Faltning med impuls

$$x(t) * \delta(t-t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-t_0-\tau)\,d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-t_0)\delta(t-t_0-\tau)\,d\tau = x(t-t_0)\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_0-\tau)\,d\tau}_{=1} = x(t-t_0)$$

Multiplikation i tidsdomän

Låt $x(t)$ vara periodisk med fourierserie $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{j\omega_k t}$ [med motsvarande fouriertransform] $X(j\omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k\,\delta(\omega-\omega_k)$

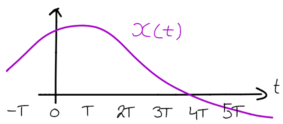
$g(t)$ en icke periodisk signal $g(t) \overset{FT}{\longleftrightarrow} G(j\omega)$ $\omega_k = k\omega_0$

Egenskap: $y(t) = g(t)x(t) \overset{FT}{\longleftrightarrow} Y(j\omega) = \frac{1}{2\pi} G(j\omega) * X(j\omega)$

$$Y(j\omega) = \frac{2\pi}{2\pi} G(j\omega) * \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k\,\delta(\omega-\omega_k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k\, G(j(\omega-\omega_k))$$

Sampling

En diskret signal skapas utifrån en kontinuerlig signal.



$g[n] = x(nT)$, en diskret representation av $x(t)$. Värden hos $x(t)$ läses av vid diskreta tidpunkter $t = nT$, $n \in \mathbb{Z}$

Kan vi återskapa $x(t)$ utifrån $g[n]$?

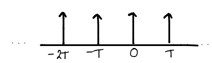
Modell för sampling (genomgående kontinuerliga signaler)

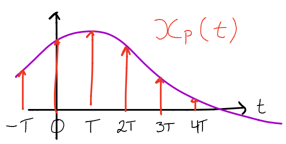
$x(t) \longrightarrow \otimes \longrightarrow x_p(t) = x(t)p(t)$

$\uparrow$

$p(t)$

$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT)$ "Ett impulståg"





$x(t)$ är kontinuerlig, $x_p(t) = x(t)p(t)$ är också kontinuerlig.

Vi vet att $x(t)\delta(t-nT) = \underbrace{x(nT)}_{\text{samplevärde}}\delta(t-nT)$. Vi får $x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\delta(t-nT)$

Multiplikation i tidsdomänen $x(t)p(t)$ ger faltning i frekvensdomänen.

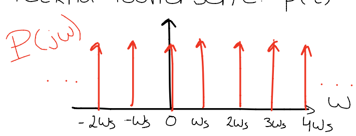
$X_p(j\omega) = \frac{1}{2\pi} X(j\omega) * P(j\omega)$, $x(t) \overset{FT}{\longleftrightarrow} X(j\omega)$

$p(t) \overset{FT}{\longleftrightarrow} P(j\omega)$

Impulståget $p(t)$ är periodisk med perioden T. Beräkna dess fourierseriekoeff. $C_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \delta(t) e^{-jk\omega_s t}\,dt = \frac{1}{T}$ $\omega_s = \frac{2\pi}{T}$

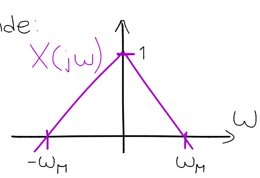
$C_k = \frac{1}{T}$ för alla k

Teckna fourierserie: $p(t) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jk\omega_s t}$ och därefter motsvarande fouriertransform: $P(j\omega) = \frac{2\pi}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega - k\omega_s)$

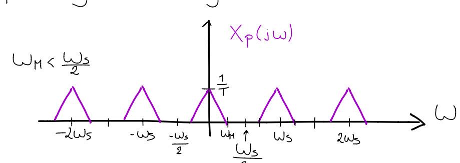


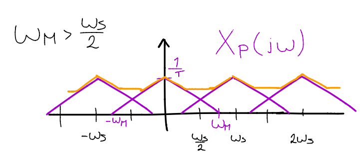
$P(j\omega)$ är också ~~ett~~ impulståg ~~fast~~ längs ω-axeln.

Låt $X(j\omega)$ ha följande utseende:



För att erhålla $X_p(j\omega)$ faltas $X(j\omega)$ med alla impulser i $P(j\omega)$.





OBS!

$x(t)$ kan återskapas från $x_p(t)$ gm lågpassfiltrering och multiplikation med T

dock måste $\omega_M = \frac{\omega_s}{2}$, ω_s: Samplingsvinkelfrekvens,

T: Samplingsinterval

ω_M: Högsta frekvensinnehållet i signalen $x(t)$.