Övningstal 2.13 (pss10)
Ett dynamiskt system beskrivs av modellen

$$
\begin{aligned}
\dot{p}(t) + p(t) &= q^3(t)u(t) \\
\varepsilon\dot{q}(t) + q(t) &= e^{q(t)}u^2(t) \\
y(t) &= p(t)q(t)
\end{aligned}
$$

där u är instorheten, medan y är utstorheten. Antag att ε är litet, vilket kan approximeras med $\varepsilon = 0$.

a) Formulera en tillståndsmodell för godtyckligt ε och för $\varepsilon = 0$. På vilket sätt förändras den andra differentialekvationen och dimensionen på problemet (antalet tillståndsvariabler)? Tolka resultatet i termer av dynamisk respektive statisk relation.

b) Bestäm den arbetspunkt (p_0, q_0, u_0) där stationärtillståndet $p_0 = 0.5$, d.v.s. bestäm q_0 och u_0. (Det kan påpekas i sammanhanget att ekvationen $z^7 = e^z/4$ har lösningen $z = 0.9380$).

c) Ställ upp en linjär tillståndsmodell för systemet, som gäller nära arbetspunkten (p_0, q_0, u_0), då $\varepsilon > 0$. Bestäm systemets egenvärden och studera vad som händer då $\varepsilon \to 0$.

d) Bestäm överföringsfunktionen $G(s)$ från instorheten Δu till utstorheten Δy då $\varepsilon > 0$. Vad blir systemets tidskonstanter? Sammanfatta slutsatserna angående systemdimension, poler, tidskonstanter och dynamiskt kontra statiskt samband då $\varepsilon \to 0$.

a) Godtyckligt ε

$$
\begin{cases} x_1 = p \\ x_2 = q \\ y = x_1 x_2 \end{cases}
\Rightarrow
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= \dot{p} = -p + q^3 \cdot u = -x_1 + x_2^3 \cdot u \\
\dot{x}_2 &= \dot{q} = -\tfrac{1}{\varepsilon} q + \tfrac{1}{\varepsilon} e^{q} u^2 = -\tfrac{1}{\varepsilon} x_2 + \tfrac{1}{\varepsilon} e^{x_2} u^2
\end{aligned}
$$

$\varepsilon \to 0 \Rightarrow$ x_1 oförändrad

$\dot{x}_2 \longrightarrow \infty$, Oändligt stor derivata $\Rightarrow$ jättesnabb dynamik, som ändras så fort att vi inte behöver reglera den (den långsamma dynamiken dominerar)
$\Rightarrow$ $x_2 = e^{x_2} u^2$, statisk relation! I vår tillståndsmodell vill vi bara ha derivator. <u>Ta bort!</u>

$$
\begin{cases} \dot{x} = \dot{x}_1 = -x_1 + x_2^3 \cdot u \\ y = x_1 x_2 \end{cases}
$$

, dimensionen minskade med ett!

b) Stationär pkt $\Rightarrow$ Alla derivater $= 0$.

$$
\begin{aligned} -x_{10} + x_{20}^3 u_0 &= 0 \\ -\tfrac{1}{\varepsilon} x_{20} + \tfrac{1}{\varepsilon} e^{x_{20}} u_0^2 &= 0 \end{aligned}
\Leftrightarrow
\begin{aligned} -p_0 + q_0^3 u_0 &= 0 \\ -\tfrac{q_0}{\varepsilon} + \tfrac{e^{q_0}}{\varepsilon} u_0^2 &= 0 \end{aligned}
\Leftrightarrow
\begin{aligned} q_0^3 u_0 &= 0.5 \\ q_0 &= e^{q_0} u_0^2 \end{aligned}
\Leftrightarrow
u_0 = \frac{0.5}{q_0^3} \Rightarrow q_0 = e^{q_0} \frac{0.25}{q_0^6} \Rightarrow q_0^7 = e^{q_0} 0.25
$$

