Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Eléctrica

Tarea 1

Tema a tratar

Integrantes: Integrante 1
Integrante 2
Profesor: Profesor 1
Auxiliar: Auxiliar 1
Ayudantes: Ayudante 1
Ayudante 2
Ayudante de laboratorio: Ayudante 1

Fecha de realización: 6 de octubre de 2024
Fecha de entrega: 6 de octubre de 2024
Santiago de Chile

Resumen

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetuer id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu neque. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus eu tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Curabitur auctor semper nulla. Donec varius orci eget risus. Duis nibh mi, congue eu, accumsan eleifend, sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim rutrum.

Índice de Contenidos

Índice de Figuras

Índice de Tablas

1. Informes con LaTeX

1.1. Una breve introducción

Este es un párrafo, puede contener múltiples “Expresiones” así como fórmulas o referencias[1] como (1) o (**??**). A continuación se muestra un ejemplo de inserción de imágenes (como la Figura 1) con el comando \insertimage:

Figura 1: Where are you? de “Internet”.

A continuación[2] se muestra un ejemplo de inserción de ecuaciones simples con el comando \insertequation:

$$a^k = b^k + c^k \quad \forall k > 2 \tag{1}$$

Este template [**?**] ha sido diseñado para que sea completamente compatible con editores LaTeX para escritorio y de manera online[**?**]. La compilación es realizada siempre usando las últimas versiones de las librerías, además se incluyen los parches oficiales para corregir eventuales *warnings*.

Este es un nuevo párrafo. Para crear uno basta con usar \\ en el anterior, lo que fuerza una nueva línea. También se pueden insertar con el comando `\newp` si el compilador de latex arroja una alerta del tipo *Underfull \hbox (badness 10000) in paragraph at lines ...*

1.2. Añadiendo tablas

También puedes usar tablas, ¡Crearlas es muy fácil!. Puedes usar el plugin Excel2Latex [**?**] de Excel para convertir las tablas a LaTeX o bien utilizar el “creador de tablas online” [**?**].

[1] Las referencias se hacen utilizando la expresión `\label`{etiqueta}.
[2] Como se puede observar las funciones `\insert`... añaden un párrafo automáticamente.

Tabla 1: Ejemplo de tablas.

Columna 1	**Columna 2**	**Columna 3**
ω	ν	δ
ξ	κ	ϖ

2. Pregunta 2

- **Escriba las condiciones necesarias para encontrar una solución óptima, utilizando el principio del máximo.** Se busca el obtener las condiciones necesarias para encontrar la solucion al problema de optimización, utilizando el principio del máximo o Pontryagin. Para ello, se considera el siguiente problema de optimización:

$$J = \int_0^T (ph(t) - cu(t))dt \tag{2}$$

Donde tanto las condiciones de borde como la dinamica del sistema vienen caracterizadas por:

$$\dot{x} = rx(t)\left(1 - \frac{x(t)}{K}\right) - h(t) = 0 \tag{3}$$

$$x(0) = x_0 \tag{4}$$

Para encontrar la solución óptima, se plantea el Hamiltoniano asociado al problema de optimización:

$$H(x,u,t,\lambda) = ph(t) - cu(t) + \lambda\left(rx(t)\left(1 - \frac{x(t)}{K}\right) - h(t)\right) \tag{5}$$

Dado que $h(t) = x(t)u(t)$ se reemplaza sobre lo anterior,por lo que el Hamiltoniano se puede reescribir como:

$$H(x,u,t,\lambda) = px(t)u(t) - cu(t) + \lambda\left(rx(t)\left(1 - \frac{x(t)}{K}\right) - x(t)u(t)\right) \tag{6}$$

Donde los λ son los multiplicadores de Lagrange asociados a las restricciones del problema. Luego, se plantean las condiciones de optimalidad asociadas al principio del máximo.

