12.2 | Kontinuitet och Gränsvärden

För definitionen av $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L \in \mathbb{R}$, se MVA 1.3

Ex Finns $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$?

Testa med väl valda linjer. Test 1: $l_1: (x,0) \Rightarrow f(x,0) = \frac{x\cdot 0}{x^2+0} = 0 \Rightarrow$ Om gränsvärde finns är det lika med 0.

Test 2: $l_2: (x,x) \Rightarrow f(x,x) = \frac{x^2}{x^2+x^2}\ \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{x^2} = \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2} \neq 0 \Rightarrow$ GV existerar ej

Regler

Låt: $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$ och $\lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y) = M$

Då gäller att:

Ex Vad är $\lim_{(x,y)\to(5,5)} \frac{x-y}{x^2-y^2}$?

Gränser för $x-y=0$, $x^2-y^2=0$

$x^2-y^2 = (x+y)(x-y) \Rightarrow \frac{x-y}{x^2-y^2} = \frac{(x-y)}{(x-y)(x+y)} = \frac{1}{x+y}$ & $\lim_{(x,y)\to(5,5)} \frac{1}{x+y} = \frac{1}{10}$

Ex Variant på exempel $\frac{xy}{x^2+y^2}$

Sätt istället $f(x,y) = \frac{x^2y}{x^2+y^2}$. Finns GV i $(0,0)$? Notera att $x^2 \leq x^2+y^2$.

$\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2} - 0\right| \leq \left|\frac{(x^2+y^2)y}{(x^2+y^2)}\right| \leq |y| \leq \sqrt{x^2+y^2}$

Bevis för att GV är 0: Givet $\varepsilon > 0$ kan man ta $\delta = \varepsilon$ och då, om $|(x,y)-(0,0)| = |(x,y)| = \sqrt{x^2+y^2} < \underset{\varepsilon}{\overset{\delta}{\shortparallel}} \Rightarrow \left|\frac{x^2y}{x^2+y^2} - 0\right| < \underset{\varepsilon}{\overset{\delta}{\shortparallel}}$

Ex Vad är $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$?

Sätt $t = x^2+y^2 \rightsquigarrow \frac{\sin(t)}{t}$ & $\lim_{t\to 0^+} \frac{\sin(t)}{t} = 1$

12.3 | Partiella derivator och tangentplan

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y)$. Vi vill ha ett mått på hur f ändrar sig i x- och y-riktning.

Def

$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h}$

$\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = \lim_{k\to 0} \frac{f(a,b+k)-f(a,b)}{k}$

Ex $f(x,y) = 3x^2y - \sin(x)$

$\frac{\partial f}{\partial x} = ?$ y-variabeln tolkas som konstant. $\frac{\partial f}{\partial x} = 3\cdot 2xy - \cos(x) = 6xy - \cos(x)$

$\frac{\partial f}{\partial y} = ?$ x tolkas som en konstant. $\frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2$

Ex $f(x,y) = x^2y$

Betrakta nu $f(x^2, xy) = x^4(xy) = x^5y$

Det finns två sätt att tolka $\frac{\partial f}{\partial x}$. 1) $\cancel{\frac{\partial}{\partial x}(x^5y) = 5x^4y}$

2) Sätt $u = x^2$, $v = xy$. $\frac{\partial f}{\partial u}(u^2v) = 2uv = 2x^2(xy) = 2x^3y$

Om man använder definitionen som gavs ovan skall $\frac{\partial f}{\partial x}$ bara derivera i första variabeln, dvs den som kallas u.

Istället kan f_1 eller f_x användas för $\frac{\partial f}{\partial x}$ osv.

Man kan fortsätta derivera partiellt $f_1 \to f_{11}, f_{12}$

$f_2 \to f_{21}, f_{22}$

Sammanfattning av 12.4

Alla blandade derivator, dvs $f_{12}, f_{21}, \dots$, är oberoende av ordning. $f_{112} = f_{121} = f_{211}$

Ex Låt $f(x,y) = e^{kx}\sin(ky)$ Räkna ut f_{11} & f_{22} visa att $f_{11} + f_{22} = 0$.

