



1. Responda lo siguiente:

1. Demuestre que una señal coseno discreta es periódica si y sólo si la frecuencia es racional:

$$(x[n])_{n \in \mathbb{Z}} = (A \cos(2\pi f n + \varphi))_{n \in \mathbb{Z}} \iff f \in \mathbb{Q}. \quad (1)$$

2. Considere la siguiente familia de señales exponenciales:

$$(s_k[n])_{n \in \mathbb{Z}} = (e^{j \frac{2\pi k}{N} n})_{n \in \mathbb{Z}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2)$$

Muestre que su período fundamental está dado por

$$N_p = \frac{N}{\gcd(k, N)}, \quad (3)$$

donde $\gcd(\cdot, \cdot)$ denota el máximo común divisor.

Solución:

Resolución 1.1

Demostraremos que una señal coseno discreta $x[n] = A \cos(2\pi f n + \varphi)$ es periódica si y sólo si la frecuencia f es racional.

(\Rightarrow): Si $x[n]$ es periódica, entonces $f \in \mathbb{Q}$

Supongamos que $x[n]$ es N -periódica para algún $N \in \mathbb{Z}^+$. Entonces:

$$x[n + N] = x[n] \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad (4)$$

$$A \cos(2\pi f(n + N) + \varphi) = A \cos(2\pi f n + \varphi) \quad (5)$$

Esto implica que las fases deben cumplir que el término $2\pi f N$ debe ser un múltiplo entero de 2π para que se cumpla la periodicidad; por tanto:

$$2\pi f(n + N) + \varphi = 2\pi f n + \varphi + 2\pi m \quad (6)$$

para algún entero m (usando la periodicidad del coseno). Luego, simplificando:

$$2\pi f N = 2\pi m \quad (7)$$

$$f = \frac{m}{N} \in \mathbb{Q} \quad (8)$$

Por lo tanto, si $x[n]$ es periódica, entonces f debe ser racional.

(\Leftarrow): Si $f \in \mathbb{Q}$, entonces $x[n]$ es periódica

Supongamos que $f = \frac{k}{N}$ donde $k, N \in \mathbb{Z}$ y $\gcd(k, N) = 1$ (fracción en forma irreducible).

Evaluemos $x[n + N]$:

$$x[n + N] = A \cos\left(2\pi \frac{k}{N}(n + N) + \varphi\right) \quad (9)$$

$$= A \cos\left(2\pi \frac{k}{N}n + 2\pi k + \varphi\right) \quad (10)$$

$$= A \cos\left(2\pi \frac{k}{N}n + \varphi\right) \quad (\text{ya que } 2\pi k \text{ es múltiplo de } 2\pi) \quad (11)$$

$$= x[n] \quad (12)$$

Por lo tanto, $x[n]$ es N -periódica. Además, como $f = \frac{k}{N}$ está en forma irreducible, el período fundamental es exactamente $N_0 = N$. Así, se demuestra ambas direcciones de la equivalencia:

$$\boxed{x[n] = A \cos(2\pi f n + \varphi) \text{ es periódica} \iff f \in \mathbb{Q}} \quad (13)$$

Resolución 1.2

Sea la familia de señales $s_k[n] = e^{j\frac{2\pi k}{N}n}$; demostraremos que el período fundamental es $N_p = \frac{N}{\gcd(k, N)}$, donde $\gcd(k, N)$ corresponde al máximo común divisor. Para que $s_k[n]$ sea periódica con período P , debe cumplirse:

$$s_k[n + P] = s_k[n] \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad (14)$$

Sustituyendo la definición:

$$e^{j\frac{2\pi k}{N}(n+P)} = e^{j\frac{2\pi k}{N}n} \quad (15)$$

$$e^{j\frac{2\pi k}{N}n} \cdot e^{j\frac{2\pi k}{N}P} = e^{j\frac{2\pi k}{N}n} \quad (16)$$

