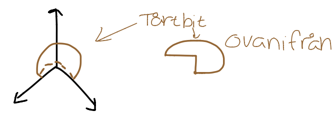
15.6 | Flödesintegraler

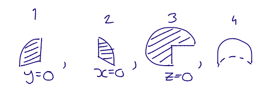


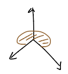
Ex Beräkna flödet genom ytan:

Där sfären har radie a & vi snittar plana snitt längs $x=0$, $y=0$, $z\geq 0$ och $F(x,y,z)$

Funktionsytor: $d\vec{S}=(-f_u,-f_v,1)\,dx\,dy$

$\iint_{TB} F\cdot\hat{N}\,dS$ ← Ytan är inte parametriserad av en enda ekvation. 4 ytor:



3)  $\iint_3 F\cdot\hat{N}\,dS=\iint_3 F\,d\vec{S}$

$dS=$ ytareaelementet, $dS=dx\,dy$ i xy-koordinater

$\hat{N}=(0,0,-1)$ för att det pekar nedåt

$\iint_3 (x,y,z)\cdot(0,0,-1)=\iint_3(0x+0y-z)\,dx\,dy=[z=0]=0$

4) $\iint_4 F\cdot d\vec{S}=\left\{\hat{N}=\left(\frac{x}{a},\frac{y}{a},\frac{z}{a}\right)\right\}=\iint_4 (x,y,z)\cdot\left(\frac{x}{a},\frac{y}{a},\frac{z}{a}\right)dS=\iint\frac{x^2+y^2+z^2}{a}\,dS=\iint\frac{a^2}{a}\,dS=a\iint dS=$ i) Sfäriska; ii) $\frac{3}{8}$ av en sfär med radie a

ii) $a\iint dS=a\,\frac{3}{8}\cdot$ Arean(sfär med radie a) $=\frac{3a}{8}\cdot 4\pi a^2=\frac{\pi}{2}a^3$

1 & 2) Liknar 3) (bidrag 0).

16.1 | Diverse om div & curl

Olika sätt att beräkna trippel- och dubbelintegraler men främst flödes- och arbetsint...

F: Vektorfält $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$

Om vi har $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ låtsas vi att vi är i $\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ genom att sätta: $F(x,y)=F_1\hat{\imath}+F_2\hat{\jmath}+0\,\hat{k}$ lagt in i vektorfält i $z=0$.

Påminner om $\nabla=\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)$

Def

Div = divergens = $\nabla\cdot$

$\text{Div}\,F=\nabla\cdot F=\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot(F_1,F_2,F_3)=\left(\frac{\partial F_1}{\partial x}+\frac{\partial F_2}{\partial y}+\frac{\partial F_3}{\partial z}\right)$

Tar in ett vektorfält, returnerar en skalärvärd funktion.

Def

Curl = $\nabla\times$

$\text{Curl}\,F=\nabla\times F=\begin{vmatrix} i & j & k\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ F_1 & F_2 & F_3\end{vmatrix}=\left(\frac{\partial F_3}{\partial y}-\frac{\partial F_2}{\partial z},\ \frac{\partial F_1}{\partial z}-\frac{\partial F_3}{\partial x},\ \frac{\partial F_2}{\partial x}-\frac{\partial F_1}{\partial y}\right)$

Ex

1) Om $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $F(x,y)=(F_1,F_2,0)$

$\text{Curl}\,F=\left(0,0,\frac{\partial F_2}{\partial x}-\frac{\partial F_1}{\partial y}\right)=\left(\frac{\partial F_2}{\partial x}-\frac{\partial F_1}{\partial y}\right)k$

2) Curl $F=0$ motsvarar exakt derivatan för konservativa vektorfält.

3) Div kan vara väldigt lätt att räkna ut.

$F=\left(e^{\sin(yz)}+y,\ xy+\frac{\sin(z)}{z},\ e^{x^2}\right)$

$\text{Div}\,F=0+x+0=x$

4) $F=(-\Omega y, \Omega x)$, Ω konst

$\operatorname{curl} F = \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)k = \Omega - (-\Omega)k = 2\Omega k$

OBS: Curl "ser inte" konservativa vektorfält men ser roterande vektorfält.

