Ingeniería Eléctrica
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

Análisis de señales

EL3203

Auxiliar 7 - Teorema del Muestreo

Prof Jorge Silva.
Prof Auxiliar Erik Sáez Aravena.

$\mathcal{F}$

1 Resumen

1. Notación y Definiciones

Algunas definiciones y notaciones clave para el análisis de señales muestreadas: **Señales:**

- $x_a(t)$: señal analógica (tiempo continuo)
- $x(n)$: señal discreta (tiempo discreto), obtenida muestreando $x_a(t)$
- Relación de muestreo: $x(n) = x_a(nT_s)$, donde $n \in \mathbb{Z}$

Parámetros de muestreo:

- T_s: período de muestreo
- $F_s = T_s^{-1}$: frecuencia de muestreo
- B: ancho de banda de la señal (frecuencia máxima presente)

Frecuencias:

- F: frecuencia continua (Hz)
- $f = \frac{F}{F_s}$: frecuencia normalizada (adimensional)
- $\omega = 2\pi f$: frecuencia angular normalizada (radianes)

2. Transformadas de Fourier

Se definen las siguientes transformadas de Fourier para señales en tiempo continuo y discreto: **Transformada de Fourier en tiempo continuo:**

$$X_a(F) = \int_{-\infty}^{\infty} x_a(t) e^{-j2\pi Ft} dt \tag{1}$$

$$x_a(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X_a(F) e^{j2\pi Ft} dF \tag{2}$$

Transformada de Fourier en tiempo discreto:

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n} \tag{3}$$

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\omega) e^{j\omega n} d\omega \tag{4}$$

Nota: $X(\omega)$ es periódica con período 2π, o equivalentemente, $X(2\pi f)$ es periódica con período 1.

3. Teorema del Muestreo

Espectro de la señal muestreada:

Cuando se muestrea una señal analógica $x_a(t)$ con frecuencia F_s, el espectro de la señal discreta resultante $x(n)$ está dado por:

$$X(2\pi f) = F_s \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(fF_s + kF_s) = F_s \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(F + kF_s) \tag{5}$$

donde $F = fF_s$ es la frecuencia continua.

4. Condición de Nyquist (Criterio de Muestreo)

Para recuperar perfectamente la señal analógica original $x_a(t)$ a partir de sus muestras $x(n)$, debe cumplirse:

$$\boxed{F_s \geq 2B} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{T_s \leq \frac{1}{2B}} \tag{6}$$

donde B es el ancho de banda de la señal (frecuencia máxima presente).
Frecuencia de Nyquist: $F_{\text{Nyquist}} = 2B$ es la frecuencia mínima de muestreo requerida.

- Si $F_s \geq 2B$: No hay aliasing, las réplicas espectrales no se superponen, y el espectro se simplifica a:

$$X(2\pi f) = F_s X_a(f F_s), \quad f \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \tag{7}$$

- Si $F_s < 2B$: Hay **aliasing**, las réplicas espectrales se superponen, y la información original se pierde irreversiblemente.

5. Reconstrucción de la Señal (Fórmula de Interpolación de Shannon)

Cuando se cumple la condición de Nyquist, la señal original puede reconstruirse perfectamente mediante:

$$x_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \text{sinc}\left(\pi \frac{t - nT_s}{T_s}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT_s) \text{sinc}\left(\pi F_s (t - nT_s)\right) \tag{8}$$

donde la función sinc normalizada se define como:

$$\text{sinc}(\pi x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} \tag{9}$$

- Cada muestra $x(nT_s)$ contribuye con una función sinc centrada en $t = nT_s$
- Las funciones sinc tienen la propiedad de que $\text{sinc}(0) = 1$ y $\text{sinc}(n\pi) = 0$ para $n \neq 0$
- La reconstrucción es equivalente a pasar las muestras por un filtro pasa-bajos ideal con frecuencia de corte $F_s/2$

6. Recursos Interactivos

Para una mejor comprensión visual del teorema del muestreo y sus implicaciones, se recomiendan los siguientes recursos interactivos:

- **Interpolación y Muestreo:**
  `https://cs1230.graphics/demos/scaling/ip.html`
- **Visualización del Teorema del Muestreo:**
  `https://resources.nerdfirst.net/sampling.html`

Estos sitios permiten experimentar de forma interactiva con diferentes frecuencias de muestreo y observar en tiempo real los efectos del aliasing y la reconstrucción de señales.

1. Sea $x_a(t)$ una señal analógica de banda limitada con transformada de Fourier $X_a(F)$ y período de muestreo $T_s = \frac{1}{F_s}$. Se define la señal discreta muestreada como $x(n) = x_a(nT_s)$ para $n \in \mathbb{Z}$.
   (a) Demuestre que la transformada de Fourier discreta $X(\omega)$ de la señal muestreada puede escribirse en términos de la transformada continua como:
   $$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT_s)e^{-j\omega n} \tag{10}$$
   y que esta se relaciona con $X_a(F)$ mediante:
   $$X(2\pi f) = F_s \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(fF_s + kF_s) \tag{11}$$
   donde $f = \frac{F}{F_s}$ es la frecuencia normalizada.
   (b) Para la señal anterior, demuestre que bajo la condición de muestreo de Nyquist ($F_s \geq 2B$, donde B es el ancho de banda de la señal), la relación se simplifica a:
   $$X(2\pi f) = F_s X_a(fF_s), \quad \text{para } f \in (-1/2, 1/2] \tag{28}$$
   y que por lo tanto es posible recuperar la señal original mediante:
   $$x_a(t) = T_s \sum_{k\in\mathbb{Z}} x_a(kT_s)\operatorname{sinc}\left(\pi \frac{t - kT_s}{T_s}\right) \tag{29}$$

2. Considere una señal $x_a(t)$ con transformada de Fourier como se muestra en la figura

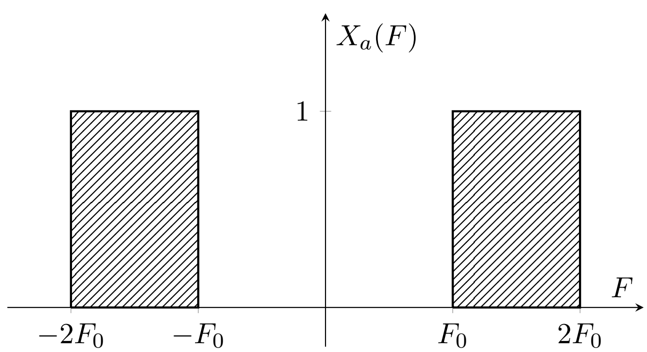

Figura 1: Transformada de Fourier de la señal $x_a(t)$.

   (a) Considere un proceso de muestreo donde $F_s = 4F_0$. Encuentre una expresión para $x(n)$. **Indicación:** Utilice la relación entre $X_a(F)$ y $X(2\pi f) = \text{DTFT}\{x(n)\}$ dadas por el teorema del muestreo.
   (b) Repita el análisis del punto anterior si $F_s = 3F_0$ y comente si es posible recuperar $x_a(t)$ a partir de $x(n)$