Ingeniería Eléctrica
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

Análisis de Sistemas Dinámicos y Estimación
(EL3103)
Clase auxiliar 10
Prof. Heraldo Rozas.
Prof. Aux. Erik Saez - Maximiliano Morales

1 Resumen

Estimador de máxima verosimilitud:

Se define el estimador de máxima verosimilitud del parámetro θ de una distribución conocida $f_X(x|\theta)$, teniendo un vector de n observaciones de dicha variable, como:

$$\hat{\theta}_{ML} = \arg\max_{\theta\in\Theta} L(X_1, \ldots, X_n|\theta) \tag{1}$$

Donde:

$$L(X_1, \ldots, X_n|\theta) = f_{X_1,\ldots,X_n}(x_1, \ldots, x_n|\theta) \tag{2}$$

Un criterio equivalente (y a veces mejor) es el siguiente:

$$\hat{\theta}_{ML} = \arg\max_{\theta\in\Theta} \ln[L(X_1, \ldots, X_n|\theta)] \tag{3}$$

Estimador lineal de mínimos cuadrados:

Sea Y un vector de observaciones, un vector $\theta \in \mathbb{R}$ a inferir y un estimador $\hat{\theta} : \mathbb{X} \to \mathbb{R}^n$, tal que se tiene la relación lineal $Y = X \cdot \hat{\theta} + V^n$, con $X \in \mathbb{M}_{mn}$ y V^n un vector de ruido. Se define como el estimador lineal de mínimos cuadrados a:

$$\hat{\theta}_{LS}(Y) = (X^T \cdot X)^{-1} \cdot X^T \cdot Y \tag{4}$$

Tal que este minimiza la distancia entre el parámetro θ y el estimador $\hat{\theta}$, es decir, se minimiza $\|\hat{\theta} - \hat{\theta}_{LS}(Y)\|^2$.

Para cada estimador de mínimos cuadrados, se define su varianza residual (distancia entre Y e Y_{est}) en función del estimador como:

$$\sigma_R^2 = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - (X \cdot \hat{\theta}_{LS})_i)^2 \tag{5}$$

Finalmente, el valor que permite definir qué tan bueno es el estimador con respecto al estimador de media muestral típico $\sigma_Y^2 = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - (X \cdot \hat{\theta}_{\text{Media}})_i)^2$ es:

$$R^2 = 1 - \frac{\sigma_R^2}{\sigma_Y^2} \tag{6}$$

Para este valor, existen 3 casos:

- $R^2 = 1$: El estimador es óptimo pues posee una varianza mucho menor al de la media muestral.
- $R^2 = 0$: El estimador es equivalente al de la media muestral.
- $R^2 < 0$: El estimador posee peor desempeño que la media muestral.

Estimador MAP

Sea el vector $X = (X_1, \dots, X_n)$ tal que X_i i.i.d. $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, con función de densidad condicionada al parámetro θ $f_{X|\theta}$. A su vez, θ posee la función de densidad f_θ. Se define el estimador de máxima verosimilitud a posteriori de θ como:

$$\hat{\theta}_{MAP} = \arg\max_{\theta \in A} f_{\theta|X} \tag{7}$$

Este término puede desarrollarse más para obtener una expresión más fácil de obtener usando el teorema de Bayes:

$$\hat{\theta}_{MAP} = \arg\max_{\theta \in A} f_{X|\theta} \cdot f_\theta \tag{8}$$

$$\iff \hat{\theta}_{MAP} = \arg\max_{\theta \in A} \ln(f_{X|\theta} \cdot f_\theta) \tag{9}$$

1. Considere $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variables aleatorias i.i.d. observaciones de la siguiente f.d.p.m.:

$$p(x|\lambda) = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^x}{x!} \tag{10}$$

   1. Encuentre el estimador de máxima verosimilitud $\hat{\lambda}_{ML}$.
   2. Compruebe si el estimador encontrado es insesgado y consistente. *Hint*: Recuerde que una distribución $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$ cumple que $\mathbb{E}(X) = \text{Var}(X) = \lambda$.

2. Considere un sistema con dos sensores que toman medidas de una constante desconocida θ. Cada observación es ruidosa y puede ser modelada de la forma:

$$y(1) = \theta + v(1) \tag{11}$$
$$y(2) = \theta + v(2) \tag{12}$$

   Donde $v(1)$ y $v(2)$ son variables aleatorias definidas por ruido no-correlacionado, media cero y varianzas σ_1^2 y σ_2^2 respectivamente.

   En ausencia de cualquier otra información, es decir, sin información previa acerca del valor de θ, se busca el mejor estimador lineal de θ de la forma:

$$\hat{\theta} = k_1 \cdot y(1) + k_2 \cdot y(2) \tag{13}$$

   1. Encuentre el estimador de mínimos cuadrados de θ.
   2. Determine si dicho estimador es insesgado.
   3. Determine la varianza residual y el valor de R^2. ¿Qué puede decir del desempeño del estimador?
   4. Encuentre los valores para k_1 y k_2 que definen un estimador **insesgado** para θ que minimiza el error cuadrático medio, $\mathbb{E}[(\theta - \hat{\theta})^2]$.
   5. Obtenga el valor R^2 para este estimador y déjelo en función de las variables del problema.
   6. Obtenga los valores factibles para cada caso de R^2 y determine cuál estimador es mejor.

3. Sean $X_1, \ldots, X_n$ muestras *i.i.d.* de la variable aleatoria $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. A su vez, μ es una variable aleatoria continua tal que $\mu \sim \mathcal{N}(0, \sigma_0^2)$.

   1. Determine las densidades $f_{X_1,\ldots,X_n}$ y f_μ.
   2. Obtenga el estimador MAP de μ, $\hat{\mu}_{MAP}$.
   3. Determine los casos límite en que $\sigma_0^2 \to \infty$ y $\sigma_0^2 \to 0$. Interprete cada situación.