Para que esto se cumpla para todo n , necesitamos:

$$e^{j\frac{2\pi k}{N}P} = 1 \quad (17)$$

$$\frac{2\pi k}{N}P = 2\pi m \quad \text{para algún } m \in \mathbb{Z} \quad (18)$$

$$kP = mN \quad (19)$$

Sea $d = \gcd(k, N)$. Podemos escribir:

$$k = d \cdot k' \quad (20)$$

$$N = d \cdot N' \quad (21)$$

donde $\gcd(k', N') = 1$. Sustituyendo en la ecuación (19):

$$dk'P = m \cdot dN' \quad (22)$$

$$k'P = mN' \quad (23)$$

Como $\gcd(k', N') = 1$, recordemos que P es un valor entero. Para que esto se cumpla, m deberá ser múltiplo de k' , por lo que definimos $m = k' \cdot q$, con lo que resulta:

$$k'P = k'qN' \quad (24)$$

$$P = qN' \quad (25)$$

Como buscamos el período mínimo, tendremos que q debe ser el menor valor posible, por lo que el menor valor positivo de P que satisface esta ecuación es:

$$P_{min} = N' = \frac{N}{d} = \frac{N}{\gcd(k, N)} \quad (26)$$

Conclusión: El período fundamental de la señal exponencial compleja es:

$$N_p = \frac{N}{\gcd(k, N)} \quad (27)$$

Observación: Este resultado tiene sentido intuitivo:

- Si $k = 0$, entonces $N_p = N$ (señal constante)
- Si $\gcd(k, N) = 1$, entonces $N_p = N$ (período máximo)
- Si $\gcd(k, N) = N$ (i.e., k es múltiplo de N), entonces $N_p = 1$ (señal constante)

2. Determine si las siguientes señales son periódicas. Si corresponde, especifique su período fundamental.

1. $x_a(t) = 6 \cos(9t + \frac{\pi}{3})$.
2. $x[n] = 6 \cos(9n + \frac{\pi}{3})$.
3. $x[n] = \cos(\frac{n}{8}) \cos(\frac{\pi n}{8})$.
4. $x[n] = 2e^{j(\frac{\pi}{7}n - 3)}$.
5. $x[n] = \cos(\frac{\pi n}{2}) - \sin(\frac{\pi n}{8}) + 3 \cos(\frac{\pi n}{4} + \frac{\pi}{3})$.

Solución:

Recordemos que para determinar si una señal es periódica, se deben aplicar los siguientes criterios:

- **Señales continuas:** $x_a(t) = A \cos(\omega t + \phi)$ es siempre periódica con período $T_0 = \frac{2\pi}{\omega}$.
- **Señales discretas:** $x[n] = A \cos(\omega n + \phi)$ es periódica si y solo si $\frac{\omega}{2\pi} \in \mathbb{Q}$.
- **Suma de señales periódicas:** Si $x_1[n]$ tiene período N_1 y $x_2[n]$ tiene período N_2 , entonces $x[n] = x_1[n] + x_2[n]$ tiene período $N_0 = \text{lcm}(N_1, N_2)$. Donde lcm es el mínimo común múltiplo.

Resolución 2.1

Para la señal $x_a(t) = 6 \cos(9t + \frac{\pi}{3})$, que es continua, el período fundamental se calcula como:

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{9} \text{ segundos} \quad (28)$$

Es directo verificar que:

$$x_a(t + T_0) = 6 \cos\left(9\left(t + \frac{2\pi}{9}\right) + \frac{\pi}{3}\right) \quad (29)$$

$$= 6 \cos\left(9t + 2\pi + \frac{\pi}{3}\right) \quad (30)$$

$$= 6 \cos\left(9t + \frac{\pi}{3}\right) = x_a(t) \quad (31)$$

La señal es periódica con período fundamental $T_0 = \frac{2\pi}{9} \text{ s}$.

Resolución 2.2

Para la señal discreta $x[n] = 6 \cos(9n + \frac{\pi}{3})$, aplicamos el criterio de periodicidad: $\frac{\omega}{2\pi} \in \mathbb{Q}$. Aquí $\omega = 9$, entonces:

$$\frac{\omega}{2\pi} = \frac{9}{2\pi} \quad (32)$$

Como π es irracional, la fracción $\frac{9}{2\pi}$ también es irracional. Por lo tanto:

$$\frac{9}{2\pi} \notin \mathbb{Q} \quad (33)$$

Por lo tanto, la señal NO es periódica.

