Rep Fouriertransformer

LTI-System

$y(t) = (h * x)(t) := \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)x(\tau)\,d\tau$

Systemet är stabilt $\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)|\,d\tau < \infty$

Kausalitet $\Leftrightarrow h(t) = 0$ för alla $t < 0$

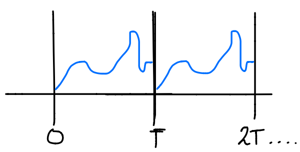
Fouriertransformen

Om $\int_{-\infty}^{\infty} |x(\tau)|\,d\tau < \infty$ definieras $X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)e^{-j\omega\tau}\,d\tau$, ω reellt

X är alltid en kontinuerlig funktion. Om x är kontinuerlig bestäms x entydigt av X.
Om $\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)|\,d\tau < \infty$ och $y(t) = (h * x)(t)$ gäller $\int_{-\infty}^{\infty} |y(\tau)|\,d\tau < \infty$
och $Y(j\omega) = H(j\omega)X(j\omega)$

Fourierserier

Tar hand om signaler som är periodiska.
$x : (-\infty, \infty) \to \mathbb{C}$ är T-periodisk om $x(t+T) = x(t)$ för alla t.



x är entydigt bestämt mellan $0 \leq t \leq T$.

För alla n

T-periodisk x: $\int_{-\infty}^{\infty} |x(\tau)|\,d\tau = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{nT}^{(n+1)T} |x(\tau)|\,d\tau = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{0}^{T} |x(\tau)|\,d\tau = \infty \int_{0}^{T} |x(\tau)|\,d\tau \Rightarrow$

Integralen är bara ändlig om $\int_{0}^{T} |x(\tau)\,d\tau = 0 \Rightarrow x(\tau) = 0$ för "nästan alla τ".

Vi kan alltså INTE fouriertransformera T-periodiska signaler.

Givet en T-periodisk signal x, s.a. $\int_{0}^{T} |x(\tau)\,d\tau < \infty$ så definieras för heltal k, dess k:te fourierkoefficient: $C_k (= a_k) = \frac{1}{T}\int_{0}^{T} x(\tau)e^{-\frac{2\pi j k \tau}{T}}\,d\tau = \frac{1}{T}\int_{0}^{T} x(\tau)e^{-j\omega_k\tau}\,d\tau$

$\omega_k = \frac{2\pi k}{T}$, $k \in \mathbb{Z}$

Om x är kontinuerlig bestäms x entydigt av $\ldots, a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, \ldots$
Om x är två ggr deriverbar kan vi återskapa x i en punkt t: $x(t) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} a_k \cdot e^{j\omega_k t}$ för alla t.

Hur bildar vi periodiska signaler?

$\tilde{x}(-\infty, \infty) \to \mathbb{C}$, $\int_{-\infty}^{\infty} |x(\tau)|\,d\tau < \infty$

Definiera $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{x}(t-nT)$ ← Periodicering av $\tilde{x}$.

Ovidkomlig

Obs! $x(t+T) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{x}(t+T-nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{x}(t-(n-\cancel{1})T) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{x}(t-nT) = x(t)$

för alla $k, n \in \mathbb{Z}$

$C_k = C_k(\tilde{x}) = \frac{1}{T}\int_{0}^{T} x(t)e^{-j\omega_k t}\,dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T}\int_{0}^{T} \tilde{x}(t-nT)e^{-j\omega_k t}\,dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T}\int_{nT}^{(n+1)T} \tilde{x}(t)e^{-j\omega_k(t+nT)}\,dt = \left\{ e^{-j\omega_k nT} = e^{-j\cdot\frac{2\pi k}{\cancel{T}}\cdot n\cancel{T}} = 1 \right\} =$
$\frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{x}(t)e^{-j\omega_k t}\,dt = \frac{1}{T}\tilde{X}(j\omega_k)$