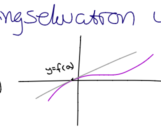
$f_{11} = (f_1)_1$ $\qquad f_2 = ke^{kx}\cos(ky)$

$f_1 = k\cdot e^{kx}(\sin(ky))$, $\quad f_{11} = k^2e^{kx}(\sin(ky))$ $\qquad f_{22} = -k^2e^{kx}\sin(ky)$

$$\Delta f = \left(\frac{\partial^2}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2}{\partial^2 y}\right) = f_{11} + f_{22} = k^2e^{kx}\sin(ky) - k^2e^{kx}\sin(ky) = 0$$

Detta är ett exempel på en operator: Laplace-operatorn. (Värmeledningsekvationen utan tidsberoende)

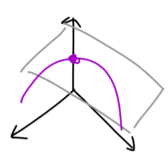
En viktig tillämpning av partiella derivator är tangentplan. En variabel: $y = f(x)$



$y - f(a) = f'(a)(x-a)$ är tangentlinjens ekvation.

Vi vill modellera tangentplan till funktionsytor/grafer till $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

$z = f(x,y)$



En vektor som bestämmer en tangentlinje.

Vi behöver två vektorer som spänner upp planet. I fallet dimension 1, $f'(x)\cdot 1$.

Ta vektorn som pekar åt hur f växer i x-led. Dvs, detta bestäms av $f_1 / \frac{\partial f}{\partial x}$ av

$f_1 = \frac{\partial f}{\partial x}$, $T_1 = (1, 0, f_1)$

y-led: $T_2 = (0, 1, f_2)$

Hur får vi ut tangentplanet från dessa två? Jo, vi tar vektorprodukten mellan T_1 och T_2.

$$T_2 \times T_1 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & f_2 \\ 1 & 0 & f_1 \end{vmatrix} = (f_1, -(-f_2), -1) = (f_1, f_2, -1) = \vec{n}$$, planet går genom $(a, b, f(a,b)) \Rightarrow$

$f_1(a,b)(x-a) + f_2(a,b)(y-b) - (z - f(a,b)) = 0$ är alltså tangentplanets ekvation

Ex Bestäm tangentplanets ekv $z = f(x,y) = x^2y - x^4$ punkten $(1,1,0)$

$$\left.\begin{aligned} f_1 &= 2xy - 4x^3 \\ f_2 &= x^2 \end{aligned}\right\} \text{då } (x,y) = (1,1) \Rightarrow f_1 = -2,\ f_2 = 1 \Rightarrow \text{Tangentplan: } -2(x-1) + 1(y-1) - (z-0) = 0$$

$$y - 2x - z = -1$$

Ex $z = Ax + By + C$, Vad är tangentplanet i en punkt $(a, b, Aa + Bb + C)$?
Vi ska få samma plan igen.

$f_1 = A$
$f_2 = B$ i formel: $A(x-a) + B(y-b) - (z - (Aa + Bb + C)) = 0$

$$Ax - Aa + By - Bb - z + Aa + Bb + C = 0$$
$$Ax + By + C = z$$

QED

Envariabelfallet är $f(a+h) \approx f(a) + f'(a)h$

Ett annat sätt att skriva om tangentlinjens ekvation.

Då borde $\underbrace{f(a+h, b+k) \approx f(a,b) + f_1(a,b)h + f_2(a,b)k}$,

Omskrivning av tangentplanets ekvation
$h = x - a$, $k = y - b$

HL är en linjär approx till $f(x,y)$ i punkten (a,b).

12.5 Linjära approximationer & Deriverbarhet
Fråga: Hur bra är den linjära approximationen?

Def
$f(x,y)$ är deriverbar i punkten (a,b) om $\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(a+h, b+k) - f_1(a,b)h - f_2(a,b)k - f(a,b)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$ linjära approx
Täljaren går snabbare mot 0 än $\sqrt{h^2+k^2}$ => Annat sätt att säga att linj appx är bra.

Sats 4
Om f_1 och f_2 existerar & är kontinuerlig i en omgivning till (a,b) och f kontinuerlig. =>
f är differentierbar i (a,b).