Auxiliar #4

[EL3204] Controlabilidad, observabilidad y control por retroalimentación de estados

Erik Saez A.

Department of Electrical Engineering
Universidad de Chile

September 10, 2025

erik.saez@ug.uchile.cl ErikSaezA/Auxiliares Discord

Contenidos

Fig.: Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas , Universidad de Chile.

Estabilidad: BIBS y BIBO

¿Qué miden?

- **BIBS** (bounded–input bounded–state): con entradas y C.I. acotadas, el *estado* permanece acotado (estabilidad interna).
- **BIBO** (bounded–input bounded–output): con entradas acotadas, la *salida* permanece acotada (estabilidad externa).

Criterios prácticos (LTI)

- **BIBS**: continuo $\Rightarrow \mathrm{Re}\{\lambda_i(A)\} < 0$; discreto $\Rightarrow |\lambda_i(A)| < 1$.
- **BIBO** (SISO): continuo $\int_0^\infty |h(t)|\, dt < \infty \Leftrightarrow$ polos de $H(s)$ en $\mathrm{Re}\, s < 0$;
  discreto $\sum_{k\geq 0} |h[k]| < \infty \Leftrightarrow$ polos de $H(z)$ dentro del disco unidad.

Relación y matices

- **BIBS** $\Rightarrow$ **BIBO**. Si la realización es *mínima* (controlable y observable), **BIBS** $\Leftrightarrow$ **BIBO**.
- La BIBO depende de $H(\cdot)$ (por C, D); la BIBS depende solo de A.
- En la *frontera* (autovalores en eje imaginario o $|z|=1$) puede haber estabilidad *marginal* (no BIBO si hay polos repetidos).

Controlabilidad y observabilidad: qué, cómo y para qué

¿Qué miden?

Controlabilidad: alcanzar cualquier estado con entradas adecuadas.
Observabilidad: reconstruir el estado a partir de $u(\cdot)$ y $y(\cdot)$.

Kalman (criterio de rango)

$$\mathcal{C} = [\, B \ AB \ \cdots \ A^{n-1}B \,], \quad \text{rank}(\mathcal{C})=n \iff \text{controlable}, \tag{1}$$

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}, \quad \text{rank}(\mathcal{O})=n \iff \text{observable}. \tag{2}$$

Gramianos (continuo, A Hurwitz)

$$AW_c + W_cA^\top + BB^\top = 0, \quad W_c \succ 0 \iff \text{controlable}, \tag{3}$$

$$A^\top W_o + W_oA + C^\top C = 0, \quad W_o \succ 0 \iff \text{observable}. \tag{4}$$

Implicancias prácticas

- **Realización mínima**: controlable y observable $\Rightarrow$ sin modos ocultos.
- **Ubicación de polos** (REN(C)): factible $\iff$ controlable; **observador** (RENC): factible $\iff$ observable.
- Modos incontrolables no pueden estabilizarse; modos inobservables no aparecen en y.

Control por retroalimentación de estados

¿Qué es y para qué sirve?

El **control por retroalimentación** (o *feedback*) permite determinar qué debería ocurrir en base al estado actual del sistema. Se utiliza el estado actual para modificar la entrada al sistema, considerándola dentro de $u(t)$:

$$u = -Kx + r$$

donde K es la matriz de ganancia de retroalimentación y r es la señal de referencia.

Sistema en lazo cerrado

Con la retroalimentación $u = -Kx + r$:

$$\dot{x} = Ax + Bu = (A - BK)x + Br \tag{5}$$

$$\tilde{A} := A - BK \tag{6}$$

La matriz de transición de estados es:

$$\Phi(t_0, t) = e^{\tilde{A}(t-t_0)}$$

Los autovalores de $\tilde{A}$ dominan la respuesta del sistema.

Teorema fundamental

Teorema: Si (A, B) es controlable, entonces $\exists K$ tal que $E = A - BK$ tiene espectro arbitrario.
Esto significa que podemos ubicar los polos del sistema en lazo cerrado en cualquier posición deseada del plano complejo.

