Tentamen 2015-01-05, del 2

3. Låt $\vec{F}=(-ay, bx)$ vara ett vektorfält (a och b konst).

a) Låt C vara randen till ett område med inducerad orientering (normal, sen vänster). Bestäm en relation mellan a & b så $\oint_C F dr = \text{Area}(D)$.

Greens sats: $\iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dx dy = \oint_C F \cdot dr \Rightarrow \iint_D b-(-a)\, dx dy = (a+b) \iint dx dy = (a+b) \cdot \text{Area}(D)$.
(a+b) måste alltså vara lika med 1.

b) Använd $\oint F \cdot dr$ för att beräkna arean av området som ligger innanför kurvan

$$r(t) = 3(\cos(t)+\sin(t))\hat{i} + 2(\sin(t)-\cos(t))\hat{j} \qquad 0 \leq t \leq 2\pi$$

$\oint F dr = \text{Area}$ om $a+b=1$, Sätt $a=b=\frac{1}{2}$ (för det är tydligen bra).

$$\frac{1}{2}\oint -y + x \, dx dy = \left\{ \begin{matrix} \text{Sätt in } r(t), dx, dy \\ \text{i termer av } t \end{matrix} \middle| \begin{matrix} x(t) = 3(\cos(t)+\sin(t)),\ dx = 3(-\sin(t)+\cos(t))dt \\ y(t) = 2(\sin(t)-\cos(t)),\ dy = 2(\cos(t)+\sin(t))dt \end{matrix} \right\} = \{\text{insättning}\} = 12\pi$$

4) $F = (y^2, x+yz, z)$

a) Bestäm div och curl av F.

b) Bestäm flödet upp ur halvsfären $x^2+y^2+z^2=1$, $z \geq 0$

a) $\text{div } F = (0, z, 1)$

$$\text{curl } F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = (-y, 0, 1-2y)$$

b) Sfäriska koordinater eller Gauß

Gauß: $\iiint_R \text{div} F dV = \int_{\partial R} F \cdot d\vec{S}$

Problem eftersom vi inte har ett lock. Vi måste räkna ut det som om randen inkluderar detta lock och sedan dra ifrån det. Vad är denna rand? Jo $z=0$ och halvsfären. Kalla dem S_2 och S_1.

$$\iiint (z+1)\, dV = \iiint_R \text{div } F dv = \iint_{S_1} F \cdot d\vec{S} + \iint_{S_2} F d\vec{S}$$

$\underline{S_2}$

$$\iint_{S_2} F \cdot \hat{N} d\vec{S} = \iint_{S_2} (y^2, xy+z, z) \cdot (0,0,-1)\, dx dy = \iint_{S_2} -z \, dx dy = \{z=0 \text{ i } S_2\} = 0$$

$\underline{S_1}$

$$\iiint (z+1) dV = \iiint z\, dv + \iiint dV = \iiint z dV + \text{Volym av halvboll med radie } 1 = \iiint z dV + \frac{\frac{4\pi 1^2}{3}}{2} = \iiint z dV + \frac{2\pi}{3} = \{\text{första delen}\} =$$

$$\left\{ \begin{matrix} \text{Sfäriska} \\ \text{koordinater} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} x = r\cdot\cos\theta\sin\phi \\ y = r\cdot\sin\theta\sin\phi \\ z = r\cos\phi \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2} \end{matrix} \middle| dV = r^2 \sin\phi \cdot dr d\theta d\phi \right\} = \int_0^{\pi/2}\int_0^{2\pi}\int_0^1 r\cos\theta\, r^2 \sin\phi \, dr d\theta d\phi = \text{bös}$$

Svar: $\frac{11\pi}{12}$

5) a) Beräkna $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy$

Polära koordinater. $\begin{matrix} x = r\cdot\cos\theta \\ y = r\cdot\sin\theta \end{matrix}$ $\quad \begin{matrix} 0 \leq r \leq \infty \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{matrix}$ $\quad dx\,dy = r\,dr\,d\theta$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} r\cdot e^{-r^2}\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \int_0^{\infty} re^{-r^2}\,dr = \left\{\begin{matrix} r^2 = u \\ du = 2r\,dr \end{matrix}\right\} = \int_0^{2\pi} d\theta \tfrac{1}{2}\int_0^{\infty} e^{-u^2}\,du = \pi$$

b) Låt $F = (2xy + z^3, x^2 + 2yz, y^3 + 3xz^2 + 1)$, konservativt. Hitta en potential.
Räkna sedan ut $\int F\cdot dr$ för kurvan som startar i $(0,0,0)$ & slutar i $(1,2,1)$

