12.9 T-utv för funktioner $f(x,y): \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

1:a ordningens approx $P(x,y) = f(a,b) + f_1(a,b)(x-a) + f_2(a,b)(y-b)$ i (a,b) för $f(x,y)$.
$P_1(a+h, b+k) = f(a,b) + f_1(a,b)h + f_2(a,b)k$

Samma sak som linjeriseringen till f i (a,b). $Lf = R$

Vad kan sägas om $|f - P_1|$? Om $|(x,y)-(a,b)|$ litet så borde/vill man att $|f-P_1|$ litet. Det här är ok om f är differentierbar flera ggr.

f är differentierbar om: $\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(a+h,b+k) - Lf}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$ $\quad f(a+h, b+k) = Lf +$ något som går snabbare mot 0 än $\sqrt{h^2+k^2}$.

Speciellt om $(h,k)\to(0,0)$ så $f(a+h,b+k) \to P_1(a,b) + \underbrace{0}_{\text{Felterm}}$
$\to Lf(a,b)$
$\to f(a,b)$

$\Rightarrow \lim_{(h,k)\to(0,0)} f(a+h,b+k) = f(a,b)$ dvs f kont (a,b)

Viktigt!

Numeriska approximationer. Hur räknar en dator ut $\sin(0{,}01)$?
T-utv! Uppskatter felet som fås mha medelvärdessatsen.

Desto längre man går desto bättre approximationer. I den här kursen nöjer vi oss med grad 2.

Ex

$f(x,y) = x^2 + y^2$. Ange $P_2(0,0)$

Formel:

$$P_2(x,y) = f(a,b) + f_1(a,b)(x-a) + f_2(a,b)(y-b) + \tfrac{1}{2}\left(f_{11}(a,b)(x-a)^2 + 2f_{12}(a,b)(x-a)(y-b) + f_{22}(a,b)(y-b)^2\right)$$

Vad är $f_1, f_2, \ldots$ $\quad f_1 = 2x \quad f_{11} = 2 \quad f_{12} = 0$
$f_2 = 2y \quad f_{22} = 2$

i $(0,0)$: $P_2 = 0 + 0(x-0) + 0(y-0) + \frac{1}{2}(2(x-0)^2 + 2\cdot 0(x-0)(y-0) + 2(y-0)^2) = x^2 + y^2$

Ex

$f(x,y) = x^2 + y^2 + 3xy^2$ i $(0,0)$

$f_1 = 2x + 3y^2 \quad f_{11} = 2 \quad f_{12} = 6y$
$f_2 = 2y + 6xy \quad f_{22} = 2 + 6x$

i $(0,0)$ $\Rightarrow$ $f_1 = 0$, $f_2 = 0$, $f_{11} = 2$, $f_{22} = 2$, $f_{12} = 0$ $\Rightarrow P_2 = x^2 + y^2$

Samma värden som förra

Ex

$f(x,y) = y^2 - x^3 \quad (1,1)$

$f_1 = -3x^2 \quad f_{11} = -6x \quad f_{12} = 0$
$f_2 = 2y \quad f_{22} = 2$

$\Rightarrow (1,1) \Rightarrow$ $f_1 = -3$, $f_2 = 2$, $f_{11} = -6$, $f_{22} = 2$, $f_{12} = 0$ $\Rightarrow$ Insättning........

"Kapa av metoden" kan användas om graden överstiger två om man gör en omskrivning.

Ex 2 ovan: $\left.\begin{array}{l} s = x-1 \\ t = y-1 \end{array}\right\}$ $y^2 - x^3 = (t+1)^2 - (s+1)^3 = t^2 + 2t + 4 - (s^3 + 3s^2 + 3s + 1) = 2t - 3s + t^2 - 3s^2 - \cancel{s^3}$ KAPAN $=$
$2(y-1) - 3(x-1) + (y-1)^2 - 3(x-1)^2$

Lär dig Pascals triangel igen.....

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 2 & & 1 & & \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \end{array}$$

OSV

Ex

P_2 för $\sin(x+2y)$ i $(0,0)$

Alt 1: Använd formeln $P_2 =$ Lf + kvadratiskt bss...
Alt 2: Återför på envariabelfall och kapa av.

A2 |

$\sin(t) = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} -$ h.o.t. Sätt in $t = x+2y \Rightarrow \sin(x+2y) = (x+2y) - \underbrace{\cancel{\frac{(x+2y)^3}{3!} + \frac{(x+2y)^5}{5!}}}_{\text{grad} > 2 = \times} - \ldots\ldots$

$P_2 = (x+2y)$

13.1 | Extremvärdesproblem

I envariabeln hittar man kritiska punkter till en funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ genom att leta efter $f'(t) = 0$. Sen klassificerar man punkten genom att studera $f''(t)$.

