

14.2 Upprepade enkelintegraler i x- & y-kordinater

Alla dubbelintegraler reduceras till enkel integraler

Sats (Fubinis sats)

Om vi har ett område R (R kompakt snölt) och f är en funktion på $R \subseteq \mathbb{R}^2$ & $\iint_R f dA < \infty$
Då kan man dela upp integralen i 2 enkelintegraler $\iint_R f dA = \int \left(\int f dx \right) dy + \int \left(\int f dy \right) dx$

Ex Låt R vara enhetskvarteren, $f = xy$

$$\iint_R f dA = \iint_R xy dA = \int_0^1 \left(\int_0^x xy dx \right) dy$$

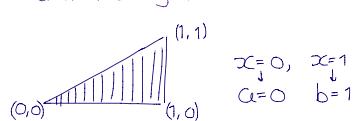
Beräkna först den inre $\int_0^x xy dx = \frac{x^2}{2} y \Big|_0^1 = \frac{y}{2}$, och sen den yttre: $\int_0^1 \frac{y}{2} dy = \frac{1}{4}$

Sats

Om fubinis sats gäller är integralen över ett område: $R = \bigcup_{a \leq x \leq b}^{d(x)} \bigcup_{c \leq y \leq d(x)} f(x,y) dxdy$, $\iint_R f dA = \int_a^b \left(\int_c^{d(x)} f(x,y) dy \right) dx$.
På samma sätt: $R = \bigcup_{c \leq y \leq d} \bigcup_{a \leq x \leq b(y)} f(x,y) dx dy$. Man slicar i olika riktningar

Ex Integrera $f = xy$ över triangeln $(0,0) \rightarrow (1,0) \rightarrow (1,1)$

Vi slicar i x-led och vill använda formeln

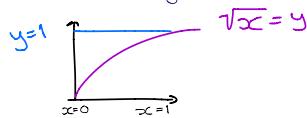


$$x=0, x=1 \\ a=0, b=1$$

$$\iint_R f dA = \int_0^1 \left(\int_0^x xy dy \right) dx \Rightarrow \int_0^x xy dy = \frac{xy^2}{2} \Big|_0^x = \frac{x^3}{2} \Rightarrow \int_0^1 \frac{x^3}{2} dx = \frac{x^4}{24} \Big|_0^1 = \frac{1}{8}$$

Ex Beräkna $\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^{1-x} e^{(y^3)} dy dx$

Först söker vi en primitiv till $e^{(y^3)}$ men det går inte på ett rimligt sätt. Problemet är att vi integrerar i fel ordning. Försök istället att förstå området och gör en y-slicing istället för x-slicing.



Hur slicar vi i y-led?
y mellan 0 & 1 => \int_0^1

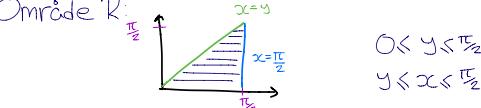
För fast y, mellan vilka x-värden ligger R? $0 \rightarrow y = \sqrt[3]{x} \Rightarrow x = y^3$

$$\int_0^1 \int_0^{x^{1/3}} e^{(y^3)} dy dx = \int_0^1 e^{(y^3)} dy = [e^{(y^3)} \text{ konstant}] = x e^{(y^3)} \Big|_0^1 = y^3 e^{(y^3)} \Rightarrow \int_0^1 y^3 e^{(y^3)} dy = [u = y^3, du = 3y^2 dy] =$$

Ex Beräkna $\int_0^{\pi/2} \int_y^{\pi/2} \sin(\frac{x}{y}) dx dy$

Vi stöter på problem då det är "omöjligt" att beräkna $\int \sin(\frac{x}{y}) dx$.

Område R:



Om vi slicar i x-led.

$$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$

Fast x i y mellan 0 & x

$$\Rightarrow \int_0^{\pi/2} \int_0^x \sin(\frac{x}{y}) dy dx = \int_0^{\pi/2} \left[\frac{\sin(x)}{x} y \right]_0^x dx = \int_0^{\pi/2} \sin(x) dx = -\cos(x) \Big|_0^{\pi/2} = 0 - (-\cos(0)) = 1$$

14.3 Generaliserade integraler och m-värdessatsen

Medelvärdessatsen: Om R är integrerbar, kompakt med ändlig rand och f kontinuerlig.

$$\exists (x_0, y_0) \in R \text{ sa } f(x_0, y_0) = \frac{1}{\text{area}(R)} \iint_R f dA$$

Bevis

Eftersom R kompakt, har ändlig rand, och f kontinuerlig $\Rightarrow \iint_R f dA$ existerar
 $\Rightarrow f$ har globalt max/min

Globalt max/min $\Rightarrow \forall (x, y) \in R \quad f(x_{\min}, y_{\min}) \leq f(x, y) \leq f(x_{\max}, y_{\max})$

Integrera allt: $\iint_R f_{\min} dA \leq \iint_R f dA \leq \iint_R f_{\max} dA$

$$f_{\min} \iint_R 1 dA \leq \iint_R f dA \leq f_{\max} \iint_R 1 dA$$

Pga kontinuitet antas alla värden mellan f_{\min} & f_{\max} .

Ex Bestäm medelvärde till funktion $f(x,y) = xy$ på triangeln $(0,0) \rightarrow (1,0) \rightarrow (1,1)$.
Vi behöver göra 2 saker: 1) Räkna ut arean.

2) Räkna ut $\iint_R xy dA$

1) $A = B \cdot h \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$
2) $\iint_R xy dA = \left[\int_0^x xy dy \right] = \left[xy^2 \right]_0^x = \left[x^2 \right]_0^1 = \int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{3}$

Medelvärde: $\frac{\iint_R xy dA}{\iint_R dA} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$

Ex Medelvärde till $x^2 + y^2$ över samma triangel.
 $\iint_R (x^2 + y^2) dxdy = \left[\int_0^x (x^2 + y^2) dy \right] = \left[x^2 y + \frac{y^3}{3} \right]_0^x = \left[\frac{4}{3} x^3 \right]_0^1 = \frac{4}{3}$

Medelvärdet: $\frac{4}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{9}$

Mer generaliserade integrator

En variabel hade typ samma sätter som de vi talat om rörande integrering. Dvs $\iint_R f_{\text{komp}} dA$ finns.
Vi integrerade dock bara över kompatta, slutna, interval eller punkter, men även tex \mathbb{R} .

Ex $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x} dx = -e^{-x} \Big|_{-\infty}^{\infty} = 0 - (-e^0) = 1$

Vi vill också integrera över större områden:

Ex Integrera e^{-x^2} över området som är begränsat av $y=x$, $x>0$ och $y=-x$.
 $\int_{-x}^x e^{-x^2} dy = \int_{-x}^x [e^{-x^2}(x - (-x))] dx = \int_{-x}^x 2xe^{-x^2} dx = \left[u = x^2, du = 2x \right] = \int_{-u}^{\infty} e^{-u} du = 1$