Diagrama de bloques: Control por retroalimentación de estados

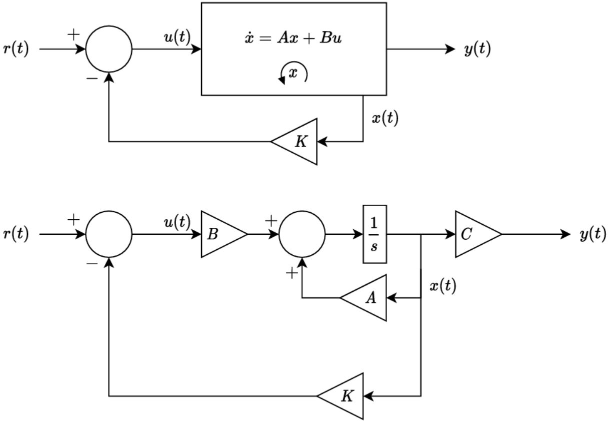


Fig.: Representaciones del sistema con retroalimentación de estados.

Descripción del diagrama

Diagrama superior: Representación compacta

- $r(t)$: señal de referencia
- $u(t) = -Kx(t) + r(t)$: ley de control
- K: matriz de ganancia de retroalimentación
- El estado $x(t)$ se retroalimenta para formar la entrada de control

Diagrama inferior: Representación detallada

- Muestra explícitamente las matrices A, B, C
- Integrador $\frac{1}{s}$ para obtener $x(t)$ desde $\dot{x}(t)$
- Retroalimentación completa del vector de estados

Pregunta #1

Enunciado Pregunta #1

Considere el sistema en tiempo continuo dado por

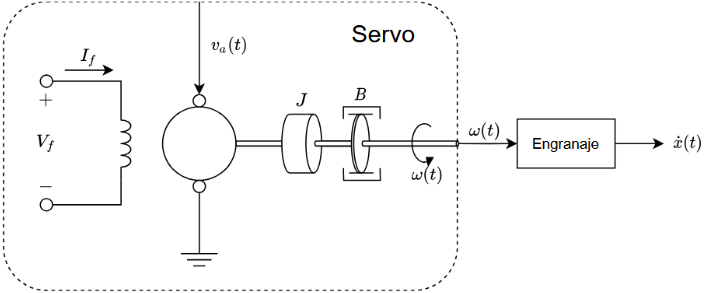
$$\ddot{y}(t) - 2\dot{y}(t) - 8y(t) = 3\dot{u}(t) + 3u(t), \tag{7}$$

donde $u(t)$ es la entrada y $y(t)$ la salida.

1. Obtenga la función de transferencia $G(s) = \dfrac{Y(s)}{U(s)}$ del sistema (condiciones iniciales nulas).
2. A partir de $G(s)$, proponga una representación en espacio de estados ($\dot{x} = Ax + Bu,\ y = Cx + Du$) en forma controlable.
3. Determine si el sistema es controlable y observable. Justifique mediante los rangos de las matrices de controlabilidad y observabilidad.
4. Diseñe un controlador por realimentación de estados $u = -Kx + r$ que ubique los polos a lazo cerrado en $s = -5$ y $s = -3$. Indique el vector K.
5. Suponga ahora que sólo se mide la salida $y(t)$ y no el estado completo. Diseñe un compensador dinámico (controlador con observador de estado) que mantenga los polos de lazo cerrado en -5 y -3. Indique los polos del observador y el vector de ganancias L.

Pregunta #2

Considere un motor eléctrico DC que impulsa un carrito, como se muestra en la figura.



Suponga que los parámetros del sistema son:

$$k_m = 1 \text{ Nm/A}, \quad k_e = 1 \text{ Vs}, \quad R_a = 0.01\,\Omega, \tag{8}$$
$$L_a = 1\,\text{H}, \quad J = 0.1\,\text{kgm}^2, \quad B = 0.2\,\text{Nms}, \tag{9}$$
$$k_g = 0.01\,\text{m/rad}. \tag{10}$$

Pregunta #2 (continuación)

Enunciado Pregunta #2 (continuación)

1. Formule un modelo dinámico del sistema en variables de estado, indicando claramente las hipótesis simplificatorias.
2. Encuentre la función de transferencia desde el voltaje de armadura $v_a(t)$ hasta la velocidad lineal $\dot{z}(t)$ del carrito.
3. Determine si el sistema es estable (según los polos de la función de transferencia / matriz A).
4. Obtenga la respuesta al impulso de la salida $\dot{z}(t)$.
5. Exprese la respuesta del sistema en un tiempo arbitrario t para condiciones iniciales y entrada arbitraria.
6. Determine si el sistema es completamente controlable y observable.
7. En caso de ser observable, diseñe un observador cuyos polos se ubiquen en -10 y -5.