Givet är att: $z^7 = \frac{e^z}{4}$ har lösning $z = 0.938$ $\Rightarrow$ $q_0 = 0.938$ $\Rightarrow$ $u_0 = \frac{0.5}{0.938} \approx 0.6058$

Arbpkt: $(0.5, 0.938, 0.6058)$

c)
$$
\begin{cases} \Delta \dot{x} = A\Delta x + B\Delta u \\ \Delta y = C\Delta x \end{cases}
$$

$$
A = \begin{bmatrix} -1 & 3x_2^2 u \\ 0 & -\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon} e^{x_2} u^2 \end{bmatrix} \underset{(x_{10}, x_{20}, u_0)}{=} \begin{bmatrix} -1 & 3q_0^2 u_0 \\ 0 & -\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon} e^{x_{20}} u_0^2 \end{bmatrix}
\qquad
B = \begin{bmatrix} x_2^3 \\ \frac{2}{\varepsilon} e^{x_2} u \end{bmatrix} \underset{(x_{10}, x_{20}, u_0)}{=} \begin{bmatrix} q_0^3 \\ \frac{2}{\varepsilon} e^{q_0} u_0 \end{bmatrix}
$$

$$
C = \begin{bmatrix} x_2 & x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_0 & p_0 \end{bmatrix}
$$

$$
\det(\lambda I - A) = 0
$$

$$
\det \begin{pmatrix} \lambda + 1 & -3q_0^2 u_0 \\ 0 & \lambda + \frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon} e^{q_0} u_0^2 \end{pmatrix} = (\lambda + 1)\left(\lambda + \tfrac{1}{\varepsilon} - \tfrac{1}{\varepsilon} e^{q_0} u_0^2\right) = 0
$$

$$
\lambda_1 = 1
$$

$$
\lambda_2 = -\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon} e^{q_0} u_0^2 = \frac{1}{\varepsilon}\Big(-1 + \underbrace{e^{q_0} u_0^2}_{= q_0}\Big) = -\frac{0.062}{\varepsilon} \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} -\infty
$$

d) Bestäm $G(s) = \frac{\Delta Y(s)}{\Delta U(s)}$, $\varepsilon > 0$

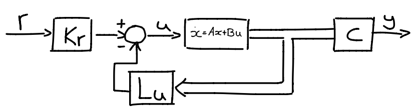
$$G(s) = C(sI-A)^{-1}B = \dots = \frac{q_0^4\,(s(\varepsilon+2)+8.062)}{(s+1)(\varepsilon s+0.062)}$$

Tidskonstanterna?

$$G(s) = K\,\frac{T_1 s+1}{(T_2 s+1)(T_3 s+1)} \Rightarrow \quad T_1 = \frac{\varepsilon+2}{8.062} \xrightarrow{\varepsilon\to 0} \frac{2}{8.062}, \quad T_2 = 1, \quad T_3 = \frac{\varepsilon}{0.062} \xrightarrow{\varepsilon\to 0} 0$$

Om en pol/ett egenvärde eller en tidskonstan $= 0$ finns ett statiskt samband i systemet. Då kan dimensionen reduceras.

<u>Tillståndsåterkoppling</u>



Styrlag: $u = -L_u x + K_r r$

L: Tillståndsåterkopplingskonstant

K_r: Förstärkningskonstant

$$\dot{x} = Ax + Bu = Ax + B(-L_u x + K_r r) = (A - BL_u)x + BK_r r$$
$$y = Cx$$

Övningstal 8.2 (psr2)
En satellits rotation ska styras med hjälp av ett drivande moment u. Momentjämvikt ger differentialekvationen

$$J\frac{d}{dt}\omega(t) = u(t)$$

där J är satellitens tröghetsmoment och ω är satellitens vinkelhastighet som tillsammans med vinkeln θ är tillgängliga för återkoppling. Antag i fortsättningen att $J = 1$.

