Ingeniería Eléctrica
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS UNIVERSIDAD DE CHILE

Análisis de señales (EL3203-2)
Clase auxiliar 3
Prof. Jorge Silva.
Prof. Aux. Erik Sáez

1. Considere la familia de funciones exponenciales discretas:

$$A = \left\{(\gamma_a(n)) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \gamma_a(n) = a^n u(n),\ 0 < a < 1\right\} \tag{1}$$

   1. Verifique que el impulso discreto $\delta(n)$ puede ser expresado punto a punto como:

$$\delta(n) = \gamma_a(n) - a\,\gamma_a(n-1) \tag{2}$$

   2. Del punto anterior, muestre que toda señal discreta $x(n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ puede ser descompuesta como:

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\,\gamma_a(n-k) \tag{3}$$

   3. Use las propiedades de linealidad e invariancia en el tiempo para expresar la salida $y(n) = \mathcal{T}[x(n)]$ en términos de la entrada $x(n)$ y la señal $g(n) = \mathcal{T}[\gamma_a(n)]$.

Solución:

Resolución 1.1

Sea la familia de funciones exponenciales discretas:

$$A = \left\{\gamma_a(n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \gamma_a(n) = a^n u(n),\ 0 < a < 1\right\}. \tag{4}$$

Queremos verificar que:

$$\delta(n) = \gamma_a(n) - a\,\gamma_a(n-1). \tag{5}$$

Dado que se busca demostrar lo anterior, tendremos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\gamma_a(n) - a\,\gamma_a(n-1) &= a^n u(n) - a \cdot a^{n-1} u(n-1) &(6)\\
&= a^n u(n) - a^n u(n-1) &(7)\\
&= a^n \big[u(n) - u(n-1)\big]. &(8)
\end{aligned}$$

Recordemos que:

$$u(n) - u(n-1) = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ 0, & n \neq 0, \end{cases} \tag{9}$$

lo cual corresponde exactamente a la definición del impulso discreto $\delta(n)$. Por lo tanto:

$$\delta(n) = \gamma_a(n) - a\,\gamma_a(n-1). \tag{10}$$

Resolución 1.2

Sabemos que cualquier señal discreta $x(n)$ puede expresarse como:

$$x(n) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} x(k)\,\delta(n-k). \tag{11}$$

Sustituyendo la expresión de $\delta(n)$ obtenida en el punto anterior:

$$\begin{aligned} x(n) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} x(k)\Big[\gamma_a(n-k) - a\,\gamma_a(n-k-1)\Big] && (12)\\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} x(k)\,\gamma_a(n-k) \;-\; a\sum_{k\in\mathbb{Z}} x(k)\,\gamma_a(n-k-1). && (13)\end{aligned}$$

En la segunda suma hacemos el cambio de variable $k \mapsto k-1$:

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} x(k)\,\gamma_a(n-k-1) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} x(k-1)\,\gamma_a(n-k). \tag{14}$$

Por tanto:

$$x(n) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \Big[x(k) - a\,x(k-1)\Big]\,\gamma_a(n-k). \tag{15}$$

Definiendo:

$$c_k = x(k) - a\,x(k-1), \tag{16}$$

tenemos finalmente:

$$x(n) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k\,\gamma_a(n-k). \tag{17}$$

Resolución 1.3

Sea el sistema $\mathcal{T}$ lineal e invariante en el tiempo (LTI). Definimos:

$$g(n) = \mathcal{T}[\gamma_a(n)]. \tag{18}$$

La respuesta al impulso del sistema es:

$$h(n) = \mathcal{T}[\delta(n)]. \tag{19}$$

Usando el resultado de 1.1:

$$\begin{aligned} h(n) &= \mathcal{T}\big[\gamma_a(n) - a\,\gamma_a(n-1)\big] && (20)\\ &= \mathcal{T}[\gamma_a(n)] - a\,\mathcal{T}[\gamma_a(n-1)] && (21)\\ &= g(n) - a\,g(n-1). && (22)\end{aligned}$$

Finalmente, como el sistema es LTI:

$$\begin{aligned} y(n) &= (x*h)(n) && (23)\\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} x(k)\,h(n-k) && (24)\\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} x(k)\Big[g(n-k) - a\,g(n-k-1)\Big]. && (25)\end{aligned}$$

De este modo:

$$y(n) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} x(k)\,\big[g(n-k) - a\,g(n-k-1)\big]. \tag{26}$$

2. 1. Determine la transformada de Fourier de las siguientes señales y gráfiquela en magnitud y fase:

   - $x(t) = \begin{cases} A \cdot e^{-at} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$
   - $x(t) = A \cdot e^{-a|t|}$

   2. Determine los coeficientes de la serie de Fourier para la siguiente señal:

$$x(t) = 1 + \sin(\omega_0 t) + 2\cos(\omega_0 t) + \cos\left(2\omega_0 t + \frac{\pi}{4}\right) \tag{27}$$

Solución:

Resolución 2.1

Se pide la transformada de Fourier de las funciones dadas, luego por definición:

$$X(F) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j2\pi F t}\, dt \tag{28}$$

Luego se tiene que la primera función se puede expresar en funcion del escalón unitario $u(t)$:

$$x(t) = A\, e^{-at}\, u(t), \qquad a > 0.$$

Por definición,

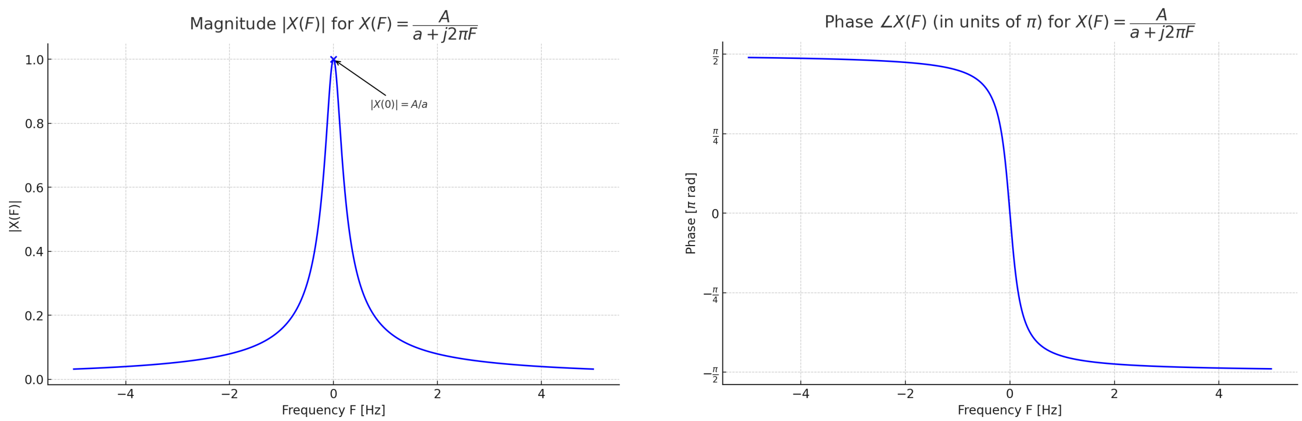
$$\begin{aligned}
X(F) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j2\pi F t}\, dt && (29)\\
&= \int_{0}^{\infty} Ae^{-at}\, e^{-j2\pi F t}\, dt && (30)\\
&= A\int_{0}^{\infty} e^{-(a+j2\pi F)t}\, dt && (31)\\
&= A\left[\frac{-1}{a+j2\pi F}\, e^{-(a+j2\pi F)t}\right]_0^{\infty} && (32)\\
&= \frac{A}{a+j2\pi F}. && (33)
\end{aligned}$$

Luego tenemos que el modulo y fase vienen dados por:

$$|X(F)| = \frac{A}{\sqrt{a^2 + (2\pi F)^2}}, \tag{34}$$

$$\angle X(F) = \angle\big((a+j2\pi F)^{-1}\big) = -\arctan\left(\frac{2\pi F}{a}\right), \tag{35}$$

Luego gráficamente tenemos que:



(a) Magnitud $|X(F)|$ para $X(F) = \frac{A}{a+j2\pi F}$. Se observa un máximo en $F = 0$ igual a A/a, y la magnitud decae rápidamente para frecuencias altas, mostrando el comportamiento típico de un filtro pasabajo exponencial.

(b) Fase $\angle X(F)$ para $X(F) = \frac{A}{a+j2\pi F}$. La fase parte en 0 para $F = 0$ y varía suavemente desde $+\pi/2$ a $-\pi/2$ al aumentar $|F|$, indicando el retardo de fase introducido por el sistema.

Figura 1: Magnitud y fase de la transformada de Fourier para $x(t) = Ae^{-at}u(t)$. La magnitud tiene máximo en $F = 0$ y la fase varía de $+\pi/2$ a $-\pi/2$ según la frecuencia, mostrando el efecto de la exponencial sobre el espectro.

