Electromagnetismo Aplicado (EL3103-1)
Clase auxiliar extra
Prof. Benjamin Jacard H.
Prof. Aux. Erik Saez A.

Ingeniería Eléctrica
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

1. Resuelva los siguientes problemas basados en el esquema de la figura

   (a) Las expresiones para el campo eléctrico $\mathcal{E}$ y la intensidad magnética $\mathcal{H}$.

   (b) Obtenga una expresión para E_1^- (onda reflejada del medio 1), tal que esta dependa de (E_2^-, Y_2, Y_3, Y_1) considerando una distancia $d = \frac{\lambda}{4}$.

   (c) Sea el caso en que $\varepsilon_2 = \sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_3}$, demuestre en base a la expresión anterior que no existirá onda reflejada en el medio 1. *Hint*: ocupar la siguiente expresión:

$$(b+c)(b-a) + (b+a)(b-c) = (b^2 - ac) \tag{1}$$

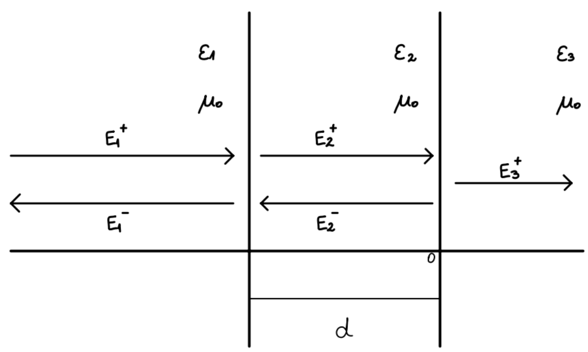

Figura 1: Esquema de los dielectricos

Solución:

- Se tiene las siguientes expresiones para los campo es eléctricos y magnéticos según los medios y las zonas de interés:

Campo eléctrico e intensidad magnética z $\leq$ d

$$E_1 = E_1^+ e^{-j\beta z} + E_1^- e^{j\beta z} \tag{1}$$
$$H_1 = Y_1 E_1^+ e^{-j\beta z} - Y_1 E_1^- e^{j\beta z} \tag{2}$$

Campo eléctrico e intensidad magnética eléctricos d $\leq$ z $\leq$ 0

$$E_2 = E_2^+ e^{-j\beta z} + E_2^- e^{j\beta z} \tag{3}$$
$$H_2 = Y_2 E_2^+ e^{-j\beta z} - Y_2 E_2^- e^{j\beta z} \tag{4}$$

Campo eléctrico e intensidad magnética eléctricos z $\geq$ 0

$$E_3 = E_3^+ e^{-j\beta z} + 0 \tag{5}$$
$$H_3 = Y_3 E_3^+ e^{-j\beta z} + 0 \tag{6}$$

Teniendo la consideración que en el medio 3 no habrá onda reflejada si no que solo transmitida

- Se busca el obtener una relación para la intensidad de campo eléctrico E_1^- tal que dependa de las variables (E_2^-, Y_2, Y_3, Y_1), con lo que se evaluaran en las diferentes interfaces tal que permitan utilizar condiciones de borde.

Primera condición

$$E_1(z=-d) = E_2(z=-d) \tag{7}$$
$$E_1^+ e^{j\beta d} + E_1^- e^{-j\beta d} = E_2^+ e^{j\beta d} + E_2^- e^{-j\beta d} \tag{8}$$

Luego se evaluando en d=$\lambda/4$ se tendrá:

$$E_1^+(j) + E_1^-(-j) = E_2^+(j) + E_2^-(-j) \tag{9}$$
$$E_1^+ - E_1^- = E_2^+ - E_2^- \tag{10}$$

De manera análoga para la intensidad de campo magnético:

$$H_1(z=-d) = H_2(z=-d) \tag{11}$$
$$Y_1 E_1^+ e^{j\beta d} - Y_1 E_1^- e^{-j\beta d} = Y_2 E_2^+ e^{j\beta d} - Y_2 E_2^- e^{-j\beta d} \tag{12}$$
$$Y_1 E_1^+(j) - Y_1 E_1^-(-j) = Y_2 E_2^+(j) - Y_2 E_2^-(-j) \tag{13}$$
$$Y_1 E_1^+ + Y_1 E_1^- = Y_2 E_2^+ + Y_2 E_2^- \tag{14}$$

