Ingeniería Eléctrica
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS UNIVERSIDAD DE CHILE

Análisis de Sistemas Dinámicos y Estimación

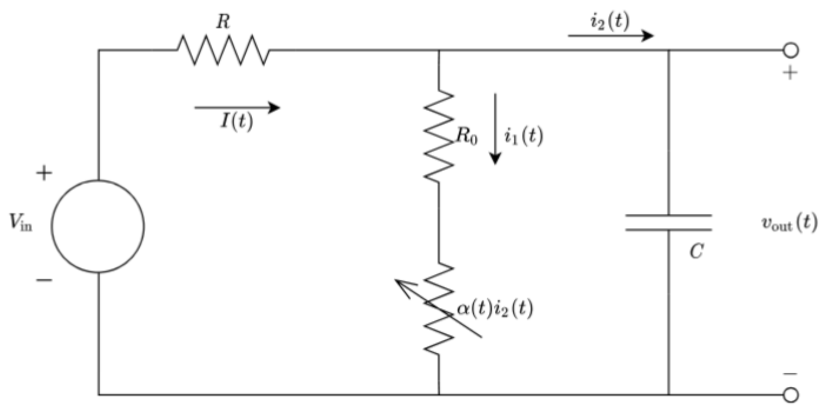
(EL3204-1)

Clase auxiliar 2

Prof. Marcos Orchard - Sebastián Espinosa.

Prof. Aux. Erik Sáez

1. Considere el siguiente circuito eléctrico, donde $\alpha(t)i_2(t)$ corresponde al valor de la resistencia eléctrica de un potenciómetro, cuyo valor depende tanto de $\alpha(t)$ como de la corriente que circula por el condensador, y $v_{out}(t)$ (voltaje en el condensador) se mide con un voltímetro.



   1. Establezca claramente el listado de hipótesis simplificatorias que permitan establecer un modelo matemático válido para este sistema. Indique las condiciones de borde y/o iniciales necesarias.
   2. Formule un modelo para el sistema en ecuaciones de estado.
   3. Caracterice completamente el modelo utilizando todos los puntos de vista descritos en clases. Clasifique todas las variables del sistema.
   4. Encuentre estado(s) cero, estado(s) de equilibrio y el estado tierra (de existir).
   5. Linealice el sistema en torno al (los) estado(s) de equilibrio encontrados.

Solución:

Resolución 1.1

Para poder formular un modelo del sistema, debemos primeramente considerar hipótesis simplificatorias que permitan simplificar el problema o poner límites sobre las distintas restricciones del mismo, por lo tanto:

- Los parámetros V_{in}, R, R_0, C son constantes del sistema.
- El circuito opera en régimen de *parámetros concentrados*.

- Se desprecia la resistencia interna del voltímetro.
- No se consideran efectos parásitos ni ruidos.
- ...

Por otra parte, por conocimiento de circuitos se sabe que la condición inicial necesaria para determinar el estado del sistema corresponde al voltaje inicial del condensador $v_c(0)$.

Resolución 1.2

Primero se aplica la Ley de Corrientes de Kirchhoff (LCK) en el nodo superior, con lo que se tiene $I(t) = i_1(t) + i_2(t)$. Además, utilizando la Ley de Voltajes de Kirchhoff (LVK) en la malla izquierda se obtiene,

$$V_{in} = RI + v_c \; = \; Ri_1 + Ri_2 + v_c. \tag{1}$$

Recordando la ecuación del condensador, $i_C = C\,\dot{v}_c$, e identificando $i_C = i_2$,

$$V_{in} = Ri_1 + RC\,\dot{v}_c + v_c. \tag{2}$$

En la rama de la derecha luego se tiene:

$$v_c = R_0 i_1 + (\alpha\, i_2) i_1 = R_0 i_1 + \alpha C \dot{v}_c\, i_1 = \big(R_0 + \alpha C \dot{v}_c\big) i_1, \tag{3}$$

