Análisis de señales (EL3203-2)
Clase auxiliar 5
Prof. Jorge Silva.
Prof. Aux. Erik Sáez

Análisis de Fourier: para Señales Continuas y Discretas

El análisis de Fourier constituye el fundamento teórico para la descomposición espectral de señales, abarcando tanto el dominio continuo como el discreto. Las cuatro herramientas principales *(Serie de Fourier, Transformada de Fourier, Serie de Fourier Discreta y Transformada de Fourier Discreta)* abordan diferentes combinaciones de periodicidad y naturaleza temporal, proporcionando una base completa para el análisis frecuencial.

Serie de Fourier: Señales Continuas Periódicas

La serie de Fourier descompone señales continuas y periódicas de período T en una suma discreta de armónicos:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \, e^{jk\omega_0 t}, \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T} \tag{1}$$

Los coeficientes complejos se calculan mediante:

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) \, e^{-jk\omega_0 t} \, dt \tag{2}$$

Características principales:

- *Dominio temporal*: Señales continuas y periódicas (potencia finita, energía infinita)
- *Dominio frecuencial*: Espectro discreto con componentes en $k\omega_0$
- *Coeficientes*: $\{c_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ representan amplitud y fase de cada armónico
- *Aplicaciones*: Análisis armónico, síntesis de ondas, respuesta de sistemas LTI a entradas periódicas

Transformada de Fourier (FT): Señales Continuas Aperiódicas

La transformada de Fourier extiende el análisis a señales continuas no periódicas mediante representación espectral continua:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \, e^{-j\omega t} \, dt \quad \text{(Análisis)} \tag{3}$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) \, e^{j\omega t} \, d\omega \quad \text{(Síntesis)} \tag{4}$$

Características principales:

- *Dominio temporal*: Señales continuas aperiódicas (energía finita)
- *Dominio frecuencial*: Espectro continuo de frecuencias
- *Densidad espectral*: $X(\omega)$ representa densidad espectral de amplitud
- *Aplicaciones*: Diseño de filtros analógicos, modulación, análisis de sistemas con entradas transitorias

Transformada de Fourier de Tiempo Discreto (DTFT): Señales Discretas Aperiódicas

Para señales discretas aperiódicas $x[n]$, la DTFT proporciona una representación espectral continua en frecuencia:

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, e^{-j\omega n} \quad \text{(Análisis)} \tag{5}$$

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\omega)\, e^{j\omega n}\, d\omega \quad \text{(Síntesis)} \tag{6}$$

Nota importante: En este contexto, $X(\omega)$ representa la DTFT (señales discretas) que es periódica con período 2π, a diferencia de la Transformada de Fourier continua que también usa $X(\omega)$ pero para señales continuas.

Características principales:

- *Dominio temporal*: Señales discretas aperiódicas (energía finita: $\sum_n |x[n]|^2 < \infty$)
- *Dominio frecuencial*: Espectro continuo y periódico con período 2π
- *Frecuencia normalizada*: ω representa frecuencia digital ($\omega = 2\pi f T_s$)
- *Aplicaciones*: Diseño de filtros digitales, análisis espectral, procesamiento digital de señales

Transformada Discreta de Fourier (DFT): Señales Discretas Periódicas

La DFT maneja señales discretas y periódicas (o de duración finita), produciendo espectros discretos:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-j\frac{2\pi kn}{N}} \quad \text{(Análisis)} \tag{7}$$

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k]\, e^{j\frac{2\pi kn}{N}} \quad \text{(Síntesis)} \tag{8}$$

Características principales:

- *Dominio temporal*: Señales discretas periódicas o de duración finita (N muestras)
- *Dominio frecuencial*: Espectro discreto con N componentes frecuenciales
- *Implementación*: Algoritmo FFT para cálculo eficiente ($O(N \log N)$)
- *Aplicaciones*: Análisis espectral computacional, convolución rápida, procesamiento en bloque

Relaciones y Transiciones Fundamentales

Las cuatro transformadas están interconectadas mediante procesos límite y muestreo:

Periodicización temporal ($T \to \infty$): La Serie de Fourier converge a la Transformada de Fourier

$$\lim_{T\to\infty} \sum_k c_k \delta(\omega - k\omega_0) \to X(\omega) \tag{9}$$

Muestreo temporal: La Transformada de Fourier se relaciona con la DTFT mediante

$$X(\omega) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c\left(\frac{\omega - 2\pi k}{T_s}\right) \tag{10}$$

