Auxiliar #1 - Análisis de señales

Erik Saez A.

Department of Electrical Engineering
Universidad de Chile

August 17, 2025

erik.saez@ug.uchile.cl

Contenidos

Ingeniería Eléctrica
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

Fig.: Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas , Universidad de Chile.

Motivación

- ¿Por qué vale la pena tomar este ramo?
- ¿Qué me puede aportar si no pienso dedicarme al área de Telecomunicaciones?
- ¿Es realmente importante ir a clases?
- ¿Qué cosas interesantes voy a aprender aquí?
- ¿Cómo se relaciona con sistemas de comunicación modernos?
- ...

Continuidad del ramo

- Análisis de señales → Principios de Comunicaciones / Fundamentos de control de Sistemas
- ¡Atrasa! pero no es crítico (¡Si para los del área de Telecomunicaciones, cuidado!)
- Base fundamental para: modulación, codificación, filtrado digital, etc.

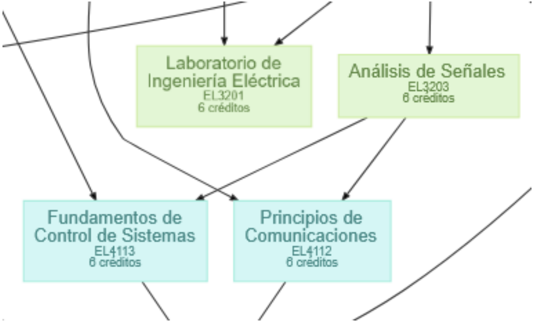


Fig.: Continuidad del ramo

Evaluaciones del ramo

Tipos de Evaluación

Tipo	**Descripción**
Tareas (5)	Actividades semanales
Proyectos 1 y 2	Proyectos de desarrollo
Controles (3) y Examen	Evaluaciones

Recomendaciones

- Controles: Harta matemática y teoría
- Los ejercicios no dejarlos para último momento
- Proyectos son largos, por lo que prepararlos con anticipación

¿Alguna duda?

Señales: Definición Formal

Concepto

- Una **señal** es una función de tiempo.
- **Tiempo continuo**: $x(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{\alpha}$.
- **Tiempo discreto**: $x[n] : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}^{\alpha}$.

Definición

Un **sistema** es un operador que transforma una señal de entrada en una señal de salida.

$$T_c : \mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{\alpha}) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{q}), \qquad y(t) = (T_c\{x\})(t),$$

$$T_d : \mathcal{S}(\mathbb{Z}, \mathbb{R}^{\alpha}) \to \mathcal{S}(\mathbb{Z}, \mathbb{R}^{q}), \qquad y[n] = (T_d\{x\})(n).$$

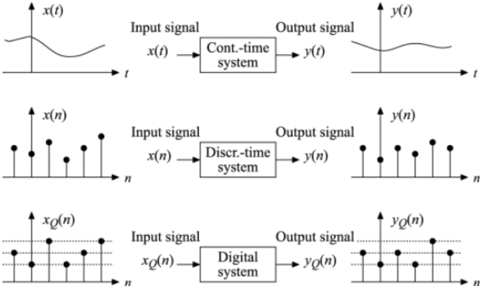


Fig.: Señal/sistema en tiempo continuo, discreto y digital (con cuantización).

Frecuencia: continua vs. discreta

Senoidal continua

$$x(t) = A\cos(\omega t + \theta),$$
$$\omega = 2\pi f \quad (\text{rad/s})$$

- **Periodo**: $T = \frac{1}{f}$ (siempre periódica).
- **Fase** θ: desplaza la onda sin cambiar T.
- **Unidades**: f en Hz; ω en rad/s.

Senoidal discreta

$$x_f[n] = A\cos(2\pi f\, n + \theta),$$
$$\omega_d = 2\pi f \quad (\text{rad/muestra})$$

- **Periodicidad**: $x[n] = x[n+N] \Leftrightarrow f \in \mathbb{Q}$.
- **Periodo fundamental**: si $f = \frac{p}{q}$ (irreducible) $\Rightarrow N_{\text{min}} = q$.
- **Extremos**: $f = 0$ (constante), $|f| = \frac{1}{2}$ (máx. oscilación, $N_{\text{min}} = 2$).

