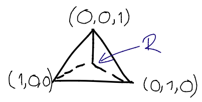
14.5 Trippelintegral forts.

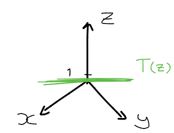
Ex



$\iint_R f\,dV = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int^{1-x-y} f\,dz\,dy\,dx$

Låt nu $f = x$ och räkna ut integralen: $\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} x\,dz\,dy\,dx = \int_0^1 \int^{1-x} x - x^2 - xy\,dy\,dz = \int_0^1 \frac{x(1-x)^2}{2}\,dx = \frac{1}{24}$

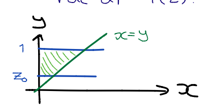
Ex Beskriv på annat sätt (annan parametrisering): $\int_0^1 dz \int_z^1 dy \int_0^y f\,dx = \iiint_R f\,dv$



Förstå R: Integralen börjar med att slica i z-riktning mellan 0 & 1.

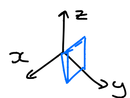
$\iiint_R f\,dv = \int_0^1 dz \iint_{T(z)} f\,dA$

Vad är T(z)? Jo, någon form av domän i ett xy-plan. (Kolla på exemplet i slutet av MVA 5.2)



$\int_{z_0}^1 \int_0^y f\,dx\,dy$, Slicat i y-riktning mellan z & 1.

Vi får något som liknar



För ett givet y-värde: $0 \leq x \leq y$, $0 \leq z \leq y$ Slica i y-riktning

eftersom vi får en kvadrat i varje steg. Vi får tillslut: $\int_0^1 dy \int_0^y \int_0^y f\,dx\,dz$

Ex $\int_0^1\int_0^1\int_0^1 (xy^2 + xz^2 + yx^2 + yz^2 + zx^2 + zy^2)\,e^{xyz}\,dx\,dy\,dz$ är integrering över en enhetskub.

Dela upp så att man får $\int_0^1\int_0^1\int_0^1 e^{xyz} \cdot xy^2\,dx\,dy\,dz + (5\text{ lika}) \Rightarrow 6\int_0^1\int_0^1\int_0^1 e^{xyz} \cdot xy^2\,dx\,dy\,dz$

Hur int map x?

Det blir svårt map x, byt till z först - det ser lättare ut: $6\int_0^1\int_0^1\int_0^1 e^{xyz} \cdot xy^2\,dz\,dx\,dy$

$6\int_0^1\int_0^1\int_0^1 e^{xyz} \cdot xy^2\,dz\,dx\,dy = 6\int_0^1\int_0^1 \left[xy^2 \frac{e^{xyz}}{xy}\right]_0^1 dx\,dy = 6\int_0^1\int_0^1 ye^{xy} - y\,dx\,dy = 6\int_0^1 \left[y\frac{e^{xy}}{y} - yx\right]_0^1 dy =$
$6\int_0^1 e^y - y - 1\,dy = 6\left[e^y - \frac{y^2}{2} - y\right]_0^1 = 6\left(e - \frac{5}{2}\right)$

14.6 Variabelbyte för trippelintegraler

Polära koordinater är awesome för att räkna ut dubbelintegraler. Vi söker något liknande för trippelintegraler. Det finns två saker att tänka på om man vill göra ett koordinatbyte.

1) Ändra integrationsgränser.
2) Beräkna area-/volymelementet i termer av de nya koordinaterna.

Sats

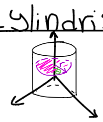
Variabelbyte: Om $x(u,v,w)$, $y(u,v,w)$, $z(u,v,w)$ så $\iiint f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz =$
$\iiint f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)) \cdot \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| du\,dv\,dw$

$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}$ är determinanten av Jacobianen $= \det\begin{pmatrix} \nabla u \\ \nabla v \\ \nabla w \end{pmatrix}$

Ex $x = au$, $y = bv$, $z = cw$

$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} = abc$ dvs $dx\,dy\,dz = abc\,du\,dv\,dw$ vilket motsvarar intentionen att om man skalar en axel så skalas volymen pss.

Cylindriska koordinater

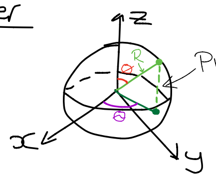


Vill beskriva en punkt via dess z-värde & punkter på en disk för ett fixt z-v

$x = r\cos t$
$y = r\sin t$ r är ett positivt reellt tal (radie i zplan) $0 \leq \Theta \leq 2\pi$
$z = z$ z är godtyckligt

Sfäriska koordinater

$x = R\sin\phi\cos\theta$
$y = R\sin\phi\sin\theta$
$z = R\cos\phi$



Projicera ner i xy-planet

Ex $x^2+y^2+z^2=R^2$

Sätt in koord: $R^2\sin^2\phi\cos^2\theta + R^2\sin^2\phi\sin^2\theta + R^2\cos^2\phi = R^2\sin^2\phi(\cos^2\theta+\sin^2\theta)+R^2\cos^2\phi = R^2$

Volymelementet går att räkna ut: $dV = R^2\sin\phi \, dR\, d\phi\, d\theta$

Ex Volym av cylinder med radie A som går mellan $a \leq z \leq b$.

$\iiint_R dV = \int_a^b\int_0^{2\pi}\int_0^A r\, dr\, d\theta\, dz = \int_a^b\int_0^{2\pi}\frac{A^2}{2}\, d\theta\, dz = \ldots =$ Volymen är basen gånger höjden.

What?

Ex Volymen till en sfär med radie A? $x^2+y^2+z^2 \leq A$

$\iiint dV = \iiint dx\,dy\,dz = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^A R^2\sin\phi\, dR\, d\theta\, d\phi = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{A^3}{3}\sin\phi\, d\theta\, d\phi = \int_0^{2\pi}\frac{2\pi A^3\sin\phi}{3}\, d\phi = \frac{2\pi A^3}{3}\int_0^{2\pi}\sin\phi\, d\phi = \frac{2\pi A^3}{3}\cdot 0 = 0$

Volymelementet ska alltid vara positivt.
I vårt fall var gränserna fel! $0 \leq \theta \leq 2\pi$ och $0 \leq R \leq A$ stämmer men ϕ ska vara $0 \leq \phi \leq \pi$.