Periodicización frecuencial: La DTFT se aproxima por la DFT mediante ventaneo

$$X[k] \approx X(\omega)\big|_{\omega=\frac{2\pi k}{N}} \tag{11}$$

Tabla Comparativa de Propiedades

Transformada	Señal	Espectro	Dominio ω	Aplicación Principal
Serie de Fourier	Continua periódica	Discreto	$k\omega_0$	Análisis armónico
Transformada de Fourier	Continua aperiódica	Continuo	$\mathbb{R}$	Sistemas analógicos
DTFT	Discreta aperiódica	Continuo periódico	$[-\pi, \pi]$	Filtros digitales
DFT	Discreta periódica	Discreto	$\frac{2\pi k}{N}$	Procesamiento computacional

Dualidad Tiempo-Frecuencia y Principios Unificadores

Todas las herramientas de Fourier manifiestan la *dualidad tiempo-frecuencia*: la concentración temporal implica dispersión espectral y viceversa. Este principio se formaliza en desigualdades de incertidumbre y es fundamental para:

- *Diseño de ventanas*: Compromiso entre resolución temporal y frecuencial
- *Análisis tiempo-frecuencia*: Transformadas cortas (STFT), wavelets
- *Teoría de muestreo*: Relación entre ancho de banda y frecuencia de Nyquist
- *Compresión de señales*: Representaciones esparsas en dominios conjugados

---

1. Como hemos visto a lo largo de los auxiliares, el concepto de una eigenfunción es una herramienta extremadamente importante en el estudio de sistemas LTI. Lo mismo puede decirse de los sistemas lineales pero variantes en el tiempo. Considere tal sistema con entrada $x(t)$ y salida $y(t)$. Decimos que una señal $\phi(t)$ es una *eigenfunción* del sistema si

$$\phi(t) \to \lambda\phi(t)$$

Es decir, si $x(t) = \phi(t)$, entonces $y(t) = \lambda\phi(t)$, donde la constante compleja λ se llama el *eigenvalor asociado con* $\phi(t)$.

1. Suponga que podemos representar la entrada $x(t)$ al sistema como una combinación lineal de eigenfunciones $\phi_k(t)$, cada una de las cuales tiene un eigenvalor correspondiente λ_k.

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \phi_k(t)$$

Exprese la salida $y(t)$ del sistema en términos de $\{c_k\}$, $\{\phi_k(t)\}$, y $\{\lambda_k\}$.

2. Demuestre que las funciones $\phi_k(t) = t^k$ son eigenfunciones del sistema caracterizado por la ecuación diferencial

$$y(t) = t^2 \frac{d^2x(t)}{dt^2} + t\frac{dx(t)}{dt}$$

Para cada $\phi_k(t)$, determine el eigenvalor correspondiente λ_k.

Solución:

Resolución 1.1

Primero recordemos que un sistema invariante en el tiempo cumple con la propiedad de que si la entrada se desplaza en el tiempo, la salida se desplaza en la misma cantidad, es decir, si $x(t) \to y(t)$, entonces $x(t - t_0) \to y(t - t_0)$.

Sin embargo, ahora estamos considerando un sistema variante en el tiempo, es decir, un sistema cuyas características pueden cambiar con el tiempo, pero que sigue siendo lineal. En este caso, la salida no se desplaza la misma cantidad que la entrada cuando hay un desplazamiento temporal. Esto significa que si $x(t) \to y(t)$, entonces $x(t - t_0) \to y'(t)$ donde $y'(t) \neq y(t - t_0)$.

Las implicancias de esto son significativas: en sistemas LTI podemos usar la respuesta al impulso $h(t)$ y la convolución para caracterizar completamente el sistema, pero en sistemas variantes en el tiempo necesitamos una función de dos variables $h(t, \tau)$ que depende tanto del tiempo de observación como del momento de aplicación del impulso. Además, las funciones exponenciales complejas $e^{j\omega t}$ ya no son eigenfunciones universales, y el concepto de respuesta en frecuencia $H(\omega)$ no aplica directamente.

Para resolver esta parte, utilizamos la propiedad fundamental de linealidad de los sistemas. Cuando la entrada del sistema es una combinación lineal de eigenfunciones, podemos aplicar el principio de superposición.

Dado que cada función $\phi_k(t)$ es una eigenfunción del sistema con eigenvalor asociado λ_k, esto significa que:

$$\phi_k(t) \to \lambda_k \phi_k(t)$$

Es decir, cuando la entrada es $\phi_k(t)$, la salida correspondiente es $\lambda_k \phi_k(t)$.

