Auxiliar #2

Erik Saez A.

Department of Electrical Engineering
Universidad de Chile

September 28, 2025

erik.saez@ug.uchile.cl

Contenidos

Fig.: Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas , Universidad de Chile.

Señales: Energía y Potencia — Definiciones

Definición 1 — Energía de una señal

Sea $((x[n])_{n\in\mathbb{Z}}$ o $(x(t))_{t\in\mathbb{R}}$ una señal (discreta o continua). Definimos su **energía** como:

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 \qquad \text{(discreto)}$$

$$E = \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} |x(t)|^2 \, dt \qquad \text{(continuo)}$$

Definición 2 — Señal de energía

Decimos que la señal $(x[n])_{n\in\mathbb{Z}}$ es una **señal de energía** si $E < \infty$. Si $E = \infty$, no es de energía.

Definición 3 — Potencia promedio

La potencia promedio de una señal es la cantidad de energía que la señal entrega por unidad de tiempo, y se define como:

$$P = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |x(t)|^2 \, dt$$

$$P = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} |x[n]|^2$$

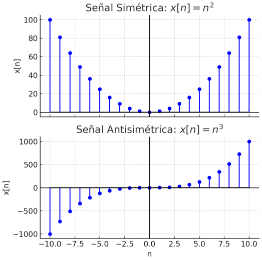
Señales: Energía y Potencia — Definiciones

Señales causales y anticausales

- Una señal $x[n]$ es **causal** si $x[n] = 0$ para todo $n < 0$.
- Una señal $x[n]$ es **anticausal** si $x[n] = 0$ para todo $n > 0$.

Señales simétricas y anti-simétricas

- Una señal $x[n]$ es **simétrica** si $x[n] = x[-n]$.
- Una señal $x[n]$ es **anti-simétrica** si $x[n] = -x[-n]$.



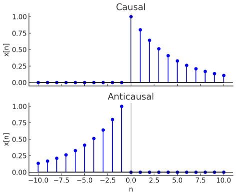


Fig.: Ejemplos de señales causales y anticausales.

Simetría en señales discretas: pares e impares

Propiedad

Toda señal $x[n]_{n\in\mathbb{Z}}$ tiene una parte **simétrica** y una parte **anti-simétrica**:

$$
\begin{aligned}
x[n] &= x_s[n] + x_a[n],\\
x_s[n] &= \frac{1}{2}\left(x[n] + x[-n]\right),\\
x_a[n] &= \frac{1}{2}\left(x[n] - x[-n]\right).
\end{aligned}
$$

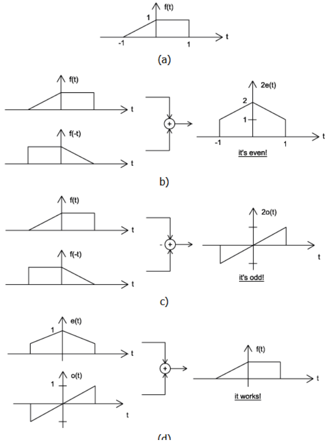


Fig.: Ejemplo de descomposición par/impar.

Funciones clásicas en tiempo discreto

Funciones clásicas

- **Impulso**

$$\delta[n] = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ 0, & n \neq 0. \end{cases} \tag{1}$$

- **Escalón**

$$u[n] = \begin{cases} 1, & n \geq 0, \\ 0, & n < 0. \end{cases} \tag{2}$$

- **Rampa**

$$r[n] = \begin{cases} n, & n \geq 0, \\ 0, & n < 0. \end{cases} \tag{3}$$

- **Exponencial compleja**

$$x[n] = A\left(re^{j\theta}\right)^n, \tag{4}$$

$$x[n] = A\,r^n e^{j\theta n} \tag{5}$$

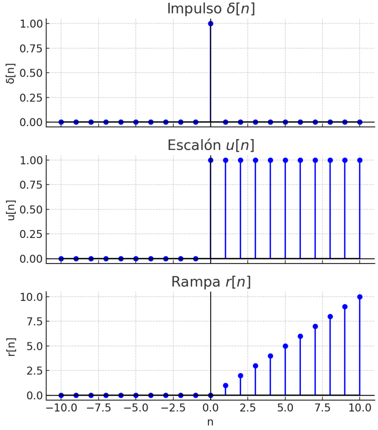


Fig.: Ejemplo de funciones clásicas.

