| Högerled | Partikulär lösning |
|---|---|
| Konstant | (annan) konstant |
| $Ae^{bx}$ | $ae^{bx}$ |
| $Ae^{bx}$ | $axe^{bx}$ om $e^{bx}$ löser den homogena ekv. |
| Polynom av grad n | Polynom av grad n (samma grad) |
| $A\cos bx + B\sin bx$ | $a\cos bx + c\sin bx$ |
| $e^{ax}(A\cos bx + B\sin bx)$ | $e^{ax}(C\cos bx + D\sin bx)$ |

## Ex $y''+2y'-3y=e^{3x}$

$y''+2y'-3y=e^{3x}$

Vi har redan löst den homogena ekvationen: $y = Ae^{x}+Be^{-3x}$

Partikulär lösning: $y = a\cdot e^{3x}$

$y' = 3ae^{3x}$

$y'' = 9a\cdot e^{3x}$

$y''+2y'+3y = 9a\cdot e^{3x}+6ae^{3x}-3a\cdot e^{3x} = 12a\cdot e^{3x} = e^{3x}$

$12a = 1 \iff a=\frac{1}{12}$

Allmänn lösning: $\frac{1}{12}e^{3x}+Ae^{x}+Be^{-3x}$

## Ex

$y''+2y'-3y=x^2$

Partikulär lösning: $y = ax^2+bx+c$

$y' = 2ax+b$

$y'' = 2a$

$y''+2y'-3y = 2a+2(2ax+b)-3(ax^2+bx+c) = 2a+2b-3c+x(4a-3b)-3ax^2 = x^2$

$-3a=1$

$4a-3b=0$ $\quad a=-\frac{1}{3},\quad 3b=4a=-\frac{4}{3} \Rightarrow b=-\frac{4}{9},\quad 3c=2a+2b=-\frac{2}{3}-\frac{8}{9}=-\frac{14}{9} \Rightarrow c=-\frac{14}{27}$

$2a+2b-3c=0$

Allmän lösning: $y=-\frac{1}{3}x^2-\frac{4}{9}x-\frac{14}{27}+Ae^{x}+Be^{-3x}$

## Ex

$y''+2y'-3y=\sin(2x)$

Partikulär lösning: $y = a\cdot\cos 2x + b\cdot\sin(2x)$

$y' = -2a\sin 2x + 2b\cos 2x$

$y'' = -4a\cos 2x - 4b\sin 2x$

$y''+2y'-3y = -4a\cos 2x - 4b\sin 2x + 2(\cdots\cdots) = \cos 2x(-4a+4b-3a)+\sin 2x(-4b-4a-3b) = \sin 2x$

Allmän: $y=\frac{1}{65}(-4\cos 2x - 7\sin 2x)+Ae^{x}+Be^{-3x}$

## Ex

$y''+2y'-3y = e^{3x}+\sin 2x$

Partikulär I: $y=\frac{1}{12}e^{3x}$

Partikulär II: $y=\frac{1}{65}(-4\cos 2x - 7\sin 2x)$

Totalt: I + II

## Krångel med homogena lösningar

### Dubbelrot

Karakteristiska ekvationen: $(r-a)^2=0=r^2-2a+a^2$, $e^{ax}$ är fortfarande en giltig lösning men vi behöver en till för att få alla oberoende lösningar. $\Rightarrow y = x\cdot e^{ax}$

$y''=-2ay'+a^2y=0$

$y'=e^{ax}+ax\cdot e^{ax}$

$y''=ae^{ax}+ae^{ax}+a^2xe^{ax}$

$y''-2ay'+a^2y = 2ae^{ax}+a^2xe^{ax}-2a(e^{ax}+axe^{ax})+a^2xe^{ax} = 2ae^{ax}+a^2xe^{ax}-2ae^{ax}-2a^2xe^{ax}+a^2xe^{ax}=0$

Hom lösning: $Ae^{ax}+Bxe^{ax}=(A+Bx)e^{ax}$

## Komplexa rötter

### DEF:

$$e^{a+ib} = e^a \cdot e^{ib} = e^a(\cos b + i\sin b)$$

$$\frac{d}{dt} e^{(a+ib)t} = \frac{d}{dt} e^{at}(\cos bt + i\sin bt) = a e^{at}(\cos bt + i\sin bt) + e^{at}(-b\sin bt + ib\cos bt) = -e^{at}(\cos bt(a+ib) + \sin bt\underbrace{(ai-b)}_{i(a+ib)}) =$$

$$e^{at}(\cos bt + i\sin bt)(a+ib) = e^{t(a+ib)}(a+ib)$$

### Alltså

Om KE har komplexa rötter $r_1$ och $r_2$ så har den homogena ekvationen lösn: $y = C_1 \cdot e^{r_1 x} + C_2 \cdot e^{r_2 x}$ med komplexa $C_1$ & $C_2$.

