Auxiliar #2 - Análisis de Sistemas Dinámicos

Función de Transferencia y Respuesta en Frecuencia

Erik Saez A.

Department of Electrical Engineering
Universidad de Chile

August 19, 2025

erik.saez@ug.uchile.cl

Contenidos

Fig.: Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, Universidad de Chile.

Clasificación de Sistemas Dinámicos

Criterios de Clasificación

Los criterios de clasificación de un sistema son maneras de **organizar y categorizar** los sistemas dinámicos en función de sus características y comportamientos.

Punto de vista	**Clasificación**
Origen	Naturales - Artificiales
Naturaleza	Determinísticos - Aleatorios
Número de variables	Monovariables - Multivariables
Continuidad de variables	Variables discretas - continuas
Comportamiento espacial	Variables concentradas - distribuidas
Comportamiento temporal	Variable - Invariante
Linealidad de variables	Lineales - No lineales
Realizabilidad	Causales - Anticipativos

Análisis en Frecuencia

Introducción

Muchas veces el análisis de un sistema determinado se facilita si se realiza en función de su frecuencia, en vez del tiempo. Para esto existen distintas herramientas, tanto analíticas como computacionales, que sirven para distintos tipos de sistemas.

Transformada de Laplace

Se definen la transformada de Laplace unilateral y bilateral como:

Unilateral:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) := \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

Bilateral:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) := \int_{-\infty}^\infty f(t)e^{-st}dt$$

donde $s = \sigma + j\omega$ es la "frecuencia compleja". Generalmente, las funciones resultantes de una transformada de Laplace se escriben con mayúsculas.

Propiedades Importantes

Esta transformada cumple con tres propiedades importantes:

- **Linealidad:**

$$\mathcal{L}\{af(t) + bg(t)\} = aF(s) + bG(s)$$

- **Desplazamiento:**

$$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s-a)$$

$$\mathcal{L}\{f(t-a)\} = e^{-as}F(s)$$

Análisis en Frecuencia

Definición

Una de las utilidades de la transformada de Laplace es que tiene una inversa:

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t) := \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s)e^{st}ds$$

Antitransformadas Típicas

- $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} = 1$ $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} = t$
- $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+a}\right\} = e^{-at}$ $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+a^2}\right\} = \frac{\sin(at)}{a}$
- $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+a^2}\right\} = \cos(at)$ $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{n!}{s^{n+1}}\right\} = t^n$

Transformadas Básicas

- $\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n}F(s)$
- $\mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1$
- $\mathcal{L}\{(f * g)(t)\} = F(s)G(s)$
- $\mathcal{L}\{f^n(t)\} =$ $s^nF(s) - s^{n-1}F(0) - s^{n-2}F'(0) - \cdots$
- $\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\} = \frac{F(s)}{s}$
- $F(s) = \frac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^T f(s)e^{-st}dt$ si $f(t)$ T periódica

Polos y Función de Transferencia

Función de Transferencia

Para sistemas lineales e invariantes en el tiempo, cuando se realiza un análisis en el dominio de Laplace es posible definir:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

donde $Y(s)$ y $U(s)$ son las transformadas de Laplace de la salida y la entrada, respectivamente.
Esta función caracteriza completamente el comportamiento dinámico del sistema.

Descomposición en Fracciones Parciales

Polos simples: Para $H(s) = \frac{N(s)}{(s+a)D(s)}$:

$$H(s) = \frac{A}{s+a} + \frac{B(s)}{D(s)}$$

donde $A = H(s)(s+a)|_{s=-a}$

Tipos de Polos

- **Polos reales negativos**: $s = -a$ (con $a > 0$)
  $\rightarrow$ Respuesta exponencial decreciente e^{-at}
- **Polos complejos conjugados**: $s = -\sigma \pm j\omega$
  $\rightarrow$ Respuesta oscilatoria amortiguada
- **Polos en el origen**: $s = 0$
  $\rightarrow$ Respuesta escalón o rampa
- **Polos múltiples**: Raíces repetidas
  $\rightarrow$ Términos con $t^n e^{-at}$

Estabilidad

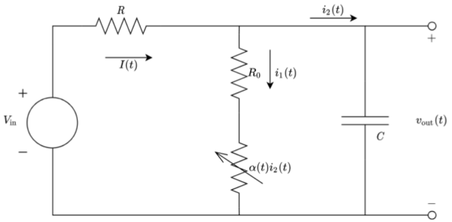
Un sistema es estable si todos sus polos tienen parte real negativa (están en el semiplano izquierdo del plano s).

Pregunta #1

Enunciado Pregunta #1

Considere el siguiente circuito eléctrico, donde $\alpha(t)i_2(t)$ corresponde al valor de la resistencia eléctrica de un potenciómetro, cuyo valor depende tanto de $\alpha(t)$ como de la corriente que circula por el condensador, y $v_{out}(t)$ (voltaje en el condensador) se mide con un voltímetro.

1. Establezca claramente el listado de hipótesis simplificatorias que permitan establecer un modelo matemático válido para este sistema. Indique las condiciones de borde y/o iniciales necesarias.
2. Formule un modelo para el sistema en ecuaciones de estado.
3. Caracterice completamente el modelo utilizando todos los puntos de vista descritos en clases. Clasifique todas las variables del sistema.
4. Encuentre estado(s) cero, estado(s) de equilibrio y el estado tierra (de existir).
5. Linealice el sistema en torno al (los) estado(s) de equilibrio encontrados.



Pregunta #2

Enunciado Pregunta #2

Considere el sistema linealizado del auxiliar anterior, modelado por la siguiente ecuación diferencial:

$$\ddot{\theta}(t) = \frac{g}{l}\theta(t) + \frac{1}{l}u(t) \tag{1}$$

1. Descomponer la salida como la suma de la respuesta a condiciones iniciales nulas y la respuesta a entrada nula en el dominio de Laplace.
2. Obtener la función de transferencia del sistema y encontrar la respuesta al impulso con condiciones iniciales nulas en el dominio del tiempo.
3. Obtener la respuesta a entrada nula en el dominio del tiempo, y expresar la respuesta para una entrada y condiciones iniciales arbitrarias.
4. Encuentre la salida cuando la entrada es un escalón unitario