Ahora, si la entrada total es:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \phi_k(t)$$

Por la propiedad de linearidad del sistema, la salida será la suma de las respuestas individuales a cada componente:

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \cdot (\lambda_k \phi_k(t)) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \lambda_k c_k \phi_k(t)$$

Por lo tanto, la salida del sistema es:

$$\boxed{y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \lambda_k c_k \phi_k(t)}$$

Resolución 1.2

Para demostrar que $\phi_k(t) = t^k$ son eigenfunciones del sistema dado, necesitamos verificar que cuando $x(t) = t^k$, la salida $y(t)$ sea un múltiplo escalar de t^k. El sistema está caracterizado por la ecuación diferencial:

$$y(t) = t^2 \frac{d^2x(t)}{dt^2} + t\frac{dx(t)}{dt}$$

Para proceder con la demostración, primero calculamos las derivadas necesarias de $\phi_k(t) = t^k$. La primera derivada nos da $\frac{d\phi_k(t)}{dt} = kt^{k-1}$, mientras que la segunda derivada resulta en $\frac{d^2\phi_k(t)}{dt^2} = k(k-1)t^{k-2}$.

Ahora sustituimos estas expresiones en la ecuación del sistema. Si consideramos $x(t) = \phi_k(t) = t^k$, entonces:

$$\begin{aligned}
y(t) &= t^2 \cdot k(k-1)t^{k-2} + t \cdot kt^{k-1} && (12)\\
&= k(k-1)t^{k-2+2} + kt^{k-1+1} && (13)\\
&= k(k-1)t^k + kt^k && (14)\\
&= kt^k(k-1) + kt^k && (15)\\
&= kt^k[(k-1) + 1] && (16)\\
&= kt^k \cdot k = k^2t^k && (17)
\end{aligned}$$

El resultado final muestra que $y(t) = k^2t^k = k^2\phi_k(t)$, lo cual confirma que cuando la entrada es $\phi_k(t) = t^k$, la salida es exactamente k^2 veces la entrada. Esto establece que $\phi_k(t) = t^k$ son efectivamente eigenfunciones del sistema diferencial dado.

Por lo tanto, el eigenvalor correspondiente a cada eigenfunción $\phi_k(t) = t^k$ es $\boxed{\lambda_k = k^2}$. Este resultado nos indica que cada potencia de t es amplificada por el cuadrado de su exponente cuando pasa a través de este sistema diferencial específico.

2. El propósito de este problema es mostrar que la representación de una señal periódica arbitraria por una serie de Fourier, o más generalmente por una combinación lineal de cualquier conjunto de funciones ortogonales,

es computacionalmente eficiente y de hecho es muy útil para obtener buenas aproximaciones de señales.

Específicamente, sea $\phi_0(t)$, $\phi_1(t)$, $\phi_{-1}(t)$, $\phi_2(t)$, ..., un conjunto de funciones ortonormales en el intervalo $a \leq t \leq b$, y sea $x(t)$ una señal dada. Considere la siguiente aproximación de $x(t)$ sobre el intervalo $a \leq t \leq b$:

$$\hat{x}(t) = \sum_{i=-N}^{N} a_i \phi_i(t), \qquad \text{(P7.10-1)}$$

donde los a_i son constantes (en general, complejas). Para medir la desviación entre $x(t)$ y la aproximación en serie $\hat{x}(t)$, consideramos el error $e_N(t)$ definido como

$$e_N(t) = x(t) - \hat{x}(t) \qquad \text{(P7.10-2)}$$

Un criterio razonable y ampliamente usado para medir la calidad de la aproximación es la energía en la señal de error sobre el intervalo de interés, es decir, la integral de la magnitud del error al cuadrado sobre el intervalo $a \leq t \leq b$:

$$E = \int_a^b |e_N(t)|^2 \, dt \qquad \text{(P7.10-3)}$$

1. Muestre que E se minimiza al elegir

$$a_i = \int_a^b x(t)\phi_i^*(t) \, dt \qquad \text{(P7.10-4)}$$

   Hint: Use las ecuaciones (P7.10-1) a (P7.10-3) para expresar E en términos de a_i, $\phi_i(t)$, y $x(t)$. Luego exprese a_i en coordenadas rectangulares como $a_i = b_i + jc_i$, y muestre que las ecuaciones

$$\frac{\partial E}{\partial b_i} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial E}{\partial c_i} = 0, \quad i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm N,$$

   se satisfacen por los a_i dados en la ecuación (P7.10-4).

2. Determine cómo cambia el resultado de la parte (a) si los $\{\phi_i(t)\}$ son ortogonales pero no ortonormales, con

$$A_i = \int_a^b |\phi_i(t)|^2 \, dt$$

3. Sea $\phi_k(t) = e^{jk\omega_0 t}$ y elija cualquier intervalo de longitud $T_0 = 2\pi/\omega_0$. Muestre que los a_i que minimizan E están dados en la ecuación (4.45) del texto (página 180).