Om KE (och därmed diffekv) har reella koeff. så är $r_2 = \overline{r_1}$. $r_{1,2} = a \pm ib$

$y = C_1 e^{(a+ib)x} + C_2 e^{(a-ib)x} = e^{ax}(C_1 e^{ibx} + C_2 e^{-ibx})$ om vi startade med en reell ekv. och alltså söker reella lösningar så låter vi imaginärdelarna ta ut varandra. DVS: $C_2 e^{-ibx} = \overline{C_1 \cdot e^{ibx}} = \overline{C_1} \cdot \overline{e^{ibx}} \Leftrightarrow C_2 = \overline{C_1}$

$C_1 = A + iB$, $C_2 = A - iB$

$$y = e^{ax}((A+iB)e^{ibx} + (A-iB)e^{-ibx}) = e^{ax}((A+iB)(\cos bx + i\sin bx) + (A-iB)(\cos bx - i\sin bx)) =$$

$$e^{ax}(A\cos bx - B\sin bx + i(B\cos bx + A\sin bx) + A\cos bx - B\sin bx + i(-B\cos bx - A\sin bx)) = e^{ax}(2A\cos bx - 2B\sin bx)$$

### Ex Vatten rinner ur burk.


Torricellis lag

Förlorar potentiell energi: $mgh$

Avgående kinetisk energi: $\frac{mv^2}{2}$

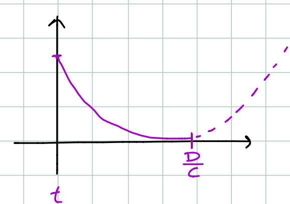
$v$ = utströmningshastighet

$mgh = \frac{mv^2}{2} \Leftrightarrow v = \sqrt{2gh}$

Utströmning: $V$ = volym $= B \cdot h$

$V' = k \cdot A \cdot v$

$\uparrow$ hålets area




$-B \cdot h' = k \cdot A\sqrt{2gh}$

$h' = -\frac{kA\sqrt{2g}}{B} \cdot \sqrt{h}$ $\quad \frac{kA\sqrt{2g}}{B} = C$

$\frac{dh}{dt} = -C \cdot h^{\frac{1}{2}}$

$\frac{dh}{h^{1/2}} = -C\,dt$

$2\sqrt{h} = -Ct + D$ $\quad h(0) = h_0$

$h = \left(\frac{-Ct+D}{2}\right)^2$ $\quad h_0 = \frac{D^2}{4}$

När $h \to 0$ blir modellen dålig, men det finns en annan lösning till DE. I lösningen till v får vi inte dela med $h^{\frac{1}{2}}$ om $h = 0$.

Sätt $h(t) = 0$ för att skarva ihop olika lösningar.

Burken tom när $h = 0 \Rightarrow -Ct + D = 0$

$t = \frac{D}{C} = \frac{2\sqrt{h_0}}{C}$

Den fysikaliskt relevanta lösningen: $h(t) = \begin{cases} \left(\frac{D-Ct}{2}\right)^2, & 0 \leq t \leq \frac{D}{C} \\ 0, & t > \frac{D}{C} \end{cases}$

### Allmänt om ODE

$y' = F(x, y)$

den här ekv. bestämmer ett riktningsfält.

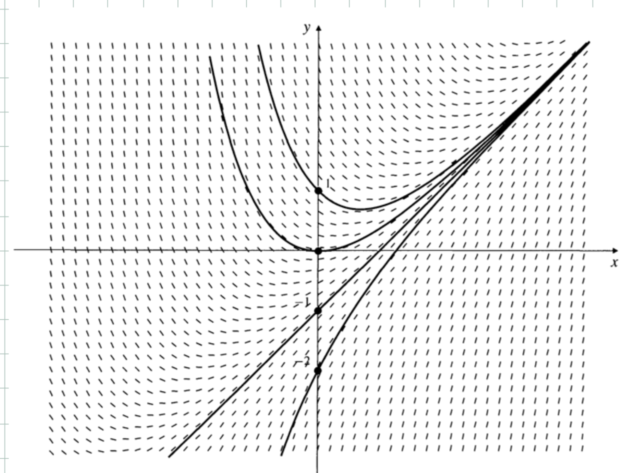
$F(x,y)$ ger en tangentriktning i varje punkt $(x, y)$

### Ex

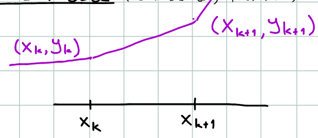
$y' = x - y$ (Fig 17.1 s. 942)

En lösning: $y = x - 1$

$y' = 1 = x - (x-1)$



## Eulers metod (en-stegs, framåt)




$$\frac{y_{k+1} - y_k}{x_{k+1} - x_k} = F(x_k, y_k) \quad , \quad y_{k+1} = y_k + (x_{k+1} - x_k) \cdot F(x_k, y_k)$$