Auxiliar #5 - MAS/Ondas

Introducción a la Física Moderna (F1100-5)

Erik Saez A. - Javiera Toro

Departamento de Ingeniería Eléctrica
Universidad de Chile

September 12, 2025

erik.saez@ug.uchile.cl

Contenidos

M.A.S.: Ecuación y Solución

EDO del M.A.S.

Una **ecuación diferencial ordinaria (EDO)** relaciona una función desconocida y sus derivadas respecto de una sola variable independiente. La forma más común que encontraremos es la EDO lineal homogénea de 2° orden:

$$m\ddot{x} + kx = 0 \iff \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

Frecuencia angular $\omega^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$, que cuantifica la rapidez de la oscilación.

Posición de equilibrio

La **posición de equilibrio** x_{eq} es aquella en la que la fuerza neta (y por ende la aceleración) se anula: $m\ddot{x} = 0$, lo que implica que:

$$\ddot{x} = \dot{x} = 0 \tag{1}$$

Derivadas útiles

Cambio de variable respecto al equilibrio:

$$\begin{aligned} y(t) &= x(t) - x_{eq}, \\ \dot{y}(t) &= \dot{x}(t), \\ \ddot{y}(t) &= \ddot{x}(t). \end{aligned}$$

Solución general y derivada (conocida)

Para $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$:

$$\begin{aligned} x(t) &= A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t), \\ \dot{x}(t) &= -A\omega\sin(\omega t) + B\omega\cos(\omega t). \end{aligned}$$

C.I.: $x(t=0) = x_0 \Rightarrow A = x_0$,
$\dot{x}(0) = v_0 \Rightarrow B = v_0/\omega$.

Ondas en cuerdas: viajeras y superposición

Ecuación de onda y velocidad

La ecuacion de la onda describe el comportamiento temporal y espacial de perturbaciones que se propagan en un medio.

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \qquad c = \sqrt{\frac{T}{\rho}}.$$

Soluciones de d'Alembert

La solucion de la ecuación de onda es:

$$y(x,t) = f(x-ct) + g(x+ct).$$

- **Derecha:** $f(x-ct)$ (traslación en $+x$).
- **Izquierda:** $g(x+ct)$ (traslación en $-x$).

Onda armónica viajera

$$y(x,t) = A\cos(kx - \omega t + \phi) \tag{2}$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad c = \frac{\omega}{k} = \frac{\lambda}{T} \tag{3}$$

Superposición / Interferencia (misma k, ω)

$$y_1 = A\cos\Theta, \quad y_2 = A\cos(\Theta+\Delta\phi), \qquad \Theta = kx - \omega t + \phi.$$

Suma:

$$y = y_1 + y_2 = 2A\cos\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right)\cos\left(\Theta + \frac{\Delta\phi}{2}\right).$$

Casos clave:

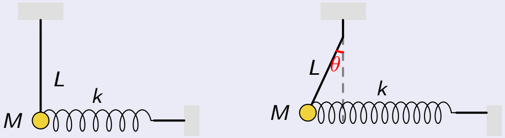
- **En fase** ($\Delta\phi = 0$): amplitud $= 2A$ (constructiva).
- **En contrafase** ($\Delta\phi = \pi$): amplitud $= 0$

Ejercicio 1

Enunciado

Un péndulo de longitud L con una masa M está unido lateralmente a un resorte de constante elástica k, como se muestra esquemáticamente. Cuando la masa cuelga verticalmente bajo el punto de suspensión, el resorte está sin deformación.

1. Obtén una expresión aproximada para el período de oscilación del sistema para pequeñas amplitudes (linealiza las ecuaciones de movimiento).
2. Supón $M = 1{,}00\,\mathrm{kg}$ y que, en ausencia del resorte, el período del péndulo es $2{,}00\,\mathrm{s}$. Determina k si el período del sistema acoplado es $1{,}00\,\mathrm{s}$.