Solución:

Resolución 2.1

Para demostrar que E se minimiza con la elección dada de coeficientes, comenzamos expresando la aproximación como:

$$\hat{x}_N(t) = \sum_{k=-N}^{N} a_k \phi_k(t)$$

La señal de error correspondiente es:

$$e_N(t) = x(t) - \hat{x}_N(t) = x(t) - \sum_{k=-N}^{N} a_k \phi_k(t)$$

Para encontrar la energía del error, recordamos que el cuadrado de la magnitud se calcula como el producto de la señal con su conjugada compleja:

$$|e_N(t)|^2 = \left[x(t) - \sum_k a_k \phi_k(t) \right] \left[x^*(t) - \sum_l a_l^* \phi_l^*(t) \right]$$

Expandiendo esta expresión obtenemos:

$$|e_N(t)|^2 = |x(t)|^2 - \sum_k a_k^* x(t) \phi_k^*(t) - \sum_l a_l x^*(t) \phi_l(t) + \sum_k \sum_l a_k a_l^* \phi_k(t) \phi_l^*(t)$$

Integrando sobre el intervalo $[a, b]$ y usando la propiedad de ortonormalidad de las funciones $\phi_k(t)$:

$$\int_a^b \phi_k(t) \phi_l^*(t) dt = \begin{cases} 1, & k = l \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Obtenemos la energía total del error:

$$E = \int_a^b |x(t)|^2 dt - \sum_k a_k^* \int_a^b x(t) \phi_k^*(t) dt - \sum_k a_k \int_a^b x^*(t) \phi_k(t) dt + \sum_k |a_k|^2$$

Para minimizar E, expresamos $a_k = b_k + jc_k$ donde b_k y c_k son reales. Primero, notemos que:

$$a_k^* = (b_k + jc_k)^* = b_k - jc_k$$

$$|a_k|^2 = a_k a_k^* = (b_k + jc_k)(b_k - jc_k) = b_k^2 + c_k^2$$

Sustituyendo en la expresión para E:

$$E = \int_a^b |x(t)|^2 dt - \sum_k (b_k - jc_k) \int_a^b x(t) \phi_k^*(t) dt - \sum_k (b_k + jc_k) \int_a^b x^*(t) \phi_k(t) dt + \sum_k (b_k^2 + c_k^2)$$

Para simplificar la notación, definamos:

$$I_k = \int_a^b x(t) \phi_k^*(t) dt \quad \text{y} \quad J_k = \int_a^b x^*(t) \phi_k(t) dt$$

Entonces:

$$E = \int_a^b |x(t)|^2 dt - \sum_k (b_k - jc_k) I_k - \sum_k (b_k + jc_k) J_k + \sum_k (b_k^2 + c_k^2)$$

Expandiendo los términos:

$$E = \int_a^b |x(t)|^2 dt - \sum_k (b_k I_k - jc_k I_k + b_k J_k + jc_k J_k) + \sum_k (b_k^2 + c_k^2)$$

$$= \int_a^b |x(t)|^2 dt - \sum_k b_k(I_k + J_k) - \sum_k jc_k(J_k - I_k) + \sum_k (b_k^2 + c_k^2)$$

Ahora calculamos las derivadas parciales. Para $\frac{\partial E}{\partial b_k}$:

$$\frac{\partial E}{\partial b_k} = \frac{\partial}{\partial b_k}\left[\int_a^b |x(t)|^2 dt - \sum_l b_l(I_l + J_l) - \sum_l jc_l(J_l - I_l) + \sum_l (b_l^2 + c_l^2)\right]$$

Como solo el término con índice $l = k$ contribuye a la derivada parcial respecto a b_k:

$$\frac{\partial E}{\partial b_k} = 0 - (I_k + J_k) - 0 + 2b_k = 2b_k - (I_k + J_k)$$

Sustituyendo las definiciones de I_k y J_k:

$$\boxed{\frac{\partial E}{\partial b_k} = 2b_k - \int_a^b x(t)\phi_k^*(t)dt - \int_a^b x^*(t)\phi_k(t)dt}$$

Para $\frac{\partial E}{\partial c_k}$:

$$\frac{\partial E}{\partial c_k} = \frac{\partial}{\partial c_k}\left[\int_a^b |x(t)|^2 dt - \sum_l b_l(I_l + J_l) - \sum_l jc_l(J_l - I_l) + \sum_l (b_l^2 + c_l^2)\right]$$

Como solo el término con índice $l = k$ contribuye a la derivada parcial respecto a c_k:

$$\frac{\partial E}{\partial c_k} = 0 - 0 - j(J_k - I_k) + 2c_k = 2c_k - j(J_k - I_k)$$

