1. Aufgabenstellung

1.1. Die Periodendauer eines Fadenpendels ist mehrmals zu messen. Die Häufigkeitsverteilung der Messwerte ist in Abhängigkeit von der Anzahl n der Messungen in geeigneten Histogrammen darzustellen.

1.2. Für $n = 200$ Messwerte sind Schätzwerte für die Standardabweichung σ und den wahren Wert μ der Messgröße anzugeben und mit grafisch ermittelten Ergebnissen zu vergleichen.

1.3. Aus Periodendauer und Länge des Pendels ist die Schwerebeschleunigung der Erde einschließlich ihrer kombinierten Unsicherheit zu berechnen.

2. Grundlagen

Möchte man den Wert X einer physikalischen Größe experimentell ermitteln, dann genügt es nicht den nach einmaliger Messung gefundenen Betrag x mit der zugehörigen physikalischen Einheit anzugeben. Man muss auch noch die Qualität des Ergebnisses beurteilen. Die Abweichung des Schätzwertes x vom unbekannten wahren Wert X kann durch ein Unsicherheitsintervall, die sogenannte *Messabweichung*, gekennzeichnet werden. Schließt man grobes Fehlverhalten des Experimentators aus (falsches Ablesen oder Notieren von Messwerten, falscher Gebrauch des Messinstrumentes), dann bleiben zwei Kategorien von Messabweichungen.

2.1. Zufällige Messabweichungen

Wird eine physikalische Größe X n-mal unter vergleichbaren Bedingungen gemessen, so erhält man bei hinreichender Genauigkeit des Messinstrumentes in der Regel unterschiedliche Messwerte $(x_1, x_2, \ldots x_n)$. Sortiert man diese hinsichtlich ihrer Größe in gleich breite Intervalle Δx_k mit dem Mittenwert x_k ein, dann bezeichnet H_k die Häufigkeit bzw. Anzahl der Messwerte im k-ten Intervall. Die verschiedenen Häufigkeiten können dann in einem Histogramm $H_k(x_k)$ dargestellt werden.

Für die auf die Intervallbreite Δx_k bezogene relative Häufigkeitsverteilung $w_k(x_k) = \frac{H_k(x_k)}{n \cdot \Delta x_k}$ liefert die mathematische Statistik bei sehr großer Anzahl von Messungen ($n \to \infty$) die *Dichtefunktion* der *Normal- bzw. Gaußverteilung*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]. \qquad \textbf{(1)}$$

μ steht für den wahren Wert X der Messgröße und σ^2 ist die zugehörige *Varianz*. Der entsprechende Graph hat eine glockenförmige Gestalt, ist symmetrisch zu μ und hat Wendepunkte bei $x = \mu \pm \sigma$ (Abb. 1). Die Wurzel aus der Varianz wird als *Standardabweichung* des Einzelwertes bezeichnet und ist ein Maß für die Streubreite der Messwerte. Sie wird durch die Güte der Messung (Messverfahren oder -geräte) bestimmt und kann durch Erhöhung der Anzahl der Einzelmessungen <u>nicht</u> verringert werden.

Die Funktion $f(x)$ ist so normiert, dass die Fläche unter der Kurve genau eins ist. Demnach gibt die Teilfläche $f(x)dx$ (grauer Bereich in Abb. 1) die Wahrscheinlichkeit dafür an, bei Messungen einen Messwert im Intervall $[x, x+dx]$ zu erhalten.

Durch Integration der Dichtefunktion (1) gelangt man zur *Verteilungsfunktion* $F(x)$, auch *Gaußsches Fehlerintegral* genannt (Abb. 2). Sie gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass die Zufallsgröße X einen Wert aus dem Intervall $[-\infty, x]$ annimmt. Da der Wert von $F(x)$ dem Integral der Dichtefunktion von $-\infty$ bis x entspricht, ist es möglich, experimentell ermittelte Häufigkeitssummen in Beziehung zu den theoretischen Wahrscheinlichkeiten der Normalverteilung zu setzen. Zur graphischen Auswertung dieses Versuches wird hierfür ein spezielles Koordinatenpapier eingesetzt.

