13.2 Ext-värdesproblem med bi-/randvillkor

Hitta max och min till $f(x,y) = ax+by$ på disken $x^2+y^2 \leq r^2$ $(a,b) \neq (0,0)$

$\nabla f = (a,b) \neq (0,0) \Rightarrow$ max & min är en randpunkt finns eftersom disken är kompakt.

Parametrisera randen $\Rightarrow$ $\left.\begin{array}{l} x = r\cos t \\ y = r\sin t \end{array}\right\}$ $g(t) = f(r\cos t, r\sin t) = ar\cos t + br\sin t$

$g'(t) = ar(-\sin t) + br\cos t = 0$

$= (-r\sin t, r\cos t)\cdot(a,b) = 0 \Rightarrow (a,b) \perp (-r\sin t, r\cos t) \Rightarrow (-r\sin t, r\cos t) = \lambda(-b,a)$

annan vektor ortogonal till (a,b)

Vad är λ?

Kan abs-belopp/norm på båda sidorna: $\big(\underbrace{(-r\sin t)^2+(r\cos t)^2}_{=r}\big)^{1/2} = |\lambda|\cdot|(-b)^2+(a)^2)^{1/2} \Rightarrow |\lambda| = \frac{r}{(a^2+b^2)^{1/2}} \Rightarrow$

$\lambda_{\pm} = \pm\frac{r}{(a^2+b^2)^{1/2}}$

$(-r\sin t, r\cos t) = \lambda_{\pm}(-b,a) \Rightarrow$ plusfallet: $-r\sin t = \frac{r}{(a^2+b^2)^{1/2}}-b$

$x = r\cos t = \frac{r}{(a^2+b^2)^{1/2}}\cdot a$

$y = r\sin t = \frac{r}{(a+b)^2}\cdot b$

maxpunkt

m.a.o: $(x,y) = \frac{r}{(a^2+b^2)^{1/2}}(a,b)$

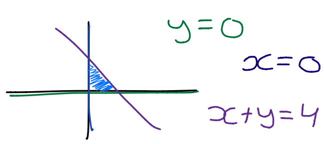
Minusfallet: $\lambda_- = \frac{-r}{(a^2+b^2)^{1/2}} \Rightarrow$ min: $(x,y) = \frac{-r}{(a^2+b^2)^{1/2}}(a,b)$

Slutsats: $-r(a^2+b^2)^{1/2} \leq ax+by \leq \frac{r}{(a^2+b^2)^{1/2}}(a,b)\cdot(a,b) = r(a^2+b^2)^{1/2}$

Kallas: Cauchy-Schwarz olikhet $|(a,b)\cdot(x,y)| \leq \|(a,b)\|\cdot\|(x,y)\| \leq \|(a,b)\|\cdot r$

Ex Hitta max/min till $f(x,y) = x^2 y e^{-(x+y)}$ på området begränsat av $x=0, y=0, x+y=4$

3 linjer



Vi vet att området är kompakt $\Rightarrow$ max/min finns
Kolla kandidater på randen och i det inre.

$\nabla f = (f_1, f_2) = (0,0)$

$f_1 = (xy(2-x)\cancel{e^{-(x+y)}}) = 0$

$f_2 = x^2(1-y)\cancel{e^{-(x+y)}} = 0$

$e^{-(x+y)} \neq 0$

$xy(2-x) = 0$ Alt 1: $x=2, y=1$

$x^2(1-y) = 0$ Alt 2: $x=0$, y = valfritt på randen

Bokför $(2,1)$: $\Rightarrow f(2,1) = 4\cdot e^{-3}$

Kolla ränder: $x=0$ rand1 $f(0,y)=0$

$y=0$ rand2 $\Rightarrow f(x,0)=0$ $\Big\}$ Bokför 0

$x+y=4$ rand3

Testa rand3 genom att sätta in $y=4-x$ & $x\geq 0, y\geq 0$

Insättning: $f(x,y) = x^2(4-x)e^{-4} = g(x)$

Kolla rand och leta $g'(x)=0$. $g'(x) = (8x-3x^2)e^{-4} = 0 \Rightarrow x=0$ eller $x=\frac{8}{3}$

inget nytt

$x=\frac{8}{3} \Rightarrow y=\frac{4}{3}$: $(8/3, 4/3)$

Potentiellt max/min: $f(\frac{8}{3},\frac{4}{3}) = \frac{256}{27}e^{-4}$

Banken: $0, \frac{256}{27}e^{-4}, 4e^{-3}$

0 är min. $4e^{-3}$ är max

13.3 | Lagranges Metod

Frågeställning: Hur maximerar/minimerar jag en $f(x,y): \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ på ett område bestämt av
$g(x,y)=0$
$\quad\quad = C$ (nivåyta)