Sustituyendo las definiciones:

$$\boxed{\frac{\partial E}{\partial c_k} = 2c_k - j\left(\int_a^b x^*(t)\phi_k(t)dt - \int_a^b x(t)\phi_k^*(t)dt\right)}$$

$$= 2c_k + j\int_a^b x(t)\phi_k^*(t)dt - j\int_a^b x^*(t)\phi_k(t)dt$$

Igualando ambas derivadas a cero, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:
De $\frac{\partial E}{\partial b_k} = 0$:

$$2b_k - \int_a^b x(t)\phi_k^*(t)dt - \int_a^b x^*(t)\phi_k(t)dt = 0$$

De $\frac{\partial E}{\partial c_k} = 0$:

$$2c_k + j\int_a^b x(t)\phi_k^*(t)dt - j\int_a^b x^*(t)\phi_k(t)dt = 0$$

Para simplificar la notación, definamos:

$$\alpha_k = \int_a^b x(t)\phi_k^*(t)dt \quad \text{y} \quad \beta_k = \int_a^b x^*(t)\phi_k(t)dt$$

Observemos que $\beta_k = \left(\int_a^b x(t)\phi_k^*(t)dt\right)^* = \alpha_k^*$ debido a que:

$$\beta_k = \int_a^b x^*(t)\phi_k(t)dt = \left(\int_a^b [x^*(t)\phi_k(t)]^* dt\right)^* = \left(\int_a^b x(t)\phi_k^*(t)dt\right)^* = \alpha_k^*$$

Sustituyendo en nuestras ecuaciones:

De la primera ecuación:

$$2b_k - \alpha_k - \alpha_k^* = 0$$

$$b_k = \frac{\alpha_k + \alpha_k^*}{2} = \mathrm{Re}(\alpha_k)$$

De la segunda ecuación:

$$2c_k + j\alpha_k - j\alpha_k^* = 0$$

$$c_k = \frac{j(\alpha_k^* - \alpha_k)}{2} = \frac{j(-2j\mathrm{Im}(\alpha_k))}{2} = \mathrm{Im}(\alpha_k)$$

Por lo tanto:

$$a_k = b_k + jc_k = \mathrm{Re}(\alpha_k) + j\mathrm{Im}(\alpha_k) = \alpha_k$$

Concluyendo que:

$$a_k = \int_a^b x(t)\phi_k^*(t)dt$$

Por lo tanto, los coeficientes que minimizan el error son:

$$\boxed{a_k = \int_a^b x(t)\phi_k^*(t)dt}$$

Resolución 2.2

Cuando las funciones $\{\phi_k(t)\}$ son ortogonales pero no ortonormales, la única diferencia en el resultado de la parte (a) es que la propiedad de ortogonalidad ahora se expresa como:

$$\int_a^b \sum_k \sum_l a_k a_l^* \phi_k(t)\phi_l^*(t)dt = \sum_k |a_k|^2 A_k$$

donde $A_k = \int_a^b |\phi_k(t)|^2 dt$ es la norma al cuadrado de cada función.

Siguiendo el mismo procedimiento de minimización que en la parte anterior, es fácil ver que ahora obtenemos:

$$\boxed{a_k = \frac{1}{A_k}\int_a^b x(t)\phi_k^*(t)dt}$$

El factor adicional $\frac{1}{A_k}$ surge debido a la normalización necesaria cuando las funciones no son ortonormales.

Resolución 2.3

Para el caso específico donde $\phi_k(t) = e^{jk\omega_0 t}$, primero verificamos la ortogonalidad:

$$\int_{T_0} e^{jk\omega_0 t} e^{-jl\omega_0 t} dt = \int_{T_0} e^{j(k-l)\omega_0 t} dt = T_0 \delta_{kl}$$

donde $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ es el período fundamental.

Usando los resultados de las partes (a) y (b), y dado que $A_k = T_0$ para todas las funciones exponenciales, podemos escribir:

$$a_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

Esta expresión se puede escribir sobre cualquier intervalo de longitud T_0:

$$\boxed{a_k = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt}$$

Esta es precisamente la fórmula para los coeficientes de la serie de Fourier dada en la ecuación (4.45) del texto, demostrando así que los coeficientes de Fourier son aquellos que minimizan la energía del error en la aproximación por series de Fourier.

3. Considere dos secuencias periódicas específicas $\tilde{x}[n]$ y $\tilde{g}[n]$. $\tilde{x}[n]$ tiene período N y $\tilde{g}[n]$ tiene período M. La secuencia $\tilde{w}[n]$ se define como $\tilde{w}[n] = \tilde{x}[n] + \tilde{g}[n]$.

