Análisis de Sistemas Dinámicos y Estimación
(EL3103)
Clase auxiliar 6
Prof. Heraldo Rozas.
Prof. Aux. Erik Saez - Maximiliano Morales

1. Sea una planta con función de transferencia dada por:

$$G_p(s) = \frac{3}{(s+5)(s-5)} \tag{1}$$

A la cual se le adiciona un controlador de la forma:

$$G_s(s) = K \cdot \frac{(s+5)(s+8.18)}{s(s+450)} \tag{2}$$

Determine mediante el criterio de Routh-Hurwitz el rango de valores de K para los cuales el sistema es estable.

Solución:

Resolucion 1.1

Dado que se busca el analizar si el sistema es estable mediante el criterio de Routh-Hurwitz,se tendra que en base a la ecuacion caracteristica:

$$1 + G_p(s)G_s(s) = 0 \tag{3}$$

Luego se resuelve esta ecuacion con el fin de obtener una factorizacion asociadas a los s, por lo tanto:

$$1 + G(s)H(s) = 0 \tag{4}$$
$$1 + G_p(s)G_c(s) = 0 \tag{5}$$
$$1 + \frac{3k(s+8.18)}{s(s-5)(s+450)} = 0 \tag{6}$$
$$s(s+450)(s-5+3k(s+8.18)) = 0 \tag{7}$$
$$s^3 + 445s^2 - 2250s + 3ks^2 + 24.54k = 0 \tag{8}$$
$$s^3 + 445s^2 + (3k-2250)s + 24.54k = 0 \tag{9}$$

Con lo que se obtienen los valores de las constantes que seran utilizados para el criterio de estabilidad de Routh-Hurwitz:

$$a_1 = 1 \tag{10}$$
$$a_2 = 445 \tag{11}$$
$$a_3 = 3k - 2250 \tag{12}$$
$$a_4 = 24.54k \tag{13}$$

Luego nuestra tabla se vera de la siguiente forma:

s^3	1	(3k-2250)
s^2	445	24.54k
s^1	α_1	α_2
s^0	β_1	β_2

Luego, se tendra que:

$$\alpha_1 = \frac{445(3k-2250) - 24.54k}{445} \tag{14}$$
$$= 2.94k - 2250 \tag{15}$$
$$\alpha_2 = 0 \tag{16}$$
$$\beta_1 = \frac{\alpha_1 \cdot 24.54k - \alpha_2 \cdot 445}{\alpha_1} \tag{17}$$
$$= 25.54k \tag{18}$$
$$\beta_2 = 0 \tag{19}$$

Por lo tanto, para sea estable no debe existir un cambio de signo,eso implica que se debe cumplir que $\alpha_1 > 1$ y $\beta_1 > 0$,por lo que se tiene que para α_1:

$$2.94k - 2250 > 0 \tag{20}$$
$$2.94k > 2250 \tag{21}$$
$$k > 765.3 \tag{22}$$

por otro lado para β_1 se tiene que:

$$25.54k > 0 \tag{23}$$
$$k > 0 \tag{24}$$

Se cumple que cuando $k > 765.3$ el sistema se mantiene estable,por lo que implica que el caso critico se cumple cuando $k = 765.3$.

2. Sean las siguientes funciones, determine la estabilidad Lyapunov para cada una de ellas:

   1. Considere el siguiente sistema dinamico:

$$\dot{x}_1 = -x_1 + 4x_2, \tag{25}$$
$$\dot{x}_2 = -x_1 - x_2^3. \tag{26}$$

   2. Un ejemplo ampliamente estudiado en el área de sistemas dinámicos y caos es el famoso sistema de Lorenz, que es un sistema no lineal que evoluciona en $\mathbb{R}^3$, cuyas ecuaciones están dadas por

$$\dot{x} = \sigma(y - x), \tag{27}$$
$$\dot{y} = rx - y - xz, \tag{28}$$
$$\dot{z} = xy - bz. \tag{29}$$

   3. La ecuación dinámica de un péndulo con una masa M al final de una barra rígida pero sin masa de longitud R es

$$MR\ddot{\theta} + Mg\sin\theta = 0 \tag{30}$$

Solución:

Funciones de Lyapunov:

Sea V una función continua de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}$. Llamamos a $V(x)$ localmente positiva definida (lpd) alrededor de $x = 0$ si:

1. $V(0) = 0$.
2. $V(x) > 0$ para $0 < \|x\| < r$, para algún r.

De manera similar, la función es llamada localmente positiva semidefinida (lpsd) si en la segunda condición se reemplaza $V(x) > 0$ por $V(x) \geq 0$.

La función $V(x)$ es localmente negativa definida (lnd) si $-V(x)$ es lpd, y localmente negativa semidefinida (lnsd) si $-V(x)$ es lpsd.

Una buena forma de visualizar una función de Lyapunov lpd es imaginar "contornos" de valores constantes de V, que forman una serie de superficies cerradas concéntricas alrededor del origen.

La derivada de $V(x)$ a lo largo de una trayectoria del sistema $\dot{x} = f(x)$ es dada por:

$$\dot{V}(x(t)) = \frac{dV(x)}{dx}\dot{x} = \frac{dV(x)}{dx}f(x),$$

donde $\frac{dV(x)}{dx}$ es un vector fila —el gradiente o el Jacobiano de V— con respecto a x.

Resolucion 1.1

Lo primero que se debe analizar del sistema es si es unilateral,eso significa que si la dinamica depende directamente del tiempo en la dinamica del sistema, es decir:

$$\dot{x} = f(x, t) \tag{31}$$

Como observamos en la dinamica tenemos que se cumple que

$$\dot{x} = f(x) \tag{32}$$

Luego debemos encontrar proponer una funcion V(X), para nuestro sistema dinamico:

$$\dot{x_1} = -x_1 + 4x_2 \tag{33}$$
$$\dot{x_2} = -x_1 - x_2^3 \tag{34}$$

Notamos que el punto de equilibrio se cumple para $x_1 = 0$ y $x_2 = 0$, luego tenemos que la funcion de Lyapunov propuesta es:

$$V = x_1^2 + ax_2^2 \tag{35}$$

Donde tenemos que a es una constante positiva, luego vemos ademas que se cumple $V(x) = 0$ y que por otro lado $|V(x)| \to \infty$ cuando $\|x\| \to \infty$. con lo que es definida

3.
1. Sea X una variable aleatoria discreta tal que $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$, obtenga su esperanza y su varianza.
2. Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variables aleatorias continuas i.i.d tal que cada una distribuye $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Obtenga su distribución conjunta.
3. Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variables aleatorias continuas i.i.d tal que cada una distribuye $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Obtenga la distribución de $Y = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - \mu}{\sqrt{n} \cdot \sigma}$.