Sea ahora la siguiente funcion:

$$x(t) = A\,e^{-a|t|}, \qquad a > 0,$$

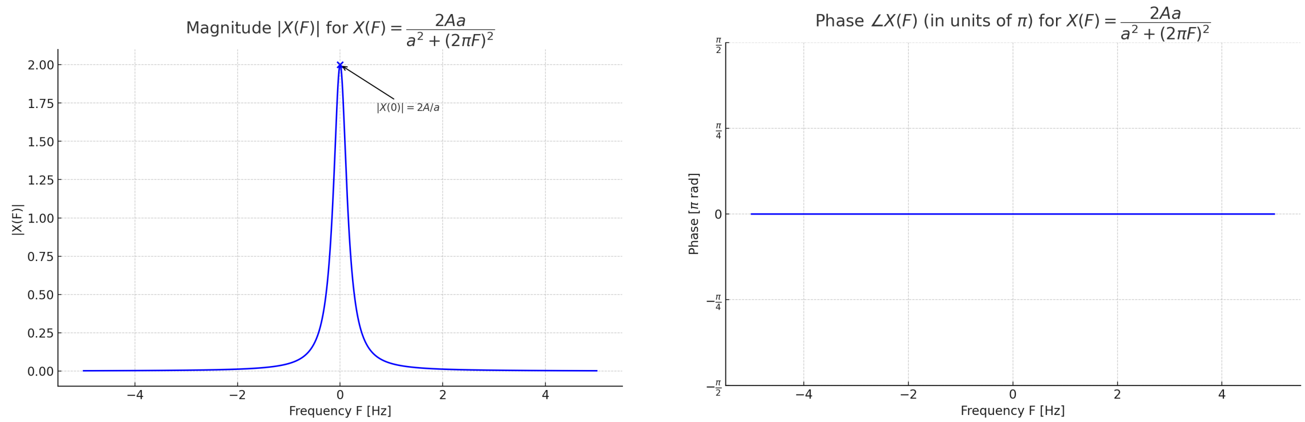
que es par. Separando para $t \geq 0$ y $t < 0$,

$$\begin{aligned}
X(F) &= \int_{-\infty}^{\infty} Ae^{-a|t|}e^{-j2\pi Ft}\,dt && (36)\\
&= \int_{-\infty}^{0} Ae^{+at}e^{-j2\pi Ft}\,dt + \int_{0}^{\infty} Ae^{-at}e^{-j2\pi Ft}\,dt && (37)\\
&= A\int_{-\infty}^{0} e^{(a-j2\pi F)t}\,dt + A\int_{0}^{\infty} e^{-(a+j2\pi F)t}\,dt && (38)\\
&= A\left[\frac{1}{a-j2\pi F}e^{(a-j2\pi F)t}\right]_{-\infty}^{0} + A\left[\frac{-1}{a+j2\pi F}e^{-(a+j2\pi F)t}\right]_{0}^{\infty} && (39)\\
&= \frac{A}{a-j2\pi F} + \frac{A}{a+j2\pi F} = \frac{A\big((a+j2\pi F)+(a-j2\pi F)\big)}{a^2+(2\pi F)^2} && (40)\\
&= \frac{2Aa}{a^2+(2\pi F)^2}. && (41)
\end{aligned}$$

Como $x(t)$ es par, $X(F)$ es real y par:

$$\begin{aligned}
|X(F)| &= \frac{2Aa}{a^2+(2\pi F)^2}, && (42)\\
\angle X(F) &= 0 \quad (\text{para todo } F\text{, salvo el signo en } F \text{ donde } X(F) > 0). && (43)
\end{aligned}$$

Luego gráficamente tenemos lo siguiente:



(a) Magnitud $|X(F)|$ para $X(F) = \frac{2Aa}{a^2+(2\pi F)^2}$. Se observa un máximo en $F = 0$ igual a $2A/a$, y la magnitud es real, par y decae para frecuencias altas, mostrando el espectro de una exponencial simétrica.

(b) Fase $\angle X(F)$ para $X(F) = \frac{2Aa}{a^2+(2\pi F)^2}$. La fase es cero para todo F, lo que indica que la señal original es par y su transformada es completamente real.

Figura 2: Magnitud y fase de la transformada de Fourier para $x(t) = Ae^{-a|t|}$. La magnitud es real y par, con máximo en $F = 0$, y la fase es cero en todo el dominio de frecuencias.

