

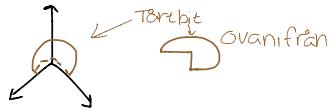
## 15.6 Flödesintegraler

Ex Beräkna flödet genom ytan

Där sfären har radie  $a$  & v.

snittar plana snitt längs  $x=0$ ,  $y=0$ ,  $z>0$  och  $F(x, y, z)$

Funktionsytter  $d\vec{S} = (-f_u, -f_v, 1) dx dy$



$\iint_B F \cdot \hat{N} dS \leftarrow$  Ytan är inte parametriserad av en enda ekvation. 4 ytor: 1, 2, 3, 4

$$3) \quad \iint_3 F \cdot \hat{N} dS = \iint_3 F d\vec{S}$$

$dS = ytarelementet, dS = dx dy i xy-kordinater$

$\hat{N} = (0, 0, -1)$  för att det pekar nedåt

$$\iint_3 (x, y, z)(0, 0, -1) = \iint_3 (0x + 0y - z) dx dy = [z=0] = 0$$

$$4) \quad \iint_4 F \cdot d\vec{S} = \left\{ \hat{N} = \left( \frac{x}{a}, \frac{y}{a}, \frac{z}{a} \right) \right\} = \iint_4 (x, y, z) \cdot \left( \frac{x}{a}, \frac{y}{a}, \frac{z}{a} \right) dS = \iint_4 \frac{x^2 + y^2 + z^2}{a^2} dS = \iint_4 \frac{a^2}{a^2} dS = a \iint dS = \begin{matrix} \nearrow \text{Sfäriska} \\ \searrow \frac{3}{8} \text{ av en} \\ \text{sfer med} \\ \text{radie } a \end{matrix}$$

ii)  $a \iint dS = a \frac{3}{8} \cdot \text{Arean(sfär med radie } a) = \frac{3a}{8} \cdot 4\pi a^2 = \frac{\pi}{2} a^3$

1 & 2) Liknar 3) (bidrag 0).

## 16.1 Diverse om div & curl

Olika sätt att beräkna trippel- och dubbeldifferentier men främst flödes- och arbetsint...

F. Vektorfält  $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

Om vi har  $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  lätsas vi åtta vi är i  $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  (?) :  $F(x, y) = F_1 \hat{i} + F_2 \hat{j} + 0 \hat{k}$  lagt in i vektorfält i  $z=0$ .

Reminrar om  $\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$

### Def

Div = divergens =  $\nabla \cdot$ .

$$\text{Div } F = \nabla \cdot F = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (F_1, F_2, F_3) = \left( \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} \right)$$

Tar in ett vektorfält, returnerar en funktion.

### Def

$$\text{Curl } = \nabla \times$$

$$\text{Curl } F = \nabla \times F = \left| \begin{array}{ccc} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{array} \right| = \left( \frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right)$$

### Ex

$$1) \quad \text{Om } F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, F(x, y) = (F_1, F_2, 0)$$

$$\text{Curl } F = (0, 0, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}) = \left( \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \hat{k}$$

2)  $\text{Curl } F = 0$  motsvarar exakt derivatiken för konservativa vektorfält.

3) Div kan vara väldigt lätt att räkna ut.

$$F = e^{\sin(yz)} + y, xy + \frac{\sin(z)}{z}, e^{xz}$$

$$\text{Div } F = 0 + x + 0 = x$$

4)  $\mathbf{F} = (-\Omega y, -\Omega x)$ ,  $\Omega$  konst  
 $\text{curl } \mathbf{F} = \left( \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \mathbf{k} = \Omega - (-\Omega) \mathbf{k} = 2\Omega \mathbf{k}$

OBS Curl "ser inte" konservativa vektorfält men ser roterande vektorfält.

### Div F?

Vad är div F egentligen? "div F" är en skalär och div F(p) kommer vara "utflödet-inflödet" i en liten omgivningen till punkten p.

Ex Konstant Vektorfält:  $\mathbf{F}(x, y) = (1, 1)$   
 $\text{div } \mathbf{F} = \frac{\partial 1}{\partial x} + \frac{\partial 1}{\partial y} = 0$

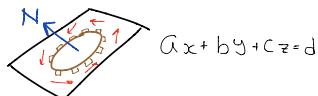
### Tillämpning av Div

  $\phi$  = temperatur i en punkt  $(x, y, z)$  vid en tidpunkt t.  
 $\nabla \phi$  = riktningen som  $\phi$  ökar mest i i en given punkt

  $\nabla \phi$  = Värmeflöde  
 $\text{div } \nabla \phi = \text{värmeflöde ut} - \text{värmeflöde in i punkten}$   
 $\text{div} = \nabla \cdot \Rightarrow \nabla \cdot \nabla \phi = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \left( \frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}, \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \phi = \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right) \phi$   
 Speciellt:  $\nabla \cdot \nabla \phi = \nabla^2 \phi = \Delta \phi$  & om  $\Delta \phi = 0$  har vi ingen värmespridning.  
 Alltså är temperaturen stabil i tid.  
 $\Delta \phi = 0$  är Värmelämningsekvationen (utan tid).

### Curl F?

Curl F är en vektor som vi tolkar på följande sätt: Givet en vektor  $[7, 7, 2]$ ,  $\mathbf{N} = (a, b, c)$   
 Curl  $\mathbf{F} \cdot \mathbf{N}$  = Skalär



Krafterna för kuggjulet i planet  $ax + by + cz = d$  att snurra  $\Rightarrow$  Vinkel hastighet som hjulet får av den här kraften.

### 16.2 Identiteter

div  $\nabla$ , curl har massa relationer. Se sats 3!

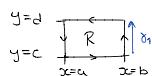
g)  $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0$   $\mathbf{F}$  vektorfält  
 h)  $\nabla \times (\nabla \phi) = 0$   $\phi$  skalär

### 16.3 Green's Theorem

Motiv/Bakgrund:  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  (envarre)  
 $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$   
 $\mathbf{F} = \nabla \phi$    
 $\int_R \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \phi(P') - \phi(P)$

Men hur löser vi mer generella arbetsintegraller där integralen inte bara beror på renden eller bara det inre?

Dennis påstår att arbetsintegralen till renden av ett område  $R$ :  $\iint_R \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_R \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{k} \cdot dA = \iint_R \left( \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx dy$



### Green's Theorem

$$\iint_R \left( \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx dy = \int_R \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \left\{ \text{Fokus på } \iint_R \frac{\partial F_2}{\partial x} dx dy, \text{ den andra puss} \right\} = \left[ [F_2(b, y) - F_2(a, y)] dy \right] = \left[ F_2(b, y) dy - \left[ F_2(a, y) dy \right] \right] = \left[ \int_a^b F_2 dy - \int_a^b F_2 dy \Big|_{y=0}^{y=b} \right] = ? \text{ Kolla näst...}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Ex } F(x,y) = (0, \infty) \\ F(x,y) = (-y, 0) \\ F(x,y) = \frac{1}{2}(-y, x) \end{array} \right\} \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = 1 \Rightarrow \int_{\partial R} F \cdot dr = \iint_R 1 \cdot dx dy = \text{arean till } R$$

Def

Om  $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  uppfyller  $\operatorname{curl} F = 0$  så är  $F$  virvelfritt.