



a

---

# Análisis de Sistemas Dinámicos y Estimación

EL3204-1

---

*Pauta Auxiliar 11 - Estimación*

Prof Marcos Orchard - Sebastian Espinoza.  
Prof Auxiliar Erik Sáez Aravena.

$$\mathcal{I}(\theta)$$

## Resumen

Este auxiliar cubre conceptos fundamentales de la teoría de estimación de parámetros, que complementa los temas de detección vistos anteriormente. En problemas de detección, el espacio paramétrico  $\Theta$  era discreto y finito, pero ahora trabajamos con un conjunto **infinito no numerable** de posibles valores para el parámetro que queremos estimar (un continuo).

### 1. Conceptos Básicos de Estimación

Algunos conceptos importante a considerar son:

1. **Espacio de observación ( $\mathbb{X}$ ):** Espacio donde la variable aleatoria  $X \in \mathbb{X}$  toma valores. Para vectores aleatorios,  $\mathbb{X}^n$  representa el espacio producto.
2. **Espacio de decisión ( $\Theta$ ):** En estimación, es un conjunto **infinito no numerable** de valores (a diferencia de detección donde era finito). Ejemplos:  $\Theta = \mathbb{R}^+$  para estimar amplitudes,  $\Theta = \mathbb{R}$  para estimar medias.
3. **Familia de distribuciones paramétricas ( $J_\theta$ ):** Conjunto de distribuciones indexadas por  $\theta$ :

$$J_\theta = \{P_X(x|\theta) : \theta \in \Theta\}$$

4. **Estimador:** Una función  $\hat{\theta}(x_1, \dots, x_n)$  que depende de las observaciones y entrega una estimación del parámetro  $\theta$  asociado a la distribución  $P_X(x|\theta)$ .

### 2. Propiedades de los Estimadores

1. **Estimador Insesgado:** Un estimador  $\hat{\theta}(x_1, \dots, x_n)$  es insesgado si:

$$\mathbb{E}[\hat{\theta}(X_1, \dots, X_n)] = \theta$$

Es decir, en promedio el estimador entrega el valor verdadero del parámetro.

2. **Estimador Asintóticamente Insesgado:** Si el sesgo tiende a cero cuando  $n \rightarrow \infty$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[\hat{\theta}(X_1, \dots, X_n)] = \theta$$

3. **Estimador Consistente:** Un estimador es consistente si converge en probabilidad al valor verdadero:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_X(|\hat{\theta}(X_1, \dots, X_n) - \theta| > \epsilon) = 0 \quad \forall \epsilon > 0$$

4. **Observación:** Mediante la desigualdad de Chebyshev, si un estimador es insesgado y su varianza tiende a cero cuando  $n \rightarrow \infty$ , entonces es consistente:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Var}(\hat{\theta}(X_1, \dots, X_n)) = 0 \implies \text{consistencia}$$

### 3. Condiciones de Regularidad

Las condiciones de regularidad permiten intercambiar el orden de derivación e integración en la función de verosimilitud. Bajo estas condiciones se cumple:

1. **Primera condición:** La esperanza de la derivada de la log-verosimilitud es cero:

$$\mathbb{E}_{X_1^n} \left[ \frac{\partial \ln L(X_1, \dots, X_n | \theta)}{\partial \theta} \right] = 0$$

2. **Segunda condición:** La esperanza de un término específico es cero:

$$\mathbb{E}_{X_1^n} \left[ \frac{1}{L(X_1, \dots, X_n | \theta)} \frac{\partial^2 L(X_1, \dots, X_n | \theta)}{\partial \theta^2} \right] = 0$$

3. **Identidad de Bartlett:** Relaciona la varianza con su segunda derivada:

$$\mathbb{E}_{X_1^n} \left[ \left( \frac{\partial \ln L}{\partial \theta} \right)^2 \right] = -\mathbb{E}_{X_1^n} \left[ \frac{\partial^2 \ln L}{\partial \theta^2} \right]$$

Esta identidad permite calcular la información de Fisher de dos formas equivalentes.

### 4. Información de Fisher

La información de Fisher  $\mathcal{I}(\theta)$  cuantifica cuánta información sobre el parámetro  $\theta$  contienen las observaciones:

$$\mathcal{I}(\theta) = \mathbb{E} \left[ \left( \frac{\partial \ln f(X | \theta)}{\partial \theta} \right)^2 \right] = -\mathbb{E} \left[ \frac{\partial^2 \ln f(X | \theta)}{\partial \theta^2} \right]$$

**Propiedad Aditiva:** Para muestras i.i.d., la información de Fisher es aditiva:

$$\mathcal{I}_n(\theta) = n \cdot \mathcal{I}_1(\theta)$$

Esta propiedad refleja que más observaciones independientes proporcionan más información sobre el parámetro.

