Electromagnetismo Aplicado (EL3103)
Clase auxiliar 2
Prof. Tomás Cassanelli
Prof. Aux. Lucas Palomino
Ayudantes: Joaquín Díaz - Florencia Olivares

1 Resumen

Sea f un campo escalar, se define el **operador gradiente** como:

- **Coordenadas cartesianas** (x, y, z):

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{\mathbf{k}}$$

- **Coordenadas cilíndricas** (ρ, ϕ, z):

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial \rho}\hat{\boldsymbol{\rho}} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \phi}\hat{\boldsymbol{\phi}} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{\mathbf{z}}$$

- **Coordenadas esféricas** (r, θ, ϕ):

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r}\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \phi}\hat{\boldsymbol{\phi}}$$

Sea f un campo escalar de clase $\mathcal{C}^2$, se define el **operador Laplaciano** como:

$$\nabla^2 f = \nabla \cdot (\nabla f)$$

o, equivalentemente, como la suma de las segundas derivadas parciales de f en el sistema de coordenadas correspondiente:

- **Coordenadas cartesianas** (x, y, z):

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

- **Coordenadas cilíndricas** (r, ϕ, z):

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

- **Coordenadas esféricas** (r, θ, ϕ):

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}$$

Ecuaciones de Poisson y Laplace

A continuación, se enuncian dos expresiones fundamentales para el desarrollo de los problemas posteriores. La primera corresponde a la **ecuación de Poisson**, que se expresa como:

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{1}$$

donde:

- V es el *potencial eléctrico*.
- ρ es la densidad de carga total, incluyendo tanto carga libre (ρ_f), como carga ligada (ρ_b).
- ε_0 es la permitividad del vacío.

En el caso particular en que el medio no contenga densidad de carga ($\rho = 0$), la ecuación de Poisson se reduce a la **ecuación de Laplace**:

$$\nabla^2 V = 0 \tag{2}$$

Propiedades de la ecuación de Laplace

La ecuación de Laplace cumple las siguientes características:

- **La media es el promedio de los extremos.**
- **La ecuación de Laplace no tolera mínimos ni máximos globales.** Es decir, el valor máximo y valor mínimo del potencial se encontrarán en los extremos.
- **La solución a la ecuación de Laplace es única.**
- **La ecuación de Laplace es lineal.**

Ecuaciones de Maxwell en electroestática y magnetoestática

$$\text{(i)} \quad \boxed{\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}} \qquad \text{(iii)} \quad \boxed{\nabla \times \mathbf{E} = 0} \tag{3}$$

$$\text{(ii)} \quad \boxed{\nabla \cdot \mathbf{B} = 0} \qquad \text{(iv)} \quad \boxed{\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \cdot \mathbf{J}} \tag{4}$$

Además, se tendrán las siguientes relaciones útiles:

$$\boxed{\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}} \qquad \boxed{\mathbf{H} = \frac{1}{\mu}\mathbf{B}} \tag{5}$$

$$\boxed{\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}} \qquad \boxed{\epsilon = \epsilon_0(1 + \chi_e)} \tag{6}$$

Condiciones de frontera para medios lineales

$$\epsilon_1 \mathcal{E}_1^{\perp} - \epsilon_2 \mathcal{E}_2^{\perp} = \sigma_f \qquad \boldsymbol{\mathcal{E}}_1^{\parallel} - \boldsymbol{\mathcal{E}}_2^{\parallel} = 0$$

$$\mathcal{B}_1^{\perp} - \mathcal{B}_2^{\perp} = 0 \qquad \frac{1}{\mu_1}\boldsymbol{\mathcal{B}}_1^{\parallel} - \frac{1}{\mu_2}\boldsymbol{\mathcal{B}}^{\parallel} = \boldsymbol{\kappa}_f \times \hat{\mathbf{n}}$$

Potenciales magnéticos

Potencial escalar magnético (V_m):

- Se tiene solo en regiones donde no hay corrientes libres ($\mathbf{J} = 0$)
- Análogo al potencial eléctrico, es decir, $\mathbf{B} = -\mu \nabla V_m$.

Potencial vectorial magnético ($\vec{A}$):

- Siempre se puede definir debido a la ley sin nombre ($\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$)
- Se cumple: $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$
- Permite definir la ecuación de Poisson magnética: $\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J}$

Identidad vectorial (Rotor de un rotor):

Sea $\vec{A}$ un campo vectorial lo suficientemente suave (de clase C^2), entonces se cumple la siguiente identidad vectorial:

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} \tag{7}$$

2 Ejercicios

1. Para el núcleo toroidal de un transformador, como se muestra en la figura 1, se tienen dos pequeñas secciones de materiales de permeabilidad μ_1 y μ_2 y espesores d_1 y d_2 respectivamente. Además, el núcleo es de un material ferromagnético ($\mu \to \infty$) en el resto del dispositivo y tiene sección transversal circular de radio a. Se pide determinar:
   (a) Potencial magnético escalar $V_m(z)$ en los medios 1, 2 y los campos H_1 y H_2.
   (b) Inductancia L del enrollado.
   (c) Energía magnética acumulada W_m en los medios 1 y 2.

