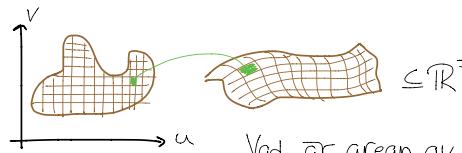


15.5 Ytintegrator

Utgå från den parametriseade ytan: $x = x(u, v)$
 $y = y(u, v)$
 $z = z(u, v)$



Vad är arean av rektangeln
på "filtern" i förhållande
till arean i första bilden?

$$dS = \text{Ytarea-elementet} = \boxed{\text{rek}} dudv$$



← arean av rektangeln UPPE = $|A \times B|$.
Formeln som tidigare härleddes: $dS = |\frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v}| dudv = \left| \left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}, \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}, \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} \right) \right| dudv$

Notera

$A \times B$ = vektor som har längd "area som spänns upp av $A \times B$ ", men är också vinkelrät mot planet som spänns upp av $A \& B$, dvs normal till ytan. Viktigt för flödesintegrator.

I ett specialfall: $Z = f(x, y)$ (funktionsyta) med $x = u$, $y = v$, $z = f(u, v) \Rightarrow N = (-f_u, -f_v, 1) \Rightarrow dS = \sqrt{f_u^2 + f_v^2 + 1} \cdot dudv$

Om vi använder sfäriska koordinater: $x = a \cos\theta \sin\phi$

Parametrisering av sfär med $R=a$ $\rightarrow y = a \sin\theta \sin\phi \Rightarrow dS = a^2 \sin\phi d\phi d\theta$
 $z = a \cos\phi$

Jämför med volymelementet $dV = R^2 \sin\phi dR d\theta d\phi$

Ex Funktionsytor. $Z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $z \geq 0$

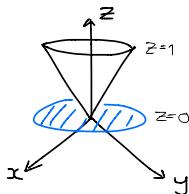
Beräkna arean av den del av konen som ligger mellan $0 \leq z \leq 1$

Funktionsyta $\Rightarrow dS = ((\frac{\partial z}{\partial x})^2 + (\frac{\partial z}{\partial y})^2 + 1)^{1/2} dx dy$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{array} \right\} dS = \left(\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \right)^2 + 1 \right)^{1/2} dx dy = \left(\frac{x^2}{x^2+y^2} + \frac{y^2}{x^2+y^2} + 1 \right)^{1/2} dx dy = \sqrt{2} dx dy$$

$$\iint_{\text{parametrisering}} dS = \iint_{\Delta} \sqrt{2} dx dy$$

Vad går x & y mellan?



Det är en integral över $x^2 + y^2 \leq 1$
 $0 \leq z = \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1 \Leftrightarrow 0 = 0^2 \leq x^2 + y^2 \leq 1^2 = 1$

$$\text{dvs } \iint_{\Delta} dS = \iint_{\Delta} \sqrt{2} dx dy \stackrel{\substack{1. \text{ Polar form} \\ 2. \text{ Arean} = \pi r^2 = \pi \cdot 1 = \pi}}{\Rightarrow} \sqrt{2} \pi$$

Ex $x = 2uv$, $y = u^2 - v^2$, $z = u^2 + v^2$ Bestäm arean av ytan som motsvaras av att $u^2 + v^2 \leq 1$.
Detta är ingen godtagbar funktionsyta...

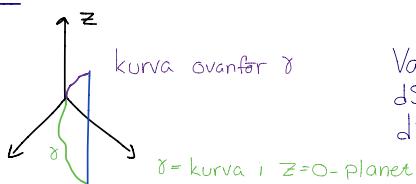
$$\begin{aligned} \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} &= -4(u^2 + v^2) \\ \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} &= 4(u^2 - v^2) \Rightarrow dS = 4\sqrt{2}(u^2 + v^2)dudv \Rightarrow \iint_{u^2+v^2 \leq 1} dS = \iint_{u^2+v^2 \leq 1} 4\sqrt{2}(u^2 + v^2)dudv = \left\{ \begin{array}{l} u = r \cos\theta \\ v = r \sin\theta \\ 0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{array} \right\} = \\ \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} &= 8uv \end{aligned}$$

$$4\sqrt{2} \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^2 \cdot r dr d\theta = 4\sqrt{2} \cdot 2\pi \cdot \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^1 = 2\sqrt{2} \pi$$

Svaren i de två exemplen liknar varandra, vfr? Jo, om: $x = 2uv$, $y = u^2 - v^2$, $z = u^2 + v^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = z^2$, $z \geq 0 \Rightarrow z = \sqrt{x^2 + y^2}$. Emellertid skiljer de sig åt: $2\sqrt{2}\pi \neq \sqrt{2}\pi$

Detta eftersom exempel 2 inte bjuder på en korrekt parametrisering. $(-u, -v)$ ger SAMMA punkt som (u, v) .