Equilibrio (resorte sin deformar) **Desplazado** (resorte estirado)

Ejercicio 2

Enunciado

1. Bosquee la función
$$f(x) = \frac{1\,\mathrm{cm}}{1 + \left(x/1\,\mathrm{cm}\right)^2}. \tag{4}$$
Escriba $f(\bar{x})$ para $\bar{x} = x - ct$, donde c es la velocidad de propagación de la onda y t el tiempo. Si $c = 1\,\mathrm{cm/s}$, bosquee la función $u(x,t) = f(x - ct)$ para $t = 0, 1, 2\,\mathrm{s}$, donde $u(x,t)$ representa la amplitud de la onda en la posición x y tiempo t.
2. Calcule la velocidad vertical $v(x,t)$ de la cuerda en el instante $t = 0$. Para esto, derive la función $u(x,t)$ con respecto al tiempo considerando x constante.
3. Grafique $v(x,0)$ en función de x. Note que esta es positiva y negativa en ciertas partes. Interprete el resultado.

Ejercicio 3

Enunciado

Se tiene una masa m sostenida de dos cuerdas de largos L_1 y L_2, con tensiones T_1 y T_2 respectivamente en presencia de gravedad, como se observa en la figura. Considere que T_2 es conocido y T_1 es tal que el sistema no se mueve verticalmente.
Si inicialmente la masa se suelta desde el reposo a una distancia x,

1. Calcule el valor de T_1 para que el sistema no se mueva verticalmente.
2. Encuentre la frecuencia angular de oscilación.
3. Calcule el período de oscilación.
4. Calcule la amplitud de oscilación de la masa.

Considere para sus cálculos y aproximaciones $x \ll L_1, L_2$, y que las tensiones se mantienen al deformarse la cuerda.

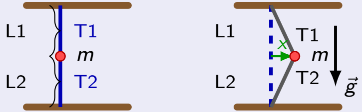


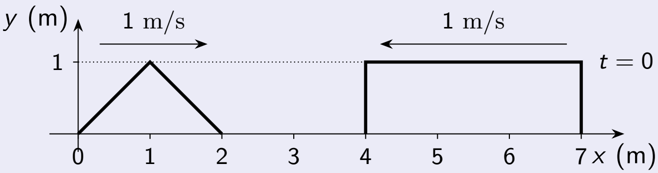
Fig.: Masa sostenida por dos cuerdas con tensiones T_1 y T_2.

Ejercicio 4

Enunciado

En la siguiente figura se muestran dos pulsos, el pulso triangular se mueve hacia la derecha con una rapidez de $1\ \mathrm{m/s}$ y el pulso rectangular se mueve hacia la izquierda también con una rapidez de $1\ \mathrm{m/s}$. En el tiempo $t = 0$, ambos pulsos están separados una distancia de $2\ \mathrm{m}$.

1. Considerando el sistema de referencia mostrado en la figura, escriba las funciones que representan al pulso triangular y al pulso rectangular por separado, para todo instante de tiempo.
2. Dibuje el pulso resultante en los instantes $t = 1, 2, 3, 4\ \mathrm{s}$. Considere que cuando dos ondas se encuentran, ambas ondas se suman.



Ejercicio 5

Enunciado

Tres segmentos de cuerda de densidad μ están atados como muestra la figura. Suponga que se conocen las distancias L_1 y L_2, y el ángulo α. Un pulso que parte en A tarda un tiempo T_B en llegar a B, y un tiempo T_C en llegar a C. Encuentre la longitud de la cuerda L_3, y la tensión de la cuerda L_1.

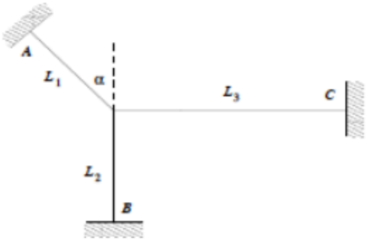


Fig.: Esquema del sistema de cuerdas con segmentos L_1, L_2 y L_3 y ángulo α.

Éxito, ustedes son capaces de todo!