Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Eléctrica

Tarea 1

Tema a tratar

Integrantes:	Integrante 1
	Integrante 2
Profesor:	Profesor 1
Auxiliar:	Auxiliar 1
Ayudantes:	Ayudante 1
	Ayudante 2

Ayudante de laboratorio: Ayudante 1

Fecha de realización: 28 de septiembre de 2024
Fecha de entrega: 28 de septiembre de 2024
Santiago de Chile

Resumen

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetuer id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu neque. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus eu tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Curabitur auctor semper nulla. Donec varius orci eget risus. Duis nibh mi, congue eu, accumsan eleifend, sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim rutrum.

Índice de Contenidos

Índice de Figuras

Índice de Tablas

1. Informes con LaTeX

1.1. Una breve introducción

Este es un párrafo, puede contener múltiples “Expresiones” así como fórmulas o referencias[1] como (1) o (**??**). A continuación se muestra un ejemplo de inserción de imágenes (como la Figura 1) con el comando \insertimage:

Figura 1: Where are you? de “Internet”.

A continuación[2] se muestra un ejemplo de inserción de ecuaciones simples con el comando \insertequation:

$$a^k = b^k + c^k \quad \forall k > 2 \tag{1}$$

Este template [**?**] ha sido diseñado para que sea completamente compatible con editores LaTeX para escritorio y de manera online[**?**]. La compilación es realizada siempre usando las últimas versiones de las librerías, además se incluyen los parches oficiales para corregir eventuales *warnings*.

Este es un nuevo párrafo. Para crear uno basta con usar \\ en el anterior, lo que fuerza una nueva línea. También se pueden insertar con el comando `\newp` si el compilador de latex arroja una alerta del tipo *Underfull \hbox (badness 10000) in paragraph at lines ...*

1.2. Añadiendo tablas

También puedes usar tablas, ¡Crearlas es muy fácil!. Puedes usar el plugin Excel2Latex [**?**] de Excel para convertir las tablas a LaTeX o bien utilizar el “creador de tablas online” [**?**].

[1] Las referencias se hacen utilizando la expresión `\label`{etiqueta}.
[2] Como se puede observar las funciones `\insert`... añaden un párrafo automáticamente.

Tabla 1: Ejemplo de tablas.

Columna 1	**Columna 2**	**Columna 3**
ω	ν	δ
ξ	κ	ϖ

2. Pregunta 2

- **Escriba las condiciones necesarias para encontrar una solución óptima, utilizando el principio del máximo.**

  Se busca el obtener las condiciones necesarias para encontrar la solucion al problema de optimización, utilizando el principio del máximo o Pontryagin. Para ello, se considera el siguiente problema de optimización:

$$J = \int_0^T (ph(t) - cu(t))dt \tag{2}$$

Donde tanto las condiciones de borde como la dinamica del sistema vienen caracterizadas por:

$$\dot{x}rx(t)\left(1 - \frac{x(t)}{K}\right) - h(t) = 0 \tag{3}$$
$$x(0) = x_0 \tag{4}$$

Luego para encontrar la solución óptima, se plantea el Hamiltoniano asociado al problema de optimización:

$$H(x, u, t, \lambda) = ph(t) - cu(t) + \lambda\left(rx(t)\left(1 - \frac{x(t)}{K}\right) - h(t)\right) \tag{5}$$

Dado que $h(t) = x(t)u(t)$ reemplazando sobre lo anterior temenos que el Hamiltoniano sera tal que:

$$H(x, u, t, \lambda) = px(t)u(t) - cu(t) + \lambda\left(rx(t)\left(1 - \frac{x(t)}{K}\right) - x(t)u(t)\right) \tag{6}$$

Donde los λ son los multiplicadores de Lagrange asociados a las restricciones del problema. Luego, se plantean las condiciones de optimalidad asociadas al principio del máximo.

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x} \tag{7}$$
$$= -\frac{\partial}{\partial x}\left(px(t)u(t) - cu(t) + \lambda\left(rx(t)\left(1 - \frac{x(t)}{K}\right) - x(t)u(t)\right)\right) \tag{8}$$
$$= -(pqu(t) + \left(r - \frac{2rx(t)}{K}\right) - qu(t))\lambda) \tag{9}$$

Ademas debemos considerar que x(T) es una variable libre dado el enunciado, por lo que tendremos que:

$$\lambda(T) = 0 \tag{10}$$

Por lo que se obtiene una condicion terminal. Finalmente para el analisis de la entrada tenemos que considerar que esta puede tomar dos valores, por lo que factorizando el Hamiltoniano en función de u(t) se obtiene que:

$$H = \lambda r x(t)\left(1 - \frac{x}{K}\right) + u(t)\left(qx(t)(p - \lambda) - c\right) \tag{11}$$

