Tillståndsåterkoppling

Ex DC-servo med PD-regulator

Process $G(s) = \frac{1}{s(1+sT)}$

Regulator: $F(s) = K_p(1+T_d s)$

Designmetod beror på specifikation. Ex: Flytta punkt i Nyquistdiagram.

1. Givet är ω_c, φ_m.
2. Bestäm T_d från: $\arg\{F\} + \arg\{G\} = \varphi_m - \pi$

   $\tan^{-1}(\omega_c T_d) - \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}(\omega_c T) = \varphi_m - \pi \Rightarrow T_d$
3. Bestäm K_p från: $|F(j\omega_c)||G(j\omega_c)| = K_p|1 + j\omega_c T_d|\left|\frac{1}{\omega_c(1+j\omega_c T)}\right| = 1 \Rightarrow K_p$

Designidéen: Två ekvationer/Två regulatorpar => Unik lösning.

PID-summering

P-regulator
- \+ Enkel
- \- Dålig statisk nogrannhet, d v s om r konstant så blir i regel $y \neq r$

PI-regulator
- \+ God statisk nogrannhet, d v s om r konstant blir i regel $y = r$
- \+ Långsamma processtörningar regleras bort väl
- \- Försämrade stabilitetsmarginaler (I-verkan medför ökad negativ fasvridning)

D-verkan
- \+ Förbättrad stabilitet
- \+ Snabbare reglering möjlig
- \- Ökad känslighet för mätstörningar

OBS1: en ren D-verkan $K_d \frac{de}{dt}$ kan i praktiken inte realiseras eftersom det kräver oändliga styrsignaler.

OBS2: Vid börvärdesändring kan D-verkan orsaka alltför häftiga styrsignalförändringar. För att undvika detta kan man låta D-delen endast verka på y:

$$u(t) = K_p(r(t) - y(t)) + K_i \int_0^t (r(\tau) - y(\tau))d\tau - K_d \frac{d}{dt} y(t)$$

Var ska man placera polerna?

Det beror på de givna specifikationerna:

Givet: $G(s) = \frac{k\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$

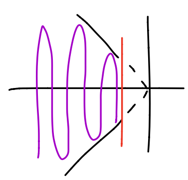
$\zeta \approx 0.7$

Insvängningstid $(T_{5\%}) \approx \frac{6}{\omega_c(\tan(\varphi_m))}$

Stigtid $(T_s) \approx \frac{1.4}{\omega_c}$

Resonanstopp $(M_p) = \max|T(j\omega)| \approx \frac{1}{2\cdot\sin(\varphi_m/2)}$

Slutna systemets bandbredd $(\omega_b) \approx 1.5\,\omega_c$



Alternativa regulatorstrukturer

Det finns många sätt att "bygga" ett reglersystem, förutom den enkla, återkopplade kretsen som vi studerat hittills. Här är några exempel:

- Inre återföring:
  - En intern mätsignal är tillgänglig och kan användas för en "inre" återkoppling
  - Ett typiskt exempel på detta är hastighetssignalen i en motordrift
- Kaskadreglering:
  - Används ofta då man har tillgång till en extra mätning, som ligger "närmare" styrsignalen än den slutliga utsignalen
  - Genom att sluta en inre reglerloop, som är snabbare än den yttre, kan man förbättra prestanda
  - Ett exempel är reglering av dubbeltanken i labben!
- Framkoppling:
  - Återkoppling bygger på att observerade (mätta) felaktigheter korrigeras
  - Om en störning mäts, så finns möjlighet att kompensera denna "i förväg"
  - Denna s.k. framkoppling används oftast tillsammans med återkoppling

Tillståndsmodell

$G(s) = \frac{1}{s(1+sT)}$

$Y(s) = G(s)U(s)$

$s^2TY(s) + sY(s) = U(s) \iff T\ddot{y}(t) + \dot{y}(t) = u(t)$

Alternativ beskrivning, tillståndsform!

$$x = \begin{cases} x_1 = y \\ x_2 = \dot y \end{cases} \Rightarrow \dot x = \begin{cases} \dot x_1 = \dot y = x_2 \\ \dot x_2 = \ddot y = \frac{1}{T}(\dot y + u) = \frac{1}{T}(-x_2 + u) \end{cases} \Rightarrow \dot x = \begin{bmatrix} \dot x_1 \\ \dot x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{T} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{T} \end{bmatrix} u$$