Despejando,

$$i_1 = \frac{v_c}{R_0 + \alpha C \dot{v}_c}. \tag{4}$$

Sustituyendo la ecuación (4) en la ecuación (2) con el motivo de dejar todo en función de una única variable v_c, luego se llega a:

$$V_{in} = \frac{R\,v_c}{R_0 + \alpha C \dot{v}_c} + RC\,\dot{v}_c + v_c. \tag{5}$$

Reordenando y desarrollando,

$$R_0 V_{in} + \alpha C V_{in} \dot{v}_c = R v_c + R_0 RC \dot{v}_c + \alpha RC^2 \dot{v}_c^2 + R_0 v_c + \alpha C v_c \dot{v}_c, \tag{6}$$

lo que lleva a la ecuación cuadrática en $\dot{v}_c$:

$$\alpha RC^2 \dot{v}_c^2 + \big(R_0 RC + \alpha C(v_c - V_{in})\big)\dot{v}_c + (R + R_0) v_c - R_0 V_{in} = 0. \tag{7}$$

Resolviendo para $\dot{v}_c$,

$$\dot{v}_c = \frac{-\big(R_0 RC + \alpha C(v_c - V_{in})\big) \pm \sqrt{S}}{2\alpha RC^2}, \tag{8}$$

donde, por conveniencia,

$$\begin{aligned} S = {} & R_0^2 R^2 C^2 + 2\alpha R_0 RC^2 (v_c - V_{in}) + \alpha^2 C^2 (v_c - V_{in})^2 \\ & - 4\alpha RC^2 (R + R_0) v_c + 4 R_0 RC^2 V_{in}. \end{aligned} \tag{9}$$

Alternativamente, dividiendo por RC,

$$\begin{aligned} \dot{v}_c = {} & \frac{V_{in} - v_c}{2RC} - \frac{R_0}{2\alpha C} \\ & + \frac{1}{2\alpha C}\sqrt{R_0^2 + \frac{2\alpha R_0}{R}(v_c - V_{in}) + \frac{\alpha^2}{R^2}(v_c - V_{in})^2 - \frac{4\alpha(R + R_0)}{R} v_c + \frac{4R_0}{R} V_{in}}. \end{aligned} \tag{10}$$

Con lo que se obtiene finalmente la ecuación diferencial que caracteriza el sistema, la cual es evidentemente **no lineal**.

Resolución 1.3

Existen diversas características con las que podemos clasificar los modelos, algunas de estas son las siguientes:

Característica	**Clasificación**
Origen	Fenómeno *artificial* (sistema eléctrico construido)
Naturaleza	*Determinístico* (no se consideran ruidos $w(t)$ o $v(t)$)
Número de variables	*Monovariable* (un estado)
Continuidad	*Continuo* (aparece $\dot{v}_c$)
Comportamiento espacial	*Parámetros concentrados*
Comportamiento temporal	*Invariante en el tiempo*
Linealidad	*No lineal* (por la dependencia racional en $\dot{v}_c$)
Realizabilidad	*Causal y realizable*

Luego deberemos definir las variables del sistema, las cuales se pueden definir de la siguiente manera:

- Estado: $x(t) = v_c(t)$.
- Salida: $y(t) = v_{out}(t) = v_c(t) = x(t)$.
- Entrada: $u(t) = \alpha(t)$.

Es importante recordar que la elección de la salida es, por lo general, arbitraria a menos que se indique específicamente en el enunciado.

Resolución 1.4

A continuación se analizan los diferentes estados del sistema:

- **Estado cero.** Recordemos que un estado cero $x_0 \in \Sigma$ de un sistema es tal que la salida $y(t)$ cumple que $y(t) = \overline{A}(x_0, 0) = 0$. En términos sencillos, es una condición inicial tal que, para entrada cero, la salida es cero. Como $y = x$, el estado cero es

$$x_0 = 0. \tag{11}$$

- **Estado de equilibrio.** Recordemos que un estado de equilibrio $x_e \in \Sigma$ es tal que $x_e = \overline{B}(x_e, 0)$. Esto significa que bajo entrada cero, si el sistema está en estado de equilibrio entonces se quedará por siempre en este. Para encontrarlo, buscamos x_e tal que $\dot{x} = 0$. Evaluando la condición en la ecuación cuadrática se obtiene

$$(R + R_0)\, x_e - R_0 V_{in} = 0 \quad \Rightarrow \quad x_e = \frac{R_0}{R + R_0} V_{in}. \tag{12}$$