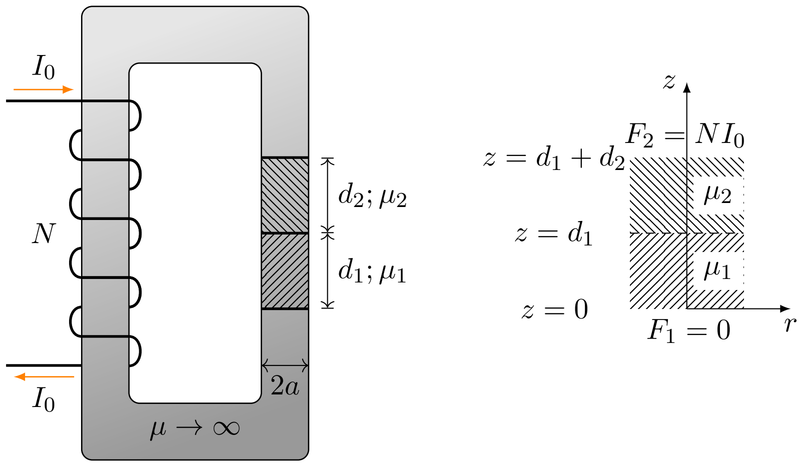

Figura 1: Transformador, pregunta 1.

Solución:

(a) Se busca obtener el potencial magnético escalar V_m, el cual es posible definirlo en condiciones de **flujo magnético nulo** principalmente y en otro tipo de condiciones. Este potencial se deberá obtener para los medios 1 y 2. Observación: No confundir con el potencial vector magnético $\vec{\mathbf{A}}$, ni el potencial escalar eléctrico V.

Notemos que estamos en presencia de un núcleo ferromagnético (Muy usados en motores) esto implicará una permeabilidad magnética casi infinita ($\mu \to \infty$). Además se tiene la siguiente relación entre la intensidad magnética y μ:

$$\boldsymbol{\mathcal{H}} = \frac{1}{\mu}\boldsymbol{\mathcal{B}}, \qquad \Rightarrow H = \frac{1}{\mu}B. \tag{8}$$

Dada la consideración anterior se tendrá que $H \to 0$, es de importancia considerar que esta relación la podemos realizar dado que no estamos en presencia de un desplazamiento eléctrico variable en el tiempo $\boldsymbol{\mathcal{D}}$ (ver ecuaciones de Maxwell-Heaviside). Debido a lo anterior, no se tendrá una corriente superficial en el núcleo:

$$\nabla \times \boldsymbol{\mathcal{H}} = \boldsymbol{\mathcal{J}}_f \tag{9}$$

Siendo de esta manera consistente (e independiente del tiempo), se tendrá:

$$\nabla \times \mathbf{H} = 0 \tag{10}$$

Al ser el rotor de H es cero, se tendrá que el campo magnético es conservativo, esto implica que se podrá definir un potencial magnético escalar V_m tal que:

$$H = -\nabla V_m \tag{11}$$

En base a esto podemos verificar de manera directa que cumple con la ecuación de Laplace:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \nabla \cdot \mu \mathbf{H} = 0 \tag{12}$$

Por lo que aplicando la divergencia al potencial magnético escalar se tendrá que:

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0, \tag{13}$$
$$\nabla \cdot (-\nabla V_m) = 0, \tag{14}$$
$$\nabla^2 V_m = 0. \tag{15}$$

Con lo que finalmente se logra definir un potencial magnético. Luego podemos analizar el tipo de coordenadas a utilizar, se observa que es de conveniencia el utilizar coordenadas cilíndricas, con lo que:

$$\nabla^2 V_m = \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}V_m}{\mathrm{d}r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}^2 V_m}{\mathrm{d}\theta^2} + \frac{\mathrm{d}^2 V_m}{\mathrm{d}z^2} \tag{16}$$

Se tendrá que el potencial escalar magnético dependerá de una sola dirección (nos dicen por enunciado), es decir, tenemos $V_m(z)$ tal que:

$$\nabla^2 V(z) = \frac{\mathrm{d}^2 V_m}{\mathrm{d}z^2} = 0, \tag{17}$$
$$\tag{18}$$

Así, basta resolver la EDO:

$$\frac{\mathrm{d}^2 V_m}{\mathrm{d}z^2} = 0 \tag{19}$$
$$\frac{\mathrm{d}V_m}{\mathrm{d}z} = A \tag{20}$$
$$\mathrm{d}V_m = A \cdot \mathrm{d}z \tag{21}$$

