Auxiliar #3

Análisis de sistemas dinámicos y estimación

Erik Saez A.

Department of Electrical Engineering
Universidad de Chile

September 2, 2025

erik.saez@ug.uchile.cl

Contenidos

Fig.: Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas , Universidad de Chile.

Función de transferencia

¿Qué es y para qué sirve?

Describe la relación entrada–salida de un sistema LTI con condiciones iniciales nulas: $Y(s) = H(s)\,U(s)$ (o $Y(z) = H(z)\,U(z)$ en discreto). Resume la dinámica en el dominio transformado y permite:

- identificar polos y ceros (estabilidad y dinámica);
- analizar la respuesta en frecuencia y el desempeño;
- componer sistemas (cascada/paralelo/retroalimentación);
- pasar entre $H(\cdot)$ y realizaciones en variables de estado.

Definición (continuo)

Para $\dot{x} = Ax + Bu$, $y = Cx + Du$:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = C\,(sI - A)^{-1}B + D.$$

Discreto

Para $x[k+1] = Ax[k] + Bu[k]$, $y[k] = Cx[k] + Du[k]$:

$$H(z) = C\,(zI - A)^{-1}B + D.$$

De EDO a variables de estado (resumen)

Definición (VVEE)

Continuo: $\dot{x} = Ax + Bu$, $y = Cx + Du$. Discreto: $x[k+1] = Ax[k] + Bu[k]$, $y[k] = Cx[k] + Du[k]$. $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^p$.

Método 1 (directo desde la EDO)

Para $\ddot{y} + 2\dot{y} - 15y = u$, defina $x_1 = y$, $x_2 = \dot{y}$:

$$\dot{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 15 & -2 \end{pmatrix}}_{A} x + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{B} u, \quad y = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}}_{C} x.$$

Pros: directo. Contras: A no diagonal $\Rightarrow$ cálculos largos para $\mathbf{\Phi}(t)$.

Método 2 (desde $H(s)$)

$$H(s) = \frac{1}{(s-3)(s+5)} = \frac{1/8}{s-3} - \frac{1/8}{s+5} \quad \Rightarrow \quad \text{realización}$$

$$A = \mathrm{diag}(3, -5), \; B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} \end{pmatrix}.$$

Ventajas: A diagonal simplifica $\mathbf{\Phi}(t)$ e $h(t)$; polos de $H(s)$ en la diagonal de A.

Matriz de transición de estados (MTE)

Definición y propiedades

Recordemos: $\Phi(t, t_0)$ (o $\Phi[k, k_0]$) es la *solución fundamental* que propaga estados:

$$x(t) = \Phi(t, t_0)\, x(t_0), \qquad \Phi(t_0, t_0) = I.$$

Dinámica general

$$\frac{\partial}{\partial t}\Phi(t, t_0) = A(t)\,\Phi(t, t_0), \qquad \Phi(t_0, t_0) = I, \tag{1}$$

$$\Phi[k+1, k_0] = A[k]\,\Phi[k, k_0], \qquad \Phi[k_0, k_0] = I. \tag{2}$$

Caso LTI

Matrices constantes:

$$\Phi(t, t_0) = e^{A(t-t_0)} = \mathcal{L}^{-1}\{(sI - A)^{-1}\}, \tag{3}$$

$$\Phi[k, k_0] = A^{k-k_0} = \mathcal{Z}^{-1}\{\, z\,(zI - A)^{-1}\}. \tag{4}$$

Variación de parámetros

Entrada no nula (continuo):

$$x(t) = \Phi(t, t_0)\, x(t_0) + \int_{t_0}^{t} \Phi(t, \tau)\, B(\tau)\, u(\tau)\, d\tau.$$

Diagonalización (idea y receta)

Diagonalización

¿Por qué diagonalizar? Escribir $A = TDT^{-1}$ desacopla la dinámica por modos y hace inmediata la MTE: $\Phi(t) = e^{At} = T\,e^{Dt}\,T^{-1}$ (con e^{Dt} diagonal). Esto simplifica el cálculo de $f(A)$ (p. ej., A^k, e^{At}), clarifica la interpretación (autovalores λ_i como polos/estabilidad) y facilita análisis y diseño por modos (REN(C)/RESC, control y observación) al reducir operaciones matriciales a exponenciales escalares.

Condición de diagonalizabilidad

A es diagonalizable $\iff$ la suma de *multiplicidades geométricas* es n (equiv.: para cada λ, mult. geom. = mult. alg.)..

