Ingeniería Eléctrica
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS UNIVERSIDAD DE CHILE

Electromagnetismo Aplicado (EL3103-1)
Clase auxiliar 3
Prof. Benjamin Jacard H.
Prof. Aux. Erik Saez A.

1. En el toroide delgado de la figura, determinar:
    1. La **impedancia** del enrollado de N vueltas en primera aproximación (despreciando energía almacenada en campo eléctrico).
    2. El **campo eléctrico** fasorial de mayor amplitud en el entrehierro.

    Nota: Suponga que el campo magnético en el toroide es uniforme e igual al correspondiente al radio medio. Despreciar efectos de borde y pérdidas.

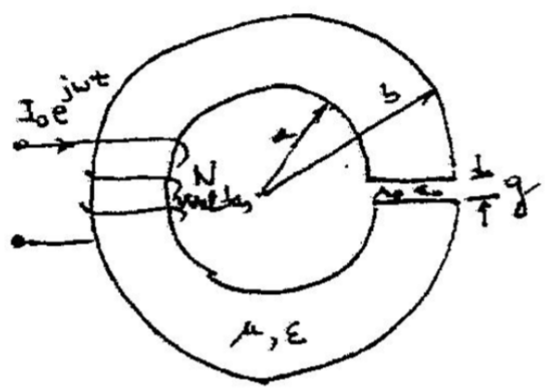


Figura 1: Esquema del toroide

Solución:

Se busca obtener la impedancia del enrollado despreciando la energia almacenada en el campo electrico, por lo que se tiene que:

$$Z = jwL = j\frac{4\omega}{|I_0|^2} < W_m > \tag{1}$$

Utilizando la forma integral de la ley de Ampere se tiene que:

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = NI_0 e^{j\omega t} \tag{2}$$

Consideramos el radio medio del toroide, el cual podemos ver que se define como:

$$r_m = \frac{a+b}{2} \tag{3}$$

Aplicando la ley de Ampère:

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = H_1(2\pi r_m - g) + H_2 g = NI_0 e^{j\omega t} \tag{4}$$

Dado que por condicion de borde se debe cumplir $B_1 = B_2 \Rightarrow \mu H_1 = \mu_0 H_2$, se obtiene:

$$\frac{\mu_0}{\mu} H_2(2\pi r_m - g) + H_2 g = N I_0 e^{j\omega t} \tag{5}$$

Despejando H_2:

$$H_2 = \frac{\mu N I_0}{\mu_0(2\pi r_m - g) + \mu g} \tag{6}$$

De manera análoga podemos despejar H_1 dando como resultado:

$$H_1 = \frac{\mu_0 N I_0}{\mu_0(2\pi r_m - g) + \mu g} \tag{7}$$

Dado que despreciamos la energia almacenada en el campo electrico, nos centraremos unicamente en la energia almacenada en el campo magnetico, por lo que se tiene que:

$$\frac{1}{4} L I_0^2 = \frac{1}{4} \int_{\text{vol toroide}} \vec{B} \cdot \vec{H}^* \, dv \tag{8}$$

La cual puede expresarse como:

$$\frac{1}{4} L I_0^2 = \frac{1}{4} \mu H_1^2 \cdot \frac{\pi(b-a)^2}{4} \cdot (2\pi r_m - g) + \frac{1}{4} \mu_0 H_2^2 \cdot \frac{\pi(b-a)^2}{4} \cdot g \tag{9}$$

2. El campo eléctrico $E(r, \phi)$ dentro de una cuña bidimensional $(0 \leq \phi \leq \beta, r \leq R)$ limitada por un conductor perfecto conectado a tierra (figura 2) proporciona una visión de la naturaleza de los campos eléctricos cerca de esquinas conductoras. El potencial no puede ser singular cuando $r \to 0$, entonces se simplifica a la siguiente expresión (α constante mayor a 0)

$$V(r, \phi) = A + B\phi + \sum_{\alpha > 0} C_\alpha r^\alpha \sin(\alpha \phi) \tag{10}$$