### 5. Cota de Cramér-Rao

La cota de Cramér-Rao establece un límite inferior para la varianza de cualquier estimador insesgado:

$$\text{Var}(\hat{\theta}) \geq \frac{1}{\mathcal{I}(\theta)}$$

1. **Estimador Eficiente:** Un estimador insesgado que alcanza la cota de Cramér-Rao se llama **eficiente o de mínima varianza**
2. **Interpretación:** La información de Fisher es inversamente proporcional a la mínima varianza posible. Más información  $\implies$  menor varianza mínima.

## 6. Estimador de Máxima Verosimilitud (ML)

El estimador de máxima verosimilitud se obtiene maximizando la función de verosimilitud:

$$\hat{\theta}_{ML} = \arg \max_{\theta} L(x_1, \dots, x_n | \theta) = \arg \max_{\theta} \ln L(x_1, \dots, x_n | \theta)$$

### Propiedades del estimador ML:

- Bajo condiciones de regularidad, es asintóticamente insesgado
- Es consistente
- Es asintóticamente eficiente (alcanza la cota de Cramér-Rao cuando  $n \rightarrow \infty$ )
- Es invariante bajo transformaciones: si  $\hat{\theta}_{ML}$  es el ML de  $\theta$ , entonces  $g(\hat{\theta}_{ML})$  es el ML de  $g(\theta)$

**Método de solución:** Criterio de la primera derivada:

$$\frac{\partial \ln L(x_1, \dots, x_n | \theta)}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\hat{\theta}_{ML}} = 0$$

Verificar que la segunda derivada es negativa para confirmar que es un máximo.

## 7. Resumen de Verificaciones para un Estimador

Para analizar completamente un estimador  $\hat{\theta}$ , verificar:

1. **Insesgamiento:** Calcular  $\mathbb{E}[\hat{\theta}]$  y verificar si es igual a  $\theta$
2. **Consistencia:** Verificar que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Var}(\hat{\theta}) = 0$  (si es insesgado)
3. **Varianza:** Calcular  $\text{Var}(\hat{\theta})$  explícitamente
4. **Eficiencia:** Calcular  $I(\theta)$  y comparar  $\text{Var}(\hat{\theta})$  con  $\frac{1}{I(\theta)}$

1. Bajo las condiciones de regularidad de la Definición 3.2 del apunte, verifique si el vector aleatorio  $X_1, \dots, X_n$  es i.i.d. con distribución  $P_{X_1^n}(\cdot|\theta)$  entonces

$$\mathbb{E}_{X_1^n} \left( \left( \frac{\partial \ln L(X_1, \dots, X_n|\theta)}{\partial \theta} \right)^2 \right) = -\mathbb{E}_{X_1^n} \left( \frac{\partial^2 \ln L(X_1, \dots, X_n|\theta)}{\partial \theta^2} \right). \quad (1)$$

### Solución:

Para demostrar esta identidad, utilizaremos las siguientes condiciones de regularidad que permiten intercambiar el orden de derivación e integración:

**Primera condición de regularidad:** La esperanza de la primera derivada de la log-verosimilitud es cero:

$$\mathbb{E}_{X_1^n} \left[ \frac{\partial \ln L(X_1, \dots, X_n|\theta)}{\partial \theta} \right] = 0 \quad (2)$$

**Segunda condición de regularidad:** La esperanza de un término específico es cero:

$$\mathbb{E}_{X_1^n} \left[ \frac{1}{L(X_1, \dots, X_n|\theta)} \frac{\partial^2 \ln L(X_1, \dots, X_n|\theta)}{\partial \theta^2} \right] = 0 \quad (3)$$

Partimos de la primera condición de regularidad:

$$\mathbb{E}_{X_1^n} \left[ \frac{\partial \ln L(X_1, \dots, X_n|\theta)}{\partial \theta} \right] = 0$$

Y derivamos ambos lados de esta ecuación respecto a  $\theta$ . Del lado izquierdo, bajo condiciones de regularidad podemos intercambiar la derivada con la esperanza (que es una integral):

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial \theta} \mathbb{E}_{X_1^n} \left[ \frac{\partial \ln L(X_1, \dots, X_n|\theta)}{\partial \theta} \right]}_{=0} = \mathbb{E}_{X_1^n} \left[ \frac{\partial^2 \ln L(X_1, \dots, X_n|\theta)}{\partial \theta^2} \right]$$

Del lado derecho, derivamos la constante 0:

$$\frac{\partial}{\partial \theta}(0) = 0$$

Por lo tanto:

$$\mathbb{E}_{X_1^n} \left[ \frac{\partial^2 \ln L(X_1, \dots, X_n|\theta)}{\partial \theta^2} \right] = 0$$

