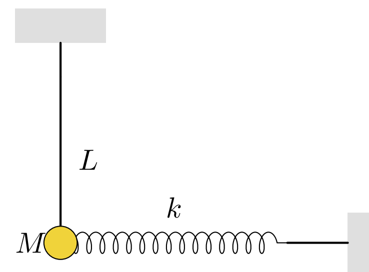
Introducción a la Física Moderna (F1100-5)
Clase auxiliar 5
Prof. Rodrigo Soto.
Prof. Aux. Erik Sáez - Javiera Toro

1. Un péndulo de longitud L con una masa M está unido lateralmente a un resorte de constante elástica k, como se muestra esquemáticamente. Cuando la masa cuelga verticalmente bajo el punto de suspensión, el resorte está sin deformación.
   (a) Obtén una expresión aproximada para el período de oscilación del sistema para pequeñas amplitudes (linealiza las ecuaciones de movimiento).
   (b) Supón $M = 1{,}00\,\mathrm{kg}$ y que, en ausencia del resorte, el período del péndulo es $2{,}00\,\mathrm{s}$. Determina k si el período del sistema acoplado es $1{,}00\,\mathrm{s}$.



Solución:

Resolución 1.1

Para resolver este problema, necesitamos establecer las ecuaciones de movimiento del sistema péndulo-resorte.

Sea θ el ángulo que forma la cuerda con la vertical. Las coordenadas de la masa son:

$$x = L \sin\theta \tag{1}$$
$$y = -L \cos\theta \tag{2}$$

La energía cinética del sistema es:

$$T = \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2}ML^2\dot{\theta}^2 \tag{3}$$

La energía potencial tiene dos contribuciones: gravitacional y elástica:

$$V = MgL(1 - \cos\theta) + \frac{1}{2}kx^2 \tag{4}$$
$$= MgL(1 - \cos\theta) + \frac{1}{2}kL^2 \sin^2\theta \tag{5}$$

Para pequeñas oscilaciones, usamos las aproximaciones $\sin\theta \approx \theta$ y $\cos\theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}$:

$$V \approx \frac{1}{2}MgL\theta^2 + \frac{1}{2}kL^2\theta^2 = \frac{1}{2}(MgL + kL^2)\theta^2 \tag{6}$$

El Lagrangiano es:

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2}ML^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}(MgL + kL^2)\theta^2 \tag{7}$$

La ecuación de Euler-Lagrange nos da:

$$ML^2\ddot{\theta} + (MgL + kL^2)\theta = 0 \tag{8}$$

Simplificando:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L}\left(1 + \frac{kL}{Mg}\right)\theta = 0 \tag{9}$$

Esta es la ecuación de un oscilador armónico simple con frecuencia angular:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}\left(1 + \frac{kL}{Mg}\right)} \tag{10}$$

Por tanto, el período de oscilación es:

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g\left(1 + \frac{kL}{Mg}\right)}}} \tag{11}$$

Resolución 1.2

Datos del problema:

- $M = 1{,}00\,\mathrm{kg}$
- Período sin resorte: $T_0 = 2{,}00\,\mathrm{s}$
- Período con resorte: $T = 1{,}00\,\mathrm{s}$

Del período del péndulo simple sin resorte:

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} = 2{,}00\,\mathrm{s} \tag{12}$$

De aquí obtenemos:

$$\frac{L}{g} = \left(\frac{T_0}{2\pi}\right)^2 = \left(\frac{2{,}00}{2\pi}\right)^2 = \frac{1}{\pi^2}\,\mathrm{s}^2 \tag{13}$$

Con el resorte, el período es:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g\left(1 + \frac{kL}{Mg}\right)}} = 1{,}00\,\mathrm{s} \tag{14}$$

Dividiendo las ecuaciones:

$$\frac{T}{T_0} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{kL}{Mg}}} = \frac{1{,}00}{2{,}00} = \frac{1}{2} \tag{15}$$

Elevando al cuadrado:

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{1 + \frac{kL}{Mg}} \tag{16}$$

Despejando:

$$1 + \frac{kL}{Mg} = 4 \quad \Rightarrow \quad \frac{kL}{Mg} = 3 \tag{17}$$

Por tanto:

$$k = \frac{3Mg}{L} \tag{18}$$

Necesitamos encontrar L. De $\frac{L}{g} = \frac{1}{\pi^2}$:

$$L = \frac{g}{\pi^2} = \frac{9{,}81}{\pi^2} \approx 0{,}994\,\mathrm{m} \tag{19}$$

Finalmente:

$$k = \frac{3 \times 1{,}00 \times 9{,}81}{0{,}994} \approx 29{,}6\,\mathrm{N/m} \tag{20}$$

$$\boxed{k \approx 29{,}6\,\mathrm{N/m}} \tag{21}$$

2. (a) Bosquee la función

$$f(x) = \frac{1\,\mathrm{cm}}{1 + \left(x/1\,\mathrm{cm}\right)^2}.$$

Escriba $f(\bar{x})$ para $\bar{x} = x - ct$, donde c es la velocidad de propagación de la onda y t el tiempo. Si $c = 1\,\mathrm{cm/s}$, bosquee la función $u(x,t) = f(x - ct)$ para $t = 0, 1, 2\,\mathrm{s}$, donde $u(x,t)$ representa la amplitud de la onda en la posición x y tiempo t.

(b) Calcule la velocidad vertical $v(x,t)$ de la cuerda en el instante $t = 0$. Para esto, derive la función $u(x,t)$ con respecto al tiempo considerando x constante.

(c) Grafique $v(x,0)$ en función de x. Note que esta es positiva y negativa en ciertas partes. Interprete el resultado.

3. Se tiene una masa m sostenida de dos cuerdas de largos L_1 y L_2, con tensiones T_1 y T_2 respectivamente en presencia de gravedad, como se observa en la figura. Considere que T_2 es conocido y T_1 es tal que el sistema no se mueve verticalmente.

Si inicialmente la masa se suelta desde el reposo a una distancia x,

(a) Calcule el valor de T_1 para que el sistema no se mueva verticalmente.

(b) Encuentre la frecuencia angular de oscilación.

(c) Calcule el período de oscilación.

(d) Calcule la amplitud de oscilación de la masa.

Considere para sus cálculos y aproximaciones $x \ll L_1, L_2$, y que las tensiones se mantienen al deformarse la cuerda.

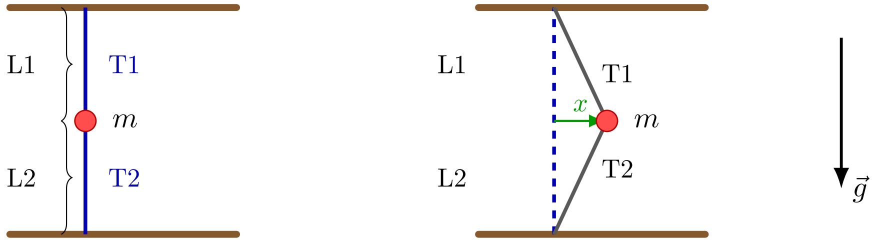


Figura 1: Masa sostenida por dos cuerdas con tensiones T_1 y T_2.