Análisis de señales (EL3203-2)
Clase auxiliar 3
Prof. Jorge Silva.
Prof. Aux. Erik Sáez

Serie de Fourier de una señal T-periódica

La serie de Fourier permite descomponer cualquier señal periódica en una suma de funciones sinusoidales (armónicos) de distintas frecuencias, amplitudes y fases. Cada armónico tiene una frecuencia múltiplo de la fundamental $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$, donde T es el período de la señal. Así, cualquier señal T-periódica se puede escribir como:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \, e^{jk\omega_0 t} \tag{1}$$

Los coeficientes c_k indican el peso (amplitud y fase) de cada armónico en la señal.

Base armónica y ortogonalidad

Las funciones $\psi_k(t) = e^{jk\omega_0 t}$ forman una base ortogonal en el intervalo de un período. Esto significa que cada armónico es independiente de los demás y se puede calcular por separado:

$$\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \psi_k(t) \, \psi_m^*(t) \, dt = \begin{cases} 1, & k = m, \\ 0, & k \neq m. \end{cases} \tag{2}$$

Esta propiedad facilita el cálculo de los coeficientes de Fourier.

Ecuaciones de análisis y síntesis

Síntesis: reconstruye la señal a partir de los coeficientes:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \, e^{jk\omega_0 t} \tag{3}$$

Análisis: permite calcular cada coeficiente a partir de la señal:

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) \, e^{-jk\omega_0 t} \, dt \tag{4}$$

El intervalo $[t_0, t_0 + T]$ puede elegirse arbitrariamente, siempre que cubra un período completo.

Simetrías para señales reales

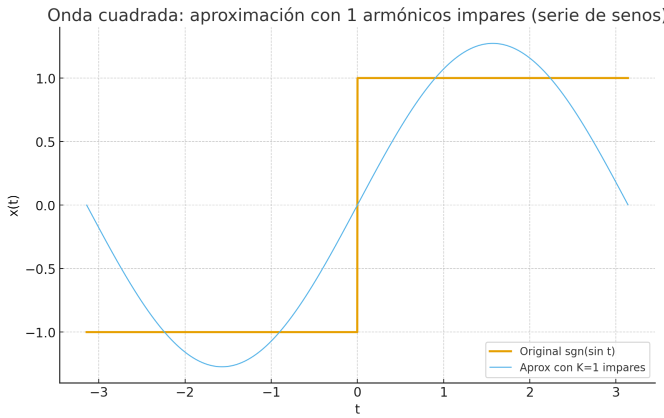
Si la señal $x(t)$ es real, los coeficientes cumplen $c_{-k} = c_k^*$ (simetría conjugada), lo que implica que la magnitud es igual y la fase opuesta para k y $-k$. Si la señal es par, sólo aparecen cosenos; si es impar, sólo senos.

Aproximación finita (truncada)

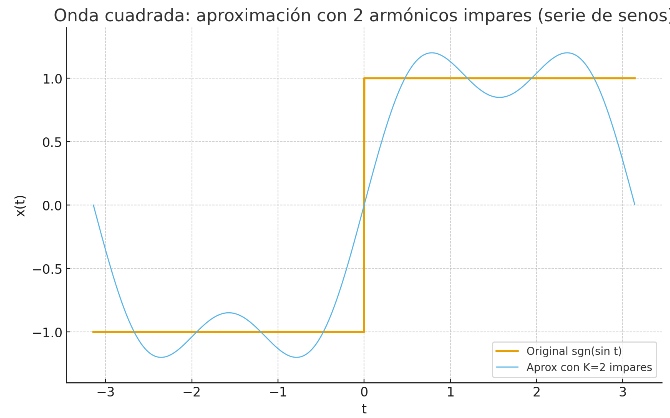
En la práctica, se usan sólo los primeros K armónicos para aproximar la señal:

