 \times H_1^*)\hat{k} \tag{75}$$

$$= \frac{1}{2} Re(E_0 e^{-jk_0z} \times Y_1 E_0 e^{jk_0z}) \tag{76}$$

$$= \frac{1}{2} Re(E_0^2 Y_0) \tag{77}$$

$$= \frac{1}{2} E_0^2 Y_0 \tag{78}$$

De manera similar tenemos que para la potencia reflejada:

$$P_1^- = \frac{1}{2} Re(E_1^- \times H_1^- *)(-\hat{k}) = \frac{1}{2} Y_0 E_0^2 \tag{79}$$

3. Considere una onda plana cuyo campo eléctrico tiene una magnitud E_0 y dirección $\vec{x}$, incidiendo normalmente en una sección de tres medios diferentes, siendo este último una placa dieléctrica perfecta adosada a

un plano perfectamente conductor ($\sigma = \infty$), como se indica en el esquema.

1. Obtenga una relación entre los campos E_2^- y E_2^+ en función de d_2.
2. Una vez determinada la expresión anterior, analice cuando $d_2 = \frac{\lambda}{2}$ y explique en términos del módulo del coeficiente de reflexión.
3. Considerando que $d_2 = \frac{\lambda}{2}$, determine una expresión para las amplitudes de los campos E_1^- y E_1^+ y analice el caso cuando $d_1 = \frac{\lambda}{2}$.
4. Considerando que $d_1 = d_2 = \frac{\lambda}{2}$, calcule el valor de potencia por unidad de área en el Medio 1 tanto para la onda incidente como para la reflejada.
5. ¿Son las potencias para la onda incidente y reflejada, obtenidas con anterioridad, diferentes? Argumente su respuesta.

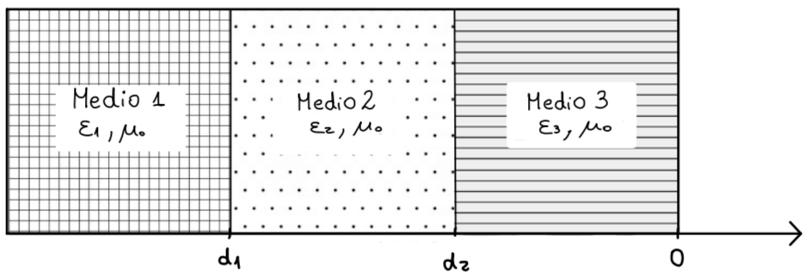


Figura 2: Esquema del problema

Solución:

1. Se busca obtener una relación para los campos E_2^- y E_2^+ en función de de d_2, por tanto las expresiones de los campos eléctricos y magnéticos en general para los diferentes medios corresponden:

Medio 1 : z $\leq$ d1

$$E_1(z,t) = (E_1^+ e^{jwt} e^{-j\beta_1 z} + E_1^- e^{jwt} e^{j\beta_1 z})(\hat{x}) \tag{80}$$

$$H_1 = Y_1(\hat{z}) \times E_1(\hat{x}) \tag{81}$$

$$H_1 = Y_1(E_1^+ e^{jwt} e^{-j\beta_1 z} - E_1^- e^{jwt} e^{j\beta_1 z})(\hat{y}) \tag{82}$$

Medio 2: $d_1 \leq$ **z** $\leq d_2$

$$E_2(z,t) = (E_2^+ e^{jwt} e^{-j\beta_2 z} + E_2^- e^{jwt} e^{j\beta_2 z})(\hat{x}) \tag{83}$$

$$H_2 = Y_2(\hat{z}) \times E_2(\hat{x}) \tag{84}$$

$$H_2 = Y_2(E_2^+ e^{jwt} e^{-j\beta_2 z} - E_1^- e^{jwt} e^{j\beta_2 z})(\hat{y}) \tag{85}$$

Medio 3: d2 $\leq$ z $\leq$ 0

$$E_3(z,t) = (E_3^+ e^{jwt} e^{-j\beta_3 z} + E_3^- e^{jwt} e^{j\beta_3 z})(\hat{x}) \tag{86}$$

$$H_3 = Y_3(\hat{z}) \times E_3(\hat{x}) \tag{87}$$

$$H_3 = Y_3(E_3^+ e^{jwt} e^{-j\beta_3 z} - E_3^- e^{jwt} e^{j\beta_3 z})(\hat{y}) \tag{88}$$

