Ingeniería Eléctrica
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

Electromagnetismo Aplicado (EL3103-1)
Clase auxiliar 4

Prof. Benjamin Jacard H.
Prof. Aux. Erik Saez A.

1. En el toroide delgado de la figura, determinar:
   1. La impedancia del enrollado de N vueltas en primera aproximación (despreciando energía almacenada en campo eléctrico).
   2. El campo eléctrico fasorial de mayor amplitud en el entrehierro.

   Nota: Suponga que el campo magnético en el toroide es uniforme e igual al correspondiente al radio medio. Despreciar efectos de borde y pérdidas.

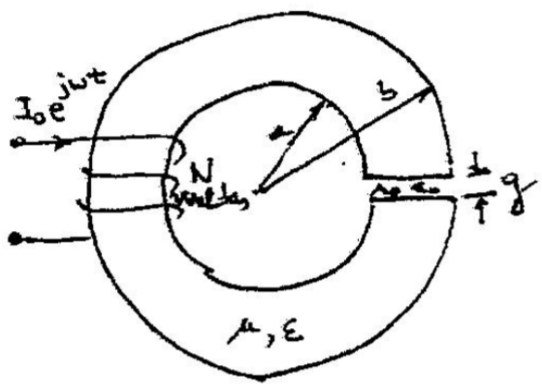

Figura 1: Esquema del toroide

Solución:

1. Se busca obtener la impedancia del enrollado despreciando la energia almacenada en el campo electrico, por lo que se tiene que:

$$Z = jwL = j\frac{4\omega}{|I_0|^2} < W_m > \tag{1}$$

Utilizando la forma integral de la ley de Ampere se tiene que:

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = N I_0 e^{j\omega t} \tag{2}$$

Consideramos el radio medio del toroide, el cual podemos ver que se define como:

$$r_m = \frac{a+b}{2} \tag{3}$$

Aplicando la ley de Ampère:

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = H_1(2\pi r_m - g) + H_2 g = NI_0 e^{j\omega t} \tag{4}$$

Dado que por condicion de borde se debe cumplir $B_1 = B_2 \Rightarrow \mu H_1 = \mu_0 H_2$, se obtiene:

$$\frac{\mu_0}{\mu} H_2(2\pi r_m - g) + H_2 g = NI_0 e^{j\omega t} \tag{5}$$

Despejando H_2:

$$H_2 = \frac{\mu N I_0}{\mu_0(2\pi r_m - g) + \mu g} \tag{6}$$

De manera análoga podemos despejar H_1 dando como resultado:

$$H_1 = \frac{\mu_0 N I_0}{\mu_0(2\pi r_m - g) + \mu g} \tag{7}$$

Dado que despreciamos la energia almacenada en el campo electrico, nos centraremos unicamente en la energia almacenada en el campo magnetico, por lo que se tiene que:

$$\frac{1}{4} L I_0^2 = \frac{1}{4} \int_{\text{vol toroide}} \vec{B} \cdot \vec{H}^* \, dv \tag{8}$$

La cual puede expresarse como:

$$\frac{1}{4} L I_0^2 = \frac{1}{4} \mu H_1^2 \cdot \frac{\pi(b-a)^2}{4} \cdot (2\pi r_m - g) + \frac{1}{4} \mu_0 H_2^2 \cdot \frac{\pi(b-a)^2}{4} \cdot g \tag{9}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} L I_0^2 = \frac{1}{4} \mu \left(\frac{\mu_0 N I_0}{\mu_0(2\pi r_m - g) + \mu g} \right)^2 \cdot \frac{\pi(b-a)^2}{4} \cdot (2\pi r_m - g) \\ + \frac{1}{4} \mu_0 \left(\frac{\mu N I_0}{\mu_0(2\pi r_m - g) + \mu g} \right)^2 \cdot \frac{\pi(b-a)^2}{4} \cdot g \end{aligned} \tag{10}$$

Factorizando y despejando L:

$$L = \frac{N^2 \pi (b-a)^2}{4 \left[\mu_0(2\pi r_m - g) + \mu g \right]^2} \left[\mu \mu_0 (2\pi r_m - g) + \mu_0^2 g \right] \tag{11}$$

$$L = \frac{N^2 \pi (b-a)^2 \mu \mu_0}{4 \left[\mu_0(2\pi r_m - g) + \mu g \right]} \tag{12}$$

De esta manera es posible obtener la impedancia buscada en el problema.

