



fcfm

Ingeniería Eléctrica

FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

Circuitos Eléctricos Analógicos (EL3202-1)

Clase auxiliar 4

Prof. Patricio Mendoza.

Prof. Aux. Renato Planas Erik Sáez

- Para el circuito de la Figura 1, si utiliza la expresión exacta $I(v_D)$ del diodo, plantee la ecuación que se debe satisfacer. Plantee un modelo de aproximación para el diodo que permita resolver los voltajes y corrientes en el circuito. Sea explícito en los modelos y supuestos utilizados.

$$i_D = I_s \left(e^{v_D/(\eta V_T)} - 1 \right) \quad (1)$$

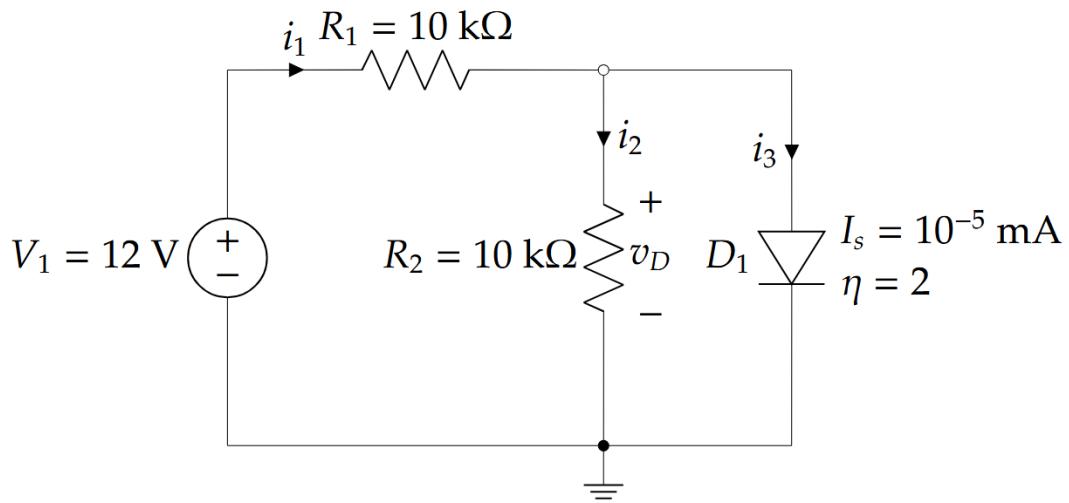


Figura 1: Circuito con diodo.

Solución:

Un diodo es un dispositivo semiconductor que permite el paso de corriente en una sola dirección y presenta características no lineales. La curva $v - i$ se puede visualizar en la figura 2:

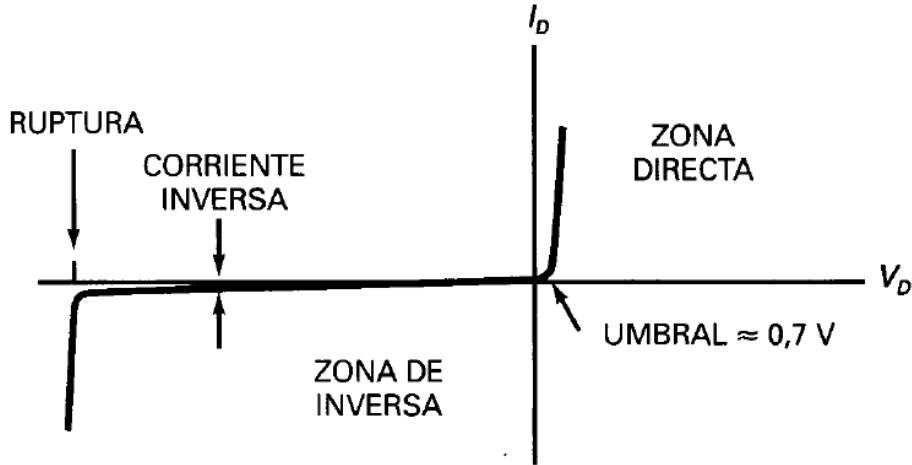


Figura 2: Característica $v - i$ del diodo. Se observa la zona directa, donde para $v_D > 0,7 \text{ V}$ (diodo de silicio) la corriente i_D crece rápidamente y el diodo conduce; el umbral de conducción cerca de $0,7 \text{ V}$; la zona inversa, donde para $v_D < 0$ la corriente es muy pequeña (corriente inversa de saturación); y la zona de ruptura, donde si el voltaje inverso supera un valor crítico, la corriente inversa aumenta bruscamente. Estas regiones son fundamentales para el análisis de circuitos con diodos.

Ademas tenemos que la curva $v - i$ depende fuertemente de la temperatura a la cual estemos operando. Por otro lado la curva que modela el comportamiento del diodo viene dado por la ecuación de Shockley,

$$i_D = I_s \left(e^{\frac{v_D}{\eta V_T}} - 1 \right) \quad (2)$$

Donde cada termino corresponde a:

- i_D : corriente a través del diodo.
- I_s : corriente de saturación del diodo.
- v_D : voltaje a través del diodo.
- η : factor de idealidad del diodo el cual toma en cuenta las propiedades del material y para un caso ideal $\eta = 1$.
- V_T : voltaje térmico, que depende de la temperatura.

