Ingeniería Eléctrica
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS UNIVERSIDAD DE CHILE

Análisis de señales (EL3203-2)
Clase auxiliar 1

Prof. Jorge Silva.
Prof. Aux. Erik Sáez

1. Responda lo siguiente:

   1. Demuestre que una señal coseno discreta es periódica si y sólo si la frecuencia es racional:

$$(x[n])_{n\in\mathbb{Z}} = \big(A\cos(2\pi f\, n + \varphi)\big)_{n\in\mathbb{Z}} \iff f \in \mathbb{Q}. \tag{1}$$

   2. Considere la siguiente familia de señales exponenciales:

$$(s_k[n])_{n\in\mathbb{Z}} = \left(e^{\mathrm{j}\frac{2\pi k}{N}\, n}\right)_{n\in\mathbb{Z}}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{2}$$

   Muestre que su período fundamental está dado por

$$N_p \;=\; \frac{N}{\gcd(k, N)}, \tag{3}$$

   donde $\gcd(\cdot,\cdot)$ denota el máximo común divisor.

Solución:

Resolución 1.1

Demostraremos que una señal coseno discreta $x[n] = A\cos(2\pi f\, n + \varphi)$ es periódica si y sólo si la frecuencia f es racional.

($\Rightarrow$): Si $x[n]$ es periódica, entonces $f \in \mathbb{Q}$

Supongamos que $x[n]$ es N-periódica para algún $N \in \mathbb{Z}^+$. Entonces:

$$x[n+N] = x[n] \quad \forall n \in \mathbb{Z} \tag{4}$$
$$A\cos\big(2\pi f(n+N) + \varphi\big) = A\cos\big(2\pi f n + \varphi\big) \tag{5}$$

Esto implica que las fases deben cumplir que el término $2\pi f N$ debe ser un múltiplo entero de 2π para que se cumpla la periodicidad; por tanto:

$$2\pi f(n+N) + \varphi = 2\pi f n + \varphi + 2\pi m \tag{6}$$

para algún entero m (usando la periodicidad del coseno). Luego, simplificando:

$$2\pi f N = 2\pi m \tag{7}$$
$$f = \frac{m}{N} \in \mathbb{Q} \tag{8}$$

Por lo tanto, si $x[n]$ es periódica, entonces f debe ser racional.

(⇐): Si $f \in \mathbb{Q}$, entonces $x[n]$ es periódica

Supongamos que $f = \frac{k}{N}$ donde $k, N \in \mathbb{Z}$ y $\gcd(k, N) = 1$ (fracción en forma irreducible).

Evaluemos $x[n+N]$:

$$\begin{aligned}
x[n+N] &= A\cos\Big(2\pi \frac{k}{N}(n+N) + \varphi\Big) && (9)\\
&= A\cos\Big(2\pi \frac{k}{N}n + 2\pi k + \varphi\Big) && (10)\\
&= A\cos\big(2\pi \frac{k}{N}n + \varphi\big) \quad \text{(ya que } 2\pi k \text{ es múltiplo de } 2\pi\text{)} && (11)\\
&= x[n] && (12)
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $x[n]$ es N-periódica. Además, como $f = \frac{k}{N}$ está en forma irreducible, el período fundamental es exactamente $N_0 = N$. Así, se demuestra ambas direcciones de la equivalencia:

$$\boxed{x[n] = A\cos(2\pi f\, n + \varphi) \text{ es periódica} \quad \Longleftrightarrow \quad f \in \mathbb{Q}} \tag{13}$$

Resolución 1.2

Sea la familia de señales $s_k[n] = e^{\mathrm{j}\frac{2\pi k}{N}n}$; demostraremos que el período fundamental es $N_p = \frac{N}{\gcd(k,N)}$, donde $\gcd(k, N)$ corresponde al máximo común divisor. Para que $s_k[n]$ sea periódica con período P, debe cumplirse:

$$s_k[n+P] = s_k[n] \quad \forall n \in \mathbb{Z} \tag{14}$$

Sustituyendo la definición:

$$\begin{aligned}
e^{\mathrm{j}\frac{2\pi k}{N}(n+P)} &= e^{\mathrm{j}\frac{2\pi k}{N}n} && (15)\\
e^{\mathrm{j}\frac{2\pi k}{N}n} \cdot e^{\mathrm{j}\frac{2\pi k}{N}P} &= e^{\mathrm{j}\frac{2\pi k}{N}n} && (16)
\end{aligned}$$