Resolución 2.3

Para la señal $x[n] = \cos(\frac{n}{8}) \cos(\frac{\pi n}{8})$, utilizamos la identidad trigonométrica:

$$\cos(A) \cos(B) = \frac{1}{2} [\cos(A - B) + \cos(A + B)] \quad (34)$$

Con $A = \frac{n}{8}$ y $B = \frac{\pi n}{8}$:

$$A - B = \frac{(1 - \pi)n}{8} \quad (35)$$

$$A + B = \frac{(1 + \pi)n}{8} \quad (36)$$

Por lo tanto:

$$x[n] = \frac{1}{2} \left[\cos\left(\frac{(1 - \pi)n}{8}\right) + \cos\left(\frac{(1 + \pi)n}{8}\right) \right] \quad (37)$$

Para cada término, verificamos si $\frac{\omega}{2\pi} \in \mathbb{Q}$:

$$\text{Término 1: } \frac{\omega_1}{2\pi} = \frac{(1-\pi)/8}{2\pi} = \frac{1-\pi}{16\pi} \notin \mathbb{Q} \quad (38)$$

$$\text{Término 2: } \frac{\omega_2}{2\pi} = \frac{(1+\pi)/8}{2\pi} = \frac{1+\pi}{16\pi} \notin \mathbb{Q} \quad (39)$$

Como ambos términos son aperiódicos, la señal NO es periódica.

Resolución 2.4

Para la señal $x[n] = 2e^{j(\frac{\pi}{7}n-3)}$, la reescribimos como:

$$x[n] = 2e^{-j3} \cdot e^{j\frac{\pi}{7}n} \quad (40)$$

El factor $2e^{-j3}$ es constante y no afecta la periodicidad. Analizamos $e^{j\frac{\pi}{7}n}$. Para que sea periódica con período N , debe cumplirse:

$$e^{j\frac{\pi}{7}(n+N)} = e^{j\frac{\pi}{7}n} \quad (41)$$

Esto requiere que $e^{j\frac{\pi N}{7}} = 1$, es decir:

$$\frac{\pi N}{7} = 2\pi m \quad \text{para algún } m \in \mathbb{Z} \quad (42)$$

$$N = 14m \quad (43)$$

El menor valor positivo es $N_0 = 14$. Verificamos:

$$\frac{\omega}{2\pi} = \frac{\pi/7}{2\pi} = \frac{1}{14} \in \mathbb{Q} \quad (44)$$

La señal es periódica con período fundamental $N_0 = 14$.

Resolución 2.5

Para la señal $x[n] = \cos(\frac{\pi n}{2}) - \sin(\frac{\pi n}{8}) + 3\cos(\frac{\pi n}{4} + \frac{\pi}{3})$, analizamos cada término:

Término 1: $\cos(\frac{\pi n}{2})$ con $\omega_1 = \frac{\pi}{2}$

$$\frac{\omega_1}{2\pi} = \frac{1}{4} \in \mathbb{Q} \quad \Rightarrow \quad N_1 = 4 \quad (45)$$

Término 2: $-\sin(\frac{\pi n}{8})$ con $\omega_2 = \frac{\pi}{8}$

$$\frac{\omega_2}{2\pi} = \frac{1}{16} \in \mathbb{Q} \quad \Rightarrow \quad N_2 = 16 \quad (46)$$

