Kedjeregeln

$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ u(s,t),\ v(s,t):\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ \lambda(u,v):\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$

Deriverbarhet $\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial s}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial s}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial s}$

$f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R} \rightsquigarrow \nabla f=(f_x,f_y,f_z)$, P.S.S. $\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$

Tach till den stere komikern för anteekningarna!

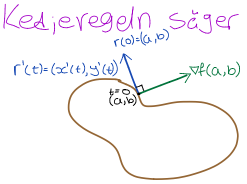
Sats

Om $\nabla f(a,b)\neq 0$ är $\nabla f(a,b)$ ortogonal mot tangenten på nivåkurvan $c=f(a,b)=f(x,y)$

Bevis

Parametrisera nivåkurvan med $r(t)=(x(t),y(t))$, $g(t)=f(x(t),y(t))=$ konstant $\Rightarrow$ derivata $=0$

Kedjeregeln säger även ~~att~~ $\nabla f(a,b)\cdot\underbrace{(x'(t),\ y'(t))}_{\text{Hastighet/Tangentvektor vid en given tid.}}=\frac{dr}{dt}=0$



Gradienten kommer hjälpa oss förstå hur f växer (likt derivatan i en-variabel).

Antag att vi har en riktning (u,v), $\sqrt{u^2+v^2}=1$, dvs längd 1. Hur snabbt ökar f i riktningen (u,v) från punkten (a,b)?

$g(t)=f(a+tu,\ b+tv)$

$g'(t)=[\text{kedjer.}]=\frac{\partial f}{\partial t}=f_1\frac{\partial(a+tu)}{\partial t}+f_2\frac{\partial(b+tv)}{\partial t}=f_1u+f_2v=(f_1,f_2)\cdot(u,v)=\nabla f(a,b)\cdot(u,v)$

Def

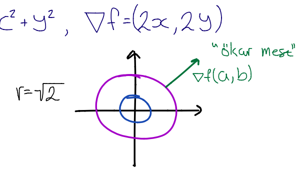
Riktningsderivatan av f i riktningen $\vec{u}=(u,v)$ skrivs som $D_{\vec{u}}f:=\nabla f(a,b)\cdot\vec{u}$

$\nabla f(a,b)\cdot\vec{u}=|\nabla f(a,b)|\cdot|\vec{u}|\cos\alpha$, där α är vinkeln mellan vektorerna. Om $\vec{u}$ & $\nabla f(a,b)$ är ortogonala ändras inte f alls $(\cos\alpha=0)\rightsquigarrow$ dvs $\vec{u}$ är en tangentvektor till nivåkurvan $C=f(a,b)=f(x,y)$

Den riktning där f ökar mest är när $\cos\alpha=1$, $\vec{u}=\frac{\nabla f(a,b)}{|\nabla f(a,b)|}$, och den avtar mest när $\cos\alpha=-1$, $\vec{u}=\frac{-\nabla f(a,b)}{|\nabla f(a,b)|}$.

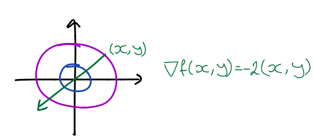
Ex

$Z=x^2+y^2$, $\nabla f=(2x,2y)$



Ex

$Z=-x^2-y^2$, $\nabla f=(-2x,-2y)$



Ortogonalitet

Vad är tangentplanet till nivåytan i $P=(1,1,1)$?

$30x^2-4yz-26=0 \leftarrow$ nivåyta

$z=\frac{30x^2-26}{4y} \leftarrow$ funktionsyta

$$\left.\begin{aligned} f_1&=60x=60\\ f_y&=-4z=-4\\ f_z&=-4y=-4\end{aligned}\right\}\ 60(x-1)-4(y-1)-4(z-1)=0$$

Funktionsytor: $Z=f(x,y)$

Nivåytor: $C=f(x,y,z)$

Funktionsyta ger nivåyta:

Formel för tangentplanet till $g(x,y,z)=0=f(x,y)-z$.

Normalen ges av $D_g=(g_1,g_2,g_3)=(f_1,f_2,-1)$

För att komma från funktionsytan till nivåytan

Sätter man $F(x,y,z)=f(x,y)-Z$ och tittar på nivån $F(x,y,z)=0$.