Para que esto se cumpla para todo n, necesitamos:

$$\begin{aligned}
e^{\mathrm{j}\frac{2\pi k}{N}P} &= 1 && (17)\\
\frac{2\pi k}{N}P &= 2\pi m \quad \text{para algún } m \in \mathbb{Z} && (18)\\
kP &= mN && (19)
\end{aligned}$$

Sea $d = \gcd(k, N)$. Podemos escribir:

$$\begin{aligned}
k &= d \cdot k' && (20)\\
N &= d \cdot N' && (21)
\end{aligned}$$

donde $\gcd(k', N') = 1$. Sustituyendo en la ecuación (19):

$$\begin{aligned}
dk'P &= m \cdot dN' && (22)\\
k'P &= mN' && (23)
\end{aligned}$$

Como $\gcd(k', N') = 1$, recordemos que P es un valor entero. Para que esto se cumpla, m deberá ser múltiplo de k', por lo que definimos $m = k' \cdot q$, con lo que resulta:

$$k'P = k'qN' \tag{24}$$
$$P = qN' \tag{25}$$

Como buscamos el período mínimo, tendremos que q debe ser el menor valor posible, por lo que el menor valor positivo de P que satisface esta ecuación es:

$$P_{min} = N' = \frac{N}{d} = \frac{N}{\gcd(k, N)} \tag{26}$$

Conclusión: El período fundamental de la señal exponencial compleja es:

$$\boxed{N_p = \frac{N}{\gcd(k, N)}} \tag{27}$$

Observación: Este resultado tiene sentido intuitivo:

- Si $k = 0$, entonces $N_p = N$ (señal constante)
- Si $\gcd(k, N) = 1$, entonces $N_p = N$ (período máximo)
- Si $\gcd(k, N) = N$ (i.e., k es múltiplo de N), entonces $N_p = 1$ (señal constante)

2. Determine si las siguientes señales son periódicas. Si corresponde, especifique su período fundamental.

   1. $x_a(t) = 6\cos\left(9t + \frac{\pi}{3}\right)$.
   2. $x[n] = 6\cos\left(9n + \frac{\pi}{3}\right)$.
   3. $x[n] = \cos\left(\frac{n}{8}\right)\, \cos\left(\frac{\pi n}{8}\right)$.
   4. $x[n] = 2\, e^{j\left(\frac{\pi}{7}n - 3\right)}$.
   5. $x[n] = \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) - \sin\left(\frac{\pi n}{8}\right) + 3\cos\left(\frac{\pi n}{4} + \frac{\pi}{3}\right)$.

Solución:

Recordemos que para determinar si una señal es periódica, se deben aplicar los siguientes criterios:

- **Señales continuas:** $x_a(t) = A\cos(\omega t + \phi)$ es siempre periódica con período $T_0 = \frac{2\pi}{\omega}$.
- **Señales discretas:** $x[n] = A\cos(\omega n + \phi)$ es periódica si y solo si $\frac{\omega}{2\pi} \in \mathbb{Q}$.
- **Suma de señales periódicas:** Si $x_1[n]$ tiene período N_1 y $x_2[n]$ tiene período N_2, entonces $x[n] = x_1[n] + x_2[n]$ tiene período $N_0 = \text{lcm}(N_1, N_2)$. Donde lcm es el mínimo común múltiplo.

Resolución 2.1

Para la señal $x_a(t) = 6\cos\left(9t + \frac{\pi}{3}\right)$, que es continua, el período fundamental se calcula como:

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{9} \text{ segundos} \tag{28}$$

Es directo verificar que:

$$\begin{aligned} x_a(t + T_0) &= 6\cos\left(9\left(t + \frac{2\pi}{9}\right) + \frac{\pi}{3}\right) &(29)\\ &= 6\cos\left(9t + 2\pi + \frac{\pi}{3}\right) &(30)\\ &= 6\cos\left(9t + \frac{\pi}{3}\right) = x_a(t) &(31)\end{aligned}$$

La señal es periódica con período fundamental $\boxed{T_0 = \frac{2\pi}{9} \text{ s}}$.