Este resultado nos dice que la esperanza de la segunda derivada de la log-verosimilitud es cero. Ahora necesitamos conectar estos dos resultados. Partimos de la propiedad fundamental del logaritmo aplicada a la función de verosimilitud:

$$\frac{\partial \ln L(X_1, \dots, X_n|\theta)}{\partial \theta} = \frac{1}{L(X_1, \dots, X_n|\theta)} \frac{\partial L(X_1, \dots, X_n|\theta)}{\partial \theta}$$

Ahora derivamos ambos lados respecto a  $\theta$  para obtener la segunda derivada. Aplicamos la regla del producto en el lado derecho, donde tenemos un producto de dos funciones:  $\frac{1}{L(X_1, \dots, X_n|\theta)}$  y  $\frac{\partial L(X_1, \dots, X_n|\theta)}{\partial \theta}$ . Recordemos la regla del producto: si  $h(\theta) = f(\theta) \cdot g(\theta)$ , entonces  $\frac{dh}{d\theta} = \frac{df}{d\theta} \cdot g + f \cdot \frac{dg}{d\theta}$ .

Aplicando esto a lo siguiente:

$$\frac{\partial^2 \ln L(X_1, \dots, X_n | \theta)}{\partial \theta^2} = \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \frac{1}{L(X_1, \dots, X_n | \theta)} \frac{\partial L(X_1, \dots, X_n | \theta)}{\partial \theta} \right]$$

Desarrollamos usando la regla del producto:

$$= \underbrace{\frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{1}{L(X_1, \dots, X_n | \theta)} \right)}_{\text{derivada del primer factor}} \cdot \frac{\partial L(X_1, \dots, X_n | \theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{L(X_1, \dots, X_n | \theta)} \cdot \underbrace{\frac{\partial^2 L(X_1, \dots, X_n | \theta)}{\partial \theta^2}}_{\text{derivada del segundo factor}}$$

Para el primer término, calculamos la derivada de  $\frac{1}{L(X_1, \dots, X_n | \theta)}$  usando la regla de la cadena:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{1}{L(X_1, \dots, X_n | \theta)} \right) = -\frac{1}{L(X_1, \dots, X_n | \theta)^2} \frac{\partial L(X_1, \dots, X_n | \theta)}{\partial \theta}$$

Sustituyendo esto en la expresión anterior:

$$\frac{\partial^2 \ln L(X_1, \dots, X_n | \theta)}{\partial \theta^2} = -\frac{1}{L(X_1, \dots, X_n | \theta)^2} \left( \frac{\partial L(X_1, \dots, X_n | \theta)}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{1}{L(X_1, \dots, X_n | \theta)} \frac{\partial^2 L(X_1, \dots, X_n | \theta)}{\partial \theta^2}$$

Ahora observamos que el primer término se puede reescribir. Notemos que:

$$\frac{1}{L(X_1, \dots, X_n | \theta)} \frac{\partial L(X_1, \dots, X_n | \theta)}{\partial \theta} = \frac{\partial \ln L(X_1, \dots, X_n | \theta)}{\partial \theta}$$

Por lo tanto:

$$\frac{1}{L(X_1, \dots, X_n | \theta)^2} \left( \frac{\partial L(X_1, \dots, X_n | \theta)}{\partial \theta} \right)^2 = \left( \frac{\partial \ln L(X_1, \dots, X_n | \theta)}{\partial \theta} \right)^2$$

Finalmente, sustituyendo esto obtenemos:

$$\boxed{\frac{\partial^2 \ln L(X_1, \dots, X_n | \theta)}{\partial \theta^2} = - \left( \frac{\partial \ln L(X_1, \dots, X_n | \theta)}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{1}{L(X_1, \dots, X_n | \theta)} \frac{\partial^2 L(X_1, \dots, X_n | \theta)}{\partial \theta^2}}$$

Tomando esperanza en ambos lados y usando que  $\mathbb{E} \left[ \frac{1}{L(X_1, \dots, X_n | \theta)} \frac{\partial^2 L(X_1, \dots, X_n | \theta)}{\partial \theta^2} \right] = 0$  (otra condición de regularidad):

$$\mathbb{E}_{X_1^n} \left[ \frac{\partial^2 \ln L(X_1, \dots, X_n | \theta)}{\partial \theta^2} \right] = -\mathbb{E}_{X_1^n} \left[ \left( \frac{\partial \ln L(X_1, \dots, X_n | \theta)}{\partial \theta} \right)^2 \right]$$

2. Compruebe que si el vector aleatorio  $X_1, \dots, X_n$  es i.i.d. con distribución  $P_{X_1^n}(\cdot | \theta)$  entonces la información de Fisher es aditiva, es decir:

$$\mathcal{I}_n(\theta) \triangleq \mathbb{E}_{X_1^n} \left( \left( \frac{\partial \ln L(X_1, X_2, \dots, X_n | \theta)}{\partial \theta} \right)^2 \right) = n \cdot \mathcal{I}_1(\theta). \quad (4)$$