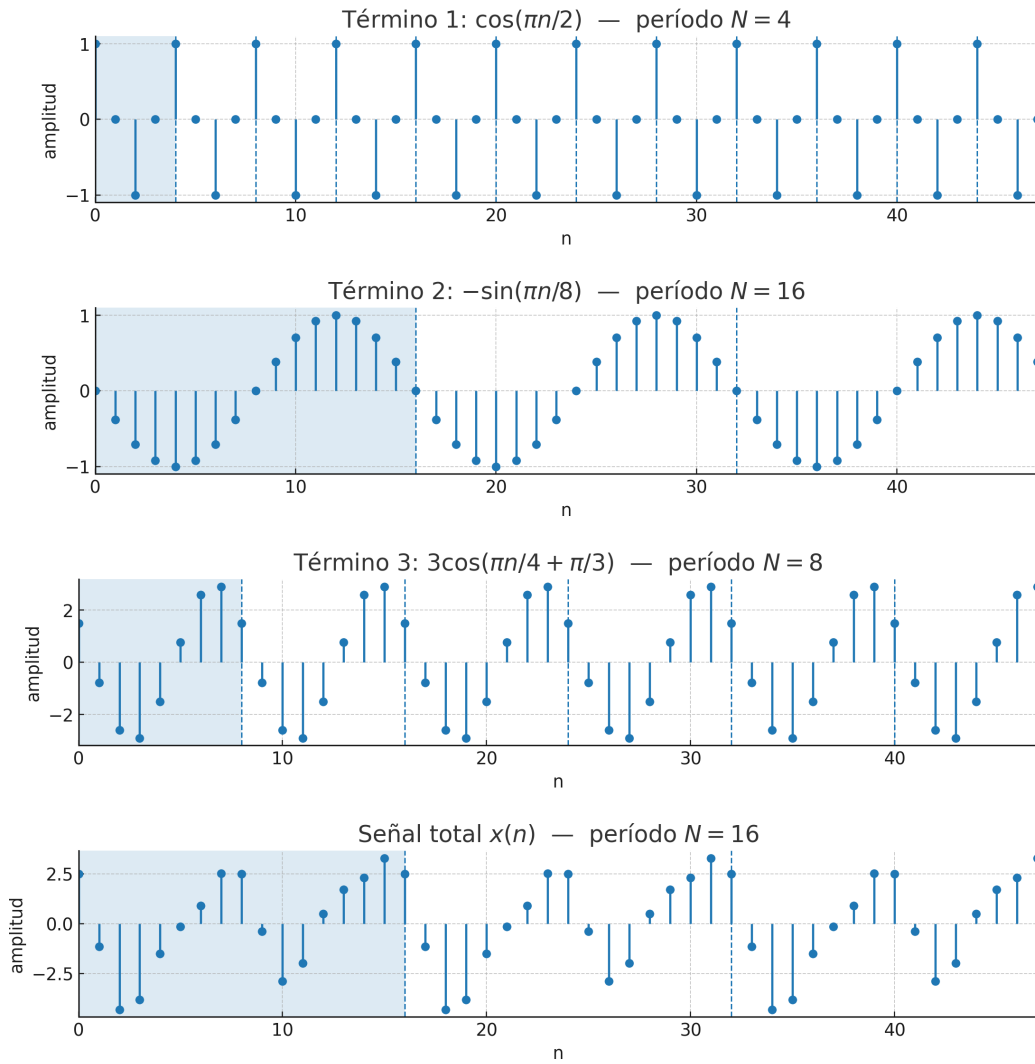
Término 3: $3\cos(\frac{\pi n}{4} + \frac{\pi}{3})$ con $\omega_3 = \frac{\pi}{4}$

$$\frac{\omega_3}{2\pi} = \frac{1}{8} \in \mathbb{Q} \quad \Rightarrow \quad N_3 = 8 \quad (47)$$

Como todos los términos son periódicos, el período fundamental es:

$$N_0 = \text{lcm}(4, 16, 8) = 16 \quad (48)$$

La señal es periódica con período fundamental $N_0 = 16$. Esto se visualiza en el siguiente gráfico:



3. Considere la siguiente señal sinusoidal a tiempo continuo:

$$x_a(t) = \frac{7}{2} \sin(200\pi t), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (49)$$

1. Bosqueje $x_a(t)$ para $0 \leq t \leq 30$ ms.
2. La señal $x_a(t)$ es muestreada a una tasa de $F_s = 300$ Hz. Determine la frecuencia de la señal a tiempo discreto $x[n] = x_a(nT_s)$, donde $T_s = 1/F_s$. Muestre que $x[n]$ es periódica y determine su período fundamental.
3. Bosqueje la señal $x[n]$ en el mismo diagrama donde bosquejó $x_a(t)$. ¿Cuál es el equivalente en milisegundos del período de $x[n]$?

