

Sammanfattning

LTI-System $y = h * x$

- Stabilitet $\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty$
- Kausalitet $\Leftrightarrow h(t) = 0, t < 0$

Om $\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt, \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty$ definierar vi $\begin{cases} X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt, \omega \text{ reellt tal} \\ H(j\omega) = \dots \end{cases}$
Och $Y(j\omega) = H(j\omega)X(j\omega)$

Exponentiellt Begränsad Signal

Anta: $x: (-\infty, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$

x sägs vara exponentiellt begränsad om det existerar b så $|x(t)| e^{-bt} \leq M$ för alla t , för något $M < \infty$

Ex

$x(t) = e^{2t}$ begränsad ty $|e^{2t}| \cdot e^{-2t} = e^{2t-2t} = e^0 = 1 = M$
 $x(t) = e^t$ ej begränsad

OBS!

Om $|x(t)| e^{-bt} \leq M$ så existerar $X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-st} dt$ där $s \in \mathbb{C}$, för alla $\text{Re}(s) > b$

Bevis Antag: $x(t) = 0, t < 0$
 $\left| \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-st} dt \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| e^{-\text{Re}(s)t} dt = \int_0^{\infty} |x(t)| e^{-\text{Re}(s)t} dt$
 $\leq \int_0^{\infty} M e^{-\text{Re}(s)t} dt = M \int_0^{\infty} e^{-\text{Re}(s)t} dt = M \left[-\frac{1}{\text{Re}(s)} e^{-\text{Re}(s)t} \right]_0^{\infty} = M \frac{1}{\text{Re}(s)}$
där $\text{Re}(s) > b$

Def

Om $|x(t)| e^{-bt} \leq M$ för alla t definieras Laplacetransformen $X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-st} dt$ om $\text{Re}(s) > b$
Om $s = j\omega$ så återfås Fouriertransformen av x om $b < 0$.

Antag att $|x(t)| \leq e^{bt} M, x(t) = 0, t < 0$

Tag $s = a + j\omega, \text{Re}(a) > b$ Exponentiell dämpning!

Inför $x_a(t) = e^{-at} x(t)$

De gäller att $\int_{-\infty}^{\infty} |x_a(t)| dt < \infty \leadsto X_a(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x_a(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-st} dt = X(s)$

Egenskaper

- * Om $y = h * x$ och h, x är exp begr samt y existerar $\Rightarrow Y(s) = H(s)X(s)$
- * $H(s)$ kallas överföringsfunktionen.
- * β innehåller alla formler vi behöver.

Laplacetransform

Ensidig: $X(s) = \int_0^{\infty} x(t) e^{-st} dt$ om $x(t) = 0$ för $t < 0$

Dubbelsidig: $X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-st} dt$

Egenskap ensidig

Om $Z(t) = x'(t), x(t) = 0$ för $t < 0$, gäller $Z(s) = sX(s) - x(0)$
* $Z(s) = \int_0^{\infty} z(t) e^{-st} dt = \int_0^{\infty} x'(t) e^{-st} dt = \left[x(t) e^{-st} \right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} x(t) (-s) e^{-st} dt = 0 - x(0) + s \int_0^{\infty} x(t) e^{-st} dt = -x(0) + sX(s)$
Om $Z(t) = x''(t) \leadsto Z(s) = s^2 X(s) - sx(0) - x'(0)$

Ex $x''(t) - 3x'(t) + 2x(t) = e^{-t}u(t)$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$

* Laplacetransformera VL & HL.

VL = $s^2 X(s) - s x(0) - x'(0) - 3(sX(s) - x(0)) + 2X(s) = (s^2 - 3s + 2)X(s) - 1$

HL = $\{\beta\} = \frac{1}{s+1}$

VL = HL $\Leftrightarrow (s^2 - 3s + 2)X(s) - 1 = \frac{1}{s+1} \Rightarrow X(s) = \frac{\frac{1}{s+1} + 1}{(s^2 - 3s + 2)} = \frac{s+2}{(s+1)(s-1)(s-2)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s-1} + \frac{C}{s-2} \leadsto \beta$

$x(t) = Ae^{-t}u(t) + Be^{t}u(t) + Ce^{2t}u(t)$

Bestäm A, B, C! (Handpåläggning)

* Multiplicera med $s+1$. $A(s+1)\left(\frac{1}{s+1} + \frac{C}{s-2}\right) = \frac{s+2}{(s-1)(s-2)}$

* Sätt $s = -1$ för att bli av med B och C. $\Rightarrow A + 0 = \frac{1}{(-2)(-3)} = \frac{1}{6}$

* Multiplicera med $s-1$. $B(s-1)\left(\frac{A}{s+1} + \frac{C}{s-2}\right) = \frac{s+2}{(s+1)(s-2)} \Rightarrow \{s=1\} \Rightarrow B = \frac{3}{2(-1)} = -\frac{3}{2}$

* Multiplicera med $s-2$ $\Rightarrow C = \frac{4}{3}$

$A = \frac{1}{6}$, $B = -\frac{3}{2}$, $C = \frac{4}{3}$

Ex Ömtenta elektro 2015-08-27 Uppg 2

Givet

$y = h * x$

$z = h * y$

$h(t) = e^{-t}u(t)$

Sök

a) Överföringsfunktionen för systemet $x \mapsto z$

b) Är $x \mapsto z$ stabilt?

c) Om $x(t) = u(t)$ vad är z ?

d) Om $z(t) = te^{-t}$ vad var x ?

Lösning

a) $Z = h * y = h * (h * x) = (h * h) * x = h_2 * x$ h_2 är impulssvaret för $x \mapsto z$.

$H_2(s) = H(s)H(s) = \left\{H(s) = \frac{1}{s+1}\right\} = \frac{1}{s^2 + 2s + 1} = \frac{1}{(s+1)^2}$

b) $\int_0^\infty |h_2(t)| dt < \infty$

$h_2(t) = \frac{1}{2} te^{-t}u(t)$, $\int_0^\infty |te^{-t}| dt = \dots < \infty \Rightarrow$ Stabilt!

c) (β) $X(s) = \frac{1}{s}$, $\text{Re}(s) > 0$

$Z(s) = H_2(s)X(s) = \frac{1}{s(s+1)^2} = \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{(s+1)^2} \Rightarrow Z(t) = Au(t) + Be^{-t}u(t) + Cte^{-t}u(t)$

Räkna ut A, B och C

d) $Z(s) = \frac{2}{(s+1)^2}$

$Z(s) = H_2(s)X(s) \Rightarrow X(s) = \frac{Z(s)}{H_2(s)} = \frac{\frac{2}{(s+1)^2}}{\frac{1}{(s+1)^2}} = \frac{2}{s+1} \stackrel{(\beta)}{\Rightarrow} x(t) = 2e^{-t}u(t)$