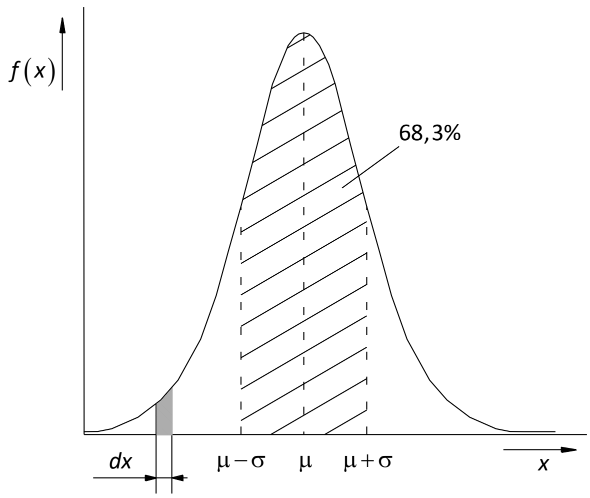

Abb. 1: Dichtefunktion $f(x)$ der Normalverteilung

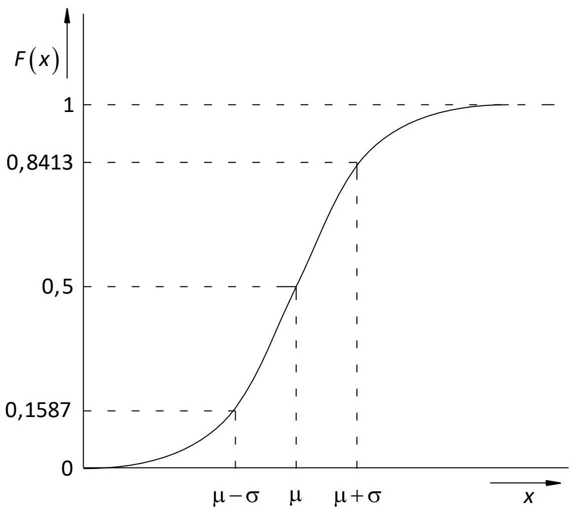

Abb. 2: Verteilungsfunktion $F(x)$ der Normalverteilung

Bei einer endlichen Zahl von Messungen sind μ und σ nicht bekannt und müssen durch entsprechende Berechnungen geschätzt werden. Die beste Näherung für den wahren Wert der Messgröße ist der arithmetische Mittelwert der Einzelmessungen

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \,. \qquad \textbf{(2)}$$

Als *empirische Standardabweichung* des Einzelwertes verwendet man

$$s(x_i) = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(\bar{x}-x_i\right)^2} \,. \qquad \textbf{(3)}$$

Bei hinreichend großer Anzahl von Messungen wird $s(x_i) \approx \sigma = const$ und eine Einzelmessung liefert mit 68,3% Wahrscheinlichkeit ein Ergebnis im Intervall $[\bar{x}-s(x_i), \bar{x}+s(x_i)]$.

Berechnet man die kombinierte Unsicherheit von (2) nach Gauß und berücksichtigt hierbei die empirische Standardabweichung nach (3), dann erhält man die Standardabweichung des Mittelwertes

$$s(\bar{x}) = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot s(x_i) \,, \qquad \textbf{(4)}$$

die selbst bei großem $s(x_i)$ durch Erhöhung der Anzahl der Messungen beliebig klein gemacht werden kann. Liegt also eine normalverteilte Grundgesamtheit vor und systematischer Abweichungen werden nicht berücksichtigt, so beträgt die Messunsicherheit $u = t \cdot s(\bar{x})$ und der Vertrauensbereich

$\overline{x} \pm u$. Der Wichtungsfaktor t hängt sowohl vom geforderten Vertrauensniveau P (in %) als auch von n ab (vgl. nachfolgende Tabelle). Der wahre Wert X der Messgröße liegt dann mit einer Wahrscheinlichkeit P im Intervall $[\overline{x}-u, \overline{x}+u]$.