El factor de idealidad η toma valores típicos entre 1 y 2. Un valor $\eta \approx 1$ corresponde a un comportamiento cercano al ideal (dominancia de difusión), mientras que $\eta \approx 2$ indica efectos no ideales —por ejemplo, recombinación de portadores en la región de agotamiento— que hacen que la corriente crezca menos rápidamente con el voltaje aplicado. En este ejercicio se considera $\eta = 2$ según el enunciado. El denominado punto de operación del diodo corresponde al estado definido por la corriente y el voltaje que lo atraviesan. Este punto se determina por la intersección entre la curva característica $v - i$ del diodo

y la recta de carga del circuito externo. La recta de carga expresa la relación entre voltaje y corriente impuesta por el resto del circuito, y su intersección con la característica del diodo establece el punto de operación, es decir, las condiciones reales de funcionamiento del dispositivo.

Volviendo al enunciado en este ejercicio se empleará la expresión exacta del diodo (ecuación de Shockley) evaluada a temperatura ambiente. Tomamos el voltaje térmico $V_T = 25 \text{ mV}$, por lo que la ecuación que describe el comportamiento del diodo es:

$$i_D = I_s \left(e^{\frac{v_D}{\eta V_T}} - 1 \right) \quad (3)$$

$$= 10^{-5} \text{ mA} \left(e^{\frac{v_D}{2 \cdot 25 \text{ mV}}} - 1 \right) \quad (4)$$

$$= 10^{-5} \text{ mA} (e^{20 v_D} - 1) \quad (5)$$

donde I_s es la corriente de saturación. En este ejercicio se considera $\eta = 2$ según el enunciado. Por la Ley de Corriente de Kirchhoff (LCK) en el nodo del diodo:

$$i_1 = i_2 + i_3 \quad (6)$$

$$\frac{V_i - v_D}{R_1} = \frac{v_D}{R_2} + I_s \left(e^{\frac{v_D}{\eta V_T}} - 1 \right) \quad (7)$$

Si suponemos que $v_D = 0,7 \text{ V}$, el cual es un valor común para un diodo de silicio en conducción, tenemos:

$$i_1 = \frac{V_i - v_D}{R_1} = \frac{12 - 0,7}{10\,000} \text{ A} = 1,13 \text{ mA}$$

$$i_2 = \frac{v_D}{R_2} = \frac{0,7}{10\,000} \text{ A} = 70 \mu\text{A}$$

$$i_3 = i_1 - i_2 = 1,06 \text{ mA}$$

Si en vez de $v_D = 0,7 \text{ V}$ usamos $v_D = 0,6 \text{ V}$:

$$i_1 = \frac{12 - 0,6}{10\,000} = 1,14 \text{ mA}$$

$$i_2 = \frac{0,6}{10\,000} = 60 \mu\text{A}$$

$$i_3 = i_1 - i_2 = 1,08 \text{ mA}$$

Vemos que obtenemos valores bastante pequeños para la corriente del diodo, lo que puede parecer contradictorio, pero esto se debe al punto de operación en el que se encuentra el diodo. En efecto, como i_D depende de v_D , al fijar a priori un valor (p. ej., 0,6–0,7 V) estamos usando un *modelo de caída constante*; así, $i_3 = i_1 - i_2$ es consistente con esa suposición, pero no necesariamente con la ecuación de Shockley. Para hallar el punto de operación coherente con el modelo exacto debe resolverse por v_D la ecuación no lineal

$$g(v_D) \equiv \frac{V_i - v_D}{R_1} - \frac{v_D}{R_2} - I_s \left(e^{\frac{v_D}{\eta V_T}} - 1 \right) = 0,$$

y luego calcular i_1 , i_2 e i_D con ese v_D^* , cumpliéndose exactamente $i_D = i_1 - i_2$. En este circuito se obtiene numéricamente $v_D^* \approx 0,58 \text{ V}$, $i_1 \approx 1,142 \text{ mA}$, $i_2 \approx 0,058 \text{ mA}$ e $i_D \approx 1,084 \text{ mA}$, lo que explica por qué imponer $v_D = 0,6$ –0,7 V sobreestima el voltaje directo o no cuadra con la recta de carga. Ahora analizaremos dos situaciones límite para el diodo:

- **Caso 1: diodo en corte ($i_D = 0$).** El diodo no conduce y equivale a un circuito abierto; sólo circula corriente por R_1 y R_2 en serie:

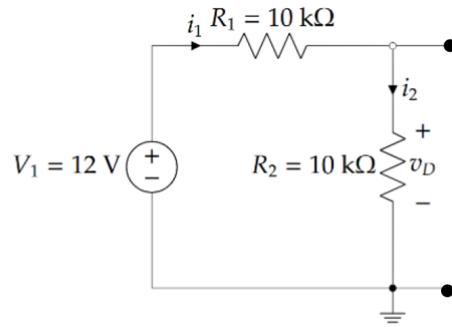


Figura 3: Circuito con el diodo abierto.

$$12 = (R_1 + R_2)i \Rightarrow i = \frac{12}{20\,000} = 0,6 \text{ mA}, \quad v_D = iR_2 = 6 \text{ V}.$$

Es decir, el eje v_D corta a la recta de carga en $v_D = 6 \text{ V}$ cuando $i_D = 0$.

- **Caso 2: diodo en conducción (cortocircuito ideal).** El diodo se modela como un corto; el nodo queda forzado a $v_D = 0$ y por R_2 no circula corriente:

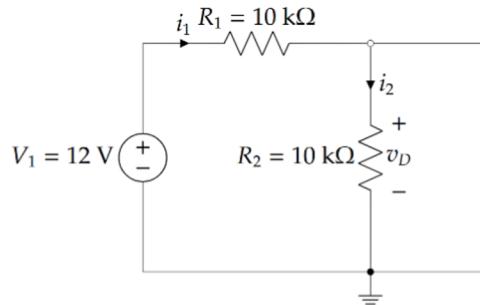


Figura 4: Circuito con el diodo en cortocircuito.

$$12 = R_1 i \Rightarrow i = \frac{12}{10\,000} = 1,2 \text{ mA}, \quad v_D = 0.$$

Así, el eje i_D corta a la recta de carga en $i_D = 1,2 \text{ mA}$ cuando $v_D = 0$.

