Control 1

Análisis de sistemas dinámicos

Profesor: Heraldo Rozas Ovando
Auxiliares: Maximiliano Morales Henríquez, Erik Sáez Aravena

Instrucciones: Cuenta con 1 y 30 minutos para la realización de este control. No está permitido el uso de calculadora.

Pregunta 1

Esta pregunta está compuesta de 3 partes independientes.
Parte 1: Considere el sistema electromecánico presentado en Figura 1. El objetivo del sistema es controlar la posición de la bola ajustando la corriente en el electroimán mediante el voltaje de entrada $e(t)$. Notar que la fuerza magnética que interactúa con la bola de acero queda descrita por i^2/y.

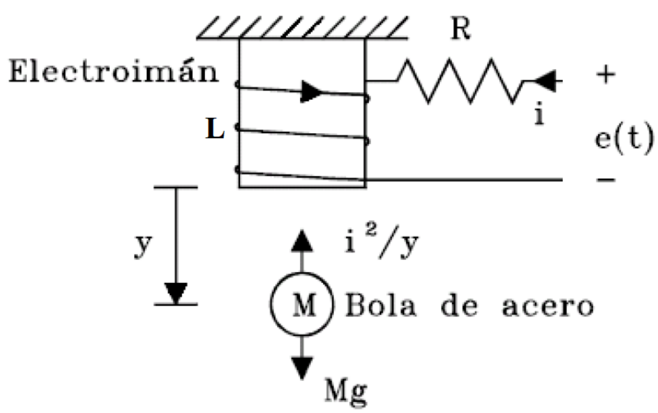

Figura 1: Modelo simplificado de levitación magnética.

Las ecuaciones que describen el comportamiento del sistema se pueden obtener aplicando la segunda ley de Newton a la bola y la ley de Kirchhoff al circuito eléctrico:
En relación al sistema descrito anteriormente, responda las siguientes preguntas.

1. **(0.5 Puntos)** Establezca al menos tres hipótesis simplificatorias necesarias para derivar el modelo matemático presentado en (1).

2. **(0.5 Puntos)** Formule un modelo en variables de estado, es decir, $\dot{\vec{X}}(t) = \vec{F}(\vec{X}(t), u(t))$ con su respectiva salida $\vec{Y}(t) = C \cdot \vec{X}(t)$. Indique las variables que corresponden a la/s entrada/s, salida/s y variable/s de estado del sistema.

3. **(0.5 Puntos)** Encuentre el punto de equilibrio $(\vec{X}_{eq},\ u_{eq})$ tal que la bola de acero permanezca suspendida en el aire en la posición y_0. Exprese las componentes de $\vec{X}_{eq}$ y u_{eq} en términos de y_0. Si lo considera necesario asuma que $i(t) \geq 0,\ t \geq 0$.

4. **(1.5 Puntos)** Linealice el sistema planteado en la pregunta anterior en torno al punto de equilibrio $(\vec{X}_{eq}, u_{eq})$. Determine explícitamente A es la matriz de estado y B la matriz de salida.

Parte 2

1. **(2 Puntos)** Considere el siguiente sistema lineal descrito en (2.1) con condición inicial arbitraria $\vec{X}_0$. Determine la RENC del sistema. ¿Los estados del sistema $x_1(t)$ y $x_2(t)$ permanecen acotados para para $t \geq 0$? Si es así, provea una cota superior para $x_1(t)$ y $x_2(t)$.

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t) \tag{2.1}$$

$$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} \tag{2.2}$$

Parte 3

1. **(1 Puntos)** Las baterías de ion de litio son esenciales por su alta densidad energética y larga vida útil, siendo clave en dispositivos electrónicos y vehículos eléctricos. Comente sobre la importancia del estado de carga (SoC: State of Charge) en las baterías. ¿Cómo podemos conocer el valor actual del SoC? Elabore en base a los contenidos discutidos en clases. Responda en no más de 6 líneas, pudiendo incluir un diagrama si lo estima conveniente.

