15.4 | Integrering längs vektorfält

$\int_C F \cdot dr \begin{cases} C - \text{kurva i } \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3 \\ F \quad \text{vektorfält} \end{cases}$

Räkna ut genom att parametrisera kurvan: $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $dr = (dx\,dy\,dz) = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right) dt$

Det är dock inte alltid det räcker med en parametrisering.

Ex Beräkna kurvintegralen längs vektorfältet: $F(x,y) = (2x+y, x)$ mellan $(0,0)$ & $(1,1)$ längs två olika kurvor: $y = x$ och $y = x^2$

1) $y = x \Rightarrow \int_C F \cdot dr = \int_C (2x+y)\,dx + x\,dy = \begin{Bmatrix} \text{Parametrisera som} \\ y = x = t,\ 0 \le t \le 1 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} x = t, & dx = \frac{dx}{dt} \cdot dt = dt & F_1 = 2x + y = 2t + t = 3t \\ y = t, & dy = \frac{dy}{dt} \cdot dt = dt & F_2 = x = t \end{Bmatrix} =$

$\int_C F \cdot dr = \int_0^1 3t\,dt + t\,dt = \int_0^1 4t\,dt = \left[\frac{4t^2}{2}\right]_0^1 = 2$

2) $y = x^2$

Param: $x = t$, $y = t^2$

$dx = \frac{dx}{dt} dt = dt$

$dy = \frac{dy}{dt} dt = 2t\,dt$

$\int_C 2x + y\,dx + x\,dy = \int_0^1 2t + t^2 dt + t \cdot 2t\,dt = \int_0^1 3t^2 + 2t\,dt = \left[\frac{3t^3}{3} + \frac{2t^2}{2}\right]_0^1 = 2$ (samma svar)

Ex Samma kurvor men $F(x,y) = (-y, x)$

1) $x = y = t$

$\int_C F \cdot dr = \int -y\,dx + x\,dy = \int_0^1 -t\,dt + t\,dt = 0$

2) $x = t$, $y = t^2$

$\int_C F \cdot dr = \int -y\,dx + x\,dy = \int_0^1 -t^2 dt + t \cdot 2t\,dt = \int_0^1 t^2 dt = \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$ (ej samma)

Fältet $F(x,y) = (2x+y, x)$ är konservativt.

$F(x,y) = (-y, x)$ är inte konservativt.

Dessutom: Jfr konservativa fältet så är en potential $\phi = x^2 + xy + C$ & $\phi(1,1) - \phi(0,0) = W$

$W \equiv$ det uträttade arbetet.

Om F är konservativt $\Rightarrow \int_C F \cdot dr$ oberoende av väg mellan ändpunkterna, utan bara punkterna i sig. $\phi(P_2) - \phi(P_1)$

Def

Ett område $U \subseteq \mathbb{R}^2 \,\|\, \mathbb{R}^3$ är sammanhängande om varje par av punkter i U kan sammanbindas med en kurva.

Def

Ett område $U \subseteq \mathbb{R}^2 \,\|\, \mathbb{R}^3$ är enkelt sammanhängande om varje enkelt sluten kurva kontinuerligt kan krympas ihop till en punkt.

Ex

$\mathbb{R}^2$ är sammanhängande men $\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$ är ej enkelt sammanhängande.

Russel Crow's sats

Om U är enkelt sammanhängande och derivatatesterna för konservativa vektorfält går igenom så är fältet konservativt!

Ex $F=\left(\frac{-y}{x^2+y^2},\frac{x}{x^2+y^2}\right)$, $F: \mathbb{R}^2\setminus 0 \to \mathbb{R}$

Kolla: $\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{\partial F}{\partial x}$ $\rightsquigarrow$ Vi vill att potential blir $\phi=\arctan\left(\frac{y}{x}\right)$

$\frac{\partial \phi}{\partial x}=\frac{-y}{x^2+y^2}$, $\frac{\partial \phi}{\partial y}=\frac{x}{x^2+y^2}$

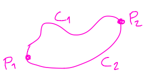
ϕ är ej överallt definierad, detta säger något om vinkeln.

Sats

Följande 3 påståenden är ekvivalenta:
1) F är konservativt.
2) $\int_C F\cdot dr=0$ om C är en sluten kurva.
3) $\int_C F\cdot dr$ beror bara på ändpunkterna till C.

Bevis

2 och 3 är ekvivalenta.

