Rep

LTI-System $y(t)=(h*x)(t)$

Stabilt $\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty}|h(t)|dt<\infty$
Kausalt $\Leftrightarrow h(t)=0 \quad t<0$

Om $\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|dt<\infty$ definierar vi $X(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt$, ω reell

Frekvenssvar

Huvudsamband: $Y(j\omega)=H(j\omega)X(j\omega)$

Om x T-periodisk $(x(t+T)=x(t)$ för alla $t)$
så är y T-periodisk och $C_k(y)=H(\omega_k)C_k(x)$ där $\omega_k=\frac{2\pi k}{T}$ och $C_k(x)=\frac{1}{T}\int_0^T x(t)e^{-j\omega_k t}dt$ $\quad k\in\mathbb{Z}$

Medelenergi
Medelenergi för $x=E(x)=\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|^2dt$ om x ej är periodisk
Medelenergi för en T-periodisk signal $x=E_T(x)=\frac{1}{T}\int_0^T|x(t)|^2dt$

Plancherels formel
$E(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|X(j\omega)|^2d\omega$ $\quad x$ ej periodisk

Parsevals Formel
$E_T(x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}|C_k(x)|^2$

Ex 2015-04-14

Givet
LTI-System $y(t)=(h*x)(t)$
$H(j\omega)=\begin{cases}1-|\omega| & |\omega|\leq 1\\ 0 & |\omega|>1\end{cases}$

Låt $x(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^k}e^{jkt}$

Sökt
a) Är y 2π-periodisk
b) Bestäm $C_k(x)$
c) Bestäm $E_T(x)$
d) Bestäm y

Lösning

a)
Systemet är tidsinvariant $\Rightarrow$ Om $x_{t_0}(t)=x(t-t_0) \Rightarrow (h*x_{t_0})(t)=y_{t_0}(t)$

Tag $t_0=T \overset{2\pi}{=}$, då gäller att $x_{t_0}(t)=x(t) \Rightarrow y_{t_0}(t)=y(t-2\pi)=h*x_{t_0}(t)=h*x(t)=y(t)$ för alla t

$T=2\pi$ eftersom e^{jkt} är 2π-periodisk. $e^{jk(t-2\pi)}=e^{jkt}\cdot e^{jk2\pi}=e^{jkt}\cdot 1$

b)
$x(t)$ är 2π-periodisk $\Rightarrow x=\sum_{-\infty}^{\infty}C_k(x)e^{jkt}$

$$\begin{cases}C_k(x)=\frac{1}{2^k}, & k\geq 0 \text{ (Titta på ursprungliga signalen)}\\ C_k(x)=0, & k<0 \quad \text{Det finns inga negativa } k\end{cases}$$

Alt: $C_k(x)=\frac{1}{2^k}u(k)$

c)
$$E_T(x) = E_{2\pi}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} |x(t)|^2 dt = \{\text{Parsevals}\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |C_k(x)|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \left|\frac{1}{2^k}\right|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{4^k} = \left\{\begin{smallmatrix}\text{geometrisk}\\ \text{summa}\end{smallmatrix}\right\} = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}$$

d)
$y = h * x$ Vi vet att y är 2π-periodisk och bestäms entydigt av C_k

$C_k(y) = H(\omega_k)C_k(x) = H(k)C_k(x)$ k - heltal

OBS!
$$H(k) = \begin{cases} 1 & k=0 \\ 0 & k\neq 0 \end{cases} \Rightarrow C_k(y) = \begin{cases} 0 & \text{om } k\neq 0 \\ C_0(x)=1 & \text{om } k=0 \end{cases} \Rightarrow y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k(y)e^{jkt} = 1 \quad \text{för alla } t.$$

Ex 2015-04-14, UPP3

Givet

LTI-System: $y(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(t-\tau)}{t-\tau} x(\tau)d\tau$

För ett tal $\alpha > 0$, sätt $x_\alpha(t) = e^{-\alpha|t|}$

Sökt

a) Visa genom att använda att $x_\alpha(t) = e^{-\alpha t}u(t) + e^{+\alpha t}u(-t)$ att Fouriertransformen $X_\alpha(j\omega) = \frac{2\alpha}{\alpha^2+\omega^2}$

b) Om y_α är utsignal för $x = x_\alpha$, bestäm Y_α.