Segunda condición

$$E_2(z=0) = E_3(z=0) \tag{15}$$
$$E_2^+ e^{j\beta \cdot 0} + E_2^- e^{-j\beta \cdot 0} = E_3^+ e^{j\beta \cdot 0} \tag{16}$$
$$E_2^+ + E_2^- = E_3^+ \tag{17}$$

$$H_2(z=0) = H_3(z=0) \tag{18}$$
$$Y_2 E_2^+ e^{j\beta \cdot 0} - Y_2 E_2^- e^{-j\beta \cdot 0} = Y_3 E_3^+ e^{j\beta \cdot 0} \tag{19}$$
$$Y_2 E_2^+ - Y_2 E_2^- = Y_3 E_3^+ \tag{20}$$

Luego se obtienen las ecuaciones que nos permitirán obtener lo buscando , tal que:

$$Y_2E_2^+ - Y_2E_2^- = Y_3E_3^+ \tag{21}$$
$$Y_2E_2^+ - Y_2E_2^- = Y_3(E_2^+ + E_2^-) \tag{22}$$
$$Y_2E_2^+ - Y_2E_2^- = Y_3E_2^+ + Y_3E_2^- \tag{23}$$
$$E_2^+(Y_2 - Y_3) = E_2^-(Y_2 + Y_3) \tag{24}$$
$$E_2^+ = E_2^- \frac{(Y_2 + Y_3)}{(Y_2 - Y_3)} \tag{25}$$

Se tendrá por otro lado que:

$$E_1^+ - E_1^- = E_2^+ - E_2^- \tag{26}$$
$$E_1^+ = E_2^+ - E_2^- + E_1^- \tag{27}$$
$$\tag{28}$$

Luego reemplazando esta expresión en lo siguiente:

$$Y_1E_1^+ + Y_1E_1^- = Y_2E_2^+ + Y_2E_2^- \tag{29}$$
$$Y_1(E_2^+ - E_2^- + E_1^-) + Y_1E_1^- = Y_2E_2^+ + Y_2E_2^- \tag{30}$$
$$Y_1E_2^+ - Y_1E_2^- + 2Y_1E_1^- = Y_2E_2^+ + Y_2E_2^- \tag{31}$$
$$\tag{32}$$

Dado que se busca el obtener explícitamente la expresión E_1^- , despejando en base a lo anterior se tendrá:

$$E_1^- = \frac{E_2^+(Y_2 - Y_1) + E_2^-(Y_2 + Y_1)}{2Y_1} \tag{33}$$
$$\tag{34}$$

Considerando la ecuación de borde obtenida con anterioridad:

$$E_2^+ = \frac{E_2^-(Y_2 + Y_3)}{(Y_2 - Y_3)} \tag{35}$$

Por tanto

$$E_1^- = \frac{E_2^- \left(\frac{(Y_2+Y_3)(Y_2-Y_1)}{(Y_2-Y_3)} + (Y_2 + Y_1) \right)}{2Y_1} \tag{36}$$

Finalmente se obtiene una expresión para E_1^- en términos de las variables buscadas.

- Se busca el analizar la situación en que $\epsilon_2 = \sqrt{\epsilon_1 \cdot \epsilon_3}$, por lo volviendo sobre la ecuación anterior.

$$E_1^- = \frac{E_2^- \left(\frac{(Y_2+Y_3)(Y_2-Y_1)}{(Y_2-Y_3)} + (Y_2 + Y_1) \right)}{2Y_1} \tag{37}$$
$$= \frac{E_2^-((Y_2 + Y_3)(Y_2 - Y_1) + (Y_2 + Y_1)(Y_2 - Y_3))}{2Y_1(Y_2 - Y_3)} \tag{38}$$

Utilizando lo siguiente:

$$(b+c)(b-a)+(b+a)(b-c)=(b^2-ac) \tag{39}$$

Con lo que la expresión se reduce:

$$E_1^- = \frac{E_2^-(Y_2^2 - Y_1Y_3)}{2Y_1(Y_2-Y_3)} \tag{40}$$

Luego tomando el numerador de la expresión anterior y recordando que la admitancia viene dada por $Y = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}$

$$\begin{align}
Y_2^2 - Y_1Y_3 &= \left(\sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_0}}\right)^2 - \left(\sqrt{\frac{\epsilon_1\cdot\epsilon_3}{\mu_0^2}}\right) \tag{41}\\
&= \frac{\epsilon_2}{\mu_0} - \frac{\sqrt{\epsilon_1\cdot\epsilon_3}}{\mu_0} \tag{42}\\
&= \frac{\sqrt{\epsilon_1\cdot\epsilon_3}}{\mu_0} - \frac{\sqrt{\epsilon_1\cdot\epsilon_3}}{\mu_0} \tag{43}\\
&= 0 \tag{44}
\end{align}$$

Con lo que bajo la condición inicial se obtiene que $E_1^- = 0$, es decir que no se tendrá onda reflejada en el medio 1.