1. Pauta P1

1. ***(0.5 Puntos)*** *Establezca al menos tres hipótesis simplificatorias que crea pertinente para analizar su modelo.*
   Existe flexibilidad en cuanto a lo que se espera de esta pregunta por ende, puede haber más de una respuesta correcta. A continuación se presenta una lista de hipótesis posibles:

   - El roce con el aire es despreciable.
   - No existe otra resistencia por el cable más que la explicitada en la figura correspondiente a R.
   - La bola de acera es una masa puntual, es decir, no posee dimensiones.
   - El movimiento de la bola es solo en una dimensión.
   - Tanto la estructura que sujeta la inductancia como la bola de acero tienen permeabilidad magnética infinita, es decir, no existen pérdidas magnéticas.
   - Si y se define tal cual como aparece en la figura del problema, entonces, $y > 0$.

2. ***(0.5 Puntos)*** *Indique las variables que corresponden a la/s entrada/s, salida/s y variable/s de estado del sistema. Luego, Replanteé el modelo como un sistema matricial de la forma* $\dot{\vec{X}}(t) = \vec{F}(\vec{X}(t), u(t))$ *con su respectiva salida* $\vec{Y}(t) = C \cdot \vec{X}(t)$ *donde* $\vec{X}(t)$ *representa el vector de estados,* C *la matriz de salida y* $u(t)$ *la/s entrada/s al sistema.*

   Del enunciado, se puede inferir lo siguiente para la entrada, salida y en consecuencia, la variable de estado: "*El objetivo del sistema es controlar la posición de la bola* [salida $y_s(t) = y(t)$] *ajustando la corriente en el electroimán mediante el voltaje de entrada* $e(t)$ [entrada $u(t) = e(t)$]". En resumen:

   - Entrada: $u(t) = e(t)$
   - Salida: $y(t)$
   - Variables de estado: $\vec{X}(t) = \begin{bmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t) \\ i(t) \end{bmatrix}$

   Luego, el modelo matricial se modela la dinámica del sistema queda expresado por:

$$\dot{\vec{X}}(t) = \begin{bmatrix} \dot{y}(t) \\ \ddot{y}(t) \\ \dot{i}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{y}(t) \\ g - \frac{1}{M}\frac{i^2}{y} \\ -\frac{R}{L}i + \frac{1}{L}e(t) \end{bmatrix}$$

   Mientras que la salida se expresa como:

$$\vec{Y}(t) = C \cdot \vec{X}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \vec{X}(t) = y(t)$$

3. ***(1.5 Puntos)*** *Encuentre el punto de operación* ($\vec{X}_{op}$, u_{op}) *(donde* u_{op} *es una entrada particular a sistema) tal que la bola de acero permanezca suspendida en el aire en la posición* y_0*.*

   Como la masa se encuentra quieta en una posición $y(t > t_0) = y_0$, entonces, $\dot{y}(t > t_0) = 0$ y por ende $\ddot{y}(t > t_0) = 0$. Entonces, del sistema no lineal se tiene:

$$\dot{\vec{X}}(t > t_0) = \begin{bmatrix} \dot{y}(t > t_0) \\ \ddot{y}(t > t_0) \\ \dot{i}(t > t_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{i}(t > t_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ g - \frac{1}{M}\frac{i^2}{y_0} \\ -\frac{R}{L}i(t > t_0) + \frac{1}{L} \cdot e(t > t_0) \end{bmatrix}$$

   Se puede rescatar la segunda ecuación $g - \frac{1}{M}\frac{i^2}{y_0} = 0$, se obtiene:

$$g = \frac{1}{M}\frac{i^2}{y_0} \quad \Rightarrow \quad i^2 = Mgy_0 \quad \Rightarrow \quad i(t > t_0) = \pm\sqrt{Mgy_0}$$

Tal y como dice el enunciado, solo debemos considerar la corriente positiva, $i(t > t_0) = \sqrt{Mgy_0}$.
Como la corriente es constante, entonces, $\dot{i}(t > t_0) = 0$, es decir que de la tercera ecuación del sistema $\dot{i}(t > t_0) = -\frac{R}{L}i(t > t_0) + \frac{1}{L} \cdot e(t > t_0) = 0$ se obtiene:

$$e(t > t_0) = R \cdot \sqrt{Mgy_0}$$

Por lo tanto, el vector $\vec{X}_{op}$ está dado por:

$$\vec{X}_{op} = \begin{bmatrix} y_0 \\ 0 \\ \sqrt{Mgy_0} \end{bmatrix}$$

Mientras que la entrada e está dada por:

$$e(t > t_0) = R\sqrt{Mgy_0}$$

4. ***(1.5 Puntos)*** *Demuestre* ***de forma clara y ordenada*** *que el sistema linealizado en torno al punto de operación está dado por la siguiente expresión del enunciado.*

