

Auxiliar #2

Erik Saez A.

Department of Electrical Engineering
Universidad de Chile

September 1, 2025

 erik.saez@ug.uchile.cl

Contenidos

- 1 Resumen
- 2 Pregunta 1
- 3 Pregunta 2
- 4 Pregunta 3
- 5 Pregunta 4
- 6 Pregunta 5
- 7 Pregunta 6



Fig.: Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas ,
Universidad de Chile.

Señales: Energía y Potencia — Definiciones

Definición 1 — Energía de una señal

Sea $((x[n])_{n \in \mathbb{Z}}$ o $(x(t))_{t \in \mathbb{R}}$ una señal (discreta o continua). Definimos su **energía** como:

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 \quad (\text{discreto})$$

$$E = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T |x(t)|^2 dt \quad (\text{continuo})$$

Definición 2 — Señal de energía

Decimos que la señal $(x[n])_{n \in \mathbb{Z}}$ es una **señal de energía** si $E < \infty$. Si $E = \infty$, no es de energía.

Definición 3 — Potencia promedio

La potencia promedio de una señal es la cantidad de energía que la señal entrega por unidad de tiempo, y se define como:

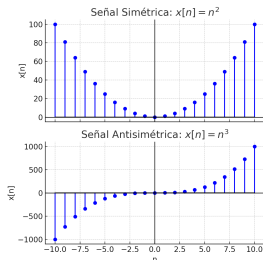
$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |x(t)|^2 dt$$

$$P = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N |x[n]|^2$$

Señales: Energía y Potencia — Definiciones

Señales causales y anticausales

- Una señal $x[n]$ es **causal** si $x[n] = 0$ para todo $n < 0$.
- Una señal $x[n]$ es **anticausal** si $x[n] = 0$ para todo $n > 0$.



Señales simétricas y anti-simétricas

- Una señal $x[n]$ es **simétrica** si $x[n] = x[-n]$.
- Una señal $x[n]$ es **anti-simétrica** si $x[n] = -x[-n]$.

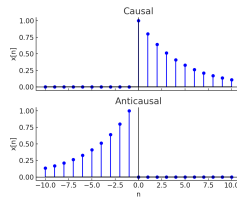


Fig.: Ejemplos de señales causales y anticausales.

Simetría en señales discretas: pares e impares

Propiedad

Toda señal $x[n]_{n \in \mathbb{Z}}$ tiene una parte **simétrica** y una parte **anti-simétrica**:

$$x[n] = x_s[n] + x_a[n],$$

$$x_s[n] = \frac{1}{2}(x[n] + x[-n]),$$

$$x_a[n] = \frac{1}{2}(x[n] - x[-n]).$$

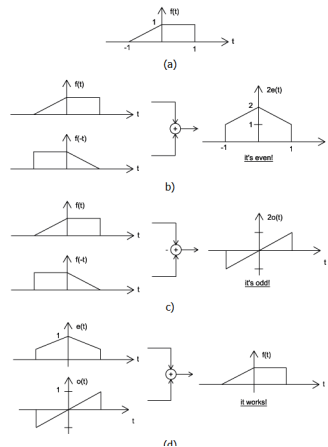


Fig.: Ejemplo de descomposición par/impar.

Funciones clásicas

■ Impulso

$$\delta[n] = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ 0, & n \neq 0. \end{cases} \quad (1)$$

■ Escalón

$$u[n] = \begin{cases} 1, & n \geq 0, \\ 0, & n < 0. \end{cases} \quad (2)$$

■ Rampa

$$r[n] = \begin{cases} n, & n \geq 0, \\ 0, & n < 0. \end{cases} \quad (3)$$

■ Exponencial compleja

$$x[n] = A(re^{j\theta})^n, \quad (4)$$

$$x[n] = A r^n e^{j\theta n}. \quad (5)$$

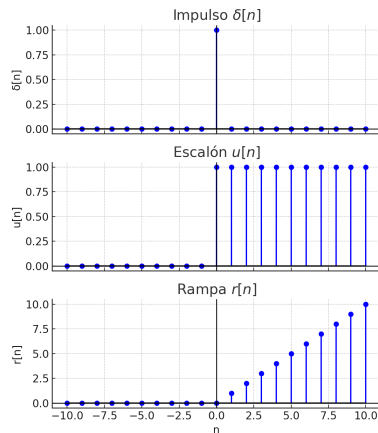


Fig.: Ejemplo de funciones clásicas.