Resolución 2.2

Los coeficientes de la serie de Fourier $\{c_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ permiten expresar una señal periódica como combinación lineal de sinusoides complejas. En la forma compleja,

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\, e^{jk\omega_0 t}, \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}, \tag{44}$$

donde T es el período fundamental. Los coeficientes se obtienen (sobre cualquier intervalo de longitud T) como

$$c_k = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x(t)\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt. \tag{45}$$

Para convertir senos y cosenos a exponenciales usamos las identidades de Euler:

$$\cos(\theta) = \frac{e^{j\theta}+e^{-j\theta}}{2}, \qquad\qquad \sin(\theta) = \frac{e^{j\theta}-e^{-j\theta}}{2j}. \tag{46}$$

Dada la señal

$$x(t) = 1 + \sin(\omega_0 t) + 2\cos(\omega_0 t) + \cos\left(2\omega_0 t + \frac{\pi}{4}\right), \tag{47}$$

la escribimos en forma exponencial y agrupamos por armónicos $e^{jk\omega_0 t}$:

$$x(t) = 1 + \frac{1}{2j}e^{j\omega_0 t} - \frac{1}{2j}e^{-j\omega_0 t} + \left(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}\right) + \frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{4}}e^{j2\omega_0 t} + \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{4}}e^{-j2\omega_0 t} \tag{48}$$

$$= 1 + \left(1 + \tfrac{1}{2j}\right)e^{j\omega_0 t} + \left(1 - \tfrac{1}{2j}\right)e^{-j\omega_0 t} + \frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{4}}e^{j2\omega_0 t} + \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{4}}e^{-j2\omega_0 t}. \tag{49}$$

Identificando término a término con $x(t) = \sum_k c_k e^{jk\omega_0 t}$, los coeficientes complejos son:

$$c_0 = 1, \tag{50}$$

$$c_1 = 1 + \frac{1}{2j} = 1 - \frac{j}{2}, \tag{51}$$

$$c_{-1} = 1 - \frac{1}{2j} = 1 + \frac{j}{2}, \tag{52}$$

$$c_2 = \frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{4}(1+j), \tag{53}$$

$$c_{-2} = \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{4}(1-j), \tag{54}$$

$$c_k = 0 \quad \text{para } |k| \geq 3. \tag{55}$$

Obsérvese que, al ser $x(t)$ real, se cumple la simetría conjugada $c_{-k} = c_k^*$.

3. Para la función sinusoidal rectificada mostrada en la figura 3, calcule los coeficientes de la serie de Fourier , ademas verifique el cumplimiento del teorema de Parseval.

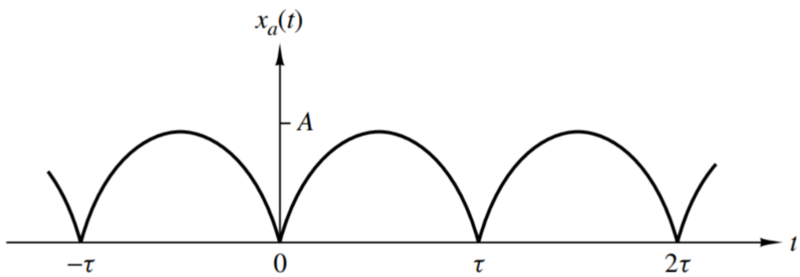


Figura 3: Función sinusoidal rectificada

Solución:

Resolución 3.1

Sea la *sinusoidal rectificada* de período τ mostrada en la figura. En un período puede describirse como

$$x(t) = A\sin\left(\frac{\pi t}{\tau}\right), \qquad 0 \leq t < \tau, \tag{56}$$

y se extiende periódicamente con período τ. Por tanto, su frecuencia fundamental y pulsación son

$$f_0 = \frac{1}{\tau}, \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{\tau}. \tag{57}$$

Los coeficientes complejos de la serie de Fourier se obtienen con

$$c_k = \frac{1}{\tau}\int_0^{\tau} x(t)\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt = \frac{1}{\tau}\int_0^{\tau} A\sin\left(\frac{\pi t}{\tau}\right) e^{-j\frac{2\pi}{\tau}kt}\, dt. \tag{58}$$

Usando las identidades de Euler,

$$\sin(\theta) = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}, \tag{59}$$

quedando

$$\begin{aligned}
c_k &= \frac{A}{\tau} \int_0^{\tau} \frac{e^{j\frac{\pi}{\tau}t} - e^{-j\frac{\pi}{\tau}t}}{2j}\, e^{-j\frac{2\pi}{\tau}kt}\, dt &(60)\\
&= \frac{A}{2j\,\tau} \int_0^{\tau} \left(e^{j\frac{\pi}{\tau}(1-2k)t} - e^{-j\frac{\pi}{\tau}(1+2k)t}\right) dt &(61)\\
&= \frac{A}{2j\,\tau} \left[\frac{e^{j\frac{\pi}{\tau}(1-2k)t}}{j\frac{\pi}{\tau}(1-2k)} - \frac{e^{-j\frac{\pi}{\tau}(1+2k)t}}{-j\frac{\pi}{\tau}(1+2k)}\right]_{t=0}^{t=\tau}. &(62)
\end{aligned}$$

