



1. Considere un sistema modelado por la siguiente ecuación diferencial:

$$\ddot{y} + 2\dot{y} - 15y = u. \quad (1)$$

- (a) Encuentre la función de transferencia del sistema.
- (b) Formule el sistema en variables de estado.
- (c) Obtenga la MTE del sistema y encuentre las funciones base.
- (d) Encuentre la respuesta al impulso del sistema.
- (e) Determine la estabilidad BIBS y BIBO del sistema.

Solución:

Resolución 1.1

Recordemos que la función de transferencia relaciona la entrada y la salida de un sistema. Es útil trabajar en el dominio de Laplace dado que simplifica los cálculos. Definimos $H(s)$ tal que

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}. \quad (2)$$

Dado que nuestro sistema es una ecuación diferencial en el dominio temporal, deberemos aplicar la transformada de Laplace. Además tenemos que tener en consideración condiciones iniciales nulas (consideramos la respuesta de estado cero). Utilizando la siguiente expresión:

$$\mathcal{L}\{\dot{y}\} = sY(s) - y(0), \quad (3)$$

y, en general, para la n -ésima derivada se cumple

$$\mathcal{L}\{y^{(n)}(t)\} = s^n Y(s) - s^{n-1}y(0) - s^{n-2}\dot{y}(0) - \dots - y^{(n-1)}(0), \quad (4)$$

Para la ecuación diferencial dada, aplicando la transformada de Laplace y considerando condiciones iniciales nulas, tenemos

$$\mathcal{L}\{\ddot{y} + 2\dot{y} - 15y\} = s^2 Y(s) + 2sY(s) - 15Y(s) = U(s). \quad (5)$$

Reordenando,

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^2 + 2s - 15} = \frac{1}{(s+5)(s-3)}. \quad (6)$$

Resolución 1.2

Para hacer la formulación en variables de estado, utilizaremos dos métodos distintos, cada uno con sus ventajas y desventajas.

Método 1 Este primer método permite, de forma relativamente directa, obtener una formulación en variables de estado a partir de la ecuación diferencial. En la ecuación diferencial que modela al sistema, si definimos $x_1 = y$ y $x_2 = \dot{y}$, notemos que tenemos de la ecuación diferencial original

$$\ddot{y} + 2\dot{y} - 15y = u, \quad (7)$$

Ahora tenemos que,

$$\dot{x}_2 + 2x_2 - 15x_1 = u \Leftrightarrow \dot{x}_2 = 15x_1 - 2x_2 + u, \quad (8)$$

lo cual corresponde a la ecuación diferencial del segundo estado (x_2). Para obtener la ecuación diferencial asociada a x_1 , notemos que, por la forma en que están definidos los estados, se tiene $\dot{x}_1 = x_2$, por lo que el par de ecuaciones diferenciales puede escribirse como

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= 15x_1 - 2x_2 + u \end{aligned} \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 15 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u, \quad (9)$$

lo cual, junto con el hecho de que

$$y = x_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad (10)$$

Corresponde finalmente al sistema formulado en variables de estado.

Método 2 Este método requiere más trabajo para obtener el sistema formulado en variables de estado, pero su ventaja es que reduce bastante trabajo en las siguientes partes. Este método se basa en que, si consideramos un sistema LTI arbitrario de la forma

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (11)$$

$$y = Cx, \quad (12)$$

y le aplicamos la transformada de Laplace y reordenamos términos, se verifica que este sistema, en el dominio de Laplace, corresponde a

$$X(s) = (sI - A)^{-1}BU(s) \quad (13)$$

$$Y(s) = CX(s). \quad (14)$$

Así, para encontrar la formulación en variables de estado, podemos manipular los términos en el dominio de Laplace para encontrar A , B y C tales que el sistema tenga la forma deseada. Para esto, utilizaremos la función de transferencia, por lo que comenzaremos descomponiéndola en fracciones parciales.

Notemos que el denominador de la función de transferencia se puede factorizar como $s^2 + 2s - 15 = (s - 3)(s + 5)$, por lo que tenemos

$$H(s) = \frac{1}{(s - 3)(s + 5)}. \quad (15)$$

Luego, queremos encontrar α y β tales que

$$H(s) = \frac{\alpha}{s-3} + \frac{\beta}{s+5}, \quad (16)$$

donde, utilizando el método visto en auxiliares anteriores, se tiene

$$\frac{\alpha(s+5) + \beta(s-3)}{(s-3)(s+5)} = \frac{1}{(s-3)(s+5)} \quad (17)$$

Por lo que se formula un sistema de ecuaciones dado por:

$$\alpha s + 5\alpha + \beta s - 3\beta = 1 \quad (18)$$

$$s(\alpha + \beta) + (5\alpha - 3\beta) = 1 \quad (19)$$

Con lo que :

$$\alpha + \beta = 0 \quad (20)$$

$$5\alpha - 3\beta = 1 \quad (21)$$

$$\rightarrow \alpha = \frac{1}{8}, \quad \beta = -\frac{1}{8} \quad (22)$$

Como $H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$ por definición, se tiene

$$Y(s) = \frac{1}{8} \frac{U(s)}{s-3} - \frac{1}{8} \frac{U(s)}{s+5}. \quad (23)$$

