Análisis y Diseño de Circuitos Eléctricos
(EL3101-2)
Clase auxiliar 3
Prof. Santiago Bradford V.
Prof. Aux. Erik Saez A. - Rodrigo Catalán - Byron Castro R.

1. Considere el circuito de la figura 6. Determinar el voltaje v_{sal} dado que se conoce i.

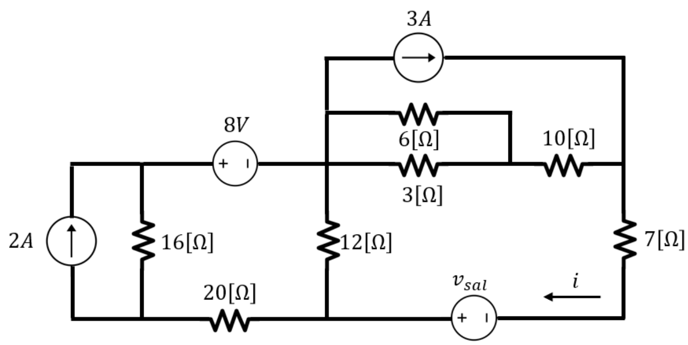

Figura 1: Esquema del circuito

Solución:

Se busca el obtener el voltaje v_{sal}, por lo tanto sera de utilidad considerar la equivalencia *Thevenin - Norton* para el circuito, por lo tanto dividiendo por zonas:

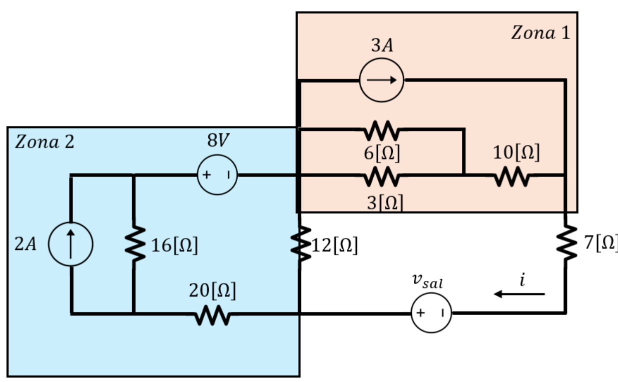

Figura 2: Esquema del circuito

Por lo tanto para la zona 1 tenemos que:

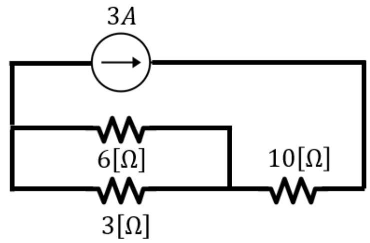

Figura 3: Esquema del circuito

Donde notamos que la resistencia de 6[Ω] y la de 3[Ω] se encuentran en paralelo, es decir:

$$R_{eq} = \frac{6[\Omega] \cdot 3[\Omega]}{6[\Omega] + 3[\Omega]} = 2[\Omega] \tag{1}$$

Con lo que se obtiene que:

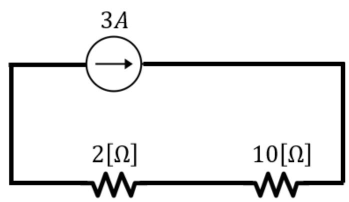

Figura 4: Esquema del circuito

Donde notamos que la resistencia equivalente de 2[Ω] y la de 10[Ω] se encuentran en serie, es decir:

$$R_{eq} = 2[\Omega] + 10[\Omega] = 12[\Omega] \tag{2}$$

De esta manera podemos aplicar la equivalencia de Thevenin - Norton, por lo tanto se tiene que:

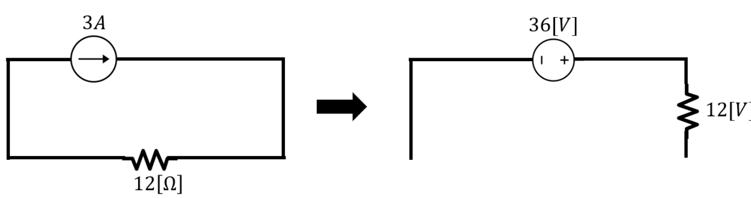

Figura 5: Esquema del circuito

Luego analogamente para la zona 2 tenemos que:

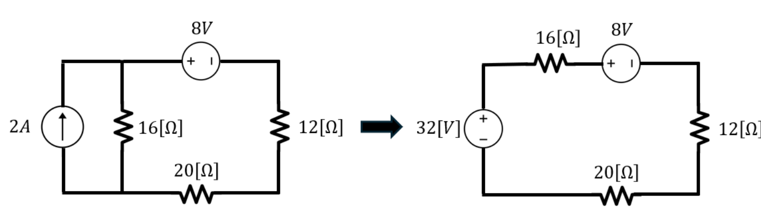

Figura 6: Esquema del circuito

De esta manera tenemos que las dos resistencias estan en serie por lo que:

$$R_{eq} = 16[\Omega] + 20[\Omega] = 36[\Omega] \tag{3}$$

Ademas tenemos dos resistencia en sentido opuestos, por lo que se restan dando como resultado:

$$V_{eq} = 32[V] - 8[V] = 24[V] \tag{4}$$

$$\tag{5}$$

Por lo que el esquema final vendra dado por:

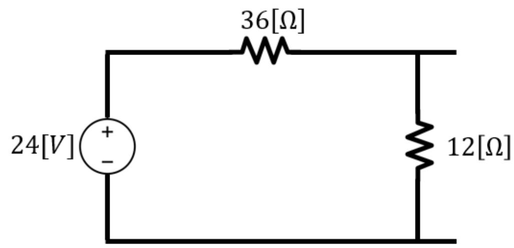

Figura 7: Esquema del circuito

Recordemos que esta zona se encuentra conectada al resto del circuito por lo que los voltajes 12[Ω] Y 36[Ω] no se encuentran ni en serie ni en paralelo, lo que podemos realizar por tanto es utilizar otra vez la equivalencia de Thevenin - Norton, por lo que se tiene que:

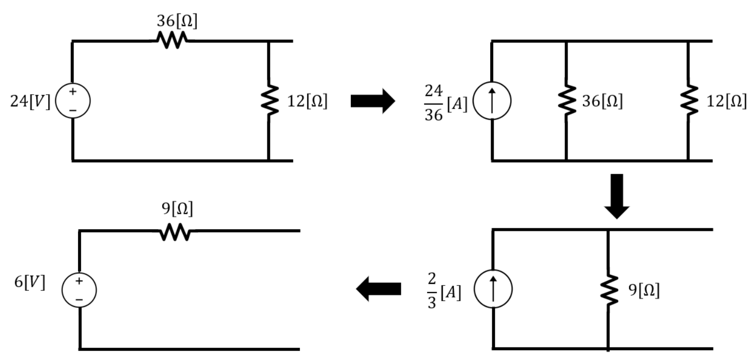

Figura 8: Esquema del circuito

De esta manera tenemos que el circuito original vendra dado por:

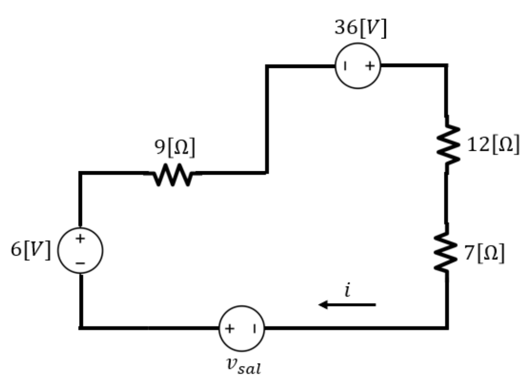

Figura 9: Esquema del circuito

Con lo que el circuito se simplifica de sobremanera, por lo que unicamente tenemos una malla dada por

$$-6 + 9i - 36 + 12i + 7i - V_{sal} = 0 \tag{6}$$

: y dado que la corriente i es conocid,tenemos finalmente que el v_{sal} sera:

$$\begin{aligned} V_{sal} &= 6 + 9i - 36 + 12i + 7i && (7) \\ &= -30 + 28i && (8) \end{aligned}$$

De esta manera se obtiene el voltaje v_{sal} en funcion de la corriente i.