$$x_K(t) = \sum_{k=-K}^{K} c_k \, e^{jk\omega_0 t} \tag{5}$$

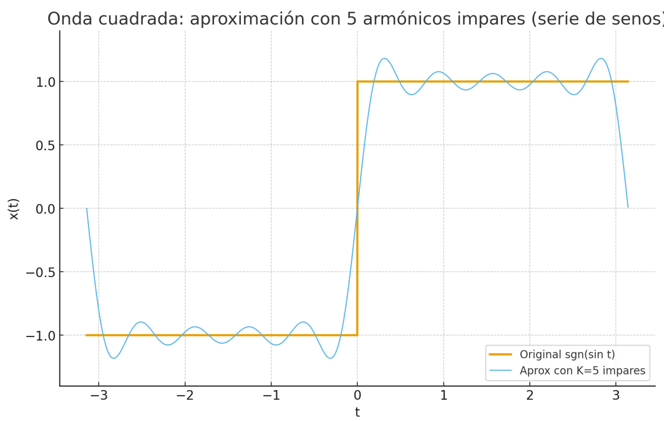
Esto es útil para análisis numérico y simulaciones. Cerca de discontinuidades pueden aparecer oscilaciones (efecto Gibbs). El valor de K depende de la precisión deseada y la naturaleza de la señal.



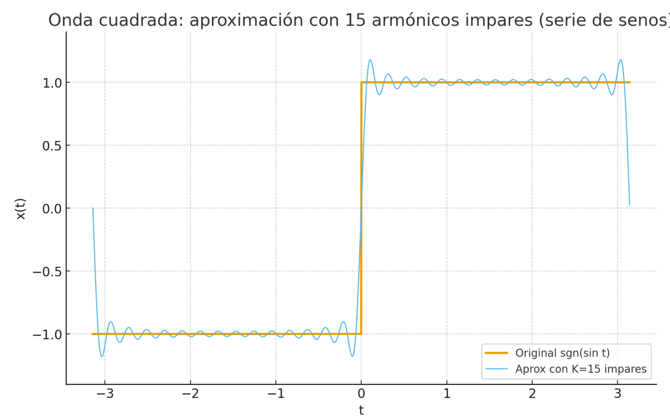
(a) Aproximación con $K = 1$ armónico impar.



(b) Aproximación con $K = 2$ armónicos impares.



(c) Aproximación con $K = 5$ armónicos impares.



(d) Aproximación con $K = 15$ armónicos impares.

Figura 1: Aproximación de una onda cuadrada mediante la suma de los primeros K armónicos impares (serie de senos). Se observa cómo la aproximación mejora al aumentar K, pero aparecen oscilaciones cerca de las discontinuidades (efecto Gibbs).

Energía y potencia

La energía de una señal mide el "contenido total" a lo largo del tiempo:

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \, dt \tag{6}$$

Para señales periódicas, la energía es infinita, pero se define la potencia promedio en un período:

$$P_x = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} |x(t)|^2 \, dt \tag{7}$$

La potencia indica cuánta energía se transfiere en promedio por unidad de tiempo.

Relación de Parseval (señales periódicas)

La relación de Parseval conecta el dominio temporal y el de frecuencias:

$$P_x = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} |x(t)|^2 \, dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 \tag{8}$$

Esto permite calcular la potencia directamente a partir de los coeficientes de Fourier, sin necesidad de integrar en el tiempo.

---

1. Considere la familia de funciones exponenciales discretas:

$$A = \Big\{ (\gamma_a(n)) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \gamma_a(n) = a^n u(n),\ 0 < a < 1 \Big\} \tag{9}$$

1. Verifique que el impulso discreto $\delta(n)$ puede ser expresado punto a punto como:

$$\delta(n) = \gamma_a(n) - a\,\gamma_a(n-1) \tag{10}$$

2. Del punto anterior, muestre que toda señal discreta $x(n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ puede ser descompuesta como:

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\,\gamma_a(n-k) \tag{11}$$

3. Use las propiedades de linealidad e invariancia en el tiempo para expresar la salida $y(n) = \mathcal{T}[x(n)]$ en términos de la entrada $x(n)$ y la señal $g(n) = \mathcal{T}[\gamma_a(n)]$.