Periodicidad en discreto: resultado central

Proposición y esbozo

Afirmación: $x_f[n]$ es periódica $\Leftrightarrow$ $f \in \mathbb{Q}$.
($\Rightarrow$) Si $x_f[n]$ es N-periódica:

$$\begin{aligned} x_f[n] &= x_f[n+N] \\ \Rightarrow\ \cos(2\pi f n + \theta) &= \cos\big(2\pi f(n+N) + \theta\big) \\ \Rightarrow\ 2\pi f N &= 2\pi k\ (k \in \mathbb{Z}) \\ \Rightarrow\ f &= \tfrac{k}{N} \in \mathbb{Q}. \end{aligned}$$

($\Leftarrow$) Si $f = \frac{k}{N}$ (irreducible), entonces

$$x_f[n+N] = A\cos\Big(2\pi \tfrac{k}{N}(n+N) + \theta\Big) = A\cos\Big(2\pi \tfrac{k}{N} n + 2\pi k + \theta\Big) = x_f[n],$$

luego $x_f[n]$ es N-periódica.

Periodo fundamental

Si $f = \frac{p}{q}$ en forma irreducible, entonces $N_{\text{min}} = q$. Si $f \notin \mathbb{Q}$, no existe N finito (aperiódica).

Resultados en discreto: periodicidad, aliasing y definiciones

Proposición 1 — Periodicidad

Sea $x_f[n] = A\cos(2\pi f\, n + \theta)$. Entonces

$$x_f[n] \text{ es periódica } \iff f \in \mathbb{Q}.$$

Proposición 2 — Período fundamental

Si $x_f[n]$ es periódica y $f = \frac{p}{q}$ en forma irreducible ($p, q \in \mathbb{Z}$, $\gcd(p, q) = 1$), entonces

$$N(x_f) = q.$$

Definición — Período fundamental

Para una secuencia $x[n]$,

$$N(x) \triangleq \min\{\, N \in \mathbb{N} : \; x[n] = x[n+N] \;\forall n \,\},$$

si existe; en caso contrario, $N(x) = \infty$ (no periódica).

Proposición 3 — Aliasing (redundancia)

Para todo $k \in \mathbb{Z}$,

$$x_{f+k}[n] = A\cos\big(2\pi(f+k)n+\theta\big) = A\cos\big(2\pi f\, n+\theta\big) = x_f[n].$$

Corolario 1 — Rango de frecuencias fundamentales

Toda familia $\{x_f[n] : f \in \mathbb{R}\}$ admite representantes con

$$f \in \left(-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right] \qquad (\text{equiv. } \omega_d = 2\pi f \in (-\pi, \pi]).$$

Basta restringir el análisis a ese intervalo.

Definición — Frecuencia de máxima oscilación

En $f \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, la máxima oscilación ocurre en

$$f^\star = \pm\tfrac{1}{2} \;\Rightarrow\; x_{f^\star}[n] = A\cos(\pi n + \theta), \quad N(x_{f^\star}) = 2.$$

Pregunta #1

Enunciado Pregunta #1

Responda lo siguiente:

1. Demuestre que una señal coseno discreta es periódica si y sólo si la frecuencia es racional:

$$(x(n))_{n\in\mathbb{Z}} = \big(A\cos(2\pi f\, n + \varphi)\big)_{n\in\mathbb{Z}} \iff f \in \mathbb{Q}. \tag{1}$$

2. Considere la siguiente familia de señales exponenciales:

$$(s_k(n))_{n\in\mathbb{Z}} = \left(e^{\,\mathrm{j}\,\frac{2\pi k}{N}\,n}\right)_{n\in\mathbb{Z}}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{2}$$

Muestre que su período fundamental está dado por

$$N_p = \frac{N}{\gcd(k, N)}, \tag{3}$$

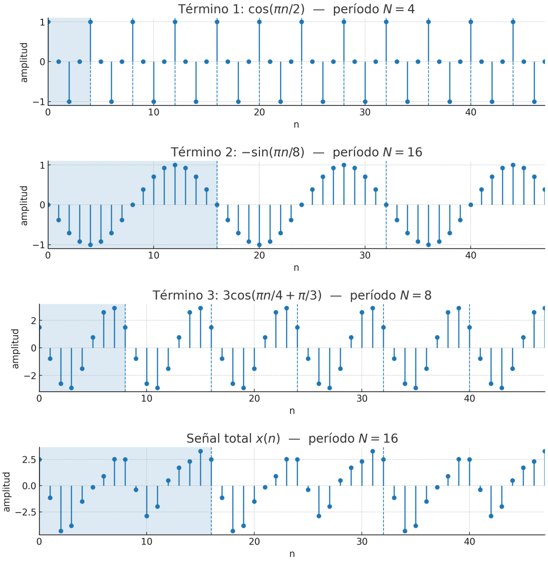
donde $\gcd(\cdot,\cdot)$ denota el máximo común divisor.

Pregunta #2

Enunciado Pregunta #2

Determine si las siguientes señales son periódicas. Si corresponde, especifique su período fundamental.

