15.4 | Integrering längs vektorfält

$\int_C F\cdot dr \begin{cases} C - \text{kurva i } \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3 \\ F \text{ vektorfält} \end{cases}$

Räkna ut genom att parametrisera kurvan: $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $dr = (dx\,dy\,dz) = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right)dt$
Det är dock inte alltid det räcker med en parametrisering.

Ex Beräkna kurvintegralen längs vektorfältet: $F(x,y) = (2x+y, x)$ mellan $(0,0)$ & $(1,1)$ längs två olika kurvor: $y=x$ och $y=x^2$

1) $y = x \Rightarrow \int_C F\cdot dr = \int_C (2x+y)\,dx + x\,dy = \begin{Bmatrix} \text{Parametrisera som} \\ y=x=t,\ 0\le t\le 1 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} x=t, & dx = \frac{dx}{dt}\cdot dt = dt & F_1 = 2x+y = 2t+t = 3t \\ y=t, & dy = \frac{dy}{dt}\cdot dt = dt & F_2 = x = t \end{Bmatrix} =$

$\int_C F\cdot dr = \int_0^1 3t\,dt + t\,dt = \int_0^1 4t\,dt = \left[\frac{4t^2}{2}\right]_0^1 = 2$

2) $y = x^2$

Param: $x = t$, $y = t^2$
$dx = \frac{dx}{dt}dt = dt$
$dy = \frac{dy}{dt}dt = 2t\,dt$

$\int_C 2x+y\,dx + x\,dy = \int_0^1 2t + t^2\,dt + t\cdot 2t\,dt = \int_0^1 3t^2 + 2t\,dt = \left[\frac{3t^3}{3} + \frac{2t^2}{2}\right]_0^1 = 2$ (Samma svar)

Ex Samma kurvor men $F(x,y) = (-y, x)$

1) $x = y = t$
$\int_C F\cdot dr = \int -y\,dx + x\,dy = \int_0^1 -t\,dt + t\,dt = 0$

2) $x = t$, $y = t^2$
$\int_C F\cdot dr = \int -y\,dx + x\,dy = \int_0^1 -t^2\,dt + t\cdot 2t\,dt = \int_0^1 t^2\,dt = \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$ (ej samma)

Fältet $F(x,y) = (2x+y, x)$ är konservativt. $\phi = x^2 + xy$
$F(x,y) = (-y, x)$ är inte konservativt.

Dessutom: Jfr konservativa fältet så är en potential $\phi = x^2 + xy + C$ & $\phi(1,1) - \phi(0,0) = W$
$W \equiv$ det uträttade arbetet.

Om F är konservativt $\Rightarrow \int_C F\cdot dr$ oberoende av väg mellan ändpunkterna, utan bara punkterna i sig. $\phi(P_2) - \phi(P_1)$

Def
Ett område $U \subseteq \mathbb{R}^2 \parallel \mathbb{R}^3$ är sammanhängande om varje par av punkter i U kan sammanbindas med en kurva.

Def
Ett område $U \subseteq \mathbb{R}^2 \parallel \mathbb{R}^3$ är enkelt sammanhängande om varje enkelt sluten kurva kontinuerligt kan krympas ihop till en punkt.

Ex
$\mathbb{R}^2$ är sammanhängande men $\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$ är ej enkelt sammanhängande.

Russele Crowe's sats
Om U är enkelt sammanhängande och derivatatesterna för konservativa vektorfält går igenom så är fältet konservativt!

Ex $F = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$, $F: \mathbb{R}^2 \setminus 0 \to \mathbb{R}$

Kolla: $\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial x} \rightsquigarrow$ Vi vill att potential blir $\phi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$

$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{-y}{x^2+y^2}$, $\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2}$

ϕ är ej överallt definierad, detta säger något om vinkeln.

Sats

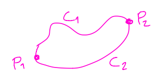
Följande 3 påståenden är ekvivalenta:

1) F är konservativt.
2) $\int_C F \cdot dr = 0$ om C är en sluten kurva.
3) $\int_C F \cdot dr$ beror bara på ändpunkterna till C.

Bevis

2 och 3 är ekvivalenta.