2. Para el circuito de la figura:

    1. El valor de R2 respecto a R1 que maximiza la potencia disipada en R2.
    2. Qué ocurre con la potencia si el valor de R2 es muy alto (Aprox. a ∞).
    3. Qué ocurre con la potencia si el valor de R2 es muy bajo (Aprox. a 0).

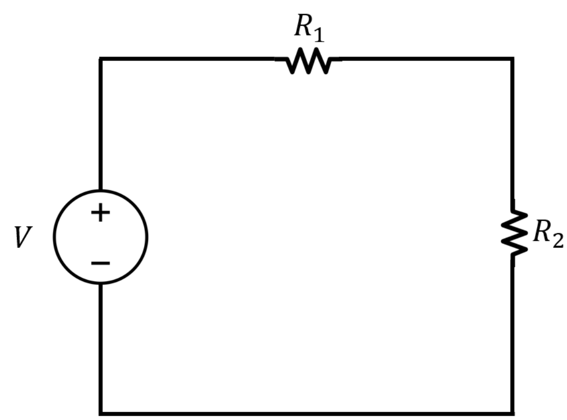

Figura 10: Esquema del circuito

Solución:

1. Se busca obtener el valor de R_2 respecto a R_1 que maximiza la potencia disipada en R_2, por lo tanto:

$$\begin{aligned} V - V_{R1} - V_{R2} &= 0 && (9) \\ V &= V_{R1} + V_{R2} && (10) \\ V &= R_1 \cdot I_1 + R_2 \cdot I_1 && (11) \\ I_1 &= \frac{V}{R_1 + R_2} && (12) \end{aligned}$$

Luego reemplazando sobre la potencia disipada en R_2:

$$P_{R2} = V_{R2} \cdot I_1 \tag{13}$$
$$= R_2 \cdot I_1^2 \tag{14}$$
$$= R_2 \cdot \left(\frac{V}{R_1 + R_2}\right)^2 \tag{15}$$

Para cumplir la condicion de maximo se deriva respecto a R_2 y se iguala a 0, tal que:

$$\frac{dP_{R2}}{dR_2} = 0 \tag{16}$$
$$\frac{d}{dR_2}\left(R_2 \cdot \left(\frac{V}{R_1 + R_2}\right)^2\right) = 0 \tag{17}$$
$$\frac{1}{(R_1 + R_2)^2} - \frac{2R_2}{(R_1 + R_2)^3} = 0 \tag{18}$$
$$\frac{1}{(R_1 + R_2)^2} = \frac{2R_2}{(R_1 + R_2)^3} \tag{19}$$
$$1 = \frac{2R_2}{(R_1 + R_2)} \tag{20}$$
$$R_1 + R_2 = 2R_2 \tag{21}$$
$$R_1 = R_2 \tag{22}$$

De esta manera se obtiene que el valor de R_2 respecto a R_1 que maximiza la potencia disipada en R_2 es $R_1 = R_2$.

2. Analizando este caso en diferentes aspectos, tenemos que:

$$lim_{R_2 \to \infty}(P_{R2}) = \frac{R_2 \cdot V^2}{(R_1 + R_2)^2} = \frac{\frac{1}{R_2} \cdot V^2}{(\frac{R_1}{(R_2)^2} + 1)^2} = 0 \tag{23}$$

Por otro lado el voltaje se tendra que:

$$lim_{R_2 \to \infty}(V_{R2}) = R_2 \cdot I_1 = R_2\left(\frac{V}{R_1 + R_2}\right) = \frac{V}{\left(\frac{1}{R_2 + 1}\right)} = V \tag{24}$$

Por ultimo la corriente se tendra que:

$$lim_{R_2 \to \infty}(I_1) = \frac{V}{R_1 + R_2} = 0 \tag{25}$$

Este fenomeno es conocido como un circuito abierto, puede entenderse como que la resistencia tiende a infinito y por tanto no permite circular corriente, por lo tanto no se disipa potencia.