- **Estado tierra.** Recordemos que un estado tierra $x_t \in \Sigma$ de un sistema es tal que $\forall x_0 \in \Sigma, \lim_{t\to\infty} \overline{B}(x_0, 0) = x_t$. El estado tierra es tal que, para toda condición inicial y con entrada cero, el sistema converge al estado tierra. Cuando el condensador está completamente cargado (tiempo suficientemente grande), no conduce corriente y el circuito equivale a un divisor de tensión. Por lo tanto,

$$x_t = \frac{R_0}{R + R_0} V_{in}. \tag{13}$$

Resolución 1.5

El sistema linealizado alrededor del punto de operación $(\bar{x}, \bar{u})$ viene dado por

$$\dot{\tilde{x}} = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\bar{x},\bar{u}} \tilde{x} + \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{\bar{x},\bar{u}} \tilde{u}, \tag{14}$$

$$\tilde{y} = \left.\frac{\partial g}{\partial x}\right|_{\bar{x},\bar{u}} \tilde{x} + \left.\frac{\partial g}{\partial u}\right|_{\bar{x},\bar{u}} \tilde{u}, \tag{15}$$

donde, a partir de la ecuación anterior, definimos

$$f(v_c, \alpha) = \frac{V_{in} - v_c}{2RC} - \frac{R_0}{2\alpha C} + \frac{1}{2\alpha C}\sqrt{R_0^2 + \frac{2\alpha R_0}{R}(v_c - V_{in}) + \frac{\alpha^2}{R^2}(v_c - V_{in})^2 - \frac{4\alpha(R + R_0)}{R}v_c + \frac{4R_0}{R}V_{in}}, \tag{16}$$

$$g(v_c, \alpha) = v_c. \tag{17}$$

Derivadas parciales:

$$\frac{\partial f}{\partial v_c} = -\frac{1}{2RC} - \frac{1}{4\alpha C\sqrt{S}}\left[\frac{2\alpha R_0}{R} + \frac{2\alpha^2}{R^2}(v_c - V_{in}) - \frac{4\alpha(R + R_0)}{R}\right] \tag{18}$$

$$= -\frac{1}{2RC} - \frac{1}{2RC\sqrt{S}}\left[R_0 + \frac{\alpha}{R}(v_c - V_{in}) - 2(R + R_0)\right], \tag{19}$$

donde

$$S = R_0^2 + \frac{2\alpha R_0}{R}(v_c - V_{in}) + \frac{\alpha^2}{R^2}(v_c - V_{in})^2 - \frac{4\alpha(R + R_0)}{R}v_c + \frac{4R_0}{R}V_{in}. \tag{20}$$

Análogamente,

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha} = \frac{R_0}{2\alpha^2 C} - \frac{1}{2\alpha^2 C}\sqrt{S} + \frac{1}{4C\sqrt{S}}\frac{\partial S}{\partial \alpha}, \tag{21}$$

donde

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha} = \frac{2R_0}{R}(v_c - V_{in}) + \frac{2\alpha}{R^2}(v_c - V_{in})^2 - \frac{4(R + R_0)}{R}v_c. \tag{22}$$

Para la salida,

$$\frac{\partial g}{\partial v_c} = 1, \qquad \frac{\partial g}{\partial \alpha} = 0. \tag{23}$$

Elegimos el punto de operación $\bar{x} = \bar{v} = \dfrac{R_0}{R + R_0}V_{in},\ \bar{u} = \bar{\alpha} = 1.$ Evaluando,

$$A = \left.\frac{\partial f}{\partial v_c}\right|_{\bar{v},\,\bar{\alpha}}, \qquad B = \left.\frac{\partial f}{\partial \alpha}\right|_{\bar{v},\,\bar{\alpha}}, \qquad C = 1, \qquad D = 0. \tag{24}$$