Integrando a ambos lados:

$$\int \mathrm{d}V_m = A \cdot \int \mathrm{d}z \tag{22}$$
$$V_m = Az + B \tag{23}$$

Se obtiene la forma del campo magnético escalar. Luego tenemos la presencia de dos medios, por lo tanto deberemos hacer la distinción entre cada uno de estos,

$$V_{m1}(z) = Az + B, \tag{24}$$
$$V_{m2}(z) = Cz + D. \tag{25}$$

Para encontrar las cuatro constantes, se debe utilizar cuatro ecuaciones que tengan relación con el potencial obtenido y despejar las constantes (similar a lo realizado en la pregunta 1 del auxiliar anterior). Estas ecuaciones son:

- Condición de borde de V_{m1}.
- Condición de borde de V_{m2}.
- Continuidad del potencial entre los distintos medios.
- Usar los campos magnéticos mediante $\mathbf{H} = -\nabla V_m$.

Partamos usando las condiciones de borde dadas en el enunciado:

Medio 1

$$V_{m1}(z = (d_1 + d_2)) = A(d_1 + d_2) + B = NI_0. \tag{26}$$

Medio 2

$$V_{m2}(z = 0) = C \cdot 0 + D = 0. \tag{27}$$

Lo que implicará de manera directa que $D = 0$. Se tendrá además que el campo magnético escalar deberá ser continuo:

$$V_{m1}(z = d_1) = V_{m2}(z = d_1) \tag{28}$$

$$Ad_1 + B = Cd_1. \tag{29}$$

Dado que se busca el obtener otra ecuación, se deriva de lo siguiente:

$$\mathbf{H}_1 = -\nabla V_{m1} \qquad \mathbf{H}_2 = -\nabla V_{m2} \tag{30}$$

$$H_1 = -\frac{\mathrm{d}V_{m1}}{\mathrm{d}z}\,\hat{z} \qquad H_2 = -\frac{\mathrm{d}V_{m2}}{\mathrm{d}z}\,\hat{z} \tag{31}$$

$$= -A\hat{z} \qquad = -C\hat{z} \tag{32}$$

Normalmente pensaríamos que el campo debiése ir en $\hat{\theta}$, ya que así es en los casos clásicos de campos magnéticos en toroides (por regla de la mano derecha). En este caso, el campo se dicta en torno a la dirección del potencial ($\hat{z}$). Lo anterior viene dado por la gradiente:

$$\mathbf{H} = -\nabla V_m = \frac{\mathrm{d}V_m}{\mathrm{d}x}\,\hat{x} + \frac{\mathrm{d}V_m}{\mathrm{d}y}\,\hat{y} + \frac{\mathrm{d}V_m}{\mathrm{d}z}\,\hat{z}. \tag{33}$$

Como el potencial solo depende de z, nos quedamos solo con que $\mathbf{H} = \frac{\mathrm{d}V_m}{\mathrm{d}z}\,\hat{z}$.
De esta manera tenemos que por condición de borde y dado que el campo tiene solo componente normal en la zona de interés se cumple:

$$B_{1n} = B_{2n} \tag{34}$$

$$\mu_1 H_1 = \mu_2 H_2 \tag{35}$$

$$\mu_1 A = \mu_2 C \tag{36}$$

Luego se puede plantear 4 set de ecuaciones las cuales serán:

$$NI_0 = A(d_1 + d_2) + B, \qquad D = 0, \qquad \mu_1 A = \mu_2 C, \qquad Ad_1 + B = Cd_1. \tag{37}$$

Luego despejando las variables se obtiene lo siguiente:

$$A = \frac{NI_0\mu_2}{(\mu_1 d_1 + \mu_2 d_2)} \tag{38}$$

$$B = NI_0 d_1 \left[\frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 d_1 + \mu_2 d_2}\right] \tag{39}$$

$$C = \frac{NI_0\mu_1}{(\mu_1 d_1 + \mu_2 d_2)} \tag{40}$$

$$D = 0 \tag{41}$$

Finalmente, reemplazando en las ecuaciones de los potenciales y en los campos podemos obtener:

$$V_{m1} = \frac{NI_0\mu_2}{(\mu_1 d_1 + \mu_2 d_2)} \cdot z + NI_0 d_1 \left[\frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 d_1 + \mu_2 d_2}\right] \tag{42}$$

$$V_{m2} = \frac{NI_0\mu_1}{(\mu_1 d_1 + \mu_2 d_2)} \cdot z \tag{43}$$

$$\mathbf{H_1} = -\frac{NI_0\mu_2}{(\mu_1 d_1 + \mu_2 d_2)}\hat{z} \tag{44}$$

$$\mathbf{H_2} = -\frac{NI_0\mu_1}{(\mu_1 d_1 + \mu_2 d_2)}\hat{z} \tag{45}$$

(b) Se busca obtener la inductancia L que vendrá caracterizada por la siguiente expresión:

$$L = \frac{\Phi_m N}{I} \tag{46}$$

Donde Φ_m corresponde al flujo magnético y nos da una idea de cuánto campo magnético hay en una superficie dada y deberá por tanto, considerar ambos medios:

$$\Phi_{m1} = \int B_1 \, \mathrm{d}a = \mu_1 \int_S H_1 \, \mathrm{d}a = \mu_1 \int_0^{2\pi} \int_0^a A(-\widehat{\mathbf{z}}) \cdot r(\mathrm{d}r)(\mathrm{d}\theta)(-\widehat{\mathbf{z}}) = \mu_1 \pi a^2 A \tag{47}$$

$$= \mu_1 \pi a^2 \cdot \frac{NI_0\mu_2}{(\mu_1 d_1 + \mu_2 d_2)} \tag{48}$$

De manera análoga tenemos que el flujo para la otra superficie vendrá dado por:

$$\Phi_{m2} = \int B_2 \, \mathrm{d}a = \mu_2 \int_S H_2 \, \mathrm{d}a = \mu_2 \int_0^{2\pi} \int_0^a C(-\widehat{\mathbf{z}}) \cdot r(\mathrm{d}r)(\mathrm{d}\theta)(-\widehat{\mathbf{z}}) \tag{49}$$

$$= \mu_2 \pi a^2 C = \mu_2 \pi a^2 \cdot \frac{NI_0\mu_1}{(\mu_1 d_1 + \mu_2 d_2)} \tag{50}$$

Observación 1: Para el diferencial de superficie, elegimos el que tenga la dirección del campo magnético, es decir, el que va en $\hat{z}$.

Una vez obtenido el flujo magnético para ambos medios se logra obtener la inductancia utilizando la expresión:

$$L = \frac{\Phi_m N}{I_0} = \mu_2 \pi a^2 C = \mu_2 \pi a^2 \cdot \frac{N^2 \mu_1}{(\mu_1 d_1 + \mu_2 d_2)} \tag{51}$$

Observación 2: Es importante considerar que es posible tomar cualquier flujo para calcular la inductancia, esto debido a que los flujos en diferentes medios son iguales.

(c) Debemos obtener la energía magnética acumulada W_m en ambos medios, para esto se utilizará la densidad de enería magnética:

$$w_m = \frac{1}{2}\mu H^2 \tag{52}$$

Observación 3: La densidad de energía magnética w_m es análoga a la densidad de energía eléctrica $w_e = \frac{1}{2}\epsilon\mathbf{E^2}$. Para obtener la energía, se debe integrar la densidad en todo el espacio de cada medio. Luego como se quiere la energía magnética se integra sobre un volumen tal que:

<u>Medio 1</u>

$$W_{m1} = \frac{\mu_1}{2}\int_v H_1^2 \,\mathrm{d}\tau = \frac{\mu_1}{2}A^2\int_0^{d_1}\int_0^{2\pi}\int_0^{a} r(\mathrm{d}r)(\mathrm{d}\theta)(\mathrm{d}z) = \frac{\mu_1}{2}A^2\pi a^2 d_1 \tag{53}$$

<u>Medio 2</u>

$$W_{m2} = \frac{\mu_w}{2}\int_v H_2^2 \,\mathrm{d}\tau = \frac{\mu_2}{2}C^2\int_{d_1}^{d_1+d_2}\int_0^{2\pi}\int_0^{a} r(\mathrm{d}r)(\mathrm{d}\theta)(\mathrm{d}z) = \frac{\mu_2}{2}C^2\pi a^2 d_2 \tag{54}$$

Finalmente se obtienen las energías acumuladas en los dos diferentes medios dado que A y C son términos conocidos. Para obtener la energía total del sistema, se suman las energías de cada medio:

$$W_m = W_{m1} + W_{m2} \tag{55}$$

$$W_m = \frac{\mu_1}{2}A^2\pi a^2 d_1 + \frac{\mu_2}{2}C^2\pi a^2 d_2 \tag{56}$$

2. Una densidad $\mathbf{J} = J_0\hat{\boldsymbol{z}}$ origina un potencial magnético vectorial en la figura 2:

$$\vec{\mathbf{A}} = \frac{-\mu_0 J_0}{4}(x^2 + y^2)\hat{\boldsymbol{z}} \tag{57}$$

   (a) A partir de las ecuaciones de Maxwell para el caso magnetoestático y del potencial vectorial magnético, muestre que, imponiendo la condición de calibre (o gauge) de Coulomb ($\nabla \cdot A = 0$), el potencial vectorial magnético satisface la ecuación de Poisson vectorial $\nabla^2\mathbf{A} = -\mu_0\mathbf{J}$.

   (b) Use la ecuación de Poisson vectorial para comprobar si el potencial vectorial magnético dado por el enunciado pertenece a la densidad de corriente $\mathbf{J}$.

