Tack till den stere komikern för anteekningarna!

Kedjeregeln

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $u(s,t)$, $v(s,t): \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\lambda(u,v): \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Deriverbarhet $\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial s}$

$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \rightsquigarrow \nabla f = (f_x, f_y, f_z)$, P.S.S. $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

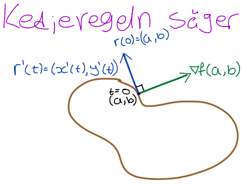
Sats

Om $\nabla f(a,b) \neq 0$ är $\nabla f(a,b)$ ortogonal mot tangenten på nivåkurvan $c = f(a,b) = f(x,y)$

Bevis

Parametrisera nivåkurvan med $r(t) = (x(t), y(t))$, $g(t) = f(x(t), y(t)) = \text{konstant} \Rightarrow \text{derivata} = 0$

Kedjeregeln säger även ~~att~~ $\nabla f(a,b) \cdot \underbrace{(x'(t), y'(t))}_{\text{Hastighet/Tangentvektor vid en given tid}}$



Gradienten kommer hjälpa oss förstå hur f växer (likt derivatan i en-variabel).

Antag att vi har en riktning (u,v), $\sqrt{u^2+v^2} = 1$, dvs längd 1. Hur snabbt ökar f i riktningen (u,v) från punkten (a,b)?

$g(t) = f(a+tu, b+tv)$

$g'(t) = [\text{kedjer.}] = \frac{\partial f}{\partial t} = f_1 \frac{\partial(a+tu)}{\partial t} + f_2 \frac{\partial(b+tv)}{\partial t} = f_1 u + f_2 v = (f_1, f_2) \cdot (u,v) = \nabla f(a,b) \cdot (u,v)$

Def

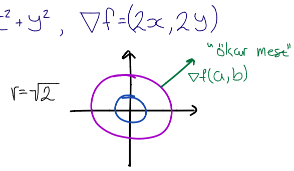
Riktningsderivatan av f i riktningen $\vec{u} = (u,v)$ skrivs som $D_{\vec{u}} f := \nabla f(a,b) \cdot \vec{u}$

$\nabla f(a,b) \cdot \vec{u} = |\nabla f(a,b)| \cdot |\vec{u}| \cos\alpha$, där α är vinkeln mellan vektorerna. Om $\vec{u}$ & $\nabla f(a,b)$ är ortogonala ändras inte f alls $(\cos\alpha = 0) \rightsquigarrow$ dvs $\vec{u}$ är en tangentvektor till nivåkurvan $C = f(a,b) = f(x,y)$

Den riktning där f ökar mest är när $\cos\alpha = 1$, $\vec{u} = \frac{\nabla f(a,b)}{|\nabla f(a,b)|}$, och den avtar mest när $\cos\alpha = -1$, $\vec{u} = \frac{-\nabla f(a,b)}{|\nabla f(a,b)|}$.

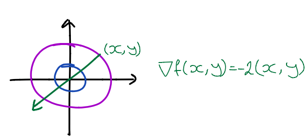
Ex

$Z = x^2 + y^2$, $\nabla f = (2x, 2y)$



Ex

$Z = -x^2 - y^2$, $\nabla f = (-2x, -2y)$



Ortogonalitet

Vad är tangentplanet till nivåytan i $P = (1,1,1)$?

$30x^2 - 4yz - 26 = 0 \leftarrow$ nivåyta

$Z = \frac{30x^2 - 26}{4y} \leftarrow$ funktionsyta

$$\left.\begin{aligned} f_1 &= 60x = 60 \\ f_y &= -4z = -4 \\ f_z &= -4y = -4 \end{aligned}\right\} 60(x-1) - 4(y-1) - 4(z-1) = 0$$

Funktionsytor: $Z = f(x,y)$

Nivåytor: $C = f(x,y,z)$

Funktionsyta ger nivåyta:

Formel för tangentplanet till $g(x,y,z) = 0 = f(x,y) - z$.

Normalen ges av $D_g = (g_1, g_2, g_3) = (f_1, f_2, -1)$

Ex 8 i 12.7
Hitta en tangentvektor till kurvan som skärs ut av $z=x^2-y^2$, $xyz+30=0$ i $P=(-3,2,5)$.