   1. Muestre que $\tilde{w}[n]$ es periódica con período MN.
   2. Dado que $\tilde{x}[n]$ tiene período N, sus coeficientes de la serie de Fourier discreta a_k también tienen período N. De manera similar, dado que $\tilde{g}[n]$ tiene período M, sus coeficientes de la serie de Fourier discreta b_k también tienen período M. Los coeficientes de la serie de Fourier discreta de $\tilde{w}[n]$, c_k, tienen período MN. Determine c_k en términos de a_k y b_k.

Solución:

Resolución 3.1

Para demostrar que $\tilde{w}[n]$ es periódica con período MN, necesitamos mostrar que $\tilde{w}[n + MN] = \tilde{w}[n]$ para todos los valores de n.

Por definición, tenemos:

$$\tilde{w}[n] = \tilde{x}[n] + \tilde{g}[n]$$

Evaluando la secuencia en $n + MN$:

$$\tilde{w}[n + MN] = \tilde{x}[n + MN] + \tilde{g}[n + MN]$$

Dado que $\tilde{x}[n]$ tiene período N, se cumple que $\tilde{x}[n+N] = \tilde{x}[n]$. Como MN es un múltiplo entero de N (específicamente $MN = M \cdot N$), tenemos:

$$\tilde{x}[n+MN] = \tilde{x}[n]$$

De manera similar, dado que $\tilde{g}[n]$ tiene período M, se cumple que $\tilde{g}[n+M] = \tilde{g}[n]$. Como MN es un múltiplo entero de M (específicamente $MN = N \cdot M$), tenemos:

$$\tilde{g}[n+MN] = \tilde{g}[n]$$

Por lo tanto:

$$\tilde{w}[n+MN] = \tilde{x}[n] + \tilde{g}[n] = \tilde{w}[n]$$

Esto demuestra que $\tilde{w}[n]$ es periódica con período MN.

Resolución 3.2

Para encontrar los coeficientes c_k de la serie de Fourier discreta de $\tilde{w}[n]$, utilizamos la fórmula de análisis. Recordemos que para una secuencia periódica de período N, la fórmula de análisis de la DFT viene dada por:

$$X[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi kn}{N}}$$

En nuestro caso específico, $\tilde{w}[n]$ tiene período MN, por lo que aplicando esta fórmula:

$$c_k = \frac{1}{MN} \sum_{n=0}^{MN-1} \tilde{w}[n] e^{-jk(2\pi/MN)n} = \frac{1}{MN} \sum_{n=0}^{MN-1} [\tilde{x}[n] + \tilde{g}[n]] e^{-jk(2\pi/MN)n}$$

Separando la suma:

$$c_k = \frac{1}{MN} \sum_{n=0}^{MN-1} \tilde{x}[n] e^{-jk(2\pi/MN)n} + \frac{1}{MN} \sum_{n=0}^{MN-1} \tilde{g}[n] e^{-jk(2\pi/MN)n}$$

Para el primer término, reorganizamos la suma considerando que $\tilde{x}[n]$ se repite cada N muestras.

La clave está en reorganizar el índice de suma único $m \in [0, MN-1]$ usando dos índices anidados.

Como $\tilde{x}[n]$ tiene período N, cuando sumamos sobre MN términos, estamos efectivamente sumando M bloques completos de N muestras cada uno. Cada bloque contiene exactamente los mismos valores debido a la periodicidad.

Matemáticamente, escribimos cualquier índice m en el rango $[0, MN-1]$ como:

$$m = n + lN$$

donde:

- $n \in [0, N-1]$: posición *relativa* dentro de un período de longitud N
- $l \in [0, M-1]$: identifica cuál de los M bloques/períodos estamos considerando

Ejemplo detallado con $M = 3, N = 4$ (entonces $MN = 12$):

m	n	l	Bloque	Interpretación
0	0	0	1er bloque	$\tilde{x}[0]$ del período base
1	1	0	1er bloque	$\tilde{x}[1]$ del período base
2	2	0	1er bloque	$\tilde{x}[2]$ del período base
3	3	0	1er bloque	$\tilde{x}[3]$ del período base
4	0	1	2do bloque	$\tilde{x}[4] = \tilde{x}[0]$ (periodicidad)
5	1	1	2do bloque	$\tilde{x}[5] = \tilde{x}[1]$ (periodicidad)
6	2	1	2do bloque	$\tilde{x}[6] = \tilde{x}[2]$ (periodicidad)
7	3	1	2do bloque	$\tilde{x}[7] = \tilde{x}[3]$ (periodicidad)
8	0	2	3er bloque	$\tilde{x}[8] = \tilde{x}[0]$ (periodicidad)
9	1	2	3er bloque	$\tilde{x}[9] = \tilde{x}[1]$ (periodicidad)
10	2	2	3er bloque	$\tilde{x}[10] = \tilde{x}[2]$ (periodicidad)
11	3	2	3er bloque	$\tilde{x}[11] = \tilde{x}[3]$ (periodicidad)

En lugar de sumar 12 términos diferentes, sumamos 3 bloques de 4 términos idénticos cada uno, lo que nos permite factorizar y simplificar las expresiones.