2. Considere una onda plana cuyo campo eléctrico tiene magnitud E_0 y dirección $\hat{x}$, incidiendo normalmente en una placa dieléctrica imperfecta de permitividad $\varepsilon = \varepsilon' - j\varepsilon''$ y espesor d.

   (a) Los campos totales $E(z)$ y $H(z)$ en todas las regiones.

   (b) El coeficiente de reflexión $\Gamma(z)$ en $z=-d$.

   (c) La potencia disipada en el dieléctrico y la potencia de la onda transmitida en el medio 3, considerando unidad de área en el plano xy.

   Datos:

   - $|E_0| = 1$ [V/m] (valor máximo)
   - $f = 10$ GHz
   - $d = 1$ cm
   - $\varepsilon_r' = 2.5, \quad \varepsilon_r'' = 0.1$

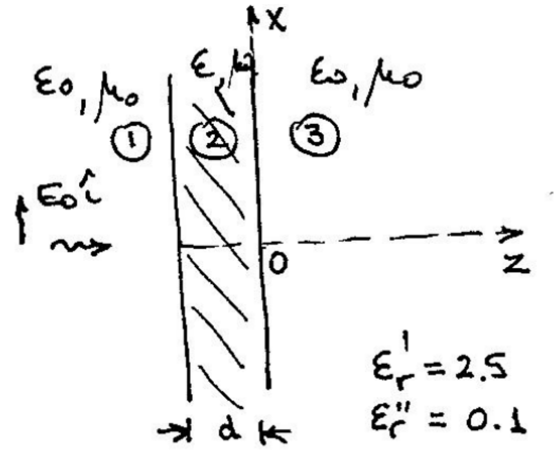

Figura 2: Esquema de los dielectricos

Solución:

1. Dado que se trabajan en diferentes medios, se debe considerar la permitividad y permeabilidad de cada medio. En este caso, se tiene:

$$
\begin{aligned}
&\text{Medio 1:} && \varepsilon_0,\ \mu_0 \\
&\text{Medio 2:} && \varepsilon_2 = \varepsilon = \varepsilon' - j\varepsilon'' = (\varepsilon_r' - j\varepsilon_r'')\varepsilon_0 \\
&\text{Medio 3:} && \varepsilon_3 = \varepsilon_0 \\
& && k_0 = \omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0} = \frac{2\pi}{\lambda_0}, \quad \lambda_0 = \frac{c}{f}, \quad c = 3\times 10^8\,[\text{m/s}] \\
& && Y_0 = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}
\end{aligned}
$$

Luego tenemos que los campos electricos y magnéticos en cada medio seran los siguientes: **Medio 1:**

$$
\begin{aligned}
\vec{E}_1 &= \left(E_0 e^{-jk_0 z} + E_r e^{jk_0 z}\right) e^{j\omega t}\,\hat{x} \\
\vec{H}_1 &= \left(Y_0\,\hat{k}\times E_0 e^{-jk_0 z}\hat{x} + Y_0(-\hat{k})\times E_r e^{jk_0 z}\hat{x}\right) e^{j\omega t} \\
&= \left(Y_0 E_0 e^{-jk_0 z}\hat{y} + Y_0 E_r e^{jk_0 z}(-\hat{y})\right) e^{j\omega t}
\end{aligned}
$$

Medio 2:

$$
\begin{aligned}
\vec{E}_2 &= \left(E_2^+ e^{-jk_2 z} + E_2^- e^{jk_2 z}\right) e^{j\omega t}\,\hat{x} \\
\vec{H}_2 &= Y_2\left(E_2^+ e^{-jk_2 z}\hat{y} + E_2^- e^{jk_2 z}(-\hat{y})\right) e^{j\omega t}
\end{aligned}
$$