La idea detrás de este método está en notar que esta expresión puede escribirse, de forma equivalente, como

$$Y(s) = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{U(s)}{s-3} \\ \frac{U(s)}{s+5} \end{pmatrix}. \quad (24)$$

El motivo de esta reescritura es que, como puede notarse, hemos expresado la salida de forma análoga a la relación $Y(s) = C X(s)$, considerando

$$C = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} \end{pmatrix} \quad X(s) = \begin{pmatrix} \frac{U(s)}{s-3} \\ \frac{U(s)}{s+5} \end{pmatrix}, \quad (25)$$

por lo que ya tenemos uno de los términos (C). Luego, para obtener A y B , notemos que

$$X(s) = \begin{pmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{U(s)}{s-3} \\ \frac{U(s)}{s+5} \end{pmatrix}, \quad (26)$$

por lo que, analizando la primera ecuación, tenemos

$$X_1(s) = \frac{U(s)}{s-3}. \quad (27)$$

Si reordenamos los términos, tenemos

$$sX_1(s) - 3X_1(s) = U(s), \quad (28)$$

y, aplicando transformada inversa (suponiendo $x_1(0) = 0$), notando que $sX_1(s)$ corresponde a la derivada de x_1 , tenemos

$$\dot{x}_1 - 3x_1 = u \Leftrightarrow \dot{x}_1 = 3x_1 + u. \quad (29)$$

Haciendo este mismo procedimiento para la segunda ecuación, se obtiene

$$\dot{x}_2 = -5x_2 + u, \quad (30)$$

por lo que, juntando ambas ecuaciones diferenciales y añadiendo la expresión para la salida, tenemos

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} u \quad (31)$$

$$y = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 8 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad (32)$$

lo cual corresponde al sistema formulado en variables de estado. Si bien este procedimiento requiere más trabajo que el anterior, el sistema resultante tiene una ventaja clave: la matriz A queda diagonal, a diferencia del obtenido con el método 1. Esto simplifica de manera notable el cálculo de variables posteriores (por ejemplo, la MTE y la respuesta impulsional), por lo que suele ser el enfoque recomendado para obtener una realización en variables de estado a partir de una ecuación diferencial. Además, la diagonal de A coincide con los polos de la función de transferencia $H(s)$ (los valores de s que anulan su denominador), una característica especialmente útil de este método.

Resolución 1.3

Recordemos que la MTE es una función que nos permite analizar la evolución de un sistema en variables de estado. Comencemos calculando la matriz de transición de estados (MTE), ya que obtener las funciones base requiere conocerla. Notemos que la MTE por definición se calcula como

$$\Phi(t) = e^{At} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ (sI - A)^{-1} \right\}, \quad (27)$$

si el sistema es continuo, y como

$$\Phi(k) = A^k = \mathcal{Z}^{-1} \left\{ z(zI - A)^{-1} \right\} \quad (28)$$

si el sistema es de tiempo discreto. Dado que en este caso estamos trabajando con derivadas, el sistema es de tiempo continuo, por lo que utilizaremos la primera forma.

Notemos que, dependiendo de la forma que utilicemos para formular el sistema en variables de estado, la matriz A cambia. Comencemos calculando la MTE para el sistema obtenido con el primer método.

Método 1 En este caso, tenemos

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 15 & -2 \end{pmatrix}. \quad (29)$$

Obtener la exponencial de una matriz es, en general, un procedimiento complicado de realizar directamente. Sin embargo, para hacerlo, consideremos la siguiente propiedad: si tomamos e^{At} y lo expandimos en su serie de Taylor centrada en 0, tenemos

$$e^{At} = \sum_{k \geq 0} \frac{A^k t^k}{k!}. \quad (30)$$

Si consideramos una diagonalización de A tal que $A = TDT^{-1}$, entonces tenemos

$$e^{At} = \sum_{k \geq 0} \frac{(TDT^{-1})^k t^k}{k!}. \quad (31)$$

Si expandimos $(TDT^{-1})^k$, notemos que, para cada valor de k se tiene

$$(TDT^{-1})^k = \underbrace{TDT^{-1} \cdot TDT^{-1} \cdots TDT^{-1}}_{k \text{ veces}}, \quad (32)$$

donde, en cada una de las multiplicaciones, los términos T^{-1} y T se anulan, de modo que se tiene

$$(TDT^{-1})^k = TD^k T^{-1}. \quad (33)$$

Reemplazando en la expresión de la exponencial, tenemos

$$e^{At} = \sum_{k \geq 0} (TDT^{-1})^k \frac{t^k}{k!} = T \left(\sum_{k \geq 0} D^k \frac{t^k}{k!} \right) T^{-1} = T e^{Dt} T^{-1}, \quad (34)$$

lo cual simplifica el procedimiento, ya que e^{Dt} es fácil de obtener, dado que corresponde simplemente a la exponencial de cada uno de los términos de la diagonal. Considerando esto, para calcular la MTE comenzaremos diagonalizando A , para lo cual debemos obtener los valores y vectores propios, dado que, si sabemos que los valores propios son λ_1 y λ_2 y los vectores propios son \mathbf{v}_1 y \mathbf{v}_2 , entonces T y D pueden ser expresados como

$$T = (\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2) \quad D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}. \quad (35)$$

