Ingeniería Eléctrica
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

Análisis de Sistemas Dinámicos y Estimación
(EL3103)
Clase auxiliar 5
Prof. Heraldo Rozas.
Prof. Aux. Erik Saez - Maximiliano Morales

1. Considere el sistema caracterizado por la siguiente función de transferencia:

$$H(s) = \frac{3(s+2)}{s^2 - 2s - 15} \tag{1}$$

   1. Formule el sistema en variables de estado, y calcule MTE y funciones base.
   2. Calcule la respuesta al impulso, y determine estabilidad BIBS y BIBO.
   3. Escriba la expresión general para la respuesta del sistema ante una entrada arbitraria y para condiciones iniciales arbitrarias.
   4. Analice controlabilidad y observabilidad del sistema.
   5. Suponiendo que solamente tiene acceso a la salida del sistema y no al estado, diseñe un controlador que ubique los polos a lazo cerrado en -5 y -3.

Solución:

Resolucion 1.1

Se busca obtener la representacion en variables de estado del sistema,ademas de obtener la MTE.Para comenzar encontraremos los polos y ceros de la funcion de transferencia:

$$H(s) = \frac{3(s+2)}{s^2 - 2s - 15} = \frac{3(s+2)}{(s-5)(s+3)} \tag{2}$$

Una vez expresada de una manera factorizada la funcion de transferencia, es posible utilizar fracciones parciales,tal que:

$$H(s) = \frac{A}{s-5} + \frac{B}{s+3} \tag{3}$$

Luego formaremos un sistema de ecuaciones tal que:

$$A(s+3) + B(s-5) = 3(s+2) \tag{4}$$
$$(A+B)s + 3A - 5B = 3s + 6 \tag{5}$$

Se obtiene que:

$$A + B = 3 \tag{6}$$
$$3A - 5B = 6 \tag{7}$$

Por tanto se obtiene que $A = \frac{21}{8}$ y $B = \frac{3}{8}$, con lo que se obtiene que:

$$H(s) = \frac{21}{8(s-5)} + \frac{3}{8(s+3)} \tag{8}$$

Dado que la definicion de funcion de transferencia viene dada por $H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$,luego tenemos que:

$$Y(s) = \frac{21}{8(s-5)}U(s) + \frac{3}{8(s+3)}U(s) \tag{9}$$

donde es posible escribir de manera conveniente la salida tal que:

$$Y(s) = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{21}{8} & \frac{3}{8} \end{pmatrix}}_{=\mathbf{C}} \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{U(s)}{s+5} \\ \frac{U(s)}{s+3} \end{pmatrix}}_{=\mathbf{X(s)}} \tag{10}$$

La nocion sobre realizar esto,esque podemos determinar cual es la forma de la matriz C de manera directa y ademas poder conocer el vector de estados,en base a esto tendremos lo siguiente, con el fin de obtener las matrices A y B:

$$\mathbf{X}(s) = \begin{pmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{U(s)}{s+5} \\ \frac{U(s)}{s+3} \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Luego podemos analizar por componente,es decir que:

$$X_1(s) = \frac{U(s)}{s-5} \tag{12}$$
$$X_1(s)(s-5) = U(s) \tag{13}$$
$$sX_1(s) - 5X_1(s) = U(s) \tag{14}$$

Aplicando la antitransformada,considerando que $\mathcal{L}\left\{\frac{d^n}{dt^n}f(t)\right\} = s^n F(s)$,tenemos que la expresion en el dominio del tiempo vendra dada:

$$\dot{x}_1(t) - 5x_1(t) = u(t) \tag{15}$$
$$\dot{x}_1(t) = 5x_1(t) + u(t) \tag{16}$$

De manera analoga tenemos que para $X_2(s)$ se tiene que:

$$X_2(s) = \frac{U(s)}{s+3} \tag{17}$$
$$X_2(s)(s+3) = U(s) \tag{18}$$
$$sX_2(s) + 3X_2(s) = U(s) \tag{19}$$

Aplicando la antitransformada,se tiene que:

$$\dot{x}_2(t) + 3x_2(t) = u(t) \tag{20}$$
$$\dot{x}_2(t) = -3x_2(t) + u(t) \tag{21}$$

Una vez obtenidas las variables de estado en el dominio del tiempo , tenemos que podemos formar la matriz A y B de la siguiente manera:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} u. \tag{22}$$

Donde se tendra que la primera matriz sera la matriz A y la segunda matriz sera la matriz B,es decir:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{23}$$

De esta manera se obtiene el vector de estados x(t) y las matrices A B y C que permiten realizar la formulacion en variables de estado.La cual es posible expresarla como:

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} u(t) \tag{24}$$

$$y(t) = \begin{pmatrix} \frac{21}{8} & \frac{3}{8} \end{pmatrix} x(t) \tag{25}$$

Notamos que la matriz A es diagonal,lo que nos permite de manera directa obtener los matriz de transicion de estados,la cual vendra dada por:

$$\Phi(t) = e^{At} = \begin{pmatrix} e^{5t} & 0 \\ 0 & e^{-3t} \end{pmatrix} \tag{26}$$

Resolucion 1.2

Se busca el analizar la respuesta al impulso ademas de la estabilidad BIBS y BIBO,para el primer caso tenemos:

$$h(t) = C\phi(t)B \tag{27}$$

Luego reemaplzaando los valores obtenidos anteriormente se tiene que:

$$y(t) = \begin{pmatrix} \frac{21}{8} & \frac{3}{8} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{5t} & 0 \\ 0 & e^{-3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{28}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{21}{8}e^{5t} & \frac{3}{8}e^{-3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{29}$$

$$= \frac{21}{8}e^{5t} + \frac{3}{8}e^{-3t} \tag{30}$$

2. Considere la siguiente funcion a tiempo discreto dada por:

$$x(n+3) + 6x(n+2) + 11x(n+1) + 6x(n) = 2u(n+1) + 6u(n) \tag{31}$$

   1. Obtenga la funcion de transferencia del sistema
   2. Obtenga la respuesta al impulso

Solución:

Resolucion 2.1

Se busca obtener la funcion de transferencia del sistema, pero es importante notar que ahora estmaos considerando sistemas a tiempo discreto, por lo que deberemos recurrir a la transformada Z en lugar de la transformada de Laplace, la cual se define como:

$$\mathcal{Z}\{f(t)\} = F(z) = \sum_{t=0}^{\infty} f(t) z^{-t} \tag{32}$$

Al igual que el ejercicio anterior, utilziaremos sus propiedades de lienalidad , y en particular una de estas la cual nos habla de los retardos:

$$\mathcal{Z}\{f(t-k)\} = z^{-k} F(z) \tag{33}$$

Por lo tanto tomando la transformada Z de la funcion a tiempo discreto se obtiene:

$$z^3 X(z) + 6z^2 X(z) + 11zX(z) + 6X(z) = 2zU(z) + 6U(z) \tag{34}$$

Con lo que si factorizamos X(z) se obtiene que:

$$X(z)(z^3 + 6z^2 + 11z + 6) = U(z)(2z + 6) \tag{35}$$

$$G(z) = \frac{X(z)}{U(z)} = \frac{2z + 6}{z^3 + 6z^2 + 11z + 6} \tag{36}$$

Con lo que la funcion de transferencia del sistema vendra dada por:

$$G(z) = \frac{2z + 6}{z^3 + 6z^2 + 11z + 6} \tag{37}$$

Resolucion 2.2

Similar a el problema anterior, se busca obtener la respuesta a el impulso que analogamente se cumple que $u(t) = \sigma(t)$ y que por tanto $U(z) = 1$, luego se debera factorizar el polinomio obtenido con anterioridad con el fin de obtener las fracciones parciales, lo que se puede hacer de la siguiente manera:

$$z^3 + 6z^2 + 11z + 6 = (z+1)(z+2)(z+3) \tag{38}$$

Con lo que:

$$G(z) = \frac{2z + 6}{(z+1)(z+2)(z+3)} = \frac{A}{z+1} + \frac{B}{z+2} + \frac{C}{z+3} \tag{39}$$

Formamos nuestros sitemas de ecuaciones los cuales vendran dados por:

$$A(z+2)(z+3) + B(z+1)(z+3) + C(z+1)(z+2) = 2z + 6 \tag{40}$$

$$Az^2 + 5Az + 6A + Bz^2 + 4Bz + 3B + Cz^2 + 3Cz + 2C = 2z + 6 \tag{41}$$

$$(A + B + C)z^2 + (5A + 4B + 3C)z + (6A + 3B + 2C) = 2z + 6 \tag{42}$$

Con lo que se forma un sistemas de ecuaciones dado por:

$$A + B + C = 0 \tag{43}$$
$$5A + 4B + 3C = 2 \tag{44}$$
$$6A + 3B + 2C = 6 \tag{45}$$