Vemos por tanto que u(t) es una funcion lineal al hamiltoniano por lo que podemos definir dos condiciones tal que:

$$u^*(t) = 0 \quad \text{cuando} \quad qx(t)(p - \lambda(t)) - c < 0$$
$$u^*(t) = E \quad \text{cuando} \quad qx(t)(p - \lambda(t)) - c > 0$$

Por lo que separando por casos se tendra que:

$$\text{Para } u \equiv 0 \text{ tenemos:} \quad \begin{cases} \dot{x} = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right) \\ \dot{\lambda} = -r\left(1 - \frac{2x}{K}\right)\lambda \end{cases} \tag{12}$$

$$\text{Para } u \equiv E \text{ tenemos:} \quad \begin{cases} \dot{x} = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right) - qxE \\ \dot{\lambda} = -(pqE + \left(r\left(1 - \frac{2x}{K}\right) - qE\right)\lambda) \end{cases} \tag{13}$$

De esta manera se tiene que el comportamiento de la solución óptima se encuentrara determinada por los diferentes casos de u(t) que se puede caracterizar mediante:

$$F(x), \lambda) = qx(t)(p - \lambda) - c \tag{14}$$

Donde si es esta es mayor a 0 , se encontrara se tendra que u*(t) = E, mientras que si es menor a 0 se tendra que u*(t) = 0.

- **Simule curvas de nivel en el plano (x, ϕ), con ϕ el coestado. Interprete los resultados y concluya sobre el comportamiento óptimo de u(t).**
  Se busca obtener las curvas de nivel en el plano (x, λ) para esto se hace uso de *Matlab* tal que permita resolver las ecuaciones diferenciales asociadas a las condiciones de optimalidad obtenidas en el punto anterior para los diferentes casos, dando como resultado lo siguiente:

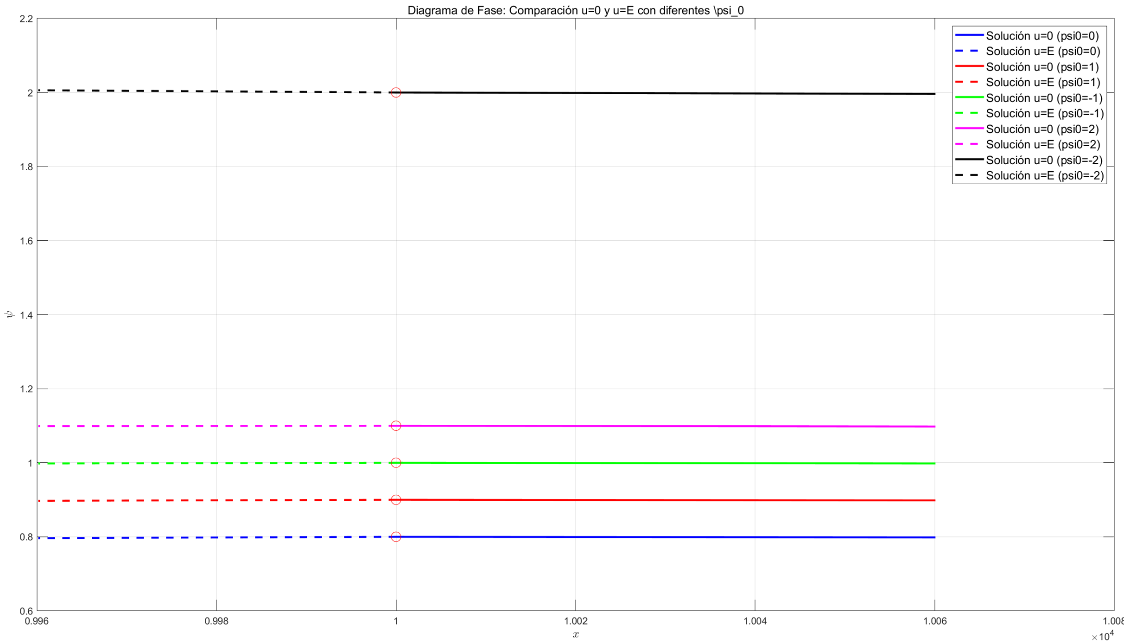

Figura 2: Curvas de nivel en el plano (x, λ) tanto para $u = 0$ como para $u = E$ para los diferentes valores de λ_0, en particular $\lambda_0 = \{0.8, 0.9, 1, 1.1, 2\}$.