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x} \tag{7}$$

$$= -\frac{\partial}{\partial x}\left(px(t)u(t) - cu(t) + \lambda\left(rx(t)\left(1 - \frac{x(t)}{K}\right) - x(t)u(t)\right)\right) \tag{8}$$

$$= -(pqu(t) + \left(r - \frac{2rx(t)}{K}\right) - qu(t))\lambda) \tag{9}$$

Ademas debemos considerar que x(T) es una variable libre dado el enunciado, por lo que tendremos que:

$$\lambda(T) = 0 \tag{10}$$

Por lo que se obtiene una condicion terminal sobre los multiplicadores. Finalmente para el analisis de la entrada tenemos que considerar que esta puede tomar dos valores, por lo que factorizando el Hamiltoniano en función de u(t) se obtiene que:

$$H = \lambda r x(t)\left(1 - \frac{x}{K}\right) + u(t)\left(qx(t)(p-\lambda) - c\right) \tag{11}$$

Vemos por tanto que u(t) es una funcion lineal al hamiltoniano por lo que podemos definir dos condiciones tal que:

$$\begin{aligned} u^*(t) = 0 \quad &\text{cuando} \quad qx(t)(p-\lambda(t)) - c < 0 \\ u^*(t) = E \quad &\text{cuando} \quad qx(t)(p-\lambda(t)) - c > 0 \end{aligned}$$

Por lo que separando por casos se tendra que:

$$\text{Para } u \equiv 0 \text{ tenemos:} \quad \begin{cases} \dot{x} = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right) \\ \dot{\lambda} = -r\left(1 - \frac{2x}{K}\right)\lambda \end{cases} \tag{12}$$

$$\text{Para } u \equiv E \text{ tenemos:} \quad \begin{cases} \dot{x} = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right) - qxE \\ \dot{\lambda} = -(pqE + \left(r\left(1 - \frac{2x}{K}\right) - qE\right)\lambda) \end{cases} \tag{13}$$

De esta manera se tiene que el comportamiento de la solución óptima se encuentrara determinada por los diferentes casos de u(t) que se puede caracterizar mediante:

$$F(x,\lambda) = qx(t)(p-\lambda) - c \tag{14}$$

Donde si es esta es mayor a 0 , se encontrara se tendra que u*(t) = E, mientras que si es menor a 0 se tendra que u*(t) = 0.

- **Simule curvas de nivel en el plano (x, ϕ), con ϕ el coestado. Interprete los resultados y concluya sobre el comportamiento óptimo de u(t).**
  Se busca obtener las curvas de nivel en el plano (x, λ) para esto se hace uso de *Matlab* y en particular la funcion *ODE45* tal que permita resolver las ecuaciones diferenciales asociadas a las condiciones de optimalidad obtenidas en el punto anterior para los diferentes casos, dando como resultado lo siguiente:

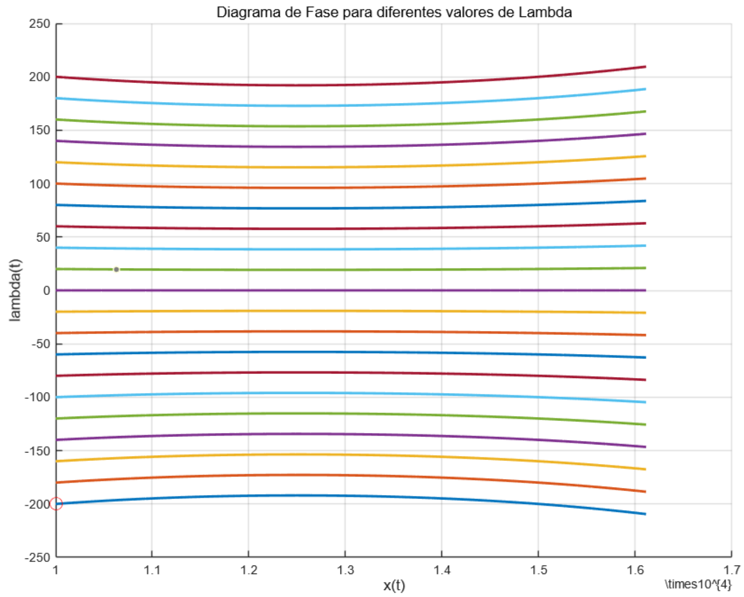

Figura 2: Curvas de nivel en el plano (x, λ) tanto para $u = 0$ para los diferentes valores de λ_0, en un rango de de -200 – 200

Por otro lado tenemos que:

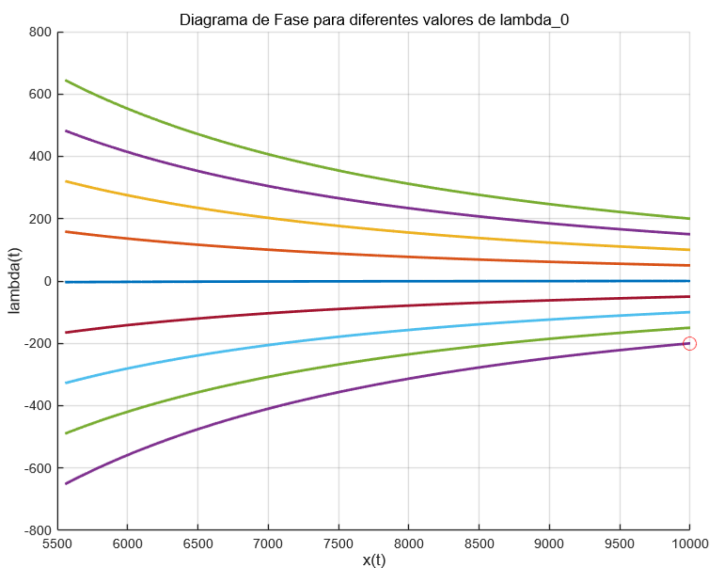

Figura 3: Curvas de nivel en el plano (x, λ) para $u = E$ para los diferentes valores de λ_0, en un rango de de -200 – 200.

Luego se puede observar que el comportamiento de la solución óptima se encuentra determinada por los diferentes casos de u(t), ademas de el valor de la condicion inicial λ_0.

- **Encuentre una expresión para la acción de control óptima $u^\star(t)$ y la dinámica de la población de peces resultante $x^*(t)$, en función de las constantes conocidas. Grafique e interprete los resultados.**

  Dado que se busca encontrar una expresion para la acción de control óptima $u^\star(t)$ y la dinámica de la población de peces resultante $x^*(t)$, en función de las constantes conocidas, se tiene que la acción de control óptima se encuentra determinada por los diferentes casos de u(t), donde para un cierto t_c se tendra que usaremos $u = 0$ y para $t > t_c$ se tendra que $u = E$, pero es importante notar que el comportamiento esta fuertemente determinado por la condicion inicial (λ_0) y que ademas se debe cumplir que

$$\lambda(T) = 0 \tag{15}$$

  Por lo que analizando las curvas de nivel anteriores, se tendra que para que dicha condicion terminal se cumpla se debe tener que en todo momento $u(t) = E$. Es por esto que nos quedaremos con esta solución, por lo que se tiene que:

$$\text{Para } u \equiv E \text{ tenemos:} \quad \begin{cases} \dot{x} = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right) - qxE \\ \dot{\lambda} = -(pqE + \left(r\left(1 - \frac{2x}{K}\right) - qE\right)\lambda) \end{cases} \tag{16}$$

  Luego se deberan resolver estas ecuaciones, dando como resultado:

$$\dot{x} = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right) - qxE \tag{17}$$

$$= rx - \frac{r}{k}x^2 - qxE \tag{18}$$

$$= -\frac{r}{k}x^2 + x(r - qE) \tag{19}$$

  Si reemplazamos los valores de r,q y E. Se obtiene que (r-qE) = 0, por lo que se tiene que:

$$\dot{x} = -\frac{r}{k}x^2 \tag{20}$$

  Resolviendo la ecuacion diferencial se tiene que:

$$x(t) = \frac{1}{\frac{r}{K}t - C} \tag{21}$$

  Luego como conocemos x(0)= x_0, se tiene que:

$$x(0) = \frac{1}{\frac{r}{K} \cdot 0 - C} = -\frac{1}{C} \tag{22}$$

Con lo que tenemos finalmente que:

$$x(t) = \frac{1}{\frac{r}{K}t + \frac{1}{x_0}} \tag{23}$$

Esto por lo mencionado anteriormente es valido para $t \in [0, T]$, luego tenemos que para λ viene dado por:

$$\dot{\lambda} = -(pqE + \left(r\left(1 - \frac{2x}{K}\right) - qE\right)\lambda) \tag{24}$$

$$= -(pqE + \frac{2r}{K}x\lambda) \tag{25}$$

Dado que nos piden el obtener la dinámica de la población de peces resultante $x^*(t)$, se obtiene el siguiente grafico:

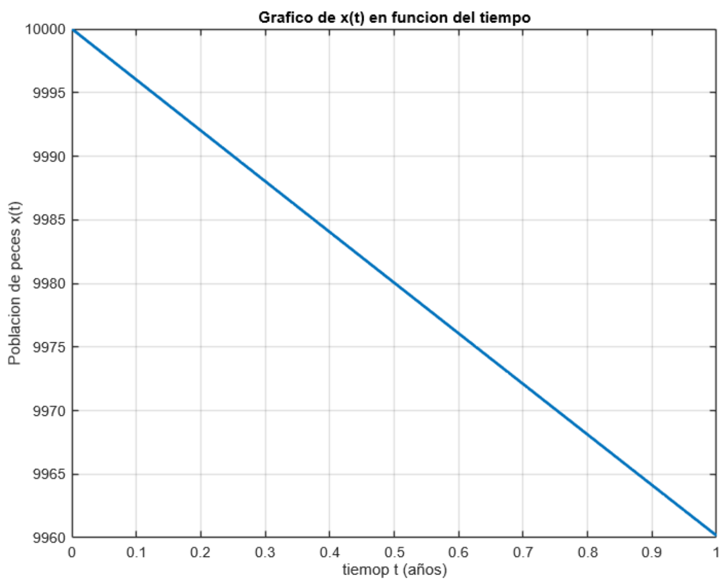

Figura 4: Grafico de x(t) que representa el número de peces en el lago en función del tiempo.

Luego tenemos que la entrada óptima $u^*(t)$ se encuentra dada por:

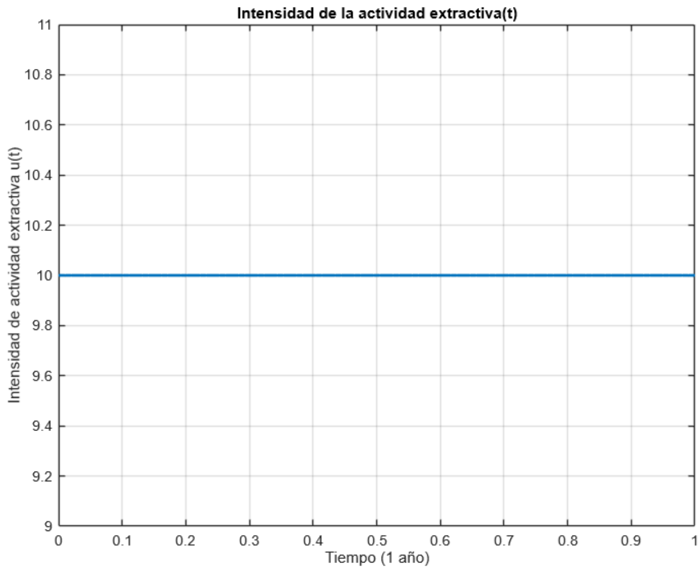

Figura 5: Grafico de u(t)=E optimo, que representa la actividad pesquera (medida en cantidad de botes pesqueros en el lago).

- **Encuentre el valor óptimo de J. Evalúe J para otra acción de control (no óptima) y concluya**

  Retomando la funcion de costos dada por:

$$J(x(t), u(t)) = \int_0^T (ph(t) - cu(t))dt \tag{26}$$

  Luego tenemos que el valor óptimo de J evaluado en los valores optimos de x(t) y u(t) se tiene que:

$$\begin{aligned} J(x^*(t), u^*(t)) &= \int_0^T (ph(t) - cu(t))dt && (27)\\ &= \int_0^1 (pqx(t)u(t) - cu(t))dt && (28)\\ &= \int_0^1 (1 \cdot 10^{-3} \cdot 10 \cdot \frac{1}{\frac{0.01}{25.000}t + \frac{1}{10000}} - 10)dt && (29)\\ &= 89.8005 && (30) \end{aligned}$$

  Con lo que se maximiza el valor de J, por otro lado si se evalua J para una acción de control no optima por ejemplo con un u(t) = 5 , se tiene que:

$$J(x^*(t), u^*(t)) = \int_0^T (ph(t) - cu(t))dt \tag{31}$$
$$= \int_0^1 (pqx(t)u(t) - cu(t))dt \tag{32}$$
$$= \int_0^1 (1 \cdot 10^{-3} \cdot 5 \cdot \frac{1}{\frac{0.01}{25.000}t + \frac{1}{10000}} - 5)dt \tag{33}$$
$$= 44.9003 \tag{34}$$

Por lo que se tiene que el valor de J es menor que el valor optimo, por lo que se concluye que la acción de control optima es la que maximiza el valor de J.

