Technische Universität Ilmenau
Institut für Mathematik
Dr. H. Winkler, Dr. J.Schreyer

WS 2024/25

Mathematik für Physiker 1
Hausaufgabenserie 8

Aufgabe 4
Beweisen Sie dass jede Menge aus 4 verschiedenen Vektoren des $\mathbb{R}$ Vektorraumes $\mathbb{R}^3$ linear abhängig ist.

Bemerkung: Der Sachverhalt gilt allgemeiner für jede $d+1$ elementige Vektormenge eines d-dimensionalen Raumes.

Aufgabe 2
Es sei V ein Vektorraum und $M \subseteq V$ eine linear unabhängige Menge. Zeigen Sie, dass für jeden Vektor $b \in V$ gilt:

$$M \cup \{b\} \text{ ist linear unabhängig} \Leftrightarrow b \notin span(M)$$

Tipp: Zeigen Sie die äquivalente Aussage: $M \cup \{b\}$ ist linear abhängig $\Leftrightarrow b \in span(M)$

Aufgabe 3
Es sei U der Unterraum der Folgen (a_n), die der Rekursionsvorschrift $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ genügen (vergleiche Hausaufgabenserie 7 Aufgabe 3). Untersuchen Sie ob es Folgen der Form $a_n = x^n$ für ein passendes $x \in \mathbb{R}$ gibt.
Hinweis: Mit der Rekursionsvorschrift erhalten Sie 2 Lösungen neben der trivialen Lösung $x = 0$.

Stellen Sie die Fibonacci-Folge als Linearkombination der erhaltenen Folgen dar und erhalten Sie damit eine explizite Darstellung (Formel) für die Fibonacci Folge.
Hinweis: Sie können die Koeffizienten mit der Anfangsbedingung $a_1 = a_2 = 1$ bestimmen.

Aufgabe 4
Wir betrachten den Vektorraum $V = Abb(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ der Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$, Weiterhin seien a, b zwei verschiedene reelle Zahlen. Zeigen Sie dass die Menge $\{f, g\}$ mit $f(x) = e^{ax}$ und $g(x) = e^{bx}$ linear unabhängig ist.