Sistemas LTI

Definición (discreto)

Un sistema T es **lineal e invariante en el tiempo (LTI)** si cumple:

- **Linealidad (principio de superposición):**

Para cualesquiera señales $x_1[n]$, $x_2[n]$ y escalares $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$T\{\alpha x_1[n] + \beta x_2[n]\} = \alpha T\{x_1[n]\} + \beta T\{x_2[n]\}.$$

- **Invariancia en el tiempo:**

El comportamiento del sistema no cambia si la entrada se desplaza en el tiempo. Es decir, para todo $k \in \mathbb{Z}$,

$$T\{x[n - k]\} = y[n - k], \quad \text{donde } y[n] = T\{x[n]\}.$$

- **Respuesta al impulso y convolución:**

La dinámica del sistema queda completamente caracterizada por su **respuesta al impulso**

$$h[n] = T\{\delta[n]\}.$$

La salida para cualquier entrada $x[n]$ se obtiene mediante la **convolución**:

$$y[n] = (x * h)[n] = \sum_{k \in \mathbb{Z}} x[k] h[n - k].$$

Pregunta #1

Enunciado Pregunta #1

Sean los siguientes sistemas a tiempo discreto:

- 1** Determine si los siguientes sistemas a tiempo discreto son lineales y/o invariantes en el tiempo:

- $y[n] = nx[n]$
- $y[n] = e^{x[n]}$
- $y[n] = \sum_{j=1}^M a_j \cdot x[n-j] + B$

- 2** Para el sistema a tiempo discreto T definido por la relación entrada-salida $y[n] = nx[n]$ bosqueje por separado $T_2(T((x[n])))$ y $T(T_2((x[n])))$ y compare con los resultados obtenidos en la parte a. Para el bosquejo considere la señal:

$$x[n] = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq 2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (6)$$

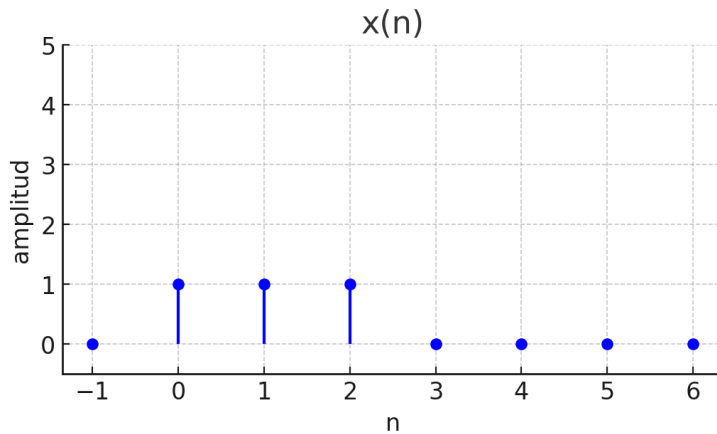


Fig.: Señal discreta $x[n]$.

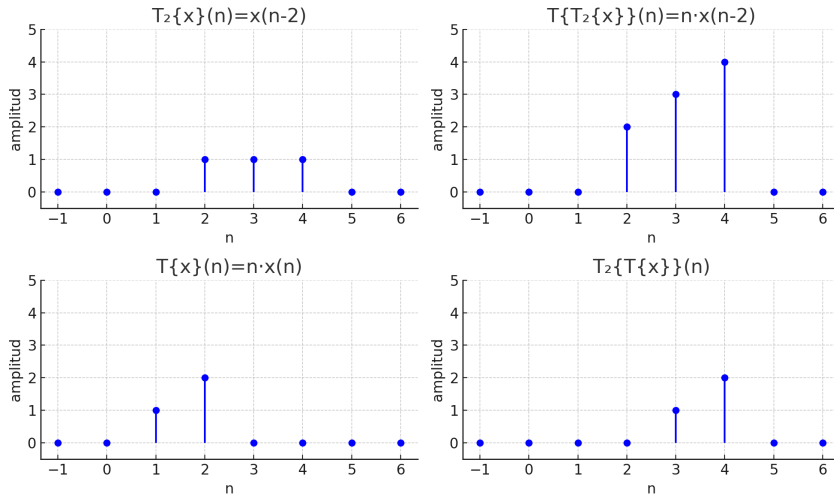
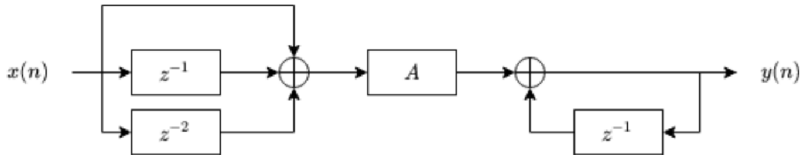


Fig.:

Pregunta #2

Enunciado Pregunta #2

Escriba el siguiente sistema, bosqueje la salida del sistema si a la entrada hay un impulso de magnitud 1 centrado en 0 y clasifique esa señal de salida en cuanto a su energía y si corresponde, su potencia.



