11.3 Parametrisering av en kurva

Def
$\vec{r}(t)=(x(t),y(t),z(t))$ parametriserar en kurva ℓ i $\mathbb{R}^3$ om $\vec{r}$ exakt ~~täcker~~ upp ℓ. Den får emellertid inte träffa flera gånger.

Ex
$\ell: x^2+y^2=1$, en parametrisering ges av $\vec{r}(t)=(\cos(t), \sin(t))$, $0 \leq x \leq 2\pi$ eller $t \in (\pi, 3\pi]$

Ex
Något som inte är en parametrisering av samma ℓ är $r(t)=(\cos(t), \sin(t))$ $t \in \mathbb{R}$. Detta eftersom $\vec{r}$ träffar punkter fler än en gång.

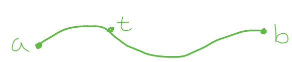
Ex
Betrakta snittet av Planet $\pi: x+y+z=3$ (1) och den elliptiska cylindern: $4x^2+y^2=9$ (2).

(2) Cylinder med godtyckligt z. Ett uttryck ges av $(\frac{3\cos t}{2}, 3\sin t, z)$.
(1) Ger att $z=3-x-y=3-\frac{3}{2}\cos(t)-3\sin(t)$

Alltså ges parametrisering av $\vec{r}(t)=(\frac{3}{2}\cos(t), 3\sin(t), 3-\frac{3}{2}\cos(t)-3\sin(t))$ $t \in [0,2\pi)$.

Kurvlängd

En sluten och begränsad kurva ℓ har oftast en längd. $|\ell|$ = längd för en kurva.



Antag att vi har en parametrisering $\vec{r}(t)=(x(t),y(t))$. Vad är längden mellan a och t?
$S(t)$ = kurvlängden

Alt 1
Vad är $S'(t)$? $\frac{dS}{dt}=\lim_{h\to 0}\frac{S(t+h)-S(t)}{h}$ = avstånd mellan $r(t+h)$ och $r(t)$, delat med h. $r(t+h) \overset{\text{litet } h}{\approx} r(t)+V(t)\cdot h$
$\left|\frac{r(t+h)-r(t)}{h}\right|=|V(t)|=|r'(t)|$, $S'(t)=|r'(t)| \Rightarrow S(t)=\int_a^t |r'(t)|dt+C$. Eftersom $S(0)=0 \Rightarrow C=0$

Alt 2
Formeln för avstånd mellan $r(t+h)$ och $r(t)$ kommer vara $\sqrt{dx^2+dy^2} \overset{\text{Förläng med } dt}{=} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$
och sedan integrerar vi och får samma resultat.

Specialfall: $y=f(x)$ $\int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt=\int_a^b\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$
Längden mellan a och b. Parametrisera a mha $v(x)=(x,f(x))$

Viktigt: Med parametrisering

Ex
Räkna ut längden mellan tiden 1 och e^2 för den parametriserade kurvan $\vec{r}(t)=(t^2, 2t, \ln(t))$ enligt formeln: $\int_1^{e^2}\sqrt{(2t)^2+2^2+\left(\frac{1}{t}\right)^2}\,dt=\int_1^{e^2}\sqrt{4t^2+4+\frac{1}{t^2}}\,dt$

Kvadratkomplettera! $4t^2+4+\frac{1}{t^2}=(2t+\frac{1}{t})^2$

$\int_1^{e^2}\sqrt{(2t+\frac{1}{t})^2}\,dt=\int_1^{e^2}2t+\frac{1}{t}\,dt=\left[t^2+\ln(t)\right]_1^{e^2}=e^4-1+2\ln e=e^4+1$

12.1 Funktioner i flera variabler & Nivåytor/kurvor

Vi betrakter $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ m.m.

Ex

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ ger problem om $1-x^2 < 0$ ty det är jobbigt med komplexa tal.

Def

En mängd $U \subseteq \mathbb{R}^n$ är en domän eller definitionsmängd till f om $f: U \to \mathbb{R}$.

I exemplet ovan är maximala domänen alla x s.a. $1-x^2 \geq 0$, dvs intervallet $[-1,1]$.

Def

En mängd $V \subseteq \mathbb{R}$ är en målmängd om f tar sina värden i V.

Ex

$f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}$.

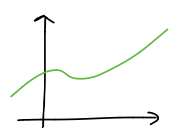
Domän: Alla (x,y) s.a. $x^2+y^2 \neq 0$ dvs $\mathbb{R}^2 \setminus$ origo.

Målmängden: Alla positiva tal $\neq 0$. $\mathbb{R}_{>0}$

$f: \mathbb{R}^2 \setminus \text{origo} \to \mathbb{R}_{>0}$

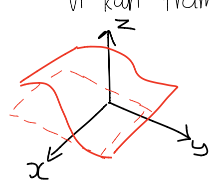
Grafer till funktioner $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$n=1$: $y = f(x)$



$n=2$: $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, ex att f är temp i (x,y)

Vi kan framställa detta grafiskt som $z = \text{temperatur} = f(x,y)$



Om vi har $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ hur gör vi då? Ja, det är svårt med 4-dim bilder så vi skippar att rita dem och använder oss av nivå-ytor/kurvor.

Def

Om $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ges nivåytorna till f vid C av alla $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ s.a. $f(\vec{x}) = C$

Ex

$f(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2)$, $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

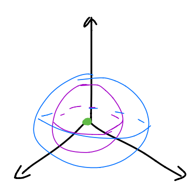
Vad är nivåytorna?

$f(x,y,z) = C$ för $C = 0,1,2$

$C=0$, $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2 = 0$ dvs $x=y=z=0$

$C=1$, $f(x,y,z) = 1$ dvs sfär med $r=1$

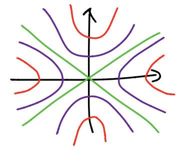
$C=2$ $f(x,y,z) = 2$ — " — $r=\sqrt{2}$



Ex

På en nivåkurva $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2 - y^2$

Nivå $C = 0, 1, 2$



$C=0$: $x^2 - y^2 = 0 = (x-y)(x+y) \Rightarrow x = y$

$C=1$: $x^2 - y^2 = 1$

$C=2$: $x^2 - y^2 = 2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{x^2 - 2}$

$x = \pm\sqrt{y^2 + 2}$

12.2 Gränsvärden och Kontinuitet

Detta är den teoretiska bakgrunden till partiella derivator. (Vi kommer förmodligen inte använda dem så mycket...)

Kontinuerlig = Vi kan rita en graf utan att lyfta pennan, intuitivt.

Def

$f: U \subseteq \mathbb{R}^2 \to V \subseteq \mathbb{R}$

Vi säger att $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L \in \mathbb{R}$ om

1) Varje omgivning till (a,b) innehåller element i domän U.
2) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ s.a. om $(x,y) \in U$ och $0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta$ $\Rightarrow |f(x,y) - L| < \varepsilon$

Vi säger också att f är kontinuerlig i (a,b) om $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$.

De gränsvärden vi betraktar existerar inte, och då får vi visa det, eller kan återföras på ett std-gränsvärde från envariabeln.

Ex

$f(x,y) = \frac{x}{y}$

$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$

Om gränsv finns så ska åtminstone alla valda linjer, t.ex. (x, kx) eller (kx, x) ha samma gränsvärden vid insättning i f då $x \to 0$.

Testa: $(x, 3x)$ $f(x,y) = \frac{x}{3x} = \frac{1}{3}$

$(x, 2x)$ $f(x,y) = \frac{1}{2}$

Speciellt då $x \to 0$ får vi 2 olika värden så gränsv. existerar ej.