Solución:

Resolución 1.1

Sea la familia de funciones exponenciales discretas:

$$A = \Big\{ \gamma_a(n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \gamma_a(n) = a^n u(n),\ 0 < a < 1 \Big\}. \tag{12}$$

Queremos verificar que:

$$\delta(n) = \gamma_a(n) - a\,\gamma_a(n-1). \tag{13}$$

Dado que se busca demostrar lo anterior, tendremos lo siguiente:

$$\begin{aligned} \gamma_a(n) - a\,\gamma_a(n-1) &= a^n u(n) - a \cdot a^{n-1} u(n-1) && (14) \\ &= a^n u(n) - a^n u(n-1) && (15) \\ &= a^n \big[u(n) - u(n-1) \big]. && (16) \end{aligned}$$

Recordemos que:

$$u(n) - u(n-1) = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ 0, & n \neq 0, \end{cases} \tag{17}$$

lo cual corresponde exactamente a la definición del impulso discreto $\delta(n)$. Por lo tanto:

$$\delta(n) = \gamma_a(n) - a\,\gamma_a(n-1). \tag{18}$$

Resolución 1.2

Sabemos que cualquier señal discreta $x(n)$ puede expresarse como:

$$x(n) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} x(k)\,\delta(n-k). \tag{19}$$

Sustituyendo la expresión de $\delta(n)$ obtenida en el punto anterior:

$$\begin{aligned} x(n) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} x(k)\Big[\gamma_a(n-k) - a\,\gamma_a(n-k-1)\Big] && (20)\\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} x(k)\,\gamma_a(n-k) \;-\; a\sum_{k\in\mathbb{Z}} x(k)\,\gamma_a(n-k-1). && (21)\end{aligned}$$

En la segunda suma hacemos el cambio de variable $k \mapsto k-1$:

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} x(k)\,\gamma_a(n-k-1) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} x(k-1)\,\gamma_a(n-k). \tag{22}$$

Por tanto:

$$x(n) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \Big[x(k) - a\,x(k-1)\Big]\,\gamma_a(n-k). \tag{23}$$

Definiendo:

$$c_k = x(k) - a\,x(k-1), \tag{24}$$

tenemos finalmente:

$$x(n) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k\,\gamma_a(n-k). \tag{25}$$

Resolución 1.3

Sea el sistema $\mathcal{T}$ lineal e invariante en el tiempo (LTI). Definimos:

$$g(n) = \mathcal{T}[\gamma_a(n)]. \tag{26}$$

La respuesta al impulso del sistema es:

$$h(n) = \mathcal{T}[\delta(n)]. \tag{27}$$

Usando el resultado de 1.1:

$$\begin{aligned} h(n) &= \mathcal{T}\big[\gamma_a(n) - a\,\gamma_a(n-1)\big] && (28)\\ &= \mathcal{T}[\gamma_a(n)] - a\,\mathcal{T}[\gamma_a(n-1)] && (29)\\ &= g(n) - a\,g(n-1). && (30)\end{aligned}$$

Finalmente, como el sistema es LTI:

$$\begin{aligned} y(n) &= (x * h)(n) && (31)\\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} x(k)\,h(n-k) && (32)\\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} x(k)\Big[g(n-k) - a\,g(n-k-1)\Big]. && (33)\end{aligned}$$

De este modo:

$$y(n) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} x(k) \left[g(n-k) - a\, g(n-k-1)\right]. \tag{34}$$

2. Responda lo siguiente:

   1. Demuestre que

   $$\frac{1}{T_0}\int_{t_0}^{t_0+T_0} e^{-j2\pi F_0\cdot kt}\, dt = 0, \quad \text{si } k \neq 0 \tag{35}$$

   siendo T_0 el periodo fundamental.

   2. En base a lo anterior demuestre que una señal $x(t)$ periódica de periodo T_0, escrita como:

   $$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \phi_k(t) \tag{36}$$

   Los valores de los coeficientes c_k vendrán dados por:

   $$c_k = \frac{1}{T_0}\langle x(t), \phi_k(t)\rangle = \frac{1}{T_0}\int_{t_0}^{t_0+T_0} x(t)\phi_k^*(t)\, dt \tag{37}$$

   siendo $\phi_k(t)$ la familia de funciones ortogonales:

   $$\phi_k(t) = e^{j\frac{2\pi}{T_0}kt} \tag{38}$$

   3. **[Propuesto]** Finalmente demuestre que:

   $$\lim_{N\to\infty} \|x(t) - x_N(t)\| = 0 \quad \forall t \in (t_0, t_0+T_0) \tag{39}$$

   siendo $x_N(t)$ la aproximación de $x(t)$ con $2N+1$ armónicos.

