Tack till den store komikern för anteckningarna!

LTI-System

$y(t) = (Sx)(t)$ där t.ex. $y'(t) - ay(t) = x(t) \Rightarrow y(t) = e^{at} \cdot y(0) + \int_0^t e^{a(t-\tau)} d\tau$

Vanligt antagande: $y(0), x(\tau) = 0$ för alla $\tau < 0$.

$y(t) = \int_0^t e^{a(t-\tau)} d\tau = \int_{-\infty}^t e^{a(t-\tau)} x(\tau)$

pga $x(\tau) = 0, \tau < 0$

$\left\{ \text{Inför } h(t) = e^{at} u(t), \quad u(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t \leq 0 \end{cases} \right\}$

All info finns i h.

$= \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{h(t-\tau)}_{=0 \text{ om } t<\tau} x(\tau) d\tau = (h * x)(t)$

Impulssvar för systemet $y(t) = (Sx)(t)$

Mer allmänt

Varje system på formen $y(t) = (h * x)(t)$ är linjärt och tidsinvariant.

- Stabilt $\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < +\infty$
- Kausalt $\Leftrightarrow h(t) = 0$ för alla $t < 0$

Kom ihåg!
$x_{t_0}(t) = x(t - t_0)$

Vi vill visa att $(Sx)(t) = y_{t_0}(t) = y(t_0 - t)$

Påverkar ej arean.

$(Sx_{t_0})(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau) x_{t_0}(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau) x(\tau - t_0) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h((t-t_0) - (\tau - \cancel{t_0})) x(\tau - \cancel{t_0}) d\tau =$

$\int_{-\infty}^{\infty} h((t-t_0) - \tau) x(\tau) d\tau = y(t - t_0) = y_{t_0}(t) \Rightarrow S$ tidsinvariant.

Ex

$y(t) = x(-t)$, linjärt

$(Sx)(t) = x_{t_0}(-t) = x(-t - t_0) \neq y_{t_0}(t) = x(-(t - t_0)) = x(-t + t_0)$

Fouriertransformer

$x : (-\infty, \infty) \to \mathbb{C} \quad \int_{-\infty}^{\infty} |x(\tau)| d\tau < +\infty$ (integrerbar)

$X(j\omega) := \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$, ω reellt   kallas för fouriertransformen av x

Egenskaper

i) $\omega \mapsto X(j\omega)$ kontinuerlig + begränsad

ii) Om x_1, x_2 är integrerbara signaler och deras F-transformer $(X_1(j\omega) = X_2(j\omega))$ för alla ω gäller det att $\int_{-\infty}^{\infty} |x_1(\tau) - x_2(\tau)| d\tau = 0$ (ty integrering över hela skiten) Mogtt Robert...)

- Om h, x är integrerbara och $y = h * x = Sx(t)$ så är y integrerbar och $Y(j\omega) = H(j\omega) \cdot X(j\omega)$

$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = F(x(\omega))$

- $F(h * x)(\omega) = (Fh)(\omega)(Fx)(\omega)$ om $y = h * x \Rightarrow Y(j\omega) = H(j\omega) X(j\omega)$
- $F(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 F x_1 + \alpha_2 F x_2$
- $x(t) = z(t - t_0) \rightsquigarrow X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} z(\tau - t_0) e^{-j\omega\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} z(\tau - \cancel{t_0}) e^{-j\omega(\tau - \cancel{t_0} + t_0)} d\tau = e^{-j\omega t_0} \cdot Z(j\omega)$

Antag $\lim_{t\to\pm\infty} Z(t) = 0$

- $x(t) = z'(t) \rightsquigarrow X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} z'(t)e^{-j\omega t}dt = \underbrace{\left[z(t)e^{-j\omega t}\right]_{-\infty}^{\infty}}_{=0,\ z \text{ integrerbar}} + j\omega \cdot \int_{-\infty}^{\infty} z(t)e^{-j\omega t}dt = j\omega \cdot Z(j\omega)$
- Om $\int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|\, d\omega < +\infty \Rightarrow x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$
- Om $x(t) = t\,z(t) \rightsquigarrow X(j\omega) = j\,Z'(j\omega)$ (*)

Ex

Antag att $y(t) = (h * x)(t)$

Om $x(t) = e^{-t}u(t)$ & $y(t) = te^{-t}u(t)$ bestäm h (impulssvar).

Naivt: Lös ut h i: $te^{-t}u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)e^{-t}d\tau$ (för alla t)

Kom ihåg att: $Y(j\omega) = H(j\omega)X(j\omega) \Rightarrow H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}$

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau = \int_0^{\infty} e^{-\tau}e^{-j\omega\tau}d\tau = \int_0^{\infty} e^{-(1+j\omega)\tau}d\tau = \left[\frac{-e^{-(1+j\omega)\tau}}{1+j}\right]_0^{\infty} = \left[\,|e^{j\omega t}| = 1\,\right] = \frac{1}{1+j\omega}$$

OBS!

$y(t) = t\,z(t)$, $z(t) = e^{-t}u(t) \rightsquigarrow Z(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega}$

(*) $\Rightarrow Y(j\omega) = j\,Z'(j\omega) = j\,\frac{-j}{(1+j\omega)^2} = \frac{1}{(1+j\omega)^2} \Rightarrow H = \frac{1}{1+j\omega} \Rightarrow h(t) = e^{-t}u(t)$

Frekvenssvaret

$F[e^{-t}u(t)]$