Con lo que finalmente se obtienen las expresiones de campo eléctrico y intensidad magnetica para los 3 medios, el 4 es despreciable debido a la presencia de una pared con conductividad infinita (Reflexión total). Luego queremos relacionar E_2^+ y E_2^- , es por esto que evaluaremos en la interfaz de los medios 2 y 3:

Interfaz medio 2 y 3 (campo eléctrico)

$$E_2(z = -d_2) = E_3(z = -d_2) \tag{89}$$

Reemplazando y teniendo la consideración con los signos se tendrá que:

$$(E_2^+ e^{jwt} e^{j\beta_2 d_2} + E_2^- e^{jwt} e^{-j\beta_2 d_2}) = (E_3^+ e^{jwt} e^{j\beta_3 d_2} + E_3^- e^{jwt} e^{-j\beta_3 d_2}) \tag{90}$$

A partir de ahora omitiremos en todas las expresiones los términos fasoriales asociados a el tiempo e^{jwt} dado que no cambia con los cambios de medios por lo que no sera relevante.

$$(E_2^+ e^{j\beta_2 d_2} + E_2^- e^{-j\beta_2 d_2}) = (E_3^+ e^{j\beta_3 d_2} + E_3^- e^{-j\beta_3 d_2}) \tag{91}$$

Necesitamos eliminar la dependencia de las amplitudes asociadas al medio 3. por lo que evaluando en z=0 , tenemos que:

$$E_3(z = 0, t) = (E_3^+ e^{-j\beta_3 \cdot 0} + E_3^- e^{j\beta_3 \cdot 0}) = 0 \tag{92}$$

$$= E_3^+ + E_3^- = 0 \tag{93}$$

$$E_3^+ = -E_3^- \tag{94}$$

Recordemos que lo igualamos a 0 , debido a la conductividad infinita de la interfaz y por tanto la no existencia de onda en el otro medio. Reemplazando esta condición sobre lo anterior:

$$(E_2^+ e^{j\beta_2 d_2} + E_2^- e^{-j\beta_2 d_2}) = (E_3^+ e^{j\beta_3 d_2} + E_3^- e^{-j\beta_3 d_2}) \tag{95}$$

$$(E_2^+ e^{j\beta_2 d_2} + E_2^- e^{-j\beta_2 d_2}) = E_3^+ (e^{j\beta_3 d_2} - e^{-j\beta_3 d_2}) \tag{96}$$

$$(E_2^+ e^{j\beta_2 d_2} + E_2^- e^{-j\beta_2 d_2}) = 2E_3^+ jsen(\beta_3 d_s) \tag{97}$$

Con lo que reducimos a solo tener un E_3^+, con lo que debemos relacionar alguna otra expresión para reducirlo, usando la intensidad de campo magnético de la siguiente manera:

Interfaz medio 2 y 3 (campo magnético)

$$H_2(z=-d_2) = H_3(z=-d_2) \tag{98}$$
$$Y_2(E_2^+e^{-j\beta_2 z} - E_1^- e^{j\beta_2 z}) = Y_3(E_3^+e^{-j\beta_3 z} - E_3^- e^{j\beta_3 z}) \tag{99}$$

Utilizamos la misma condición que obtuvimos de antes (*Es decir que* $E_3^+ = -E_3^-$):

$$Y_2(E_2^+e^{-j\beta_2 z} - E_1^- e^{j\beta_2 z}) = Y_3 E_3^+(e^{-j\beta_3 z} + e^{j\beta_3 z}) \tag{100}$$
$$Y_2(E_2^+e^{-j\beta_2 z} - E_1^- e^{j\beta_2 z}) = Y_3 2E_3^+ cos(\beta_3 d_2) \tag{101}$$

Luego realizando la división se observa que queda expresada solo en términos de E_2^+ y E_2^- con lo que podemos relacionarlos en función de parámetros conocidos, es decir:

$$\frac{(E_2^+e^{j\beta_2 d_2} + E_2^- e^{-j\beta_2 d_2})}{Y_2(E_2^+e^{-j\beta_2 z} - E_1^- e^{j\beta_2 z})} = \frac{jtan(\beta_3 d_2)}{Y_3} \tag{102}$$