Finalmente, el sistema linealizado en incrementos $\tilde{x} := x - \bar{x}$, $\tilde{u} := u - \bar{u}$ queda

$$\dot{\tilde{x}} = A\,\tilde{x} + B\,\tilde{u}, \tag{25}$$

$$\tilde{y} = \tilde{x}. \tag{26}$$

2. Considere el sistema linealizado del auxiliar anterior, modelado por la siguiente ecuación diferencial:

$$\ddot{\theta}(t) = \frac{g}{l}\theta(t) + \frac{1}{l}u(t) \tag{27}$$

1. Descomponer la salida como la suma de la respuesta a condiciones iniciales nulas y la respuesta a entrada nula en el dominio de Laplace.
2. Obtener la función de transferencia del sistema y encontrar la respuesta al impulso con condiciones iniciales nulas en el dominio del tiempo.
3. Obtener la respuesta a condiciones iniciales nulas en el dominio del tiempo, y expresar la respuesta para una entrada y condiciones iniciales arbitrarias.
4. (Propuesta) Encontrar la salida cuando la entrada es un escalón unitario.

Solución:

Resolución 2.1

Para hacer la descomposición, trabajemos en el dominio de Laplace. Aplicando la transformada de Laplace sobre la EDO del sistema, considerando que:

$$L\left\{\ddot{\theta}(t)\right\} = s^2\Theta(s) - s\theta(0) - \dot{\theta}(0) \tag{28}$$

tenemos

$$s^2\Theta(s) - s\theta(0) - \dot{\theta}(0) = \frac{g}{l}\Theta(s) + \frac{1}{l}U(s) \tag{29}$$

Reordenando para despejar el término de la salida, tenemos

$$\Theta(s) = \frac{s\theta(0) + \dot{\theta}(0)}{s^2 - \frac{g}{l}} + \frac{1}{s^2 - \frac{g}{l}}\frac{1}{l}U(s) \tag{30}$$

donde podemos ver que la salida $\Theta(s)$ está escrita como la suma de dos términos. El primero de ellos corresponde a

$$\Theta_0(s) = \frac{s\theta(0) + \dot{\theta}(0)}{s^2 - \frac{g}{l}}, \tag{31}$$

el cual está asociado a la salida cuando se tienen condiciones iniciales arbitrarias pero entrada nula, y corresponde a la RENC del sistema (Respuesta a Entrada Nula o Cero). El segundo término es

$$\Theta_s(s) = \frac{1}{l}\frac{1}{s^2 - \frac{g}{l}}U(s), \tag{32}$$

y corresponde a la salida en el caso donde utilizamos condiciones iniciales nulas, pero una entrada arbitraria, y es denominada RESC (Respuesta a Estado Cero). Así, podemos ver que

$$\Theta(s) = \Theta_0(s) + \Theta_s(s), \tag{33}$$

por lo que la salida se puede escribir como la suma de RENC y RESC.

Resolución 2.2

La noción de función de transferencia está ligada estrechamente con la RESC, ya que para obtener la función de transferencia, asumimos condiciones iniciales nulas y una entrada arbitraria. Haciendo estos supuestos, tenemos:

$$\Theta(s) = \frac{1}{l}\frac{1}{s^2 - \frac{g}{l}}U(s) \tag{34}$$

Luego, la función de transferencia $H(s)$ del sistema se define como:

$$H(s) = \frac{\Theta(s)}{U(s)}, \tag{35}$$

donde es importante notar que utilizamos la RESC para definirla, dado que como se mencionó anteriormente, asumimos condiciones iniciales nulas, por lo que podemos ver que se tiene

$$H(s) = \frac{1}{l}\frac{1}{s^2 - \frac{g}{l}}. \tag{36}$$

Definiendo $\omega_0 := \sqrt{\frac{g}{l}}$, tenemos

$$H(s) = \frac{1}{l}\frac{1}{(s+\omega_0)(s-\omega_0)}. \tag{37}$$

Resolución 2.3

Luego, para obtener la respuesta al impulso en el dominio del tiempo $h(t)$, debemos considerar que $L\left\{\delta(t)\right\} = 1$, por lo que si la entrada es un impulso $u(t) = \delta(t)$, entonces $U(s) = 1$. Así, dado que la función de transferencia es

