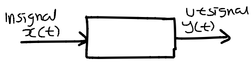
I kursen studerar vi LTI-system. Ett vanligt sätt att karakterisera ett system är att ange dess utsignal för en väl definierad insignal.



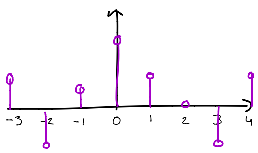
$x(t)$	$y(t)$
$\delta(t)$, enhetsimp	$h(t)$ impulssvar
$u(t)$, enhetssteg	$y_s(t)$ stegsvar
sinusformad	frekvenssvar

← Motsvarande gäller för ett diskret system.

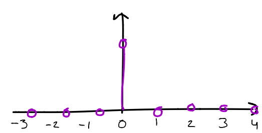
Samband mellan insignal, utsignal och ett LTI-system

Diskret fall

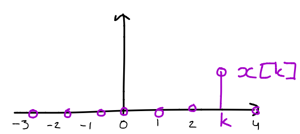
Antag att vi känner impulssvaret $h[n]$ till ett diskret LTI-system. $x[n]$ är en godtycklig diskret insignal.



Bilda $x[n]\delta[n] = x[0]\delta[n]$



Vidare bildar vi $x[n]\delta[n-k] = x[k]\delta[n-k]$



Tydligen kan vi teckna $x[n]$ som en summa av viktade och skiftade impulser.

$x[n] = \ldots + x[-2]\delta[n+2] + x[-1]\delta[n+1] + x[0]\delta[n] + \ldots = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]$

För ett LTI-system gäller:

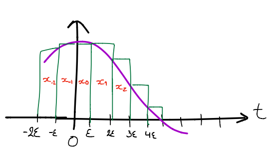
Insignal	Utsignal
$\delta[n]$	$h[n]$
$\delta[n-k]$	$h[n-k]$
$x[k]\delta[n-k]$	$x[k]h[n-k]$
$x[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]$	$y[n]=\underbrace{\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]}_{\text{Faltningssumma / Convolution sum}}$

Variabelsubstitution

Förenklat skrivsätt: $y[n] = x[n] * h[n] = h[n] * x[n]$

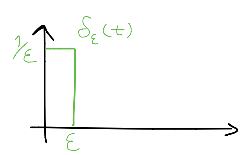
Kontinuerligt fall

Antag att vi känner impulssvaret $h(t)$ till ett kontinuerligt LTI-system. Låt $x(t)$ vara en godtycklig insignal.



Låt $\hat{x}(t)$ utgöra en approximation av $x(t)$ där $\hat{x}(t)$ är en summa av pulsen $, \ldots, x_{-1}, x_0, x_1, \ldots$

Vi definierar en enhetspuls som $\delta_\varepsilon(t) = \begin{cases} 1/\varepsilon, & 0 \le t < \varepsilon \\ 0, & \text{other} \end{cases}$



Våra pulser kan vi nu teckna som $x_{-1} = \delta_\varepsilon(t+\varepsilon)x(-\varepsilon)\varepsilon$ och $\hat{x}(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta_\varepsilon(t-k\cdot\varepsilon)x(k\cdot\varepsilon)\varepsilon$

$x_0 = \delta_\varepsilon(t)x(0)\varepsilon$

$x_1 = \delta_\varepsilon(t-\varepsilon)x(\varepsilon)\cdot\varepsilon$

$\vdots$

Låt $h_\varepsilon(t)$ vara systemets utsignal för insignalen $\delta_\varepsilon(t)$. För ett LTI-system gäller då

Insignal	Utsignal
$\delta_\varepsilon(t)$	$h_\varepsilon(t)$
$\delta_\varepsilon(t-k\varepsilon)$	$h_\varepsilon(t-k\varepsilon)$
$\delta_\varepsilon(t-k\varepsilon)\cdot\underbrace{x(k\varepsilon)\varepsilon}_{\text{Konst}}$	$h_\varepsilon(t-k\varepsilon)\cdot x(k\varepsilon)\varepsilon$
$\underbrace{\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta_\varepsilon(t-k\varepsilon)x(k\varepsilon)\varepsilon}_{\hat{x}(t)}$	$\underbrace{\sum_{k=-\infty}^{\infty} h_\varepsilon(t-k\varepsilon)x(k\varepsilon)\varepsilon}_{\hat{y}(t)}$

Låt $\varepsilon \to 0 \Rightarrow \delta_\varepsilon(t) \longrightarrow$ enhetsimpuls $= \delta(t)$

$h_\varepsilon(t) \to h(t)$

$k\varepsilon \longrightarrow \tau$, en kontinuerlig variabel

$\varepsilon \longrightarrow d\tau$

$\Sigma \longrightarrow \int$

$\hat{x}(t) \longrightarrow x(t)$

$\hat{y}(t) \longrightarrow y(t)$

Vi får $y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)x(\tau)d\tau$ Faltningsintegralen. Förkortas: $y(t) = h(t) * x(t) \overset{\text{Variabelsubstitution}}{=} x(t) * h(t)$

Systemegenskaper kopplade till impulssvaret

- Kausalt LTI-system

Diskret Fall: $h[k]=0,\ k<0$

$$y[n] = \sum_{k=0}^{\infty} h[k]x[n-k]$$

Kontinuerligt Fall: $h(t)=0,\ t<0$

$$y(t) = \int_{0}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau$$

- Stabilt LTI-system

Diskret Fall

Antag $|x[n]| \leq M_x < \infty,\ \forall n$ Begränsad input

$y[n] = \left|\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k]\right|$ $\{|a+b| \leq |a|+|b|\}$

$|y[n]| \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]x[n-k]|$ $\{|ab| \leq |a|\cdot|b|\}$

$|y[n]| \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]||x[n-k]|$

Men $|x[n]| \leq M_x$!

$y[n] \leq M_x \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]|$

För ett stabilt system måste utsignalen vara begränsad. $\Rightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty$ Impulssvaret ska vara absolut summerbart.

- Kontinuerligt

Visas på samma vis.

$\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)|d\tau < \infty$, absolutintegrerbart