$\int_{C_1} F \cdot dr = \int_{C_2} F \cdot dr \Leftrightarrow \int_{C_2} F \cdot dr - \int_{C_1} F \cdot dr = \int_{C_2 - C_1} F \cdot dr = 0$ där



1) $\Rightarrow$ 3)

$F = \nabla \phi$, $\int_C F \cdot dr = \int_C \nabla \phi \cdot \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right) dt = \int \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}, \frac{\partial \phi}{\partial z}\right) \cdot \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right) dt = \int_C \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial \phi}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial \phi}{\partial z}\frac{dz}{dt}\right) dt = \int_{P_1}^{P_2} \frac{d\phi}{dt}\, dt = \phi(P_2) - \phi(P_1)$

3) $\Rightarrow$ 1)

Om $F = \nabla \phi$ och $\int_{P_1 \sim P_2} \nabla \phi \, dr = \phi(P_2) - \phi(P_1)$.

Enligt 3) kan vi definiera $\phi P_2 - \phi P_1 = \int_{P_1}^{P_2} F \cdot dr$ och vi kan anta att $\phi P_1 = 0$, $\phi P_2 = \int_{P_1}^{P_2} F \cdot dr$, man kan kolla att

$\nabla_{P_2} \int_{P_1}^{P_2} F \cdot dr = F \Rightarrow \phi \nabla = F$

Understryka att ϕ s.a. $F = \nabla \phi$ är en prim funk till F.

Ex Bestäm a & b s.a. $F = (axy + z, x^2, bx - 2z)$ är konservativt & beräkna integralen mellan två punkter på en kurva som går mellan punkterna $(0,1,0)$ & $(2,3,4)$.

Derivata test: $\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial y}$ & $\frac{\partial F_3}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial z}$

$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial F_1}{\partial y} = ax \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} = 2x \end{array}\right\} a = 2$ $\quad \left.\begin{array}{l} \frac{\partial F_3}{\partial x} = b \\ \frac{\partial F_1}{\partial z} = 1 \end{array}\right\} b = 1$ $\Rightarrow$ Om F kons $a = 2$, $b = 1 \Rightarrow F = (2xy + z, x^2, x + 2z)$

Hitta potential: Vi söker $\phi(x,y,z)$ s.a. $\overset{1)}{\frac{\partial \phi}{\partial x} = 2xy + z}$, $\overset{2)}{\frac{\partial \phi}{\partial y} = x^2}$, $\overset{3)}{\frac{\partial \phi}{\partial z} = x + 2z}$

Integrera alla elv & stryk dubletter

$\left.\begin{array}{lll} \text{1) Integrera } 2xy + z \text{ map } x & \Rightarrow & \frac{x^2}{2} y + zx + C \\ \text{2) Integrera } x^2 \text{ map } y & \Rightarrow & \cancel{x^2 y + C} \\ \text{3) Int } x + 2z \text{ map } z & \Rightarrow & \cancel{xz} + z^2 + C \end{array}\right\} \phi = x^2 y + zx + z^2$

Sanity check!

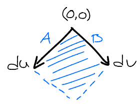
Derivera ϕ map x, y, z...

$\int_C F \cdot dr = \phi(2,3,4) - \phi(0,1,0) = 40$

15.5) Ytintegraler

I envariabel integrerar man ofta längs en rak linje $\overset{\int_a^b f\,dx}{a \longmapsto b}$ i flervarr är vi coolare och integrerar kurvor i rymden eller planet. Vi har även integrerat områden i $\mathbb{R}^2$.
Vi vill beräkna $\iint_R f\,dS$ där R är en yta i $\mathbb{R}^3$. Genom att parametrisera ytan: $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$, $z = z(u,v)$ kan vi göra sånt coolt!

Frågan vi alla ställer oss är hur kan vi uttrycka dS på ett bättre sätt? $dS = \boxed{}\,du\,dv = \boxed{}\,dA$



Ytan är ~rektangel uppspänd av $\frac{r(du) - r(0)}{du}$ & $\frac{r(dv) - r(0)}{dv}$

Gör du & dv små: $\frac{\partial r}{\partial u}\ \frac{\partial r}{\partial v}$, vad är nu arean av den uppspända rektangeln?
Jo, $|A \times B| = dS = \left|\frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v}\right| du\,dv$ om $du\,dv \to 0$

$$\left|\frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v}\right| = \mathrm{abs}\left(\det\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix}\right) = \mathrm{abs}\left(\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v},\ -\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}\right),\ \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}\right)$$

Notera!
Kryssprodukten $= \left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}, \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}, \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)$
$\mathrm{abs}(\nearrow) \Rightarrow dS = \left(\left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)^2\right)^{1/2} \cdot du\,dv$

Specialfall

$x = u$, $y = v$, $z = f(x,y) \Rightarrow \frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v} = (-f_{u_1}, -f_{v_1}, 1)$
$\frac{\partial r}{\partial v} \times \frac{\partial r}{\partial u} = (f_{u_1}, f_{v_1}, -1)$