Receta (pasos prácticos)

1. Calcular el polinomio característico $p(\lambda) = \det(\lambda I - A)$ y sus raíces λ_i (autovalores).
2. Para cada λ_i, resolver $(A - \lambda_i I)v = 0$ y obtener una base del subespacio propio $\mathcal{N}(A - \lambda_i I)$.
3. Si se obtienen n autovectores linealmente independientes, formar $T = [\,v_1 \ \cdots \ v_n\,]$ y $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.

Casos útiles

- Si $A = A^\top$ (real simétrica) $\Rightarrow$ diagonalizable por matriz ortogonal: $A = Q\Lambda Q^\top$ (teorema espectral).
- Si no hay n autovectores L.I. $\Rightarrow$ *no* es diagonalizable: usar forma canónica de Jordan.

Conexión con MTE

Si $A = TDT^{-1}$, entonces $f(A) = Tf(D)T^{-1}$. En particular: $\Phi(t) = e^{At} = Te^{Dt}T^{-1}$ y $e^{Dt} = \operatorname{diag}(e^{\lambda_i t})$.

Forma canónica de Jordan

Una matriz no diagonalizable se escribe $A = PJP^{-1}$, donde J es *block-diagonal* con bloques de Jordan $J_i(\lambda)$:

$$J_i(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix}.$$

Cada bloque corresponde a una cadena de autovectores generalizados. Consecuencia clave para e^{At}:

- $e^{J(\lambda)t} = e^{\lambda t}$ multiplicado por una matriz triangular con potencias $t^k/k!$ sobre superdiagonales.
- Si hay bloques de tamaño m, aparecen términos $t^k e^{\lambda t}$, $k = 0, \ldots, m-1$ en las respuestas.

Respuesta impulsional y funciones base

Continuo: $h(t) = C\,\mathbf{\Phi}(t)\,B + D\,\delta(t)$. Discreto: $h[k] = CA^{k-1}B$ para $k \geq 1$ y $h[0] = D$.

Ejemplo (realización del Método 2):

$$h(t) = \tfrac{1}{8}e^{3t} - \tfrac{1}{8}e^{-5t}, \quad t \geq 0.$$

Respuesta a entrada cero: $y_0(t) = C\,\mathbf{\Phi}(t)\,x(0)$. Las funciones base son las componentes L.I. que aparecen en $y_0(t)$.

Ejemplo: $\{e^{3t},\, e^{-5t}\}$. Si hay cadenas de Jordan de tamaño m, aparecen términos $t^k e^{\lambda t}$, $k = 0, \ldots, m-1$.

Estabilidad: BIBS y BIBO

extbfBIBS (continuo): $\mathrm{Re}\{\lambda_i(A)\} < 0$. **BIBS** (discreto): $|\lambda_i(A)| < 1$. En la frontera puede haber comportamientos marginales.

extbfBIBO: continuo $\int_0^\infty |h(t)|\,dt < \infty$; discreto $\sum_{k\geq 0} |h[k]| < \infty$.

Ejemplo: $\lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = -5\ \Rightarrow$ no BIBS. Como $h(t)$ contiene e^{3t}, tampoco es BIBO. Relación continuo-discreto: $z = e^{sT}$.

Controlabilidad y observabilidad (resumen)

extbfControlable si $\operatorname{rank}\,[\,B\ AB\ \cdots\ A^{n-1}B\,] = n$. extbfObservable si $\operatorname{rank}\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = n$.

extbfPBH: $\operatorname{rank}\,[\,sI - A\ \ B\,] = n$ y $\operatorname{rank}\,[\,sI - A\ \ C^T\,] = n$ para todo $s \in \mathbb{C}$.

extbfGramianos (continuo, horizonte $[0, \infty)$, si A Hurwitz):

$$AW_c + W_cA^T + BB^T = 0, \qquad A^TW_o + W_oA + C^TC = 0.$$

Pregunta #1

Enunciado Pregunta #1

Considere un sistema modelado por la siguiente ecuación diferencial:

$$\ddot{y} + 2\dot{y} - 15y = u. \tag{5}$$

1. Encuentre la función de transferencia del sistema.
2. Formule el sistema en variables de estado.
3. Obtenga la MTE del sistema y encuentre las funciones base.
4. Encuentre la respuesta al impulso del sistema.
5. Determine la estabilidad BIBS y BIBO del sistema.

Pregunta #2

Enunciado Pregunta #2

Considere el siguiente sistema formulado en variables de estado:

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} u(t), \qquad y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} x(t). \tag{6}$$

1. Encuentre la MTE y las funciones base del sistema.
2. Encuentre la respuesta al impulso del sistema.
3. Determine estabilidad BIBS y BIBO.
4. Determine observabilidad y controlabilidad.