2. Luego se busca obtener el campo electrico en el entrehierro por lo que aplicando la ley de inducción de Faraday, la cual se deriva a partir de lo siguiente:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{13}$$

$$\tag{14}$$

Escrita en su forma integral se tiene que:

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \tag{15}$$

De esta manera en notacion fasorial tenemos la notacion dada por:

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -j\omega\psi \tag{16}$$

Donde ψ es el flujo magnético, y se cumple:

$$E(r) \cdot 2\pi r = -j\omega \int_S \mu_0 H_2 \, ds \tag{17}$$

Siendo S la sección transversal de radio r, y considerando que H_2 es constante en dicha superficie:

$$E(r) \cdot 2\pi r = -j\omega\mu_0 H_2 \cdot \pi r^2 \tag{18}$$

Despejando $E(r)$:

$$E(r) = -j\omega\frac{\mu_0}{2} r H_2 \tag{19}$$
$$= -j\omega\frac{\mu_0}{2} r \cdot \frac{\mu N I_0}{\mu_0(2\pi r_m - g) + \mu g} \tag{20}$$

Finalmente, se observa que el campo eléctrico es máximo para:

$$r = \frac{b-a}{2} \tag{21}$$

2. Considere un condensador con electrodos circulares, entre los electrodos existe una diferencia de potencial v(t).

    1. Determine el campo eléctrico y el campo magnético al interior del condensador (asuma dieléctrico con ϵ_0, μ_0)
    2. Calcule el vector de Poynting. ¿Que dirección tiene?
    3. Calcule la tasa de cambio de la energia al interior del condensador, usando el vector de Poynting.
    4. Compare la respuesta anterior calculando la tasa de cambio de la energia eléctrica almacenada por el condensador.

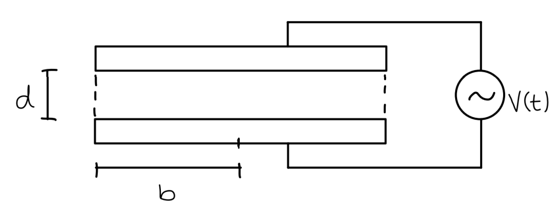

Figura 2: Esquema del toroide

Solución:

1. Se busca el obtener el campo eléctrico y magnético del condensador el cual posee un **Campo variable en el tiempo** , que es importante a tener en cuenta.

   Campo eléctrico

   Este se obtendrá de manera directa:

$$V(b) - V(a) = -\int_a^b E(t) \cdot dl(\hat{z} \cdot \hat{z}) \tag{22}$$

$$\tag{23}$$

   Se puede observar que V(b) - V(a) sera equivalente a v(t) dado que representa los terminales del capacitador y este varia en todo momento.

$$V(t) = E(t)d \tag{24}$$

$$E(t) = \frac{V(t)}{d}\hat{z} \tag{25}$$

   Campo magnético

   Sabemos por ley de Ampere que se tiene lo siguiente:

$$\nabla \times H = J + \frac{\partial D}{\partial t} \tag{26}$$

   Se tiene que J=0 debido a que en el espacio del condensador no existe una densidad de carga y tampoco una corriente "real". pero si se considera el termino de corrección(*Es decir el desplazamiento*).

$$\nabla \times H = \frac{\partial D}{\partial t} \tag{27}$$

$$= \epsilon\frac{\partial E(t)}{\partial t} \tag{28}$$

$$= \frac{\epsilon}{d}\frac{\partial V(t)}{\partial t} \tag{29}$$

   Luego en su forma diferencial se tendrá que:

$$\int H \cdot dl = \frac{\epsilon}{d}\int \frac{\partial V(t)}{\partial t} \cdot dS \tag{30}$$