I flera variabler borde f' ersättas med ∇f och f'' med $H(f)$ hessianen.

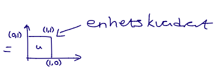
Def

$f(x,y): \; U \to \mathbb{R}$
$U \subseteq \mathbb{R}^2$

(a,b) är ett lokalt max om det för alla (x,y) i en liten (godtyckligt) omgivning till (a,b) gäller att $f(x,y) \leq f(a,b)$. Ett lokalt min def analogt.

Om vi byter ut lokalt met globalt kräver vi olikheterna för alla (x,y).

Ex

$f(x,y) = x^2 + y^2$, $U =$ 

Max och min lätta: Max: $(1,1)$ med värde 2
Min: $(0,0)$ — " — 0.

$\nabla f = (2x, 2y)$ och $= 0$ om $x = y = 0$.

Men $\nabla f(1,1) \neq (0,0)$
globalt max

Ex

$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ med $U =$ enhetskvadraten

P.S.S. Max: $(1,1)$ med värde $\sqrt{2}$.
Min: $(0,0)$ — " — 0.

$\nabla f = \left(\frac{x}{(x^2+y^2)^{1/2}}, \frac{y}{(x^2+y^2)^{1/2}}\right) \neq (0,0)$ i $(1,1)$
$\nabla f(0,0)$: gränsvärdet finns ej då $x,y \to 0,0$
Så $\nabla f(0,0)$ är odef.

Sats
Om $f(x,y)$ har ett lokalt max eller min i (a,b) gäller ett av följande alternativ.

Alt 1: $\nabla f(a,b)$ är odef. (andra ex)
Alt 2: $\nabla f(a,b) = (0,0)$
Alt 3: $\nabla f(a,b)$ är en randpunkt till U. $(a,b) \in \partial U$

Def
U är kompakt om U är sluten och begränsad. (Händer att man skriver K istället för U.)

Sats
Om $U = K$ kompakt så har $f: K \to \mathbb{R}$ alltid ett globalt max och min.

Def
En punkt är kritisk till $f: U \to \mathbb{R}$, $U \subseteq \mathbb{R}^2$ om $\nabla f(a,b) = 0$.

Vad kan sägas om olika kritiska punkter?
$P_1(x,y)$ i $(a,b) = f(a,b) + \underbrace{\cancel{\nabla f(a,b)}}_{=0} \cdot (x-a, y-b) = f(a,b)$ ty kritisk punkt

Vad är $f(x,y) - P_1(x,y)$?
En felterm som är kvadratisk (medelvärdessats)

Vad är istället $f(x,y) - P_2(x,y)$
En kubisk felterm.

$$f(x,y) \approx P_2(x,y) = f(a,b) + \tfrac{1}{2}\left(f_{11}(a,b)(x-a)^2 + 2f_{12}(a,b)(x-a)(y-b) + f_{22}(a,b)(y-b)^2\right)$$

$$P_2(a+h, b+k) = f(a,b) + \tfrac{1}{2}[h,k] \cdot H(f) \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix}$$

Ser ut som att Hessian bestämmer hur f uppför sig runt (a,b) (P_2).

Vad kan vi säga om uttryck på den här formen?
$[h,k] \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix}$? Linalgen säger att vi kan diagonalisera $H(f) \sim \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$

Nya kvadratiska uttrycket blir $\lambda_1 h^2 + \lambda_2 k^2$. Om $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ kommer $H(f) > 0$ om $(h,k) \neq (0,0)$
$\lambda_1, \lambda_2 < 0$ $H(f) < 0$ — " —
$\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0$ eller $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$ $H(f) > 0$ eller $H(f) < 0$
$\lambda_1 = 0$ eller $\lambda_2 = 0$ $H(f) = 0$, kanske trots att — " —

Kvadratisk form
$f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$ är pos def: $f(x,y) > 0$ om $(x,y) \neq (0,0)$
neg def $f(x,y) < 0$ — " —
indefinit $f(x,y) \geq 0$, ≤ 0 ibland det ena, ibland det andra.

Kan användas för att ge oss en uppfattning av hur grafen till f ser ut i närheten av en kritisk punkt.

Test: $f_{11}(a,b)=A$, $f_{12}(a,b)=B$, $f_{22}(a,b)=C$

* $B^2-AC<0$, $A>0$ Pos def
* $B^2-AC<0$, $A<0$ neg def
* $B^2-AC>0$ indefenit
* $B^2-AC=0$ varken eller

Kritisk Punkt (a,b)

$Df(a,b)=0$

* lokalt max $H(f)$ neg def
* lokalt min $H(f)$ Pos def
* Sadelpunkt $H(f)$ indefenit
* Ger $H(f)$ ingen info varken eller

Kallas dock sadelpunkt i boken.