Solución:

Resolución 2.1

Se pide el demostrar que:

$$\frac{1}{T_0}\int_{t_0}^{t_0+T_0} e^{-j2\pi F_0\cdot kt}\, dt = 0, \quad \text{si } k \neq 0 \tag{40}$$

Recordando la primitiva de la exponencial compleja,

$$\int e^{at} dt = \frac{e^{at}}{a} + C, \quad a \neq 0, \tag{41}$$

se puede luego demostrar fácilmente evaluando la integral:

$$\frac{1}{T_0}\int_{t_0}^{t_0+T_0} e^{-j2\pi F_0\cdot kt}\,dt = \frac{1}{T_0}\left[\frac{e^{-j2\pi F_0 kt}}{-j2\pi F_0 k}\right]_{t_0}^{t_0+T_0} \tag{42}$$

$$= \frac{1}{T_0}\cdot\frac{1}{-j2\pi F_0 k}\left(e^{-j2\pi F_0 k(t_0+T_0)} - e^{-j2\pi F_0 k t_0}\right) \tag{43}$$

$$= \frac{1}{T_0}\cdot\frac{1}{-j2\pi F_0 k}e^{-j2\pi F_0 k t_0}\left(e^{-j2\pi F_0 k T_0} - 1\right) \tag{44}$$

Dado que $F_0 = \frac{1}{T_0}$, tenemos:

$$e^{-j2\pi F_0 k T_0} = e^{-j2\pi k} = 1 \tag{45}$$

Por lo tanto:

$$\frac{1}{T_0}\int_{t_0}^{t_0+T_0} e^{-j2\pi F_0\cdot kt}\,dt = \frac{1}{T_0}\cdot\frac{1}{-j2\pi F_0 k}e^{-j2\pi F_0 k t_0}(1-1) = 0 \tag{46}$$

para $k \neq 0$, como se quería demostrar.

Resolución 2.2

Dado que podemos escribir la función periódica $x(t)$ como:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \phi_k(t) \tag{47}$$

Luego tenemos que el producto interno entre $x(t)$ y $\phi_k(t)$ es:

$$\langle x(t), \phi_k(t)\rangle = \int_{t_0}^{t_0+T_0} x(t)\phi_k^*(t)\,dt \tag{48}$$

$$= \int_{t_0}^{t_0+T_0} x(t)e^{-j2\pi F_0 kt}\,dt \tag{49}$$

$$= \int_{t_0}^{t_0+T_0}\left(\sum_{k'=-\infty}^{\infty} c_{k'}\phi_{k'}(t)\right)e^{-j2\pi F_0 kt}\,dt \tag{50}$$

$$= \sum_{k'=-\infty}^{\infty} c_{k'}\int_{t_0}^{t_0+T_0} e^{j2\pi F_0 k' t}\cdot e^{-j2\pi F_0 kt}\,dt \tag{51}$$

$$= \sum_{k'=-\infty}^{\infty} c_{k'}\int_{t_0}^{t_0+T_0} e^{j2\pi F_0 (k'-k)t}\,dt \tag{52}$$

Como vimos en la resolución 2.1, la integral es cero para $k' \neq k$ y T_0 para $k' = k$. Por lo tanto, el producto interno lo podemos escribir en base al impulso como:

$$\sum_{k'=-\infty}^{\infty} c_{k'}\int_{t_0}^{t_0+T_0} e^{j2\pi F_0 (k'-k)t}\,dt = \sum_{k'=-\infty}^{\infty} c_{k'}\,\delta(k'-k)T_0 = c_k T_0 \tag{53}$$

Con lo que finalmente tenemos que:

$$\langle x(t), \phi_k(t) \rangle = c_k T_0 \tag{54}$$

$$\Rightarrow \quad c_k = \frac{1}{T_0} \langle x(t), \phi_k(t) \rangle \tag{55}$$

De donde se obtiene la expresión buscada para los coeficientes c_k:

$$c_k = \frac{1}{T_0} \langle x(t), \phi_k(t) \rangle = \frac{1}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T_0} x(t) \phi_k^*(t)\, dt \tag{56}$$

Resolución 2.3

Se pide demostrar que la aproximación por serie de Fourier converge en norma:

$$\lim_{N\to\infty} \|x(t) - x_N(t)\| = 0 \quad \forall t \in (t_0, t_0 + T_0) \tag{57}$$

Esta ecuación establece que al incluir más armónicos en la serie de Fourier, el error entre la señal original $x(t)$ y su aproximación $x_N(t)$ tiende a cero. Esto garantiza que podemos reconstruir perfectamente cualquier señal usando infinitos armónicos.