Calculando los valores propios, tenemos

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 15 & -2 - \lambda \end{vmatrix} \quad (36)$$

$$= \lambda^2 + 2\lambda - 15 = 0 \quad (37)$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 3, \lambda_2 = -5, \quad (38)$$

por lo que podemos expresar D como

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}. \quad (39)$$

Ahora, calculemos los vectores propios. Para el vector propio asociado al primer valor propio, buscamos \mathbf{v}_1 tal que

$$(A - \lambda_1 I) \mathbf{v}_1 = \mathbf{0}. \quad (40)$$

Expresando esta relación, tenemos

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 15 & -2-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (41)$$

lo cual puede ser expresado como el sistema de ecuaciones

$$-3x + y = 0 \quad (42)$$

$$15x - 5y = 0, \quad (43)$$

podemos notar que ambas ecuaciones son linealmente dependientes, por lo que no existe una solución única, sino que hay infinitas soluciones. Sin embargo, para la obtención de los vectores propios basta con tener *alguna* solución, por lo que fijaremos $x = 1$ y encontraremos el y que lo satisfaga; de donde vemos que $y = 3$, por lo que

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}. \quad (44)$$

Si repetimos este procedimiento para el segundo vector propio, se obtiene

$$\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad (45)$$

por lo que T está dada por

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}. \quad (46)$$

Por último, para tener la diagonalización, nos falta el término T^{-1} , lo cual requiere invertir la matriz. Este procedimiento es la parte más compleja del desarrollo, ya que, para matrices grandes, encontrar la inversa es algo no trivial y que requiere bastante desarrollo. Sin embargo, para el caso en que tenemos matrices 2×2 , es un poco más sencillo, dado que hay un resultado conocido que nos ayuda: si tenemos una matriz M de la forma

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad (47)$$

entonces su inversa es conocida y está dada por

$$M^{-1} = \frac{1}{|M|} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}. \quad (48)$$

Así, reemplazando los valores que tenemos en T , podemos ver que la inversa corresponde a

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{3}{8} & -\frac{1}{8} \end{pmatrix}. \quad (49)$$

Finalmente, tenemos todos los componentes para poder obtener la MTE. Dado que D es diagonal, sabemos que se tiene

$$e^{Dt} = \begin{pmatrix} e^{3t} & 0 \\ 0 & e^{-5t} \end{pmatrix}, \quad (50)$$

por lo que la MTE está dada por

$$\Phi(t) = e^{At} \quad (51)$$

$$= T e^{Dt} T^{-1} \quad (52)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{3t} & 0 \\ 0 & e^{-5t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{5}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{3}{8} & -\frac{1}{8} \end{pmatrix} \quad (53)$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{5}{8}e^{3t} + \frac{3}{8}e^{-5t} & \frac{1}{8}e^{3t} - \frac{1}{8}e^{-5t} \\ \frac{15}{8}e^{3t} - \frac{15}{8}e^{-5t} & \frac{3}{8}e^{3t} + \frac{5}{8}e^{-5t} \end{pmatrix}. \quad (54)$$

Como podemos ver, al usar el método 1 para formular el sistema en variables de estado, el desarrollo que debemos hacer para encontrar la MTE es bastante complejo (especialmente para matrices de alta dimensionalidad), es propenso a errores de cálculo, y la expresión que obtenemos finalmente para la MTE es compleja y tiene múltiples términos, lo cual dificulta utilizarla posteriormente para el cálculo de otras cantidades importantes para un sistema LTI.

Método 2 Ahora, consideremos el sistema formulado con el segundo método. Como podemos ver, en este caso tenemos

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}. \quad (55)$$

Dado que A es diagonal, obtener la MTE es sencillo, ya que no requiere diagonalizar: en particular, tenemos

$$\Phi(t) = e^{At} = \begin{pmatrix} e^{3t} & 0 \\ 0 & e^{-5t} \end{pmatrix}. \quad (56)$$

Como podemos ver, hacer el esfuerzo al comienzo de formular el sistema en variables de estado dejando A diagonal nos ahorra muchísimo trabajo al calcular la MTE y, además, hace que esta muestra una forma más sencilla de trabajar. Por esto, si tienen la oportunidad de elegir qué método utilizar, la recomendación es utilizar el segundo método. Desde este punto, consideraremos el resultado de este segundo método para los cálculos, dado que simplifica los desarrollos.

Teniendo la MTE, podemos proceder a obtener las funciones base. Para esto, debemos tener en cuenta que las funciones base $\phi_i(t)$ son las componentes linealmente independientes de la respuesta a entrada cero, por lo que el desarrollo se reduce a expresar dicha respuesta y luego extraer las componentes linealmente independientes.

