I teoretiska sammanhang ersätter man ofta linj.approximationen med medelvärdessatsen.

Medelvärdessatsen

Antag att $f(x)$ är definierbar på (a,b) och kontinuerlig på $[a,b]$. Då finns ξ, $a<\xi<b$, s.a. $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$

Jämförelsevis med lin.app: $f(b)\approx f(a)+f'(a)(b-a)$

Bevis

$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi)$

Lutning för linjen mellan ändpunkterna

Användning

Om $f'(x)=0$ i $[a,b]$ är f konstant.

Bevis

Tag $x\in[a,b]$ $\quad f(x)-f(a)=f'(\xi)(x-a)=0$

$f(x)=f(a) \quad \forall x\in[a,b]$

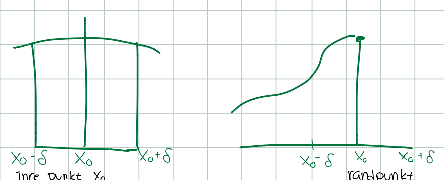
Om $f'(x)>0$ i $[a,b]$ så är $f(b)>f(a)$

Bevis

$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)>0$

Def

En funktion f i $D_f\to\mathbb{R}$ sägs ha *lokalt maximum* i punkten x_0 om $f(x_0)\geq f(x)$ för alla x i en omgivning $\{x: |x-x_0|<\delta\}\cap D_f$ för något δ



SATS

Om $f'(x_0)$ existerar i en inre maxpunkt/minpunkt så är $f'(x_0)=0$

Ex

Bestäm max & min av $f(x)=x^3-3x+3$ över $[3,\frac{3}{2}]$

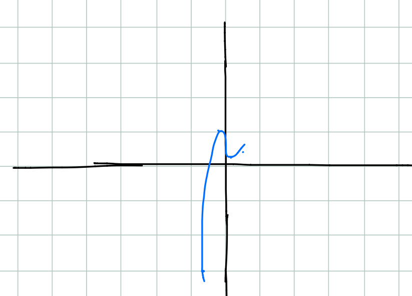
1. Inre punkter, stationära punkter $(f'(x)=0)$

$f'(x)=3x^2-3$

$3x^2-3=0 \iff x^2-1=0 \iff x=\pm 1$

2. Randpunkter

$-3,\ \frac{3}{2}$



3. Jämför funktionsvärden

$f(-1)=5 \quad \leftarrow$ MAX

$f(1)=1$

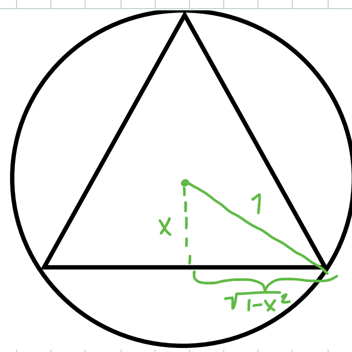
$f(-3)=-15 \quad \leftarrow$ MIN

$f(\frac{3}{2})=\frac{15}{8}<2$

Ex

Hur stor är den största likbenta triangeln vilken kan skrivas in i en cirkel med radien 1?

Triangelns bas är $2\sqrt{1-x^2}$
Triangelns höjd är $1+x$
Triangelns area: $A(x)=\frac{2\sqrt{1-x^2}(1+x)}{2}$
$=(1+x)\sqrt{1-x^2}$



$A'(x)=1(\sqrt{1-x^2})+(1+x)(\frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x)$
$=\sqrt{1-x^2}-\frac{x(1+\sqrt{x})}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{1-x^2-x(1+x)}{\sqrt{1-x^2}}$

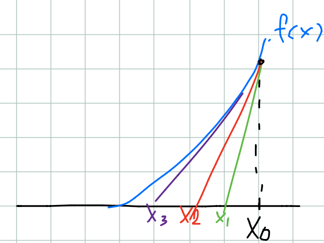
$A'(x)=0 \iff 1-x^2-x(1+x)=0$

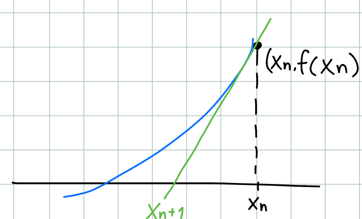
$1-x^2-x-x^2=0$
$2x^2+x-1=0$
$x^2+\frac{x}{2}-\frac{1}{2}=0$
$x=\frac{-1}{4}\pm\sqrt{\frac{1}{16}+\frac{8}{16}}$
$x=\frac{-1}{4}\pm\sqrt{\frac{9}{16}}$
$x=\frac{-1}{4}\pm\frac{3}{4} \Rightarrow x_1=\frac{-1}{4}+\frac{3}{4}=\frac{1}{2}$, $\left(x_2=\frac{-1}{4}-\frac{3}{4}=(-1)\right)$

Detta måste vara ett maximum ty extremerna ger mindre triangel och x-1 ger arean$=0$
$A(0)=1$
$A(\frac{1}{2})=\frac{3}{2}\sqrt{1-\frac{1}{4}}=\frac{3}{4}\sqrt{3}>1$

Newtons metod för att lösa $f(x)=0$

Succesivt förbättrade approximationer. x_0 som start





Iterationsformeln

Ekvationen för tangenten i $(x_n, f(x_n))$
$y-f(x_n)=f'(x_n)(x-x_n)$
den skär x-axeln i punkten $(x_{n+1}, 0)$

$-f(x_n)=f'(x_n)(x_{n+1}-x_n)$
$\frac{-f(x_n)}{f'(x_n)}=x_{n+1}-x_n$
$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

Logaritmisk derivering

$\frac{d}{dx}\ln f(x)=\frac{1}{f(x)}\cdot f'(x)=\frac{f'(x)}{f(x)}$ (Logaritmiska derivatan av f)

Användning

Låt x-värdet ändras med en faktor $d=(\frac{p}{100})$. Linjär approximation ger då $f(x+dx)\approx f(x)+dxf'(x)$, ändringen i f är ($\approx dx\cdot f'(x)$,) relativa ändringen i f i dx $\frac{f'(x)}{f(x)}$.

$\frac{(fg)'}{fg}=\frac{fg'+f'g}{fg}=\frac{g'}{g}+\frac{f'}{f}$ log. der$(fg)=$ logder $f+$ logder g

p% ändring i f:s värde
q% ändring i g:s värde
ger p+q i fg.

Ett fånigt sätt att räkna ut arean av en triangel.

Triangelns area = A

A kan approximeras med över- & undersummor.

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k}{n}\cdot\frac{1}{n}\leqslant A\leqslant\sum_{k=1}^{n}\underbrace{\frac{k}{n}\cdot\frac{1}{n}}_{\text{area av rektangel}} \iff \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n-1}k\leqslant A\leqslant\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k \iff \frac{(n-1)n}{2n^2}\leqslant A\leqslant\frac{n(n+1)}{2n^2} \iff$$

$$\frac{n^2-n}{2n^2}\leqslant A\leqslant\frac{n^2+n}{2n^2} \iff \frac{1}{2}-\frac{1}{2n}\leqslant A\leqslant\frac{1}{2}+\frac{1}{2n} \qquad n\to\infty \Rightarrow \frac{1}{2}\leqslant A\leqslant\frac{1}{2}$$