   1. Determine los coeficientes A, B y α a partir de las condiciones de borde. Luego de determinar α encuentre la forma integral de calcular los C_α a partir de $f(\phi)$. Las condiciones de borde siguen la forma:

$$\begin{cases} V(r, 0) = 0 & r \in [0, R] \\ V(r, \beta) = 0 & r \in [0, R] \\ V(R, \phi) = f(\phi) & \phi \in [0, \beta] \end{cases} \tag{11}$$

   2. Cuando $r \to 0$ el potencial se puede aproximar por:

$$V(r, \phi) \approx r^{n/\beta} \sin\left(\frac{n\pi}{\beta}\right) \tag{12}$$

   Para esta expresión encuentre el campo eléctrico asociado y comente cualitativamente como se comporta el campo cuando $r \to 0$ en los casos $\beta < \pi$, $\beta = \pi$ y $\beta > \pi$. Indicación: Puede ser útil recordar la expresión del gradiente en coordenadas polares.

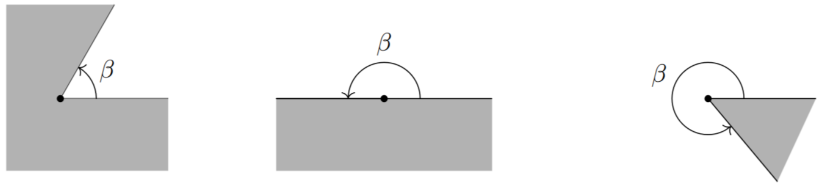


Figura 2: Esquema general para los diferentes valores de β

Solución:

La resolución viene dada por:

1. Dado que se busca obtener los diversos coeficiente A,B y α, por lo que utilizando la primera condicion de borde se tiene que:

$$V(r,0) = A + B\cdot 0 + \sum_{\alpha>0} C_\alpha r^\alpha \sin(\alpha\cdot 0) = 0 \tag{13}$$
$$\Rightarrow A = 0 \tag{14}$$

Ademas dada esa condicion de borde sabemos que en todo el borde de la placa se tiene que cumplir que el potencial es cero (*Recordemos que* $r \in [0,R]$), por lo tanto podemos evaluarlo en r=0 y se tiene que:

$$V(r=0,\beta) = B\cdot\phi + \sum_{\alpha>0} C_\alpha 0^\alpha \sin(\alpha\cdot\phi) = 0 \tag{15}$$
$$= B\cdot\beta + 0 = 0 \tag{16}$$
$$\Rightarrow B = 0 \tag{17}$$

Por lo que se obtiene que A=B=0 y por tanto la ecuacion se reduce a:

$$V(r,\phi) = \sum_{\alpha>0} C_\alpha r^\alpha \sin(\alpha\cdot\phi) \tag{18}$$
$$\tag{19}$$

Dado que buscamos determinar el valor de α, se debe utilizar la condicion de borde $V(R,\phi) = f(\phi)$, por lo que se tiene que:

$$V(r,\beta) = \sum_{\alpha>0} C_\alpha r^\alpha \sin(\alpha\cdot\beta) = 0 \tag{20}$$

Para que tenga sentido la ecuacion (*Si no feura el caso, deberia cumplirse que* $C_\alpha = 0 o R^\alpha =$ *0 lo cual produce que el potencial siempre sea 0 y no es de interes*), la unica forma es que $sen(\alpha\cdot\phi) = 0$, por lo que se tiene que:

$$\alpha\cdot\beta = n\pi \tag{21}$$
$$\Rightarrow \alpha = \frac{n\pi}{\beta} \tag{22}$$