3. Pregunta 3

- **Represente el sistema en variables de estado, indicando las matrices/vectores de estado A, B, C, y D. ¿Qué representan dichas matrices? Además, estudie la controlabilidad observabilidad y estabilidad del sistema.**

Luego se busca el representar el sistema en variables de estado, por lo que se debe considerar la siguiente ecuación diferencial:

$$\dot{\alpha}(t) = -0.3130\alpha(t) + \dot{\theta}(t) + 0.2320\delta(t) \tag{35}$$
$$\dot{q}(t) = -0.0139\alpha(t) - 0.4260q(t) + 0.0203\delta(t) \tag{36}$$
$$\dot{\theta}(t) = 56.70q(t) \tag{37}$$

Donde podemos definir las variables de estado como:

$$x_1(t) = \alpha(t) \tag{38}$$
$$x_2(t) = q(t) \tag{39}$$
$$x_3(t) = \theta(t) \tag{40}$$

Donde se tendra que la variable de control o manipulada sera $\delta(t)$, por lo que se tiene que:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \tag{41}$$
$$y(t) = Cx(t) \tag{42}$$

Donde:

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}, \quad u(t) = \delta(t), \quad y(t) = \theta(t)$$

Las matrices A, B, C y D son las siguientes:

$$A = \begin{bmatrix} -0.3130 & 56.70 & 0 \\ -0.0139 & -0.4260 & 0 \\ 0 & 56.70 & 0 \end{bmatrix}, \tag{43}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0.2320 \\ 0.0203 \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{44}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{45}$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \tag{46}$$

Donde se tiene que la variable de salida o controlada corresponde a el angulo de inclinacion $\theta(t)$ por esa razon C, tiene la forma previamente mencionada. Esta matrices se puede interpretar como:

- **Matriz A**: Representa la dinamica del sistema, es decir, como evolucionan las variables de estado en el tiempo, permite ademas se relaciona de manera directa con la matriz de transicion de estados y nos permite tener un conocimiento en cuanto a la estabilidad del sistema.
- **Matriz B**: Representa la influencia de la variable de control sobre las variables de estado, es decir, como la variable de control afecta a las variables de estado.
- **Matriz C**: Representa la influencia de las variables de estado sobre la variable de salida, es decir, como las variables de estado afectan a la variable de salida, basicamente nos da la libertad para analizar que variables son de interes en el analisis.
- **Matriz D**: Representa la influencia de la variable de control sobre la variable de salida, usualmente se considera 0 dado que es simplemente un *Outset* de la variable de control.

Buscamos analizar controlabilidad de nuestro sistema, es por esto que se utiliza la matriz:

$$\mathcal{C} = \begin{pmatrix} B & AB & A^2B & \dots & A^{n-1}B \end{pmatrix} \tag{47}$$

Dado que en nuesto caso particular n=3,se tiene que:

$$\mathcal{C} = \begin{pmatrix} B & AB & A^2B \end{pmatrix} \tag{48}$$

Dado los valores de A y B previamente obtenidos, luego tenemos que la matriz de controlabilidad sera:

$$C = \begin{bmatrix} 0.232 & 1.0784 & -1.0107 \\ 0.0203 & -0.0119 & -0.0099 \\ 0 & 1.1510 & -0.6732 \end{bmatrix} \tag{49}$$

Luego se observa que tanto filas como columnas son LI por lo que el sistema es controlable, dado que es de rango completo.Por otro lado se busca analizar la observabilidad del sistema, es por esto que se utiliza la matriz:

$$\vartheta = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} \tag{50}$$

Luego para nuestro caso particular se tiene que:

$$\vartheta = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{pmatrix} \tag{51}$$

Al ser calculada se tiene que:

$$\vartheta = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 56.70 & 0 \\ -0.7881 & -24.1542 & 0 \end{bmatrix} \tag{52}$$