LTI-System $y(t)=(h*x)(t)$, antag att $\int_{-\infty}^{\infty}|h(\tau)|d\tau<\infty \iff$ (Stabilt)

Om x begränsad T-per signal är även y begränsad (stabilitet) och T-periodisk (tidsinvarians).
Det gäller även att $C_k(y)=H(j\omega_k)C_k(x)$ $\left(\omega_k=\frac{2\pi k}{T}\right)$

Analogt med $Y=H\cdot X$

Ex $x(t)=\cos(2t)+3\sin(t)$

Bestäm fourierkoeff. - Perioden? $T=2\pi$ ($\cos(2t)$ är π, $\sin(t)$ är 2π)

Alt 1

$$C_k(x)=\frac{1}{T}\int_0^T(\cos(2t)+3\sin(t))e^{-j\frac{2\pi k}{2\pi}t}dt=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\underbrace{\cos(2t)e^{-jkt}}_{\cos(2t)=\frac{1}{2}(e^{j2t}+e^{-2jt})}dt+\frac{3}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin(t)e^{-jkt}dt=\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}e^{2jt}\cdot e^{-jkt}+\ldots$$

$$\omega_k=\frac{2\pi k}{T}=\frac{2\pi k}{2\pi}=k$$

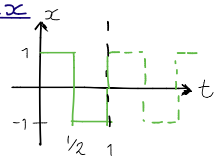
Alt 2

$$x(t)=\frac{1}{2}\left(e^{2jt}-e^{-2jt}\right)+\frac{3}{2j}\left(e^{jt}-e^{-jt}\right)=\frac{1}{2}e^{-2jt}-\frac{3}{2j}e^{-jt}+\frac{3}{2j}e^{jt}+\frac{1}{2}e^{2jt}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}C_k(x)e^{j\omega_k t}=$$

Fourierkoeff!

$$\ldots+C_{-3}(x)e^{-3jt}+C_{-2}e^{-2jt}+\ldots+C_2(x)e^{2jt}+C_3(x)e^{3jt}+\ldots \Rightarrow \begin{cases} C_{-2}(x)=\frac{1}{2} & C_1(x)=\frac{3}{2j} \\ C_{-1}(x)=\frac{-3}{2j} & C_2(x)=\frac{1}{2} \\ C_k(x)=0 & k\neq -2,-1,1,2 \end{cases}$$

Ex



$T=1$

$$x(t)=\begin{cases}1 & 0\leq t<1/2 \\ -1 & 1/2\leq t<1\end{cases}$$

$$C_k(x)=\frac{1}{T}\int_0^T x(t)e^{-j\omega_k t}dt=\frac{1}{1}\int_0^1 x(t)e^{-j2\pi kt}dt=\int_0^{1/2}\overset{=1}{x(t)}e^{-j2\pi kt}dt+\int_{1/2}^1\overset{=-1}{x(t)}e^{-j2\pi kt}dt=\int_0^{1/2}e^{-2\pi jkt}dt+\int_{1/2}^1-e^{-2\pi jkt}dt=$$
$$\left[\frac{-e^{-j2\pi kt}}{2\pi jk}\right]_{t=0}^{1/2}-\left[\frac{-e^{j2\pi kt}}{2\pi jk}\right]_{t=1/2}^{1}$$

$$\underset{k\neq 0}{C_k(x)}=\frac{1}{2\pi jk}\left(e^{-\pi jk}-(-1)\right)-\frac{1}{2\pi jk}\left(-1+e^{-\pi jk}\right)=\frac{2}{2\pi jk}\left(1-e^{-\pi jk}\right)=\frac{1-e^{\pi jk}}{\pi jk}=\left\{e^{-\pi jk}=(-1)^k\right\}=\frac{1-(-1)^k}{\pi jk}=\begin{cases}0 & k\in\mathbb{Z}_+ \\ \frac{2}{\pi jk} & k\in\mathbb{Z}_-\end{cases}$$

$$C_0(x)=\int_0^1 x(t)dt=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0$$

Sågs i grafen.