Los dos casos límite anteriores fijan los *interceptos* de la recta de carga del circuito externo en el plano (v_D, i_D) . Para cualquier $v_D \in [0, 6] \text{ V}$, la relación impuesta por R_1 y R_2 viene dada por

$$i_D = \frac{V_i - v_D}{R_1} - \frac{v_D}{R_2},$$

que es precisamente la *recta de carga* (pasa por los puntos $(v_D, i_D) = (0, 1,2 \text{ mA})$ y $(6 \text{ V}, 0)$). La intersección entre esta recta y la característica no lineal del diodo (3) determina el *punto de operación*. En este circuito, dicha intersección ocurre para un voltaje directo algo menor que $0,6 \text{ V}$ (numéricamente, $\approx 0,58 \text{ V}$), por lo que, debido al crecimiento exponencial de (3), la corriente de operación resulta del

orden de los miliamperes. Para desplazar el punto de operación hacia corrientes mayores sería necesario *endurecer* la recta de carga (por ejemplo, disminuyendo R_1 y/o R_2 o aumentando V_i).

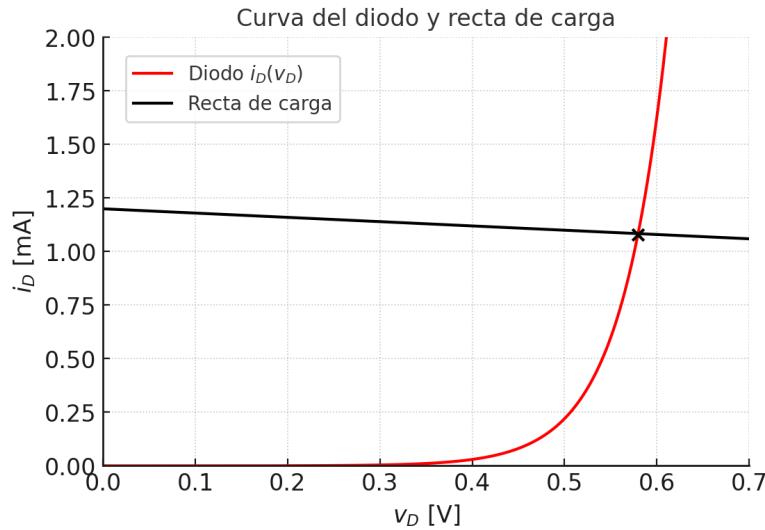


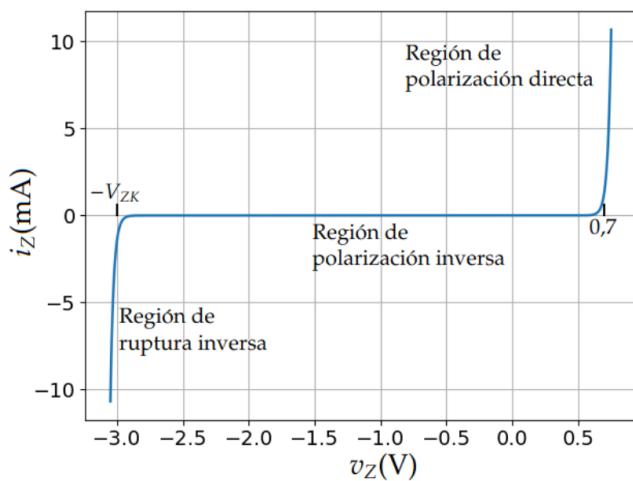
Figura 5: Punto de operación: intersección entre la característica $v-i$ del diodo y la recta de carga del circuito.

Entonces, de manera visual, el punto de intersección (punto de operación) queda aproximadamente en:

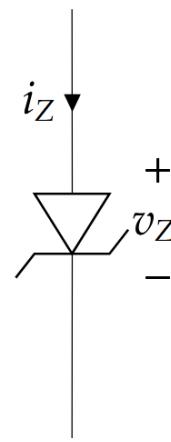
$$v_D^* \approx 0,58 \text{ V}, \quad i_D^* \approx 1,08 \text{ mA}. \quad (8)$$

Los cuales son los mismos obtenidos con anterioridad.

2. Un diodo Zener con característica $v-i$, como la mostrada en la Figura 5a), tiene un voltaje de Zener $V_{ZK} = 3 \text{ V}$. Determine la corriente i_X en los dos circuitos mostrados en la figura 7. Sea explícito en los modelos y supuestos utilizados.



(a) Curva de v - i del diodo Zener.



(b) Esquema de un diodo Zener.

Figura 6: (a) Característica v - i del diodo Zener, mostrando las regiones de polarización directa, inversa y de ruptura inversa, así como los valores típicos de voltaje y corriente. (b) Símbolo del diodo Zener, mostrando la dirección de la corriente i_Z y el voltaje v_Z en sus terminales.

