Forts. invers Laplacetransform

Efter Partialbråksuppdelning fås: Första ordningens term för en reell pol.

$\frac{A_k}{s-d_k} \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} A_k e^{d_k t} \cdot u(t) \to 0$ om $d_k < 0$, pol $s = d_k$ ligger i VHP

Minitabell

$f(t)$	$F(s)$
$\sin bt$	$\frac{b}{s^2+b^2}$
$\cos bt$	$\frac{s}{s^2+b^2}$
$e^{-at} f(t)$	$F(s+a)$

Andra ordningens termer för komplexa poler.

Nämnare: $(s-s_1)(s-s_2) = \{s_1 = s_2^*\} = (s+\alpha+j\omega_0)(s+\alpha-j\omega_0) = (s+\alpha)^2 + \omega_0^2 =$
$s^2 + 2s\alpha + \alpha^2 + \omega_0^2$

Ansats i PBU: $\frac{As+B}{(s+\alpha)^2+\omega_0^2}$, lös för A och B.

Skriv om som: $\frac{A(s+\alpha)+B-A\alpha}{(s+\alpha)^2+\omega_0^2} = A\frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\omega_0^2} + \frac{B-A\alpha}{\omega_0} \cdot \frac{\omega_0}{(s+\alpha)^2+\omega_0^2}$

Invers Laplacetransform ger:

$$Ae^{-\alpha t}\cos(\omega_0 t) + \frac{B-A\alpha}{\omega_0} e^{-\alpha t} \sin(\omega_0 t) \quad , t \geq 0$$

Notera att uttrycket går mot 0 om $\alpha > 0$.
$Re\{s_1\} = Re\{s_2\} < 0$, alltså poler i VHP.

Krav för stabilitet hos ett kausalt system är att alla poler hos dess överföringsf. ligger i s-planets vänstra halvplan.

Praktiskt Råd

Division mellan polynom av samma gradtal ($M = N$).

Ex $H(s) = \frac{s^2+b_1 s+b_0}{s^2+a_1 s+a_0}$

Ansats för PBU kan ej göras direkt. :(

$H(s) = \frac{s^2+b_1 s+b_0}{s^2+a_1 s+a_0} = \frac{s^2+a_1 s+a_0+b_1 s+b_0-a_1 s-a_0}{s^2+a_1 s+a_0} = 1 + \frac{s(b_1-a_1)+(b_0-a_0)}{s^2+a_1 s+a_0} = 1 + \{PBU\}$!

Re-cap

$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}dt$, $x(t) = 0$ om $t<0$, $s = \sigma + j\omega$

$X(s) = \int_0^{\infty} x(t)e^{-(\sigma+j\omega)t}dt = \int_0^{\infty} \boxed{x(t)e^{-\sigma t}} e^{-j\omega t}dt = \mathcal{F}_t\{x(t)e^{-\sigma t}\}$

Om $\sigma = 0 \Rightarrow s = j\omega \Rightarrow X(j\omega) = \int_0^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$ (= Fouriertransformen)

Om signalen $x(t) = h(t)$ är impulssvaret till ett kausalt LTI-system är:
$H(j\omega) = \int_0^{\infty} h(t)e^{-j\omega t}dt$ Systemets frekvenssvar!

$A\cos(\omega t) \rightarrow \boxed{G(s) \; / \; G(j\omega)} \rightarrow A|G(j\omega)|\cos(\omega t + \arg\{G(j\omega)\})$

Egenskaper i frekvensplanet

Utgå ifrån ett kausalt och stabilt LTI-system med överf. $G(s)$ och frekvenssvaret $G(j\omega) = G(s)|_{s=j\omega}$

Bodediagram

En grafisk presentation av frekvenssvaret innehållandes två delar. 1) Amplituddiagram (belopp) med logaritmiska skalor (frekvens & amplitud [dB]). $|G(j\omega)|_{dB} = 20 \; {}^{10}\log(|G(j\omega)|)$.
2) Fasdiagram med logaritmisk frekvensskala men "vanlig" arg-axel. $\arg\{G(j\omega)\}$.

Konstruktion

Faktorisera överföringsfunktionen $G(s)$. $G(s) = \frac{C_1(s) \cdot C_2(s) \cdot \ldots \cdot C_M(s)}{D_1(s) \cdot D_2(s) \cdot \ldots \cdot D_N(s)}$ Faktorerna $C_i(s)$ & $D_i(s)$ är:

K: en konstant

s: "derivering/integrering"

$1 + \frac{s}{\omega_1}$: 1a grads faktor

$1 + s\frac{2\alpha}{\omega_2} + \frac{s^2}{\omega_2}$: 2a gradsfaktor (komplexa rötter)

Frekvenssvarets belopp

$$|G(j\omega)| = \frac{|C_1(j\omega)| \cdot |C_2(j\omega)| \cdot \ldots \cdot |C_M(j\omega)|}{|D_1(j\omega)| \cdot |D_2(j\omega)| \cdot \ldots \cdot |D_N(j\omega)|}$$

$$|G(j\omega)|_{dB} = |C_1(j\omega)|_{dB} + |C_2(j\omega)|_{dB} + \ldots + |C_M(j\omega)|_{dB} - |D_1(j\omega)|_{dB} - |D_2(j\omega)|_{dB} - \ldots - |D_N(j\omega)|_{dB}$$

Frekvenssvarets fas

$\underline{/G(j\omega)} = \arg\{G(j\omega)\}$

$$\underline{/G(j\omega)} = \underline{/C_1(j\omega)} + \ldots + \underline{/C_M(j\omega)} - \underline{/D_1(j\omega)} - \underline{/D_N(j\omega)}$$

Notera!

Superposition av bidrag från varje delfaktor både för att erhålla $|G(j\omega)|_{dB}$ och $\underline{/G(j\omega)}$.

— x —

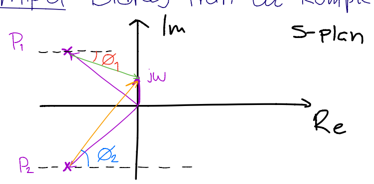
För en generell överföringsfunktion: $H(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k s^k}{\sum_{k=0}^{N} a_k s^k}$

Faktorisera: $H(s) = \frac{b_M}{A_N} \frac{\prod_{k=1}^{M}(s - z_k)}{\prod_{k=1}^{N}(s - p_k)}$, $s = z_k \Leftrightarrow$ nollställe, $s = p_k \Leftrightarrow$ pol

Frekvenssvar $H(s)|_{s=j\omega}$: $|H(j\omega)| = \left|\frac{b_M}{A_N}\right| \frac{\prod_{k=1}^{M}|j\omega - z_k|}{\prod_{k=1}^{N}|j\omega - p_k|} = \left|\frac{b_M}{A_N}\right| \frac{\text{"Produkt av längder på nollställevektorer"}}{\text{"Produkt av längder på polvektorer"}}$

$$\arg\{H(j\omega)\} = \sum_{k=0}^{M} \arg(j\omega - z_k) - \sum_{k=0}^{N} \arg(j\omega - p_k)$$

Exempel Bidrag från ett komplext polpar



$|H(j\omega)| = \frac{\ldots}{\ldots |j\omega - P_1||j\omega - P_2| \ldots}$

$\varnothing_1 = \arg\{j\omega - P_1\}$

$\varnothing_2 = \arg\{j\omega - P_2\}$