Ingeniería Eléctrica
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

Análisis de señales (EL3203-2)
Clase auxiliar 2
Prof. Jorge Silva.
Prof. Aux. Erik Sáez

1. Sean los siguientes sistemas a tiempo discreto:

    1. Determine si los siguientes sistemas a tiempo discreto son lineales y/o invariantes en el tiempo:
        - $y[n] = nx[n]$
        - $y[n] = e^{x[n]}$
        - $y[n] = \sum_{j=1}^{M} a_j \cdot x[n-j] + B$
    2. Para el sistema a tiempo discreto T definido por la relación entrada-salida $y[n] = n\,x[n]$, bosqueje por separado $T_k\big(T(x[n])\big)$ y $T\big(T_k(x[n])\big)$ para $k = 2$ y compare con los resultados obtenidos en la parte a. Para el bosquejo considere la señal:

$$x[n] = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq 2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \tag{1}$$

Solución:

Resolución 1.1

Se busca determinar si los sistemas corresponden a sistemas lineales y/o invariantes en el tiempo, dado que cuando cumplen ambas condiciones en simultáneo podemos decir que el sistema será LTI, lo que tiene varias ventajas, como por ejemplo:

- Simplificación del análisis y diseño de sistemas.
- Posibilidad de utilizar la transformada de Fourier para analizar la respuesta en frecuencia.
- Aplicación de técnicas de convolución para determinar la salida del sistema.

Estas dos condiciones vienen caracterizadas por lo siguiente:

- **Linealidad:** Un sistema es lineal si cumple con el principio de superposición, es decir, para cualesquiera dos señales de entrada $x_1[n]$ y $x_2[n]$, y cualesquiera dos constantes escalares α y β, la respuesta del sistema a la combinación lineal de las entradas debe ser igual a la combinación lineal de las respuestas individuales; matemáticamente,

$$T(\alpha x_1[n] + \beta x_2[n]) = \alpha T(x_1[n]) + \beta T(x_2[n]) \tag{2}$$

- **Invariancia temporal:** Un sistema es invariante en el tiempo si un desplazamiento en la entrada produce un desplazamiento idéntico en la salida, sin cambiar la forma de la señal.

$$T_k(T(x[n])) = T(T_k(x[n])) \tag{3}$$

Luego analizando cada caso tenemos que:

(i) $T(x[n]) = n\,x[n] = y[n]$

- **Linealidad:**

$$\begin{aligned} T(\alpha x_1[n] + \beta x_2[n]) &= n(\alpha x_1[n] + \beta x_2[n]) && (4) \\ &= \alpha\, n x_1[n] + \beta\, n x_2[n] && (5) \\ &= \alpha T(x_1[n]) + \beta T(x_2[n]) && (6) \end{aligned}$$

Por lo tanto, el sistema es **lineal**.

- **Invarianza temporal:** Tenemos que el sistema deberá cumplir que $T_k(T(x[n])) = T(T_k(x[n]))$, donde tenemos que:

$$\begin{aligned} T(x[n]) &= nx[n] && (7) \\ T_k(nx[n]) &= (n-k)x[n-k] && (8) \\ & && (9) \end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} T_k(x[n]) &= x[n-k] && (10) \\ T(x[n-k]) &= n\,x[n-k] && (11) \end{aligned}$$

Como se tiene que:

$$(n-k)x[n-k] \neq nx[n-k], \tag{12}$$

el sistema **no es invariante en el tiempo**.

(ii) $T(x[n]) = e^{x[n]} = y[n]$

- **Linealidad:**

$$\begin{aligned} T(\alpha x_1[n] + \beta x_2[n]) &= e^{\alpha x_1[n] + \beta x_2[n]} && (13) \\ &\neq \alpha e^{x_1[n]} + \beta e^{x_2[n]} && (14) \\ &= \alpha T(x_1[n]) + \beta T(x_2[n]) && (15) \end{aligned}$$

Por lo tanto, el sistema es **no lineal**.