La aproximación $x_N(t)$ usa los primeros $2N + 1$ armónicos (desde $k = -N$ hasta $k = N$):

$$x_N(t) = \sum_{k=-N}^{N} c_k \phi_k(t) \tag{58}$$

Para demostrar la convergencia, calculamos la norma L^2 del error en el intervalo $[t_0, t_0 + T_0]$:

$$\|x(t) - x_N(t)\| = \sqrt{\langle x(t) - x_N(t), x(t) - x_N(t) \rangle} \tag{59}$$

$$= \sqrt{\int_{t_0}^{t_0+T_0} |x(t) - x_N(t)|^2\, dt} \tag{60}$$

La clave está en evaluar la integral $\int_{t_0}^{t_0+T_0} |x(t) - x_N(t)|^2\, dt$. Usando la identidad $|a - b|^2 = |a|^2 - 2\mathrm{Re}(ab^*) + |b|^2$, expandimos:

$$|x(t) - x_N(t)|^2 = |x(t)|^2 - 2\mathrm{Re}\{x(t)x_N^*(t)\} + |x_N(t)|^2 \tag{61}$$

Integrando término a término en el intervalo $[t_0, t_0 + T_0]$:

$$\int_{t_0}^{t_0+T_0} |x(t) - x_N(t)|^2\, dt = \int_{t_0}^{t_0+T_0} |x(t)|^2\, dt - 2\mathrm{Re}\left\{ \int_{t_0}^{t_0+T_0} x(t)x_N^*(t)\, dt \right\} + \int_{t_0}^{t_0+T_0} |x_N(t)|^2\, dt \tag{62}$$

Ahora analizamos cada integral. Para la integral cruzada, sustituyendo la definición $x_N(t) = \sum_{k=-N}^{N} c_k \phi_k(t)$:

$$\int_{t_0}^{t_0+T_0} x(t) x_N^*(t)\, dt = \int_{t_0}^{t_0+T_0} x(t) \left(\sum_{k=-N}^{N} c_k^* \phi_k^*(t) \right) dt \tag{63}$$

$$= \sum_{k=-N}^{N} c_k^* \int_{t_0}^{t_0+T_0} x(t) \phi_k^*(t)\, dt \tag{64}$$

$$= \sum_{k=-N}^{N} c_k^* \cdot c_k T_0 \quad \text{(por la fórmula de análisis: } c_k = \frac{1}{T_0} \int x(t) \phi_k^*(t) dt) \tag{65}$$

$$= T_0 \sum_{k=-N}^{N} |c_k|^2 \tag{66}$$

Para la integral de $|x_N(t)|^2$, utilizamos la propiedad clave de ortogonalidad de las funciones $\phi_k(t)$:

$$\int_{t_0}^{t_0+T_0} |x_N(t)|^2\, dt = \int_{t_0}^{t_0+T_0} \left| \sum_{k=-N}^{N} c_k \phi_k(t) \right|^2 dt \tag{67}$$

$$= \sum_{k=-N}^{N} |c_k|^2 T_0 \quad \text{(los términos cruzados se anulan por ortogonalidad)} \tag{68}$$

Combinando estos resultados en la expresión del error:

$$\int_{t_0}^{t_0+T_0} |x(t) - x_N(t)|^2\, dt = \int_{t_0}^{t_0+T_0} |x(t)|^2\, dt - 2T_0 \sum_{k=-N}^{N} |c_k|^2 + T_0 \sum_{k=-N}^{N} |c_k|^2 \tag{69}$$

$$= \int_{t_0}^{t_0+T_0} |x(t)|^2\, dt - T_0 \sum_{k=-N}^{N} |c_k|^2 \tag{70}$$

Observemos que el término $-2T_0 \sum |c_k|^2 + T_0 \sum |c_k|^2 = -T_0 \sum |c_k|^2$ muestra que incluir más armónicos efectivamente reduce el error.