**Solución:**

Dado que  $X_1, \dots, X_n$  son variables i.i.d., la función de verosimilitud se puede expresar como el producto de las densidades individuales:

$$L(X_1, \dots, X_n | \theta) = \prod_{i=1}^n f(X_i | \theta)$$

Tomando logaritmo en ambos lados:

$$\ln L(X_1, \dots, X_n | \theta) = \sum_{i=1}^n \ln f(X_i | \theta)$$

Derivando respecto a  $\theta$  y usando la linealidad de la derivada:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \ln L(X_1, \dots, X_n | \theta) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \ln f(X_i | \theta)}{\partial \theta}$$

Ahora calculamos la esperanza del cuadrado de esta derivada. Notemos que:

$$\mathbb{E}_{X_1^n} \left[ \left( \frac{\partial \ln L}{\partial \theta} \right)^2 \right] = \mathbb{E}_{X_1^n} \left[ \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial \ln f(X_i | \theta)}{\partial \theta} \right)^2 \right]$$

Expandiendo el cuadrado:

$$= \mathbb{E}_{X_1^n} \left[ \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial \ln f(X_i | \theta)}{\partial \theta} \right)^2 + 2 \sum_{i < j} \frac{\partial \ln f(X_i | \theta)}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \ln f(X_j | \theta)}{\partial \theta} \right]$$

Por linealidad de la esperanza:

$$= \sum_{i=1}^n \mathbb{E}_{X_i} \left[ \left( \frac{\partial \ln f(X_i | \theta)}{\partial \theta} \right)^2 \right] + 2 \sum_{i < j} \mathbb{E}_{X_i, X_j} \left[ \frac{\partial \ln f(X_i | \theta)}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \ln f(X_j | \theta)}{\partial \theta} \right]$$

Como las variables son independientes, la esperanza del producto es el producto de las esperanzas. Por las condiciones de regularidad,  $\mathbb{E}_{X_i} \left[ \frac{\partial \ln f(X_i | \theta)}{\partial \theta} \right] = 0$ , por lo que todos los términos cruzados se anulan:

$$2 \sum_{i < j} \mathbb{E}_{X_i} \left[ \frac{\partial \ln f(X_i | \theta)}{\partial \theta} \right] \cdot \mathbb{E}_{X_j} \left[ \frac{\partial \ln f(X_j | \theta)}{\partial \theta} \right] = 0$$

Por lo tanto:

$$\mathcal{I}_n(\theta) = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}_{X_i} \left[ \left( \frac{\partial \ln f(X_i | \theta)}{\partial \theta} \right)^2 \right]$$

Como todas las variables son idénticamente distribuidas, cada término es igual a  $\mathcal{I}_1(\theta)$ :

$$\mathcal{I}_n(\theta) = n \cdot \mathcal{I}_1(\theta)$$

3. [Propuesto] Muestre que para cualquier estimador  $\tau_n$  de  $\theta$  su error de estimación se puede descomponer como varianza más sesgo, es decir:

$$\mathbb{E}_{X_1^n} \left( (\tau_n(X_1^n) - \theta)^2 \right) = \text{Var}(\tau_n(X_1^n)) + \left( \mathbb{E}_{X_1^n}(\tau_n(X_1^n)) - \theta \right)^2. \quad (5)$$

### Solución:

Para demostrar esta descomposición, partimos del error cuadrático medio (MSE) y realizamos manipulaciones algebraicas. Sea  $\hat{\theta} = \tau_n(X_1^n)$  el estimador y denotemos  $\mathbb{E}[\hat{\theta}]$  como su esperanza. Comenzamos con el MSE:

$$\text{MSE}(\hat{\theta}) = \mathbb{E}_{X_1^n} \left[ (\hat{\theta} - \theta)^2 \right]$$

Sumamos y restamos la esperanza del estimador  $\mathbb{E}[\hat{\theta}]$  dentro del cuadrado:

$$\text{MSE}(\hat{\theta}) = \mathbb{E}_{X_1^n} \left[ \left( (\hat{\theta} - \mathbb{E}[\hat{\theta}]) + (\mathbb{E}[\hat{\theta}] - \theta) \right)^2 \right]$$

Expandiendo el cuadrado del binomio:

$$\text{MSE}(\hat{\theta}) = \mathbb{E}_{X_1^n} \left[ (\hat{\theta} - \mathbb{E}[\hat{\theta}])^2 + 2(\hat{\theta} - \mathbb{E}[\hat{\theta}])(\mathbb{E}[\hat{\theta}] - \theta) + (\mathbb{E}[\hat{\theta}] - \theta)^2 \right]$$