$F = \nabla\phi$ $\quad \begin{matrix} \frac{\partial\phi}{\partial x} = 2xy + z^3 \\ \frac{\partial\phi}{\partial y} = x^2 + 2yz \\ \frac{\partial\phi}{\partial z}\ y^2 + 3xz^2 + 1 \end{matrix}$ $\quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} \phi_x = x^2y + z^3x + C(y,z) \\ \phi_y = \cancel{x^2y} + y^2z + D(x,z) \\ \phi_z = \cancel{y^2z} + \cancel{xz^3} + z + E(x,y) \end{matrix}$ $\quad \Rightarrow \quad \phi = x^2y + z^3x + y^2z + z + F$

$$\int F\cdot dr = \int_C \nabla\phi\cdot dr = \phi(1,2,1) - \phi(0,0,0) = 8$$

c) Beräkna arean av den del av $\overset{R}{\text{ytan}}$: $z = x^2 + y^2 + 1$ som ligger innanför cylindern $x^2 + y^2 = 9$.

$\iint_R dS = \left\{\begin{matrix}\text{dS är ytarea-} \\ \text{elementet}\end{matrix}\right\}$ $\qquad$ Vi behöver få fatt på dS och parametriseringen av ytan.

<u>Parametrisering</u>
Funktionsyta: $z = f(x,y) = x^2 + y^2 + 1$
$x^2 + y^2 \leq 3^2 \quad G$

<u>dS</u>
Funktionsyta: $dS = (1 + f_x^2 + f_y^2)^{1/2}\,dx\,dy = (1 + 4x^2 + 4y^2)^{1/2}\,dx\,dy = (1 + 4(x^2+y^2))\,dx\,dy$

$$\iint_R dS = \iint_G (1 + 4(x^2+y^2))^{1/2}\,dx\,dy = \left\{\begin{matrix}\text{Polära} \\ \text{koordinater}\end{matrix}\right\} = \int_0^{2\pi}\int_0^{3} (1+4r^2)^{1/2} r\cdot dr\,d\theta = 2\pi\int_0^3 r\sqrt{1+4r^2}\,dr = \left\{\begin{matrix} u = 1+4r^2 \\ du = 8r\,dr \end{matrix}\ \middle|\ \begin{matrix} r=0 \Rightarrow u=1 \\ r=3 \Rightarrow u=37 \end{matrix}\right\} =$$

$$2\pi\int_1^{37}\sqrt{u}\,\frac{du}{8} = \frac{\pi}{6}\left(37^{3/2} - 1\right)$$

<u>2015-08-28, del 2</u>

3) Betrakta vektorfältet $F = (y^2, -x^2)$ och beräkna arbetet som F utför längs randen, orienterad moturs, till den delen av enhetsdisken som ligger i kvadrant 1. Använd kurvintegral.

Randen består av 3 kurvor $\downarrow, \rightarrow, \nwarrow$. (C_1, C_2, C_3)

<u>Parametrisering</u>
C_1: $r(t) = (t, 0)$ $\qquad 0 \leq t \leq 1$
C_2: $r(t) = \cos(t), \sin(t)$ $\qquad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$
C_3: $r(t) = (0, 1-t)$ $\qquad 0 \leq t \leq 1$

<u>C_2</u>

$$\int_{C_2} F\,dr = \int_{C_2} (y^2, -x^2)(dx, dy) = \int_{C_2} y^2\,dx - x^2\,dy = \int_0^{\pi/2} \sin^2(t)(-\sin(t)) - \cos^2(t)\cos(t)\,dt = -\int_0^{\pi/2} \sin^3(t) + \cos^3(t)\,dt = \{\text{Sinus}\} =$$

$$\int_0^{\pi/2} \sin^3 t\,dt = \int \sin(1-\cos^2)\,dt = \int \sin t - \sin t\cos^2 t\,dt = \{\sin\cos^2\} = \left\{\begin{matrix} u = \cos t \\ du = -\sin t\,dt \end{matrix}\right\} = \int u^2\,du$$