Ahora aplicamos la relación de Parseval, que establece que la energía en el dominio temporal es igual a la energía en el dominio de frecuencias:

$$\int_{t_0}^{t_0+T_0} |x(t)|^2\, dt = T_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 \tag{71}$$

Sustituyendo esta relación en la expresión del error:

$$\int_{t_0}^{t_0+T_0} |x(t) - x_N(t)|^2\, dt = T_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 - T_0 \sum_{k=-N}^{N} |c_k|^2 \tag{72}$$

$$= T_0 \sum_{|k|>N} |c_k|^2 \tag{73}$$

Este resultado es fundamental: el error al cuadrado es exactamente T_0 veces la suma de los coeficientes que *no* incluimos en la aproximación (aquellos con $|k| > N$). Por tanto, la norma del error viene dada por:

$$\|x(t) - x_N(t)\|^2 = T_0 \sum_{|k|>N} |c_k|^2 \tag{74}$$

Para que la demostración sea completa, necesitamos que la señal $x(t)$ tenga energía finita en un período, es decir, que se cumpla $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 < \infty$. Esta condición es razonable para señales físicamente realizables. Bajo esta hipótesis:

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{|k|>N} |c_k|^2 = 0 \tag{75}$$

puesto que cuando $N \to \infty$, la suma de los términos "cola" de una serie convergente tiende a cero.

Finalmente, tomando la raíz cuadrada en ambos lados y aplicando el límite:

$$\lim_{N\to\infty} \|x(t) - x_N(t)\| = \lim_{N\to\infty} \sqrt{T_0 \sum_{|k|>N} |c_k|^2} = 0 \quad \forall t \in (t_0, t_0 + T_0) \tag{76}$$

Esto completa la demostración de que la serie de Fourier converge en norma L^2 hacia la función original. El resultado es poderoso: nos asegura que cualquier señal de energía finita puede ser aproximada arbitrariamente bien mediante una suma finita de armónicos.

3. Para la función sinusoidal rectificada mostrada en la figura 2, calcule los coeficientes de la serie de Fourier , ademas verifique el cumplimiento del teorema de Parseval.

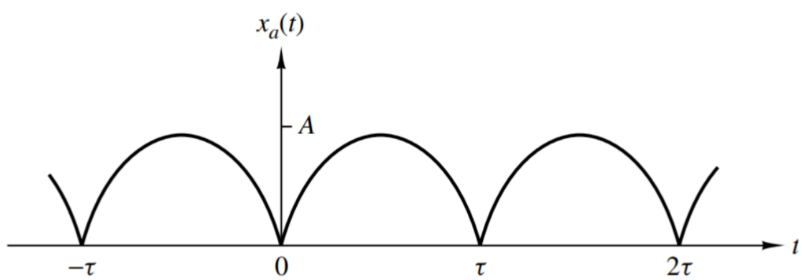


Figura 2: Función sinusoidal rectificada

Solución:

Resolución 3.1

Sea la sinusoidal rectificada de período τ (se extiende periódicamente):

$$x(t) = A \sin\left(\frac{\pi t}{\tau}\right), \qquad 0 \le t < \tau, \tag{77}$$

con frecuencia fundamental $f_0 = \frac{1}{\tau}$ y pulsación $\omega_0 = \frac{2\pi}{\tau}$. Los coeficientes complejos de Fourier se obtienen con la ecuación de análisis:

$$c_k = \frac{1}{\tau}\int_0^{\tau} x(t)\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt. \tag{78}$$

Sustituyendo $x(t)$ y usando las identidades de Euler, $\sin\theta = \frac{e^{j\theta}-e^{-j\theta}}{2j}$, resulta

$$c_k = \frac{A}{\tau}\int_0^{\tau} \sin\!\left(\frac{\pi t}{\tau}\right) e^{-j\frac{2\pi}{\tau}kt}\, dt \tag{79}$$

$$= \frac{A}{2j\,\tau}\int_0^{\tau} \left(e^{j\frac{\pi}{\tau}(1-2k)t} - e^{-j\frac{\pi}{\tau}(1+2k)t}\right) dt \tag{80}$$

$$= \frac{A}{2j\,\tau}\left[\frac{e^{j\frac{\pi}{\tau}(1-2k)t}}{j\frac{\pi}{\tau}(1-2k)} - \frac{e^{-j\frac{\pi}{\tau}(1+2k)t}}{-j\frac{\pi}{\tau}(1+2k)}\right]_0^{\tau}. \tag{81}$$