Resolución 2.2

Para la señal discreta $x[n] = 6\cos\left(9n + \frac{\pi}{3}\right)$, aplicamos el criterio de periodicidad: $\frac{\omega}{2\pi} \in \mathbb{Q}$. Aquí $\omega = 9$, entonces:

$$\frac{\omega}{2\pi} = \frac{9}{2\pi} \tag{32}$$

Como π es irracional, la fracción $\frac{9}{2\pi}$ también es irracional. Por lo tanto:

$$\frac{9}{2\pi} \notin \mathbb{Q} \tag{33}$$

Por lo tanto, la señal $\boxed{\text{NO es periódica}}$.

Resolución 2.3

Para la señal $x[n] = \cos\left(\frac{n}{8}\right)\cos\left(\frac{\pi n}{8}\right)$, utilizamos la identidad trigonométrica:

$$\cos(A)\cos(B) = \frac{1}{2}[\cos(A - B) + \cos(A + B)] \tag{34}$$

Con $A = \frac{n}{8}$ y $B = \frac{\pi n}{8}$:

$$\begin{aligned} A - B &= \frac{(1-\pi)n}{8} &(35)\\ A + B &= \frac{(1+\pi)n}{8} &(36)\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$x[n] = \frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{(1-\pi)n}{8}\right) + \cos\left(\frac{(1+\pi)n}{8}\right)\right] \tag{37}$$

Para cada término, verificamos si $\frac{\omega}{2\pi} \in \mathbb{Q}$:

$$\text{Término 1:} \quad \frac{\omega_1}{2\pi} = \frac{(1-\pi)/8}{2\pi} = \frac{1-\pi}{16\pi} \notin \mathbb{Q} \tag{38}$$

$$\text{Término 2:} \quad \frac{\omega_2}{2\pi} = \frac{(1+\pi)/8}{2\pi} = \frac{1+\pi}{16\pi} \notin \mathbb{Q} \tag{39}$$

Como ambos términos son aperiódicos, la señal $\boxed{\text{NO es periódica}}$.

Resolución 2.4

Para la señal $x[n] = 2e^{j(\frac{\pi}{7}n-3)}$, la reescribimos como:

$$x[n] = 2e^{-j3} \cdot e^{j\frac{\pi}{7}n} \tag{40}$$

El factor $2e^{-j3}$ es constante y no afecta la periodicidad. Analizamos $e^{j\frac{\pi}{7}n}$. Para que sea periódica con período N, debe cumplirse:

$$e^{j\frac{\pi}{7}(n+N)} = e^{j\frac{\pi}{7}n} \tag{41}$$

Esto requiere que $e^{j\frac{\pi N}{7}} = 1$, es decir:

$$\frac{\pi N}{7} = 2\pi m \quad \text{para algún } m \in \mathbb{Z} \tag{42}$$

$$N = 14m \tag{43}$$

El menor valor positivo es $N_0 = 14$. Verificamos:

$$\frac{\omega}{2\pi} = \frac{\pi/7}{2\pi} = \frac{1}{14} \in \mathbb{Q} \tag{44}$$

La señal es periódica con período fundamental $\boxed{N_0 = 14}$.

Resolución 2.5

Para la señal $x[n] = \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) - \sin\left(\frac{\pi n}{8}\right) + 3\cos\left(\frac{\pi n}{4} + \frac{\pi}{3}\right)$, analizamos cada término:

Término 1: $\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)$ con $\omega_1 = \frac{\pi}{2}$

$$\frac{\omega_1}{2\pi} = \frac{1}{4} \in \mathbb{Q} \quad \Rightarrow \quad N_1 = 4 \tag{45}$$

Término 2: $-\sin\left(\frac{\pi n}{8}\right)$ con $\omega_2 = \frac{\pi}{8}$

$$\frac{\omega_2}{2\pi} = \frac{1}{16} \in \mathbb{Q} \quad \Rightarrow \quad N_2 = 16 \tag{46}$$

