Design av PID-regulatorer

P-regulator: $F(s) = K_p$ (höj eller sänk amplitud, påverkar inte argument/fas)

PI-regulator: $F(s) = K_p + \frac{K_i}{s}$ (Ändra amp med K_p/K_i, sänk fasen med $\frac{K_i}{s}$, $\arg = -90°$)

$K_p\left(1+\frac{1}{T_i \cdot s}\right) = K_p + \frac{K_p}{T_i \cdot s}$ K_i

$F_{lag} = K_p\, a \frac{1+sT}{1+asT}$, $a>1$ om $a \to \infty \Rightarrow F_{lag} = K_p + \frac{K_i}{s}$

PD-regulator: $F(s) = K_p + K_d \cdot s$ (Vrider fasen med $\arg = 90°$. Det är jobbigt med derivator så vi lägger till ett filter.)

$F(s) = K_p + \frac{K_d \cdot s}{1+T_f \cdot s}$

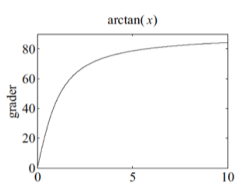
$F_{lead} = K_p \frac{1+sT_d}{1+sT_d\frac{1}{b}}$, $b>1$ $b \to \infty \Rightarrow$ ideal PD-reg.

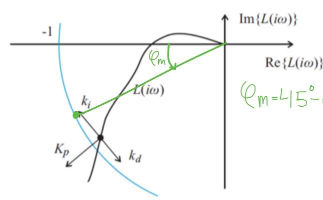
PID-regulator: $F(s) = K_p + \frac{K_i}{s} + K_d \cdot s = K_p\left(1 + \frac{1}{T_i \cdot s} + T_d \cdot s\right) = K_p \cdot \frac{a(1+sT_i)}{1+asT_i} \cdot \frac{1+T_d s}{1+T_d s\frac{1}{b}}$

Hur påverkar tuningen?

$$F(s) = K_p\left(1+\frac{1}{sT_i}+sT_D\right) = K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s$$
$$= K_p\left(1+\frac{k_i}{s}+k_d s\right) = K_p\left(\frac{s+k_i+k_d s^2}{s}\right)$$

$$\arg L(j\omega) = \arg G(j\omega) - \arg j\omega + \arg(j\omega + k_i - k_d\omega^2)$$
$$= \arg G(j\omega) - 90° + \arctan\left(\frac{\omega}{k_i - k_d\omega^2}\right)$$





$\varphi_m = 45° - 60°$ är eftersträvansvärt

Flytta punkt i Nyquist-/Bodediagram

En vanlig teknik att dimensionera PID-regulatorer är att specificera en punkt på kretsöverföringens frekvenskurva. På detta sätt kan 2 parametrar bestämmas i regulatorn:

1. Specificera en punkt för kretsöverföringen, $L(i\omega_0)$
2. Bestäm parametrarna i regulatorn genom villkoren

$$|F(i\omega_0)| = |L(i\omega_0)|/|G(i\omega_0)|$$
$$\arg F(i\omega_0) = \arg L(i\omega_0) - \arg G(i\omega_0)$$

Ett exempel på detta är att specificera fasmarginal φ_m och skärfrekvens ω_c. OBS! Det finns flera olika varianter av detta, men "grundreceptet" är detsamma enl ovan!

PI-design

PI-regulatorn ges av

$$F(s) = K_p \frac{1 + T_i s}{T_i s}$$

- Specifikation av ω_c och φ_m (Ruta 8.1 i boken):

$$|L(i\omega_c)| = |G(i\omega_c)| K_p \frac{\sqrt{1+\omega_c^2 T_i^2}}{\omega_c T_i} = 1$$

$$\arg L(i\omega_c) = \arg G(i\omega_c) - 90^o + \arctan(\omega_c T_i) = -180^o + \varphi_m$$

- Specifikation av ω_π och A_m ger i princip samma som ovan:

$$|L(j\omega_\pi) = |G(i\omega_\pi)| K_p \frac{\sqrt{1+\omega_\pi^2 T_i^2}}{\omega_\pi T_i} = 1/A_m$$

$$\arg L(j\omega_\pi) = \arg G(j\omega_\pi) - 90^o + \arctan(\omega_\pi T_i) = -180^o$$

PD-design

En PD-regulator ges av

$$F(s) = K_p(1 + \frac{sT_d}{1+sT_f}) = K_p \frac{1 + s(T_d + T_f)}{1 + sT_f} = K_p \frac{1 + \tau_d s}{1 + \tau_d s / b}, \quad b > 1$$

Anta att ω_c och φ_m är specificerade (Ruta 8.3 i boken):

1. Bestäm behovet av faslyft vid skärfrekvensen:

$$\varphi_{max} = \varphi_m - (\arg G(i\omega_c) + 180^o)$$

$$b = \frac{1 + \sin\varphi_{max}}{1 - \sin\varphi_{max}}$$

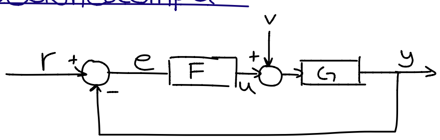
2. Placera maximalt faslyft vid $\omega = \omega_c$:

$$\sqrt{b}/\tau_d = \omega_c$$

3. Bestäm K_p så att ω_c blir det önskade:

$$|L(j\omega_c)| = K_p\sqrt{b}|G(j\omega_c)| = 1$$

Designexempel



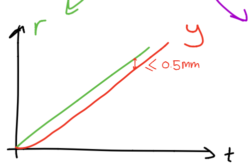
$$G(s) = \frac{3 \cdot 10^4}{s(s^2 + 150s + 10^4)}$$

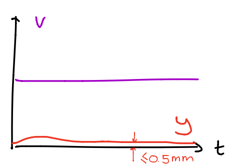
Krav

Rampfel ≤ 0.5 mm vid insignalsramp 30 mm/s.