Considerando la función $F(\vec{X}(t), e(t))$ tal que:

$$\dot{\vec{X}}(t) = \begin{bmatrix} \dot{y}(t) \\ \ddot{y}(t) \\ \dot{i}(t) \end{bmatrix} = F(\vec{X}(t), e(t)) = \begin{bmatrix} \dot{y}(t) \\ g - \frac{1}{M}\frac{i^2}{y} \\ -\frac{R}{L}i + \frac{1}{L}e(t) \end{bmatrix}$$

Se puede calcular A como:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{dF(\vec{X}(t),e(t))}{dy} & \frac{dF(\vec{X}(t),e(t))}{d\dot{y}} & \frac{dF(\vec{X}(t),e(t))}{di} \end{bmatrix}_{(\vec{X}_{op},e)}$$

Tal que:

- Derivada con respecto a y:

$$\frac{\partial F(\vec{X}(t), e(t))}{\partial y} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\partial}{\partial y}\left(g - \frac{1}{M}\frac{i^2}{y}\right) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{i^2}{My^2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Derivada con respecto a $\dot{y}$:

$$\frac{\partial F(\vec{X}(t), e(t))}{\partial \dot{y}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Derivada con respecto a i:

$$\frac{\partial F(\vec{X}(t),e(t))}{\partial i} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\partial}{\partial i}\left(g - \frac{1}{M}\frac{i^2}{y}\right) \\ -\frac{R}{L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{2i}{My} \\ -\frac{R}{L} \end{bmatrix}$$

Luego,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{i^2}{My^2} & 0 & -\frac{2i}{My} \\ 0 & 0 & -\frac{R}{L} \end{bmatrix}_{(\vec{X}_{op},e)}$$

Evaluando en el punto de operación,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{(\sqrt{Mgy_0})^2}{My_0^2} & 0 & -\frac{2\sqrt{Mgy_0}}{My_0} \\ 0 & 0 & -\frac{R}{L} \end{bmatrix}$$

Reordenando se llega a lo solicitado:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{g}{y_0} & 0 & -2\sqrt{\frac{g}{My_0}} \\ 0 & 0 & -\frac{R}{L} \end{bmatrix}$$

Por otra parte, para la matriz B, se debe calcular:

$$B = \left[\frac{dF(\vec{X}(t),e(t))}{de}\right]_{(\vec{X}_{op},e)}$$

Luego, es fácil ver que:

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix}$$

5. ***(2 Puntos)*** *Obtenga la MTE del sistema linealizado en torno al punto de equilibrio y determine la estabilidad en torno al punto de operación. Además escriba de manera explicita la solución en base a la RENC y RESC considerando condiciones iniciales arbitrarias.*

   Para obtener la MTE consideremos diagonalizar la matriz A. Para ello debemos encontrar los valores y vectores propios.

   Los valores propios λ se encuentran resolviendo el determinante del polinomio característico $\det(A - \lambda I) = 0$, donde I es la matriz identidad de 3×3. Esto nos lleva a resolver:

$$\det\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{g}{y_0} & 0 & -2\sqrt{\frac{g}{My_0}} \\ 0 & 0 & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = 0$$

Sustituyendo y simplificando:

$$\det\begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ \frac{g}{y_0} & -\lambda & -2\sqrt{\frac{g}{My_0}} \\ 0 & 0 & -\frac{R}{L} - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

Expandiendo el determinante:

$$(-\lambda)\left[(-\lambda)\left(-\frac{R}{L} - \lambda\right)\right] + (-1)\left[\frac{g}{y_0}\left(-\frac{R}{L} - \lambda\right)\right] = 0$$

Factorizando convenientemente:

$$\left(-\frac{R}{L} - \lambda\right)\left[\lambda^2 - \frac{g}{y_0}\right] = 0$$

Esto nos lleva a los valores propios λ:

$$\lambda_1 = -\frac{R}{L}, \quad \lambda_2 = -\frac{g}{y_0}, \quad \lambda_3 = \frac{g}{y_0}$$

En cuanto a los vectores propios:

- Para $\lambda_1 = -\frac{R}{L}$, resolvemos el sistema:

  $$(A - \lambda_1 I)\vec{v_1} = 0$$

  donde la matriz A es:

  $$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{g}{y_0} & 0 & -2\sqrt{\frac{g}{My_0}} \\ 0 & 0 & -\frac{R}{L} \end{bmatrix}$$

  Por lo tanto, necesitamos resolver el siguiente sistema lineal:

  $$\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{g}{y_0} & 0 & -2\sqrt{\frac{g}{My_0}} \\ 0 & 0 & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{R}{L} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{R}{L} \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \\ v_{13} \end{bmatrix} = 0$$

  Esto nos lleva a la siguiente matriz:

$$\begin{bmatrix} \frac{R}{L} & 1 & 0 \\ \frac{g}{y_0} & \frac{R}{L} & -2\sqrt{\frac{g}{My_0}} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \\ v_{13} \end{bmatrix} = 0$$

Lo que genera el siguiente sistema de ecuaciones:

1. $\frac{R}{L}v_{11} + v_{12} = 0$, que nos da:

$$v_{12} = -\frac{R}{L}v_{11}$$

2. $\frac{g}{y_0}v_{11} + \frac{R}{L}v_{12} - 2\sqrt{\frac{g}{My_0}}v_{13} = 0$. Sustituyendo $v_{12} = -\frac{R}{L}v_{11}$, obtenemos:

$$\frac{g}{y_0}v_{11} - \frac{R^2}{L^2}v_{11} - 2\sqrt{\frac{g}{My_0}}v_{13} = 0$$

Resolviendo para v_{13}, tenemos:

$$v_{13} = \frac{1}{2\sqrt{\frac{g}{My_0}}}\left(\frac{g}{y_0} - \frac{R^2}{L^2}\right)v_{11}$$

Por lo tanto, el vector propio asociado a $\lambda_1 = -\frac{R}{L}$ es:

$$\vec{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{R}{L} \\ \frac{1}{2\sqrt{\frac{g}{My_0}}}\left(\frac{g}{y_0} - \frac{R^2}{L^2}\right) \end{bmatrix}$$

- Para el valor propio $\lambda_2 = -\frac{g}{y_0}$, necesitamos resolver el sistema:

$$(A - \lambda_2 I)\vec{v_2} = 0$$

donde la matriz A es:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{g}{y_0} & 0 & -2\sqrt{\frac{g}{My_0}} \\ 0 & 0 & -\frac{R}{L} \end{bmatrix}$$

Sustituyendo $\lambda_2 = -\frac{g}{y_0}$, el sistema se vuelve:

$$\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{g}{y_0} & 0 & -2\sqrt{\frac{g}{My_0}} \\ 0 & 0 & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\frac{g}{y_0} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{g}{y_0} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{g}{y_0} \end{bmatrix}\right) \begin{bmatrix} v_{21} \\ v_{22} \\ v_{23} \end{bmatrix} = 0$$

Esto nos lleva a la siguiente matriz:

$$
\begin{bmatrix} \frac{g}{y_0} & 1 & 0 \\ \frac{g}{y_0} & \frac{g}{y_0} & -2\sqrt{\frac{g}{My_0}} \\ 0 & 0 & \frac{g}{y_0} - \frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{21} \\ v_{22} \\ v_{23} \end{bmatrix} = 0
$$

De la primera ecuación, notamos que:

$$
\frac{g}{y_0} v_{21} + v_{22} = 0
$$

Lo que nos da:

$$
v_{22} = -\frac{g}{y_0} v_{21}
$$

Además, de la tercera ecuación $v_{23} = 0$:

Por lo tanto, el vector propio asociado a $\lambda_2 = -\frac{g}{y_0}$ es:

$$
\vec{v_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{g}{y_0} \\ 0 \end{bmatrix}
$$

- De forma análoga al paso anterior, para $\lambda_3 = \frac{g}{y_0}$ se obtiene:

$$
\vec{v_3} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{g}{y_0} \\ 0 \end{bmatrix}
$$

Luego, la matriz P formada por los vectores propios es:

$$
P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -\frac{R}{L} & -\frac{g}{y_0} & \frac{g}{y_0} \\ \frac{1}{2\sqrt{\frac{g}{My_0}}} \left(\frac{g}{y_0} - \frac{R^2}{L^2} \right) & 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