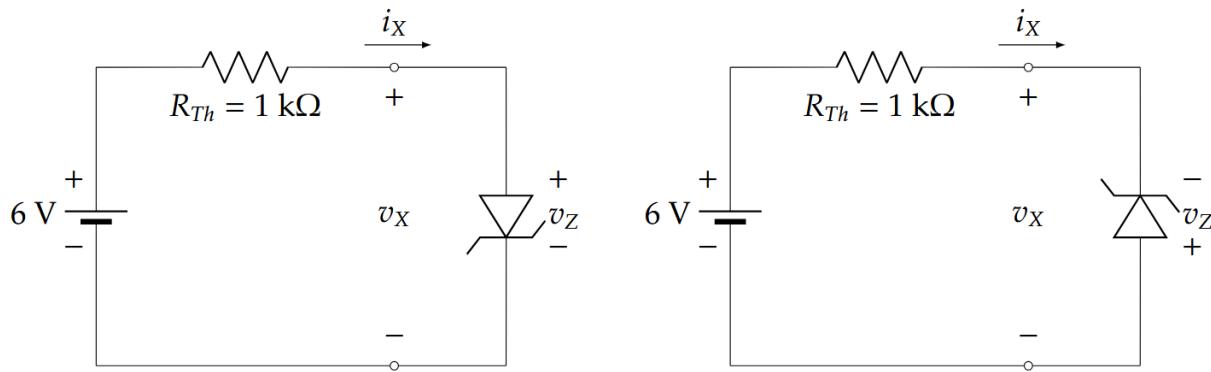


Figura 7: Detalle: (izquierda) símbolo del diodo Zener con convención de corriente i_Z y polaridad de v_Z ; (derecha) característica v - i esquemática del diodo (ruptura inversa alrededor de $-V_{ZK}$).

Solución:

Similar a lo anterior, el primer paso es trazar la *recta de carga* del equivalente de Thévenin (fuente de 6 V en serie con $R_{Th} = 1 \text{ k}\Omega$). Por lo que primeramente nos centramos en sus interceptos se obtienen de:

$$i_X = 0 \Rightarrow v_X = 6 \text{ V}, \quad (9)$$

$$v_X = 0 \Rightarrow i_X = \frac{6}{1\,000} = 6 \text{ mA}. \quad (10)$$

Luego obtenemos mediante los dos puntos anteriores la recta de carga del circuito externo:

$$i_X = \frac{6 - v_X}{R_{Th}} = \frac{6 - v_X}{1\,000}. \quad (11)$$

En el circuito de la Figura 8, aproximamos la característica del diodo por tramos:

$$\begin{aligned} \text{Directa: } v_X > 0,7 \text{ V} &\Rightarrow v_Z \approx 0,7 \text{ V}, \\ \text{Ruptura: } v_X < -3 \text{ V} &\Rightarrow v_Z \approx -3 \text{ V}. \end{aligned}$$

Bajo la hipótesis de que la fuente tiene un valor de 0,7 V en directa, la corriente de operación resulta

$$i_X = \frac{6 - 0,7}{1\,000} = 5,3 \text{ mA}, \quad (12)$$

valor que coincide, dentro de la aproximación, con el cruce visual entre la recta de carga y la curva del diodo.

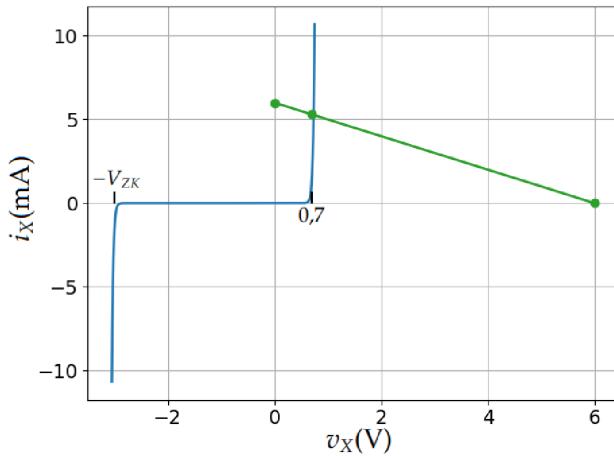


Figura 8: Curva $v-i$ del voltaje v_X (azul) y recta de carga del equivalente (verde). Ejes: v_X (V) horizontal e i_X (mA) vertical. Los interceptos de la recta en este ejemplo son $v_X = 6$ V e $i_X = 6$ mA. La intersección curva/recta fija el punto de operación: en la región directa $v \approx V_f \simeq 0,7$ V, en la región de ruptura el voltaje queda próximo a $-V_{ZK}$. Cambiar R_{Th} o la fuente desplaza la recta y, por tanto, el punto de operación.

Para el circuito de la derecha (Figura 9), con el Zener invertido, la región relevante es la de *ruptura inversa*:

$$\begin{aligned} \text{Ruptura: } v_X > 3 \text{ V} &\Rightarrow v_Z \approx -3 \text{ V}, \\ \text{Directa: } v_X < 0,7 \text{ V} &\Rightarrow v_Z \approx 0,7 \text{ V}. \end{aligned}$$

Adoptando el modelo de *fuente de -3 V* en ruptura,

$$i_X = \frac{6 - 3}{1\,000} = 3 \text{ mA}, \quad (13)$$

en concordancia con el punto de intersección observado en la gráfica (tener presente la convención de signos: el Zener está invertido, por lo que en la figura la región de ruptura aparece hacia $+v_X$ y la corriente cambia de signo).