   (c) Mediante $\mathbf{A}$ calcule el campo magnético $\mathbf{B}$.

   (d) Utilice $\mathbf{J}$ y la ley de Ampère para calcular nuevamente $\mathbf{B}$, compare los resultados.

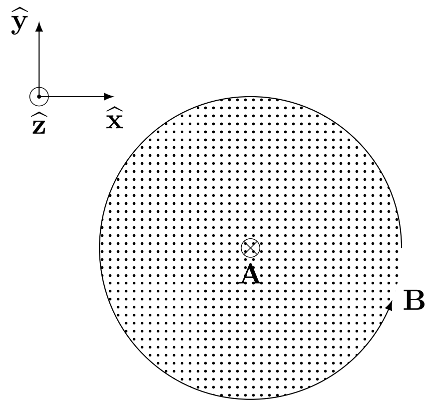

Figura 2: Campo magnético ilustrado para pregunta 2.

Solución:

(a) A partir de la ley de Ampère magnetoestática:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0\mathbf{J} \tag{58}$$
$$\tag{59}$$

En un espacio bien definido y gracias a la ley sin nombre ($\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$), se tiene que $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$. Reemplazando esto en la Ley de Ampère:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \mu_0\mathbf{J} \tag{60}$$

Por identidad vectorial (ver resumen) se tiene:

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2\mathbf{A} = \mu_0\mathbf{J} \tag{61}$$

Pero el enunciado dice que hay que utilizar el calibre de Coulomb, es decir, $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ (se cumple siempre en casos magnetoestáticos). Así:

$$-\nabla^2\mathbf{A} = \mu_0\mathbf{J} \tag{62}$$
$$\nabla^2\mathbf{A} = -\mu_0\mathbf{J} \tag{63}$$

Y llegamos a la Ecuación de Poisson en el caso magnético.

(b) Se tiene el siguiente potencial vectorial magnético:

$$\mathbf{A} = \frac{-\mu_0 J_0}{4}(x^2 + y^2)\widehat{\boldsymbol{z}} \tag{64}$$

Realizando el análisis por componente se tendrá que el campo vectorial $\mathbf{A}$ tiene componentes solo en $\widehat{\boldsymbol{z}}$, esto se observa de manera directa

$$\nabla^2 A_x = -\mu_0 J_x \tag{65}$$
$$\nabla^2 A_y = -\mu_0 J_y \tag{66}$$
$$\nabla^2 A_z = -\mu_0 J_z \tag{67}$$

Donde $A_x = 0$ y $A_y = 0$, a diferencia de la componente $\widehat{\boldsymbol{z}}$. Calculando $\nabla^2 \mathbf{A}$ tenemos que:

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \frac{\partial^2 A}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 A}{\partial^2 y} + \frac{\partial^2 A}{\partial^2 z} = \frac{-\mu_0 J_0}{2} + \frac{-\mu_0 J_0}{2} + 0 = -\mu_0 J_0. \tag{68}$$

Por tanto se comprueba finalmente que el campo vectorial $\mathbf{A}$ es el potencial de $\mathbf{J}$.

(c) En base a lo anterior se busca obtener el campo magnético $\mathbf{B}$ mediante $\mathbf{A}$.

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \tag{69}$$

Para obtener el campo magnético se usará la siguiente relación:

$$\nabla \times \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \widehat{\boldsymbol{x}} & \widehat{\boldsymbol{y}} & \widehat{\boldsymbol{z}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \widehat{\boldsymbol{x}} & \widehat{\boldsymbol{y}} & \widehat{\boldsymbol{z}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & A_z \end{bmatrix} \tag{70}$$

Calculando el rotor se tiene lo siguiente:

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{\partial A}{\partial y}\widehat{\boldsymbol{x}} - \frac{\partial A}{\partial x}\widehat{\boldsymbol{y}} + 0\widehat{\boldsymbol{z}} \tag{71}$$
$$= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-\mu_0 J_0 (x^2 + y^2)}{4}\right)\widehat{\boldsymbol{x}} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-\mu_0 J_0 (x^2 + y^2)}{4}\right)\widehat{\boldsymbol{y}} \tag{72}$$
$$= \frac{-\mu_0 J_0}{2}(y\widehat{\boldsymbol{x}} - x\widehat{\boldsymbol{y}}) \tag{73}$$

Obteniendo así el campo magnético $\mathbf{B}$ mediante $\mathbf{A}$.

