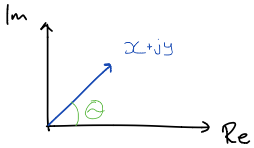
Komplexa tal

$Z = x + jy$, $x, y \in \mathbb{R}$, $j^2 = -1$



$$x + jy = r(\underbrace{\cos\Theta + j\sin\Theta}_{e^{j\Theta}}) \sim \begin{cases} r = (x^2+y^2)^{1/2} \\ \tan\Theta = \frac{y}{x} \end{cases}$$

Polärform

Additionsformel: $e^{j(\Theta+\Phi)} = e^{j\Theta} \cdot e^{j\Phi}$ för alla Θ och Φ

Trigonometriska ettan: $|z| = r = (x^2+y^2)^{1/2}$

$|e^{j\Theta}| = 1$ för alla Θ $\quad |e^{j\Theta}| = |\cos\Theta + j\sin\Theta| = (\cos^2\Theta + \sin^2\Theta)^{1/2} = 1$

Konjugat: $\bar{Z} = x - jy$

$z \cdot \bar{z} = |z^2| = r^2 > 0$

Serier

$a_0, a_1, a_2, \dots$ komplexa tal

$\sum_{k=0}^{N} a_k = a_0 + a_1 + \dots + a_N$

Vad betyder det att en summa konvergerar?

$S_N = \sum_{k=0}^{N-1} a_k$

$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \lim_{N \to \infty} S_N$ (om det hela konvergerar) och vi kallar det summan av $a_0, a_1, a_2, \dots$

Geometriska serier

$a_k = b^k$, för ngt komplext tal b

$S_N = \sum_{k=0}^{N-1} b^k \qquad bS_N = \sum_{k=0}^{N-1} b^{k+1} = \sum_{k=1}^{N} b^k = S_N - 1 + b^N \Rightarrow S_n(1-b) = 1 - b^N \Rightarrow S_N = \frac{1-b^N}{1-b}$

Vad händer om $|b| < 1$?, $S_N = \sum_{k=0}^{N-1} b^k = \frac{1-b^N}{1-b} \longrightarrow \frac{1}{1-b}$, $N \to \infty \quad \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} b^k = \frac{1}{1-b}$

Harmoniska serier

$\alpha \in \mathbb{R}$ & $\alpha > 0$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} = \begin{cases} \text{existerar om } \alpha > 1 \\ = +\infty \text{ om } \alpha \leq 1 \end{cases}$$

Partialbråk

Kan vi skriva bråket $\frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2}$ för några A, B?

1. $\frac{A(x-2) + B(x-1)}{(x-1)(x-2)} = \frac{1}{(x-1)(x-2)}$

$x(\underbrace{A+B}_{=0}) \underbrace{-2A-B}_{=1} = 1$

$$\left.\begin{cases} A + B = 0 \\ -2A - B = 1 \end{cases} \Rightarrow A = -B \Rightarrow -2(-B) - B = 1 \Rightarrow 2B - B = 1 \Rightarrow B = 1 \right\} \Rightarrow -2A - 1 = 1 \Rightarrow -2A = 2 \Rightarrow A = -1$$

Svar: $\frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{-1}{x-1} + \frac{1}{x-2}$

2. (Handpåläggning)

Multiplicera bägge led med nämnaren i $\frac{A}{(x+n)}$.
Sätt in x så $(x+n) = 0$. Detta ger A.
Gör om för B.

Periodiska Signaler

En signal är en funktion $x: \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ Tidsdiskret

$$n \longmapsto x[n]$$

$x: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ Tidskontinuerlig

x är N-periodisk om $x[n+N] = x[n]$ för alla n. och $N \neq 0$

En tråkig sådan är $x[n] = 1$ för alla n.

En roligare: $x[n] = e^{2\pi j \frac{n}{N}}$, N fixt heltal

$$x[n+N] = e^{2\pi \frac{(n+N)}{N}} = e^{2\pi j \frac{n}{N}} \cdot e^{2\pi j \frac{N}{N}} = e^{2\pi j} \cdot x[n] = x[n]$$

Övning

2.8 b)

$x[n] = e^{j5n}$ (Periodisk för något N?)

$$x[n+N] = e^{j5(n+N)} = e^{j5n} \cdot e^{j5N} \overset{?}{=} x[n] = e^{j5n} \text{ för alla } n?$$

Periodisk innebär att $e^{j5N} = 1$. När gäller det att $e^{j\Theta} = 1$?

$$e^{j\Theta} = (\cos\Theta + \underbrace{j\sin\Theta}_{=0}) \qquad \begin{cases} \sin\Theta = 0 \iff \Theta = a\pi & a \in \mathbb{Z} \\ \cos\Theta = 1 \iff \Theta = 2\pi b & b \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Stämmer om π är rationellt.

Summa summarum: $5N = 2\pi b \iff \pi = \frac{5N}{2b}$

Pi är inte rationellt. $\Rightarrow$ Det finns inget N som gör x periodisk.

Om det varit en tidskontinuerlig signal. $x: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$

$$t \longmapsto x(t)$$

x är T-periodisk om $x(t+T) = x(t)$ för alla reella t.

2.8b')

$x(t) = e^{j5T}$ (T-periodisk?)

$T \in \mathbb{R} \Rightarrow$ det funkar

$$x(t+T) = e^{j5(t+T)} = e^{j5t} \cdot e^{j5T} = x(t) = e^{j5t} \Rightarrow e^{j5T} = 1 \Rightarrow 5T = 2\pi b,\ b \in \mathbb{Z} \Rightarrow T = \frac{2\pi b}{5}$$

Fundamentalperiod

2.8d)

$x[n] = e^{j0.3\frac{n}{\pi}}$ (Periodisk?)

$$x[n+N] = e^{j0.3\frac{(n+N)}{\pi}} = e^{j0.3\frac{n}{\pi}} \cdot e^{j0.3\frac{N}{\pi}} = x[n] = e^{j0.3\frac{n}{\pi}} \Rightarrow e^{j0.3\frac{N}{\pi}} = 1 \Rightarrow \frac{3N}{10\pi} = 2\pi b,\ b \in \mathbb{Z} \Rightarrow N = \frac{20\pi^2 b}{3}$$

π^2 är ej rationellt!