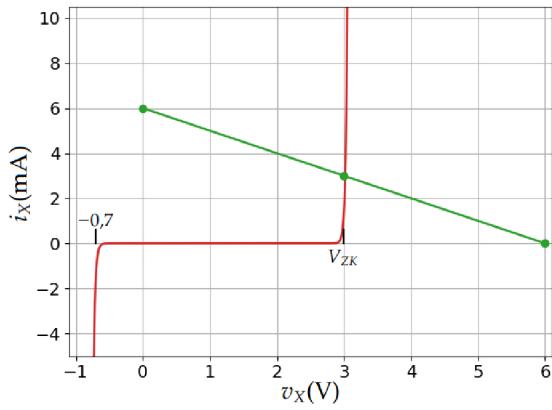


Figura 9: Característica $v-i$ de v_X (azul) y recta de carga (verde) para el circuito con Zener invertido. Ejes: v_X (V) horizontal e i_X (mA) vertical. En ruptura inversa el diodo mantiene $v_X \approx -V_{ZK}$ (aquí $V_{ZK} = 3$ V) y la recta de carga intersecta dicha rama dando $i_X \approx 3$ mA en el ejemplo mostrado.

3. Para el circuito de la figura 10, bosqueje el voltaje en el diodo y la corriente en el diodo como función del tiempo. Sea explícito en los valores de las gráficas, así como en los modelos y supuestos utilizados.

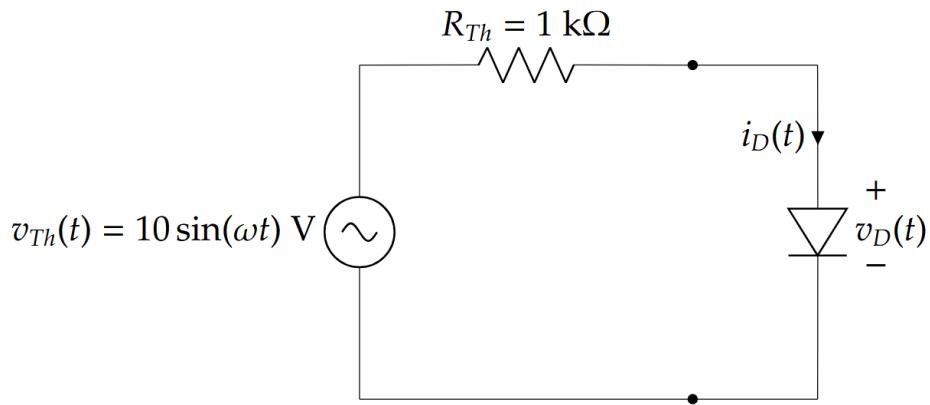


Figura 10: Circuito con diodo y fuente de voltaje senoidal.

Solución:

Para clarificar el funcionamiento con $v_{Th}(t) = 10 \sin(\omega t)$ [V] y $R_{Th} = 1$ kΩ, usaremos el modelo por tramos del diodo:

$$\text{Directa (ON): } v_D(t) \approx V_f \simeq 0,7 \text{ V}, \quad i_D(t) \approx \frac{v_{Th}(t) - V_f}{R_{Th}} \quad (\geq 0), \quad (14)$$

$$\text{Inversa (OFF): } i_D(t) \approx -I_s \approx 0, \quad v_D(t) \approx v_{Th}(t), \quad (15)$$

El diodo entra en conducción cuando $v_{Th}(t) \geq V_f$. Con este criterio, evaluamos algunos instantes clave del ciclo (nótese que en inversa hemos dejado $\approx -I_s$ para resaltar que es *muy* pequeña frente a los mA en directa):

Punto de operación	ωt	$\sin(\omega t)$	$v_{Th}(t)$ (V)	v_D (V)	i_D (mA)
3	0	0	0	0	0
2	$\pi/6$	$1/2$	5	0.7	$\frac{5 - 0.7}{1000} = 4.3$
1	$\pi/2$	1	10	0.7	$\frac{10 - 0.7}{1000} = 9.3$
2	$5\pi/6$	$1/2$	5	0.7	4.3
3	π	0	0	0	0
4	$7\pi/6$	$-1/2$	-5	-5	$\approx -I_s (\approx 0)$
5	$3\pi/2$	-1	-10	-10	$\approx -I_s (\approx 0)$
4	$11\pi/6$	$-1/2$	-5	-5	$\approx -I_s (\approx 0)$
3	2π	0	0	0	0

Cuadro 1: Valores de voltaje y corriente en el diodo para distintos puntos de operación durante un ciclo senoidal.

a variación del punto de operación con el tiempo se visualiza en:

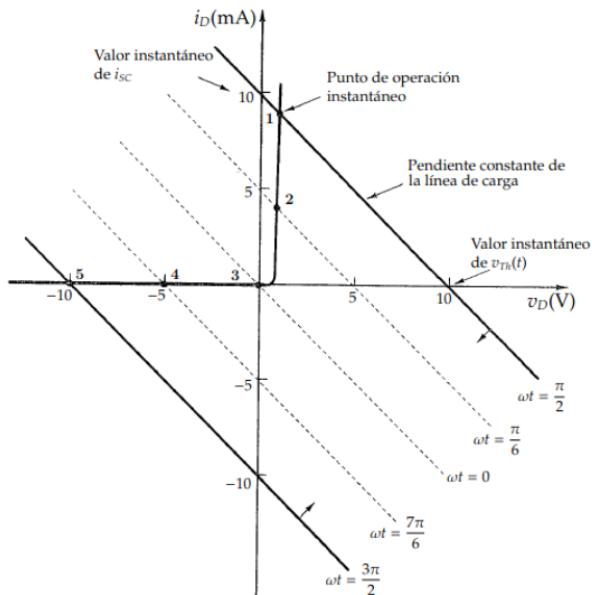
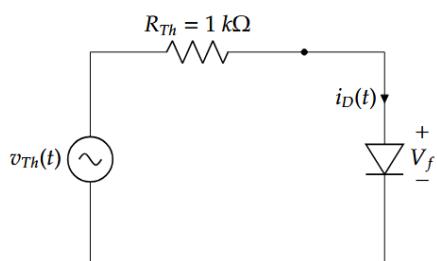
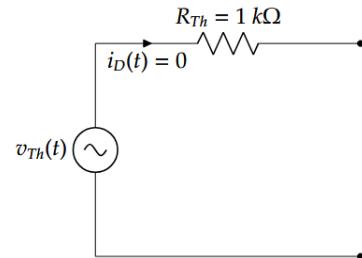


Figura 11: Voltaje de Thévenin $v_{Th}(t) = 10 \sin(\omega t)$ como función del tiempo.