Considerando $R/L = 2$, $g/y_0 = 1$ y $M = 4$:

$$
P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ -3 & 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

y

$$
\det(P) = -6
$$

Luego, la adjunta de P corresponderá a

Paso 1: Calcular los cofactores

Cofactor C_{11}:

Eliminamos la primera fila y la primera columna:

$$C_{11} = \det \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = (-1)(0) - (1)(0) = 0$$

Cofactor C_{12}:

Eliminamos la primera fila y la segunda columna:

$$C_{12} = \det \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} = (-2)(0) - (1)(-3) = 3$$

Debido al signo en la posición C_{12}, tenemos:

$$C_{12} = -3$$

Cofactor C_{13}:

Eliminamos la primera fila y la tercera columna:

$$C_{13} = \det \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} = (-2)(0) - (-1)(-3) = -3$$

Cofactor C_{21}:

Eliminamos la segunda fila y la primera columna:

$$C_{21} = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = (1)(0) - (1)(0) = 0$$

Cofactor C_{22}:

Eliminamos la segunda fila y la segunda columna:

$$C_{22} = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} = (1)(0) - (1)(-3) = 3$$

Cofactor C_{23}:

Eliminamos la segunda fila y la tercera columna:

$$C_{23} = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} = (1)(0) - (1)(-3) = 3$$

Debido al signo en la posición C_{23}, tenemos:

$$C_{23} = -3$$

Cofactor C_{31}:

Eliminamos la tercera fila y la primera columna:

$$C_{31} = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = (1)(-1) - (1)(1) - = -2$$

Cofactor C_{32}:

Eliminamos la tercera fila y la segunda columna:

$$C_{32} = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = (1)(1) - (1)(-2) = 3$$

Debido al signo en la posición C_{31}, tenemos:

$$C_{33} = -3$$

Cofactor C_{33}:

Eliminamos la tercera fila y la tercera columna:

$$C_{33} = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} = (1)(-1) - (1)(-2) = 1$$

Paso 2: Formar la matriz de cofactores

La matriz de cofactores es:

$$\mathrm{Cof}(P) = \begin{bmatrix} 0 & -3 & -3 \\ 0 & 3 & -3 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Paso 3: Adjunta de P

La adjunta de P es la transpuesta de la matriz de cofactores:

$$\mathrm{adj}(P) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -3 & 3 & -3 \\ -3 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

De esta forma, la inversa de P está dada por:

$$P^{-1} = \frac{1}{-6}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -3 & 3 & -3 \\ -3 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

Reemplazando los valores de la tabla y recordando que e^{Dt} está dada por:

$$e^{Dt} = \begin{bmatrix} e^{-2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{t} \end{bmatrix}$$

y la matriz P es:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ -3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

El producto Pe^{Dt} es:

$$Pe^{Dt} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ -3 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{-2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-2t} & e^{-t} & e^{t} \\ -2e^{-2t} & -e^{-t} & e^{t} \\ -3e^{-2t} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

El siguiente paso es multiplicar $Pe^{Dt}P^{-1}$:

$$Pe^{Dt}P^{-1} = \begin{bmatrix} e^{-2t} & e^{-t} & e^{t} \\ -2e^{-2t} & -e^{-t} & e^{t} \\ -3e^{-2t} & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

Realizando la multiplicación obtenemos la matriz de transición de estado MTE:

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(e^{-t} + e^{t}) & \frac{1}{2}(-e^{-t} + e^{t}) & -\frac{1}{3}e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{6}e^{t} \\ \frac{1}{2}(-e^{-t} + e^{t}) & \frac{1}{2}(e^{-t} + e^{t}) & \frac{2}{3}e^{-2t} - \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{6}e^{t} \\ 0 & 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}$$

Ahora bien, para calcular la RESC, debemos recordar que la matriz B reemplazando

$L = 1$ está dada por:

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

y

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ahora, debemos calcular la multiplicación $C \cdot \Phi(t-\tau) \cdot B$. Para esto, empezamos con $\Phi(t-\tau) \cdot B$:

$$\Phi(t-\tau) \cdot B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(e^{-(t-\tau)} + e^{(t-\tau)}) & \frac{1}{2}(-e^{-(t-\tau)} + e^{(t-\tau)}) & -\frac{1}{3}e^{-2(t-\tau)} + \frac{1}{2}e^{-(t-\tau)} - \frac{1}{6}e^{(t-\tau)} \\ \frac{1}{2}(-e^{-(t-\tau)} + e^{(t-\tau)}) & \frac{1}{2}(e^{-(t-\tau)} + e^{(t-\tau)}) & \frac{2}{3}e^{-2(t-\tau)} - \frac{1}{2}e^{-(t-\tau)} - \frac{1}{6}e^{(t-\tau)} \\ 0 & 0 & e^{-2(t-\tau)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Multiplicando, obtenemos:

$$\Phi(t-\tau) \cdot B = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3}e^{-2(t-\tau)} + \frac{1}{2}e^{-(t-\tau)} - \frac{1}{6}e^{(t-\tau)} \\ \frac{2}{3}e^{-2(t-\tau)} - \frac{1}{2}e^{-(t-\tau)} - \frac{1}{6}e^{(t-\tau)} \\ e^{-2(t-\tau)} \end{bmatrix}$$

Ahora, multiplicamos $C \cdot \Phi(t-\tau) \cdot B$:

$$C \cdot \Phi(t-\tau) \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{3}e^{-2(t-\tau)} + \frac{1}{2}e^{-(t-\tau)} - \frac{1}{6}e^{(t-\tau)} \\ \frac{2}{3}e^{-2(t-\tau)} - \frac{1}{2}e^{-(t-\tau)} - \frac{1}{6}e^{(t-\tau)} \\ e^{-2(t-\tau)} \end{bmatrix}$$

Finalmente, el resultado de la multiplicación es:

$$C \cdot \Phi(t-\tau) \cdot B = -\frac{1}{3}e^{-2(t-\tau)} + \frac{1}{2}e^{-(t-\tau)} - \frac{1}{6}e^{(t-\tau)}$$

Multiplicando la entrada $e(\tau)$:

$$e(\tau)\left(-\frac{1}{3}e^{-2(t-\tau)} + \frac{1}{2}e^{-(t-\tau)} - \frac{1}{6}e^{(t-\tau)}\right)$$

Luego, la RESC quedará como:

$$RESC = \int_{t_0}^{t} e(\tau)\left(-\frac{1}{3}e^{-2(t-\tau)} + \frac{1}{2}e^{-(t-\tau)} - \frac{1}{6}e^{(t-\tau)}\right) d\tau$$

Por otra parte, la RENC por otra parte quedará como:

$$RENC = C\Phi(t)\vec{Y_0} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{2}(e^{-t}+e^{t}) & \frac{1}{2}(-e^{-t}+e^{t}) & -\frac{1}{3}e^{-2t}+\frac{1}{2}e^{-t}-\frac{1}{6}e^{t} \\ \frac{1}{2}(-e^{-t}+e^{t}) & \frac{1}{2}(e^{-t}+e^{t}) & \frac{2}{3}e^{-2t}-\frac{1}{2}e^{-t}-\frac{1}{6}e^{t} \\ 0 & 0 & e^{-2t}\end{bmatrix}\vec{Y_0}$$

$$RENC = \begin{bmatrix}\frac{1}{2}(e^{-t}+e^{t}) & \frac{1}{2}(-e^{-t}+e^{t}) & -\frac{1}{3}e^{-2t}+\frac{1}{2}e^{-t}-\frac{1}{6}e^{t}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}y_{ci}\\ \dot{y}_{ci}\\ i_{ci}\end{bmatrix}$$

Es decir,

$$RENC = \frac{1}{2}(e^{-t}+e^{t})y_{ci}+\frac{1}{2}(-e^{-t}+e^{t})\dot{y}_{ci}+\left(-\frac{1}{3}e^{-2t}+\frac{1}{2}e^{-t}-\frac{1}{6}e^{t}\right)i_{ci}$$

Por lo tanto, la respuesta completa del sistema estará dado por:

$$\begin{aligned} y(t) =& \frac{1}{2}(e^{-t}+e^{t})y_{ci}+\frac{1}{2}(-e^{-t}+e^{t})\dot{y}_{ci} \\ &+\left(-\frac{1}{3}e^{-2t}+\frac{1}{2}e^{-t}-\frac{1}{6}e^{t}\right)i_{ci} \\ &+\int_{t_0}^{t} e(\tau)\left(-\frac{1}{3}e^{-2(t-\tau)}+\frac{1}{2}e^{-(t-\tau)}-\frac{1}{6}e^{(t-\tau)}\right)d\tau \end{aligned}$$