Ahora aplicamos esta reorganización a nuestro problema:

$$c_k = \frac{1}{MN}\sum_{n=0}^{MN-1}\tilde{w}[n]e^{-jk(2\pi/MN)n} = \frac{1}{MN}\sum_{n=0}^{MN-1}[\tilde{x}[n] + \tilde{g}[n]]e^{-jk(2\pi/MN)n}$$

$$= \frac{1}{MN}\sum_{n=0}^{MN-1}\tilde{x}[n]e^{-jk(2\pi/MN)n} + \frac{1}{MN}\sum_{n=0}^{MN-1}\tilde{g}[n]e^{-jk(2\pi/MN)n}$$

$$= \frac{1}{MN}\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}[n]\sum_{l=0}^{M-1}e^{-jk(2\pi/MN)(n+lN)} + \frac{1}{MN}\sum_{n=0}^{M-1}\tilde{g}[n]\sum_{l=0}^{N-1}e^{-jk(2\pi/MN)(n+lM)}$$

Ahora desarrollamos cada exponencial y separamos términos:

$$= \frac{1}{MN}\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}[n]e^{-jk(2\pi/MN)n}\sum_{l=0}^{M-1}e^{-jk(2\pi/MN)lN} + \frac{1}{MN}\sum_{n=0}^{M-1}\tilde{g}[n]e^{-jk(2\pi/MN)n}\sum_{l=0}^{N-1}e^{-jk(2\pi/MN)lM}$$

Luego podemos simplificar los expoenentes como:

- Primer término: $e^{-jk(2\pi/MN)lN} = e^{-jk(2\pi/M)l}$
- Segundo término: $e^{-jk(2\pi/MN)lM} = e^{-jk(2\pi/N)l}$

$$= \frac{1}{MN}\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}[n]e^{-jk(2\pi/MN)n}\sum_{l=0}^{M-1}e^{-jk(2\pi/M)l} + \frac{1}{MN}\sum_{n=0}^{M-1}\tilde{g}[n]e^{-jk(2\pi/MN)n}\sum_{l=0}^{N-1}e^{-jk(2\pi/N)l}$$

Recordemos que los coeficientes DFT se definen como:

- Para $\tilde{x}[n]$ (período N): $a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}[n]e^{-jk(2\pi/N)n}$
- Para $\tilde{g}[n]$ (período M): $b_k = \frac{1}{M}\sum_{n=0}^{M-1}\tilde{g}[n]e^{-jk(2\pi/M)n}$

Para evaluar las sumas geométricas internas, recordemos la suma geométrica:

$$\sum_{l=0}^{L-1} r^l = \frac{1-r^L}{1-r}$$

Primera suma geométrica: $\sum_{l=0}^{M-1} e^{-jk(2\pi/M)l}$, donde $r = e^{-jk(2\pi/M)}$.
Caso 1: Si $k = mM$ (múltiplo de M): $e^{-jk(2\pi/M)l} = e^{-j2\pi ml} = 1$, entonces $\sum_{l=0}^{M-1} 1 = M$
Caso 2: Si k no es múltiplo de M: $\sum_{l=0}^{M-1} r^l = \frac{1-r^M}{1-r} = \frac{1-e^{-j2\pi k}}{1-e^{-j2\pi k/M}} = \frac{1-1}{1-e^{-j2\pi k/M}} = 0$
Segunda suma geométrica: $\sum_{l=0}^{N-1} e^{-jk(2\pi/N)l}$
Caso 1: Si $k = nN$ (múltiplo de N): $\sum_{l=0}^{N-1} e^{-jk(2\pi/N)l} = N$
Caso 2: Si k no es múltiplo de N: $\sum_{l=0}^{N-1} e^{-jk(2\pi/N)l} = 0$
Ahora sustituimos estos resultados en nuestra expresión:

$$c_k = \frac{1}{MN}\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}[n]e^{-jk(2\pi/MN)n}\sum_{l=0}^{M-1} e^{-jk(2\pi/M)l} + \frac{1}{MN}\sum_{n=0}^{M-1}\tilde{g}[n]e^{-jk(2\pi/MN)n}\sum_{l=0}^{N-1} e^{-jk(2\pi/N)l}$$

