Auxiliar #3

Análisis de sistemas dinámicos y estimación

Erik Saez A.

Department of Electrical Engineering
Universidad de Chile

September 3, 2025

erik.saez@ug.uchile.cl

Contenidos

Ingeniería Eléctrica
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS UNIVERSIDAD DE CHILE

Fig.: Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas , Universidad de Chile.

Función de transferencia

¿Qué es y para qué sirve?

Describe la relación entrada–salida de un sistema LTI con condiciones iniciales nulas: $Y(s) = H(s)\,U(s)$ (o $Y(z) = H(z)\,U(z)$ en discreto). Resume la dinámica en el dominio transformado y permite:

- identificar polos y ceros (estabilidad y dinámica);
- analizar la respuesta en frecuencia y el desempeño;
- componer sistemas (cascada/paralelo/retroalimentación);
- pasar entre $H(\cdot)$ y realizaciones en variables de estado.

Definición (continuo)

Para $\dot{x} = Ax + Bu$, $y = Cx + Du$:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = C\,(sI - A)^{-1}B + D.$$

Discreto

Para $x[k+1] = Ax[k] + Bu[k]$, $y[k] = Cx[k] + Du[k]$:

$$H(z) = C\,(zI - A)^{-1}B + D.$$

Variables de estado:

¿Qué es y por qué usarlo?

Representa sistemas dinámicos mediante un **vector de estado** x (memoria/CI) y matrices (A, B, C, D).
Ventajas clave:

- Válido para **MIMO** (múltiples entradas/salidas) y para interconexiones (cascada, paralelo, realimentación).
- Maneja **condiciones iniciales** de forma explícita y separa respuesta libre/forzada con la MTE $\Phi(t) = e^{At}$.
- Base del **análisis estructural**: controlabilidad/observabilidad, Gramianos, descomposiciones.

Modelo LTI continuo (notación)

$$\dot{x} = A\,x + B\,u, \qquad y = C\,x + D\,u,$$

$$A \in \mathbb{R}^{n\times n},\ B \in \mathbb{R}^{n\times m},\ C \in \mathbb{R}^{p\times n},\ D \in \mathbb{R}^{p\times m}.$$

Matriz de transición de estados (MTE)

Definición y propiedades

Recordemos: $\Phi(t, t_0)$ (o $\Phi[k, k_0]$) es la *solución fundamental* que propaga estados:

$$x(t) = \Phi(t, t_0)\, x(t_0), \qquad \Phi(t_0, t_0) = I.$$

Dinámica general

$$\frac{\partial}{\partial t}\Phi(t, t_0) = A(t)\,\Phi(t, t_0), \qquad \Phi(t_0, t_0) = I, \tag{1}$$

$$\Phi[k+1, k_0] = A[k]\,\Phi[k, k_0], \qquad \Phi[k_0, k_0] = I. \tag{2}$$

Caso LTI

Matrices constantes:

$$\Phi(t, t_0) = e^{A(t-t_0)} = \mathcal{L}^{-1}\{(sI - A)^{-1}\}, \tag{3}$$

$$\Phi[k, k_0] = A^{k-k_0} = \mathcal{Z}^{-1}\{\, z\,(zI - A)^{-1}\}. \tag{4}$$

Variación de parámetros

Entrada no nula (continuo):

$$x(t) = \Phi(t, t_0)\, x(t_0) + \int_{t_0}^{t} \Phi(t, \tau)\, B(\tau)\, u(\tau)\, d\tau.$$

Diagonalización

Diagonalización

¿Por qué diagonalizar? Escribir $A = TDT^{-1}$ desacopla la dinámica por modos y hace inmediata la MTE: $\Phi(t) = e^{At} = T\, e^{Dt}\, T^{-1}$ (con e^{Dt} diagonal). Esto simplifica el cálculo de $f(A)$ (p. ej., A^k, e^{At}), clarifica la interpretación (autovalores λ_i como polos/estabilidad) y facilita análisis y diseño por modos (REN(C)/RESC, control y observación) al reducir operaciones matriciales a exponenciales escalares.

Condición de diagonalizabilidad

A es diagonalizable $\iff$ la suma de *multiplicidades geométricas* es n (equiv.: para cada λ, mult. geom. $=$ mult. alg.).

Receta

1. Calcular el polinomio característico $p(\lambda) = \det(\lambda I - A)$ y sus raíces λ_i (autovalores).
2. Para cada λ_i, resolver $(A - \lambda_i I)v = 0$ y obtener una base del subespacio propio $\mathcal{N}(A - \lambda_i I)$.
3. Si se obtienen n autovectores linealmente independientes, formar $T = [\, v_1 \ \cdots \ v_n \,]$ y $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.

Conexión con MTE

Si $A = TDT^{-1}$, entonces $f(A) = Tf(D)T^{-1}$. En particular: $\Phi(t) = e^{At} = Te^{Dt}T^{-1}$ y $e^{Dt} = \operatorname{diag}(e^{\lambda_i t})$.

Forma canónica de Jordan

¿Qué es y cuándo aparece?

Toda matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es similar a una **forma canónica de Jordan**: $A = PJP^{-1}$, con $J = \operatorname{diag}\left(J_{m_1}(\lambda_1), \dots, J_{m_r}(\lambda_r)\right)$. Un *bloque de Jordan* $J_m(\lambda)$ tiene λ en la diagonal y 1 en la superdiagonal. Aparece cuando A **no es diagonalizable** (multiplicidad geométrica menor que la algébrica).

¿Para qué sirve?