$$H(s) = \frac{\Theta(s)}{U(s)}, \tag{38}$$

si $U(s) = 1$, podemos ver que $H(s)$ correspondería a la respuesta al impulso en el dominio de Laplace, por lo que, para obtenerla en el dominio del tiempo, bastaría aplicar la transformada inversa a la función de transferencia, tal que:

$$h(t) = L^{-1}\{H(s)\}. \tag{39}$$

Resolución 1.4

Para hacerlo, debemos tener en mente que:

$$L\left\{e^{\alpha t}\right\} = \frac{1}{s-\alpha}. \tag{40}$$

Por otra parte, sabemos que:

$$H(s) = \frac{1}{l}\frac{1}{(s+\omega_0)(s-\omega_0)}, \tag{41}$$

por lo que podemos aplicar una descomposición en fracciones parciales para expresar $H(s)$ como:

$$H(s) = \frac{\alpha}{s+\omega_0} + \frac{\beta}{s-\omega_0}. \tag{42}$$

Luego podríamos aplicar la inversa de forma sencilla. Para esto, encontremos α y β. Si comenzamos intentando encontrar α, notemos que en la ecuación (16) podemos multiplicar por $s+\omega_0$ para obtener:

$$H(s)(s+\omega_0) = \alpha + \frac{\beta}{s-\omega_0}(s+\omega_0), \tag{43}$$

donde podemos ver que el término $\frac{\beta}{s-\omega_0}$ no nos permite obtener α directamente. Sin embargo, notemos que podemos evaluar esta expresión en $s=-\omega_0$, de donde tendríamos:

$$H(s)(s+\omega_0)\Big|_{s=-\omega_0} = \alpha + \frac{\beta}{s-\omega_0}(s+\omega_0)\Big|_{s=-\omega_0} = 0. \tag{44}$$

Por lo que tenemos:

$$\alpha = H(s)(s+\omega_0)\Big|_{s=-\omega_0}. \tag{45}$$

Equivalentemente, se puede realizar un desarrollo análogo para obtener β, de donde se obtiene:

$$\beta = H(s)(s-\omega_0)\Big|_{s=\omega_0}. \tag{46}$$

Utilizando estas expresiones para calcular los coeficientes, tenemos:

$$\alpha = H(s)(s+\omega_0)\Big|_{s=-\omega_0} = \frac{1}{l}\frac{1}{(s+\omega_0)(s-\omega_0)}(s+\omega_0)\Big|_{s=-\omega_0} = \frac{1}{l}\frac{1}{s-\omega_0}\Big|_{s=-\omega_0} = -\frac{1}{2\omega_0 l}. \tag{47}$$

Para β, tenemos:

$$\beta = H(s)(s-\omega_0)\Big|_{s=\omega_0} = \frac{1}{l}\frac{1}{(s+\omega_0)(s-\omega_0)}(s-\omega_0)\Big|_{s=\omega_0} = \frac{1}{l}\frac{1}{s+\omega_0}\Big|_{s=\omega_0} = \frac{1}{2\omega_0 l}. \tag{48}$$

Luego, juntando ambos términos, podemos descomponer $H(s)$ como:

$$H(s) = \frac{1}{2\omega_0 l}\left(\frac{1}{s-\omega_0} - \frac{1}{s+\omega_0}\right). \tag{49}$$

Con esta descomposición, podemos aplicar la inversa para obtener $h(t)$, de modo que:

$$h(t) = L^{-1}\left\{\frac{1}{2\omega_0 l}\left(\frac{1}{s-\omega_0} - \frac{1}{s+\omega_0}\right)\right\}. \tag{50}$$

Finalmente, recordemos que, como vimos anteriormente, tenemos:

$$h(t) = \frac{1}{2\omega_0 l}\left(e^{\omega_0 t} - e^{-\omega_0 t}\right). \tag{51}$$