Parametrisera skärningen, $r(t)=(x(t),y(t),z(t))$ & $r'(t)$. Svårt att para skärningen.
Hitta tangentplan till ytorna & skärningen (egentligen 2 normaler till planet) => hitta vektor som är ortogonal mot dessa. N_1 & N_2 => $N_1\times N_2$

$F=z-x^2+y^2$, $G=xyz+30$, $\nabla F=(-2x,2y,1)=(6,4,5)$
$\nabla G=(yz,xz,xy)=(10,-15,-6)$

$$N_1\times N_2=\begin{vmatrix} i & j & k\\ -6 & -4 & -1\\ 10 & -15 & -6\end{vmatrix}=-9i-46j+136k$$

12.9 Taylorutveckling

Taylorutvecklingar i en variabel, om f är $k+1$ ggr deriverbar funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.
$$f(t)=f(0)+f'(0)t+f''(0)\frac{t^2}{2!}+f'''(0)\frac{t^3}{3!}+\dots+f^{(k)}(0)\frac{t^k}{k!}+\underbrace{f^{(k+1)}(0)\frac{t^{k+1}}{(k+1)!}}_{\text{felterm}}$$

Vi vill göra något liknande för funktioner i flera variabler.
Antag att vi har en vektor $\vec{u}=(h,k)$. $F(t,h,k)=F(t)=f((a+th),(b+tk))$. Söker T-utv runt (a,b).

$$F(t)=F(0)+F'(0)\cdot t+\frac{F''(0)}{2!}+\frac{F'''(0)}{3!}+\dots$$
Kedjeregeln: $F'(t)=F_1\cdot\frac{\partial(a+th)}{\partial t}+F_2\frac{\partial(b+tk)}{\partial t}=F_1\cdot h+F_2\cdot k=\nabla F\cdot(h,k)=\nabla F\cdot\vec{u}$

Och speciellt om $t=0$: $F'(0)=\nabla F(a,b)\cdot\vec{u}$

Def
Första ordningens T-appx till t i $P=(a,b)$ ges av
$P_1(a+h,b+k)=(a,b)+f_1(a,b)h+f_2(a,b)k$
$P_1(x,y)=f(a,b)+f_1(a,b)(x-a)+f_2(a,b)(y-b)$

Självklart finns feltermer, $f(x,y)\neq P(x,y)$. För att få bättre approx tar vi högre ordningens T-utv. Om vi sätter $\vec{u}\cdot\nabla=\left(\frac{\partial}{\partial x}h+\frac{\partial}{\partial y}k\right)$: $F'(t)=(u\cdot\nabla)F(t)$
$F^{(n)}(t)=(u\cdot\nabla)^k\cdot F(t)$

För att få $F''(0)$ så kan vi räkna ut $(u\cdot\nabla)^2=\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2=h^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}+2hk\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+k^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}$

Slutsats: $F''(0)=h^2f_{11}(a,b)+2hk f_{12}(a,b)+k^2f_{22}(a,b)$

Andra gradens T-appx ges av: $P_2(a+h,b+k)=f(\underbrace{a,b}_{\text{Punkt}})+\underbrace{f_1(a,b)h+f_2(a,b)k}_{\nabla f(a,b)\cdot(h,k)\ \text{vektor}}+\overbrace{\frac{h^2f_{11}(a,b)}{2}+\frac{2hk f_{12}(a,b)}{2}+\frac{k^2f_{22}(a,b)}{2}}^{\text{Matris}}$

Hädanefter kommer vi utsättas för 3-dim matriser osv... Varför matriser?

$$[h,k]\begin{bmatrix}f_{11} & f_{12}\\ f_{21} & f_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}h\\k\end{bmatrix}=h^2f_{11}(a,b)+2hkf_{12}(a,b)+k^2f_{22}(a,b)$$

Matrisen (som bestämmer den kvadratiska formen) kallas Hessianen.
1-var: $f(t)=f(0)+f'(0)t+f''(0)\frac{t^2}{2}+\dots$
$f(a+h,b+k)=f(a,b)+\nabla f\cdot(h,k)+[h,k]\ \text{hess}\begin{bmatrix}h\\k\end{bmatrix}$

Hessianen säger mycket om krökningen/max/min etc.