Por la linealidad de la esperanza, podemos separar en tres términos:

$$\text{MSE}(\hat{\theta}) = \mathbb{E}_{X_1^n} \left[ (\hat{\theta} - \mathbb{E}[\hat{\theta}])^2 \right] + \mathbb{E}_{X_1^n} \left[ 2(\hat{\theta} - \mathbb{E}[\hat{\theta}])(\mathbb{E}[\hat{\theta}] - \theta) \right] + \mathbb{E}_{X_1^n} \left[ (\mathbb{E}[\hat{\theta}] - \theta)^2 \right]$$

Analicemos cada término:

- **Primer término:** Este es la definición de la varianza del estimador:

$$\mathbb{E}_{X_1^n} \left[ (\hat{\theta} - \mathbb{E}[\hat{\theta}])^2 \right] = \text{Var}(\hat{\theta})$$

- **Tercer término:** Como  $\mathbb{E}[\hat{\theta}]$  y  $\theta$  son constantes (no dependen de  $X_1^n$ ), la esperanza no afecta este término:

$$\mathbb{E}_{X_1^n} \left[ (\mathbb{E}[\hat{\theta}] - \theta)^2 \right] = (\mathbb{E}[\hat{\theta}] - \theta)^2$$

Este término representa el cuadrado de la diferencia entre el valor esperado del estimador y el valor verdadero del parámetro.

- **Segundo término:** Factorizamos las constantes fuera de la esperanza:

$$\mathbb{E}_{X_1^n} \left[ 2(\hat{\theta} - \mathbb{E}[\hat{\theta}])(\mathbb{E}[\hat{\theta}] - \theta) \right] = 2(\mathbb{E}[\hat{\theta}] - \theta) \cdot \mathbb{E}_{X_1^n} \left[ \hat{\theta} - \mathbb{E}[\hat{\theta}] \right]$$

Pero sabemos que:

$$\mathbb{E}_{X_1^n} \left[ \hat{\theta} - \mathbb{E}[\hat{\theta}] \right] = \mathbb{E}_{X_1^n}[\hat{\theta}] - \mathbb{E}[\hat{\theta}] = \mathbb{E}[\hat{\theta}] - \mathbb{E}[\hat{\theta}] = 0$$

Por lo tanto, el segundo término es cero:

$$2(\mathbb{E}[\hat{\theta}] - \theta) \cdot 0 = 0$$

Combinando todos los términos, obtenemos la descomposición deseada:

$$\text{MSE}(\hat{\theta}) = \text{Var}(\hat{\theta}) + (\mathbb{E}[\hat{\theta}] - \theta)^2$$

O equivalentemente:

$$\mathbb{E}_{X_1^n} \left[ (\tau_n(X_1^n) - \theta)^2 \right] = \text{Var}(\tau_n(X_1^n)) + \left( \mathbb{E}_{X_1^n}(\tau_n(X_1^n)) - \theta \right)^2$$

Esta descomposición es fundamental en teoría de estimación, pues muestra que el error cuadrático medio se puede descomponer en dos componentes: la varianza del estimador (que mide su dispersión) y el cuadrado de la diferencia entre su valor esperado y el valor verdadero del parámetro (que mide qué tan lejos está en promedio del valor real).

4. Suponga una variable aleatoria  $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$  y muestras de dicha variable a  $X_1, X_2, \dots, X_n$  i.i.d. Popularmente, se suelen estimar los dos parámetros de esta distribución como:

$$\hat{\mu} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \quad (6)$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \hat{\mu})^2 \quad (7)$$

- (a) ¿Son los estimadores de ambos parámetros insesgados?

**Solución:**

1. **Para  $\hat{\mu}$ :**

Calculamos la esperanza del estimador:

$$\mathbb{E}[\hat{\mu}] = \mathbb{E} \left[ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \right] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[X_i] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mu = \frac{n\mu}{n} = \mu$$

Por lo tanto,  $\hat{\mu}$  es un **estimador insesgado** de  $\mu$ .

2. **Para  $\hat{\sigma}^2$ :**

Calculamos la esperanza del estimador:

$$\mathbb{E}[\hat{\sigma}^2] = \mathbb{E} \left[ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 \right] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[(X_i - \mu)^2]$$

Sabemos que  $\mathbb{E}[(X_i - \mu)^2] = \text{Var}(X_i) = \sigma^2$ , entonces:

$$\mathbb{E}[\hat{\sigma}^2] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sigma^2 = \frac{n\sigma^2}{n} = \sigma^2$$

Por lo tanto,  $\hat{\sigma}^2$  también es un **estimador insesgado** de  $\sigma^2$ .

Por lo tanto ambos estimadores son insesgados.

- (b) Determine si los estimadores son consistentes. *Indicación:* Utilice el hecho que si  $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$  entonces  $Y = Z^2 \sim \chi_{(1)}^2$  con  $\text{Var}(Y) = 2 \cdot 1$ .