   Debido a la geometría y teniendo en cuenta que H envolverá al campo eléctrico *(Regla de la mano derecha)*, se tendrá lo siguiente:

$$H(2\pi r) = \frac{\epsilon}{d}\frac{\partial V}{\partial t}\pi r^2 \tag{31}$$

$$H = \frac{\epsilon r}{2d}\frac{\partial V}{\partial t}\hat{\theta} \tag{32}$$

2. Se tiene que el vector de Poynting viene dado por $\hat{S} = \hat{E} \times \hat{H}$, el cual es un vector perpendicular tanto para el campo eléctrico como magnético y este nos da la dirección y magnitud del flujo de energía electromagnética.(Idea visual)

$$\hat{S} = \hat{E} \times \hat{H} = \left(\frac{V(t)}{d}\right)\hat{z} \times \left(\frac{\epsilon r}{2d}\frac{\partial V(t)}{\partial t}\right)\hat{\theta} \tag{33}$$

$$= \frac{\epsilon r}{2d^2}V(t)\left(\frac{\partial V(t)}{\partial t}\right)(\hat{z} \cdot \hat{\theta}) \tag{34}$$

$$= -\frac{\epsilon r}{2d^2}V(t)\left(\frac{\partial V(t)}{\partial t}\right)\hat{r} \tag{35}$$

3. Tal de profundizar con respecto al vector de Poynting, se realiza las siguientes relaciones mediantes las ecuaciones de Maxwell,

$$H \cdot (\nabla \times E) - E \cdot (\nabla \times H) = \nabla \cdot (E \times H) \tag{36}$$

$$-H \cdot \frac{\partial B}{\partial t} - E \cdot \frac{\partial D}{\partial t} - E \cdot J = \nabla \cdot (E \times H) \tag{37}$$

$$\int_V \left(-H \cdot \frac{\partial B}{\partial t} - E \cdot \frac{\partial D}{\partial t} - E \cdot J\right) dv = \int_V \left(\nabla \cdot (E \times H)\right) dv \tag{38}$$

$$\int_V \left(H \cdot \frac{\partial B}{\partial t} + E \cdot \frac{\partial D}{\partial t} + E \cdot J\right) dv = -\oint_S (E \times H)\, ds \tag{39}$$

Descompuesta de esta manera el vector de Poynting permite realizar el siguiente análisis:

- $H \cdot \frac{\partial B}{\partial t}$: Corresponde a la energía magnética almacenada
- $E \cdot \frac{\partial D}{\partial t}$: Corresponde a la energía eléctrica almacenada
- $E \cdot J$ Corresponde a la energía disipada por calor “Ohmica”

Por lo tanto $\oint_S (E \times H)\, ds$ da cuenta de la variación de la energía almacenada en el condensador con respecto al tiempo . Luego lo calculamos sobre la superficie que nos interesa (*Superficie entre placas*) obteniendo lo siguiente:

$$-\oint_S (E \times H) ds|_{r=b} = -\int_0^d \int_0^{2\pi} -\frac{\epsilon b}{2d^2}V(t)\left(\frac{\partial V(t)}{\partial t}\right) b(d\phi)(dz)(\hat{r} \cdot \hat{z}) \tag{40}$$

$$= -\frac{\epsilon b^2}{2d^2}V(t)\left(\frac{\partial V(t)}{\partial t}\right) \cdot 2\pi d(-\hat{\theta}) \tag{41}$$

$$= -\frac{\epsilon \pi b^2}{d}V(t)\left(\frac{\partial V(t)}{\partial t}\right)(-\hat{\theta}) \tag{42}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\epsilon b^2 \pi}{d} \cdot \frac{\partial (V(t))^2}{\partial t}(\hat{\theta}) \tag{43}$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}CV^2\right)(\hat{\theta}) \tag{44}$$

(Se utilizo que $V(t)\left(\frac{\partial V(t)}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t}(\frac{1}{2}V(t)^2))$. Finalmente se observa que depende solo de la variación de la energía eléctrica almacenada, lo cual concuerda de buena manera con el hecho de que estamos trabajando con un condensador.

