Laplacetransform

En mer generell metod för att studera kontinuerliga LTI-system och signaler.

Låt $x(t)=e^{st}$ där $s=\sigma+j\omega$.

$$x(t)\longrightarrow\overset{\text{LTI}}{\boxed{h(t)}}\longrightarrow y(t)$$

Den tidsberoende insignalen. Kallas egenfunktion.

$$y(t)=(h*x)t=\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)x(t-\tau)\,d\tau=\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)e^{s(t-\tau)}\,d\tau=e^{st}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)e^{-s\tau}\,d\tau}_{H(s)\,=\,\text{Laplacetransform}}=e^{st}\cdot H(s)$$

Komplex, beror av tid. Kallas egenvärde till e^{st}.

$$e^{-st}=e^{-(\sigma+j\omega)t}=e^{-\sigma t}e^{-j\omega t},\quad \mathcal{L}\{x(t)\}=X(s)=\int_{-\infty}^{\infty}\boxed{x(t)e^{-\sigma t}}e^{-j\omega t}\,dt=FT\{x(t)e^{-\sigma t}\}$$

Konvergenskrav hos fouriertransformen

$$\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)e^{-\sigma t}|\,dt<+\infty$$

De värden på $\sigma=Re(s)$ för vilka integralen konvergerar kallas Laplacetransformen konvergensområde ROC. Om ROC omfattar $j\omega$-axeln i s-planet kan vi sätta $\sigma=0$. $X(s)|_{s=j\omega}=X(j\omega)$ (FT) Fouriertransformen är då lika med Laplacetransformen utvärderad på $j\omega$-axeln i s-planet.

—— x ——

$$x(t)\longrightarrow\overset{\text{LTI}}{\boxed{}}\longrightarrow y(t)$$

Antag att vi har ett kontinuerligt LTI-system där sambandet mellan insignal och utsignal beskrivs av en diff.ekvation.

Allmänt $\quad a_N\frac{d^Ny}{dt^N}+a_{n-1}\frac{d^{N-1}y}{dt^{N-1}}+\dots+a_1\frac{dy}{dt}+a_0\,y(t)=b_M\frac{d^Mx}{dx^M}+b_{M-1}\frac{d^{M-1}x}{dx^{M-1}}+\dots+b_1\frac{dx}{dt}+b_0x(t)$

Alt: $\quad \sum_{k=0}^{N}a_k\frac{d^ky}{dy^k}y(t)=\sum_{k=0}^{M}b_k\frac{d^kx}{dx^k}x(t)$

Laplacetransformera

Antag system i vila (beg. värden $=0$)

$\sum_{k=0}^{N}a_kS^kY(s)=\sum_{k=0}^{M}b_kS^kX(s)$ $\qquad$ Bryt ut: $Y(s)\sum_{k=0}^{N}a_kS^k=X(s)\sum_{k=0}^{M}b_kS^k$

Bilda kvot: $\dfrac{Y(s)}{X(s)}=H(s)=\dfrac{\sum_{k=0}^{M}b_kS^k}{\sum_{k=0}^{N}a_kS^k}$ $\qquad$ detta är en vanlig form av Laplace-T i våra ingenjörstillämpningar. En kvot mellan polynom i S.

Polynomen kan även skrivas på faktoriserad form som:

$$H(s)=\frac{b_M\prod_{k=1}^{M}(s-c_k)}{a_N\prod_{k=1}^{N}(s-d_k)}$$

i Matlab kan man plotta pzmap då är × d_k: Poler till $H(s)$ som är rötter till nämnarpolynomet.

○ C_k: Nollställen till $H(s)$, rötter till täljarpolynomet.

Grafen innehåller all info om systemet $H(s)$ förutom skalfaktorn $\frac{b_M}{a_N}$.

Om vi behåller samma system har vi: $x(t)\overset{LT}{\longleftrightarrow}X(s)$

$y(t)\longleftrightarrow Y(s)$

$h(t)\longleftrightarrow H(s)$

Faltning

I tidsdomänen vet vi att $y(t)=(h*x)(t)\overset{LT}{\longleftrightarrow}Y(s)=H(s)X(s)\Rightarrow\frac{Y(s)}{X(s)}=H(s)$

Samma resultat som när vi utgick från diff.ekv. (Vilken tur! :))

$H(s)$: Systemets överföringsfunktion $H(s)=\mathcal{L}\{h(t)\}$ $h(t)$ är systemets impulssvar.

Invers Laplacetransform

Utgå ifrån $H(s)=\frac{B(s)}{A(s)}$ (en kvot av polynom i s)

$B(s)$: Ordning M

$A(s)$: Ordning N

Om $M \geq N$ => Polynomdivision krävs, men i fysikaliska system är det nästan alltid så att $M \leq N$.

Division ger: $H(s) = \underbrace{\sum_{k=0}^{M-N} C_k \cdot s^k}_{\text{Rent polynom}} + \frac{\hat{B}(s)}{A(s)}$

$\hat{B}(s)$: Ordning $N-1$

$A(s)$: Ordning N

Partialbråksuppdela kvoten, detta ger en summa av enklare termer vilka kan inverstransformeras var och en för sig.

Ty bara def $t>0$ — Vänstra halvplanet

* 1a ordningens term: reell pol, $s=d_k$ => $\frac{A_k}{s-d_k} \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} A_k \cdot e^{d_k t} \cdot u(t) \longrightarrow 0$ om $d_k<0$ => Pol i VHP.