**Solución:**

Un estimador  $\hat{\theta}_n$  es consistente si  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|\hat{\theta}_n - \theta| > \epsilon) = 0$  para todo  $\epsilon > 0$ . Por la desigualdad de Chebyshev, si el sesgo tiende a cero y la varianza tiende a cero cuando  $n \rightarrow \infty$ , entonces el estimador es consistente.

• **Para  $\hat{\mu}$ :**

Ya vimos que el sesgo es cero. Ahora calculamos la varianza:

$$\text{Var}(\hat{\mu}) = \text{Var}\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i) = \frac{1}{n^2} \cdot n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

Como  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sigma^2}{n} = 0$ , el estimador  $\hat{\mu}$  es **consistente**.

• **Para  $\hat{\sigma}^2$ :**

El sesgo es cero. Ahora calculamos la varianza. Definimos  $Z_i = \frac{X_i - \mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1)$ , entonces:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 = \frac{\sigma^2}{n} \sum_{i=1}^n Z_i^2$$

Como  $Z_i^2 \sim \chi_{(1)}^2$ , tenemos  $\text{Var}(Z_i^2) = 2$ . Las variables son independientes, entonces:

$$\text{Var}(\hat{\sigma}^2) = \text{Var}\left(\frac{\sigma^2}{n} \sum_{i=1}^n Z_i^2\right) = \frac{\sigma^4}{n^2} \sum_{i=1}^n \text{Var}(Z_i^2) = \frac{\sigma^4}{n^2} \cdot 2n = \frac{2\sigma^4}{n}$$

Como  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2\sigma^4}{n} = 0$ , el estimador  $\hat{\sigma}^2$  es **consistente**.

Ambos estimadores son consistentes.

- (c) Obtenga la cota de Cramer-Rao de cada parámetro ¿Se está cumpliendo el criterio de mínima varianza?

**Solución:**

Para obtener la cota de Cramér-Rao, necesitamos calcular la información de Fisher. La densidad de probabilidad de una variable  $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$  es:

$$f(x|\mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

La log-verosimilitud para  $n$  observaciones i.i.d. es:

$$\ln L(\mu, \sigma^2) = -\frac{n}{2} \ln(2\pi) - \frac{n}{2} \ln(\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2$$

• **Para  $\mu$ :**

Calculamos la primera derivada:

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \mu} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)$$

La segunda derivada:

$$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \mu^2} = -\frac{n}{\sigma^2}$$

La información de Fisher es:

$$\mathcal{I}_n(\mu) = -\mathbb{E} \left[ \frac{\partial^2 \ln L}{\partial \mu^2} \right] = \frac{n}{\sigma^2}$$

La cota de Cramér-Rao para  $\mu$  es:

$$\text{Var}(\hat{\mu}) \geq \frac{1}{\mathcal{I}_n(\mu)} = \frac{\sigma^2}{n}$$

Como  $\text{Var}(\hat{\mu}) = \frac{\sigma^2}{n}$ , el estimador  $\hat{\mu}$  **alcanza la cota de Cramér-Rao** y es de **mínima varianza**.

- **Para  $\sigma^2$ :**

Calculamos la primera derivada:

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \sigma^2} = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2$$

La segunda derivada:

$$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial (\sigma^2)^2} = \frac{n}{2\sigma^4} - \frac{1}{\sigma^6} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2$$

Tomando esperanza:

$$\mathbb{E} \left[ \frac{\partial^2 \ln L}{\partial (\sigma^2)^2} \right] = \frac{n}{2\sigma^4} - \frac{1}{\sigma^6} \cdot n\sigma^2 = \frac{n}{2\sigma^4} - \frac{n}{\sigma^4} = -\frac{n}{2\sigma^4}$$

La información de Fisher es:

$$\mathcal{I}_n(\sigma^2) = -\mathbb{E} \left[ \frac{\partial^2 \ln L}{\partial (\sigma^2)^2} \right] = \frac{n}{2\sigma^4}$$

La cota de Cramér-Rao para  $\sigma^2$  es:

$$\text{Var}(\hat{\sigma}^2) \geq \frac{1}{\mathcal{I}_n(\sigma^2)} = \frac{2\sigma^4}{n}$$

Como  $\text{Var}(\hat{\sigma}^2) = \frac{2\sigma^4}{n}$ , el estimador  $\hat{\sigma}^2$  también **alcanza la cota de Cramér-Rao** y es de **mínima varianza**.

Ambos estimadores cumplen el criterio de mínima varianza.