(d) Se busca obtener $\mathbf{B}$ mediante la ley de Ampère, para ello se tiene lo siguiente:

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = \mu_0 I_{\mathrm{enc}} \tag{74}$$
$$\int_{\mathcal{S}} \mathbf{J} \cdot \mathrm{d}\mathbf{a} = I_{\mathrm{enc}} \tag{75}$$

Dada la geometría que presenta el sistema, es conveniente utilizar coordenadas cilíndricas con una circunferencia de radio r. El diferencial de línea debe ir en la dirección del campo $(r\,\mathrm{d}\theta \cdot \hat{\theta})$. Por otro lado, el diferencial de superficie debe ir en la dirección de la corriente ($r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta \cdot \hat{z}$). Así:

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = \int_{\mathcal{S}} \mu_0 J_0 \,\mathrm{d}a \tag{76}$$

$$B \int_0^{2\pi} r \,\mathrm{d}\theta = \mu_0 J_0 \int_0^{2\pi} \int_0^{r} r(\mathrm{d}r)(\mathrm{d}\theta) \tag{77}$$

$$B(2\pi r) = \mu_0 J_0 \pi r^2 \tag{78}$$

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 J_0 r}{2} \widehat{\boldsymbol{\theta}} \tag{79}$$

Se observa además que es equivalente al anterior, esto se logra demostrar realizando un cambio de coordenadas conveniente.

$$\mathbf{B} = \frac{-\mu_0 J_0}{2} (y\widehat{\boldsymbol{x}} - x\widehat{\boldsymbol{y}}) \tag{80}$$

Realizando el cambio a coordenadas cilíndricas, en donde $x = r \cdot \cos\theta$ e $y = r \cdot \sin\theta$ tenemos lo siguiente:

$$\mathbf{B} = \frac{-\mu_0 J_0}{2} \left[r\sin(\theta)\widehat{\boldsymbol{x}} - r\cos(\theta)\widehat{\boldsymbol{y}} \right] = \frac{-\mu_0 J_0 r}{2} \left[\sin(\theta)\widehat{\boldsymbol{x}} - \cos(\theta)\widehat{\boldsymbol{y}} \right] = \frac{\mu_0 J_0 r}{2} \widehat{\boldsymbol{\theta}}. \tag{81}$$

Esto debido a que $\hat{\theta} = -\sin\theta\hat{x} + \cos\theta\hat{y}$.

3. Considere un condensador (*capacitor*) cuyo dieléctrico de permitividad ϵ está limitado por dos esferas concéntricas de radios a y b y dos conos equipotenciales de semi ángulos θ_1 y θ_2 como se indica en la figura 3:

   (a) Obtenga el potencial $V(r, \theta, \phi)$.
   Hint: $\int \frac{1}{\sin x}\,\mathrm{d}x = \ln(\tan(x/2)) + C$

   (b) Campo eléctrico $\mathbf{E}$.

   (c) Capacitancia C a partir de la carga.

   (d) Capacitancia C a partir de la energía.

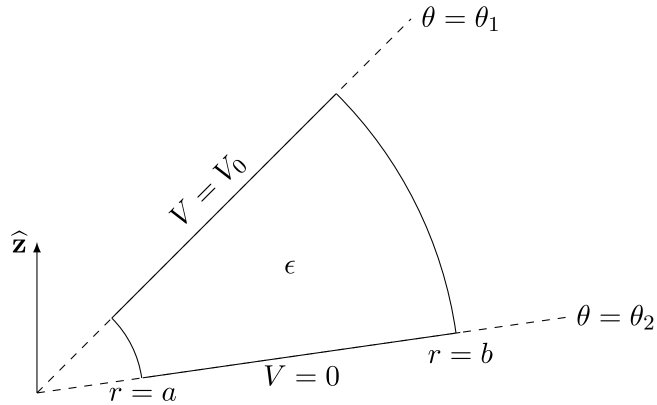

Figura 3: Sección transversal línea de transmisión. Pregunta 3.

Solución:

(a) Se busca obtener el potencial escalar eléctrico V. Se observa que es conveniente utilizar coordenadas esféricas, además que el potencial eléctrico dependerá solo de θ (se puede apreciar claramente en la figura 3). Además, tampoco existe densidad de carga libre ρ, por lo tanto utilizaremos la ecuación de Laplace:

$$\nabla^2 V(r, \theta, \phi) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin(\theta)\frac{\partial V}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2(\theta)}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} = 0 \tag{82}$$

Debido a la dependencia en una sola componente (θ) para el potencial se tiene lo siguiente:

$$\nabla^2 V(\theta) = \frac{1}{r^2 \sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin(\theta)\frac{\partial V}{\partial \theta}\right) = 0 \tag{83}$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin(\theta)\frac{\partial V}{\partial \theta}\right) = 0 \tag{84}$$

Por regla de producto se obtiene:

$$\frac{\partial \sin(\theta)}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial V}{\partial \theta} + \sin(\theta) \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} = 0 \tag{85}$$

$$\cos(\theta) \cdot \frac{\partial V}{\partial \theta} + \sin(\theta) \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} = 0 \tag{86}$$