6. ***(1.5 Puntos)*** *Considere el siguiente sistema lineal con condición inicial arbitraria $\vec{X_0}$. Determine únicamente la RENC del sistema.* Primero se diagonaliza la matriz de estados

$$P = \begin{bmatrix}-1 & -1\\ 1 & 3\end{bmatrix}$$

$$e^{Dt} = \begin{bmatrix}e^{-t} & 0\\ 0 & e^{-3t}\end{bmatrix}$$

$$P^{-1} = \begin{bmatrix}-\frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

Luego,

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix}-1 & -1\\ 1 & 3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}e^{-t} & 0\\ 0 & e^{-3t}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-\frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix} \tag{1}$$

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix}-1 & -1\\ 1 & 3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-\frac{3}{2}e^{-t} & -\frac{1}{2}e^{-t}\\ \frac{1}{2}e^{-3t} & \frac{1}{2}e^{-3t}\end{bmatrix} \tag{2}$$

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix}\frac{3}{2}e^{-t}-\frac{1}{2}e^{-3t} & \frac{1}{2}e^{-t}-\frac{1}{2}e^{-3t}\\ -\frac{3}{2}e^{-t}+\frac{3}{2}e^{-3t} & -\frac{1}{2}e^{-t}+\frac{3}{2}e^{-3t}\end{bmatrix} \tag{3}$$

De forma que la RENC está dada por:

$$\vec{X}_0 = \begin{bmatrix} \frac{3}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-3t} & \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-3t} \\ -\frac{3}{2}e^{-t} + \frac{3}{2}e^{-3t} & -\frac{1}{2}e^{-t} + \frac{3}{2}e^{-3t} \end{bmatrix} \vec{X}_0 \tag{4}$$

Pregunta 2

Considere un sistema caracterizado por el siguiente modelo en variables de estado:

$$\dot{x}(t) = A \cdot x(t) + B \cdot u(t), \tag{5}$$
$$y(t) = C \cdot x(t), \tag{6}$$

donde las matrices A, B y C son:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{7}$$

1. **(0.5 Puntos)** Analice la controlabilidad del sistema
2. **(0.5 Puntos)** Analice la observabilidad del sistema
3. **(2 Puntos)** Diseñe un controlador de la forma $u = -K \cdot x(t)$ tal que su sistema sea estable (*Se desea obtener los polos* $\lambda = -1$ *y* $\lambda = -5$).
4. **(2 Puntos)** Diseñe un observador de Luenberger que le permita estimar el estado de su sistema *(considere que los polos del observador deben ser 3 veces más negativos que todos los polos del controlador.).*
5. **(1 Puntos)** Suponga que los estados del sistema no se pueden medir directamente. ¿Cómo implementaría el controlador diseñado en 2.? Comente y provea un diagrama de bloques de su solución.

1. **(0.5 Puntos)** Analice la controlabilidad del sistema
   Se busca analizar la controlabilidad del sistema, para esto se utiliza la matrices A y B del sistema anterior.

$$\mathcal{C} = \begin{pmatrix} B & AB & A^2B & \dots & A^{n-1}B \end{pmatrix} \tag{8}$$

   Dado que en nuesto caso particular n=2,se tiene que:

$$\mathcal{C} = \begin{pmatrix} B & AB \end{pmatrix} \tag{9}$$

   Por lo que se obtiene:

$$\mathcal{C} = \begin{pmatrix} B & AB \end{pmatrix} \tag{10}$$

$$\mathcal{C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \tag{11}$$

   Luego observa que filas y columnas son li, por lo tanto el sistema es controlable. (*Tambien es posible realizarlo mediante que el determinante sea distinto de 0, para analizar que sea de rango completo*)

2. **(0.5 Puntos)** Analice la observabilidad del sistema

   Se busca analizaar la controlabilidad del sistema, para esto se utiliza la matrices A y C del sistema anterior. Por tanto

$$\Theta = \begin{pmatrix} C \\ CA \end{pmatrix} \tag{12}$$

   Por lo que se obtiene:

$$\Theta = \begin{pmatrix} C \\ CA \end{pmatrix} \tag{13}$$

$$\Theta = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \tag{14}$$

   Luego observa que filas y columnas son li, por lo tanto el sistema es observable. (*Tambien es posible realizarlo mediante que el determinante sea distinto de 0, para analizar que sea de rango completo*)

