Dynamiska modeller för tekniska system

Repetition:

Slutvärdessatsen

$\lim_{t\to\infty} u(t) = \lim_{s\to 0} s \cdot U(s)$ givet att $u(\infty)$ existerar (systemet stabilt)

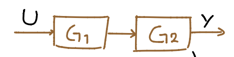
Intressant när vi ska studera kvarstående fel.

Begynnelsevärdessatsen

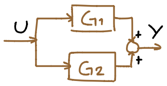
$u(0) = \lim_{s\to\infty} s \cdot U(s)$

Intressant att studera när vi vill se hur styrsignalen är vid stegförändringar.

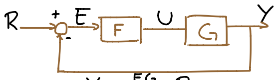
Blockschemaräkning



$Y(s) = (G_1(s)G_2(s))U(s)$



$Y(s) = (G_1 + G_2) \cdot U(s)$



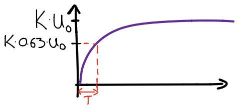
$Y = \frac{FG}{1+FG} \cdot R$

Tidsförlopp och Stegsvar

Ex 1a ordningens system: $\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K}{1 + sT}$ ← Förstärkning (K) ← Tidskonstant (T)

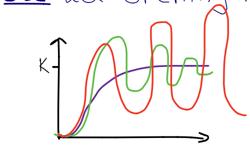
$sT \cdot Y(s) + Y(s) = KU(s) \overset{\mathcal{L}^{-1}}{\longleftrightarrow} \dot{y}(t) + \frac{1}{T}y(t) = \frac{K}{T}u(t) \Rightarrow$ Lösning: $y(t) = K(1 - e^{-t/T})u_0$

Tidskonst T: $y(T) = K(1 - e^{-T/T})u_0 = K(1 - 0.37)u_0 = K\,0.63\,u_0$



Ger oss en känsla för hur snabbt systemet växer.

Ex 2a ordningens system: $G(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$ ← Odämpad självsvängningsfrekvens (ω_n), relativ dämpning (ζ)



- ● $\zeta \geq 1 \Rightarrow$ reella, stabila poler
- ● $0 < \zeta < 1 \Rightarrow$ komplexa, stabila (nära 0 ⇒ lång insvängning)
- ● $\zeta < 0 \Rightarrow$ instabilt (ökar)

Def

t_r: Stigtid ($t_{10\%} \rightarrow t_{90\%}$)

M: Överslång (hur högt går vi över $K \cdot u_0$?)

$t_{5\%}$: Settling time

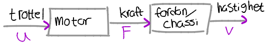
Hur modellerar vi?

Strukturering

- Nedbrytning i delsystem
- Vilka variabler?
- Vilka kvalitativa samband?

⇒ Graf eller blockschema

Ex Strukturering - Farthållare



Variabler, Samband

Ställa upp basekvationer

- Balansekvationer
  - Kraft, energi, massbalanser. Storhet av samma slag.
- Konstitutiva samband
  - Hur beror olika variabler av varandra? Storheter av olika slag.
- Dimensionskontroll

⇒ Diffekv. och algebraiska samband

Formulera modell

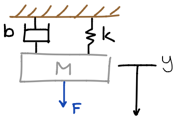
- Linjärisera ?
  Laplace, annat? => Diffekv., överföringsfunktion eller tillståndsmodell.
- Välja tillståndsvariabler och formulera tillståndsmodell.

Mekaniska System

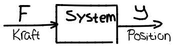
Rörelsemängdsbalans: $\frac{d}{dt}(\overset{\text{Massa}}{m}\,\underset{\text{position}}{\overset{\text{hastighet}}{v}}) = \sum_i \overset{\text{Krafter}}{F_i}$ → 2a ord. diffekv. per massa

Rotationssystem → Rörelsemängdsmoment $\frac{d}{dt}(J \cdot w) = \sum_i M_i$

Ex 4.1



* Strukturera



* Basekv.

1) $\frac{d^2}{dt^2}(m y) = \sum_i F_i = F - F_b - F_k$

* Konstitutiva samband

2) $F_k = k \cdot y$

3) $F_b = b \cdot \frac{dy}{dt}$

* Forma modell

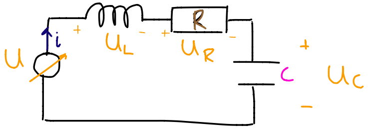
- Sortera ekv. 2 och 3 → 1 => $\frac{d^2}{dt}(m y) = F(t) - k \cdot y - b \cdot \frac{dy}{dt}$

$\Leftrightarrow m\frac{d^2 y}{dt} = F(t) - k y - b\frac{dy}{dt}$

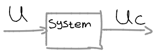
$\Leftrightarrow m\ddot{y} + b\dot{y} + k y = F(t)$

$\xrightarrow{\mathcal{L}} m s^2 Y(s) + b s Y(s) + k Y(s) = F(s) \Rightarrow \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{1}{m s^2 + b s + k} = \frac{1/m}{s^2 + \frac{b}{m} s + \frac{k}{m}} \to G(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$ där $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$, $\zeta = \frac{b}{2\sqrt{km}}$

Ex Elektriskt system



* Strukturering



* Basekvationer

Kirchoff => $U - U_c - U_R - U_L = 0$

* Konstitutiva samband

$U_L = L \cdot \frac{di}{dt}$, $U_R = R \cdot i$, $i = C \cdot \frac{dU_c}{dt} = \frac{dq}{dt}$

Hemuppgift: Forma modell som en ÖF.