Haciendo el cambio de variable $u = \frac{\partial V}{\partial \theta}$, $\frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}$, se tiene:

$$\cos(\theta) \cdot u + \sin(\theta) \cdot \frac{\partial u}{\partial \theta} = 0 \tag{87}$$

$$\cos(\theta) \cdot u = -\sin(\theta) \cdot \frac{\partial u}{\partial \theta} \tag{88}$$

$$-\frac{\cos(\theta)}{\sin\theta} \cdot \partial\theta = \frac{\partial u}{u} \tag{89}$$

Integrando a ambos lados:

$$-\int \frac{\cos(\theta)}{\sin\theta} \cdot \partial\theta = \int \frac{\partial u}{u} \tag{90}$$

$$-\ln(\sin\theta) + C = \ln u \tag{91}$$

$$\ln(\frac{1}{\sin\theta}) + C = \ln u \tag{92}$$

$$\exp(\ln(\frac{1}{\sin\theta}) + C) = \exp(\ln u) \tag{93}$$

$$\exp(\ln(\frac{1}{\sin\theta})) \cdot \exp C = \exp(\ln u) \tag{94}$$

$$A \cdot \frac{1}{\sin\theta} = u \tag{95}$$

Revirtiendo el cambio de variable:

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = A \cdot \frac{1}{\sin\theta} \tag{96}$$

$$\partial V = A \cdot \frac{\partial\theta}{\sin\theta} \tag{97}$$

$$\int \partial V = A \cdot \int \frac{\partial\theta}{\sin\theta} \tag{98}$$

$$V_{(\theta)} = A \cdot \ln(\tan(\theta/2)) + B \tag{99}$$

De tal manera se obtiene la forma del potencial eléctrico V. Luego debemos utilizar las condiciones de borde para obtener las constantes que caracterizan este sistema, al ser solo un medio se simplifica el calculo, para la primera condición se tiene:

$$V(\theta = \theta_1) = V_0 = A \ln\big(\tan(\theta_1/2)\big) + B \tag{100}$$

Para la segunda condición de borde:

$$V(\theta = \theta_2) = 0 = A \ln\big(\tan(\theta_2/2)\big) + B \tag{101}$$

Luego despejando las constantes obtenemos lo siguiente:

$$A = \frac{V_0}{\ln\left(\frac{\tan(\theta_1/2)}{\tan(\theta_2/2)}\right)} \tag{102}$$

$$B = -\frac{V_0}{\ln\left(\frac{\tan(\theta_1/2)}{\tan(\theta_2/2)}\right)} \ln(\tan(\theta_2/2)) \tag{103}$$

Obteniendo la forma particular del $V(\theta)$:

$$V(\theta) = A\ln(\tan(\theta/2)) + B \tag{104}$$
$$= \frac{V_0}{\ln\left(\frac{\tan(\theta_1/2)}{\tan(\theta_2/2)}\right)}\ln(\tan(\theta/2)) - \frac{V_0}{\ln\left(\frac{\tan(\theta_1/2)}{\tan(\theta_2/2)}\right)}\ln(\tan(\theta_2/2)) \tag{105}$$

(b) Se busca obtener el potencial del campo eléctrico $\mathbf{E}$ el cual se puede obtener de manera directa mediante el campo escalar eléctrico y el hecho de que $\mathbf{E}$ es conservativo, por tanto:

$$\mathbf{E} = -\nabla V(\theta) \tag{106}$$

Se deberá tener en cuenta que estamos en coordenadas esféricas por lo que tendremos lo siguiente:

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{r}\frac{dV}{d\theta}\widehat{\boldsymbol{\theta}} \tag{107}$$
$$= -\frac{1}{r}\frac{d}{d\theta}\left(\frac{V_0}{\ln\left(\frac{\tan(\theta_1/2)}{\tan(\theta_2/2)}\right)}\ln(\tan(\theta/2)) - \frac{V_0}{\ln\left(\frac{\tan(\theta_1/2)}{\tan(\theta_2/2)}\right)}\ln(\tan(\theta_2/2))\right)\widehat{\boldsymbol{\theta}} \tag{108}$$
$$= \frac{-1}{r}\frac{V_0}{\ln\left(\frac{\tan(\theta_1/2)}{\tan(\theta_2/2)}\right)}\frac{d}{d\theta}\big(\ln(\tan(\theta/2))\big)\widehat{\boldsymbol{\theta}} \tag{109}$$
$$= \frac{-1}{r}\frac{V_0}{\ln\left(\frac{\tan(\theta_1/2)}{\tan(\theta_2/2)}\right)}\frac{1}{\tan(\theta/2)}\frac{d}{d\theta}\big(\tan(\theta/2)\big)\widehat{\boldsymbol{\theta}} \tag{110}$$
$$= \frac{-1}{2r}\frac{V_0}{\ln\left(\frac{\tan(\theta_1/2)}{\tan(\theta_2/2)}\right)}\frac{\cos(\theta/2)}{\sin(\theta/2)}\frac{1}{\cos^2(\theta/2)}\widehat{\boldsymbol{\theta}} \tag{111}$$
$$= \frac{-1}{r}\frac{V_0}{\ln\left(\frac{\tan(\theta_1/2)}{\tan(\theta_2/2)}\right)}\frac{1}{2\sin(\theta/2)\cos(\theta/2)}\widehat{\boldsymbol{\theta}} \tag{112}$$
$$= \frac{-1}{r}\left(\frac{V_0}{\ln\left(\frac{\tan(\theta_1/2)}{\tan(\theta_2/2)}\right)}\frac{1}{\sin(\theta)}\right)\widehat{\boldsymbol{\theta}} \tag{113}$$