4. Se busca obtener el cambio de la energía eléctrica almacenada por el condensador, lo cual utilizando la expresión conocida de energía almacenada tenemos que:

$$
\begin{aligned}
W_e &= \frac{\partial}{\partial t}\int_V \frac{1}{2}\epsilon\|E\|^2 dV && (45)\\
&= \frac{\partial}{\partial t}\int_V \frac{1}{2}\epsilon\frac{V(t)^2}{d^2} dV && (46)\\
&= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\epsilon V(t)^2}{2d^2}\right)\int dV && (47)\\
&= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\epsilon V(t)^2}{2d^2}\right)\cdot \pi b^2 d && (48)\\
&= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\epsilon V(t)^2 \pi b^2}{2d}\right) && (49)\\
&= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}CV(t)\right) && (50)
\end{aligned}
$$

Notar la relación con lo obtenido en la parte c) , esto nos quiere decir que la variación de la energía total depende por tanto solo del **campo eléctrico**

5. Se tiene que toda la energía almacenada en el condensador es puramente eléctrica y esto es debido al funcionamiento perse de un condensador, dado que este almacena dicha energía dentro de sus placas debido a la corriente de desplazamiento, análisis similiar que se puede realizar para una inductancia.

3. Considere una linea de transmisión cuya sección trasversal se muestra en la figura. Suponga que se propaga una onda transversal electromagnética según z+, donde V_0 es el valor máximo del voltaje. Se considera un dieléctrico perfecto es decir $\sigma = \infty$.

   1. Potencial $\phi(r, \theta)$ para a $\leq$ r $\leq$ b
   2. Campo eléctrico fasor $E(r, \theta, z, t)$
   3. Densidad de corriente J_s y corriente total en los conductores (r=a) y (r=b)
   4. Potencia media transmitida $< P_t >$ en base al vector de Poynting.
   5. Energıa almacenada en campo eléctrico $< W_e >$ y campo magnético $< W_m >$, por unidad de longitud de la linea

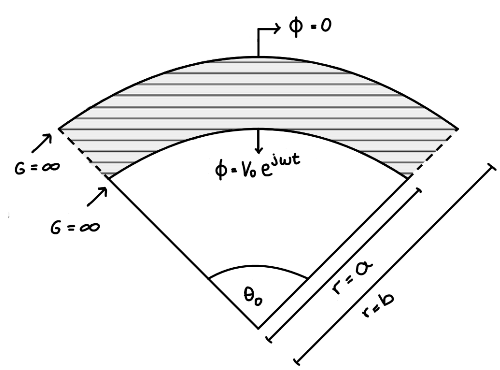

Figura 3: Esquema del toroide

Solución:

1. Se busca obtener el potencial eléctrico $\phi(r,\theta)$ para (a $\leq$ r $\leq$ b) , por lo que se utilizara coordenadas cilíndricas y dada la distribución de las placas se tendrá solo dependencia en r:

$$\nabla^2\phi(r,\theta) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) = 0 \tag{51}$$

   Luego integrando sigue que:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) = 0 \tag{52}$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) = 0 \tag{53}$$

$$\left(r\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) = A \tag{54}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial r} = \frac{A}{r} \tag{55}$$

$$\phi(r) = Aln(r) + B \tag{56}$$

   Con lo que se obtiene la forma del expresión del potencial. Luego se deberá obtener las constantes mediante las condiciones de borde para obtener una expresión particular.

$$\phi(r=a) = V_0e^{jwt} = Aln(a) + B \tag{57}$$

   Mientras que por otro lado

$$\phi(r=b) = 0 = Aln(b) + B \tag{58}$$

$$B = -Aln(b) \tag{59}$$

   Reemplazando este ultimo:

$$V_0e^{jwt} = Aln(a) - Aln(b) \tag{60}$$

$$A = \frac{V_0e^{jwt}}{ln(\frac{a}{b})} \tag{61}$$

   Finalmente se tendrá que:

$$\phi(r) = \frac{V_0e^{jwt}}{ln(\frac{a}{b})}ln(r) - \frac{V_0e^{jwt}}{ln(\frac{a}{b})}ln(b) \tag{62}$$

2. Se busca obtener una expresión para el campo eléctrico, por lo que tenemos:

$$E(r,\theta,z,t) = -\nabla\phi(r) = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{V_0e^{jwt}}{ln(\frac{a}{b})}ln(r) - \frac{V_0e^{jwt}}{ln(\frac{a}{b})}ln(b)\right) \tag{63}$$

$$= \frac{V_0e^{jwt}}{ln(\frac{a}{b})}\frac{1}{r}(\hat{r}) \tag{64}$$

Es importante considerar que el campo eléctrico se propaga como una onda transversal electromagnética por lo que debemos añadir dicha componente por lo tanto,

$$E(r, \theta, z, t) = \frac{V_0}{ln(a/b)} \frac{1}{r} e^{-jbz} e^{jwt} (\hat{r}) \tag{65}$$