Para esto, podemos utilizar la propiedad conocida de que, para un sistema LTI, la respuesta a entrada cero está dada por

$$y_0(t) = C \Phi(t) x(0), \quad (57)$$

donde $x(0)$ corresponde a las condiciones iniciales. Reemplazando las matrices conocidas y considerando condiciones iniciales arbitrarias no nulas, tenemos

$$y_0(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{3t} & 0 \\ 0 & e^{-5t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad (58)$$

$$= \frac{x_1}{8} e^{3t} - \frac{x_2}{8} e^{-5t}. \quad (59)$$

Podemos ver que, en la expresión anterior, los términos que acompañan a las exponenciales son constantes (las condiciones iniciales, pese a ser arbitrarias, son constantes), por lo que las componentes linealmente independientes corresponden únicamente a las exponenciales: es decir, las funciones base están dadas por

$$\phi(t) = \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{-5t} \end{pmatrix}. \quad (60)$$

Resolución 1.4

Para un sistema LTI continuo sin término directo ($D = 0$), la respuesta al impulso está dada por

$$h(t) = C \Phi(t) B. \quad (61)$$

Usando la realización del Método 2, tenemos

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} \end{pmatrix}.$$

Como A es diagonal, la MTE se escribe explícitamente como

$$\Phi(t) = e^{At} = \begin{pmatrix} e^{3t} & 0 \\ 0 & e^{-5t} \end{pmatrix}. \quad (62)$$

Por tanto,

$$h(t) = C \Phi(t) B = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{3t} & 0 \\ 0 & e^{-5t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{8}e^{3t} - \frac{1}{8}e^{-5t}, \quad t \geq 0. \quad (63)$$

Algo interesante que pueden verificar es que, si obtienen la respuesta al impulso para el sistema formulado con el método 1, deberían observar que, si bien la MTE es distinta para cada formulación, la respuesta al impulso es la misma para ambos. ¿Por qué ocurre esto?

Resolución 1.5

El principal punto a tener en mente a la hora de analizar la estabilidad es que, si un sistema es BIBS estable, entonces es estable ante cualquier otra noción de estabilidad. Esto hace que la recomendación general sea comenzar verificando la estabilidad BIBS y, si el sistema no es BIBS-estable, verificar el resto de criterios de estabilidad.

BIBS Para que el sistema sea BIBS-estable, para un sistema de tiempo continuo se debe cumplir que $\forall \lambda \in \text{eig}(A)$, $\text{Re}\{\lambda\} \leq 0$, mientras que para un sistema de tiempo discreto se debe cumplir que $\forall \lambda \in \text{eig}(A)$, $|\lambda| \leq 1$. Es importante mencionar que estas nociones de estabilidad vienen del hecho de que los polos de un sistema continuo corresponden a polos en el dominio de Laplace, mientras que los polos de un sistema discreto son polos en el dominio \mathcal{Z} , por lo que el criterio depende de las regiones de convergencia de cada uno de los dominios (semiplano negativo para dominio de Laplace, círculo unitario para dominio \mathcal{Z}).

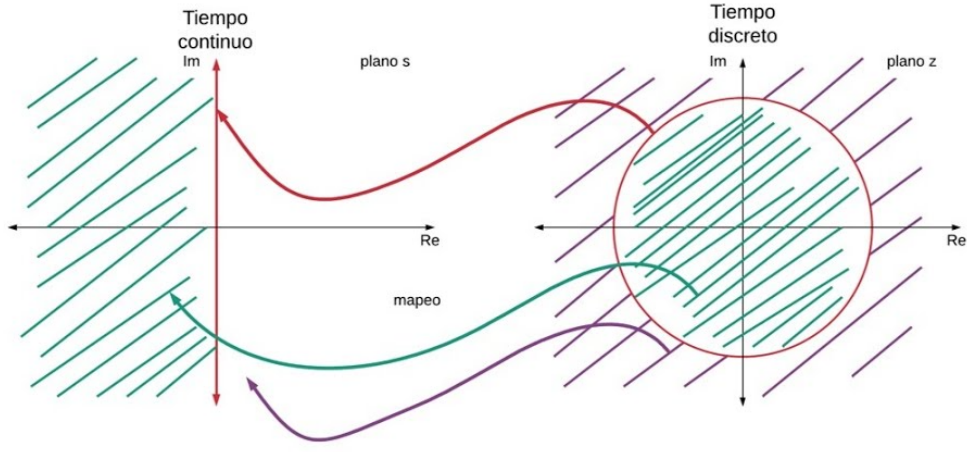


Figura 1: Regiones de estabilidad para sistemas continuos y discretos: en tiempo continuo (plano- s) el sistema es estable si y solo si todos los polos están en el semiplano izquierdo ($\text{Re}\{s_i\} < 0$); la frontera $\text{Re}\{s\} = 0$ (eje imaginario) corresponde a modos no amortiguados y, con integradores puros ($s = 0$) o multiplicidad mayor que 1, no hay estabilidad BIBS. En tiempo discreto (plano- z) la estabilidad requiere que todos los polos estén estrictamente dentro del círculo unitario ($|z_i| < 1$); la frontera $|z| = 1$ indica magnitud constante y polos sobre ella o repetidos implican inestabilidad BIBS. Bajo muestreo ideal de periodo T , el mapeo $z = e^{sT}$ lleva el semiplano izquierdo del plano- s al interior del círculo unitario del plano- z , y $\text{Re}\{s\} = 0$ se mapea a $|z| = 1$.

En este caso, dado que A es diagonal, podemos ver rápidamente que los polos son $\lambda_1 = 3$ y $\lambda_2 = -5$. Dado que el sistema es a tiempo continuo, debemos verificar que las partes reales sean negativas: en este caso, podemos ver que $\text{Re}\{\lambda_1\} = 3 > 0$, por lo que el sistema no es BIBS-estable.

