Technische Universität Ilmenau
Institut für Mathematik
PD.Dr. H. Winkler, Dr. J.Schreyer

WS 2024/25

Mathematik für Physiker 1
Übungsserie 1

Aufgabe 1

(a) Bestimmen Sie den Wahrheitswerteverlauf der aussagenlogischen Formel $((p \leftrightarrow q) \wedge q) \to p$.

(b) Untersuchen Sie mit Hilfe aussagenlogischer Formeln, ob sich die folgende Argumentation als Beweis dafür eignet , dass 7 eine Primzahl ist.

> Aus der Aussage "*Wenn* 7 *kleiner ist als* 4*, dann ist* 7 *keine Primzahl.*" und der Aussage "7 *ist nicht kleiner als* 4" folgt die Aussage "7 *ist eine Primzahl.*"

Aufgabe 2

Welche der folgenden aussagenlogischen Formeln sind Tautologien bzw. Kontradiktionen?

(a) $(p \wedge (p \to q)) \to q$

(b) $(\neg p \vee (\neg p \wedge q)) \leftrightarrow p$

(c) $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (\neg p \leftrightarrow \neg q)$

Aufgabe 3

Beweisen Sie die folgenden logischen Äquivalenzen.

(a) $p \equiv (p \wedge (p \vee q))$

(b) $(p \wedge (q \wedge r)) \equiv ((p \wedge q) \wedge r)$

(c) $(p \wedge (q \vee r)) \equiv ((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$

(d) $(\neg(p \wedge q)) \equiv ((\neg p) \vee (\neg q))$

Aufgabe 4

Geben Sie für die Aussageform $p(x) =$ „x ist nicht durch zwei teilbar“ Universen U_1, U_2, U_3 und U_4 mit unendlich vielen Elementen so an, dass

(a) „$\forall\, x \in U_1 \colon p(x)$“ wahr ist,

(b) „$\forall\, x \in U_2 \colon p(x)$“ falsch ist,

(c) „$\exists\, x \in U_3 \colon p(x)$“ wahr ist,

(d) „$\exists\, x \in U_4 \colon p(x)$“ falsch ist.

Aufgabe 5

Bilden Sie die Negation folgender Aussagen:

- Für jedes Töpfchen gibt es ein Deckelchen.
- Immer, wenn ich nach Ilmenau komme, regnet es oder die Schranken sind unten.

- Für jeden Studierenden gibt es mindestens eine interessante Vorlesung.
- Everybody loves somebody sometimes.
- Kleine Kinder und Betrunkene sagen immer die Wahrheit.
- $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n > N:\ |a_n - g| < \varepsilon \qquad (\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g)$
- $\forall S \in \mathbb{R}\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n > N: a_n > S \qquad (\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty)$

Aufgabe 6
Beweisen Sie mit vollständiger Induktion, dass folgende Aussagen für alle $n \in \mathbb{N}$ gelten:

(a) $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(b) $(a+b)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$ (binomischer Lehrsatz)

(c) $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} > \sqrt{n}$

(d) $(1+x)^n > 1 + nx$ für $x > -1$ (Bernoulli Ungleichung)

(e) Für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = e^{2x}$ gilt $f^n(x) = 2^n \cdot e^{2x}$

Aufgabe 7
Beweisen Sie folgende Aussagen für beliebige Mengen L, M, N:

(a) $M \cap N = N \cap M$, $N \cup M = M \cup N$

(b) $L \cap (M \cap N) = (L \cap M) \cap N$
$L \cup (M \cup N) = (L \cup M) \cup N$

(c) $M \cup M = M \cap M = M$

(d) $L \cap (M \cup N) = (L \cap M) \cup (L \cap N)$
$L \cup (M \cap N) = (L \cup M) \cap (L \cup N)$

(e) $L \setminus (M \cup N) = (L \setminus M) \cap (L \setminus N)$
$L \setminus (M \cap N) = (L \setminus M) \cup (L \setminus N)$

Aufgabe 8
Seien M, N, X beliebige Mengen. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) $M \subseteq N \Leftrightarrow M \cap N = M$

(b) $M \subseteq N \Leftrightarrow M \cup N = N$

(c) $M \subseteq N \Leftrightarrow M \setminus N = \emptyset$

(d) $M \cap N \subseteq M \cup N$

(e) $(M \subseteq X) \wedge (N \subseteq X) \Rightarrow M \cup N \subseteq X$

(f) $(X \subseteq M) \wedge (X \subseteq N) \Rightarrow X \subseteq M \cap N$