Al igual que antes vemos que el sistema es de rango completo y que tanto sus filas como columnas son LI, por lo que el sistema es observable. Finalmente se busca analizar la estabilidad del sistema, es por esto que se busca analizar los valores propios de la matriz A, dado que estos determinan la estabilidad del sistema, se tiene que:

$$\det(A - \lambda I) = 0 \tag{53}$$

Luego mediante Matlab , se tiene que los valores propios vienen dados por:

$$\lambda_1 = 0 \tag{54}$$

$$\lambda_2 = -0.3695 + 0.88596713j \tag{55}$$

$$\lambda_3 = -0.3695 - 0.88596713j \tag{56}$$

Se observa por tanto que el sistema es criticamente estable, dado que tiene un polo en 0

- **Obtenga la función de transferencia y diseñe un controlador PI que cumpla con los criterios de diseño mencionados anteriormente (en caso de no lograr cumplir con los requerimientos, mencione cuales si se logran cumplir). Simule y grafique la variable manipulada y controlada. Sea específico/a con el método de sintonización utilizado**

Para obtener la función de transferencia se utiliza la funcion ss2tf de Matlab, la cual permite obtener la función de transferencia a partir de las matrices A,B,C y D, luego se obtiene que:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1.151s + 0.1774}{s^3 + 0.739s^2 + 0.9215s} \tag{57}$$

Luego se propone un PI, el cual tiene ls siguiente forma:

$$G_c(s) = K_p + \frac{K_i}{s} \tag{58}$$

Mediante la herramienta de *PID Tool* de Matlab, se obtiene que los valores de K_p y K_i optimos son:

$$K_p = 0.24289 \tag{59}$$

$$K_i = 0.31544 \tag{60}$$

Se tiene que el sistema bajo este controlador tiene el siguiente desempeño: Se observa

Tabla 2: Valores de desempeño obtenidos luego de optimizar los valores del controlador PI

Valores de desempeño	**Valores**
Rise time	1.97 seconds
Settling time	19.3 seconds
Overshoot	22.1 %
Peak	1.22

que cumple con los requerimientos asocados al *Rise time*, al *Settling time* y al cero error a estado estacionario, pero no cumple con el requerimiento de overshoot, dado que este es mayor al 20 %, se realizaron variados intentos y no se logra cumplir con este requerimiento del *Overshoot* y *Settling time*, en simultaneo.Luego se obtienen las siguientes respuestas del sistema:

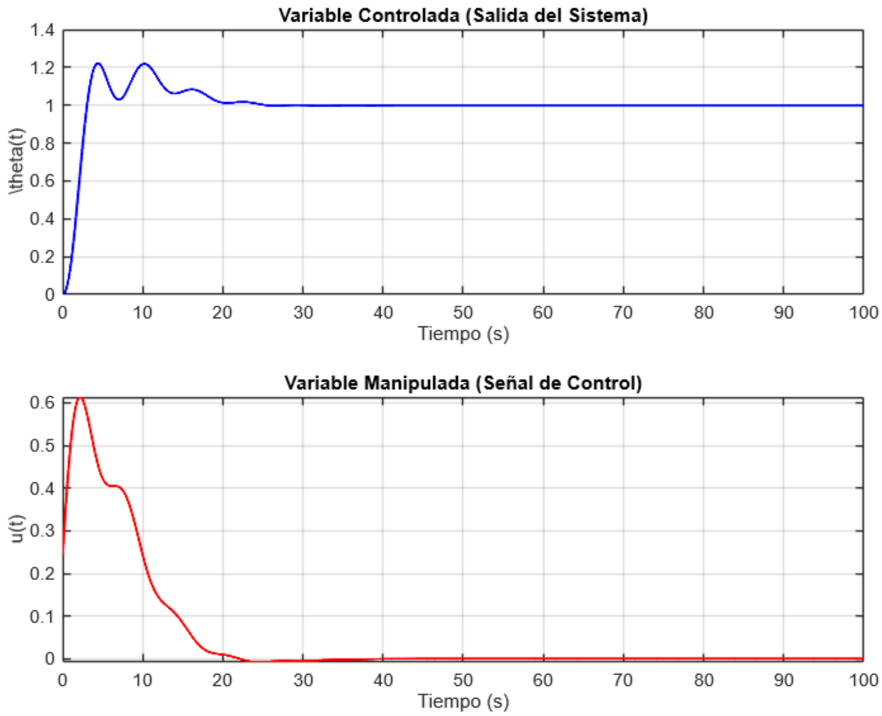

Figura 6: Repuesta manipulada y respuesta al escalon del sistema .

Se obtiene finalmente los graficos de interes, asi como la sintonización para el controlador PI