Für das Physikalische Grundpraktikum genügt ein Vertrauensniveau $P=68{,}3\%$, ($t \to 1$ für $n>10$), Industriestandards fordern im Allgemeinen $P=95{,}4\%$.

	t-Werte für		
N	*P*=68,3%	*P*=95,4%	*P*=99,7%
3	1,32	4,30	19,21
5	1,15	2,78	6,62
6	1,11	2,57	5,51
10	1,06	2,26	4,02
100	1,00	2,00	3,04
200	1,00	2,00	3,00

2.2. Systematische Messabweichungen

Systematische oder methodische Abweichungen sind durch die verwendete Messanordnung festgelegt und können durch eine Korrekturrechnung erfasst und zu Null gemacht werden. Die dafür benötigten Angaben sind jedoch häufig nicht bekannt bzw. ihre Bestimmung wäre zu aufwendig. Die systematsischen Abweichungen werden deshalb durch Schätzung ermittelt und die Messunsicherheit u setzt sich aus einer zufälligen und einer systematischen Komponente additiv zusammen, d. h $u=u_z+u_s$.

Charakteristisch für systematische Abweichungen ist, dass bei der Wiederholung von Messungen unter gleichen Bedingungen ihr Anteil nach Betrag und Vorzeichen konstant bleibt.

3. Messanleitung

Der Versuchsaufbau besteht aus einem langen Fadenpendel mit einer Länge von $l=(3{,}020 \pm 0{,}002)\,m$ und einer computergestützten Stoppuhr. Die zu messende Größe ist die Periodendauer T des Pendels, das näherungsweise als mathematisches Pendel angenommen wird. Bei kleinen Auslenkwinkeln gilt folgender Zusammenhang zur Pendellänge l und der Erdbeschleunigung g:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\,. \qquad \textbf{(5)}$$

Zur Messung startet man das Praktikumsprogramm *PhysPract*, und jede Versuchsgruppe öffnet ein eigenes Messfenster *M0 - Messabweichungen*. Die Zeittaster werden vom Praktikumsprogramm im jeweils zugehörigen Fenster überwacht. Der linke Taster übernimmt das Ein- bzw. Ausschalten der Stoppuhrfunktion, der rechte Taster dient der Zeitmessung. Durch Prellen der Tastschalter kann es gelegentlich zu Fehlmessungen kommen. Diese werden vom Programm erkannt und werden nicht registriert.

Das Programm speichert alle gemessenen Periodendauern und stellt die Ergebnisse geeignet dar. Außerdem kann über das Programm das für die graphische Auswertung benötigte Wahrscheinlichkeitsnetz ausgedruckt werden. Ausführliche Hinweise sind in der *PhysPract*-Hilfe zu finden.

3.1. Vorversuch

Im Vorversuch wird aus 10 Einzelmessungen der Periodendauer T_i ein erstes Ergebnis für den Mittelwert $\overline{T}$ und die empirische Standardabweichung $s(T_i)$ gewonnen. Diese vorläufigen Werte werden benötigt für die Auswahl der Einzelintervalle im nachfolgenden Hauptversuch. Da für die Gültigkeit von Gl. (5) der maximale Auslenkwinkel des Pendels $\varphi_{\max} = 2^\circ$ nicht übersteigen soll, berechnet man zunächst die maximale Auslenkung a. Sie kann mit Hilfe der am Experimentierplatz befindlichen Skala kontrolliert werden. Für die Zeitmessung wählt man sich ein gut beobachtbares Ereignis (Nulldurchgang oder Umkehrpunkt der frei schwingenden Pendelmasse).

Die Stoppuhr für den Vorversuch aktiviert man mit Hilfe der entsprechenden Schaltfläche des Messfensters oder dem linken Taster. Die rote Taster-LED beginnt zu leuchten. Wird das Experiment alternativ mit der Computermaus durchgeführt, erscheint ein kleines gemustertes Rechteck, in das hineingeklickt werden muss. Der erste Tastendruck startet die Messung (Uhr läuft, grüne LED am rechten Taster leuchtet), der zweite Tastendruck stoppt die Uhr (LED wieder dunkel). Die gemessene Zeit wird mit einer Auflösung von $0{,}001s$ in die Messwerttabelle geschrieben. Fehlmessungen können gelöscht bzw. durch eine neue Messung überschrieben werden. Hierzu klickt man mit der linken Maustaste in die Gitterzelle und ändert so die aktuelle Schreibposition im Gitter.