BIBO Dado que el sistema no es BIBS-estable, debemos verificar estabilidad BIBO. Para que un sistema sea BIBO-estable se debe cumplir que

$$\int_0^{\infty} |h(t)| dt < \infty, \quad (63)$$

si el sistema es de tiempo continuo, o que

$$\sum_{k \geq 0} |h(k)| < \infty, \quad (64)$$

si el sistema es de tiempo discreto. Dado que en este caso el sistema es de tiempo continuo, utilicemos la primera forma presentada. Considerando la respuesta al impulso que fue calculada anteriormente, notemos que

$$\int_0^{\infty} |h(t)| dt = \int_0^{\infty} \left| \frac{1}{8}e^{3t} - \frac{1}{8}e^{-5t} \right| dt. \quad (65)$$

Como podemos ver, dentro de la respuesta al impulso aparece el término e^{3t} , el cual diverge a medida que $t \rightarrow \infty$. Esto hace que la integral diverja, de modo que $\int_0^{\infty} |h(t)| dt = \infty$, por lo que el sistema tampoco es BIBO-estable. En una evaluación, basta con dar el argumento anterior para concluir que el sistema no es BIBO-estable. A continuación, se justifica brevemente la divergencia de la integral.

Para justificar rigurosamente la divergencia, notemos que se tiene la propiedad de que, para cualquier función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ integrable, se cumple

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt, \quad (66)$$

lo cual es una generalización de la desigualdad triangular. Si aplicamos esto a nuestro problema, tenemos

$$\int_0^\infty |h(t)| dt \geq \left| \int_0^\infty h(t) dt \right|, \quad (67)$$

lo cual nos entrega una cota inferior para la integral deseada. Reemplazando la respuesta al impulso en esta cota, tenemos

$$\left| \int_0^\infty h(t) dt \right| = \left| \int_0^\infty \left(\frac{1}{8} e^{3t} - \frac{1}{8} e^{-5t} \right) dt \right| \quad (68)$$

$$= \left| \frac{1}{8} \int_0^\infty e^{3t} dt - \frac{1}{8} \int_0^\infty e^{-5t} dt \right| \quad (69)$$

$$= |\infty| \quad (70)$$

$$= \infty, \quad (71)$$

donde la divergencia proviene de que la integral de e^{3t} diverge. Como $\int_0^\infty |h(t)| dt \geq \left| \int_0^\infty h(t) dt \right| = \infty$, concluimos que $\int_0^\infty |h(t)| dt$ diverge; por tanto, el sistema no es BIBO-estable.

2. Considere el siguiente sistema formulado en variables de estado:

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} u(t), \quad y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} x(t). \quad (72)$$

- (a) Encuentre la MTE y las funciones base del sistema.
- (b) Encuentre la respuesta al impulso del sistema.
- (c) Determine estabilidad BIBS y BIBO.
- (d) Determine observabilidad y controlabilidad.

Solución:

Resolucion 2.1

Dado que A está en forma canónica de Jordan, calcular la MTE dada por

$$\Phi(t) = e^{At} \quad (3)$$

es sencillo. Para hacerlo, debemos considerar dos propiedades importantes que se cumplen con la forma canónica de Jordan:

1. Para una matriz de $n \times n$ en forma canónica de Jordan “pura”, de la forma

$$J := \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad (4)$$

donde es importante notar que la diagonal está compuesta por n elementos iguales y la diagonal inmediatamente arriba está compuesta de $n - 1$ unos, se cumple que la exponencial tiene la siguiente forma

$$e^J = \begin{pmatrix} e^\lambda & \frac{t^1}{1!}e^\lambda & \frac{t^2}{2!}e^\lambda & \frac{t^3}{3!}e^\lambda & \cdots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^\lambda & \frac{t^n}{n!}e^\lambda \\ 0 & e^\lambda & \frac{t^1}{1!}e^\lambda & \frac{t^2}{2!}e^\lambda & \cdots & \frac{t^{n-2}}{(n-2)!}e^\lambda & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^\lambda \\ 0 & 0 & e^\lambda & \frac{t^1}{1!}e^\lambda & \cdots & \frac{t^{n-3}}{(n-3)!}e^\lambda & \frac{t^{n-2}}{(n-2)!}e^\lambda \\ 0 & 0 & 0 & e^\lambda & \cdots & \frac{t^1}{1!}e^\lambda & \frac{t^2}{2!}e^\lambda \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & e^\lambda & \frac{t^1}{1!}e^\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & e^\lambda \end{pmatrix}. \quad (5)$$

donde podemos notar que cada valor corresponde a los elementos de la serie de Taylor de la exponencial, y que, a lo largo de cada diagonal, los elementos son iguales.

