Diskret Fouriertransform

En godtycklig icke-periodisk diskret signal $x[n]$ har fouriertransformen (DTFT) $X(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{j\Omega n}$.
$X(e^{j\Omega})$ är kontinuerlig och periodisk i Ω med 2π.
Syntesekv (invers DTFT) $x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} \underbrace{X(e^{j\Omega})}_{\text{Viktfunktion}} \underbrace{e^{j\Omega n}}_{\text{Bassignal}} d\Omega$

Periodiska med 2π.

Notera uppbyggnad av $x[n]$: Superposition av viktade bassignaler $e^{j\Omega n} = \cos(\Omega n) + j\sin(\Omega n)$.

Vid praktiska beräkningar
Signalen $x[n]$ måste ha begränsad längd. Dessutom är det önskvärt om transformen X också är diskret. En alternativ fourierrepresentation har därför utvecklats: DFT.

- DFT$\{x[n]\}$ är en diskret sekvens.
- DFT motsvarar samplade värden längs frekvensaxeln, av den kontinuerliga fouriertransformen DTFT, enligt: DTFT$\{x[n]\} = X(e^{j\Omega})$ i ett intervall om 2π. ($[0, 2\pi)$) där $\Omega = \Omega_k = \frac{2\pi}{N} \cdot k$, $k = 0, 1, \ldots, N-1$.
- Effektiva beräkningsalgoritmer för att beräkna DFT kallas Fast Fourier Transform (FFT).

DFT in action

Vi har tillgång till (eller väljer) L st värden (sampel) i vår signal. $x[n] = 0, 1, 2, \ldots, L-1$.
Signalens DTFT är $X(e^{j\Omega}) = \sum_{n=0}^{L-1} x[n]e^{j\Omega n}$. Det är en ändlig summa (nice!) men det är opraktiskt med "oändligt många" Ω-värden. Låt oss ta N st sampel av $X(e^{j\Omega})$ och göra beräkningar för $\Omega_k = \frac{2\pi}{N} \cdot k$, $k = 0, 1, 2, \ldots, N-1$.
Beteckna dessa "sampel" med $X[k] = X(e^{j\Omega})\Big|_{\Omega = \frac{2\pi}{N}k} = \sum_{n=0}^{L-1} x[n]e^{-j\frac{2\pi}{N} \cdot n \cdot k}$

Man kan visa att $x[n]$ kan återskapas ur $X[k]$ om $N \geq L$. Det är vanligt att låta $N = L$.
$x[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k]e^{j\frac{2\pi}{N}k \cdot n} \Rightarrow x[n] \xleftrightarrow{DFT} X[k]$

Notera uppbyggnaden av $x[n]$: Superposition av bassignaler $\phi_k[n] = e^{j(\frac{2\pi}{N}k)n}$ med viktfunktion $X[k]$.

Egenskaper $\phi_k[n]$

- $\phi_k[n+N] = e^{j\frac{2\pi}{N} \cdot k(n+N)} = e^{j\frac{2\pi}{N}k \cdot n} \cdot e^{j\frac{2\pi}{N}k \cdot N} = e^{j\frac{2\pi}{N} \cdot k \cdot n} \cdot 1 = e^{j\frac{2\pi}{N} \cdot kn}$ Periodisk i n med N.
- $\phi_{k+N}[n] = e^{j\frac{2\pi}{N}(k+N)n} = e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \cdot e^{j\frac{2\pi}{N}kN} = e^{j\frac{2\pi}{N}k \cdot n} \cdot 1 = e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$ Det finns bara N st unika bassignaler $\phi_k[n]$.