- **Invarianza temporal:** Tenemos que el sistema deberá cumplir que $T_k(T(x[n])) = T(T_k(x[n]))$, donde tenemos que:

$$\begin{aligned} T(x[n]) &= e^{x[n]} && (16) \\ T_k(e^{x[n]}) &= e^{x[n-k]} && (17) \\ & && (18) \end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} T_k(x[n]) &= x[n-k] && (19) \\ T(x[n-k]) &= e^{x[n-k]} && (20) \end{aligned}$$

Como

$$T_k(T(x[n])) = T(T_k(x[n])), \tag{21}$$

el sistema es **invariante en el tiempo**.

(iii) $T(x[n]) = \sum_{j=1}^{M} a_j\, x[n-j] + B = y[n]$

- **Linealidad:**

$$T(\alpha x_1[n] + \beta x_2[n]) = \sum_{j=1}^{M} a_j \big(\alpha x_1[n-j] + \beta x_2[n-j]\big) + B \tag{22}$$

$$= \alpha \sum_{j=1}^{M} a_j x_1[n-j] + \beta \sum_{j=1}^{M} a_j x_2[n-j] + B \tag{23}$$

Mientras que:

$$\alpha T(x_1[n]) + \beta T(x_2[n]) = \alpha\Big(\sum_{j=1}^{M} a_j x_1[n-j] + B\Big) + \beta\Big(\sum_{j=1}^{M} a_j x_2[n-j] + B\Big) \tag{24}$$

$$= \alpha \sum_{j=1}^{M} a_j x_1[n-j] + \beta \sum_{j=1}^{M} a_j x_2[n-j] + (\alpha+\beta)B \tag{25}$$

Como aparece un término adicional $(\alpha+\beta)B \neq B$, el sistema es **no lineal**.

- **Invarianza temporal:** Tenemos que el sistema deberá cumplir que $T_k(T(x[n])) = T(T_k(x[n]))$, donde tenemos que:

$$T(x[n]) = \sum_{j=1}^{M} a_j x[n-j] + B \tag{26}$$

$$T_k(\sum_{j=1}^{M} a_j x[n-j] + B) = \sum_{j=1}^{M} a_j x[(n-k)-j] + B \tag{27}$$

$$\tag{28}$$

Por otro lado

$$T_k(x[n]) = x[n-k] \tag{29}$$

$$T(x[n-k]) = \sum_{j=1}^{M} a_j x[n-k-j] + B \tag{30}$$

Como

$$T_k(T(x[n])) = T(T_k(x[n])), \tag{31}$$

el sistema es **invariante en el tiempo**.

Resolución 1.2

Para verificar si el sistema $T(x[n]) = n\, x[n]$ es invariante en el tiempo, se comparan las composiciones $T_k(T(x[n]))$ y $T(T_k(x[n]))$ para $k=2$, donde T_k representa un desplazamiento de dos muestras hacia la derecha. La señal de prueba es:

$$x[n] = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq 2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \tag{32}$$

Gráficamente, $x[n]$ se ve así:

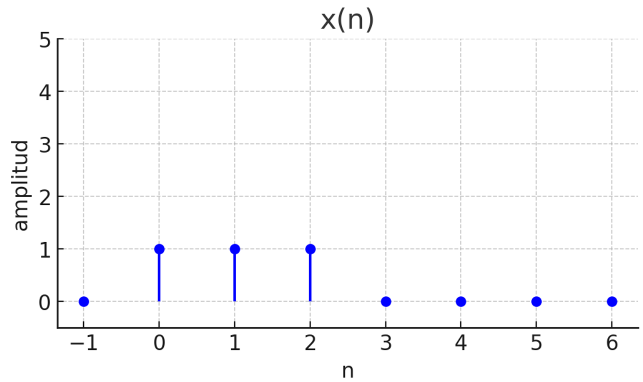


Figura 1: Señal $x[n] = 1$ para $0 \leq n \leq 2$ y 0 en otro caso.