1. $x_a(t) = 6\cos\left(9t + \frac{\pi}{3}\right)$.
2. $x(n) = 6\cos\left(9n + \frac{\pi}{3}\right)$.
3. $x(n) = \cos\left(\frac{n}{8}\right)\cos\left(\frac{\pi n}{8}\right)$.
4. $x(n) = 2\,e^{j\left(\frac{\pi}{7}n-3\right)}$.
5. $x(n) = \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) - \sin\left(\frac{\pi n}{8}\right) + 3\cos\left(\frac{\pi n}{4} + \frac{\pi}{3}\right)$.


Término 1: cos(πn/2) — período N = 4
Término 2: −sin(πn/8) — período N = 16
Término 3: 3cos(πn/4 + π/3) — período N = 8
Señal total x(n) — período N = 16
amplitud
n

Pregunta #3

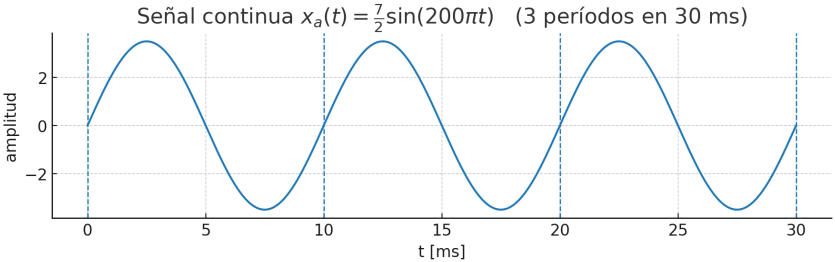
Enunciado Pregunta #3

Considere la siguiente señal sinusoidal a tiempo continuo:

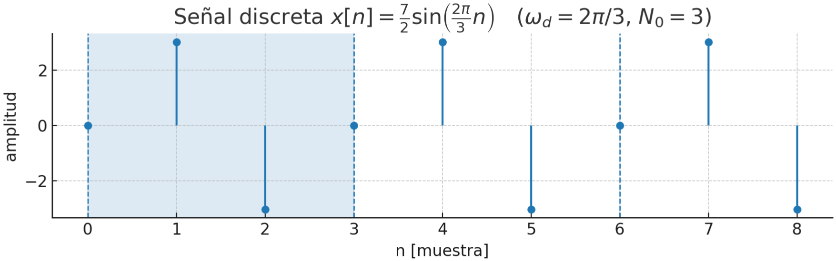
$$x_a(t) = \frac{7}{2} \sin(200\pi t), \qquad t \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

1. Bosqueje $x_a(t)$ para $0 \leq t \leq 30\,\text{ms}$.
2. La señal $x_a(t)$ es muestreada a una tasa de $F_s = 300\,\text{Hz}$. Determine la frecuencia de la señal a tiempo discreto $x[n] = x_a(nT_s)$, donde $T_s = 1/F_s$. Muestre que $x[n]$ es periódica y determine su período fundamental.
3. Bosqueje la señal $x[n]$ en el mismo diagrama donde bosquejó $x_a(t)$. ¿Cuál es el equivalente en milisegundos del período de $x[n]$?

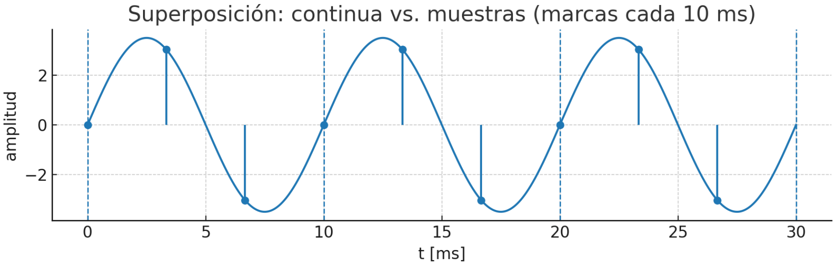
Bosquejo de señal continua



Bosquejo de señal discreta



Bosquejo de señal discretizada



Pregunta #4

Enunciado Pregunta #4

Considere una señal continua $x_a(t)$ periódica con período fundamental T_a (en segundos).

1. Si se muestrea la señal $x_a(t)$ a una tasa constante de F_s muestras por segundo, es decir, se induce la señal discreta

$$x[n] = x_a\left(\frac{n}{F_s}\right), \qquad \forall\, n \in \mathbb{Z}, \tag{5}$$

   encuentre la(s) condición(es) que garantice(n) que $x[n]$ sea periódica y, con ello, determine su período fundamental.

2. Con base en el punto anterior, justifique la siguiente afirmación: si $x[n]$ es periódica, entonces su período fundamental (equivalente en **segundos**) es un múltiplo de T_a.