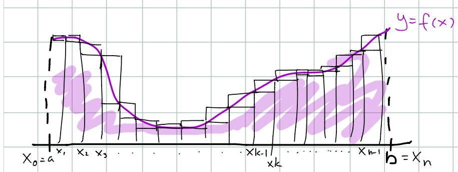
Integraler



$a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_{k-1}<x_k<\ldots<x_{n-1}<x_n=b$

Låt m_k och M_k vara tal s.a. $m_k\leq f(x)\leq M_k$ för $x_{k-1}\leq x\leq x_k$

Definiera översumman

$U(f,n)=\sum_{k=1}^{n} M_k(x_k-x_{k-1})$

Undersumman

$L(f,n)=\sum_{k=1}^{n} m_k(x_k-x_{k-1})$

Def

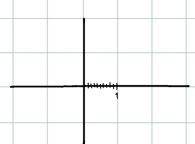
Om det fims precis ett tal I som är $\geq$ alla undersummor och $\leq$ alla översummor så kallas f intergrabel (integrerbar) och $I=\int_a^b f(x)\,dx$.

Sats

Om f är begränsad och styckvis kontinuerlig är f integrerbar. f kan även approximeras godtyckligt väl med en så kallad Riemannsumma. $\sum_{k=1}^{n} f(c_k)(x_k-x_{k-1})$, $x_{k-1}\leq c_k\leq x_k$

Ex på icke integrabel funktion

Dirichletfunktionen $d(x):[0,1]\to\mathbb{R}$ $\quad d(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbb{Q}\\ 0, & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$



Varje $U\geq 1$

Varje $L\leq 0$

Sats

1) $\int_a^b cf(x)+dg(x)=c\int_a^b f(x)+d\int_a^b g(x)$

2) $\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx$

3) $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right|\leq\int_a^b |f(x)|\,dx$, triangelolikheten

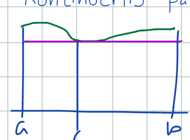
Sats Integralkalkylens huvudsats

Låt f vara en kontinuerlig funktion och $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$, då är $F'=f$

För beviset behöver (?) vi:

Integralkalkylens medelvärdessats.

f kontinuerlig på $[a,b]$, då finns ett $c\in[a,b]$ s.a. $\int_a^b f(x)\,dx=f(c)(b-a)$



Bevis

Låt $M=\max f(x)$, $x\in[a,b]$

$m=\min f(x)$, $x\in[a,b]$

$m\leq f(x)\leq M$

$\int_a^b m\,dx\leq\int_a^b f(x)\,dx\leq\int_a^b M\,dx \iff m(b-a)\leq\int_a^b f(x)\,dx\leq M(b-a) \iff m\leq\frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}\leq M$

Satsen om mellanliggande värden ger $\exists c$ s.a. $f(c)=\frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}$

Bevis av huvudsatsen

$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{1}{h}\left(\int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^{x} f(t)dt\right) = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt = [\text{m.v-satsen}] = \frac{1}{h} f(c)(x+h-x) = f(c) \to f(x)$ när $h \to 0$ $\quad x \leq c \leq x+h$ $\quad$ Övning: Fullborda beviset

Följdsats

Låt G vara en primitiv funktion till f, dvs. $G' = f$

Då är $\int_a^b f(t)dt = G(b) - G(a)$

Bevis

$\frac{d}{dx}(F-G) = f-f = 0$

$F - G = C$ (konstant)

$G = F - C$,

$G(b) - G(a) = F(b) - C - (F(a) - C) = F(b) - F(a) = F(b) - 0 = \int_a^b f(t)dt$

Ex

$\int_1^2 x + e^x dx = \frac{x^2}{2} + e^x \Big|_1^2 = \frac{2^2}{2} + e^2 - \left(\frac{1^2}{2} + e^1\right) = \frac{4}{2} + e^2 - \frac{1}{2} - e = \frac{3}{2} + e^2 - e$

$\frac{d}{dx}\int_0^x \sin^2 t\, dt = \sin x^2$

$\frac{d}{dx}\int_x^{x^2} e^{t^2} dt = \frac{d}{dx}\left(F(x^2) - F(x)\right) = F'(x^2)\underbrace{2x}_{\text{inre derivata}} - F'(x) = e^{x^4} 2x - e^{x^2}$

Primitiva funktioner

$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C$

$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$

$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$, ty $\ln|x| = \begin{cases} \ln x, & x>0 \\ \ln(-x) & x<0 \end{cases}$ $\quad \frac{d}{dx}\ln|x| = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x>0 \\ \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x} & x<0 \end{cases}$

Partiell integration

$(fg)' = f'g + fg' \Leftrightarrow f'g = (fg)' - fg' \Leftrightarrow \int f'g\,dx = fg - \int fg'\,dx$

Byt beteckningar

$\int fg\,dx = Fg - \int Fg'\,dx$

Ex

$\int \underset{g}{x} \cdot \underset{f}{\sin x}\, dx = (-\cos x)x - \int(-\cos x)\cdot 1\, dx = -x\cdot\cos x + \sin x + C$

$\int \underset{g}{x^2} \underset{f}{e^x}\, dx = e^x \cdot x^2 - \int e^x 2x\, dx = e^x x^2 - \left(e^x 2x - \int e^x \cdot 2\, dx\right) = e^x x^2 - 2xe^x + 2e^x + C$