La figura siguiente resume las operaciones aplicadas sobre $x[n]$ y sus resultados intermedios/finales:

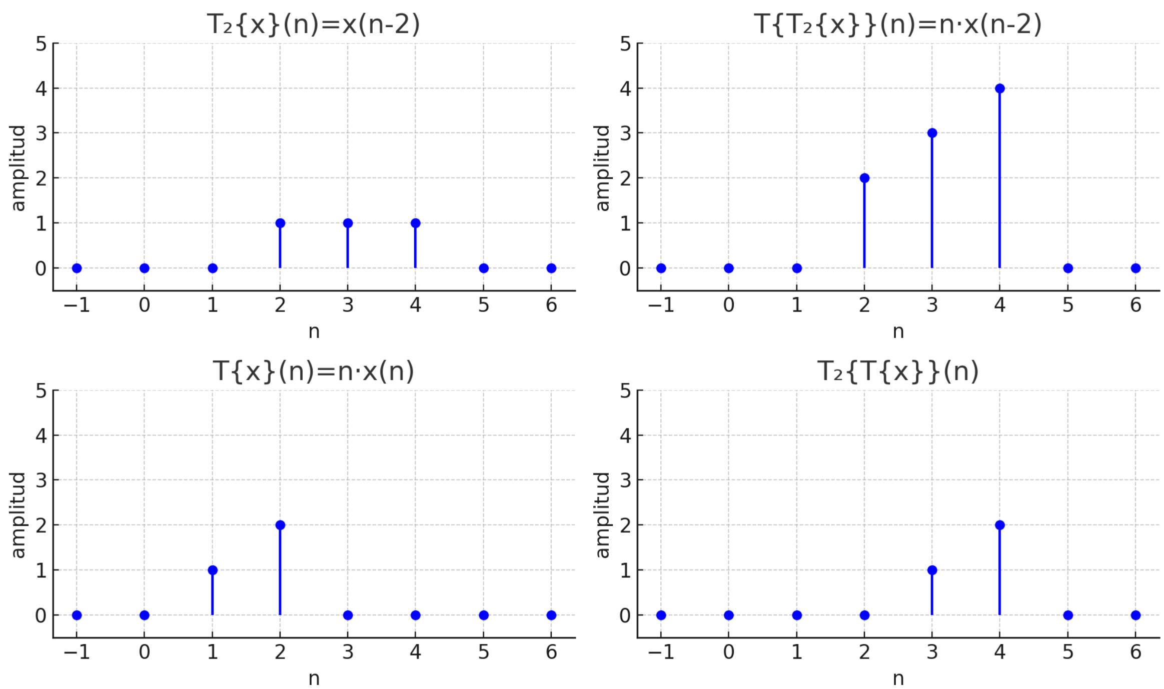
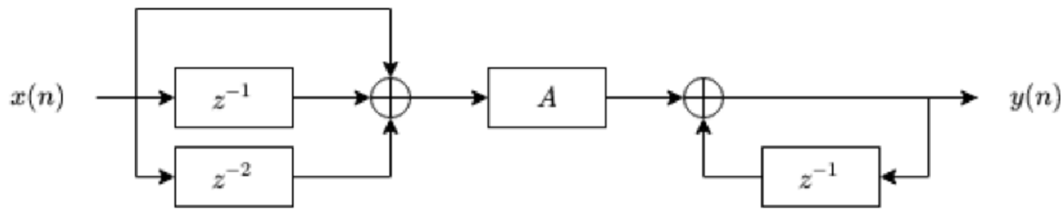


Figura 2: Comparación de operaciones. Arriba izq.: $T_2(x)[n] = x[n-2]$. Arriba der.: $T(T_2(x))[n] = n\,x[n-2]$. Abajo izq.: $T(x)[n] = n\,x[n]$. Abajo der.: $T_2(T(x))[n] = (n-2)\,x[n-2]$.

En relación con la figura anterior, notamos que $T_2(T(x[n])) \neq T(T_2(x[n]))$; el sistema $y[n] = n\,x[n]$ **no es invariante en el tiempo**. La diferencia surge porque el factor de escalamiento depende de n; al desplazar la señal, cambia el valor del multiplicador temporal.

2. Escriba el siguiente sistema, bosqueje la salida del sistema si a la entrada hay un impulso de magnitud 1 centrado en 0 y clasifique esa señal de salida en cuanto a su energía y si corresponde, su potencia.