Luego reemplazando la expresion de α en la ecuacion del potencial se tiene que:

$$V(r,\phi) = \sum_{\alpha>0} C_\alpha r^{\frac{n\pi}{\beta}} \sin\left(\frac{n\pi}{\beta}\cdot\phi\right) \tag{23}$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} C_n r^{\frac{n\pi}{\beta}} \sin\left(\frac{n\pi}{\beta}\cdot\phi\right) \tag{24}$$

Luego debemos determinar las constantes C_n, para lo cual se utiliza la condicion de borde $V(R,\phi) = f(\phi)$, por lo que se tiene que:

$$V(R,\phi) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n R^{\frac{n\pi}{\beta}} \sin\left(\frac{n\pi}{\beta} \cdot \phi\right) = f(\phi) \tag{25}$$

Luego se tiene una serie de Fourier, por lo que se puede obtener el coeficiente C_n mediante el producto interno entre la funcion y la base ortonormal, es decir:

$$A_n = C_n R^{\frac{n\pi}{\beta}} \tag{26}$$

Con lo que tenemos que

$$C_n = \frac{2}{\beta \cdot R^{\frac{n\pi}{\beta}}} \int_0^{\beta} f(\phi) \sin\left(\frac{n\pi}{\beta} \cdot \phi\right) d\phi \tag{27}$$

Con lo que se obtiene la expresion para el potencial electrico en la cuña bidimensional, dado el esquema de la figura.

2. tenemos que cuando el potencial $(r \to 0)$, en los casos $\beta < \pi$, $\beta = \pi$ y $\beta > \pi$ se tiene que:

$$V(r,\phi) \approx r^{\frac{\pi}{\beta}} \sin\left(\frac{n\pi\phi}{\beta}\right) \tag{28}$$

Notamos que en este caso predomina m = 1, luego tenemos que el campo electrico asociado sera:

$$E = -\nabla V \tag{29}$$

Sabemos que el gradiente en coordenadas polares es:

$$\nabla V = \hat{r}\frac{\partial V}{\partial r} + \hat{\phi}\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \phi} \tag{30}$$

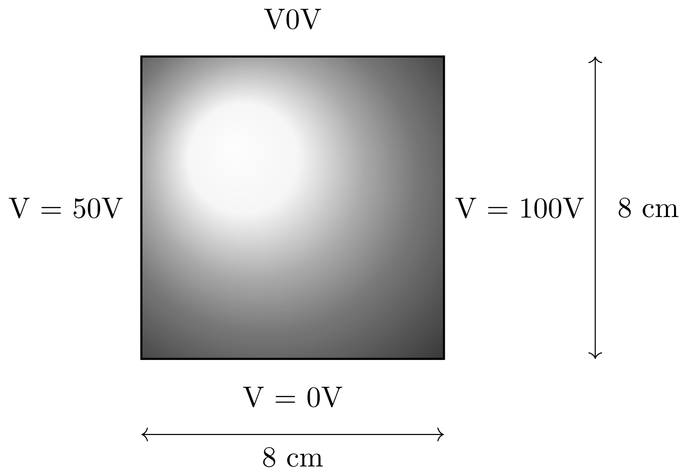
Con lo que se obtiene que:

$$\mathbf{E} = -\nabla V = -\frac{\pi}{\beta} r^{\frac{\pi}{\beta}-1} \left[\hat{r}\sin\left(\frac{\pi\phi}{\beta}\right) + \hat{\phi}\cos\left(\frac{\pi\phi}{\beta}\right)\right] \tag{31}$$

Una vez obtenido el campo electrico, se puede analizar el comportamiento del mismo en los diferentes casos:

- **Caso** $\beta < \pi$: En esta situación tenemos que $E \to 0$ cuando $r \to 0$.
- **Caso** $\beta = \pi$: En este caso el campo eléctrico se comporta como un vector constante dirigido verticalmente.
- **Caso** $\beta > \pi$: En este caso el campo eléctrico diverge, es decir, se tiene que $E \to \infty$, por lo que el campo eléctrico diverge en la esquina $(\beta \to 2\pi)$.