c) Bestäm alla $\alpha > 0$ s.a. $\int_{-\infty}^{\infty} |Y_\alpha(j\omega)|d\omega = 4$

d) Definiera $z_\alpha(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_\alpha(t+n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\alpha|t+n|}$

Bestäm $\{C_k(z_\alpha)\}$

e) Bestäm $\alpha > 0$ s.a. $C_1(z_\alpha) = \frac{1}{\alpha}$

Lösning

a)
$$x_\alpha(t) = \underbrace{e^{-\alpha t}u(t)}_{w(t)} + \underbrace{e^{\alpha t}u(t)}_{w(-t)}$$
Vi behöver hitta $W(j\omega) = \overset{\text{Formelsamling}}{\frac{1}{\alpha+j\omega}}$ (Fouriertransform av $e^{-\alpha t}u(t)$)

$X_\alpha(j\omega) = W(j\omega) + W(-j\omega)$

$$X_\alpha(j\omega) = \frac{1}{\alpha+j\omega} + \frac{1}{\alpha-j\omega} = \left\{\begin{smallmatrix}\text{konjugat-}\\ \text{regeln}\end{smallmatrix}\right\} = \frac{2\alpha}{\alpha^2+\omega^2}$$

b)
$y(t) = (h*x)(t)$

$h(t) = \frac{1}{\pi}\frac{\sin(t)}{t}$ $\quad H(j\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega|\leq 1 \\ 0 & |\omega|>1 \end{cases}$ FS! $\Rightarrow Y_\alpha(j\omega) = \begin{cases} \frac{2\alpha}{\alpha^2+\omega^2} & |\omega|\leq 1 \\ 0 & |\omega|>1 \end{cases}$

$Y_\alpha(j\omega) = H(j\omega)X_\alpha(j\omega)$

c) $\int_{-\infty}^{\infty} |Y_\alpha(j\omega)|d\omega = \int_{-1}^{1} \frac{2\alpha}{\alpha^2+\omega^2}d\omega = \left\{\int \frac{1}{1+x^2}dx = \tan^{-1}(x)\right\} = \frac{2}{\alpha}\int_{-1}^{1} \frac{d\omega}{1+(\frac{\omega}{\alpha})^2} = 2\tan^{-1}(\frac{\omega}{\alpha})$ ....

d) z_α 1-periodiseringen av x_α $\rightsquigarrow C_k(z_\alpha) = \frac{1}{\underset{T=1}{1}}X_\alpha(j\omega_k) = X_\alpha(j2\pi k) = \frac{2\alpha}{\alpha^2+4\pi^2k^2}$ $\quad \omega_k = \frac{2\pi k}{1}$ Behöver man lära sig känna igen!

e) $C_1(z_\alpha) = \frac{2\alpha}{\alpha^2+4\pi^2} = \frac{1}{\alpha} \Rightarrow 2\alpha^2 = \alpha^2+4\pi^2 \Rightarrow \alpha^2 = 4\pi^2 \Rightarrow \alpha = 2\pi > 0$

Ex uppg 1d

$y(t) = (h_i * x)(t)$ där $h_1(t) = \frac{1}{1+|t|}u(1-|t|)$
$h_2(t) = \frac{1}{1+|t|}u(|t|-1)$

Sökt

Stabila?

Lösning

$\int_{-\infty}^{\infty} |h_1(t)|dt = \{h_1(t)=0,\ |t|>1\} = \int_{-1}^{1} \frac{1}{1+|t|}dt \leq \int_{-1}^{1} 1\,dt = 2 < \infty$ Stabilt

$\int_{-\infty}^{\infty} |h_2(t)|dt = \{h_2(t)=0,\ |t|<1\} = \int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{1+|t|}dt + \int_{1}^{\infty} \frac{1}{1+|t|}dt = 2\int_{1}^{\infty}\frac{1}{1+t}dt = 2[\ln(1+t)]_1^{\infty} = \ln(\infty) - \ln(1) = +\infty$ Ej Stabilt