Como $e^{j\pi(1-2k)} = e^{-j\pi(1+2k)} = -1$ para todo $k \in \mathbb{Z}$, se obtiene

$$\begin{aligned}
c_k &= \frac{A}{2j\,\tau}\left[\frac{-1-1}{j\frac{\pi}{\tau}(1-2k)} + \frac{-1-1}{j\frac{\pi}{\tau}(1+2k)}\right] = \frac{A}{2j\,\tau}\left[\frac{-2}{j\frac{\pi}{\tau}(1-2k)} + \frac{-2}{j\frac{\pi}{\tau}(1+2k)}\right] &(63)\\
&= \frac{A}{\pi}\left[\frac{1}{1-2k} + \frac{1}{1+2k}\right] = \frac{A}{\pi}\left(\frac{(1+2k)+(1-2k)}{1-4k^2}\right) = \boxed{\frac{2A}{\pi\,(1-4k^2)}}. &(64)
\end{aligned}$$

En particular,

$$c_0 = \frac{2A}{\pi}, \qquad c_{-k} = c_k \ \ \text{(coeficientes reales y pares).} \tag{65}$$

Verificación de Parseval. La potencia promedio en el tiempo es

$$P_x = \frac{1}{\tau}\int_0^{\tau} x^2(t)\, dt = \frac{A^2}{\tau}\int_0^{\tau} \sin^2\!\left(\frac{\pi t}{\tau}\right) dt = \frac{A^2}{2}. \tag{66}$$

En frecuencia,

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = \frac{4A^2}{\pi^2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1-4k^2)^2} = \frac{4A^2}{\pi^2}\left[1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(1-4k^2)^2}\right]. \tag{67}$$

Usando la identidad conocida

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(1-4k^2)^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{8} - 1\right), \tag{68}$$

se concluye que

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = \frac{4A^2}{\pi^2}\left[1 + \left(\frac{\pi^2}{8} - 1\right)\right] = \frac{4A^2}{\pi^2}\cdot\frac{\pi^2}{8} = \frac{A^2}{2} = P_x, \tag{69}$$

verificando así la relación de Parseval para esta señal.

4. Dadas dos señales $f(t)$ y $g(t)$ con coeficientes de Fourier c_k y d_k, respectivamente, encuentre los coeficientes de Fourier de la señal $y(t) = f(t)$

Solución:

Resolución 4.1

Sea $f(t)$ y $g(t)$ dos señales T-periódicas con series de Fourier complejas

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\, e^{jk\omega_0 t}, \qquad g(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} d_m\, e^{jm\omega_0 t}, \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}. \tag{70}$$

Definimos $y(t) = f(t)\, g(t)$. El n-ésimo coeficiente complejo de y es

$$\beta_n = \frac{1}{T}\int_0^T y(t)\, e^{-jn\omega_0 t}\, dt = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\, g(t)\, e^{-jn\omega_0 t}\, dt. \tag{71}$$

Sustituyendo las expansiones y permutando suma e integral,

$$\beta_n = \frac{1}{T}\int_0^T \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}\right)\left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} d_m e^{jm\omega_0 t}\right) e^{-jn\omega_0 t}\, dt \tag{72}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty} c_k d_m \left(\frac{1}{T}\int_0^T e^{j(k+m-n)\omega_0 t}\, dt\right). \tag{73}$$

Usando la ortogonalidad

$$\frac{1}{T}\int_0^T e^{j\ell\omega_0 t}\, dt = \begin{cases} 1, & \ell = 0, \\ 0, & \ell \neq 0, \end{cases} \tag{74}$$

sólo sobreviven los términos con $k + m - n = 0$, i.e., $m = n - k$. Por tanto,

$$\beta_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\, d_{n-k}. \tag{75}$$

Es decir, los coeficientes de Fourier de $y(t) = f(t)g(t)$ son la *convolución discreta* (en el índice) de $\{c_k\}$ y $\{d_k\}$:

$$\boxed{\beta_n = (c * d)_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\, d_{n-k}}. \tag{76}$$