3. Una placa de un material con constante ϵ_0 posee dimensiones de $8\,\text{cm} \times 8\,\text{cm}$, y se le aplica potencial como muestra la figura.



1. Determine el potencial en el centro de la placa y el campo eléctrico en el centro de la placa.
2. Suponga que alguna persona maldadosa decide insertar dos materiales con constantes ϵ_1 y ϵ_2, estos se dividen en el medio de la placa. En que cambia el sistema?
3. No solo con esto, decide posteriormente eliminar los diferentes materiales e insertar una densidad de carga $\rho = 5\epsilon_0$. En que se ve afectado el sistema? **Propuesto**

Solución:

1. Para determinar el potencial en el centro de la placa, es necesario FDM (Finite Difference Method) o el método de diferencias finitas. Este consiste en discretizar el espacio de la siguiente manera:

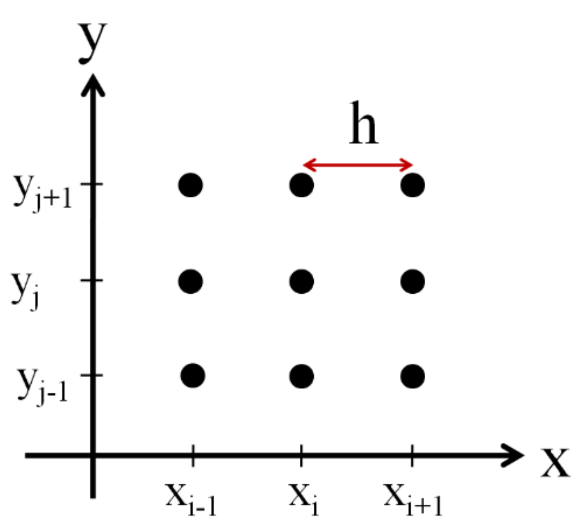


Figura 3: Esquema general para los diferentes valores de β

De tal manera que tenemos que asumiendo que el potencial depende de V(x,y):

$$V(i, j) = V(x_i, y_j) \tag{32}$$

Luego asumiendo que la densidad de carga tambien varia punto a punto, se cumple que:

$$\nabla^2 V(x,y) = -\frac{\rho(x,y)}{\epsilon} \tag{33}$$

Reemplazando:

$$\frac{\partial^2 V(i,j)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V(i,j)}{\partial y^2} = -\frac{\rho(i,j)}{\epsilon} \tag{34}$$

Con lo ultimque podemos aproximar la derivada de la siguiente manera:

$$\frac{\partial^2 V(i,j)}{\partial x^2} \approx \frac{V(i+1,j) - 2V(i,j) + V(i-1,j)}{(h)^2} \tag{35}$$

$$\frac{\partial^2 V(i,j)}{\partial y^2} \approx \frac{V(i,j+1) - 2V(i,j) + V(i,j-1)}{(h)^2} \tag{36}$$

Por lo tanto tenemos que:

$$\frac{V(i+1,j) - 2V(i,j) + V(i-1,j)}{(h)^2} + \frac{V(i,j+1) - 2V(i,j) + V(i,j-1)}{(h)^2} = -\frac{\rho(i,j)}{\epsilon} \tag{37}$$

Por lo tanto tenemos que el potencial $V(i,j)$ se puede expresar como:

$$V(i,j) = \frac{1}{4}\left[V(i-1,j) + V(i+1,j) + V(i,j-1) + V(i,j+1) + \frac{\rho(i,j)h^2}{\varepsilon}\right] \tag{38}$$

Lo que permite entender que para calcular el potencial en el punto(i,j) se necesitan los puntos alrededor formando lo que se conoce como estrella de 5 puntos.