Solución:

Resolución 2.1

Recordemos que los símbolos z^{-n} corresponden a retardos de n muestras en el dominio temporal. Además, el bloque suma hace referencia a sumar todas las entradas que recibe. Por lo tanto, la ecuación que representa el sistema es la siguiente:

$$y[n] = A\,[\,x[n] + x[n-1] + x[n-2]\,] + y[n-1]. \tag{33}$$

Considerando que el sistema estaba en reposo, la respuesta ante la entrada $x[n] = \delta[n]$ es:

n	$x[n]$	$y[n]$
-2	0	0
-1	0	0
0	1	A
1	0	$2A$
2	0	$3A$
3	0	$3A$
4	0	$3A$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Si se bosqueja la salida, se obtiene una secuencia causal que comienza en $n = 0$ con amplitud A, en $n = 1$ alcanza $2A$, y desde $n = 2$ en adelante permanece constante en $3A$, es decir:

$$y[n] = \begin{cases} A, & n = 0, \\ 2A, & n = 1, \\ 3A, & n \geq 2, \\ 0, & n < 0. \end{cases} \tag{34}$$

Se bosqueja a continuación:

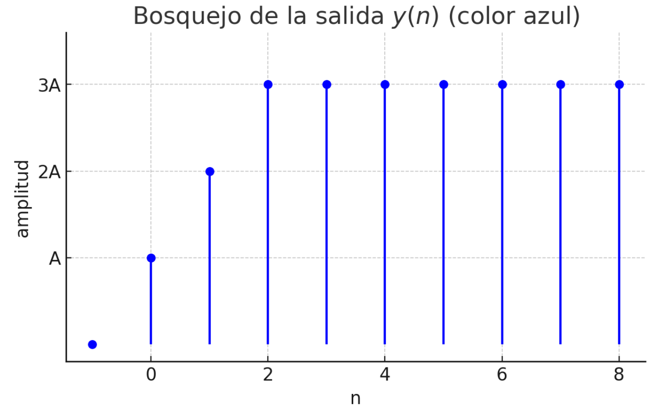


Figura 3: Respuesta del sistema a la entrada $\delta[n]$.

Luego, se busca analizar la energía y la potencia; recordemos que sus definiciones son:

- **Energía:** La energía de una señal $y(n)$ se define como la suma de los cuadrados de sus valores absolutos a lo largo de todo el tiempo:

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |y(n)|^2. \tag{35}$$

- **Potencia:** La potencia de una señal $y(n)$ se define como el valor promedio de la energía por unidad de tiempo:

$$P = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} |y(n)|^2. \tag{36}$$

Se dice que una señal es de energía cuando

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |y(n)|^2 < \infty, \tag{37}$$

y una señal es de potencia cuando

$$0 < P = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} |y(n)|^2 < \infty. \tag{38}$$

Luego para nuestro caso en particular tenemos lo siguiente:

- **Energía:**

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |y(n)|^2 \tag{39}$$

$$= A^2 + (2A)^2 + \sum_{n=2}^{\infty} (3A)^2. \tag{40}$$

La última suma es infinita, por lo tanto:

$$E \to \infty \quad \Rightarrow \quad \text{la energía diverge, es decir, la señal no es de energía.} \tag{41}$$

- **Potencia:**

$$P = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} |y(n)|^2 \tag{42}$$

$$= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \left[A^2 + (2A)^2 + \sum_{n=2}^{N} (3A)^2 \right] \tag{43}$$

$$= \lim_{N\to\infty} \frac{(N-1)(3A)^2}{2N+1} \tag{44}$$

$$= \frac{9A^2}{2}. \tag{45}$$

Por lo tanto, la señal de salida es una **señal de potencia** con

$$P = \frac{9A^2}{2}. \tag{46}$$

3. Considere el sistema mostrado en la figura, donde $h[n] = a^n u[n]$ con $-1 < a < 1$. Determine la respuesta del sistema bajo la excitación