3. **(2 Puntos)** Diseñe un controlador de la forma $u = -K \cdot x(t)$ tal que su sistema sea estable (*Se desea obtener los polos* $\lambda = -1$ *y* $\lambda = -5$).
   Se busca diseñar un controlador tal que el sistema sea estable, y en particular obtener los polos $\lambda = -1$ y $\lambda = -5$.Por lo tanto se considera que la entrada viene dada por:

$$u(t) = r(t) - Kx(t) \tag{15}$$

   De esta manera se tendra que el sistema tendra la siguiente forma:

$$\dot{x}(t) = (A - BK)x(t) + Br(t) \tag{16}$$
$$y(t) = Cx(t) \tag{17}$$

   Con lo que deberemos encontrar la matriz k, tal de moverlo slos valores propios donde nos interesa. Es por esto que se tiene que:

$$K = \begin{pmatrix} k_1 & k_2 \end{pmatrix} \tag{18}$$

   Por lo tanto los valores propios vendran dados por:

$$|A - BK - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1 - k_1 - \lambda & -k_2 \\ -k_1 & -2 - k_2 - \lambda \end{vmatrix} \tag{19}$$
$$= (1 - k_1 - \lambda)(-2 - k_2 - \lambda) - k_1 k_2 \tag{20}$$
$$= \lambda^2 + (2 + k_1 + k_2)\lambda + (-2 + 2k_1 - k_2) \tag{21}$$

Tenemos que los valores propios que se buscan son $\lambda = -1$ y $\lambda = -5$, por lo que se tiene que:

$$(\lambda + 5)(\lambda + 1) = 0 \tag{22}$$
$$\lambda^2 + 6\lambda + 5 = 0 \tag{23}$$

De esta manera se forman el sistema de ecuaciones

$$2 + k_1 + k_2 = 6 \tag{24}$$
$$-2 + 2k_1 - k_2 = 5 \tag{25}$$

Dadon como resultado que $k_1 = \frac{11}{3}$ y $k_2 = \frac{1}{3}$, con lo que se obtiene la matriz k dada por:

$$K = \begin{pmatrix} \frac{11}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \tag{26}$$

4. **(2 Puntos)** Diseñe un observador de Luenberger que le permita estimar el estado de su sistema *(considere que los polos del observador deben ser 3 veces más negativos que todos los polos del controlador.)*. Se busca diseñar un observador de Luenberger, considerando que los polos son 3 veces más negativos que los polos del controlador. Por lo que se tiene que los polos del observador son $\lambda = -3$ y $\lambda = -15$. Por lo que se tiene que la matriz F vendra dada por:

$$F = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \tag{27}$$

Por lo tanto los valores propios vendrán dados por:

$$|A - FC - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1 - f_1 - \lambda & -f_1 \\ -f_2 & -2 - f_2 - \lambda \end{vmatrix} \tag{28}$$
$$= (1 - f_1 - \lambda)(-2 - f_2 - \lambda) - f_1 f_2 \tag{29}$$
$$= \lambda^2 + (2 + f_1 + f_2)\lambda + (-2 + 2f_1 - f_2) \tag{30}$$

Tenemos que los valores propios que se buscan son $\lambda = -3$ y $\lambda = -15$, por lo que se tiene que:

$$(\lambda + 15)(\lambda + 3) = 0 \tag{31}$$
$$\lambda^2 + 18\lambda + 45 = 0 \tag{32}$$

De esta manera se forman el sistema de ecuaciones:

$$2 + f_1 + f_2 = 18 \tag{33}$$
$$-2 + 2f_1 - f_2 = 45 \tag{34}$$

Dadon como resultado que $f_1 = 21$ y $f_2 = -5$, con lo que se obtiene la matriz F dada por:

$$F = \begin{pmatrix} 21 \\ -5 \end{pmatrix} \tag{35}$$

5. **(1 Puntos)** Suponga que los estados del sistema no se pueden medir directamente. ¿Cómo implementaría el controlador diseñado en 2.? Comente y provea un diagrama de bloques de su solución. En ese caso, se deberia realizar un observador lo suficientemente bueno para estimar los estados del sistema, es decir que el error converga de manera rapida a 0. De esta manera se podra asumir que dicha observacion corresponde al estado y por tanto diseñar un controlador que se base en dicha observacion.