2. Para una matriz M Jordan por bloques, de la forma

$$M := \begin{pmatrix} J_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & J_n \end{pmatrix}, \quad (6)$$

con J_i matrices en forma canónica de Jordan pura, la exponencial se aplica a cada bloque por separado. Es decir, tenemos

$$e^{Mt} := \begin{pmatrix} e^{J_1 t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{J_2 t} & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & e^{J_n t} \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Aplicemos estas dos propiedades a la matriz A de nuestro sistema. Para esto, notemos que está compuesta de dos bloques de Jordan de la forma

$$A_1 := \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad A_2 := \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}, \quad (8)$$

los cuales entregan

$$e^{A_1 t} := \begin{pmatrix} e^{-2t} & te^{-2t} & \frac{t^2}{2}e^{-2t} \\ 0 & e^{-2t} & te^{-2t} \\ 0 & 0 & e^{-2t} \end{pmatrix} \quad e^{A_2 t} := \begin{pmatrix} e^t \end{pmatrix}. \quad (9)$$

De esto, componiendo ambas componentes en la MTE original, tenemos

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^{-2t} & te^{-2t} & \frac{t^2}{2}e^{-2t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} & te^{-2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^t \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Para encontrar las funciones base, debemos encontrar las componentes linealmente independientes de la respuesta a entrada cero (RENC). Para calcular la RENC, tenemos

$$y_0(t) = C \Phi(t) x_0 \quad (11)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-2t} & te^{-2t} & \frac{t^2}{2}e^{-2t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} & te^{-2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \quad (12)$$

$$= \begin{pmatrix} e^{-2t} & te^{-2t} & \frac{t^2}{2}e^{-2t} + e^{-2t} & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \quad (13)$$

$$= x_1 e^{-2t} + x_2 t e^{-2t} + \frac{x_3}{2} t^2 e^{-2t} + x_3 e^{-2t} + x_4 e^t. \quad (14)$$

Luego, podemos identificar que las funciones base corresponden a

$$\phi = \{ e^{-2t}, te^{-2t}, t^2 e^{-2t}, e^t \} \quad (15)$$

donde es importante notar que los términos t^n son parte de las funciones base, ya que no son términos constantes.

Resolución 2.2

Para encontrar la respuesta al impulso, encontremos una expresión general para poder obtenerla. Para esto, apliquemos la transformada de Laplace sobre la ecuación diferencial del sistema

$$\dot{x} = Ax + Bu \xrightarrow{\mathcal{L}\{\}} sX(s) = AX(s) + BU(s), \quad (16)$$

de donde podemos despejar $X(s) = (sI - A)^{-1}BU(s)$. Luego, considerando la ecuación de la salida, tenemos

$$y = Cx \xrightarrow{\mathcal{L}\{\}} Y(s) = CX(s) = C(sI - A)^{-1}BU(s). \quad (17)$$

Si ahora consideramos que $\mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1$, podemos ver que cuando $u(t) = \delta(t)$ (ya que estamos interesados en analizar la respuesta al impulso) se tiene $U(s) = 1$, por lo que la salida en el dominio de Laplace está dada por

$$H(s) = CX(s) = C(sI - A)^{-1}B, \quad (18)$$

donde $H(s)$ corresponde a la salida, la cual se renombra para ser consistente con la nomenclatura usual (donde $h(t)$ es la respuesta al impulso). De esto, podemos aplicar la inversa de Laplace para obtener

la respuesta en el dominio del tiempo, considerando que C y B son constantes, por lo que salen de la antitransformada.

Aplicando esto, tenemos

$$h(t) = C \mathcal{L}^{-1}\{(sI - A)^{-1}\} B = C \Phi(t) B, \quad (19)$$

donde usamos el hecho de que $\Phi(t) = \mathcal{L}^{-1}\{(sI - A)^{-1}\}$ es un resultado conocido. Utilizando esta ecuación en el sistema que estamos analizando, tenemos

$$h(t) = C \Phi(t) B \quad (20)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-2t} & te^{-2t} & \frac{t^2}{2}e^{-2t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} & te^{-2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (21)$$

$$= \begin{pmatrix} e^{-2t} & te^{-2t} & \frac{t^2}{2}e^{-2t} + e^{-2t} & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (22)$$

$$= e^{-2t} + 2te^{-2t} + \frac{3}{2}t^2e^{-2t} + 3e^{-2t} = 4e^{-2t} + 2te^{-2t} + \frac{3}{2}t^2e^{-2t}, \quad (23)$$

$$\boxed{h(t) = 4e^{-2t} + 2te^{-2t} + \frac{3}{2}t^2e^{-2t}}. \quad (24)$$

donde podemos notar el hecho de que el término e^t no aparece dentro de la respuesta al impulso.

Resolución 2.3

Para analizar la estabilidad de un sistema, el dato más importante que se debe tener en cuenta es el hecho de que, si un sistema es BIBS-estable, entonces automáticamente podemos concluir que es BIBO-estable y Lyapunov-estable. Por esto, se recomienda comenzar siempre analizando la estabilidad BIBS.

BIBS Para que un sistema sea BIBS-estable, se debe cumplir

$$\forall \lambda_i \in \text{eig}(A), \quad \text{Re}(\lambda_i) \leq 0, \quad (25)$$

lo cual indica que todos los polos del sistema deben tener parte real negativa o cero.¹

En nuestro sistema, dado que A está en forma canónica de Jordan, obtener los polos es sencillo: estos son simplemente los valores en la diagonal de la matriz, donde la multiplicidad algebraica de un polo está dada por la cantidad de veces que aparece en dicha diagonal. En este caso, podemos ver que los polos son $\lambda_1 = -2$ con multiplicidad algebraica 3, y $\lambda_2 = 1$ con multiplicidad algebraica 1. Dado que el polo λ_2 tiene parte real positiva, podemos concluir que el sistema **no es BIBS-estable**.