- Describe la estructura modal cuando faltan autovectores L.I.
- Facilita el cálculo de $f(A)$: e^{At}, A^k, $(sI - A)^{-1}$ a través de J.
- Explica términos $t^k e^{\lambda t}$ en las respuestas si hay bloques de tamaño m ($k = 0, \dots, m-1$).

Bloque $J_m(\lambda)$

$$J_m(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix}$$

Exponencial de un bloque

$$e^{J_m(\lambda)\,t} = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2! & \cdots & t^{m-1}/(m-1)! \\ 0 & 1 & t & \cdots & t^{m-2}/(m-2)! \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & t \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Respuesta impulsional y funciones base

Respuesta impulsional h (qué es)

Es la salida ante una entrada impulso unitario; actúa como *núcleo de convolución*:

$$y_s(t) = (h * u)(t) = \int_0^t h(t-\tau)\, u(\tau)\, d\tau, \quad Y_s(s) = H(s)\, U(s).$$

Cómo calcular h (LTI)

Continuo:

$$H(s) = C(sI - A)^{-1}B + D, \quad h(t) = C\, e^{At}\, B + D\, \delta(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}.$$

Discreto:

$$H(z) = C(zI - A)^{-1}B + D, \quad h[0] = D,\ h[k] = C\, A^{k-1}B\ (k \geq 1) = \mathcal{Z}^{-1}\{H$$

Funciones base (RENC)

Respuesta a entrada cero: $y_0(t) = C\, \Phi(t, t_0)\, x(t_0)$ con $\Phi(t, t_0) = e^{A(t-t_0)}$. Si A tiene autovalores λ_i con bloques de Jordan de tamaño m_i:

$$\{\, t^k e^{\lambda_i t} \ :\ i = 1, \dots, r,\ k = 0, \dots, m_i - 1 \,\}.$$

En discreto (análogo): $\{\, \ell\text{-potencias} \cdot \lambda_i^k \,\}$, típicamente $\{\, k^\ell \lambda_i^k \,\}$ con $\ell = 0, \dots, m_i - 1$.

Uso

- h determina la RESC vía convolución y caracteriza la BIBO en SISO.
- Las funciones base describen la RENC; revelan modos ($e^{\lambda t}$) y cadenas de Jordan ($t^k e^{\lambda t}$).

Estabilidad: BIBS y BIBO

¿Qué miden?

- **BIBS** (bounded–input bounded–state): con entradas y C.I. acotadas, el *estado* permanece acotado (estabilidad interna).
- **BIBO** (bounded–input bounded–output): con entradas acotadas, la *salida* permanece acotada (estabilidad externa).

Criterios prácticos (LTI)

- **BIBS**: continuo $\Rightarrow \mathrm{Re}\{\lambda_i(A)\} < 0$; discreto $\Rightarrow |\lambda_i(A)| < 1$.
- **BIBO** (SISO): continuo $\int_0^\infty |h(t)|\, dt < \infty \Leftrightarrow$ polos de $H(s)$ en $\mathrm{Re}\, s < 0$;
  discreto $\sum_{k\geq 0} |h[k]| < \infty \Leftrightarrow$ polos de $H(z)$ dentro del disco unidad.

Relación y matices

- **BIBS** $\Rightarrow$ **BIBO**. Si la realización es *mínima* (controlable y observable), **BIBS** $\Leftrightarrow$ **BIBO**.
- La BIBO depende de $H(\cdot)$ (por C, D); la BIBS depende solo de A.
- En la *frontera* (autovalores en eje imaginario o $|z|=1$) puede haber estabilidad *marginal* (no BIBO si hay polos repetidos).

Controlabilidad y observabilidad: qué, cómo y para qué

¿Qué miden?

Controlabilidad: alcanzar cualquier estado con entradas adecuadas.
Observabilidad: reconstruir el estado a partir de $u(\cdot)$ y $y(\cdot)$.

Kalman (criterio de rango)

$$\mathcal{C} = [\, B \;\, AB \;\, \cdots \;\, A^{n-1}B \,], \qquad \operatorname{rank}(\mathcal{C}) = n \iff \text{controlable,} \tag{5}$$

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}, \qquad \operatorname{rank}(\mathcal{O}) = n \iff \text{observable.} \tag{6}$$

Gramianos (continuo, A Hurwitz)

$$AW_c + W_cA^\top + BB^\top = 0, \quad W_c \succ 0 \iff \text{controlable,} \tag{7}$$

$$A^\top W_o + W_oA + C^\top C = 0, \quad W_o \succ 0 \iff \text{observable.} \tag{8}$$

Implicancias prácticas

- **Realización mínima**: controlable y observable $\Rightarrow$ sin modos ocultos.
- **Ubicación de polos** (REN(C)): factible $\iff$ controlable; **observador** (RENC): factible $\iff$ observable.
- Modos incontrolables no pueden estabilizarse; modos inobservables no aparecen en y.

Pregunta #1

Enunciado Pregunta #1

Considere un sistema modelado por la siguiente ecuación diferencial:

$$\ddot{y} + 2\dot{y} - 15y = u. \tag{9}$$

1. Encuentre la función de transferencia del sistema.
2. Formule el sistema en variables de estado.
3. Obtenga la MTE del sistema y encuentre las funciones base.
4. Encuentre la respuesta al impulso del sistema.
5. Determine la estabilidad BIBS y BIBO del sistema.

Pregunta #2

Enunciado Pregunta #2

Considere el siguiente sistema formulado en variables de estado:

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} u(t), \qquad y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} x(t). \tag{10}$$

1. Encuentre la MTE y las funciones base del sistema.
2. Encuentre la respuesta al impulso del sistema.
3. Determine estabilidad BIBS y BIBO.
4. Determine observabilidad y controlabilidad.