Luego tenemos las siguientes relaciones dadas por:

$$
\begin{aligned}
&k_2 = \omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_2} = \beta_2 - j\alpha_2 \quad \text{donde } jk_2 = \alpha + j\beta \\
&Y_2 = Y_0\sqrt{\varepsilon_{2r}} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_0}} \\
&\varepsilon_{2r} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_0}
\end{aligned}
$$

Medio 3:

$$\vec{E}_3 = E_3^+ e^{-jk_3 z} \hat{x}\, e^{j\omega t}$$
$$\vec{H}_3 = Y_3\, \hat{k} \times \vec{E}_3 = Y_3 E_3^+ e^{-jk_3 z} \hat{y}\, e^{j\omega t}$$
$$k_3 = k_0, \quad Y_3 = Y_0$$

2. Se busca obtener el coeficiente de reflexión Γ en la interfaz $z = -d$. Recordando que este coeficiente nos indica la relación entre la onda reflejada y la onda incidente, se tiene:

$$\Gamma = \frac{E_1^- e^{-jk_0 d}}{E_0 e^{jk_0 d}} = \frac{E_1^-}{E_0} e^{-j2k_0 d} \tag{45}$$

Para determinar E_1^-, se deben imponer condiciones de frontera para los campos $\vec{E}$ y $\vec{H}$ en las interfaces $z = 0$ y $z = -d$:

En $z = 0$**:**

$$E_2 = E_3 \Rightarrow E_2^+ + E_2^- = E_3^+ \tag{46}$$
$$H_2 = H_3 \Rightarrow Y_2(E_2^+ - E_2^-) = Y_3 E_3^+ \tag{47}$$

En $z = -d$**:**

$$E_1 = E_2 \Rightarrow E_0 e^{jk_0 d} + E_1^- e^{-jk_0 d} = E_2^+ e^{jk_2 d} + E_2^- e^{-jk_2 d} \tag{48}$$
$$H_1 = H_2 \Rightarrow Y_0(E_0 e^{jk_0 d} - E_1^- e^{-jk_0 d}) = Y_2(E_2^+ e^{jk_2 d} - E_2^- e^{-jk_2 d}) \tag{49}$$

De las relaciones entre E_2^+ y E_2^- para z=0, tenemos que:

$$Y_2 \left(\frac{E_2^+ - E_2^-}{E_2^+ + E_2^-} \right) = Y_3 \Rightarrow Y_2 E_2^+ - Y_2 E_2^- = Y_3 E_2^+ + Y_3 E_2^- \tag{50}$$
$$(Y_2 - Y_3) E_2^+ = (Y_2 + Y_3) E_2^- \tag{51}$$

Luego las expresiones para Γ son las siguientes:

$$1 + \Gamma = \frac{E_2^+ e^{jk_2 d} + E_2^- e^{-jk_2 d}}{E_0 e^{jk_0 d}} \tag{52}$$
$$1 - \Gamma = \frac{Y_2}{Y_0} \cdot \frac{E_2^+ e^{jk_2 d} - E_2^- e^{-jk_2 d}}{E_0 e^{jk_0 d}} \tag{53}$$

Luego tenemos que:

$$\frac{1 - \Gamma}{1 + \Gamma} = \frac{Y_2}{Y_0} \cdot \frac{E_2^+ e^{jk_2 d} - E_2^- e^{-jk_2 d}}{E_2^+ e^{jk_2 d} + E_2^- e^{-jk_2 d}} \tag{54}$$

Sustituyendo $E_2^- = \frac{Y_2 - Y_3}{Y_2 + Y_3} E_2^+$, obtenemos:

$$\frac{1 - \Gamma}{1 + \Gamma} = \frac{Y_2}{Y_0} \cdot \frac{(Y_2 + Y_3) e^{jk_2 d} - (Y_2 - Y_3) e^{-jk_2 d}}{(Y_2 + Y_3) e^{jk_2 d} + (Y_2 - Y_3) e^{-jk_2 d}} \tag{55}$$

$$\Gamma = \frac{1 - \dfrac{Y_2}{Y_0} \cdot \dfrac{(Y_2+Y_3)e^{jk_2d} - (Y_2-Y_3)e^{-jk_2d}}{(Y_2+Y_3)e^{jk_2d} + (Y_2-Y_3)e^{-jk_2d}}}{1 + \dfrac{Y_2}{Y_0} \cdot \dfrac{(Y_2+Y_3)e^{jk_2d} - (Y_2-Y_3)e^{-jk_2d}}{(Y_2+Y_3)e^{jk_2d} + (Y_2-Y_3)e^{-jk_2d}}} \tag{56}$$