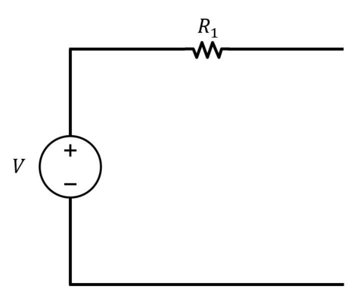

Figura 11: Esquema del circuito abierto

3. Por otro lado sea el caso que R_2 tiende a 0, se tiene que en base al mismo analisis:

$$lim_{R_2 \to 0}(P_{R2}) = \frac{R_2 \cdot V^2}{(R_1 + R_2)^2} = \frac{0 \cdot V^2}{(R_1)^2} = 0 \tag{26}$$

Por otro lado el voltaje se tendra que:

$$lim_{R_2 \to 0}(V_{R2}) = R_2 \cdot I_1 = R_2 \left(\frac{V}{R_1 + R_2} \right) = 0 \tag{27}$$

Por ultimo la corriente se tendra que:

$$lim_{R_2 \to 0}(I_1) = \frac{V}{R_1 + R_2} = \frac{V}{R_1} = \frac{V}{R_1} \tag{28}$$

Este fenomeno es conocido como un corto circuito, puede entenderse como que la resistencia tiende a 0 y por tanto no permite caida de voltaje y deja pasar toda la corriente, por lo tanto no se disipa potencia.

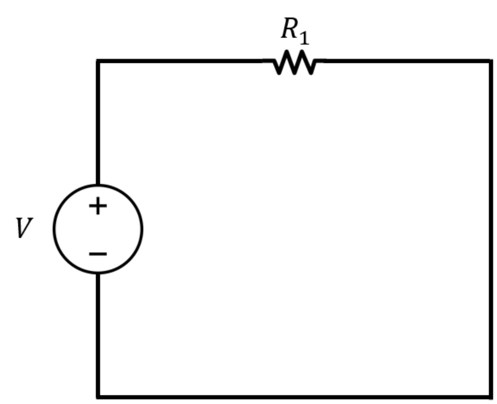

Figura 12: Esquema del circuito cerrado para R_2

Estos dos conceptos es super importante entenderlos y no confundirlos.

3. En base a la figura del enunciado:

   1. Asigne referencias a cada elemento.
   2. Use LVK para encontrar el voltaje en cada resistencia.
   3. Use la ley de Ohm para encontrar la corriente en cada resistencia.
   4. Use LCK para encontrar la corriente que pasa a través de cada fuente de voltaje.

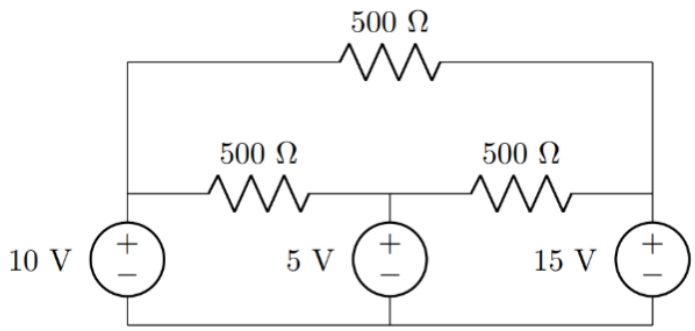

Figura 13: Esquema del circuito

Solución:

1. Las asignaciones de referencias son arbitrarias y propias de quien las plantee, el unico requerimiento es que se mantenga la consistencia en el analisis, en este caso particular:

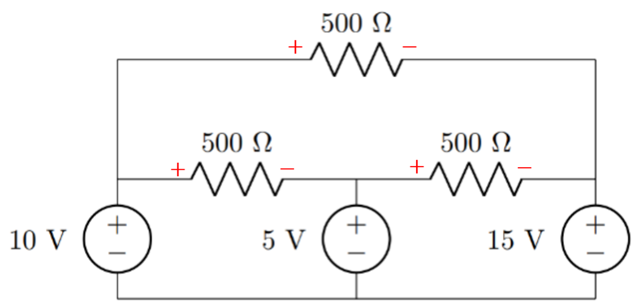

Figura 14: Esquema del circuito

2. Se busca obtener el voltaje en cada resistencia, por lo tanto se plantea LVK en cada malla:

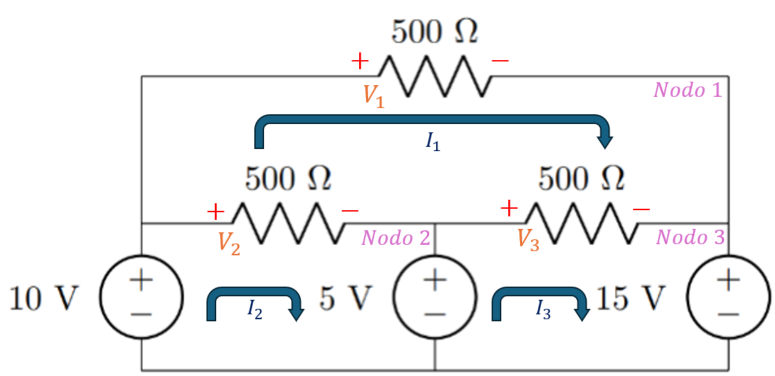

Figura 15: Esquema del circuito con todas las referencias

Luego para cada nodo tenemos lo siguiente:

$$\sum_{\text{Nodo 1}} V_n = V_1 - V_2 - V_3 = 0 \tag{29}$$

$$V_1 = V_2 + V_3 \tag{30}$$

$$\sum_{\text{Nodo 2}} V_n = 5[v] - 10[v] + V_2 = 0 \tag{31}$$

$$V_2 = 5[v] \tag{32}$$

$$\sum_{\text{Nodo 3}} V_n = 15[v] - 5 + V_3 = 0 \tag{33}$$

$$V_3 = -10[v] \tag{34}$$

Con lo que finalmente se obtiene $V_1 = V_2 + V_3 = -5[v]$

3. Se busca obtener la corriente en cada resistencia, pero utilizando LCK, para esto tenemos el siguiente esquema:

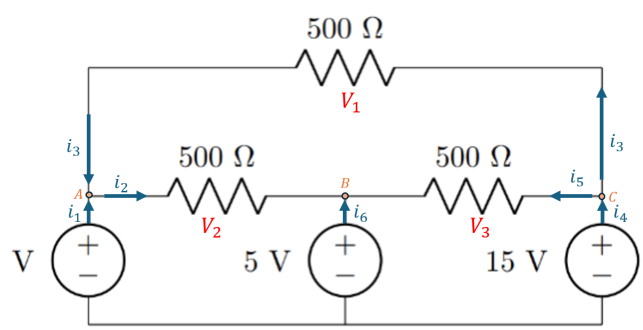

Figura 16: Esquema del circuito

Luego se tiene que en cada nodo:

$$\text{Nodo A:} \quad i_3 + i_1 = i_2 \tag{35}$$

$$\text{Nodo B:} \quad i_6 + i_2 + i_3 = 0 \tag{36}$$

$$\text{Nodo C:} \quad i_4 = i_3 + i_5 \tag{37}$$

Luego se tiene lo siguiente para la diferencia de voltajes:

$$
\begin{aligned}
V_{AB} : V_A - V_B = V_2 &= i_2 R_2 \\
V_A - V_B &= i_2 R_2 \\
10[V] - 5[V] &= i_2 R_2 \\
\frac{5[V]}{500[\Omega]} &= i_2 \\
i_2 &= 0.01[A]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
V_{CA} : V_C - V_A &= i_3 R_1 \\
15[V] - 10[V] &= i_3 R_1 \\
i_3 &= \frac{5[V]}{500[\Omega]} \\
i_3 &= 0.01[A]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
V_{CB} : V_C - V_B &= i_5 R_3 \\
V_C - V_B &= i_5 R_3 \\
15[V] - 5[V] &= i_5 R_3 \\
\frac{10[V]}{500[\Omega]} &= i_5 \\
i_5 &= 0.02[A]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
i_1 &= i_2 - i_3 \\
&= 0.01[A] - 0.01[A] \\
&= 0[A]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
i_6 &= -(i_2 + i_5) \\
i_6 &= -0.03[A]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
i_5 &= i_4 - i_3 \\
0.02[A] &= i_4 + 0.01[A] \\
i_4 &= 0.01[A]
\end{aligned}
$$

4. En base a la figura del enunciado:
   1. Identifique todos los nodos.
   2. Simplifique el circuito lo que más pueda y luego asigne referencia de signos.
   3. Plantee todas las ecuaciones de malla del circuito.
   4. Calcule las corrientes incógnitas del método de mallas considerando que todas las resistencias tienen el mismo valor.