Primer término: Cuando k es múltiplo de M (es decir, $k = mM$):

$$\frac{1}{MN}\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}[n]e^{-jmM(2\pi/MN)n}\cdot M = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}[n]e^{-jm(2\pi/N)n}$$

Reconocemos que esto es exactamente $a_m = a_{k/M}$ (coeficiente DFT de $\tilde{x}[n]$ con período N).
Segundo término: Cuando k es múltiplo de N (es decir, $k = nN$):

$$\frac{1}{MN}\sum_{n=0}^{M-1}\tilde{g}[n]e^{-jnN(2\pi/MN)n}\cdot N = \frac{1}{M}\sum_{n=0}^{M-1}\tilde{g}[n]e^{-jn(2\pi/M)n}$$

Reconocemos que esto es exactamente $b_n = b_{k/N}$ (coeficiente DFT de $\tilde{g}[n]$ con período M).
Por lo tanto:

$$c_k = \begin{cases} \frac{1}{N}a_{k/M} + \frac{1}{M}b_{k/N}, & \text{para } k \text{ múltiplo de } M \text{ y } N \\ \frac{1}{N}a_{k/M}, & \text{para } k \text{ múltiplo de } M \text{ solamente} \\ \frac{1}{M}b_{k/N}, & \text{para } k \text{ múltiplo de } N \text{ solamente} \\ 0, & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Por lo tanto, los coeficientes c_k están dados por:

$$c_k = \begin{cases} \frac{1}{N} a_{k/M} + \frac{1}{M} b_{k/N}, & \text{para } k \text{ múltiplo de } M \text{ y } N \\ \frac{1}{N} a_{k/M}, & \text{para } k \text{ múltiplo de } M \text{ solamente} \\ \frac{1}{M} b_{k/N}, & \text{para } k \text{ múltiplo de } N \text{ solamente} \\ 0, & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

donde a_k y b_k son los coeficientes de la serie de Fourier discreta de $\tilde{x}[n]$ y $\tilde{g}[n]$, respectivamente.

4. Use propiedades de la transformada de Fourier para mostrar por inducción que la transformada de Fourier de

$$x(t) = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-at} u(t), \qquad a > 0$$

es

$$X(\omega) = \frac{1}{(a + j\omega)^n}$$

Solución:

Resolución 6.1

Demostraremos por inducción que para la señal dada:

$$x(t) = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-at} u(t), \qquad a > 0$$

su transformada de Fourier es:

$$X(\omega) = \frac{1}{(a + j\omega)^n}$$

Para $n = 1$:

$$x(t) = e^{-at} u(t), \qquad a > 0$$

$$X(\omega) = \frac{1}{a + j\omega}$$

Este es un resultado fundamental conocido de las tablas de transformadas de Fourier.

Para $n = 2$:

$$x(t) = te^{-at} u(t)$$

Utilizando la propiedad de diferenciación en frecuencia:

$$tx(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} j \frac{d}{d\omega} X(\omega)$$

Por lo tanto:

$$X(\omega) = j \frac{d}{d\omega} \left[\frac{1}{a + j\omega} \right] = j \frac{d}{d\omega} (a + j\omega)^{-1}$$

$$= j \cdot (-1)(a + j\omega)^{-2} \cdot j = -j^2 (a + j\omega)^{-2} = \frac{1}{(a + j\omega)^2}$$

Hipótesis de inducción para n: Asumimos que es verdadero para n:

$$x(t) = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at}u(t)$$

$$X(\omega) = \frac{1}{(a+j\omega)^n}$$

Consideramos el caso para $n+1$:

$$x(t) = \frac{t^n}{n!}e^{-at}u(t)$$

Podemos escribir:

$$\frac{t^n}{n!}e^{-at}u(t) = \frac{t}{n} \cdot \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at}u(t)$$

Aplicando la propiedad de diferenciación en frecuencia:

$$X(\omega) = \frac{j}{n}\frac{d}{d\omega}\left[\frac{1}{(a+j\omega)^n}\right]$$

$$= \frac{j}{n}\frac{d}{d\omega}(a+j\omega)^{-n}$$

$$= \frac{j}{n} \cdot (-n)(a+j\omega)^{-n-1} \cdot j$$

$$= \frac{j}{n} \cdot (-n)j(a+j\omega)^{-n-1}$$

$$= \frac{(-n)j^2}{n}(a+j\omega)^{-n-1}$$

$$= \frac{(-n)(-1)}{n}(a+j\omega)^{-n-1}$$

$$= \frac{1}{(a+j\omega)^{n+1}}$$

Por lo tanto, es verdadero para todo n.

Hemos demostrado por inducción que:

$$\boxed{\mathcal{F}\left\{\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at}u(t)\right\} = \frac{1}{(a+j\omega)^n}}$$