Ex 8 i 12.7

Hitta en tangentvektor till kurvan som skärs ut av $z=x^2-y^2$, $xyz+30=0$ i $P=(-3,2,5)$.

Parametrisera skärningen, $r(t)=(x(t),y(t),z(t))$ & $r'(t)$. Svårt att para skärningen.
Hitta tangentplan till ytorna & skärningen (egentligen är det två normaler till planet man vill ha) => hitta vekter som är ortogonal mot dessa. N_1 & $N_2 \Rightarrow N_1 \times N_2$

$F = z - x^2 + y^2$, $G = xyz + 30$, $\nabla F = (-2x, 2y, 1) = (6, 4, 5)$
$\nabla G = (yz, xz, xy) = (10, -15, -6)$

$$N_1 \times N_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -6 & -4 & -1 \\ 10 & -15 & -6 \end{vmatrix} = -9i - 46j + 130k$$

12.9 | Taylorutveckling

Taylorutvecklingar i en variabel, om f är $k+1$ ggr deriverbar funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

$$f(t) = f(0) + f'(0)t + f''(0)\frac{t^2}{2!} + f'''(0)\frac{t^3}{3!} + \ldots + f^{(k)}(0)\frac{t^k}{k!} + \underbrace{f^{(k+1)}(0)\frac{t^{k+1}}{(k+1)!}}_{\text{felterm}}$$

Vi vill göra något liknande för funktioner i flera variabler.
Antag att vi har en vekter $\vec{u} = (h,k)$. $F(t,h,k) = F(t) = f((a+th),(b+tk))$. $\overbrace{\text{Söker T-utv}}^{\text{Taylorutveckling}}$ runt (a,b).

$$F(t) = F(0) + F'(0)\cdot t + \frac{F''(0)}{2!} + \frac{F'''(0)}{3!} + \ldots$$

Kedjeregeln: $F'(t) = F_1 \cdot \frac{\partial(a+th)}{\partial t} + F_2 \frac{\partial(b+tk)}{\partial t} = F_1 \cdot h + F_2 \cdot k = \nabla F \cdot (h,k) = \nabla F \cdot \vec{u}$

Och speciellt om $t=0$: $F'(0) = \nabla F(a,b) \cdot \vec{u}$

Def

Första ordningens T-appx till t i $P=(a,b)$ ges av
$P_1(a+h, b+k) = (a,b) + f_1(a,b)h + f_2(a,b)k$
$P_1(x,y) = f(a,b) + f_1(a,b)(x-a) + f_2(a,b)(y-b)$

Självklart finns feltermer, $f(x,y) \neq P(x,y)$. För att få bättre approx tar vi högre ordningens T-utv. Om vi sätter $\vec{u}\cdot\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}h + \frac{\partial}{\partial y}k\right)$: $F'(t) = (u\cdot\nabla)F(t)$
$F^{(n)}(t) = (u\cdot\nabla)^k \cdot F(t)$

För att få $F''(0)$ så kan vi räkna ut $(u\cdot\nabla)^2 = \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 = h^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2hk\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + k^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}$

Slutsats: $F''(0) = h^2 f_{11}(a,b) + 2hk\, f_{12}(a,b) + k^2 f_{22}(a,b)$

Punkt $\qquad \nabla f(a,b)\cdot(h,k)$ vekter

Andra gradens T-appx ges av: $P_2(a+h, b+k) = f(a,b) + f_1(a,b)h + f_2(a,b)k + \overbrace{\frac{h^2 f_{11}(a,b)}{2} + \frac{2hk\, f_{12}(a,b)}{2} + \frac{k^2 f_{22}(a,b)}{2}}^{\text{Matris}}$

Hädan ~~efter~~ kommer vi utsättes för 3-dim matriser osv... Varför matriser?

$$[h,k]\begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix} = h^2 f_{11}(a,b) + 2hk f_{12}(a,b) + k^2 f_{22}(a,b)$$

Matrisen (som bestämmer den kvadratiska formen) kallas Hessianen.
1-var: $f(t) = f(0) + f'(0)t + f''(0)\frac{t^2}{2} + \ldots$
$f(a+h, b+k) = f(a,b) + \nabla f\cdot(h,k) + [h,k]\cdot\frac{1}{2}\cdot \text{hess}\begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix}$ Hessianen säger mycket om krökningen/max/min etc.