Tänk att vi parametriserar nivåkurvan $g(x,y)=C$ med hjälp av $x=x(t)$, $y=y(t)$. Vill max/minimera
$h(t)=f(x,y)=f(x(t),y(t))$

Hitta kritiska punkter till $h(t)$.
$$h'(t)=\frac{d}{dt}(h(t))=\frac{d}{dt}(f(x(t),y(t)))=\{\text{Kedje}\}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}=$$
$$\nabla f\cdot(x',y')=0$$

∇f ortogonal till (x',y') — tangentvektor till nivåytan $g(x,y)=C$

Normalen till tangentlinjen är också ortogonal till (x',y'). $\nabla g(x,y)$ i (a,b) är normal till tangentlinjen till nivåkurvan $g(x,y)=g(a,b)=C$.

$\nabla f(a,b)=\lambda_0\nabla g(a,b)$ om (a,b) motsvarar en kritiskpunkt till $h(t)$.
Detta gäller om $(x',y')\neq 0 \Leftrightarrow \nabla g\neq 0$

Sats

Antag att $f(x,y)$ har lokalt max/min på $g(x,y)=C$ i punkten (a,b) och att (a,b) ej är en ändpunkt, $\nabla g(a,b)\neq(0,0)$. Då finns λ_0 s.a. (a,b,λ_0) är en kritisk punkt till funktionen
$$L(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda g(x,y)$$

Om (a,b,λ) kritisk pkt till C: $\nabla L=\left(\frac{\partial L}{\partial x},\frac{\partial L}{\partial y},\frac{\partial L}{\partial \lambda}\right)=(0,0,0)$
$$\left(\frac{\partial L}{\partial x},\frac{\partial L}{\partial y}\right)=(0,0)\Leftrightarrow \nabla f+\lambda\nabla g=0$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda}=0\Leftrightarrow g=0$$

Ex Hitta kortaste avståndet mellan origo och kurvan som ges av $x^4y=16$.
Lagranges metod: Avståndet mellan en punkt (x,y) på $x^4y=16$ och origo: $f=(x^2+y^2)^{1/2}$
Bivillkor: $g(x,y)=x^4y=16$
Skriv om: $g(x,y)=x^4y-16=0$

Vi söker kr.pkt till $L(x,y,\lambda)=(x^2+y^2)^{1/2}+\lambda(x^4y-16)$

Trick: Om $(x^2+y^2)^{1/2}$ minst på en mängd D $\Leftrightarrow$ x^2+y^2 minst på en mängd D.
Istället: $L(x,y,\lambda)=x^2+y^2+\lambda(x^4y-16)$

Kr.Pkt: $\nabla L=(0,0,0)$
$\Leftrightarrow$
$$\begin{cases}\frac{\partial L}{\partial x}=2x+\lambda 4x^3y=0\\ \frac{\partial L}{\partial y}=2y+\lambda x^4=0\\ \frac{\partial L}{\partial \lambda}=x^4-16=0\end{cases}\Rightarrow \begin{array}{l}\lambda=-\frac{2x}{4x^3y}=\frac{-1}{2x^2y}\\ \lambda=-\frac{2y}{x^4}\end{array}$$

Här använder jag att $x\neq 0$ eftersom ekv 3 kräver det.

$$\frac{-1}{2x^2y}=\frac{-2y}{x^4}\Leftrightarrow x^2=4y^2 \Rightarrow x=\pm 2y.$$

Insättning i ekv 3 $\Rightarrow x^4y=16$, $x=\pm 2y \Rightarrow 2^4y^5=16$
$y^5=1 \Rightarrow y=1$

Lagrange föreslår: $(-2,1)$ eller $(2,1)$ är max/min till avståndet i origo.