Finalmente se obtiene el campo eléctrico en base al potencial V, es importante notar que si bien el potencial era una función de θ, el campo eléctrico no dependerá de esta sola componente necesariamente y podrá depender de más. Como es el caso obtenido, el cual dependerá tanto de r como de θ tal que $\mathbf{E}(r,\theta)$.

(c) Se busca obtener la capacitancia C en base a la carga, es importante notar que este término deberá estar expresado en constantes geométricas del material y no en alguna dependencia de una variable (puede ser un buen indicador para saber si el ejercicio está correcto.)

$$C = \frac{Q}{\Delta V} \tag{114}$$

Sabemos que la diferencia de potencial entre ambas placas corresponderá a $\Delta V = V_0$, y también que $C = \frac{Q}{V_0}$, utilizando el hecho de que la densidad de carga superficial será equivalente al desplazamiento evaluado en esa superficie se tiene lo siguiente por Gauss (recordar relación entre la densidad superficial y el desplazamiento eléctrico):

$$Q = \int \sigma \cdot \mathrm{d}\mathbf{a} \tag{115}$$

$$= \int \mathbf{D} \cdot \mathrm{d}\mathbf{a} \tag{116}$$

Como estamos en coordenadas esféricas y sabemos que el desplazamiento como el campo eléctrico se encuentran en $\widehat{\boldsymbol{\theta}}$ luego $\mathrm{d}a = r\sin(\theta)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi$, por lo que:

$$Q = \epsilon \int \frac{-1}{r} \frac{V_0}{\ln\left(\frac{\tan(\theta_1/2)}{\tan(\theta_2/2)}\right)} \frac{1}{\sin(\theta)} \left(\widehat{\boldsymbol{\theta}}\right) \cdot r\sin(\theta)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi \left(\widehat{\boldsymbol{\theta}}\right) \tag{117}$$

$$= -\frac{V_0\epsilon}{\ln\left(\frac{\tan(\theta_1/2)}{\tan(\theta_2/2)}\right)} \int_0^{2\pi} \int_a^b \mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi \tag{118}$$

$$= -\frac{V_0\epsilon}{\ln\left(\frac{\tan(\theta_1/2)}{\tan(\theta_2/2)}\right)} (2\pi)(b-a) \tag{119}$$

Finalmente se tendrá que:

$$C = \frac{Q}{V_0} = \frac{(a-b)2\pi\epsilon}{\ln\left(\frac{\tan(\theta_1/2)}{\tan(\theta_2/2)}\right)}. \tag{120}$$

(d) Se busca el obtener la capacitancia desde un punto de vista energético, esto se puede relacionar con la siguiente expresión:

$$\frac{1}{2}CV^2 = \int \frac{1}{2}\epsilon\|\mathbf{E}\|^2\,\mathrm{d}\tau \tag{121}$$

$$CV_0^2 = \epsilon \int \frac{1}{r^2} \frac{V_0^2}{\ln\left(\frac{\tan(\theta_1/2)}{\tan(\theta_2/2)}\right)^2} \frac{1}{\sin(\theta)^2} r^2\sin(\theta)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi \tag{122}$$

$$C = \frac{\epsilon}{\ln\left(\frac{\tan(\theta_1/2)}{\tan(\theta_2/2)}\right)^2} \int_a^b \int_0^{2\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{1}{\sin(\theta)}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi \tag{123}$$

$$= \frac{\epsilon}{\ln\left(\frac{\tan(\theta_1/2)}{\tan(\theta_2/2)}\right)^2} (b-a)2\pi \ln\left(\frac{\tan(\theta_2/2)}{\tan(\theta_1/2)}\right) \tag{124}$$

$$= -\frac{(b-a)2\pi\epsilon}{\ln\left(\frac{\tan(\theta_1/2)}{\tan(\theta_2/2)}\right)} = \frac{(a-b)2\pi\epsilon}{\ln\left(\frac{\tan(\theta_1/2)}{\tan(\theta_2/2)}\right)} \tag{125}$$

Obteniendo la capacitancia desde la energía y desde la carga se obtiene el mismo resultado, lo que indica que el ejercicio fue resuelto de manera correcta.