$$x[n] = u[n+5] - u[n-10].$$

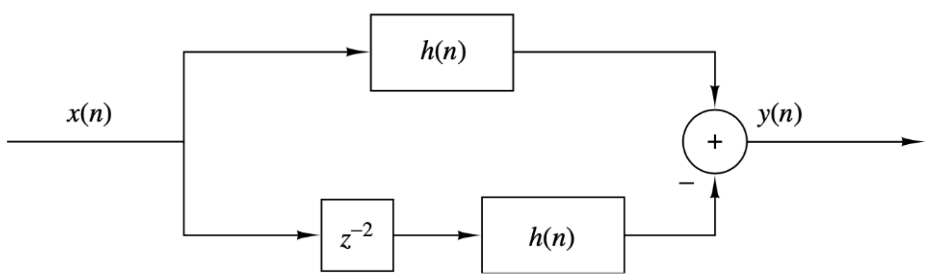


Figura 4: Sistema a analizar.

Solución:

Resolución 3.1

Del diagrama de bloques, la salida es la diferencia entre las dos ramas filtradas con $h[n] = a^n u[n]$ y un retardo de 2 muestras en la rama inferior:

$$y[n] = (x * h)[n] - (x * h)[n-2]. \tag{47}$$

Sea $F[n] = (x * h)[n]$. Para explotar que x es combinación de escalones, resulta útil la *respuesta al escalón* de h, que definimos como

$$S[n] = (u * h)[n] = \sum_{k\in\mathbb{Z}} u[k]\, a^{n-k}\, u[n-k]. \tag{48}$$

Como $u(k)$ y $u(n-k)$ restringen la sumatoria a $0 \leq k \leq n$, para $n \geq 0$ tenemos

$$S[n] = \sum_{k=0}^{n} a^{n-k} = a^n \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{a}\right)^k \quad (a \neq 0) \tag{49}$$

$$= a^n \frac{1 - \left(\frac{1}{a}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{a}} u[n] = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a} u[n], \qquad (a \neq 1). \tag{50}$$

Para esto utilizamos la identidad geométrica de la sumatoria con $r = 1/a$:

$$\sum_{k=0}^{n} r^k = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}, \quad r \neq 1. \tag{51}$$

Recordemos que la entrada es un pulso rectangular de longitud 15:

$$x[n] = u[n+5] - u[n-10] \tag{52}$$

Por linealidad,

$$F[n] = (x * h)[n] = (u[n+5] * h)[n] - (u[n-10] * h)[n] = S[n+5] - S[n-10]. \tag{53}$$

Finalmente,

$$y[n] = F[n] - F[n-2] = [S[n+5] - S[n-10]] - [S[n+3] - S[n-12]]. \tag{54}$$

Sustituyendo $S(\cdot)$ y simplificando, obtenemos la expresión cerrada

$$y[n] = \frac{a^{n+6} - 1}{a - 1} u[n+5] - \frac{a^{n-9} - 1}{a - 1} u[n-10] \tag{55}$$

$$- \frac{a^{n+4} - 1}{a - 1} u[n+3] + \frac{a^{n-11} - 1}{a - 1} u[n-12]. \tag{56}$$

Con ello queda determinada la solución. Para $-1 < a < 1$, las colas exponenciales decaen fuera del soporte del pulso de entrada.

4. Demuestre que, si un sistema cumple

$$y[n] = T(x[n]) = x[n] * h[n] = \sum_{k \in \mathbb{Z}} x[k]\, h[n-k],$$

entonces, con $h[n]$ la respuesta al impulso del sistema, necesariamente el sistema es lineal e invariante en el tiempo (LTI).

Solución:

Resolución 4.1

Tomando como Hipotesis que existe una secuencia fija $h[n]$ tal que, para toda $x[n]$,

$$y[n] = T(x[n]) = (x * h)[n] = \sum_{k \in \mathbb{Z}} x[k]\, h[n-k]. \tag{57}$$

(En particular, $h[n] = T(\delta[n])$ es la respuesta al impulso.)

(i) Linealidad. Para x_1, x_2 y $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} T(\alpha x_1 + \beta x_2)[n] &= \sum_k \big(\alpha x_1(k) + \beta x_2(k)\big)\, h[n-k] \\ &\Rightarrow \alpha \sum_k x_1(k)\, h[n-k] + \beta \sum_k x_2(k)\, h[n-k] \\ &= \alpha\, T(x_1[n]) + \beta\, T(x_2[n]). \end{aligned} \tag{58}$$

Luego, T es **lineal**.