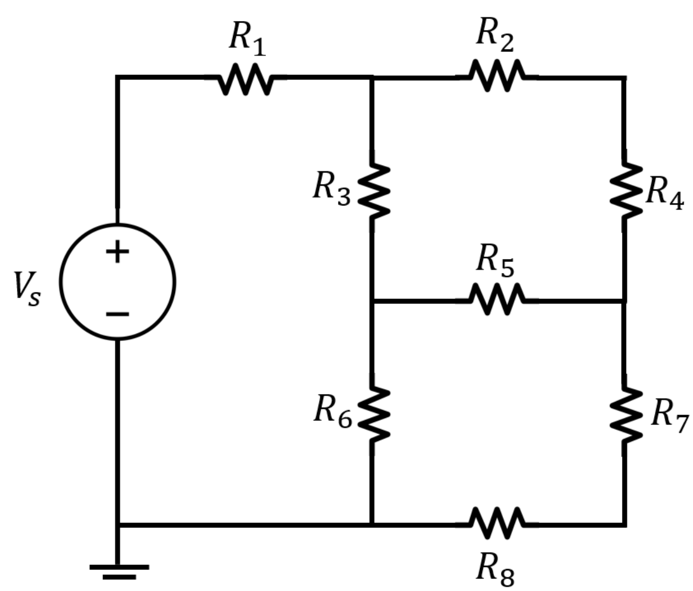

Figura 17: Esquema del circuito

Solución:

1. Se busca el identificar todos los nodos del circuito, por lo tanto se tiene lo siguiente:

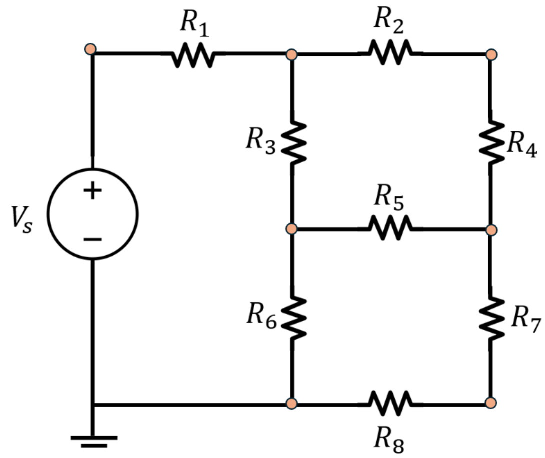

Figura 18: Esquema del circuito con los nodos identificados

2. Se busca simplificar el circuito lo mas posible, por lo tanto se identifica lo siguiente:
   - Tanto R_2 como R_4 se encuentran en serie.
   - Tanto R_7 como R_8 se encuentran en serie.

   Luego tenemos que el esquema simplificado es el siguiente:

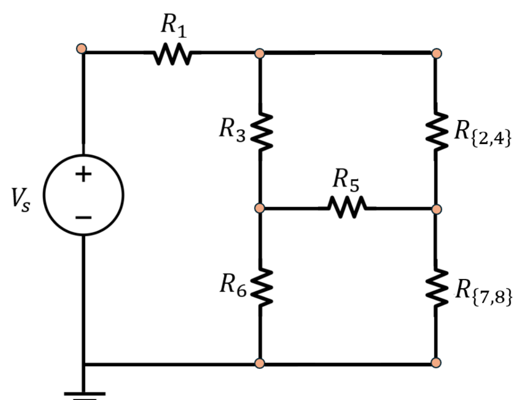

Figura 19: Esquema del circuito con los nodos identificados

   Luego se asignan las referencias de signos dando como resultado:

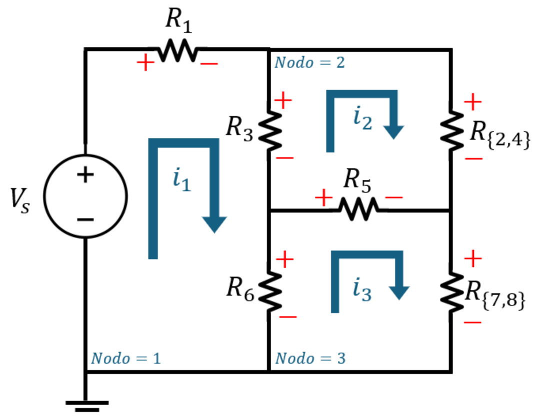

Figura 20: Esquema del circuito con los referencias

3. Luego se busca plantear las ecuaciones de malla, por lo tanto se tiene lo siguiente:

$$\text{Malla 1:} \quad -V_s + V_1 + V_3 + V_6 = 0 \tag{38}$$
$$\text{Malla 2:} \quad -V_3 + V_{2,4} - V_5 = 0 \tag{39}$$
$$\text{Malla 3:} \quad -V_6 + V_5 - V_{7,8} = 0 \tag{40}$$