$\int_{C_1} F\cdot dr=\int_{C_2} F\cdot dr \iff \int_{C_2} F\cdot dr-\int_{C_1} F\cdot dr=\int_{C_2-C_1} F\cdot dr=0$ där 

1) => 3)

$F=\nabla\phi$, $\int_C F\cdot dr=\int_C \nabla\phi\cdot\left(\frac{dx}{dt},\frac{dy}{dt},\frac{dz}{dt}\right)dt=\int\left(\frac{\partial\phi}{\partial x},\frac{\partial\phi}{\partial y},\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)\cdot\left(\frac{dx}{dt},\frac{dy}{dt},\frac{dz}{dt}\right)dt=\int_C\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial\phi}{\partial z}\frac{dz}{dt}\right)dt=\int_{P_1}^{P_2}\frac{d\phi}{dt}\,dt=\phi(P_2)-\phi(P_1)$

3) => 1)

Om $F=\nabla\phi$ och $\int_{P_1\sim P_2}\nabla\phi\, dr=\phi(P_2)-\phi(P_1)$.

Enligt 3) kan vi definiera $\phi P_2-\phi P_1=\int_{P_1}^{P_2}F\cdot dr$ och vi kan anta att $\phi P_1=0$, $\phi P_2=\int_{P_1}^{P_2}F\cdot dr$, man kan kolla att

$\nabla_{P_2}\int_{P_1}^{P_2}F\cdot dr=F \Rightarrow \phi\nabla=F$

Understryka att ϕ s.a. $F=\nabla\phi$ <u>är</u> en prim funk till F.

Ex Bestäm a & b s.a. $F=(axy+z, x^2, bx-2z)$ är konservativt & beräkna integralen mellan två punkter på en kurva som går mellan punkterna $(0,1,0)$ & $(2,3,4)$.

Derivata test: $\frac{\partial F_2}{\partial x}=\frac{\partial F_1}{\partial y}$ & $\frac{\partial F_3}{\partial x}=\frac{\partial F_1}{\partial z}$

$\left.\begin{array}{l}\frac{\partial F_1}{\partial y}=ax\\ \frac{\partial F_2}{\partial x}=2x\end{array}\right\}a=2$ $\quad\left.\begin{array}{l}\frac{\partial F_3}{\partial x}=b\\ \frac{\partial F_1}{\partial z}=1\end{array}\right\}b=1$ $\Rightarrow$ Om F kons $a=2$, $b=1 \Rightarrow F=(2xy+z, x^2, x+2z)$

Hitta potential: Vi söker $\phi(x,y,z)$ s.a. $\overset{1)}{\frac{\partial\phi}{\partial x}=2xy+z}$, $\overset{2)}{\frac{\partial\phi}{\partial y}=x^2}$, $\overset{3)}{\frac{\partial\phi}{\partial z}=x+2z}$

Integrera alla elv & stryk dubbletter

$\left.\begin{array}{ll}
1)\ \text{Integrera } 2xy+z \text{ map } x & \Rightarrow \frac{x^2}{2}y+zx+C\\
2)\ \text{Integrera } x^2 \text{ map } y & \Rightarrow \cancel{x^2y+C}\\
3)\ \text{Int } x+2z \text{ map } z & \Rightarrow \cancel{xz}+z^2+C
\end{array}\right\}\phi=x^2y+zx+z^2$

Sanity check!

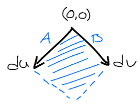
Derivera ϕ map x, y, z...

$\int_C F\cdot dr=\phi(2,3,4)-\phi(0,1,0)=40$

15.5) Ytintegraler

I envariabel integrerar man ofta längs en rak linje $\overset{\int_a^b f\,dx}{a \vdash\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!\dashv b}$ i flervarr är vi coolare och integrerar kurvor i rymden eller planet. Vi har även integrerat områden i $\mathbb{R}^2$. [Text]
Vi vill beräkna $\iint_R f\,dS$ där R är en yta. Genom att parametrisera ytan: $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$, $z = z(u,v)$ kan vi göra sånt coolt!

Frågan vi alla ställer oss är hur kan vi uttrycka dS på ett bättre sätt? $dS = \square\, du\,dv = \square\, dA$



Ytan är ~rektangel uppspänd av $\frac{r(du) - r(0)}{du}$ & $\frac{r(dv) - r(0)}{dv}$

Gör du & dv små: $\frac{\partial r}{\partial u}$ $\frac{\partial r}{\partial v}$, Vad är nu arean av den uppspända rektangeln?
Jo, $|A \times B| = dS = \left|\frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v}\right| du\,dv$ om $du\,dv \to 0$

$$\left|\frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v}\right| = \mathrm{abs}\left(\det\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix}\right) = \mathrm{abs}\left(\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v},\ -\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}\right),\ \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}\right)$$

Notera!
Kryssprodukten $= \left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}, \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}, \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)$
$\mathrm{abs}(\nearrow) \Rightarrow dS = \left(\left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)^2\right)^{1/2} \cdot du\,dv$

Specialfall

$x = u$, $y = v$, $z = f(x,y) \Rightarrow$ $\frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v} = (-f_{u_1}, -f_{v_1}, 1)$
$\frac{\partial r}{\partial v} \times \frac{\partial r}{\partial u} = (f_{u_1}, f_{v_1}, -1)$