5. Considere un sistema de modulación AM que genera una señal discreta

$$s(k) = A \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot k\right) \quad (8)$$

donde  $k \in \{1, \dots, n\}$ , que depende del parámetro  $A$  y donde  $T > 0$  es un número entero conocido.  $(s(k))_{k=1, \dots, n}$  no es observable directamente si no por medio de un ruido aditivo:

$$X_k(w) = s(k) + N_k(w) \quad (9)$$

Donde  $N_1(w), N_2(w), \dots, N_n(w)$  son variables aleatorias gaussianas independientes e idénticamente distribuidas con media cero y varianza  $\sigma^2 > 0$ .

- (a) Notar que  $X_1, \dots, X_n$  son variables aleatorias gaussianas e independientes. Con ello determine su distribución conjunta  $f_X(x_1, \dots, x_n | A)$ .

**Solución:**

Dado que  $X_k = s(k) + N_k$  donde  $N_k \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ , entonces:

$$X_k \sim \mathcal{N}\left(s(k), \sigma^2\right) = \mathcal{N}\left(A \cos\left(\frac{2\pi k}{T}\right), \sigma^2\right)$$

La densidad de probabilidad de cada  $X_k$  es:

$$f_{X_k}(x_k | A) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{\left(x_k - A \cos\left(\frac{2\pi k}{T}\right)\right)^2}{2\sigma^2}\right)$$

Como las variables son independientes, la distribución conjunta es el producto de las densidades marginales:

$$f_X(x_1, \dots, x_n | A) = \prod_{k=1}^n f_{X_k}(x_k | A) = \prod_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{\left(x_k - A \cos\left(\frac{2\pi k}{T}\right)\right)^2}{2\sigma^2}\right)$$

Simplificando:

$$f_X(x_1, \dots, x_n | A) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{k=1}^n \left(x_k - A \cos\left(\frac{2\pi k}{T}\right)\right)^2\right)$$

- (b) Del punto anterior, determine la función de densidad condicional  $f_X(x_1, \dots, x_n | A)$  (también conocida como verosimilitud) y con ello el estimador de máxima verosimilitud de  $A$  dadas las observaciones  $x_1, \dots, x_n$ , es decir, la solución de:

$$\hat{A}_{ML}(x_1, \dots, x_n) = \arg \max_A \ln(f_X(x_1, \dots, x_n | A)) \quad (10)$$

Donde  $A \in \mathbb{R}^+$ .

*Indicación:* Use el criterio de la primera derivada.

**Hint:** se debe llegar a una expresión cerrada función de  $x_1, \dots, x_n$  y parámetros conocidos del problema.

**Solución:**

Tomamos el logaritmo de la función de verosimilitud:

$$\ln f_X(x_1, \dots, x_n | A) = -\frac{n}{2} \ln(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{k=1}^n \left( x_k - A \cos\left(\frac{2\pi k}{T}\right) \right)^2$$

Para maximizar, derivamos respecto a  $A$  e igualamos a cero:

$$\frac{\partial}{\partial A} \ln f_X = -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{k=1}^n 2 \left( x_k - A \cos\left(\frac{2\pi k}{T}\right) \right) \left( -\cos\left(\frac{2\pi k}{T}\right) \right) = 0$$

Simplificando:

$$\frac{1}{\sigma^2} \sum_{k=1}^n \left( x_k - A \cos\left(\frac{2\pi k}{T}\right) \right) \cos\left(\frac{2\pi k}{T}\right) = 0$$

Expandiendo:

$$\sum_{k=1}^n x_k \cos\left(\frac{2\pi k}{T}\right) - A \sum_{k=1}^n \cos^2\left(\frac{2\pi k}{T}\right) = 0$$

Despejando  $A$ :

$$\hat{A}_{ML} = \frac{\sum_{k=1}^n x_k \cos\left(\frac{2\pi k}{T}\right)}{\sum_{k=1}^n \cos^2\left(\frac{2\pi k}{T}\right)}$$

Para verificar que es un máximo, calculamos la segunda derivada:

$$\frac{\partial^2}{\partial A^2} \ln f_X = -\frac{1}{\sigma^2} \sum_{k=1}^n \cos^2\left(\frac{2\pi k}{T}\right) < 0$$

Como la segunda derivada es negativa, confirmamos que es un máximo.

Por lo tanto, el estimador de máxima verosimilitud es:

$$\hat{A}_{ML}(x_1, \dots, x_n) = \frac{\sum_{k=1}^n x_k \cos\left(\frac{2\pi k}{T}\right)}{\sum_{k=1}^n \cos^2\left(\frac{2\pi k}{T}\right)}$$

- (c) Verifique que  $\hat{A}_{ML}(x_1, \dots, x_n)$  es insesgado, determine su varianza y con ello muestre que es consistente.

