14.2 | Upprepade enkelintegraler i x- & y-koordinater

Alla dubbelintegraler reduceras till enkel integraler.

Sats (Fubinis sats)

Om vi har ett område R (R (kompakt) snäll) och f är en funktion på $R \subseteq \mathbb{R}^2$ & $\iint_R |f| dA < \infty$

Då kan man dela upp integralen i 2 enkelintegraler. $\iint_R f dA = \int(\int f dx)dy = \int(\int f dy)dx$

Ex Låt R vara enhetskvadraten, $f = xy$

$\iint_R f\, dA = \iint_R xy\, dA = \int_0^1 (\int_0^1 xy\, dx) dy$

Beräkna först den inre: $\int_0^1 xy\, dx = \frac{x^2}{2} y \Big|_0^1 = \frac{y}{2}$, och sen den yttre: $\int_0^1 \frac{y}{2} dy = \frac{1}{4}$

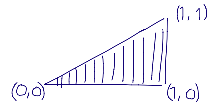
Sats

Om fubinis sats gäller är integralen över ett område: $R =$, $\iint_R f dA = \int_a^b dy \int_{c(x)}^{d(x)} f dx$.

På samma sätt: $R =$ $\iint_R f\, dA = \int_c^d \int_{a(y)}^{b(y)} f\, dx dy$. Man slicar i olika riktningar.

Ex Integrera $f = xy$ över triangeln $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$

Vi slicar i x-led och vill använda formeln

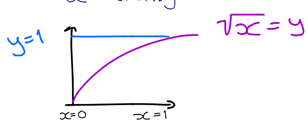


$x = 0$, $x = 1$
$a = 0$, $b = 1$

$\iint_R f dA = \int_0^1 \left(\int_0^x xy\, dy \right) dx \Rightarrow \int_0^x xy\, dy = \frac{xy^2}{2} \Big|_0^x = \frac{x^3}{2} \Rightarrow \int_0^1 \frac{x^3}{2} dx = \frac{x^4}{2 \cdot 4} \Big|_0^1 = \frac{1}{8}$

Ex Beräkna $\int_0^1 dx \int_{\sqrt{x}}^1 e^{(y^3)} dy$

Först söker vi en primitiv till $e^{(y^3)}$ men det går inte på ett rimligt sätt. Problemet är att vi integrerar i fel ordning. Försök istället att förstå området och gör en y-slicing istället för x-slicing.



Hur slicar vi i y-led?

y mellan 0 & $1 \Rightarrow \int_0^1$

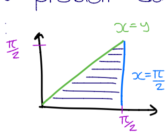
För fixt y, mellan vilka x-värden ligger R? $0 \to y = \sqrt{x} \Rightarrow x = y^2$

$\int_0^1 dy \int_0^{y^2} e^{(y^3)} dx \Rightarrow \int_0^{y^2} e^{(y^3)} dx = [e^{(y^3)} \text{ konstant}] = x \cdot e^{(y^3)} \Big|_0^{y^2} = y^2 e^{(y^3)} \Rightarrow \int_0^1 y^2 e^{(y^3)} dy = [u = y^3, du = 3y^2 dy] = \int_0^1 e^u \frac{du}{3} = \frac{(e-1)}{3}$

Ex Beräkna $\int_0^{\pi/2} dy \int_y^{\pi/2} \frac{\sin(x)}{x} dx$

Vi stöter på problem då det är "omöjligt" att beräkna $\int \frac{\sin(x)}{x} dx$.

Område R:



$0 \leqslant y \leqslant \pi/2$
$y \leqslant x \leqslant \pi/2$

Om vi slicar i x-led
$0 \leqslant x \leqslant \pi/2$
Fixt x i y mellan 0 & x

$\Rightarrow \int_0^{\pi/2} \int_0^x \frac{\sin(x)}{x} dy dx = \int_0^{\pi/2} \left[\frac{\sin(x)}{x} y \right]_0^x dx = \int_0^{\pi/2} \sin(x) dx = -\cos(x) \Big|_0^{\pi/2} = 0 - (-\cos(0)) = 1$

14.3 | Generaliserade integraler och m-värdessatsen

Medelvärdessatsen: Om R är integrerbar, kompakt med ändlig rand och f kontinuerlig.
$\exists (x_0, y_0) \in R$ s.a. $f(x_0, y_0) = \frac{1}{\text{area}(R)} \iint_R f\, dA$.

Bevis

Eftersom R kompakt, har ändlig rand, och f kontinuerlig $\Rightarrow \iint_R f\, dA$ existerar
$\Rightarrow f$ har globalt max/min

Globalt max/min $\Rightarrow \forall (x,y) \in R \quad f(x_{min}, y_{min}) \leqslant f(x,y) \leqslant f(x_{max}, y_{max})$

Integrera alt: $\underbrace{\iint_R f_{min}\, dA}_{} \leq \iint_R f\, dA \leq \iint_R f_{max}\, dA$

$$f_{min} \cdot \iint_R 1\, dA \leq \iint_R f\, dA \leq f_{max} \iint_R 1 \cdot dA \Rightarrow f_{min} \leq \frac{1}{area} \cdot \iint_R f\, dA \leq f_{max}$$

Pga kontinuitet antas alla värden mellan f_{min} & f_{max}.

(1,1)

Ex Bestäm medelvärde till funktion $f(x,y) = x$ på triangeln (0,0) — (1,0).

Vi behöver göra 2 saker: 1) Räkna ut arean.
2) Räkna ut $\iint_R x\, dA$

1) $A = B \cdot h \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

2) $\int_0^1 \int_0^x x\, dy\, dx = \left[\int_0^x x\, dy = xy \Big|_0^x = x^2\right] = \int_0^1 x^2\, dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{3}$

Medelvärde: $\dfrac{\iint_R x\, dA}{\iint_R dA} = \dfrac{1/3}{1/2} = \dfrac{2}{3}$

Ex Medelvärde till x^2+y^2 över samma triangel.

$\int_0^1 \int_0^x (x^2+y^2)\, dy\, dx = \left[\int_0^x (x^2+y^2)\, dy = x^2 y + \frac{y^3}{3} \Big|_0^x = \frac{4}{3} x^3\right] = \int_0^1 \frac{4x^3}{3}\, dx = \frac{4}{3} \cdot \frac{x^4}{4} \Big|_0^1 = \frac{1}{3}$

Medelvärdet: $\frac{1/3}{1/2} = \frac{2}{3}$

Mer generaliserade integraler

Envariabel hade typ samma satser som de vi talat om rörande integrering. Dvs $\iint_{komp} f_{kont}\, dA$ finns.
Vi integrerade dock bara över kompakta, slutna, interval eller punkter, men även tex $\mathbb{R}$.

Ex $\int_0^\infty e^{-x}\, dx = -e^{-x} \Big|_0^\infty = 0 - (-e^{-0}) = 1$

Vi vill också integrera över större områden:

Ex Integrera e^{-x^2} över området som är begränsat av $y = x$, $x \geq 0$ och $y = -x$.

$\int_0^\infty dx \int_{-x}^{x} e^{-x^2}\, dy = \int_0^\infty [e^{-x^2}(x-(-x))]\, dx = \int_0^\infty 2x e^{-x^2}\, dx = \left[\underbrace{u = x^2,\ du = 2x\,dx}_{\text{gränserna blir samma}}\right] = \int_0^\infty e^{-u}\, du = 1$