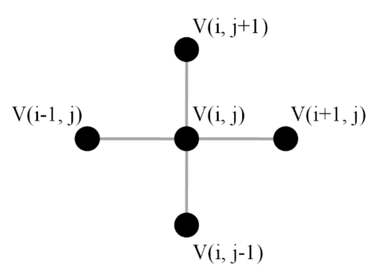


Figura 4: Esquema general para los diferentes valores de β

Para el primer apartado, se busca obtener el potencial en el centro de la placa, por lo que debemos dividir el espacio, en particular se toma h=2, tal que:

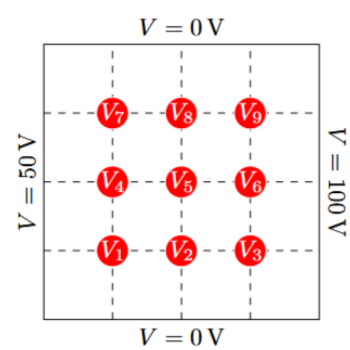


Figura 5: Esquema general para los diferentes valores de β

Por lo que las ecuaciones seran:

$$V_1 = \frac{1}{4}\left(50 + V_2 + V_4\right) \tag{39}$$
$$V_2 = \frac{1}{4}\left(V_1 + V_3 + V_5\right) \tag{40}$$
$$V_3 = \frac{1}{4}\left(V_2 + V + 6 + 100\right) \tag{41}$$
$$V_4 = \frac{1}{4}\left(V_1 + V_5 + V_7 + 50\right) \tag{42}$$
$$V_5 = \frac{1}{4}\left(V_2 + V_4 + V_6 + V_8\right) \tag{43}$$
$$V_6 = \frac{1}{4}\left(V_3 + V_5 + V_9 + 100\right) \tag{44}$$
$$V_7 = \frac{1}{4}\left(V_4 + V_8 + 50\right) \tag{45}$$
$$V_8 = \frac{1}{4}\left(V_5 + V_7 + V_9\right) \tag{46}$$
$$V_9 = \frac{1}{4}\left(V_6 + V_8 + 100\right) \tag{47}$$

Las cuales expresada en un sistema lineal de matrices:

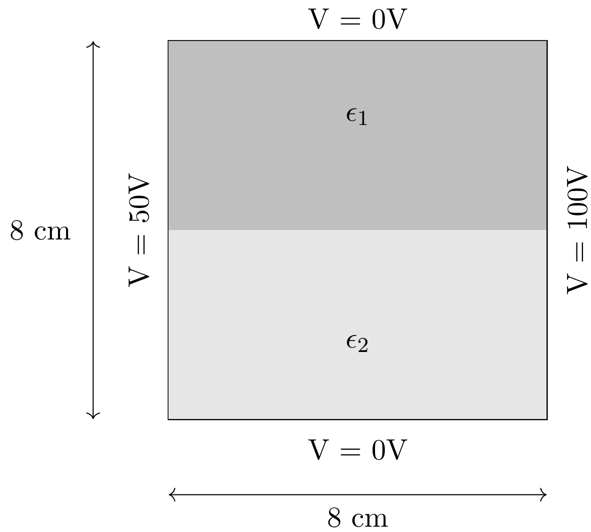
$$\begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \\ V_6 \\ V_7 \\ V_8 \\ V_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -50 \\ 0 \\ -100 \\ -50 \\ 0 \\ -100 \\ -50 \\ 0 \\ -100 \end{bmatrix} \tag{48}$$

Luego se debe resolver el sistema matricial que es de la forma:

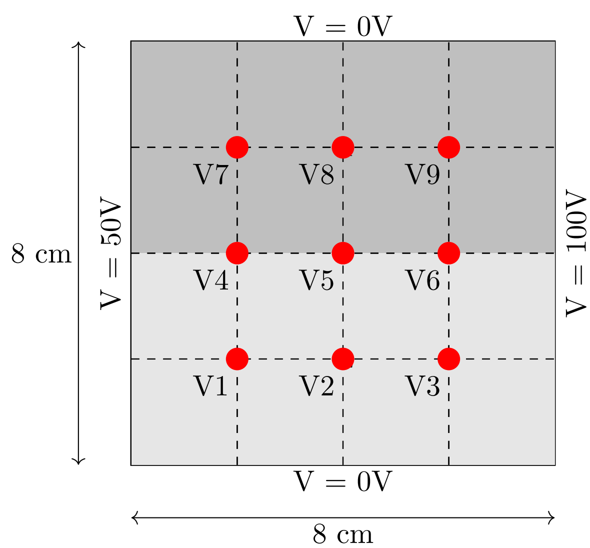
$$A \cdot V = B \tag{49}$$

Al resolverlo entrega como valor para V(5,5)= 37.5

2. Para el segundo apartado, se tiene que al insertar los materiales, se debe considerar que la constante dielectrica cambia, por lo que el potencial en el centro de la placa sera diferente, por lo que se tendra el sigueinte esquema:



Por lo que al dividir el espacio se tendra que:



Luego usaremos nuevamente la expresion de la estrella de 5 puntos, dado por:

$$V(i,j) = \frac{1}{4}\left[V(i-1,j) + V(i+1,j) + V(i,j-1) + V(i,j+1) + \frac{\rho(i,j)h^2}{\varepsilon}\right] \tag{50}$$

Pero ahora debemos considerar el hecho de que los puntos ubicados entre los diferentes medios vendran dado por ejemplo para V_5 como:

$$V_5 = \frac{1}{2(\epsilon_1+\epsilon_2)}\left[\frac{1}{2}(\epsilon_1+\epsilon_2)V_4 + \frac{1}{2}(\epsilon_1+\epsilon_2)V_6 + \epsilon_1 V_8 + \epsilon_2 V_2\right] \tag{51}$$

Luego extendiendo esta idea tenemos que el set de ecuaciones vendra dado por:

$$V_1 = \frac{1}{4}\left(V_4 + V_2 + 50\right) \tag{52}$$

$$V_2 = \frac{1}{4}\left(V_1 + V_5 + V_3\right) \tag{53}$$

$$V_3 = \frac{1}{4}\left(V_2 + V_6 + 100\right) \tag{54}$$

$$V_4 = \frac{1}{2(\epsilon_1+\epsilon_2)}\left[\epsilon_2 V_1 + \frac{1}{2}(\epsilon_1+\epsilon_2)V_5 + \epsilon_1 V_7 + 50\right] \tag{55}$$

$$V_5 = \frac{1}{2(\epsilon_1+\epsilon_2)}\left[\epsilon_2 V_2 + \frac{1}{2}(\epsilon_1+\epsilon_2)(V_4+V_6) + \epsilon_1 V_8\right] \tag{56}$$

$$V_6 = \frac{1}{2(\epsilon_1+\epsilon_2)}\left[\epsilon_2 V_3 + \frac{1}{2}(\epsilon_1+\epsilon_2)V_5 + \epsilon_1 V_9 + 100\right] \tag{57}$$

$$V_7 = \frac{1}{4}\left(V_1 + V_8 + 50\right) \tag{58}$$

$$V_8 = \frac{1}{4}\left(V_7 + V_5 + V_9\right) \tag{59}$$

$$V_9 = \frac{1}{4}\left(V_8 + V_6 + 100\right) \tag{60}$$

Luego en forma matricial tendremos que:

$$\begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2(\epsilon_1+\epsilon_2) & \epsilon_2 & 0 & \epsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \epsilon_2 & -2(\epsilon_1+\epsilon_2) & \epsilon_2 & 0 & \epsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \epsilon_2 & -2(\epsilon_1+\epsilon_2) & \epsilon_2 & 0 & \epsilon_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \epsilon_2 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \epsilon_2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \epsilon_2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \\ V_6 \\ V_7 \\ V_8 \\ V_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -50 \\ 0 \\ 0 \\ -50 \\ 0 \\ -50 \\ 0 \\ -50 \\ -100 \end{bmatrix}$$

3. **Propuesto**