Positionsfel ≤ 0.5 mm vid stegstörning på 15 enheter

Fasmarginal $\varphi_m \geq 45^o$





Vi har integralverkan i G så vi provar med att köra en hederlig P-reg. De två graferna visar att vi vill ha ett litet kvarstående fel och detta borde kunna ordnas med systemets i-verkan.

① P-regulator

ramp $= \frac{r_0}{s^2} = \frac{30}{s^2}$

1) $\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} s \cdot S(s)R(s) = \lim_{s\to 0} s \frac{1}{1+\frac{3K_p}{s(\dots)}} \cdot \frac{30}{s^2} = \lim_{s\to 0} \frac{s \cdot s(1+0.0015s+\dots)}{s(1+\dots)+3K_p} \cdot \frac{30}{s^2} = \frac{30}{3K_p} = \frac{10}{K_p} \leq 0.5$

$\Rightarrow K_p \geq 20$

2) $\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sY(s) = \lim_{s\to 0} s \cdot \frac{G(s)}{1+K_pG(s)} \cdot V(s) = \lim_{s\to 0} s \frac{\left(\frac{3}{s(1+\dots)}\right)}{1+\frac{3K_p}{s(1+\dots)}} \cdot \frac{15}{s} = \lim_{s\to 0} \frac{3 \cdot 15}{s(1+\dots)+3K_p} = \frac{15}{K_p} \leq 0.5 \Rightarrow K_p \geq 30$

$V(s) = \frac{15}{s}$

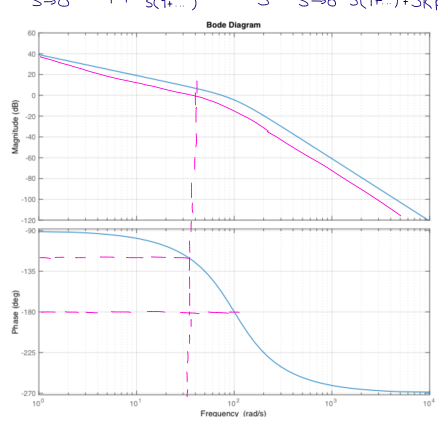
3) $\varphi_m \geq 45^o$

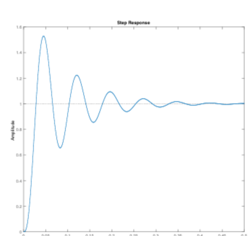
$\varphi_m = 180^o + \arg\{L(i\omega)\} =$

$180^o + \arg\{F(i\omega_c)\} + \arg\{G(i\omega_c)\} =$

$\arg\{F(i\omega_c)\} = 0$ ty P-reg

$180^o + \arg\{G(i\omega_c)\}$





Bode visar att fasmarginalen $\varphi_m = 25^o$

Uppfyller ej specen!

② Nytt försök, sänk K_p för att få en bra φ_m.

$\varphi_m = 55°$ (lägg till marginal för I-verkan [10°])

Detta ger $\omega_c = 40 \frac{rad}{s} \Rightarrow K_p = \frac{30}{2.1} \approx 14$ men då klarar vi inte specen ändå.

Skillnad i dB mellan kurvorna

③ Höj förstärkningen för små ω.

$F_{lag}(s) = \frac{a(1+sT)}{1+asT}$

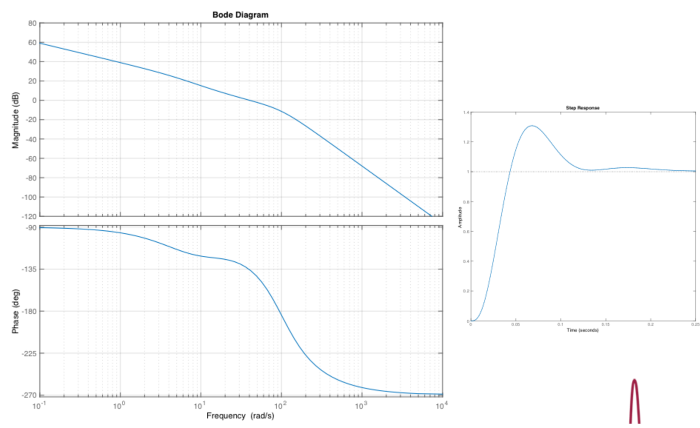
Lågfrekvensförstärkningen för $F_{lag}(0) = a$ välj a så att $K_p \cdot a = 30$ $(a = 2.1)$

$\arg\{F_{lag}(j\omega_c)\} = \tan^{-1}(\omega_c T) - \tan^{-1}(a\omega_c T) = -10°$ ← vår marginal

$T = 0.075$

$F(s) = 30\left(\frac{1+0.075s}{1+2.1 \cdot 0.075s}\right)$

Lag-filter + Process



Lag + Lead + Process

Vi kan snabba upp systemet ännu mer!