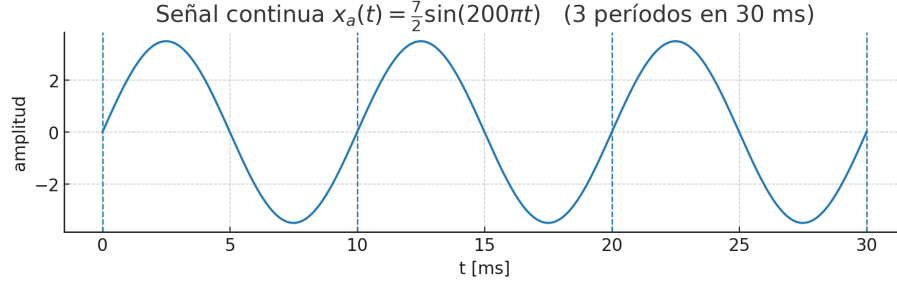
Solución:

Resolución 3.1

La señal $x_a(t) = \frac{7}{2} \sin(200\pi t)$ tiene frecuencia:

$$\omega = 200\pi \text{ rad/s}, \quad f = \frac{\omega}{2\pi} = 100 \text{ Hz}, \quad T = \frac{1}{f} = 0.01 \text{ s} = 10 \text{ ms}. \quad (50)$$

En 30 ms hay $30/10 = 3$ períodos completos; luego, el bosquejo de $x_a(t)$ es:



Resolución 3.2

Al muestrear con $F_s = 300$ Hz, donde $T_s = 1/F_s$, se obtiene:

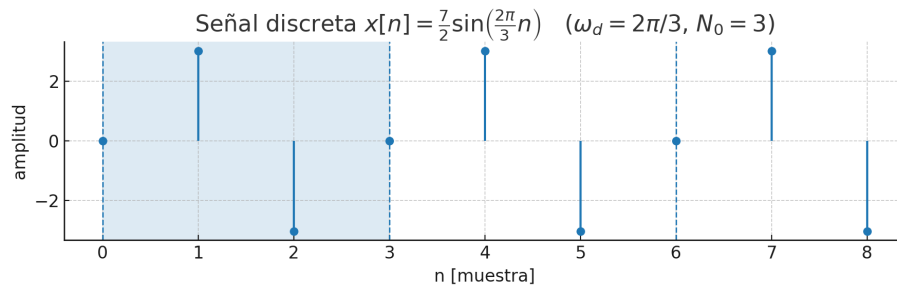
$$x[n] = x_a(nT_s) = \frac{7}{2} \sin(200\pi nT_s) = \frac{7}{2} \sin\left(200\pi \frac{n}{300}\right) = \frac{7}{2} \sin\left(\frac{2\pi}{3} n\right) \quad (51)$$

$$\Rightarrow \quad \omega_d = \frac{2\pi}{3} \text{ rad/muestra}, \quad f_d = \frac{\omega_d}{2\pi} = \frac{1}{3} \text{ ciclos/muestra}. \quad (52)$$

Como $f_d = \frac{1}{3} \in \mathbb{Q}$, $x[n]$ es periódica y su período fundamental es

$$N_0 = 3. \quad (53)$$

El muestreo se visualiza en el siguiente gráfico:

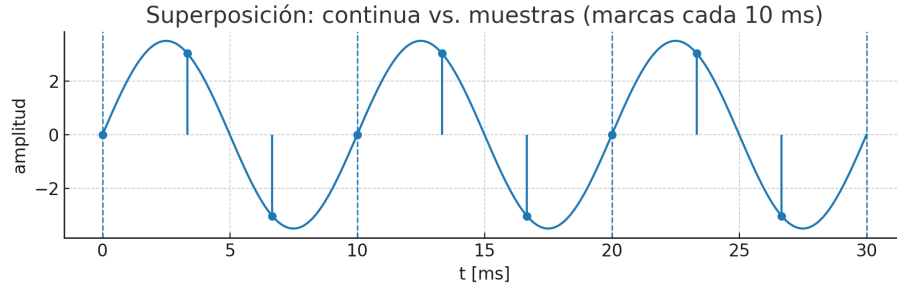


Resolución 3.3

El período de $x[n]$ en segundos es

$$T_x = N_0 T_s = 3 \cdot \frac{1}{300} = 0.01 \text{ s} = 10 \text{ ms}. \quad (54)$$

Coincide con el período de la señal continua $x_a(t)$, y gráficamente se observa que ambos períodos son iguales.



4. Considere una señal continua $x_a(t)$ periódica con período fundamental T_a (en segundos).

1. Si se muestrea la señal $x_a(t)$ a una tasa constante de F_s muestras por segundo, es decir, se induce la señal discreta

$$x[n] = x_a\left(\frac{n}{F_s}\right), \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad (55)$$

encuentre la(s) condición(es) que garantice(n) que $x[n]$ sea periódica y, con ello, determine su período fundamental.

2. Con base en el punto anterior, justifique la siguiente afirmación: si $x[n]$ es periódica, entonces su período fundamental (equivalente en **segundos**) es un múltiplo de T_a .

Solución:

Resolución 4.1

Dada una señal continua $x_a(t)$ periódica con período fundamental T_a , al muestrearla obtenemos:

$$x[n] = x_a\left(\frac{n}{F_s}\right) \quad (56)$$

Para que $x[n]$ sea periódica con período N , debe cumplirse:

$$x[n + N] = x[n] \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad (57)$$

Sustituyendo la definición de $x[n]$:

$$x[n + N] = x_a\left(\frac{n + N}{F_s}\right) \quad (58)$$

$$= x_a\left(\frac{n}{F_s} + \frac{N}{F_s}\right) \quad (59)$$

Para que esto sea igual a $x[n] = x_a\left(\frac{n}{F_s}\right)$, y dado que $x_a(t)$ es periódica con período T_a , necesitamos que:

$$\frac{N}{F_s} = mT_a \quad \text{para algún } m \in \mathbb{Z}^+ \quad (60)$$

Esto da como resultado:

$$N = mF_sT_a \quad (61)$$

Para que $x[n]$ sea periódica, N debe ser un entero positivo, por lo tanto:

$$\boxed{F_sT_a \in \mathbb{Q}} \quad (62)$$

Sea $F_sT_a = \frac{P}{Q}$ donde $P, Q \in \mathbb{Z}^+$ y $\gcd(P, Q) = 1$ (fracción irreducible).

Entonces $N = m\frac{P}{Q}$. Para que N sea entero, m debe ser múltiplo de Q . El menor valor positivo es $m = Q$, que da:

$$\boxed{N_0 = Q \cdot \frac{P}{Q} = P} \quad (63)$$

Si $F_sT_a = \frac{P}{Q}$ (irreducible), entonces $N_0 = P$.

Resolución 4.2

El período de $x[n]$ en segundos es:

$$T_x = \frac{N_0}{F_s} \quad (64)$$

Sustituyendo $N_0 = P$ y usando que $F_sT_a = \frac{P}{Q}$, obtenemos $F_s = \frac{P}{QT_a}$:

$$T_x = \frac{P}{\frac{P}{QT_a}} = \frac{P \cdot QT_a}{P} = QT_a \quad (65)$$

Como $Q \in \mathbb{Z}^+$, tenemos que:

$$\boxed{T_x = QT_a} \quad (66)$$

Por lo tanto, el período fundamental de $x[n]$ en segundos es siempre un múltiplo entero positivo del período fundamental T_a de la señal continua original. Esto significa que la señal muestreada puede tener un período temporal igual o mayor que la señal continua original, pero nunca menor. El factor Q depende de la relación entre la frecuencia de muestreo y la frecuencia de la señal.