BIBO Para que un sistema sea BIBO-estable, se debe cumplir que la norma 1 de la respuesta al impulso es finita: es decir, se debe cumplir

$$\int_0^{\infty} |h(t)| dt < \infty. \quad (26)$$

Aplicando esto a nuestro sistema, considerando la respuesta al impulso de la ecuación 24, tenemos

$$\int_0^{\infty} |h(t)| dt = \int_0^{\infty} \left| 4e^{-2t} + 2te^{-2t} + \frac{3}{2}t^2e^{-2t} \right| dt. \quad (27)$$

Para determinar la estabilidad, consideremos que todas las normas, por definición, cumplen la desigualdad triangular, la cual indica

$$\forall x, \forall y, \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|. \quad (28)$$

Podemos aplicar esta propiedad a nuestra integral y obtener una cota superior: si esta cota superior es menor a infinito, entonces podemos concluir que la integral original también lo es. Haciendo esto, tenemos

$$\int_0^{\infty} |h(t)| dt \leq \int_0^{\infty} |4e^{-2t}| dt + \int_0^{\infty} |2te^{-2t}| dt + \int_0^{\infty} \left| \frac{3}{2}t^2e^{-2t} \right| dt. \quad (29)$$

Para resolver estas integrales, notemos que, en el dominio $[0, \infty)$, todas las exponenciales son positivas, por lo que el valor absoluto no tiene efecto sobre las exponenciales. De esto, tenemos

$$\int_0^{\infty} |h(t)| dt \leq 4 \underbrace{\int_0^{\infty} e^{-2t} dt}_{=:I_1} + 2 \underbrace{\int_0^{\infty} te^{-2t} dt}_{=:I_2} + \frac{3}{2} \underbrace{\int_0^{\infty} t^2e^{-2t} dt}_{=:I_3}. \quad (30)$$

Resolviendo cada una de las integrales, tenemos

$$I_1 = \int_0^{\infty} e^{-2t} dt \quad (31)$$

$$= \left[\frac{e^{-2t}}{-2} \right]_0^{\infty} \quad (32)$$

$$= 0 - \frac{1}{-2} \quad (33)$$

$$= \frac{1}{2}. \quad (34)$$

Para I_2 , si integramos por partes considerando $u = t$ y $dv = e^{-2t}dt$ tenemos $du = dt$, $v = -\frac{1}{2}e^{-2t}$, y, reemplazando, tenemos

$$I_2 = \int_0^{\infty} te^{-2t} dt = -\frac{1}{2} te^{-2t} \Big|_0^{\infty} + \frac{1}{2} \underbrace{\int_0^{\infty} e^{-2t} dt}_{I_1}. \quad (35)$$

Para el primer término, cuando $t = 0$ se tiene $te^{-2t} \Big|_{t=0} = 0$, pero el límite superior se debe analizar dado que es un límite de la forma $\infty \cdot 0$. Calculando este límite, tenemos

$$\lim_{t \rightarrow \infty} te^{-2t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t}{e^{2t}} \stackrel{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2e^{2t}} = 0. \quad (36)$$

Para el segundo término, podemos ver que este es simplemente I_1 , por lo que tenemos

$$I_2 = -\frac{1}{2}(0 - 0) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}. \quad (37)$$

Finalmente, para I_3 podemos integrar por partes considerando $u = t^2$ y $dv = e^{-2t}dt$, lo cual entrega $du = 2t dt$ y $v = -\frac{1}{2}e^{-2t}$, por lo que tenemos

$$I_3 = \int_0^\infty t^2 e^{-2t} dt = -\frac{1}{2} t^2 e^{-2t} \Big|_0^\infty + \underbrace{\int_0^\infty t e^{-2t} dt}_{I_2}. \quad (38)$$

donde, de forma similar a I_2 , aplicando L'Hôpital dos veces se puede verificar que el primer término es nulo, y podemos ver que el segundo término es I_2 , por lo que $I_3 = \frac{1}{4}$.

Juntando estas integrales, tenemos

$$\int_0^\infty |h(t)| dt \leq 4 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{23}{8} < \infty, \quad (39)$$

de lo que podemos concluir

$$\int_0^\infty |h(t)| dt < \infty, \quad (40)$$

por lo que tenemos que el sistema es BIBO-estable.

Un punto importante a notar es el hecho de que el sistema es BIBS-inestable pero BIBO-estable: en este caso, esto sucede ya que la salida asociada al término que diverge (correspondiente a e^t) no está presente dentro de la respuesta al impulso. Esto hace que, pese a que el estado está divergiendo a medida que pasa el tiempo, al aplicar un impulso al sistema la salida que medimos converge, haciendo que el sistema sea BIBO-estable.

Resolución 2.4

En el sistema LTI

$$\dot{x}(t) = A x(t) + B u(t), \quad y(t) = C x(t) + D u(t), \quad (41)$$

decimos que el par (A, B) es *controlable* si existe una entrada $u(t)$ en un intervalo $[t_0, t_1]$ que lleva el estado desde cualquier $x(t_0)$ a cualquier $x(t_1)$ en tiempo finito. Análogamente, el par (A, C) es *observable* si, con $u(\cdot)$ y $y(\cdot)$ medidos en un intervalo, se puede reconstruir exactamente el estado inicial $x(t_0)$. Existen diversas formas de verificar estos criterios, pero nos quedaremos con **El criterio de rango de Kalman** por su simplicidad.

