14.4

Vid variabelsubstitution eller koordinatbyte: $x = x(s,t)$, $y = y(s,t)$ så ändras areaelementet $dx\,dy = dA = \_\_ ds\,dt$

$[dx, dy]$ = Jacobianmatrisen $\begin{bmatrix} ds \\ dt \end{bmatrix}$

Speciellt: $\iint_R f\,dx\,dy = \iint_S f \frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)}\,ds\,dt$ om S = bilden av R.

Sats

Låt $D \to C$ vara ett variabelbyte där funktionerna har kont. partiella derivator & antag att f är integrerbar på C. Då gäller att $\iint_C f\,dx\,dy = \iint_S g(s,t) \frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)}\,ds\,dt$ där $g(s,t) = f(x(s,t), y(s,t))$

Speciellt: $\frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)} = \frac{1}{\frac{\partial(s,t)}{\partial(x,y)}}$

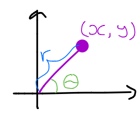
Vad menar Dener med variabelbyte?

$D \to C$ är en bijektiv funktion.

$(s,t) \mapsto (x(s,t), y(s,t))$

Polära koordinater: $x = x(r,\theta) = r\cos\theta$ $\quad r \in [0,\infty)$

$y = y(r,\theta) = r\sin\theta$ $\quad \theta \in [0,2\pi]$



Ex Vad är Jacobianmatrisen & dess det för detta var. byte?

$Jac = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nabla x \\ \nabla y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{bmatrix}$

$\det(Jac) = \cos\theta \cdot r\cos\theta - r\sin\theta \cdot \sin\theta = r(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = r$

dvs $dx\,dy = r\,dr\,d\theta$

Dener använde detta för att räkna ut sannolikhetsexemplet på föregående föreläsning. Man vill använda detta om man vill integrera över cirkelaktiga områden att när integranden beror på $r = \sqrt{x^2+y^2}$ eller $\theta = \arctan(\frac{y}{x})$

Ex Räkna ut arean till området som är begränsat av området: $x+y=4$, $x+y=3$, $x-y=1$, $x-y=2$

Förslag: gör ett variabelbyte $u = x+y$, $v = x-y$ $\Rightarrow$ gränser $3 \leq u \leq 4$, $1 \leq v \leq 2$

Arean $= \iint_R dA = \int_3^4 \int_1^2 \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\,dv\,du = \left\{ \begin{array}{l} \text{För att kunna göra detta} \\ \text{måste } x \text{ och } y \text{ uttryckas i } u \text{ och } v \end{array} \right\} = \left\{ \text{Skriv om som } \frac{1}{\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}} \right\} = \int_3^4 \int_1^2 \frac{1}{2}\,dv\,du = \frac{1}{2}$

Ex Bestäm $\iint_R e^{-\frac{x^2}{y}}\,dx\,dy$ om R är området begränsat av $y = x^2$, $y = 2x^2$, $x = y^2$, $x = 3y^2$

Skriv om: $1 = \frac{x^2}{y}$, $\frac{1}{2} = \frac{x^2}{y}$, $1 = \frac{y^2}{x}$, $\frac{1}{3} = \frac{y^2}{x}$ Vi verkar vilja ha: $\frac{1}{2} \leq \frac{x^2}{y^2} \leq 1$, $\frac{1}{3} \leq \frac{y^2}{x} \leq 1$

Sätt $u = \frac{x^2}{y}$, $v = \frac{y^2}{x}$

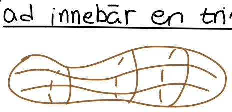
$\iint_R e^{-\frac{x^2}{y}}\,dx\,dy = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \int_{\frac{1}{3}}^{1} e^{-u} \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\,dv\,du$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Betrakta } Jac: \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} \Rightarrow |\det(Jac)| = \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \frac{1}{\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}} \\ Jac = \begin{bmatrix} \frac{2x}{y} & -\frac{x^2}{y^2} \\ -\frac{y^2}{x^2} & \frac{2y}{x} \end{bmatrix} \Rightarrow \det(Jac) = \frac{2x}{y} \cdot \frac{2y}{x} - \frac{y^2}{x^2} \cdot \frac{x^2}{y^2} = 4-1=3 \end{array} \right\} \quad \int_{1/2}^{1} \int_{1/3}^{1} e^{-u} \cdot \frac{1}{3}\,dv\,du = \ldots$$

