Ingeniería Eléctrica
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS UNIVERSIDAD DE CHILE

Análisis de Sistemas Dinámicos y Estimación
(EL3103)
Clase auxiliar 10
Prof. Heraldo Rozas.
Prof. Aux. Erik Saez - Maximiliano Morales

1 Resumen

Estimador insesgado

Un estimador $\tau_N : X_N \to \Theta$ se dice insesgado si

$$\forall \theta \in \Theta, \mathbb{E}_{X_1,\dots,X_N \sim \mu_N}\left[\tau_N(X_1,\dots,X_N)\right] = \theta. \tag{1}$$

Es decir, si se tiene un estado θ el cual se busca estimar, entonces el estimador $\hat{\theta}$ se dice insesgado si y solo si

$$\mathbb{E}\left[\hat{\theta}\right] = \theta. \tag{2}$$

Estimador consistente

Una familia de estimadores $\{\tau_N \mid \forall N \in \mathbb{N}, \tau_N : X_N \to \Theta\}$ se dice consistente si cada estimador τ_N es asintóticamente insesgado y

$$\lim_{N\to\infty} \mathrm{Var}(\tau_N(x)) = 0. \tag{3}$$

Error cuadrático medio (Mean Squared Error, MSE)

El MSE de un estimador $\hat{x}$ está dado por

$$\mathrm{MSE}(\hat{x}) = \mathrm{tr}\left(\mathbb{E}\left[(\hat{x}(Y) - X)(\hat{x}(Y) - X)^T \mid Y\right]\right) \tag{4}$$

$$= \mathbb{E}\left[(\hat{x}(Y) - X)^T(\hat{x}(Y) - X) \mid Y\right]. \tag{5}$$

El estimador que minimiza este MSE es de la forma

$$\hat{x}_{\mathrm{MMSE}}(y) = \mathbb{E}\{X \mid Y = y\}. \tag{6}$$

Distribuciones notables

- **Gaussiana:**

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right). \tag{7}$$

- **Gaussiana multivariada:**

$$X \sim N(\mu, \Sigma) \Rightarrow f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n|\Sigma|}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x-\mu)^T\Sigma^{-1}(x-\mu)\right), \tag{8}$$

  donde $\mu \in \mathbb{R}^n$ y $\Sigma \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$.

- **Propiedades Matrices** Para la matriz por bloques

$$U = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},$$

si A y D son invertibles, se tiene:

$$|U| = |A|\,|D - CA^{-1}B|, \tag{8}$$

$$U^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} + A^{-1}B(D - CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} & -A^{-1}B(D - CA^{-1}B)^{-1} \\ -(D - CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} & (D - CA^{-1}B)^{-1} \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Estimador de máxima verosimilitud:

Se define el estimador de máxima verosimilitud del parámetro θ de una distribución conocida $f_X(x|\theta)$, teniendo un vector de n observaciones de dicha variable, como:

$$\hat{\theta}_{ML} = \arg\max_{\theta\in\Theta} L(X_1, \ldots, X_n|\theta) \tag{9}$$

Donde:

$$L(X_1, \ldots, X_n|\theta) = f_{X_1,\ldots,X_n}(x_1, \ldots, x_n|\theta) \tag{10}$$

Un criterio equivalente (y a veces mejor) es el siguiente:

$$\hat{\theta}_{ML} = \arg\max_{\theta\in\Theta} \ln[L(X_1, \ldots, X_n|\theta)] \tag{11}$$

Estimador MAP

Sea el vector $X = (X_1, \ldots, X_n)$ tal que X_i i.i.d. $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$, con función de densidad condicionada al parámetro θ $f_{X|\theta}$. A su vez, θ posee la función de densidad f_θ. Se define el estimador de máxima verosimilitud a posteriori de θ como:

$$\hat{\theta}_{MAP} = \arg\max_{\theta\in A} f_{\theta|X} \tag{12}$$

Este término puede desarrollarse más para obtener una expresión más fácil de obtener usando el teorema de Bayes:

$$\hat{\theta}_{MAP} = \arg\max_{\theta\in A} f_{X|\theta}\cdot f_\theta \tag{13}$$

$$\iff \hat{\theta}_{MAP} = \arg\max_{\theta\in A} \ln(f_{X|\theta}\cdot f_\theta) \tag{14}$$

1. Considere $X_1, X_2, \dots, X_n$ variables aleatorias i.i.d. observaciones de la siguiente f.d.p.m.:

$$p(x|\lambda) = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^x}{x!} \tag{15}$$

    1. Encuentre el estimador de máxima verosimilitud $\hat{\lambda}_{ML}$.
    2. Compruebe si el estimador encontrado es insesgado y consistente. *Hint*: Recuerde que una distribución $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$ cumple que $\mathbb{E}(X) = \text{Var}(X) = \lambda$.

2. Considere una variable X cuya PDF está dada por

$$f_{X|\Theta}(x|\theta) = \theta x^{\theta-1}, \tag{1}$$

   correspondiente a una distribución Beta con $\beta = 1$. Suponga que se realizan n mediciones $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. de X.

    1. Encuentre la esperanza de X.
    2. Encuentre el estimador ML para el parámetro θ. ¿Es posible concluir sobre el sesgo de este estimador?
    3. Considerando que se conoce a priori que $\Theta \sim \text{Exp}(\Lambda)$, encuentre el estimador MAP para θ.

3. Sean $X_1, \dots, X_n$ muestras i.i.d. de la variable aleatoria $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. A su vez, μ es una variable aleatoria continua tal que $\mu \sim \mathcal{N}(0, \sigma_0^2)$.

    1. Determine las densidades $f_{X_1,\dots,X_n}$ y f_μ.
    2. Obtenga el estimador MAP de μ, $\hat{\mu}_{MAP}$.
    3. Determine los casos límite en que $\sigma_0^2 \to \infty$ y $\sigma_0^2 \to 0$. Interprete cada situación.

4. Considere que tiene un estado modelado como una variable aleatoria Y en $\mathbb{R}^q$, sobre el cual se realizan mediciones dadas por otra variable aleatoria X en $\mathbb{R}^p$, donde ambas variables son gaussianas tales que

$$X \sim \mathcal{N}(\mu_X, \Sigma_X), \quad Y \sim \mathcal{N}(\mu_Y, \Sigma_Y). \tag{10}$$

   Para fines de modelación, supongamos que la distribución conjunta está dada por otra variable aleatoria Z dada por

$$Z = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \tag{11}$$

   de modo que Z es una gaussiana de la forma $Z \sim \mathcal{N}(\mu_Z, \Sigma_Z)$ con

$$\mu_Z := \begin{pmatrix} \mu_X \\ \mu_Y \end{pmatrix}, \tag{12}$$

$$\Sigma_Z := \begin{pmatrix} \Sigma_X & \Sigma_{XY} \\ \Sigma_{YX} & \Sigma_Y \end{pmatrix}, \tag{13}$$

   donde las matrices Σ_{XY} y Σ_{YX} corresponden a las varianzas cruzadas, y están definidas por

$$\Sigma_{XY} = \mathbb{E}\big\{(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)^\top\big\}, \quad \Sigma_{YX} = \mathbb{E}\big\{(Y - \mu_Y)(X - \mu_X)^\top\big\}. \tag{14}$$

    1. Encuentre la distribución de $Y|X$.
    2. Obtenga el estimador que minimiza el MSE.
    3. Determine si el estimador es insesgado. Obtenga la varianza del estimador, y concluya sobre su consistencia.