Om $r(t) = (\cos(\Omega t), \sin(\Omega t))$ är $r'(t) = F = (-\Omega y, \Omega x)$ Så Ω är vinkelhastighet

Div F?

Vad är div F egentligen? "div F" är en skalär och div F(P) kommer vara "utflödet - inflödet" i en liten omgivningen till punkten p. Detta är en konsekvens av Gauß, se senare kap.

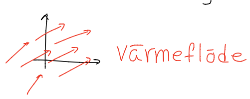
Ex Konstant vektorfält: $F(x,y)=(1,1)$

$\operatorname{div} F = \frac{\partial 1}{\partial x} + \frac{\partial 1}{\partial y} = 0$

Tillämpning av Div

ϕ = temperatur i en punkt (x,y,z) vid en tidpunkt t.

$\nabla\phi$ = riktningen som ϕ ökar mest i i en given punkt.



$\operatorname{div} \nabla\phi$ = värmeflöde ut - värmeflöde in i punkten.

$\operatorname{div} = \nabla\cdot \Rightarrow \nabla\cdot\nabla\phi = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)\phi = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}, \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\phi$

Speciellt: $\nabla\cdot\nabla\phi = \nabla^2\phi = \Delta\phi$ & om $\Delta\phi = 0$ har vi ingen värmespridning.

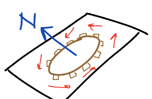
Alltså är temperaturen stabil i tid.

$\Delta\phi = 0$ är värmeledningsekvationen (utan tid).

Curl F?

Curl F är en vektor som vi tolkar på följande sätt: Givet en vektor $[?,?,?]$, $N=(a,b,c)$

Curl $F\cdot N$ = Skalär



$ax+by+cz=d$

Krafterna får kugghjulet i planet $ax+by+cz=d$ att snurra. => Vinkelhastighet som hjulet får av den här kraften. Av Stokes sats.

16.2| Identiteter

div ∇, curl har massa relationer. Se sats 3!

g) $\nabla\cdot(\nabla\times F) = 0$ F vektorfält

h) $\nabla\times(\nabla\phi) = 0$ Φ skalär

16.3| Green's Theorem

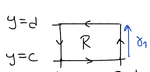
Motiv/Bakgrund:
- $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ (envarre)

  $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$
- $F = \nabla\phi$ $\quad P \xrightarrow{\gamma} P'$

  $\int_\gamma F\cdot dr = \phi(P') - \phi(P)$

Men hur löser vi mer generella arbetsintegraler där integralen inte bara beror på randen?

Dennis påstår att arbetsintegralen till randen av ett område R: $\int\int_{\partial R} F\cdot dr = \int\int_R \nabla\times F\cdot k\cdot dA = \int\int_R \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)dx\,dy$



Green's Theorem

$\int_c^d\int_a^b \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)dx\,dy = \int_R F\cdot dr = \left\{\text{Fokus på } \int\int \frac{\partial F_2}{\partial x}dx\,dy, \text{ den andra pss}\right\} = \int_c^d [F_2(b,y) - F_2(a,y)]\,dy = \int_c^d F_2(b,y)\,dy - \int_c^d F_2(a,y)\,dy =$

$\left\{\text{arbetsintegralen längs } \uparrow = \int_{\gamma_1} F\cdot dr = \int_{\gamma_1}(F_1,F_2)\cdot(\underbrace{dx}_{=0}, dy) = \int_{\gamma_1} F_2\,dy \quad \begin{matrix} x=b \\ dx=0 \end{matrix}\right\} = \dots$

$\underline{Ex}$

$$\left.\begin{array}{l} F(x,y) = (0,x) \\ F(x,y) = (-y,0) \\ F(x,y) = \frac{1}{2}(-y,x) \end{array}\right\} \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = 1 \Rightarrow \int_{\partial R} F \cdot dr = \iint_R 1 \cdot dx\,dy = \text{arean till } R.$$

$\underline{Def}$

Om $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ uppfyller $\operatorname{curl} F = 0$ så är F virvelfritt.