14.5 Trippelintegraler

Definitionen av en trippelintegral $\iiint_R f\,dV$ över ett 3-dim område R är samma som för dubbelintegraler men rektanglar byts ut mot boxar. Samma formella satser gäller för trippel- som dubbelintegraler, speciellt medelvärdessatsen som Dener inte tänker visa igen.

Vad innebär en trippelintegral?



$f \geq 0$

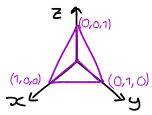
- Hypervolym
- Om f densitet i en punkt på $R \Rightarrow \iiint_R f\,dV$ = massan
- f laddning $\Rightarrow \iiint_R f\,dV$ = total charge
- $f = 1 \Rightarrow \iiint_R dV$ = Volym(R)

Ex $\square = R$ integrera $f(x,y,z) = x^5 + \sin(z)$ över kuben: $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$, $0 \leq z \leq c$

$\int_0^a\int_0^b\int_0^c (x^5+\sin(z))\,dz\,dy\,dx = \{\text{linjäritet}\} = \int_0^a\int_0^b\int_0^c x^5\,dz\,dy\,dx + \int_0^a\int_0^b\int_0^c \sin(z)\,dz\,dy\,dx = \left\{\int_0^a\int_0^b x^5 c\,dy\,dx = \int_0^a x^5 bc\,dx = \left[\frac{bcx^6}{6}\right]_0^a = \frac{a^6bc}{6}\right\} =$

$\frac{a^6bc}{6} + \int_0^a\int_0^b\int_0^c \sin(z)\,dz\,dy\,dx = \left\{\int_0^a\int_0^b [-\cos(z)]_0^c\,dy\,dx = \int_0^a\int_0^b (1-\cos(c))\,dy\,dx = (1-\cos(c))\int_0^a\int_0^b dy\,dx = (1-\cos(c))\cdot ab\right\} = \frac{a^6bc}{6} + (1-\cos(c))ab$

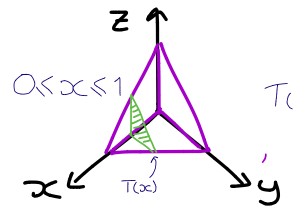
Ex Hur kan man uttrycka $\iiint_R f\,dv$ som en upprepad enkelintegral om R är en pyramid.



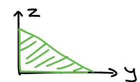
① Hur slicar man?
② Hur tillämpar man Fubini?

Fråga 1

Vi väljer att börja med x-slicing.
Detta ger oss ett segment $T(x)$ som är en skiva vid det valda x-värdet.



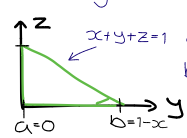
$0 \leq x \leq 1$

$T(x) =$ 

$\int_0^1 dx \iint_{T(x)} f\,dz\,dy = \iiint_R f\,dv$

Vi väljer att fortsätta vårt slicande i y-riktning.

$\iint_{T(x)} = \int_a^b\int_c^d f\,dz\,dy = \int_0^{1-x}\int_0^{1-x-y} f\,dz\,dy$

$T(x) =$ 

enligt uppg!
b ges då av $x+y+0=1 \Rightarrow y = 1-x$

Slutsats: $\iiint_R f\,dv = \int_0^1\int_0^{1-x}\int_0^{1-x-y} f\,dz\,dy\,dx$

För att lista ut c och d kollar vi på att $z = 1-x-y$ och använder det som d. $c=0$ ty $z=0$ på y-axeln.

Ex Över vilket objekt integrerar vi om vi betraktar $\int_0^1\int_z^1\int_0^y f\,dx\,dy\,dz$

Går den att skriva om på annat vis?