a) Bestäm en tillståndsåterkoppling

$$u = -\ell_\theta\theta - \ell_\omega\omega + K_r\theta_r$$

så att de båda polerna för det återkopplade systemet placeras som en dubbelpol i $s = -\alpha$.

$$J\frac{d\omega(t)}{dt} = u(t) \Leftrightarrow \ddot{\theta}(t) = u(t) \quad (J=1)$$

$$\begin{cases} x_1 = \theta \\ x_2 = \dot{\theta} \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \dot{x}_1 = \dot{\theta} = x_2 \\ \dot{x}_2 = \ddot{\theta} = u \end{matrix} \Rightarrow \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

$$u = -\ell_\theta\theta - \ell_\omega\omega + K_r\theta_r = \underbrace{\begin{bmatrix} -\ell_\theta & -\ell_\omega \end{bmatrix}}_{L} x + K_r\theta_r$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} -\ell_\theta & -\ell_\omega \end{bmatrix} x + K_r\theta_r\right) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\ell_\theta & -\ell_\omega \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ K_r \end{bmatrix}\theta_r =$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\ell_\theta & -\ell_\omega \end{bmatrix}}_{A-BL_u} x + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ K_r \end{bmatrix}}_{BK_r}\theta_r$$

Önskad polplacering: $\alpha_c(s) = (s+\alpha)(s+\alpha) = s^2 + 2\alpha s + \alpha^2 = 0$

$$\det(sI - (A - BL_u)) = 0$$

$$\det\begin{pmatrix} s & -1 \\ \ell_\theta & s+\ell_\omega \end{pmatrix} = s(s+\ell_\omega) + \ell_\theta = s^2 + \ell_\omega s + \ell_\theta = 0 \Rightarrow \begin{matrix} \ell_\theta = \alpha^2 \\ \ell_\omega = 2\alpha \end{matrix} \Rightarrow L_u = \begin{bmatrix} \alpha^2 & 2\alpha \end{bmatrix}$$

K_r? $G_{ry}(0) = 1$

$$G_{ry}(s) = C(sI - (A - BL_u))^{-1}BK_r = \frac{1}{\det(sI - (A - BL_u))}\begin{bmatrix} s+\ell_\omega & 1 \\ -\ell_\theta & s \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ K_r \end{bmatrix} =$$

$$\frac{1}{s^2+\ell_\omega s+\ell_\theta}\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} K_r \\ sK_r \end{bmatrix} = \frac{K_r}{s^2+\ell_\omega s+\ell_\theta} = \{s=0\} = \frac{K_r}{\ell_\theta} = 1 \Rightarrow K_r = \ell_\theta = \alpha^2 \Rightarrow u(t) = \begin{bmatrix} -\alpha^2 & -2\alpha \end{bmatrix} x + \alpha^2\theta_r$$

Övningstal 8.7 (E20)

Ett linjärt system definieras av differentialekvationen $\dot{y}(t) = u(t)$, där u är insignal och y är utsignal. Systemet skall regleras genom tillståndsåterkoppling med integrerande verkan, innebärande att den utvidgade systembeskrivningen blir av ordning två. Processens tillstånd betecknas x_1 och regulatorns tillstånd x_2.

(a) Utför design av en sådan tillståndsåterkoppling där det återkopplade systemets poler placeras i $-1 \pm i\nu$. Vilket värde på ν motsvaras av ett kritiskt dämpat återkopplat system?

(b) Upprita ett tydligt schema över det återkopplade systemet, och bestäm istället parametern ν så att systemets fasmarginal blir 45 grader.

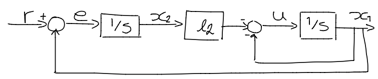
a) $x_1 = y$ $\qquad \dot{x}_1 = \dot{y} = u$

$x_2 = \int e\,dt = \int r - y\,dt = \int r - x_1\,dt \qquad \dot{x}_2 = r - x_1$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r$$

$u = -L_u x$,

$u = -l_1 x_1 - l_2 x_2$



<u>OSV</u>