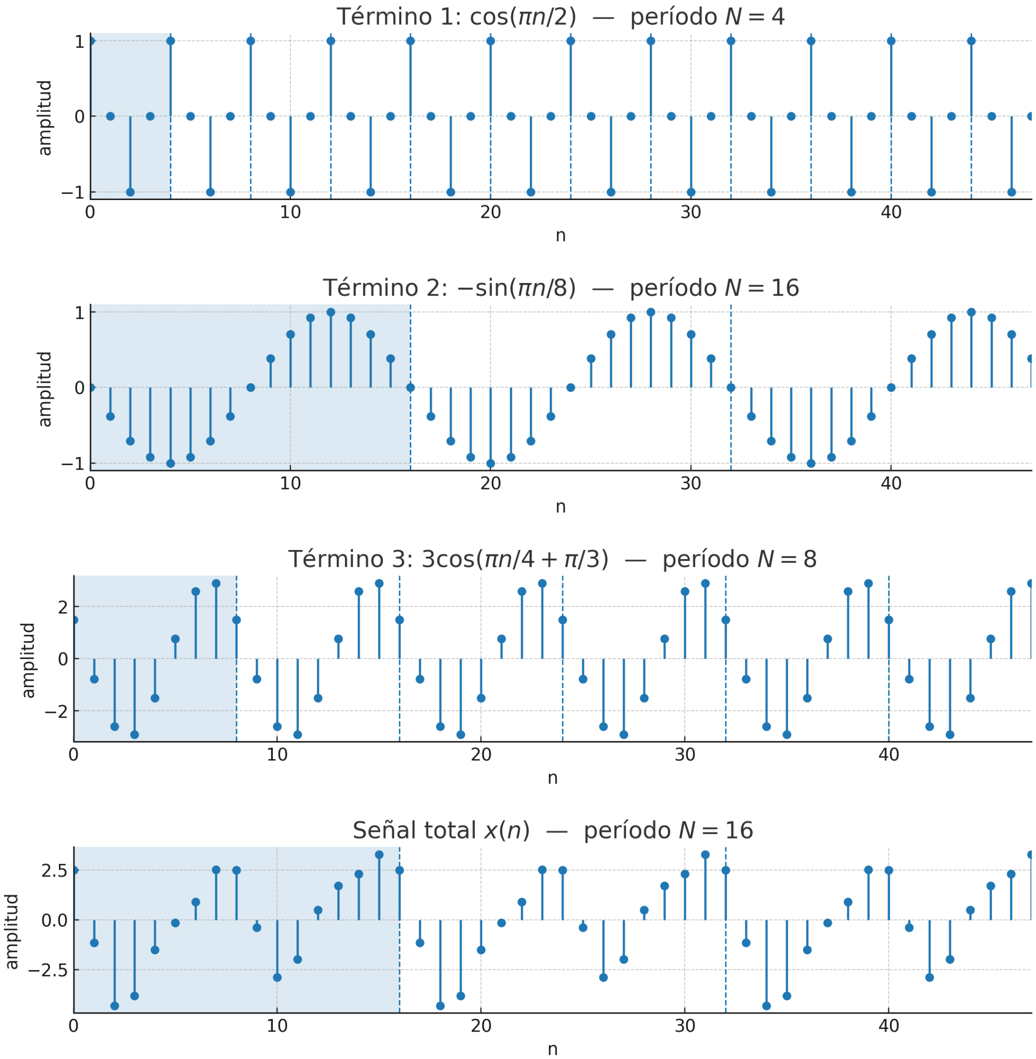
Término 3: $3\cos\left(\frac{\pi n}{4} + \frac{\pi}{3}\right)$ con $\omega_3 = \frac{\pi}{4}$

$$\frac{\omega_3}{2\pi} = \frac{1}{8} \in \mathbb{Q} \quad \Rightarrow \quad N_3 = 8 \tag{47}$$

Como todos los términos son periódicos, el período fundamental es:

$$N_0 = \text{lcm}(4, 16, 8) = 16 \tag{48}$$

La señal es periódica con período fundamental $\boxed{N_0 = 16}$. Esto se visualiza en el siguiente gráfico:



3. Considere la siguiente señal sinusoidal a tiempo continuo:

$$x_a(t) \;=\; \frac{7}{2}\,\sin(200\pi\, t), \qquad t \in \mathbb{R}. \tag{49}$$

   1. Bosqueje $x_a(t)$ para $0 \leq t \leq 30\,\text{ms}$.
   2. La señal $x_a(t)$ es muestreada a una tasa de $F_s = 300\,\text{Hz}$. Determine la frecuencia de la señal a tiempo discreto $x[n] = x_a(nT_s)$, donde $T_s = 1/F_s$. Muestre que $x[n]$ es periódica y determine su período fundamental.
   3. Bosqueje la señal $x[n]$ en el mismo diagrama donde bosquejó $x_a(t)$. ¿Cuál es el equivalente en milisegundos del período de $x[n]$?