Dando como resultado que $A = 2$, $B = -2$ y $C = 0$, con lo que se obtiene que:

$$G(z) = \frac{2}{z+1} - \frac{2}{z+2} \tag{46}$$

Dado que queremos obtener g(n) = $\mathcal{Z}^{-1}\{G(z)\}$, se tiene debemos aplicar la antitransformada de Z , pero notamos que no presenta la forma de ninguna de las antitransformadas conocidas, por lo que debemos realizar un ajuste tal que:

$$G(z) = \frac{2}{z}\frac{z}{z+1} - \frac{2}{z}\frac{z}{z+2} \tag{47}$$

Luego al recurrir a las tablas de antitransformada se tienen lo siguiente:

$$\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z}{z+\alpha}\right\} = (-\alpha)^n \tag{48}$$
$$\sqcup]\S\sqcup^{-1}\left\{z^k F(z)\right\} = f(n+k) \tag{49}$$

con lo que al aplicar la antitransformada se obtiene que tenemos:

$$g(n) = 2(-1)^{n-1} - 2(-2)^{n-1} \tag{50}$$

Con lo que se obtiene la respuesta al impulso del sistema.

3. Considere la siguiente matriz dada por:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -8 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \tag{51}$$

   1. Realize una transformacion tal que $A = TDT^{-1}$, donde D es una matriz diagonal de valores propios de A y T es una matriz de vectores propios, representadas por:

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} T = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \end{bmatrix} \tag{52}$$

Solución:

Resolucion 3.1

Dada la matriz A se busca obtener una transformacion Para encontrar los valores propios de A , se debe cumplir que para det(A-λI) = 0, esto con el fin de que sea singular , es decir que la matriz $A - \lambda I$

no tenga inversa o equivalente a que su determinante sea nulo , para no obtener soluciones triviales en donde el vector propio v sea 0 , dado que por definicion estos son no nulos.

$$(A - \lambda I)v = 0 \tag{53}$$

Por lo tanto se tiene que:

$$|A - \lambda I| = 0 \tag{54}$$

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & -8 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{55}$$

$$(5-\lambda)(-1-\lambda) - (-8)(1) = 0 \tag{56}$$

$$\lambda^2 - 4\lambda - 3 = 0 \tag{57}$$

De esta manera se debera cumplir que:

$$(\lambda - 3)(\lambda - 1) = 0 \tag{58}$$

Con lo que finalmente se obtiene que $\lambda_1 = 3$ y $\lambda_2 = 1$,y por tanto nuestra matriz D la cual viene dada:

$$D = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{59}$$

Se busca obtener los vectores propios asociados a estos valores propios, para esto calcularemos el vector proio asociado a λ_1 por tanto:

$$(A - \lambda_1 I)\mathbf{v}_1 = 0. \tag{60}$$

Desarrollando esta expresión, tenemos

$$\begin{pmatrix} 5-3 & -8 \\ 1 & -1-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{61}$$

Esto permite formar un sistema de ecuaciones para x e y , dado por:

$$2x - 8y = 0, \tag{62}$$

$$x - 4y = 0, \tag{63}$$

Es importante destacar que son linealmente dependientes, por lo que no existirá una solución única. Considerando esto, basta encontrar algún vector que satisfaga dicha relación. Por ejemplo, si consideramos $y = 1$, podemos ver que se debe tener $x = 4$. Así, el vector propio $\mathbf{v}_1$ es

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{64}$$

Analogamente tenemos uqe para el segundo vector proipo se tiene que:

$$(A - \lambda_2 I)\mathbf{v}_2 = 0 \tag{65}$$

$$\iff \begin{pmatrix} 5-1 & -8 \\ 1 & -1-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{66}$$

Desarrollando, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones

$$4x - 8y = 0, \tag{67}$$

$$x - 2y = 0. \tag{68}$$

Nuevamente, podemos ver que las ecuaciones son linealmente dependientes, por lo que considerando $y = 1$ tenemos $x = 2$. Por lo tanto, el segundo vector propio es

$$\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{69}$$

Finalmente es posible el obtener la matriz T, la cual se define como:

$$T = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{70}$$

La cual esta asociado a los vectores propios, finalmente nos queda el obtener T^{-1} , lo cual se puede hacer de la siguiente manera para una matriz de 2x2

$$\begin{bmatrix} m_1 & m_2 \\ m_3 & m_4 \end{bmatrix} \tag{71}$$

Con lo que la matriz inversa se define como:

$$M^{-1} = \frac{1}{\det(M)} \begin{bmatrix} m_4 & -m_2 \\ -m_3 & m_1 \end{bmatrix} \tag{72}$$

Por lo tanto, tenemos que:

$$\det(T) = 4 \cdot 1 - 2 \cdot 1 = 2 \tag{73}$$

Con lo que se obtiene que para T^{-1}:

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{-1}{2} & 2 \end{bmatrix} \tag{74}$$

De esta manera se obtiene la transformación buscada dada por:

$$A = TDT^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & 2 \end{bmatrix} \tag{75}$$