Podemos analizar algunos valores de λ_0 en particular para obtener una mejor interpretacion del grafico con lo que se obtiene que:

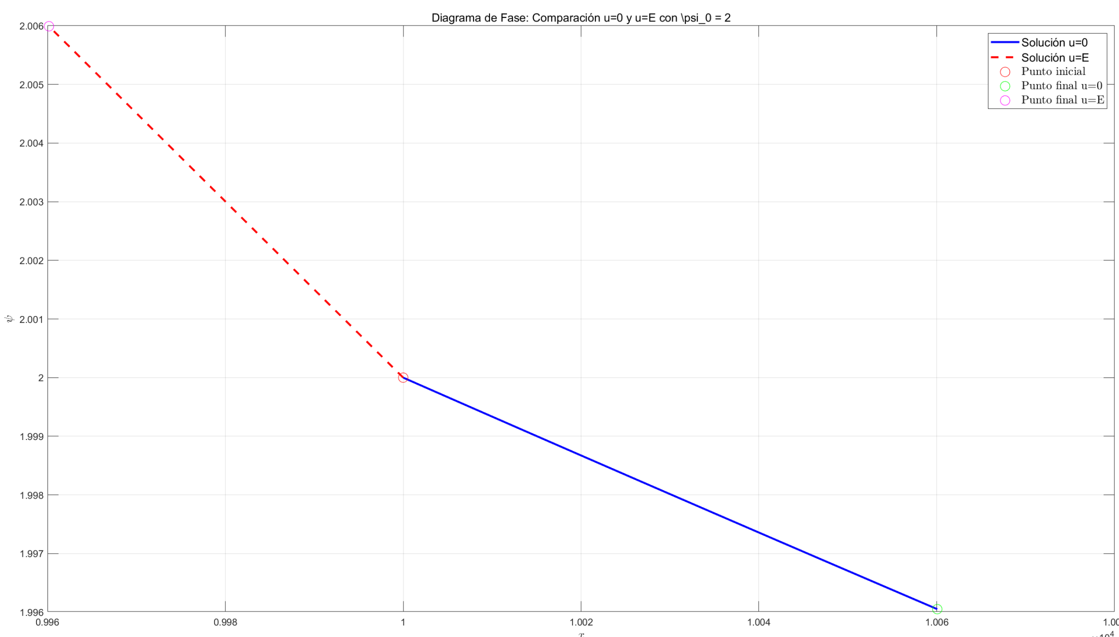

Figura 3: Curvas de nivel en el plano (x, λ) tanto para $u = 0$ como para $u = E$ para $\lambda_0 = 2$.

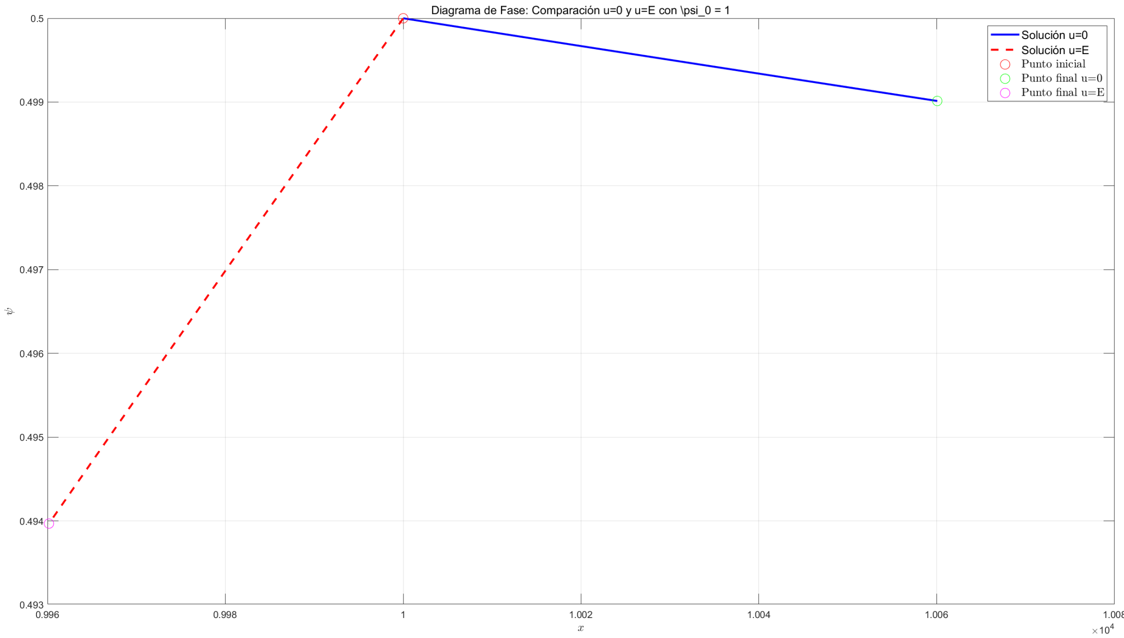

Figura 4: Curvas de nivel en el plano (x, λ) tanto para $u = 0$ como para $u = E$ para $\lambda_0 = 0.5$.