Dependiendo del signo y magnitud instantánea de $v_{Th}(t)$, el circuito se reduce a:



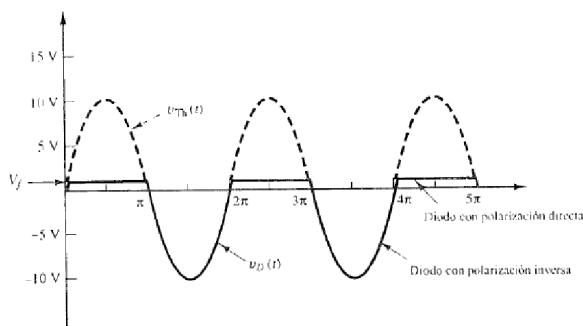
(a) Diodo abierto ($i_D(t) \approx 0$) cuando $v_{Th}(t) < V_f$.



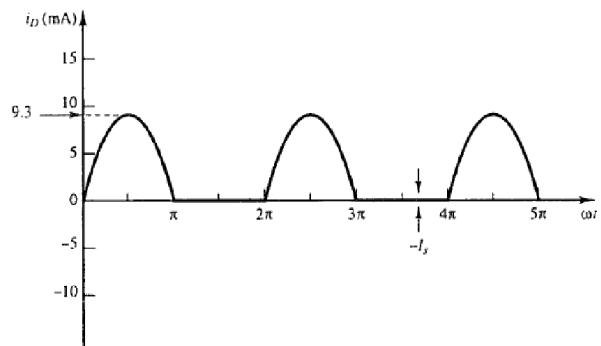
(b) Diodo conduciendo ($v_D \approx V_f$) cuando $v_{Th}(t) \geq V_f$.

Figura 12: Modelos instantáneos del circuito con diodo.

Gráficamente:



(a) Forma de $v_D(t)$: durante cada semionda positiva, cuando $v_{Th}(t) \geq V_f$, el diodo entra en polarización directa y el voltaje queda "recortado" cerca de la caída de conducción V_f (modelo por tramos $v_D \approx V_f$); en los intervalos donde $v_{Th}(t) < V_f$ (polarización inversa) el diodo está esencialmente abierto y $v_D(t)$ sigue la tensión de la fuente $v_{Th}(t)$. En términos angulares, la conducción ocurre entre los instantes en que $10 \sin(\omega t) = V_f$, y el resto del ciclo el diodo permanece bloqueado.



(b) Forma de $i_D(t)$: la corriente es apreciable sólo durante los intervalos en que la fuente supera el umbral de conducción V_f (polarización directa), quedando prácticamente nula en polarización inversa (solo circula la pequeña corriente de saturación I_s). El pulso de corriente durante cada semionda positiva tiene forma aproximadamente parabólica cuando se considera la dependencia con $\sin(\omega t)$; su máximo se alcanza en $\omega t = \pi/2$ y, con los datos del ejercicio, valdría $i_{D,\max} = 9,3 \text{ mA}$.

Figura 13: (a) Voltaje instantáneo en el diodo $v_D(t)$ y (b) corriente en el diodo $i_D(t)$ durante un ciclo de $v_{Th}(t) = 10 \sin(\omega t)$. En (a) se aprecia el recorte a V_f durante la conducción; en (b) se muestra el pulso de corriente correspondiente y su valor máximo.

Esta construcción coincide con el método gráfico de *rectas de carga instantáneas*: la pendiente es constante $-1/R_{Th}$ y la ordenada varía con $v_{Th}(t)$, generando los puntos de operación mostrados en la figura de referencia.

4. Sea el esquema visto en 14 responda lo siguiente, considerando la fuente de voltaje que ahí aparece.

1. Represente (bosqueje) v_o en función del tiempo para el circuito de la Figura 14 (Lado izquierdo) con la entrada mostrada. Suponga $V_\gamma = 0$.
2. [Propuesto:] Represente (bosqueje) v_o en función del tiempo para el circuito de la Figura 14 (Lado derecho). La entrada es senoidal y está dada por $v_i(t) = 10 \sin(\omega t)$ V. Suponga $V_\gamma = 0$.