Sistemas LTI

Definición (discreto)

Un sistema T es **lineal e invariante en el tiempo (LTI)** si cumple:

- **Linealidad (principio de superposición):**
  Para cualesquiera señales $x_1[n], x_2[n]$ y escalares $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,
  $$T\{\alpha x_1[n] + \beta x_2[n]\} = \alpha T\{x_1[n]\} + \beta T\{x_2[n]\}.$$
- **Invariancia en el tiempo:**
  El comportamiento del sistema no cambia si la entrada se desplaza en el tiempo. Es decir, para todo $k \in \mathbb{Z}$,
  $$T\{x[n-k]\} = y[n-k], \quad \text{donde } y[n] = T\{x[n]\}.$$
- **Respuesta al impulso y convolución:**
  La dinámica del sistema queda completamente caracterizada por su **respuesta al impulso**
  $$h[n] = T\{\delta[n]\}.$$
  La salida para cualquier entrada $x[n]$ se obtiene mediante la **convolución**:
  $$y[n] = (x * h)[n] = \sum_{k \in \mathbb{Z}} x[k]\, h[n-k].$$

Pregunta #1

Enunciado Pregunta #1

Sean los siguientes sistemas a tiempo discreto:

1. Determine si los siguientes sistemas a tiempo discreto son lineales y/o invariantes en el tiempo:
   - $y[n] = nx[n]$
   - $y[n] = e^{x[n]}$
   - $y[n] = \sum_{j=1}^{M} a_j \cdot x[n-j] + B$
2. Para el sistema a tiempo discreto T definido por la relación entrada-salida $y[n] = nx[n]$ bosqueje por separado $T_2(T((x[n])))$ y $T(T_2((x[n])))$ y compare con los resultados obtenidos en la parte a. Para el bosquejo considere la señal:

$$x[n] = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq 2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \tag{6}$$

Señal de prueba $x[n]$

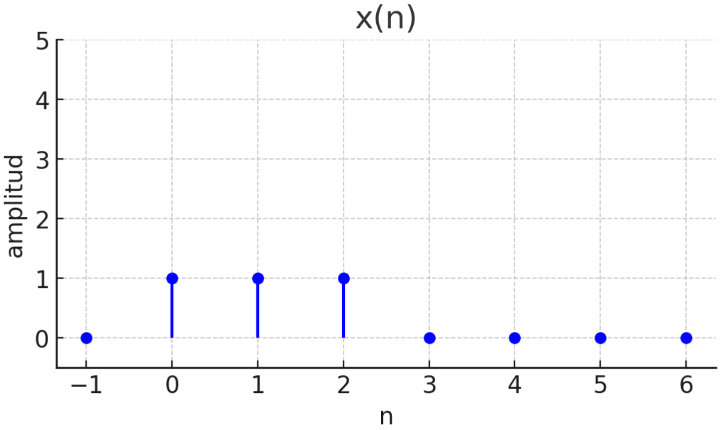
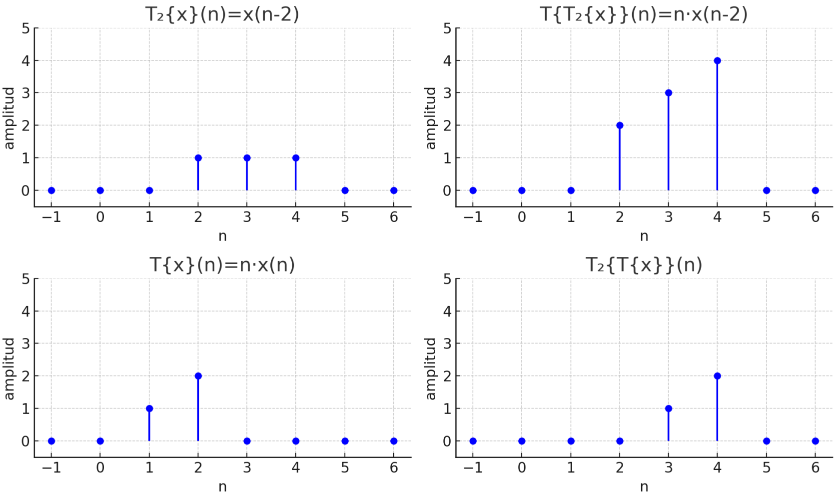


Fig.: Señal discreta $x[n]$.

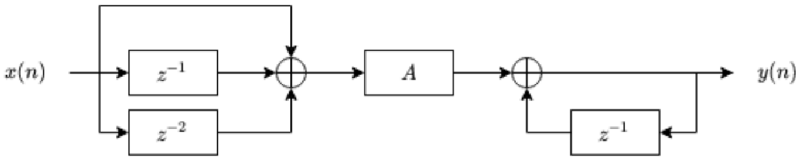
Comparación de $T_2 \circ T$ vs. $T \circ T_2$



Pregunta #2

Enunciado Pregunta #2

Escriba el siguiente sistema, bosqueje la salida del sistema si a la entrada hay un impulso de magnitud 1 centrado en 0 y clasifique esa señal de salida en cuanto a su energía y si corresponde, su potencia.