Luego se puede observar que el comportamiento de la solución óptima se encuentra determinada por los diferentes casos de u(t) ademas de el valor de la condicion inicial λ_0.

- **Encuentre una expresión para la acción de control óptima $u^\star(t)$ y la dinámica de la población de peces resultante $x^*(t)$, en función de las constantes conocidas. Grafique e interprete los resultados.**
  Dado que se busca obtener una expresion para el control optimo $u^*(t)$ y la dinamica de la poblacion de peces resultante $x^*(t)$, se debe tener en cuenta el tiempo para t_{cambio} para el cual se produce el cambio de comportamiento de la solución óptima, debido a que es importante saber cuando se produce el cambio de comportamiento en base a las ecuaciones, es por esto que se retoma la funcion $F(x, \lambda)$ obtenida con anterioridad, que nos determina el comportamiento de u(t), se analizara su dinamica en el tiempo para saber cuando esta experimenta un cambio de signo y dado que λ_0 es un parametro de eleccion libre, veremos su comportamiento cuando sea 0.5 y 2. por lo que tomando el primero se tendra que:

$$
\begin{aligned}
F(x(0), \lambda(0)) &= qx(0)(p - \lambda(0)) - c && (15)\\
&= 0.01(10.000)(1 - 0.5) - 0.1 && (16)\\
&= 0.05 && (17)
\end{aligned}
$$

Por lo que en tal caso dado que F(x(0),λ(0)) $>$ 0 se tendra que u(t) = E, por lo que se tendra que utilizar el set de ecuaciones asociadas a este caso. Dando al siguiente dinamica:

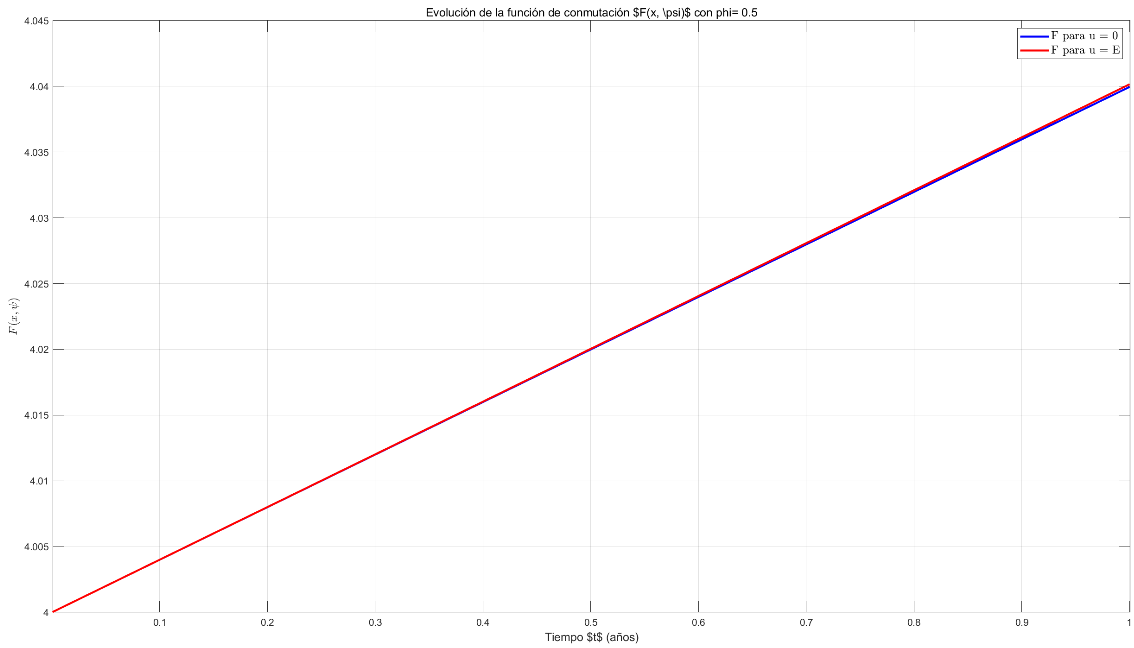

Figura 5: Dinamica de la poblacion de peces resultante $x^*(t)$ para $\lambda_0 = 0.5$.