De la condición en $z = -d$ tenemos:

$$E_0 e^{jk_0d} + E_1^- e^{-jk_0d} = E_0 e^{jk_0d}(1+\Gamma) = E_2^+ e^{jk_2d} + E_2^- e^{-jk_2d} \tag{57}$$

$$\frac{Y_0}{Y_2}(E_0 e^{jk_0d} - E_1^- e^{-jk_0d}) = \frac{Y_0}{Y_2} E_0 e^{jk_0d}(1-\Gamma) = E_2^+ e^{jk_2d} - E_2^- e^{-jk_2d} \tag{58}$$

Sumando y restando:

$$E_0 e^{jk_0d}(1+\Gamma) + \frac{Y_0}{Y_2} E_0 e^{jk_0d}(1-\Gamma) = 2E_2^+ e^{jk_2d} \tag{59}$$

$$E_0 e^{jk_0d}(1+\Gamma) - \frac{Y_0}{Y_2} E_0 e^{jk_0d}(1-\Gamma) = 2E_2^- e^{-jk_2d} \tag{60}$$

Finalmente,de las ecuaciones anteriores se determina:

$$E_3^+ = E_2^+ + E_2^- \tag{61}$$

3. La potencia que se transmite al medio 3 se determina con el vector de Poynting y queda dada por:

$$P_{\text{trans}}^{\text{medio 3}} = \frac{1}{2}\Re\left\{\vec{E}_3^+ \times \vec{H}_3^{+*} \cdot \hat{k}\right\} \tag{62}$$

$$= \frac{1}{2} Y_3 \left|E_3^+\right|^2 \tag{63}$$

La potencia que entra a la placa dieléctrica está dada por la diferencia entre la potencia de la onda incidente y la potencia de la onda reflejada en la interfaz $z = -d$:

$$P_{\text{trans}}^{\text{placa diel.}} = P_{\text{inc}} - P_{\text{refl}}\Big|_{z=-d} \tag{64}$$

$$= P_{\text{inc}}(1-\rho^2), \quad \text{en que } \rho = |\Gamma| \tag{65}$$

$$= \frac{1}{2} Y_0 |E_0|^2 (1-\rho^2) \tag{66}$$

La potencia disipada en la placa dieléctrica queda dada por:

$$P_{\text{disip}}^{\text{placa diel.}} = P_{\text{trans}}^{\text{placa diel.}} - P_{\text{trans}}^{\text{medio 3}} \tag{67}$$

La constante de propagación en el medio 2 está dada por:

$$jk_2 = j\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_2} = j\omega\sqrt{\mu_0(\varepsilon_2' - j\varepsilon_2'')} = \alpha_2 + j\beta_2 \tag{68}$$

$$\alpha_2 = \omega \sqrt{\frac{\mu_0 \varepsilon_2'}{2} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{\varepsilon_2''}{\varepsilon_2'} \right)^2} - 1 \right)} \tag{69}$$

$$\beta_2 = \omega \sqrt{\frac{\mu_0 \varepsilon_2'}{2} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{\varepsilon_2''}{\varepsilon_2'} \right)^2} + 1 \right)} \tag{70}$$

Luego el factor de propagación

$$e^{jk_2 d} = e^{\alpha_2 d + j\beta_2 d} = e^{\alpha_2 d} e^{j\beta_2 d} = e^{\alpha_2 d}(\cos \beta_2 d + j \sin \beta_2 d) \tag{71}$$

$$e^{-jk_2 d} = e^{-\alpha_2 d - j\beta_2 d} = e^{-\alpha_2 d}(\cos \beta_2 d - j \sin \beta_2 d) \tag{72}$$

Para los cálculos numéricos es necesario trabajar con unidades del sistema MKS:

$$|E_0| = 1 \left[\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}\right], \qquad f = 10^{10}\ [\mathrm{Hz}], \qquad \omega = 2\pi f$$

$$d = 0{,}01\ [\mathrm{m}], \qquad \varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi} \times 10^{-9} \left[\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{m}}\right]$$

$$\varepsilon_2' = 2{,}5\,\varepsilon_0, \qquad \varepsilon_2'' = 0{,}1\,\varepsilon_0$$

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \left[\frac{\mathrm{H}}{\mathrm{m}}\right]$$