Como $e^{j\pi(1-2k)} = e^{-j\pi(1+2k)} = -1$ para todo $k \in \mathbb{Z}$,

$$c_k = \frac{A}{2j\,\tau}\left[\frac{-2}{j\frac{\pi}{\tau}(1-2k)} + \frac{-2}{j\frac{\pi}{\tau}(1+2k)}\right] = \frac{A}{\pi}\left(\frac{1}{1-2k} + \frac{1}{1+2k}\right) \tag{82}$$

$$= \frac{A}{\pi}\,\frac{(1+2k)+(1-2k)}{1-4k^2} = \boxed{\frac{2A}{\pi\,(1-4k^2)}}. \tag{83}$$

En particular como se tiene que,

$$c_0 = \frac{2A}{\pi}, \qquad c_{-k} = c_k \quad \text{(coeficientes reales y pares).} \tag{84}$$

Dado que los coeficientes son reales, se cumple que $c_{-k} = c_k^*$. Por otro lado buscamos realizar la verificacion de Parseval, por lo que la potencia promedio en el tiempo es

$$P_x = \frac{1}{\tau}\int_0^{\tau} x^2(t)\, dt = \frac{A^2}{\tau}\int_0^{\tau} \sin^2\!\left(\frac{\pi t}{\tau}\right) dt = \frac{A^2}{2}. \tag{85}$$

En frecuencia,

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = \frac{4A^2}{\pi^2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(1-4k^2)^2} = \frac{4A^2}{\pi^2}\left[1 + 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(1-4k^2)^2}\right]. \tag{86}$$

Usando la identidad

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(1-4k^2)^2} = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2}, \tag{87}$$

se obtiene

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = \frac{4A^2}{\pi^2}\left[1 + 2\left(\frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2}\right)\right] = \frac{4A^2}{\pi^2}\cdot\frac{\pi^2}{8} = \frac{A^2}{2} = P_x, \tag{88}$$

con lo que queda verificada la relación de Parseval.

4. Dadas dos señales $f(t)$ y $g(t)$ con coeficientes de Fourier c_k y d_k, respectivamente, encuentre los coeficientes de Fourier de la señal $y(t) = f(t) \cdot g(t)$.

Solución:

Resolución 4.1

Este problema aborda una propiedad fundamental de las series de Fourier el cual es el comportamiento de los coeficientes cuando multiplicamos dos señales periódicas.

Consideremos dos señales T-periódicas $f(t)$ y $g(t)$, cada una con su respectiva expansión en serie de Fourier compleja:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \, e^{jk\omega_0 t}, \qquad g(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} d_m \, e^{jm\omega_0 t}, \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}. \tag{89}$$

Aquí c_k y d_m son los coeficientes de Fourier de $f(t)$ y $g(t)$ respectivamente, y ω_0 es la frecuencia fundamental. Nuestro objetivo es encontrar los coeficientes de Fourier β_n de la señal producto $y(t) = f(t)\, g(t)$.

Para calcular estos coeficientes, aplicamos la fórmula estándar de análisis de Fourier:

$$\beta_n = \frac{1}{T} \int_0^T y(t)\, e^{-jn\omega_0 t}\, dt = \frac{1}{T} \int_0^T f(t)\, g(t)\, e^{-jn\omega_0 t}\, dt. \tag{90}$$

La clave del desarrollo está en sustituir las expansiones en serie de Fourier de $f(t)$ y $g(t)$ directamente en esta integral. Al hacerlo, obtenemos un producto de dos sumas infinitas:

$$\begin{aligned} \beta_n &= \frac{1}{T} \int_0^T \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t} \right) \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} d_m e^{jm\omega_0 t} \right) e^{-jn\omega_0 t}\, dt && (91) \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_k d_m e^{j(k+m)\omega_0 t} e^{-jn\omega_0 t}\, dt. && (92) \end{aligned}$$

Bajo condiciones apropiadas de convergencia, podemos intercambiar el orden de integración y suma, factorizando los coeficientes constantes:

$$\beta_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_k d_m \left(\frac{1}{T} \int_0^T e^{j(k+m-n)\omega_0 t}\, dt \right). \tag{93}$$

Ahora aparece la propiedad fundamental de ortogonalidad de las exponenciales complejas. La integral que aparece en paréntesis es:

$$\frac{1}{T} \int_0^T e^{j\ell\omega_0 t}\, dt = \begin{cases} 1, & \ell = 0, \\ 0, & \ell \neq 0, \end{cases} \tag{94}$$

donde $\ell = k + m - n$. Esta propiedad es crucial porque actúa como un "filtro" que elimina todos los términos excepto aquellos donde $k + m - n = 0$.

