Disclaimer: Det är inte säkert att något stämmer!

Avstånd mellan två punkter $P=(x_0, y_0, z_0)$ & $Q=(x_1, y_1, z_1)$: $d=\left((x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2+(z_1-z_0)^2\right)^{1/2}$

Partiklar, kurvor, osv. Givet $\vec{r}(t)$ bestäm hastigheten generellt, samt i en given punkt, accelerationen samt kurvans längd.

Hastigheten: $\frac{d}{dt}\vec{r}(t)$, sätt in punkt om given.
Accelerationen: $\frac{d}{dt}\vec{v}(t)$ — 〃 —
Fart: $|\vec{v}(t)| = v = \sqrt{(V_x)^2+(V_y)^2+\ldots}$
Längd: $s(t) = \int_a^b \left(\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\ldots\right)^{1/2} dt$

Parametrisera en kurva: Här kan det ofta handla om att känna igen saker.
Ex: $x^2+2x=8-y^2$ kan skrivas om som $(x+1)^2+y^2=3^2$ mha kvadratkomplettering och sen ska man inse att det är en cirkel med radie 3 och parametrisera det som: $x=3\cos(t)-1$
$y=3\sin(t)$

Annars kan en uppgift vara att bestäma skärningskurvan mellan två saker.
Ex: $x+y=1$ & $z=x^2+y^2$
Här chansar man och sätter $x=t \Rightarrow y=1-t \Rightarrow z=t^2+(1-t)^2$
Vilket inte var så blodigt ändå. Vi får $\vec{r}(t)=t\hat{\imath}+(1-t)\hat{\jmath}+(2t^2-2t+1)\hat{k}$
Om en tangentvektor efterfrågas menas $T=(x'(t), y'(t), \ldots)$ och om den ska vara av enhetslängd ges den av $\frac{T}{\|T\|}=\hat{T}$.

Kritiska punkter

För att hitta och klassificera alla kritiska punkter till $f(x,y)$ beräknar vi $\nabla f=0$. Lös ekvationssystemet $\begin{cases} f_1=0 \\ f_2=0 \end{cases}$ för att finna x och y. Nu har du förhoppningsvis dina punkter.
Beräkna nu $f_{11}, f_{12}, f_{21}, f_{22}$ och sätt in dem i din hessianmatris
$H=\begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix}$
Stoppa in dina punkter, en i taget, och beräkna B^2-AC.
Då gäller: $B^2-AC<0$, $A>0 \Rightarrow$ lokalt min
— 〃 — $A<0 \Rightarrow$ lokalt max
$B^2-AC>0 \Rightarrow$ Sadelpunkt
$B^2-AC=0 \Rightarrow$ ingen info

Taylorpolynom

Första ordningens taylorapproximation ges av:
$P_1(x,y)=f(a,b)+f_1(a,b)(x-a)+f_2(a,b)(y-b)$
eller
$P_1(a+h, b+k)=f(a,b)+f_1(a,b)h+f_2(a,b)k$

Andra ordningens taylorapproximation ges av:
$P_2(x,y)=f(a,b)+f_1(a,b)(x-a)+f_2(a,b)(y-b)+\frac{1}{2}\left(f_{11}(a,b)(x-a)^2+2f_{12}(a,b)(x-a)(y-b)+f_{22}(a,b)(y-b)^2\right)$
$P_2(a+h, b+k)=f(a,b)+f_1(a,b)h+f_2(a,b)k+\frac{1}{2}\left(f_{11}(a,b)h^2+2f_{12}(a,b)hk+f_{22}(a,b)k^2\right)$

Tangentplan

Om tangentplanet till en funktionsyta söks ges $z=f(x,y)$ och någon $(a, b, f(a,b))$. Då finnes z gm:
$f_1(a,b)(x-a)+f_2(a,b)(y-b)-(z-f(a,b))=0$
Ges istället en nivåyta: $f(x,y,z)=C$ ges svaret av:
$\nabla f(a,b,c)\cdot(x-a, y-b, z-c)=0$

Riktningsderivata

Riktningsderivatan ges av $\nabla f \cdot \bar{u}$ där $\bar{u}$ är en riktningsvektor samt enhetsvektor.

Kedjeregeln

Visas enklast mha ett exempel
$\frac{\partial}{\partial s} f(x,y)$ där $f(x,y) = e^{xy}$, $x = s^2 t$, $y = \sin(s) t^2$
$\frac{\partial}{\partial s}(f(x,y)) = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} = y \cdot e^{xy} \cdot 2st + x e^{xy} \cdot 2t \cdot \cos(s)$
Facit brukar tycka att det är okej att svara i blandad form med x, y, s och t.

Största/Minsta Värde

Först behöver vi hitta ev kritiska punkter. Det har vi sett hur man gör ovan.
Om vi ombeds beräkna de största/minsta värdena som antas av f i ett kvadratiskt område $a \leqslant x \leqslant b$, $c \leqslant y \leqslant d$ tar vi först och kollar om vår punkt finns i området. Om så är fallet är denna en kandidat (lägg f(punkten) i banken).
Sen fixerar vi först x i $f(x,y)$ till a resp b. Vi kallar $f(a,y) = g(y)$. För att hitta max/min för g sätt $g'(y) = 0$ och det y-värde som ges är y-värdet i den punkten. g (det värdet) är ytterligare en kandidat.
Gör om för $f(b,y)$, $f(x,c)$, $f(x,d)$ och lägg samtliga i banken.
Jämför värdena för att hitta största resp minsta värdena.

Jacobimatris

Om vi har en funktion $f(x,y,z) = (u(x,y,z)\hat{i} + v(x,y,z)\hat{j} + w(x,y,z)\hat{k}$ och kallar de olika komponenterna u, v, w så är Jacobimatrisen $D_f = \begin{pmatrix} \nabla u \\ \nabla v \\ \nabla w \end{pmatrix}$.

Approximationsproblem

Bestäm ett approximativt värde för en funktion mha jacobimatrisen. Ex $f(1.1, 1.9) = f(1,2) + D_f(1,2)\begin{bmatrix} 0.1 \\ -0.1 \end{bmatrix}$

Lagrange

Given en funktion f med bivillkor g. Då söker vi lösningen till
$L(x, y, \ldots, \lambda) = f + \lambda g$
Derivera L map $x, y, \ldots, \lambda \Rightarrow L'_x, L'_y, \ldots, L'_\lambda$. Lös ekv.systemet för att hitta tänkbara punkter. Sätt in punkterna i f för att se största resp minsta värde.