Insgesamt werden auf diese Weise 10mal die Periodendauern gemessen und mit dem Taschenrechner der Mittelwert $\overline{T}$ nach Gl. (2) sowie die empirische Standardabweichung $s(T_i)$ nach Gl. (3) berechnet. Beide Zahlenwerte müssen in die vorbereiteten Eingabefelder der Registerkarte *Vorversuch* eingetragen werden.

<u>**Hinweis:**</u> Solange die Stoppuhr aktiviert ist, kann nicht zwischen den Registerkarten des Messfensters umgeschaltet werden.

3.2. Hauptversuch

Im Hauptversuch werden die Werte möglichst vieler Einzelmessungen T_i in vorgegebene Zeitintervalle ΔT_k einsortiert und die Ereignisse gezählt. Hierzu benötigt das Programm Zahlen für den Anfangswert des ersten Intervalls T_a, die Intervallbreite ΔT_k und die Gesamtzahl r der Intervalle (Eingaben E1, E2 und E3 der Registerkarte *Hauptversuch*). ΔT_k und r sind so zu wählen, dass insgesamt ein Wertebereich von $r \cdot \Delta T_k = 6 \cdot s(T_i)$ überstrichen wird (Erfahrungswert für diesen Versuch). Mit den Ergebnissen des Vorversuchs erhält man also den Anfangswert $T_a = \overline{T} - 3 \cdot s(T_i)$ und den Endwert $T_e = \overline{T} + 3 \cdot s(T_i)$. Dieser Bereich wird in r gleich breite Messwertintervalle mit $10 \le r \le 30$ unterteilt, womit sich die Intervallbreite $\Delta T_k = 6 \cdot s(T_i)/r$ ergibt (Abb. 3). Bitte beachten Sie, dass das Praktikumsprogramm die Zeiteingaben mit einer Genauigkeit von $0{,}01s$ benötigt. Nach Eingabe der Zahlenwerte wird die Grafikskalierung für den Versuch aktualisiert. Die Daten des Vorversuches werden als Gaußkurve in das Diagramm

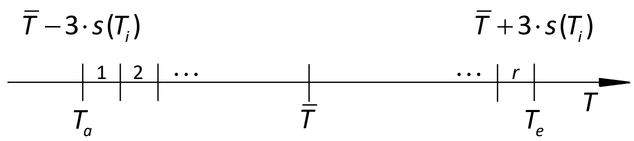

Abb. 3: Intervalleinteilung

eingezeichnet. Die Lage der Gaußkurve im Diagramm zeigt dabei an, ob die Parameter E1, E2 und E3 geeignet gewählt wurden. Der Vorversuch ist jetzt abgeschlossen (Registerkarte *Vorversuch* passiv).

Im Hauptversuch ist nun die Periodendauer insgesamt 200mal zu stoppen. Hierzu wird die Stoppuhr wie beim Vorversuch mit der entsprechenden Schaltfläche bzw. dem linken Taster aktiviert. Die Zeitmessungen, deren Ergebnis im Bereich $T_a \leq T_i \leq T_e$ liegt, werden im Histogramm dargestellt. Alle Zeiten kleiner T_a registriert das Programm als „Unterlauf", diejenigen größer T_e als „Überlauf", zählt sie aber nicht weiter als „erfolgreiche" Messungen im Sinne des Versuches.

Nach insgesamt 10, 25, 50, 100 und 200 Einzelmessungen deaktiviert *PhysPract* die Stoppuhr, damit die Intervallinhalte ausgelesen werden können. Dies geschieht mit dem Schieberegler am unteren Rand der Registerkarte *Hauptversuch*. „Unterläufer" $(k=0)$ und „Überläufer" $(k=r+1)$ werden aus Platzgründen auf der Registerkarte *Auswertung* angezeigt.

<u>Hinweis:</u> Das Auslesen der Intervallinhalte ist auch nach Beendigung des Hauptversuchs möglich (Registerkarte *Auswertung*). Gegebenenfalls müssen noch einmal die Eingaben E1, E2 und/oder E3 an die jetzt vorliegende Verteilung der Messwerte angepasst werden.