Es importante tener en cuenta que estamos considerando el caso sin perdidas, es por esto que no existe la presencia de un (α) (*Se vera en la siguiente unidad como interpretar esto*)

3. Se busca obtener la densidad de corriente superficial J_s y la corriente total en los conductores (r=a) y (r=b). Dada la presencia de una pared eléctrica con conductividad infinita, se considera que toda la intensidad magnético se relaciona de la siguiente manera con la densidad de corriente superficial

$$\hat{n} \times H = J_s \tag{66}$$

Por tanto se utiliza la siguiente expresión equivalente (*Se evalúa el campo H dado que estamos considerando en una superficie en particular*):

$$J_s = \hat{n} \times H(r = a) \tag{67}$$

Se puede relacionar el campo eléctrico y magnético: (*El termino Y corresponde a la admitancia del medio*):

$$H_1(r = a) = Y(\hat{k}) \times E(r = a)(\hat{r}) \tag{68}$$

$$H_1(r = a) = \frac{YV_0}{ln(a/b)} \frac{1}{a} e^{-jbz} e^{jwt} (\hat{\theta}) \tag{69}$$

Por lo que finalmente se tendrá que:

$$J_s(r = a) = (\hat{r}) \times H_1(r = a)(\hat{\theta}) \tag{70}$$

$$= \frac{YV_0}{ln(a/b)} \frac{1}{a} e^{-jbz} e^{jwt} \hat{\theta} (\hat{r} \times \hat{\theta}) \tag{71}$$

$$= \frac{YV_0}{ln(a/b)} \frac{1}{a} e^{-jbz} e^{jwt} (\hat{k}) \tag{72}$$

Lo cual es consistente dado que la corriente fluye hacia la pantalla. De manera análoga tenemos que para $J_s(r = b)$,

$$J_s(r = b) = (-\hat{r}) \times H(r = b) \tag{73}$$

Se debe tener en consideración ese signo - dado la consistencia con la dirección, luego para H(r=b):

$$H_2(r = b) = Y\hat{k} \times E(r = b)\hat{r} \tag{74}$$

$$= Y \cdot \frac{V_0}{ln(a/b)} \frac{1}{b} e^{-jbz} e^{jwt} \hat{\theta} \tag{75}$$

Con lo que finalmente,

$$J_s(r = b) = (-\hat{r}) \times H(r = b) \tag{76}$$

$$= (-\hat{r}) \times Y \cdot \frac{V_0}{ln(a/b)} \frac{1}{b} e^{-jbz} e^{jwt} \hat{\theta} \tag{77}$$

$$= -\frac{YV_0}{b \cdot \ ln(a/b)} e^{-jbz} e^{jwt} (\hat{k}) \tag{78}$$

Con lo que se obtiene la densidad de corriente en ambas placas, finalmente se quiere obtener la corriente total en estas, por lo que:

$$
\begin{aligned}
I_a &= \int_0^{\theta_0} J_s(r=a)a(d\theta) && (79)\\
&= \frac{YV_0}{ln(a/b)}\frac{1}{a}e^{-jbz}e^{jwt}\cdot(a\theta_0) && (80)\\
&= \frac{YV_0}{ln(a/b)}e^{-jbz}e^{jwt}\cdot(\theta_0) && (81)
\end{aligned}
$$

Por otro lado de manera análoga se tendrá que:

$$
\begin{aligned}
I_b &= \int_0^{\theta_0} J_s(r=b)bd(\theta) && (82)\\
&= -\frac{YV_0}{ln(a/b)}\frac{1}{b}e^{-jbz}e^{jwt}\cdot(b\theta_0) && (83)\\
&= -\frac{YV_0}{ln(a/b)}e^{-jbz}e^{jwt}\cdot(\theta_0) && (84)
\end{aligned}
$$

Luego se observa que las corrientes en ambos medios es igual en magnitud pero con signos contrarios, lo cual es consistente con lo esperado.