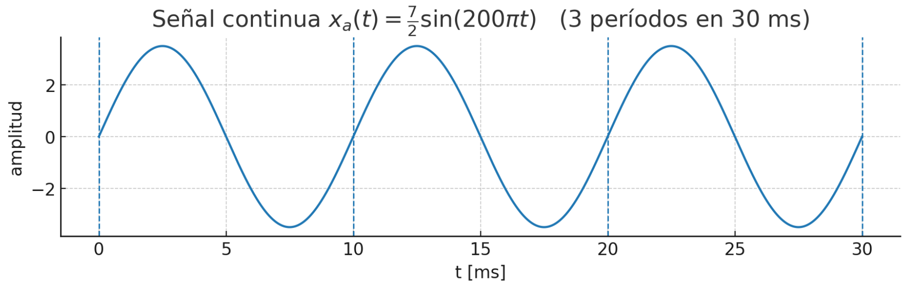
Solución:

Resolución 3.1

La señal $x_a(t) = \frac{7}{2}\sin(200\pi t)$ tiene frecuencia:

$$\omega = 200\pi \text{ rad/s}, \qquad f = \frac{\omega}{2\pi} = 100 \text{ Hz}, \qquad T = \frac{1}{f} = 0.01 \text{ s} = 10 \text{ ms}. \tag{50}$$

En 30 ms hay $30/10 = 3$ períodos completos; luego, el bosquejo de $x_a(t)$ es:



Resolución 3.2

Al muestrear con $F_s = 300$ Hz, donde $T_s = 1/F_s$, se obtiene:

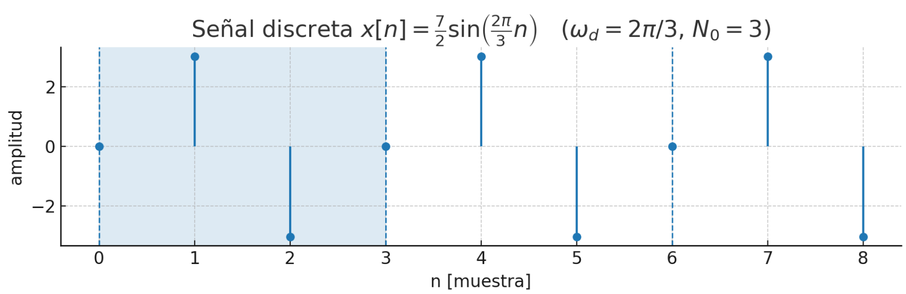
$$x[n] = x_a(nT_s) = \frac{7}{2}\sin\big(200\pi\, nT_s\big) = \frac{7}{2}\sin\left(200\pi\,\frac{n}{300}\right) = \frac{7}{2}\sin\left(\frac{2\pi}{3}\,n\right) \tag{51}$$

$$\Rightarrow \quad \omega_d = \frac{2\pi}{3} \text{ rad/muestra}, \quad f_d = \frac{\omega_d}{2\pi} = \frac{1}{3} \text{ ciclos/muestra}. \tag{52}$$

Como $f_d = \frac{1}{3} \in \mathbb{Q}$, $x[n]$ es periódica y su período fundamental es

$$N_0 = 3. \tag{53}$$

El muestreo se visualiza en el siguiente gráfico:

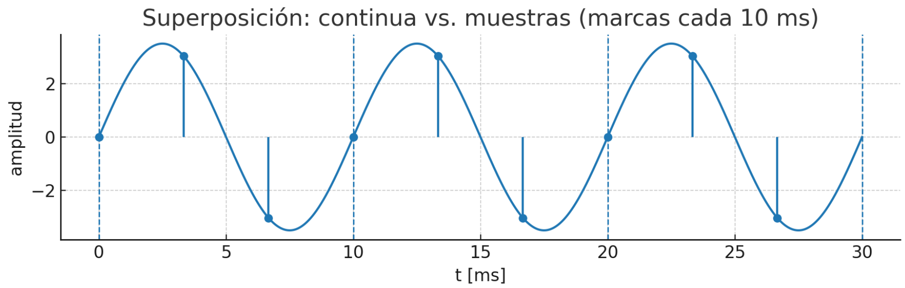


Resolución 3.3

El período de $x[n]$ en segundos es

$$T_x = N_0\, T_s = 3 \cdot \frac{1}{300} = 0.01 \text{ s} = 10 \text{ ms}. \tag{54}$$

Coincide con el período de la señal continua $x_a(t)$, y gráficamente se observa que ambos períodos son iguales.



4. Considere una señal continua $x_a(t)$ periódica con período fundamental T_a (en segundos).

   1. Si se muestrea la señal $x_a(t)$ a una tasa constante de F_s muestras por segundo, es decir, se induce la señal discreta
   $$x[n] \;=\; x_a\left(\frac{n}{F_s}\right), \qquad \forall\, n \in \mathbb{Z}, \tag{55}$$
   encuentre la(s) condición(es) que garantice(n) que $x[n]$ sea periódica y, con ello, determine su período fundamental.

   2. Con base en el punto anterior, justifique la siguiente afirmación: si $x[n]$ es periódica, entonces su período fundamental (equivalente en **segundos**) es un múltiplo de T_a.

Solución:

Resolución 4.1

Dada una señal continua $x_a(t)$ periódica con período fundamental T_a, al muestrearla obtenemos:

$$x[n] = x_a\left(\frac{n}{F_s}\right) \tag{56}$$

Para que $x[n]$ sea periódica con período N, debe cumplirse:

$$x[n+N] = x[n] \quad \forall n \in \mathbb{Z} \tag{57}$$

Sustituyendo la definición de $x[n]$:

$$x[n+N] = x_a\left(\frac{n+N}{F_s}\right) \tag{58}$$
$$= x_a\left(\frac{n}{F_s} + \frac{N}{F_s}\right) \tag{59}$$

Para que esto sea igual a $x[n] = x_a\left(\frac{n}{F_s}\right)$, y dado que $x_a(t)$ es periódica con período T_a, necesitamos que:

$$\frac{N}{F_s} = mT_a \quad \text{para algún } m \in \mathbb{Z}^+ \tag{60}$$

Esto da como resultado:

$$N = mF_sT_a \tag{61}$$

Para que $x[n]$ sea periódica, N debe ser un entero positivo, por lo tanto:

$$\boxed{F_sT_a \in \mathbb{Q}} \tag{62}$$

Sea $F_sT_a = \frac{P}{Q}$ donde $P, Q \in \mathbb{Z}^+$ y $\gcd(P, Q) = 1$ (fracción irreducible).

Entonces $N = m\frac{P}{Q}$. Para que N sea entero, m debe ser múltiplo de Q. El menor valor positivo es $m = Q$, que da:

$$\boxed{N_0 = Q \cdot \frac{P}{Q} = P} \tag{63}$$

Si $F_sT_a = \frac{P}{Q}$ (irreducible), entonces $N_0 = P$.

Resolución 4.2

El período de $x[n]$ en segundos es:

$$T_x = \frac{N_0}{F_s} \tag{64}$$

Sustituyendo $N_0 = P$ y usando que $F_sT_a = \frac{P}{Q}$, obtenemos $F_s = \frac{P}{QT_a}$:

$$T_x = \frac{P}{\frac{P}{QT_a}} = \frac{P \cdot QT_a}{P} = QT_a \tag{65}$$

Como $Q \in \mathbb{Z}^+$, tenemos que:

$$\boxed{T_x = QT_a} \tag{66}$$

Por lo tanto, el período fundamental de $x[n]$ en segundos es siempre un múltiplo entero positivo del período fundamental T_a de la señal continua original. Esto significa que la señal muestreada puede tener un período temporal igual o mayor que la señal continua original, pero nunca menor. El factor Q depende de la relación entre la frecuencia de muestreo y la frecuencia de la señal.