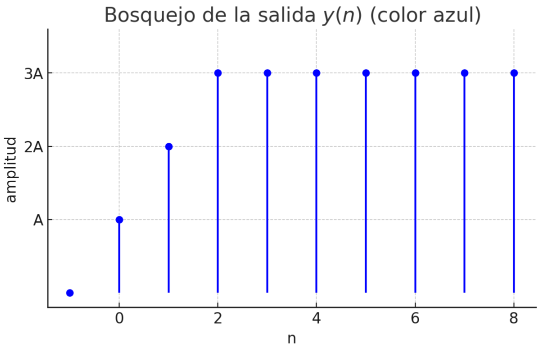


Fig.: Señal de salida del sistema para un impulso de magnitud 1 centrado en 0

Pregunta #3

Enunciado Pregunta #3

Considere el sistema mostrado en la figura, donde $h[n] = a^n u[n]$ con $-1 < a < 1$. Determine la respuesta del sistema bajo la excitación

$$x[n] = u[n+5] - u[n-10].$$

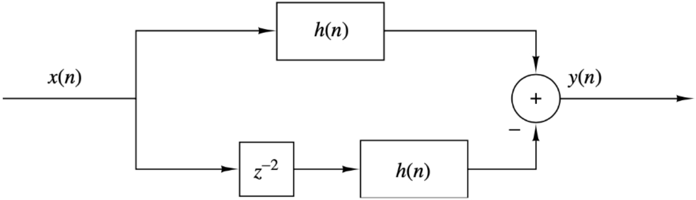


Fig.: Sistema a analizar.

Pregunta #4

Enunciado Pregunta #4

Demuestre que, si un sistema cumple

$$y[n] = T\{x[n]\} = x[n] * h[n] = \sum_{k \in \mathbb{Z}} x[k]\, h[n-k],$$

entonces, con $h[n]$ la respuesta al impulso del sistema, necesariamente el sistema es lineal e invariante en el tiempo (LTI).

Pregunta #5

Enunciado Pregunta #5

Tres sistemas con respuestas al impulso $h_1[n] = \delta[n] - \delta[n-1]$, $h_2[n] = h[n]$ y $h_3[n] = u[n]$ se conectan en cascada.

1. ¿Cuál es la respuesta al impulso total $h_c[n]$ del sistema en su conjunto?
2. ¿El orden de conexión afecta al sistema en su conjunto? Justifique.

Pregunta #6

Enunciado Pregunta #6

Considere el sistema a tiempo discreto de orden N caracterizado por la siguiente ecuación de diferencia de parámetros $b_1, \dots, b_N$ y $a_0, \dots, a_M$:

$$y(n) = b_1 y(n-1) + \cdots + b_N y(n-N) + a_0 x(n) + \cdots + a_M x(n-M), \tag{7}$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$.

1. Verifique que el sistema determinado en la Ec es lineal.
2. Verifique que el sistema determinado en la Ec es invariante en el tiempo (TI).

Continuacion Enunciado #6

1. Considere la versión con condiciones iniciales del sistema en (7), es decir, $y(n)$ se determina para $n \geq 0$ donde la entrada es $\left(x(n)\right)_{n\geq 0}$ (asumiendo valores nulos en tiempos negativos) y el vector de estado (condiciones iniciales de (7)) es $y_1 = y(-1), \ldots, y_N = y(-N)$. Verifique que la solución frente a la entrada $\left(x(n)\right)_{n\geq 0}$ y las condiciones iniciales $(y_1, \ldots, y_N)$ se puede escribir como

$$\left(y(n)\right)_{n\geq 0} = \left(y_{SO}(n)\right)_{n\geq 0} + \left(y_{IO}(n)\right)_{n\geq 0}, \tag{8}$$

   donde $\left(y_{SO}(n)\right)_{n\geq 0}$ denota la *respuesta de estado cero* y $\left(y_{IO}(n)\right)_{n\geq 0}$ denota la *respuesta de entrada cero*.
2. Bajo el setting del punto (c), verifique que la relación $\left(x(n)\right)_{n\geq 0} \mapsto \left(y_{SO}(n)\right)_{n\geq 0}$ determina un sistema LTI.
3. Bajo el setting del punto (c), verifique que la relación $(y_1, \ldots, y_N) \mapsto \left(y_{IO}(n)\right)_{n\geq 0}$ es lineal.