Laplacetransformen $x:(-\infty,\infty)\longrightarrow \mathbb{C}$

$X(s)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}dt \quad , s\in\mathbb{C}$

1) $x(t)=e^{at}u(t) \rightsquigarrow X(s)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{at}e^{-st}u(t)dt=\int_0^{\infty} e^{-(s-a)t}dt=-\frac{e^{-(s-a)t}}{s-a}\Big|_0^{\infty}=\frac{1}{s-a}$, $Re(s)>a$, a reella

2) $x(t)=e^{at}u(-t) \rightsquigarrow X(s)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{at}e^{-st}u(t)dt=\int_{-\infty}^{0} e^{-(s-a)t}dt=\frac{-e^{-(s-a)t}}{s-a}\Big|_{-\infty}^{0}=-\frac{1}{s-a}$, $Re(s)<a$

$x \longleftrightarrow X(s)$, ROC (Region of Convergence)

$z(t)=x(t-t_0) \leftrightarrow Z(s)=e^{-st_0}X(s)$ Om $X(s)$ har ett visst ROC kommer $Z(s)$ ha samma ROC.
$z(t)=e^{s_0t}x(t) \longleftrightarrow Z(s)=X(s-s_0)$ Om $Re(s)>Re(s_0)+ROC(X)$
$z(t)=x'(t) \longleftrightarrow Z(s)=sX(s)$ Samma ROC som $X(s)$
$x''(t) \longleftrightarrow Z(s)=s^2X(s)$
$z(t)=x'(t) \longleftrightarrow Z(s)=s\cdot X(s)-x(0)$
$x''(t) \longleftrightarrow Z(s)=s^2X(s)-sx(0)-x'(0)$
$z=h*x \longleftrightarrow Z(s)=H(s)X(s)$ DUBBELSIDIG: Krävs även att $ROC(H)\cap ROC(X)\neq\emptyset$

Dubbelsidiga Laplace
$\neq$
Enkelsidig Laplace

När kör man vilken?

Om vi har ett LTI-system och vill lösa $y=h*x$ utan beg.villkor: Dubbelsidig
Om vi vill lösa ODE med konst. koefficienter, med beg.villkor: Enkelsidig

Ex Modelltentamen

Givet
LTI-system $y=h*x$
$y'(t)-2y(t)=x(t-1)$

Sökt
h

Lösning

$Y(s)=H(s)X(s) \Rightarrow H(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}$

$y'(t)-2y(t)=x(t-1) \overset{LT}{\rightsquigarrow} sY(s)-2Y(s)=e^{-s}X(s) \Rightarrow \frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{e^{-s}}{s-2}=H(s)$

$H(s)=e^{-s}\cdot H_0(s)=e^{-s}\cdot\frac{1}{s-2}$, $H_0(s)=\frac{1}{s-2} \rightsquigarrow h(t)=e^{2t}u(t)$; $\rightsquigarrow h(t)=-e^{2t}u(-t)$ Vi vet inte vilken så vi tar båda.

i) $h(t)=h_0(t-1) \rightsquigarrow e^{2(t-1)}u(t-1)$; $\rightsquigarrow -e^{2(t-1)}u(-(t-1))=-e^{2(t-1)}u(1-t)$

Om vi antar att systemet är kausalt $\Rightarrow h(t)=e^{2(t-1)}u(t-1)$, $h(t)=0$, $t<0$
Kausalitet = ROC(H) höger halvplan

Rep Fourierserie

Fungerar bara för periodiska signaler.

$x:(-\infty,\infty)\rightarrow\mathbb{C}$
Det existerar ett $T>0$ s.a. $x(t+T)=x(t)$ för alla t.
$C_k=C_k(x)=\frac{1}{T}\int_0^T x(t)e^{-j\omega_kt}dt$, $\omega_k=\frac{2\pi k}{T}$, $k\in\mathbb{Z}$
$x(t)\rightsquigarrow\sum_{k=-\infty}^{\infty}C_ke^{j\omega_kt}$

Om x är två ggr deriverbar $\Rightarrow x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}C_k(x)e^{j\omega_kt}$ för alla t.
Om x är två ggr deriverbar förutom i hopp-diskont. S.a. både höger/vänsterderivator existerar:
$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}C_k(x)e^{j\omega_kt}$ för alla t vilka ej är hoppunkt!
Om t är en hoppunkt, $\sum_{k=-\infty}^{\infty}C_k(x)e^{j\omega_kt}=\frac{1}{2}(x(t_0^+)+x(t_0^-))$ (höger-/vänstergränsvärden)

$$C_k = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\underbrace{e^{-j\omega_k t}}_{\cos(\omega_k t)-j\sin(\omega_k t)}dt = \frac{1}{T}\left(\int_0^T x(t)\cos(\omega_k t)dt - j\int_0^T x(t)\sin(\omega_k t)dt\right) = A_k - jB_k$$

Om x T-periodisk: $\int_0^T x(t)dt = \int_{-T/2}^{T/2} x(t)dt = \int_{-T/4}^{T/4} x(t)dt = \ldots$

Om x jämn: $\int_{-T/2}^{T/2} x(t)dt = 2\cdot\int_0^{T/2} x(t)dt$

Om x udda: $\int_{-T/2}^{T/2} x(t)dt = 0$

$$x(t) = x_{even}(t) + x_{odd}(t) = \frac{1}{2}\big(x(t)+x(-t)\big) + \frac{1}{2}\big(x(t)-x(-t)\big)$$

Om $x(t)$ T periodisk $\Rightarrow$ x_{even} & x_{odd} T-periodisk

$x_{even}\cdot\cos(\omega_k t)$ jämn
$x_{even}\cdot\sin(\omega_k t)$ udda

$$\Rightarrow \begin{cases} \int_{-T/2}^{T/2} x_{even}(t)\cos(\omega_k t)dt = 2\int_0^{T/2} x_{even}(t)\cos(\omega_k t)dt \\ \int_{-T/2}^{T/2} x_{even}\sin(\omega_k t)dt = 0 \end{cases}$$

$x_{odd}\cdot\cos(\omega_k t)$ udda
$x_{odd}\cdot\sin(\omega_k t)$ jämn

$$\Rightarrow \begin{cases} \int_{-T/2}^{T/2} x_{odd}(t)\sin(\omega_k t)dt = 2\int_0^{T/2} x_{odd}(t)\sin(\omega_k t)dt \\ \int_{-T/2}^{T/2} x_{odd}\cos(\omega_k t)dt = 0 \end{cases}$$

$$C_k(x) = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x_{even}\cdot\cos(\omega_k t)dt - \frac{j}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x_{even}\cdot\sin(\omega_k t)dt + \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x_{odd}\cdot\cos(\omega_k t)dt - \frac{j}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x_{odd}\sin(\omega_k t)dt =$$

$$\underbrace{\frac{2}{T}\int_0^{T/2} x_{even}(t)\cos(\omega_k t)dt}_{A_k} - j\underbrace{\frac{2}{T}\int_0^{T/2} x_{odd}\cdot\sin(\omega_k t)dt}_{B_k}$$

$$\boxed{\begin{aligned} C_k &= A_k - jB_k \\ C_{-k} &= A_k + jB_k \end{aligned}}$$

Notis!

$\omega_{-k} = \frac{-2\pi k}{T} = -\omega_k$

$$\begin{cases} A_{-k} = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} x_{even}(t)\cos(-\omega_k t)dt = A_k \\ B_{-k} = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} x_{odd}(t)\sin(-\omega_k t)dt = -B_k \end{cases}$$