Die vom Praktikumsprogramm gelieferten Ergebnisse sind in folgende, mit konkreten Zahlenwerten vorzubereitende Tabelle einzutragen:

Intervall-Nr.	Intervallmitte	Häufigkeiten					Häufigkeitssummen	
k	$T_k\,(s)$	$H_{k,10}$	$H_{k,25}$	$H_{k,50}$	$H_{k,100}$	$H_{k,200}$	$HS_{k,200}$	$HS_{k,200,rel}$ (%)
0	$T_i < T_a$						-	-
1	T_1						$H_{1,200}$	
2	T_2						$HS_{1,200} + H_{2,200}$	
$\vdots$	$\vdots$						$\vdots$	
$r+1$	$T_i > T_e$						-	-

Die Häufigkeitssummen $HS_{k,200}$ (absolut und relativ) werden nach dem Ende der Messungen, d. h. nach 200 „erfolgreichen" Zeitbestimmungen, berechnet. Während jeder Messpause ist es möglich, sich vom Praktikumsprogramm den Mittelwert $\overline{T}$ sowie die Standardabweichungen $s(T_i)$ und $s(\overline{T})$ aller in den Intervallen von $k=1 \ldots r$ gespeicherten Periodendauern T_i berechnen und anzeigen zu lassen (Registerkarte *Auswertung*).

4. Auswertung

4.1. Häufigkeitsverteilung der gemessenen Periodendauern

Die Verteilungen der Messwerte sind zu veranschaulichen, indem Histogramme $H_{k,n}(T_k)$ für n=10, 25, 50, 100 und 200 Messungen gezeichnet werden. Eine gemeinsame Darstellung der Histogramme auf <u>einem</u> Diagrammblatt wird empfohlen (beispielsweise unter Zuhilfenahme von MS Word).

4.2. Prüfung der Messwerte auf Normalverteilung

Nach Darstellung des Histogramms $H_{k,200}(T_k)$ kann vom Praktikumsprogramm ein speziell an die ermittelten Messwerte angepasstes Koordinatenpapier (Wahrscheinlichkeitsnetz) erstellt und ausgedruckt werden (Menüpunkt *Datei|Wahrscheinlichkeitsnetz*). Die Abszissenteilung ist um Zeiten der Intervallmitte T_k zu ergänzen und eine Achsbeschriftung hinzuzufügen. Die Ordinate ist so geteilt, dass der Graph der Verteilungsfunktion der Normalverteilung (Abb. 2) zu einer Geraden gestreckt wird.

Trägt man in das Wahrscheinlichkeitsnetz die relativen Häufigkeitssummen $HS_{k,200,rel}$ über den Zeiten T_k ein, dann sollten die so gebildeten Messpunkte einen linearen Zusammenhang zeigen, durch die eine Ausgleichsgerade gezeichnet werden kann. An den Schnittpunkten dieser Geraden mit den Linien $50\%(0)$, $15{,}87\%(-1)$ und $84{,}13\%(1)$ lassen sich Näherungswerte für die Messgrößen μ, $\mu-\sigma$ und $\mu+\sigma$ ablesen (Fluchtlinien zur Abszisse deutlich markieren). μ und σ sind mit den vom Praktikumsprogramm berechneten Werten $\overline{T}$ und $s(T_i)$ für $n=200$ zu vergleichen.

4.3. Berechnung der Erdbeschleunigung

Für $n=200$ Messungen ist der Vertrauensbereich $\overline{T}\pm u$ des Mittelwertes $\overline{T}$ für ein Vertrauensniveau $P=68{,}3\%$ zu ermitteln. Nach Gl. (5) ist hieraus und mithilfe der gegebenen Pendellänge l der Wert der gesuchten Schwerebeschleunigung einschließlich ihrer kombinierten Unsicherheit zu berechnen. Welche systematischen Messabweichungen könnten das Endergebnis möglicherweise weiter beeinflussen?

5. Kontrollfragen

1. Was versteht man unter einer Messabweichung? In welche beiden Kategorien werden sie unterteilt?
2. Wie sieht die Dichtefunktion der Normalverteilung aus? Wie sieht das zugehörige Integral aus und was kann man daraus ablesen?
3. Was gibt die Standardabweichung an?