**Solución:**

Para ver si es insesgado, calculamos la esperanza del estimador.

$$\mathbb{E}[\hat{A}_{ML}] = \mathbb{E} \left[ \frac{\sum_{k=1}^n X_k \cos\left(\frac{2\pi k}{T}\right)}{\sum_{k=1}^n \cos^2\left(\frac{2\pi k}{T}\right)} \right] = \frac{\sum_{k=1}^n \mathbb{E}[X_k] \cos\left(\frac{2\pi k}{T}\right)}{\sum_{k=1}^n \cos^2\left(\frac{2\pi k}{T}\right)}$$

Como  $\mathbb{E}[X_k] = A \cos\left(\frac{2\pi k}{T}\right)$ :

$$\mathbb{E}[\hat{A}_{ML}] = \frac{\sum_{k=1}^n A \cos\left(\frac{2\pi k}{T}\right) \cos\left(\frac{2\pi k}{T}\right)}{\sum_{k=1}^n \cos^2\left(\frac{2\pi k}{T}\right)} = \frac{A \sum_{k=1}^n \cos^2\left(\frac{2\pi k}{T}\right)}{\sum_{k=1}^n \cos^2\left(\frac{2\pi k}{T}\right)} = A$$

Por lo tanto,  $\hat{A}_{ML}$  es **insesgado**.

Realizamos el calculo de su Varianza. Denotemos  $c_k = \cos\left(\frac{2\pi k}{T}\right)$  y  $C = \sum_{k=1}^n c_k^2$ . Entonces:

$$\hat{A}_{ML} = \frac{1}{C} \sum_{k=1}^n X_k c_k$$

La varianza es:

$$\text{Var}(\hat{A}_{ML}) = \text{Var} \left( \frac{1}{C} \sum_{k=1}^n X_k c_k \right) = \frac{1}{C^2} \sum_{k=1}^n c_k^2 \text{Var}(X_k) = \frac{1}{C^2} \sum_{k=1}^n c_k^2 \sigma^2 = \frac{\sigma^2 C}{C^2} = \frac{\sigma^2}{C}$$

Por lo tanto:

$$\text{Var}(\hat{A}_{ML}) = \frac{\sigma^2}{\sum_{k=1}^n \cos^2\left(\frac{2\pi k}{T}\right)}$$

Para mostrar consistencia, observamos que:

$$\sum_{k=1}^n \cos^2\left(\frac{2\pi k}{T}\right) \approx \frac{n}{2} \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty$$

Por lo tanto:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Var}(\hat{A}_{ML}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sigma^2}{\sum_{k=1}^n \cos^2\left(\frac{2\pi k}{T}\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2\sigma^2}{n} = 0$$

Como el sesgo es cero y la varianza tiende a cero cuando  $n \rightarrow \infty$ , el estimador  $\hat{A}_{ML}$  es **consistente**.

(d) Demuestre que  $\hat{A}_{ML}(x_1, \dots, x_n)$  es estimador insesgado de  $A$  de mínima varianza.

**Hint:** Utilizar la cota de Cramer-Rao y concluya su análisis.

**Solución:**

Para demostrar que es de mínima varianza, calcularemos la información de Fisher y verificaremos si el estimador alcanza la cota de Cramér-Rao.

La log-verosimilitud es:

$$\ln L(A) = -\frac{n}{2} \ln(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{k=1}^n \left( x_k - A \cos\left(\frac{2\pi k}{T}\right) \right)^2$$

La primera derivada:

$$\frac{\partial \ln L}{\partial A} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{k=1}^n \left( x_k - A \cos \left( \frac{2\pi k}{T} \right) \right) \cos \left( \frac{2\pi k}{T} \right)$$

La segunda derivada:

$$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial A^2} = -\frac{1}{\sigma^2} \sum_{k=1}^n \cos^2 \left( \frac{2\pi k}{T} \right)$$

La información de Fisher es:

$$\mathcal{I}_n(A) = -\mathbb{E} \left[ \frac{\partial^2 \ln L}{\partial A^2} \right] = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{k=1}^n \cos^2 \left( \frac{2\pi k}{T} \right)$$

La cota de Cramér-Rao para  $A$  es:

$$\text{Var}(\hat{A}) \geq \frac{1}{\mathcal{I}_n(A)} = \frac{\sigma^2}{\sum_{k=1}^n \cos^2 \left( \frac{2\pi k}{T} \right)}$$

Como calculamos en la parte anterior:

$$\text{Var}(\hat{A}_{ML}) = \frac{\sigma^2}{\sum_{k=1}^n \cos^2 \left( \frac{2\pi k}{T} \right)}$$

Por lo tanto:

$$\text{Var}(\hat{A}_{ML}) = \frac{1}{\mathcal{I}_n(A)}$$

Esto demuestra que  $\hat{A}_{ML}$  alcanza la cota de Cramér-Rao. El estimador de máxima verosimilitud  $\hat{A}_{ML}$  para el sistema de modulación AM es óptimo en el sentido de que minimiza la varianza entre todos los estimadores insesgados de  $A$ .