La condición $k+m-n=0$ se puede reescribir como $m=n-k$. Esto significa que en la doble suma, solo contribuyen los pares (k,m) donde m tiene esta relación específica con k y n. Por tanto, la suma sobre m colapsa y obtenemos:

$$\beta_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \, d_{n-k}. \tag{95}$$

En resumen, se demuestra que:

$$\boxed{\beta_n = (c * d)_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \, d_{n-k}}. \tag{96}$$

5. Encuentre los coeficientes de Fourier y la serie de Fourier de la función onda cuadrada $f(x)$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -\pi \leq x < 0 \\ 1 & \text{si } 0 \leq x < \pi \end{cases} \quad \text{y} \quad f(x+2\pi) = f(x) \tag{97}$$

Solución:

Resolución 5.1

Buscamos los coeficientes complejos de Fourier c_k para la función onda cuadrada periódica $f(x)$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -\pi \leq x < 0 \\ 1 & \text{si } 0 \leq x < \pi \end{cases} \quad \text{y} \quad f(x+2\pi) = f(x). \tag{98}$$

La función tiene período $T=2\pi$, por lo que la frecuencia fundamental es $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$.
Los coeficientes complejos de Fourier se calculan usando la fórmula de análisis:

$$c_k = \frac{1}{T}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-jkx}\, dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-jkx}\, dx \tag{99}$$

Dado que $f(x)=0$ para $x \in [-\pi, 0)$ y $f(x)=1$ para $x \in [0,\pi)$, tenemos:

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} 0 \cdot e^{-jkx}\, dx + \int_{0}^{\pi} 1 \cdot e^{-jkx}\, dx\right) \tag{100}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} e^{-jkx}\, dx \tag{101}$$

Evaluamos la integral considerando dos casos:

- Caso 1: $k=0$

$$c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} 1\, dx = \frac{1}{2\pi}\cdot \pi = \frac{1}{2} \tag{102}$$

- Caso 2: $k \neq 0$

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} e^{-jkx}\, dx \tag{103}$$
$$= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{e^{-jkx}}{-jk} \right]_0^{\pi} \tag{104}$$
$$= \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{-jk} \left(e^{-jk\pi} - e^0 \right) \tag{105}$$
$$= \frac{1}{2\pi jk} \left(1 - e^{-jk\pi} \right) \tag{106}$$

Usando la identidad de Euler $e^{-jk\pi} = \cos(k\pi) - j\sin(k\pi)$, y notando que para k entero, $\sin(k\pi) = 0$ y $\cos(k\pi) = (-1)^k$:

$$c_k = \frac{1}{2\pi jk} \left(1 - (-1)^k \right) \tag{107}$$
$$= \begin{cases} 0, & k \text{ par} \\ \frac{1}{\pi jk}, & k \text{ impar} \end{cases} \tag{108}$$

Para k impar, podemos reescribir:

$$c_k = \frac{1}{\pi jk} = -\frac{j}{\pi k} \quad \text{para } k \text{ impar} \tag{109}$$

Por tanto, los coeficientes de Fourier son:

$$\boxed{c_k = \begin{cases} \frac{1}{2}, & k = 0 \\ 0, & k \text{ par}, k \neq 0 \\ -\frac{j}{\pi k}, & k \text{ impar} \end{cases}} \tag{110}$$

La serie de Fourier de la onda cuadrada es:

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \text{ impar}}}^{\infty} \left(-\frac{j}{\pi k} \right) e^{jkx}} \tag{111}$$

Alternativamente, usando solo términos positivos y la forma trigonométrica:

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin((2n+1)x)}{2n+1}} \tag{112}$$