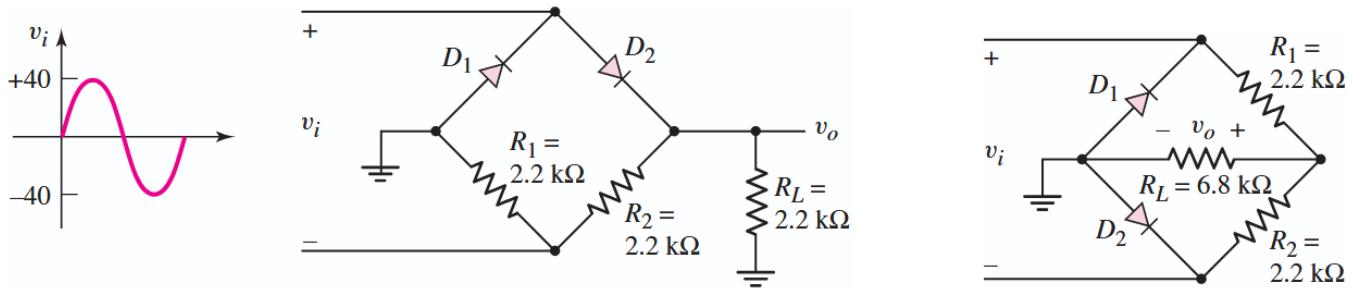
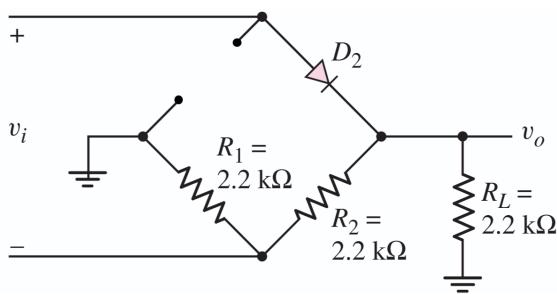


Figura 14: Esquema del circuito con diodos.

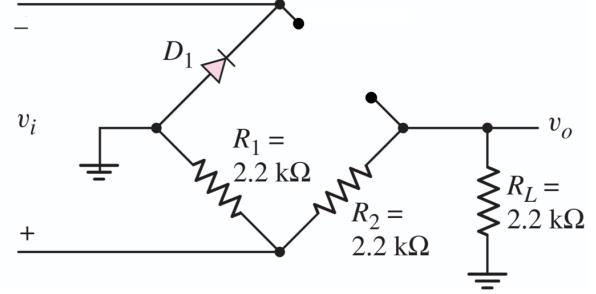
Solución:

Resolución 4.1

Se desea bosquejar $v_o(t)$. Con diodos ideales ($V_\gamma = 0$), el análisis se hace por casos según el signo de v_i . En cada caso, el diodo se reemplaza por su modelo ON (corto) u OFF (abierto), como se muestra en las Figuras 15a y 15b.



(a) **Caso A:** $v_i > 0 \Rightarrow D_1$ está OFF y D_2 está ON.



(b) **Caso B:** $v_i < 0 \Rightarrow D_1$ está ON y D_2 está OFF.

Figura 15: Modelo ON/OFF del diodo para cada semicírculo. En ambos casos, visto desde v_o el diagrama reducido es del mismo tipo: o bien v_o queda *fijado* por la fuente (diodo ON) o bien queda *aislado* de la fuente (diodo OFF) y conectado a tierra por las resistencias.

Para facilitar el equivalente, conviene *etiquetar nodos* y reordenar el circuito (sin cambiar conexiones). Así se obtiene el esquema de la Figura 16.

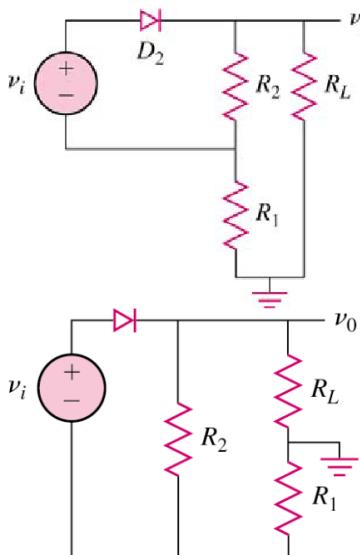


Figura 16: Esquema equivalente “visto” desde v_o , **idéntico en ambos semiciclos**. Con el diodo ON, v_o queda fijado por la fuente (corto ideal); con el diodo OFF, v_o queda aislado de la fuente y desciende a 0 a través de las ramas resistivas.

La consecuencia importante es que, por simetría, la forma del circuito *desde* v_o es equivalente para $v_i > 0$ y $v_i < 0$. Por ello, el nodo v_o resulta siempre no negativo: en el semiciclo positivo sigue a la fuente; en el semiciclo negativo el arreglo con el diodo opuesto produce el mismo efecto visto desde v_o . Con diodos ideales y fuente ideal, esto se traduce en una **rectificación de onda completa**:

$$v_o(t) = |v_i(t)|.$$

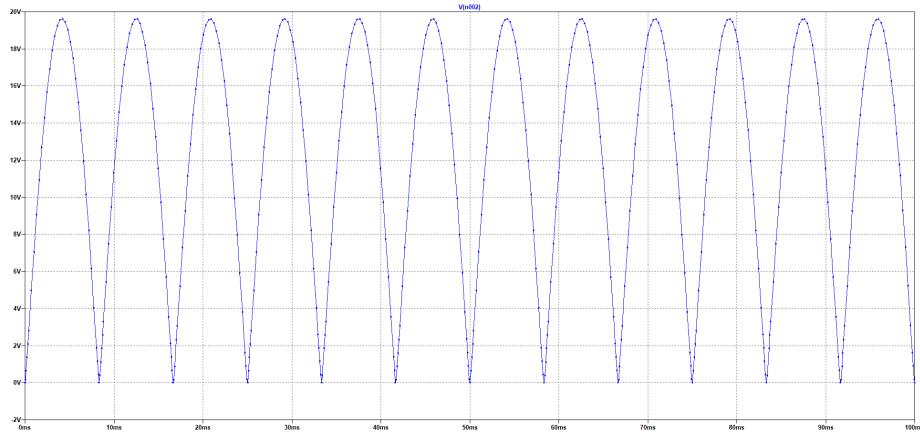
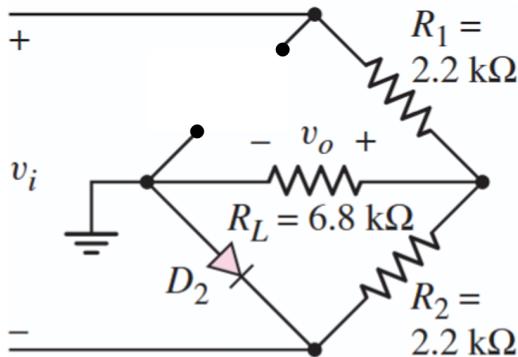