Luego reoordenando de manera conveniente tenemos que:

$$V_s = V_1 + V_3 + V_6 \tag{41}$$
$$0 = V_3 + V_5 - V_{2,4} \tag{42}$$
$$0 = V_5 + V_{7,8} - V_6 \tag{43}$$

Luego ademas tenemos que:

$$V_1 = i_1 R_1 \tag{44}$$
$$V_{2,4} = i_2 R_{2,4} = i_2(R_2 + R_4) \tag{45}$$
$$V_3 = (i_1 - i_2)R_3 \tag{46}$$
$$V_5 = (i_3 - i_2)R_5 \tag{47}$$
$$V_6 = (i_1 - i_3)R_6 \tag{48}$$
$$V_{7,8} = i_3 R_{7,8} = i_3(R_7 + R_8) \tag{49}$$

Reemplazando sobre lo anterior tenemos que:

$$V_s = V_1 + V_3 + V_6 = i_1 R_1 + (i_1 - i_2)R_3 + (i_1 - i_3)R_6 \tag{50}$$
$$0 = V_3 + V_6 - V_{2,4} = (i_1 - i_2)R_3 + (i_3 - i_2)R_5 - i_2(R_2 + R_4) \tag{51}$$
$$0 = V_5 + V_{7,8} - V_6 = (i_3 - i_2)R_5 + i_3(R_7 + R_8) - (i_1 - i_3)R_6 \tag{52}$$

Luego reoordenando se tiene:

$$V_s = i_1(R_1 + R_3 + R_6) + i_2(-R_3) + i_3(-R_6) \tag{53}$$
$$0 = i_1(R_3) + i_2(-R_5 - R_4 - R_3 - R_2) + i_3(R_5) \tag{54}$$
$$0 = i_1(-R_6) + i_2(-R_5) + i_3(R_8 + R_7 + R_6 + R_5) \tag{55}$$

Con lo que expresando en forma matricial tenemos que:

$$\begin{bmatrix} R_1+R_3+R_6 & -R_3 & -R_6 \\ R_3 & -R_5-R_4-R_3-R_2 & R_5 \\ -R_6 & -R_5 & R_8+R_7+R_6+R_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_s \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{56}$$

Luego multiplicando por (-1) la segunda fila se obtiene:

$$\begin{bmatrix} R_1+R_3+R_6 & -R_3 & -R_6 \\ -R_3 & R_5+R_4+R_3+R_2 & -R_5 \\ -R_6 & -R_5 & R_8+R_7+R_6+R_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_s \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{57}$$

En base al enunciado, se consideran todas las resistencias iguales por tanto:

$$\begin{bmatrix} 3R & -R & -R \\ -R & 4R & -R \\ -R & -R & 4R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_s \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{58}$$

Por lo que se necesita obtener la inversa de la matriz de coeficientes (**Propuesta para el lector**), por tanto se tiene:

$$\begin{bmatrix} 3R & -R & -R \\ -R & 4R & -R \\ -R & -R & 4R \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 3/7R & 1/7R & 1/7R \\ 1/7R & 11/35R & 4/35R \\ 1/7R & 4/35R & 11/35R \end{bmatrix} \tag{59}$$

De esta manera tenemos que las corrientes vendran dadas por:

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/7R & 1/7R & 1/7R \\ 1/7R & 11/35R & 4/35R \\ 1/7R & 4/35R & 11/35R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_s \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{60}$$

De esta manera se tiene que las corrientes seran:

$$i_1 = \frac{3}{7R} \cdot V_s \tag{61}$$

$$i_2 = \frac{1}{7R} \cdot V_s \tag{62}$$

$$i_3 = \frac{1}{7R} \cdot V_s \tag{63}$$

Con lo que se obtienen las corrientes incognitas del circuito.