Ex



Vad är dS ?

$$dS = \text{båglängdslementee} \Rightarrow dS = ds \frac{\text{bas}}{dz}$$

$ds = \text{längd i } z\text{-led}$

En yta gör längs en kurva $y = \frac{x^2}{2}$ i xy -planet ($z=0$) upp till en kurva $z=2x$. Vad är arean till denna yta, $0 < x < 1$?

$$\iint dS = \iint 1 dz dx$$

$$ds = \sqrt{1+f(x)^2} dx = \sqrt{1+x^2} dx \Rightarrow \iint dS = \int_0^{2x} \sqrt{1+x^2} dz dx = \int_0^{2x} 2x \sqrt{1+x^2} dx = \left[\frac{u+1+x^2}{2x+2x^2} \right] = \int \sqrt{u} du = \left[\frac{2}{3} u^{3/2} \right] =$$

$$\left[\frac{2}{3} (1+x^2)^{3/2} \right]_0^1 = \frac{2}{3} (2^{3/2} - 1) = \frac{2}{3} (2\sqrt{2} - 1)$$

ÖB $G(x, y, z) = 0$, där z entydigt bestämt av x och y så är $dS = \left| \frac{\nabla G}{G_z} \right| dx dy$

15.6 Flödesintegraller

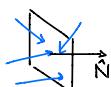
En typ av spaceade arbetsintegraller ($\int F \cdot dr$) och även Ytintegraller. Med dessa eftersträvar vi att modellera följande:

Givet ett vektorfält (hastighetsfält) i \mathbb{R}^3 och en yta vilken hastighetsfältet går igenom kan ett enkelt fall vara:



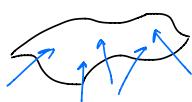
Kvadrat där vektorfältet gör \perp ytan

Flödet borde då vara: (Längden på vektorfältet)(arean på ytan)



Flödet: Vektorfältets komponenter vilka är sammrullade med \hat{N} $\Rightarrow (F \cdot \hat{N})(\text{arean})$
Och $F \cdot \hat{N}$ projiceringen av F på normalriktning

Param yta:



\Rightarrow Flödesintegral: $\iint_{\text{ytan}} F \cdot \hat{N} dS$

Vi har sedan tidigare formler för dS men vad gör vi med \hat{N} ?

Ovan kan skrivas som: $\hat{N} dS = d\vec{S}$ (eller dS) vilket är någon form av "vektorytarealement".

$$\iint_y F \cdot \hat{N} dS = \iint_y F \cdot d\vec{S}$$

$\begin{matrix} T & T \\ T & OR & T \\ T & T \end{matrix}$

Enhetsnormalen kan peka åt två håll och bestämmer ytans orientering.

Om $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v) \Rightarrow dS = \left| \frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v} \right| du dv = |N| du dv$

$$\hat{N} = \pm \frac{N}{|N|} \Rightarrow d\vec{S} = \hat{N} dS = \frac{N}{|N|} |N| du dv = N du dv$$

enhetssnormal

Specialfall

Parametrerad fall: $(\frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v}) = (\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}, \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}, \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}) \Rightarrow d\vec{S} = \pm \frac{\partial(r, s)}{\partial(u, v)} du dv$

Funktionsyta: $x = u$, $y = v$, $z = f(x, y)$, $(\frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v}) du dv = \pm (-f_u, -f_v, 1) du dv$

$G(x, y, z) = 0$: Implicit def yta (z entydigt bestämd av x & y) $\Rightarrow d\vec{S} = \pm \frac{\nabla G}{G_z} dx dy$

Ex Bestäm flödesintegralen där $F(x, y, z) = (x, x, 1)$ genom ytan $Z=x^2-y^2$, begränsad av cylindern $x^2+y^2=a^2$.

F är given men vi saknar $d\vec{S}$ och integralen..

$$\text{Ytan är en funktionsytte: } Z=f(x, y)=x^2-y^2 \Rightarrow d\vec{S}=\pm(-f_x, -f_y, 1) dx dy \left. \begin{array}{l} f_x=2x \\ f_y=-2y \end{array} \right\} \pm(-2x, 2y, 1) dx dy$$

$$\text{Väljer + Integralen: } \iint_Y F \cdot d\vec{S} = \iint_Y (x, x, 1) \cdot (-2x, 2y, 1) dx dy = \iint_Y -2x^2 + 2xy + 1 dx dy$$

$Z=x^2-y^2$ är någon form av sadel innuti cylindern $x^2+y^2=a^2$. Dvs området vi integrerar över är $x^2+y^2 \leq a^2$

$$\iint_{x^2+y^2 \leq a^2} (2xy - 2x^2 + 1) dx dy = \iint_{\substack{x=r \cos \theta \\ y=r \sin \theta \\ 0 \leq r \leq a \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi}} (2r^2 \cos \theta \sin \theta + 1 - 2r^2 \cos^2 \theta) r dr d\theta$$