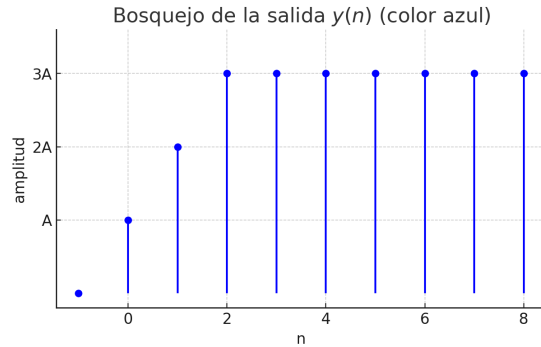


Fig.: Señal de salida del sistema para un impulso de magnitud 1 centrado en 0

Pregunta #3

Enunciado Pregunta #3

Considere el sistema mostrado en la figura, donde $h[n] = a^n u[n]$ con $-1 < a < 1$. Determine la respuesta del sistema bajo la excitación

$$x[n] = u[n + 5] - u[n - 10].$$

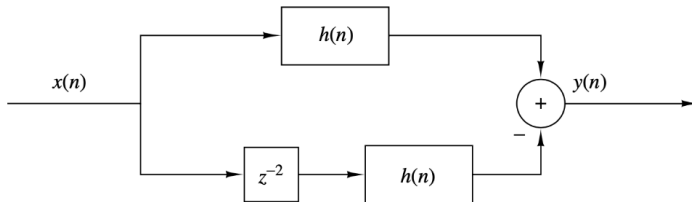


Fig.: Sistema a analizar.

Pregunta #4

Enunciado Pregunta #4

Demuestre que, si un sistema cumple

$$y[n] = T\{x[n]\} = x[n] * h[n] = \sum_{k \in \mathbb{Z}} x[k] h[n - k],$$

entonces, con $h[n]$ la respuesta al impulso del sistema, necesariamente el sistema es lineal e invariante en el tiempo (LTI).

Pregunta #5

Enunciado Pregunta #5

Tres sistemas con respuestas al impulso $h_1[n] = \delta[n] - \delta[n - 1]$, $h_2[n] = h[n]$ y $h_3[n] = u[n]$ se conectan en cascada.

- 1 ¿Cuál es la respuesta al impulso total $h_c[n]$ del sistema en su conjunto?
- 2 ¿El orden de conexión afecta al sistema en su conjunto? Justifique.

Pregunta #6

Enunciado Pregunta #6

Considere el sistema a tiempo discreto de orden N caracterizado por la siguiente ecuación de diferencia de parámetros b_1, \dots, b_N y a_0, \dots, a_M :

$$y(n) = b_1 y(n-1) + \dots + b_N y(n-N) + a_0 x(n) + \dots + a_M x(n-M), \quad (7)$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$.

- 1 Verifique que el sistema determinado en la Ec es lineal.
- 2 Verifique que el sistema determinado en la Ec es invariante en el tiempo (TI).

Continuacion Enunciado #6

- 1** Considere la versión con condiciones iniciales del sistema en (7), es decir, $y(n)$ se determina para $n \geq 0$ donde la entrada es $(x(n))_{n \geq 0}$ (asumiendo valores nulos en tiempos negativos) y el vector de estado (condiciones iniciales de (7)) es $y_1 = y(-1), \dots, y_N = y(-N)$. Verifique que la solución frente a la entrada $(x(n))_{n \geq 0}$ y las condiciones iniciales (y_1, \dots, y_N) se puede escribir como

$$(y(n))_{n \geq 0} = (y_{SO}(n))_{n \geq 0} + (y_{IO}(n))_{n \geq 0}, \quad (8)$$

donde $(y_{SO}(n))_{n \geq 0}$ denota la *respuesta de estado cero* y $(y_{IO}(n))_{n \geq 0}$ denota la *respuesta de entrada cero*.

- 2** Bajo el setting del punto (c), verifique que la relación $(x(n))_{n \geq 0} \mapsto (y_{SO}(n))_{n \geq 0}$ determina un sistema LTI.
- 3** Bajo el setting del punto (c), verifique que la relación $(y_1, \dots, y_N) \mapsto (y_{IO}(n))_{n \geq 0}$ es lineal.