(ii) Invariancia en el tiempo. Recordando el operador de traslación T_k dado por $T_k(x[n]) = x[n-k]$. Entonces

$$\begin{aligned} T\big(T_k(x[n])\big) &= \sum_{r\in\mathbb{Z}} x(r-k)\, h(n-r) \\ &\overset{m=r-k}{=} \sum_m x(m)\, h\big(n-(m+k)\big) \\ &= \sum_m x(m)\, h\big((n-k)-m\big) = T(x[n-k]) = T_k(T(x[n])). \end{aligned} \tag{59}$$

Por tanto, $T\big(T_k(x[n])\big) = T_k(T(x[n]))$ para todo $k \in \mathbb{Z}$; por lo tanto, T es **invariante en el tiempo**.

5. Tres sistemas con respuestas al impulso $h_1[n] = \delta[n] - \delta[n-1]$, $h_2[n] = h[n]$ y $h_3[n] = u[n]$ se conectan en cascada.

   1. ¿Cuál es la respuesta al impulso total $h_c[n]$ del sistema en su conjunto?
   2. ¿El orden de conexión afecta al sistema en su conjunto? Justifique.

Solución:

Resolución 5.1

Se busca hallar la *respuesta al impulso total* de la cascada. Las respuestas dadas son

$$h_1[n] = \delta[n] - \delta[n-1], \qquad h_2[n] = h[n], \qquad h_3[n] = u[n].$$

Para sistemas LTI en cascada, la respuesta equivalente es la *convolución* de las individuales. Usaremos la definición

$$(f * g)[n] \triangleq \sum_{k\in\mathbb{Z}} f[k]\, g[n-k].$$

Por asociatividad, escribimos

$$h_c[n] = \big(h_1 * h_2 * h_3\big)[n] = h_2 * \big(h_1 * h_3\big)[n]. \tag{60}$$

Cálculo de $(h_1 * h_3)[n]$ usando la suma de convolución:

$$(h_1 * h_3)[n] = \sum_{k\in\mathbb{Z}} h_1[k]\, u[n-k] = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \big(\delta[k] - \delta[k-1]\big)\, u[n-k] \tag{61}$$

$$= \underbrace{\sum_{k} \delta[k]\, u[n-k]}_{=u[n]} - \underbrace{\sum_{k} \delta[k-1]\, u[n-k]}_{=u[n-1]} \tag{62}$$

$$= u[n] - u[n-1]. \tag{63}$$

Notemos que $u[n]-u[n-1] = \delta[n]$ (la diferencia de dos funciones escalón unitario es la función impulso); en consecuencia,

$$h_c[n] = h_2 * \delta[n] = h_2[n] = h[n]. \tag{64}$$

$$\boxed{h_c[n] = h[n].}$$

Resolución 5.2

Para sistemas LTI, la convolución es *conmutativa* y *asociativa*, por lo que

$$h_1 * h_2 * h_3 = h_{\sigma(1)} * h_{\sigma(2)} * h_{\sigma(3)} \quad \text{para cualquier permutación } \sigma.$$

Además, como ya vimos que $h_1 * h_3 = \delta$, agrupando por asociatividad se obtiene, en cualquier orden,

$$h_c(n) = h_2 * \delta(n) = h_2(n) = h(n).$$

Por lo tanto, **el orden no afecta** al sistema en su conjunto; la cascada siempre es equivalente a un filtro con respuesta $h(n)$.

6. Considere el sistema a tiempo discreto de orden N caracterizado por la siguiente ecuación de diferencia con parámetros constantes $b_1, \ldots, b_N$ y $a_0, \ldots, a_M$:

$$y[n] = b_1\, y[n-1] + \cdots + b_N\, y[n-N] + a_0\, x[n] + \cdots + a_M\, x[n-M], \tag{65}$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$. Supondremos *coeficientes constantes en el tiempo* y señales definidas en $\mathbb{Z}$.