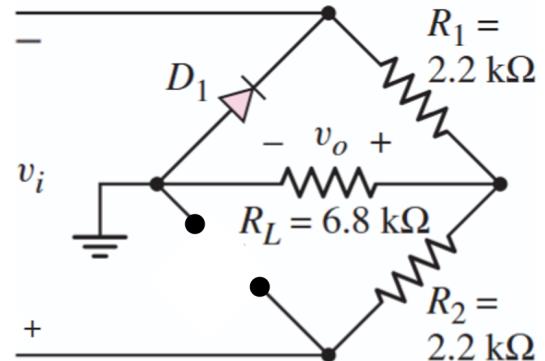
Figura 17: Bosquejo de $v_o(t)$: rectificación de onda completa. Para $v_i(t) = 10 \sin(\omega t)$ V ideal, los máximos de v_o alcanzan 10 V y los semiciclos negativos se reflejan hacia arriba.

Resolucion 4.2

De manera análoga al caso anterior, analizamos el circuito con diodos ideales ($V_\gamma = 0$) por casos según el signo de v_i . En cada semiciclo, cada diodo se reemplaza por su modelo ON (corto) u OFF (abierto), como se muestra en las Figuras 18a y 18b.



(a) **Caso 1:** $v_i > 0$. Conduce D_2 (ON) y el otro diodo queda en OFF. El nodo v_o queda fijado por la fuente a través del corto ideal.



(b) **Caso 2:** $v_i < 0$. Conduce D_1 (ON) y el otro diodo queda en OFF. Por simetría, el nodo v_o vuelve a quedar fijado por la fuente (con polaridad reflejada por el diodo).

Figura 18: Modelo ON/OFF en cada semicírculo. En ambos casos, visto desde v_o , el diagrama reducido es del mismo tipo: el diodo conductor “pega” v_o a la fuente; el diodo bloqueado aísla la rama opuesta.

Para facilitar el análisis, es útil *etiquetar nodos* y reordenar el circuito sin cambiar conexiones. Con lo que se obtiene lo visto en 19

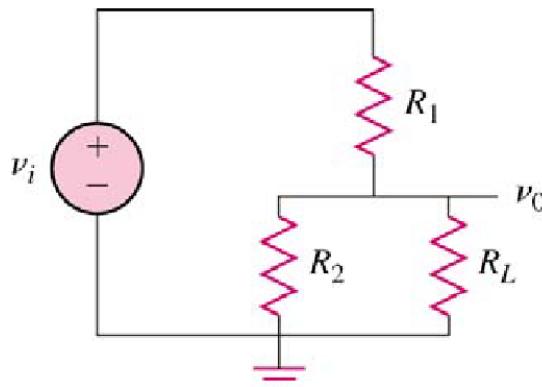


Figura 19: Esquema equivalente desde v_o (válido en ambos semicírculos). El diodo que conduce fija v_o al valor instantáneo de la fuente; la rama opuesta queda aislada.

Por lo que por la simetría de la red y el modelo ideal de los diodos, el circuito realiza una **rectificación de onda completa**:

$$v_o(t) = |v_i(t)|.$$

Es decir, v_o sigue el valor absoluto de la fuente: los semicírculos negativos se reflejan hacia arriba.

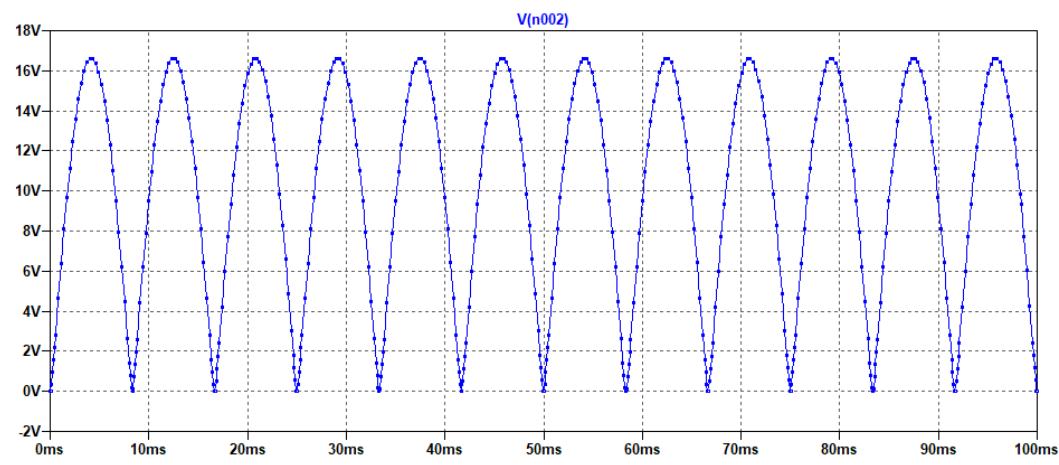


Figura 20: Bosquejo/simulación de $v_o(t)$: rectificación de onda completa (picos iguales a los de v_i si el diodo es ideal).