Luego despejando se logra obtener que

$$E_2^- = E_2^+ \frac{e^{j\beta_2 d_2}\left(\frac{Y_2}{Y_3}jtan(\beta_3 d_2) - 1\right)}{e^{-j\beta_2 d_2}\left(1 + \frac{Y_2}{Y_3}jtan(\beta_3 d_2)\right)} \tag{103}$$

Con lo que finalmente se obtiene una expresión que relaciona los campos solo en función de la distancia d_2

2. Se desea analizar la expresión anterior cuando $d_2 = \frac{\lambda}{2}$, por lo que evaluando de manera directa se tendrá:

$$E_2^- = E_2^+ \frac{e^{j\beta_2 \cdot \frac{\lambda}{2}}\left(\frac{Y_2}{Y_3}jtan(\beta_3 \cdot \frac{\lambda}{2}) - 1\right)}{e^{-j\beta_2 \cdot \frac{\lambda}{2}}\left(1 + \frac{Y_2}{Y_3}jtan(\beta_3 \cdot \frac{\lambda}{2})\right)} \tag{104}$$

Luego teniendo en consideración que :

$$e^{\pm j\beta_2 d_2} = e^{\pm j\frac{2\pi}{\lambda}\cdot\frac{\lambda}{2}} = e^{\pm j\pi} = (-1) \tag{105}$$
$$jtan(\beta_3 d_2) = jtan(\pi) = 0 \tag{106}$$

Relacionándolo con lo anterior sigue que:

$$E_2^- = E_2^+ \frac{-1\left(\frac{Y_2}{Y_3}\cdot 0 - 1\right)}{-1\left(1 + \frac{Y_2}{Y_3}\cdot 0\right)} \tag{107}$$
$$E_2^- = -E_2^+ \tag{108}$$

Con lo que tenemos un efecto similar al de una pared con conductividad infinita. Así calculamos el coeficiente de reflexión:

$$\Gamma = \frac{E_2^-}{E_2^+}e^{-2j\beta_2 d_2} \tag{109}$$
$$= (-1) \tag{110}$$

Donde si evaluamos obtenemos a priori lo que se esperaba el tener el efecto de una pared con conductividad infinita , esto principalmente porque tenemos amplitudes iguales solo con signos opuestos y por lo tanto tendremos además una reflexión con un desfase de $\pm\ \pi$.

3. Se busca relacionar las amplitudes para el medio 1 considerando la misma distancia para ($d_2 = \lambda/4$) y relacionarlo con lo obtenido con anterioridad. Es **directo** ver que tenemos el mismo análisis anterior (*Un error común es volver a calcularlo y perder mucho tiempo*) , por lo que directamente tenemos que:

$$E_1^- = E_1^+ \frac{e^{j\beta_1 d_1}\left(\frac{Y_1}{Y_2} jtan(\beta_2 d_1) - 1\right)}{e^{-j\beta_1 d_1}\left(1 + \frac{Y_1}{Y_2} jtan(\beta_2 d_1)\right)} \tag{111}$$

Con lo que tenemos para $d_1 = d_2 = \frac{\lambda}{2}$

$$E_1^- = -E_1^+ = -E_0 \tag{112}$$

Recordando que la amplitud de la onda incidente es conocida

4. Luego buscamos obtener si las potencias de la onda incidente y reflejada son iguales **bajo las condiciones anteriores** , con lo tenemos lo siguiente:

$$\langle S_1^+ \rangle = \frac{1}{2} Re(E_1 \times H_1^*) = \frac{1}{2}(E_1^+)^2 Y_1 \hat{z} \tag{113}$$

$$\langle S_1^- \rangle = \frac{1}{2} Re(E_1 \times H_1^*) = \frac{1}{2}(E_1^-)^2 Y_1 \hat{z} \tag{114}$$

En base a lo anterior se tendrá que $E_1^+ = -E_1^- = -E_0$, pero dado que tenemos la expresión cuadrado ,se observa finalmente que:

$$\langle S_1^+ \rangle = \langle S_1^- \rangle \tag{115}$$

Lo cual es consistente con la intuición.