(a) Verifique que el sistema determinado en la Ec. (65) es lineal.

(b) Verifique que el sistema determinado en la Ec. (65) es invariante en el tiempo (TI).

(c) Considere la versión con condiciones iniciales del sistema en (65): $y[n]$ se determina para $n \geq 0$ donde la entrada es $\big(x[n]\big)_{n\geq 0}$ (asumiendo valores nulos en tiempos negativos) y el vector de estado (condiciones iniciales de (65)) es $y_1 = y[-1], \ldots, y_N = y[-N]$. Verifique que la solución frente a la entrada $\big(x[n]\big)_{n\geq 0}$ y las condiciones iniciales $(y_1, \ldots, y_N)$ se puede escribir como

$$\big(y[n]\big)_{n\geq 0} = \big(y_{SO}[n]\big)_{n\geq 0} + \big(y_{IO}[n]\big)_{n\geq 0}, \tag{66}$$

donde $\big(y_{SO}[n]\big)_{n\geq 0}$ denota la *respuesta de estado cero* y $\big(y_{IO}[n]\big)_{n\geq 0}$ denota la *respuesta de entrada cero*.

Solución:

Resolución 6.1

Dado el operador T por la relación entrada-salida

$$T(x[n]) = y[n] \quad \text{tal que} \quad y[n] = \sum_{k=1}^{N} b_k\, y[n-k] + \sum_{m=0}^{M} a_m\, x[n-m], \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

Sean $x_1 \mapsto y_1 = T(x_1)$ y $x_2 \mapsto y_2 = T(x_2)$. Definamos $z[n] = \alpha y_1[n] + \beta y_2[n]$. Entonces, utilizando únicamente propiedades algebraicas,

$$\begin{aligned}
z[n] &= \alpha y_1[n] + \beta y_2[n] && (67)\\
&= \alpha\Big(\sum_{k=1}^{N} b_k\, y_1[n-k] + \sum_{m=0}^{M} a_m\, x_1[n-m]\Big) + \beta\Big(\sum_{k=1}^{N} b_k\, y_2[n-k] + \sum_{m=0}^{M} a_m\, x_2[n-m]\Big) && (68)\\
&= \sum_{k=1}^{N} b_k\, [\alpha y_1[n-k] + \beta y_2[n-k]] + \sum_{m=0}^{M} a_m\, [\alpha x_1[n-m] + \beta x_2[n-m]]. && (69)
\end{aligned}$$

Es decir, z satisface la misma ecuación con la entrada $\alpha x_1 + \beta x_2$. Por lo tanto,

$$T(\alpha x_1 + \beta x_2)[n] = z[n] = \alpha T(x_1)[n] + \beta T(x_2)[n].$$

$$\boxed{\text{El sistema es lineal.}}$$

Resolución 6.2

Sea T_k el operador de desplazamiento temporal: $T_k(x[n]) = x[n-k]$. Debe cumplirse que

$$T_k\big(T(x[n])\big) \;=\; T\big(T_k(x[n])\big). \tag{70}$$

Primera rama:

$$T(x[n]) = \sum_{i=1}^{N} b_i\, y[n-i] + \sum_{m=0}^{M} a_m\, x[n-m], \tag{71}$$

$$T_k\big(T(x[n])\big) = \sum_{i=1}^{N} b_i\, y[(n-k)-i] + \sum_{m=0}^{M} a_m\, x[(n-k)-m]. \tag{72}$$

Por otro lado (segunda rama):

$$T_k(x[n]) = x[n-k], \tag{73}$$

$$T\big(T_k(x[n])\big) = \sum_{i=1}^{N} b_i\, y[n-k-i] + \sum_{m=0}^{M} a_m\, x[n-k-m]. \tag{74}$$

Como

$$T_k\big(T(x[n])\big) = T\big(T_k(x[n])\big),$$

el sistema es **invariante en el tiempo**.