(1) Criterio de rango de Kalman

$$\mathcal{C} := [B \ AB \ \cdots \ A^{n-1}B], \quad (A, B) \text{ controlable} \iff \text{rank}(\mathcal{C}) = n, \quad (42)$$

$$\mathcal{O} := \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}, \quad (A, C) \text{ observable} \iff \text{rank}(\mathcal{O}) = n. \quad (43)$$

(2) Prueba PBH (Popov–Belevitch–Hautus)

$$\text{rank} \begin{bmatrix} \lambda I - A & B \end{bmatrix} = n \quad \forall \lambda \in \text{spec}(A) \iff (A, B) \text{ controlable}, \quad (44)$$

$$\text{rank} \begin{bmatrix} \lambda I - A \\ C \end{bmatrix} = n \quad \forall \lambda \in \text{spec}(A) \iff (A, C) \text{ observable}. \quad (45)$$

(3) Gramianos (horizonte $[t_0, t_1]$ y caso LTI) Con la MTE $\Phi(\cdot, \cdot)$,

$$W_c(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, \tau) B B^\top \Phi^\top(t_1, \tau) d\tau, \quad W_o(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \Phi^\top(\tau, t_0) C^\top C \Phi(\tau, t_0) d\tau, \quad (46)$$

y se cumple

$$W_c(t_0, t_1) \succ 0 \iff (A, B) \text{ controlable en } [t_0, t_1], \quad W_o(t_0, t_1) \succ 0 \iff (A, C) \text{ observable en } [t_0, t_1]. \quad (47)$$

Para sistemas LTI (con A constante) en horizonte infinito —si A es estable—,

$$W_c = \int_0^\infty e^{A\tau} B B^\top e^{A^\top \tau} d\tau, \quad W_o = \int_0^\infty e^{A^\top \tau} C^\top C e^{A\tau} d\tau, \quad (48)$$

existen y satisfacen las ecuaciones de Lyapunov

$$A W_c + W_c A^\top + B B^\top = 0, \quad A^\top W_o + W_o A + C^\top C = 0, \quad (49)$$

y su positividad definida caracteriza controlabilidad/observabilidad.

Si (A, B) es controlable, podemos ubicar polos mediante realimentación de estado ($u = -Kx$). Si (A, C) es observable, existe un observador de Luenberger que reconstruye $x(t)$ a partir de $y(t)$. El *principio de separación* permite diseñar controlador y observador por separado. Estas propiedades identifican qué modos son alcanzables o visibles, habilitan realizaciones mínimas (eliminando modos inalcanzables o no observables) y, cuando no se cumplen por completo, motivan las nociones prácticas de *estabilizabilidad* y *detectabilidad*.

A continuación aplicaremos estos criterios al sistema dado: construiremos las matrices de controlabilidad y observabilidad y verificaremos si su rango es n .

Observabilidad En este caso, dado que $n = 4$ buscamos verificar que la matriz

$$\vartheta = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ CA^3 \end{pmatrix} \quad (43)$$

tenga rango 4. Calculando cada una de las filas de la matriz por separado, tenemos

$$CA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (44)$$

$$= (-2 \ 1 \ -2 \ 1) \quad (45)$$

$$CA^2 = (-2 \ 1 \ -2 \ 1) \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (46)$$

$$= (4 \ -4 \ 5 \ 1) \quad (47)$$

$$CA^3 = (4 \ -4 \ 5 \ 1) \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (48)$$

$$= (-8 \ 12 \ -14 \ 1). \quad (49)$$

Ensamblando estas filas en la matriz de observabilidad, tenemos

$$\vartheta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -2 & 1 \\ 4 & -4 & 5 & 1 \\ -8 & 12 & -14 & 1 \end{pmatrix}. \quad (50)$$

Como dijimos, para que el sistema sea observable, se debe cumplir $\text{rank}(\vartheta) = 4$, lo cual es equivalente a decir que todas las filas/columnas sean linealmente independientes entre sí. Una forma de verificar esto es considerar que, por teorema, se tiene

$$\forall U \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R}), \quad (\text{rank}(U) = n \Leftrightarrow |U| \neq 0), \quad (51)$$

por lo que basta verificar si $|\vartheta|$ es nulo o no para determinar la observabilidad. Si calculamos este determinante, tenemos $|\vartheta| = 27 \neq 0$, por lo que el sistema **es observable**.

Controlabilidad De forma similar a cómo hicimos con la observabilidad, para la controlabilidad buscamos verificar que la matriz de controlabilidad

$$\zeta = (B \ AB \ A^2B \ A^3B) \quad (52)$$

tiene rango 4. Calculando cada componente, tenemos

$$AB = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (53)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (54)$$

$$A^2B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (55)$$

$$= \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (56)$$

$$A^3B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (57)$$

$$= \begin{pmatrix} -2 \\ 20 \\ -24 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (58)$$

Juntando todo, tenemos

$$\zeta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -4 & 20 \\ 3 & -6 & 12 & -24 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (59)$$

donde aplicamos el mismo criterio que en observabilidad para verificar si $\text{rank}(\zeta) = 4$. En este caso, $|\zeta| = 0$, por lo que $\text{rank}(\zeta) < 4$ y, en consecuencia, el sistema **no es controlable**.