Ex från 14.2

$\int_0^1\int_0^1 (x+y)e^{xy}\,dx\,dy =$

$\int_0^1\int_0^1 xe^{xy}\,dx\,dy + \int_0^1\int_0^1 ye^{xy}\,dx\,dy = e-2+e-2 = 2e-4$

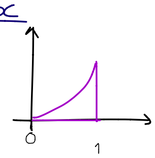
$\int_0^1\int_0^1 ye^{xy}\,dx\,dy = \int_0^1 \left[y e^{xy}\cdot \frac{1}{y}\right]_0^1 dy = \int_0^1 e^y - 1\,dx = \left[e^y - y\right]_0^1 = e-1-(1-0) = e-2$

$\int_0^1\int_0^1 xe^{xy}\,dy\,dx = \{\text{På samma sätt}\} = e-2$

14.3 Generaliserade integraler

$\iint_R f\,dA$ är riemannintegrerbara om R är kompakt & f kontinuerlig. Om f disskont. eller ej def i hela R eller R ej kompakt (obegränsad) blir det inte så bra.

Ex



$y = x^2$
$y = 0$

$f(x,y) = \frac{1}{(x+y)^2}$

Om $x=y=0 \Rightarrow 0$ i nämnaren...

Vi kan dock integrera. $\int_0^1 dx \int_0^{x^2} \frac{1}{(x+y)^2}\, dy = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\, dx = \left[\ln(x+1)\right]_0^1 = \ln 2 - \ln(1) = \ln(2)$

Detta är ett exempel på en generaliserad integral, en integral över antingen ett ej kompakt område eller en funktion som inte är definierad överallt.

14.4 Polära koordinater

Envariabelfallet: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\int_a^b f(x)\,dx$, ofta vill man byta ut variabler/koordinater.

$x = g(u) \Rightarrow dx = g'(u)\,du$. Vi får då nya gränser och: $\int f(g(u))\cdot g'(u)\,du$ ← extra faktor

Flervariabel är svårare...

Ex Singla slant n ggr. För varje krona +1, klave -1. Varje utfall markeras i ett diagram. Vi förväntar oss ett normaldistribuerat utfall runt noll. Om $n \to \infty$ kommer kurvan likna e^{-x^2}.

Vi vill tänka på e^{-x^2} som någon form av sannolikhetsfördelning borde $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = 1$, men så blir det inte. Det blir en konstant C.

$C = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx$

Istället för C räknar vi ut C^2. $C^2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx\right) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\cdot e^{-y^2}\,dx\,dy = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy =$

Integranden beror bara på x^2+y^2, sätt $r^2 = x^2+y^2 \Rightarrow r = \sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-r}\,dx\,dy$

r = radien på en cirkel. Om vi vill kunna täcka alla punkter i $\mathbb{R}^2$ måste vi täcka alla punkter med en given area.

Som dubbelintegral: $\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} e^{-r^2}\,dx\,dy \Rightarrow [dx\,dy = r\,dr\,d\theta] \Rightarrow \int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} e^{-r^2} r\,dr\,d\theta = \int_0^{\infty} 2\pi\cdot e^{-r^2}\,dr = \left[\begin{matrix}u=r^2\\ du=2r\,dr\end{matrix}\right] =$
$2\pi\int_0^{\infty} \frac{e^{-u}}{2}\,du = \pi\left[-e^{-u}\right]_0^{\infty} = \pi$

$\left.\begin{matrix} C = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx \\ C^2 = \pi \end{matrix}\right\} C = \pm\sqrt{\pi}$, $C > 0 \Rightarrow C = \sqrt{\pi}$

Teori

$\iint_R f\,dx\,dy$, vill göra ett variabelbyte: $x = x(s,t)$, $y = y(s,t)$. $g(s,t) = f(x(s,t), y(s,t))$

Kedjeregeln: $\frac{\partial g}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$, $\frac{\partial g}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$

Hur mycket ändrar sig x om vi ändrar s & t? $\left.\begin{matrix} dx = \frac{\partial x}{\partial s}ds + \frac{\partial x}{\partial t}dt \\ dy = \frac{\partial y}{\partial s}ds + \frac{\partial y}{\partial t}dt \end{matrix}\right\}$ $[dx, dy] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ds \\ dt \end{bmatrix}$

$dx\,dy = |\det(\text{Jacobianen})|\,ds\,dt$