Resolución 6.3

Consideremos el caso causal $n \geq 0$, con $x[n] = 0$ para $n < 0$ y condiciones iniciales $y[-1] = y_1, \ldots, y[-N] = y_N$. Verificaremos que la solución asociada a la entrada $\big(x[n]\big)_{n\geq 0}$ y a dichas condiciones iniciales puede escribirse como

$$y[n] \ = \ y_{SO}[n] + y_{IO}[n], \qquad n \geq 0,$$

donde:

- y_{SO}: solución con *condiciones iniciales nulas* y entrada x.
- y_{IO}: solución con *entrada nula* y condiciones iniciales dadas.

En términos de la ecuación de diferencia, ambas se describen explícitamente por

$$y_{SO}[n] = \sum_{k=1}^{N} b_k \, y_{SO}[n-k] + \sum_{m=0}^{M} a_m \, x[n-m], \qquad y_{SO}[-k] = 0, \quad k = 1, \ldots, N, \tag{75}$$

$$y_{IO}[n] = \sum_{k=1}^{N} b_k \, y_{IO}[n-k] + \underbrace{\sum_{m=0}^{M} a_m \, x[n-m]}_{=0 \ \text{(entrada nula)}}, \qquad y_{IO}[-k] = y_k, \quad k = 1, \ldots, N. \quad (x[n] \equiv 0) \tag{76}$$

Si definimos $y[n] \triangleq y_{SO}[n] + y_{IO}[n]$, entonces,

$$y[n] = y_{SO}[n] + y_{IO}[n] \tag{77}$$

$$= \Big(\sum_{k=1}^{N} b_k \, y_{SO}[n-k] + \sum_{m=0}^{M} a_m \, x[n-m] \Big) + \Big(\sum_{k=1}^{N} b_k \, y_{IO}[n-k] + 0 \Big) \tag{78}$$

$$= \sum_{k=1}^{N} b_k \left(y_{SO}[n-k] + y_{IO}[n-k] \right) + \sum_{m=0}^{M} a_m \, x[n-m] \tag{79}$$

$$= \sum_{k=1}^{N} b_k \, y[n-k] + \sum_{m=0}^{M} a_m \, x[n-m], \tag{80}$$

es decir, y satisface la misma ecuación de diferencia con la entrada x. Además, para $k = 1, \ldots, N$,

$$y[-k] = y_{SO}[-k] + y_{IO}[-k] = 0 + y_k = y_k, \tag{81}$$

por lo que y cumple las *mismas* condiciones iniciales. Por unicidad de soluciones de una recurrencia lineal de orden N,

$$\boxed{y = y_{SO} + y_{IO}.}$$

Resolución 6.4

Sea $T_0 : x \mapsto y_{SO}$ (estado cero).

- **Linealidad:** si $x_1 \mapsto y_{SO,1}$ y $x_2 \mapsto y_{SO,2}$, entonces

$$T_0[\alpha x_1 + \beta x_2] = \alpha y_{SO,1} + \beta y_{SO,2}. \tag{82}$$

Tenemos que esto se puede ver en lo siguiente:

$$T_0[\alpha x_1 + \beta x_2][n] = \sum_{k=1}^{N} b_k \left(\alpha y_{SO,1}[n-k] + \beta y_{SO,2}[n-k]\right) + \sum_{m=0}^{M} a_m \left(\alpha x_1[n-m] + \beta x_2[n-m]\right) \tag{83}$$

$$= \alpha T_0(x_1[n]) + \beta T_0(x_2[n]). \tag{84}$$

- **Invariancia temporal:** definamos el operador de desplazamiento T_k por $T_k(x[n]) = x[n-k]$,

$$T_0\big(T_k(x[n])\big) = T_k\big(T_0(x[n])\big). \tag{85}$$

Luego, tenemos que:

$$T_0(T_k x[n]) = \sum_{i=1}^{N} b_i \, y_{SO}[n-k-i] + \sum_{m=0}^{M} a_m \, x[n-k-m] \tag{86}$$

$$= T_k \, T_0(x[n]). \tag{87}$$

Luego, $\boxed{T_0 \text{ es LTI.}}$. Si se trabaja en la ventana causal $n \geq 0$, la TI se mantiene para corrimientos $k \geq 0$ que preservan el "pasado nulo". Corrimientos que cruzan el borde ($k < 0$) introducen efectos de borde y rompen la TI en esa ventana.