4. Se busca obtener la potencia media transmitida $\langle P_t\rangle$ en base al vector de Poynting:

$$\langle P_t\rangle = \int_s \frac{1}{2}Re(E\times H^*)dS \tag{85}$$

Reemplazando lo que ya obtuvimos con anterioridad,

$$
\begin{aligned}
\langle P_t\rangle &= \int_s \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}(E\times H^*)\,dS && (86)\\
&= \mathrm{Re}\left(\tfrac{V_0}{\ln(a/b)}\tfrac{1}{r}e^{-jbz}e^{jwt}\hat{r}\times Y\cdot\tfrac{V_0}{\ln(a/b)}\tfrac{1}{r}e^{jbz}e^{-jwt}\hat{\theta}\right)dS && (87)\\
&= \frac{1}{2}\int_s \frac{V_0^2Y}{\ln(a/b)^2}\frac{1}{r^2}\,dS && (88)\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{V_0}{\ln(a/b)}\right)^2 Y\int_0^{\theta_0}\int_a^b \frac{r}{r^2}(\,dr)(\,d\theta) && (89)\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{V_0}{\ln(a/b)}\right)^2 Y\ln(a/b)\theta_0 && (90)\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{V_0^2}{\ln(a/b)}\right)Y\theta_0 && (91)
\end{aligned}
$$

Con lo que finalmente se obtiene la expresión planteada inicialmente.

5. Luego, queremos la energía almacenada en campo eléctrico $\langle W_e\rangle$ y campo magnético $\langle W_m\rangle$, por

unidad de longitud de línea. Es por esto,

$$\begin{aligned}
\langle W_e \rangle &= \int_v \frac{1}{4}\epsilon \|E\|^2 (\,dv) && (92)\\
&= \frac{\epsilon}{4}\int_v \|E\|^2 (\,dv) && (93)\\
&= \frac{\epsilon}{4}\int_v \left(\frac{V_0}{\ln(a/b)}\frac{1}{r}\right)^2 r(\,dr)(\,d\theta)(\,dz) && (94)\\
&= \frac{\epsilon}{4}\left(\frac{V_0}{\ln(a/b)}\right)^2 \int_v \frac{r}{r^2}(\,dr)(\,d\theta)(\,dz) && (95)\\
&= \frac{\epsilon V_0^2 \theta_0}{4\ln(a/b)} && (96)
\end{aligned}$$

Luego de manera análoga para la energía magnética se tiene que:

$$\begin{aligned}
\langle W_m \rangle &= \int_v \frac{1}{4}\mu \|H\|^2 (\,dv) && (97)\\
&= \frac{\mu}{4}\int_v \|H\|^2 (\,dv) && (98)\\
&= \frac{\mu}{4}\int_v \left(\frac{YV_0}{\ln(a/b)}\frac{1}{r}\right)^2 r(\,dr)(\,d\theta)(\,dz) && (99)\\
&= \frac{\mu}{4}\left(Y\frac{V_0}{\ln(a/b)}\right)^2 \int_v \frac{r}{r^2}(\,dr)(\,d\theta)(\,dz) && (100)\\
&= \frac{\mu Y^2 V_0^2 \theta_0}{4\ln(a/b)} && (101)\\
&= \frac{\mu V_0^2 \theta_0}{4\ln(a/b)} \cdot \frac{\epsilon}{\mu} && (102)\\
&= \frac{\epsilon V_0^2 \theta_0}{4\ln(a/b)} && (103)\\
&= \langle W_e \rangle && (104)
\end{aligned}$$

Donde utilizamos la expresión que caracteriza la impedancia del medio como:

$$Y^2 = \left(\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}\right)^2 \qquad (105)$$

Finalmente la energía magnética y eléctrica son iguales , y la suma total que equivale a la energía total del sistema es equivalente a la energía almacenada en campo eléctrico obtenido con anterioridad, lo cual demuestra la consistencia del sistema.

$$\begin{aligned}
\langle P_t \rangle &= \langle W_m \rangle + \langle W_e \rangle && (106)\\
&= \langle W_e \rangle + \langle W_e \rangle && (107)
\end{aligned}$$