Återkoppla från tillstånden

$u = -\ell_1 x_1 - \ell_2 x_2 + k_r r$

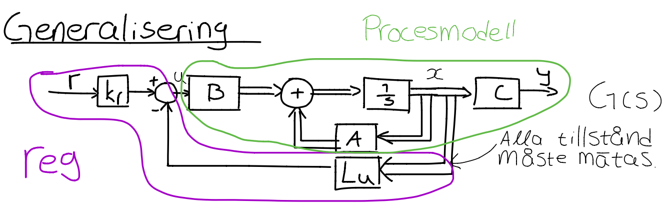
$\dot x_1 = x_2$

$\dot x_2 = -\frac{1}{T}x_2 + \frac{1}{T}u = -\frac{1}{T}x_2 + \frac{1}{T}(-\ell_1 x_1 - \ell_2 x_2 + k_r r) = -\frac{\ell_1}{T}x_1 - \left(\frac{\ell_2}{T} + \frac{1}{T}\right)x_2 + \frac{k_r}{T} r$

$$\begin{bmatrix} \dot x_1 \\ \dot x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{\ell_1}{T} & -\left(\frac{\ell_2}{T} + \frac{1}{T}\right) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{k_r}{T} \end{bmatrix} r$$

Sytemets poler ges fortf av $\det(sI - A) = 0$.

Generalisering



$G(s) = C(sI - A)^{-1}B$

Notera
Tjocka pilar: Vektorer.

$$\text{Givet} \begin{cases} \dot x = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

Anta att alla tillstånd är mätbara. Ansätt: $u = -L_u x + k_r r = -[\ell_1 \ \ell_2 \ \dots \ \ell_n]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + [K_r] r$

$\Rightarrow \dot x = Ax + Bu = Ax + B(-L_u x + K_r r) = (A - BL_u)x + BK_r r$

$y = Cx$

$G_{ry}(s) = C(sI - (A - BL_u))^{-1} B K_r$

Designmetod

1. Bestäm var det slutna systemets poler ska vara.
2. Beräkna L_u gm $\det(sI - (A - BL_u)) = 0$

Ex DC-motorservo, sätt $T = 1$

$$\begin{bmatrix} \dot x_1 \\ \dot x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{\ell_1}{T} & -\left(\frac{\ell_2}{T} + \frac{1}{T}\right) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{k_r}{T} \end{bmatrix} r \Rightarrow$$

$y = [1 \ 0] x$

$$G_{ry}(s) = C(sI - (A - BL_u))^{-1} B K_r = [1 \ 0]\left[\begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\ell_1 & -\ell_2 - 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ K_r \end{pmatrix}\right]$$

$$= [1 \ 0]\begin{bmatrix} s & -1 \\ \ell_1 & s + \ell_2 + 1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ K_r \end{bmatrix}$$

$$= [1 \ 0]\frac{1}{s(s+1+\ell_2)+\ell_1}\begin{bmatrix} s+1+\ell_2 & 1 \\ -\ell_1 & s \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ K_r \end{bmatrix} = \frac{K_r}{s^2 + s(1+\ell_2) + \ell_1}$$

Väli parametrar: $k_r = \ell_1 \Rightarrow G_{ry}(0) = 1$

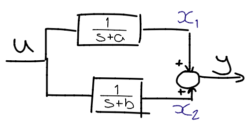
$\ell_1 = \omega_n^2$ Så vi väljer ℓ_1 utifrån spec.

$\zeta = \frac{1+\ell_2}{2\omega_n}$

Kan vi alltid bestämma egenvärdena till $A-BL_u$?

Detta är relaterat till systemets styrbarhet.

Ex



$$\dot{x}_1 = -ax_1 + u$$
$$\dot{x}_2 = -bx_2 + u \quad \Rightarrow$$
$$y = x_1 + x_2$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -a & 0 \\ 0 & -b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad \Rightarrow$$
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x$$
$$u = -\ell_1 x_1 - \ell_2 x_2 + K_r \cdot r$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -a-\ell_1 & -\ell_2 \\ -\ell_1 & -b-\ell_2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} K_r \\ K_r \end{bmatrix} r \quad , \quad KE: \det(sI - (A - BL_u)) = 0$$

$$\det\begin{pmatrix} s+a+\ell_1 & \ell_2 \\ \ell_1 & s+b+\ell_2 \end{pmatrix} = (s+a+\ell_1)(s+b+\ell_2) - \ell_1\ell_2 = s^2 + s(a+b+\ell_1+\ell_2) + ab + a\ell_2 + b\ell_1 = 0$$

$$a = b \Rightarrow \quad s^2 + s(2a+\ell_1+\ell_2) + a^2 + a(\ell_1+\ell_2) = \underbrace{(s+a)}_{\text{går ej att påverka}}\underbrace{(s+a+\ell_1+\ell_2)}_{\text{Går att påverka}}$$

Egenvärdet $(-a)$ påverkas inte av återkopplingen $\Rightarrow$ Icke styrbart!

Styrbarhet

Anta att vi vill använda tillståndsåterkoppling:

- Är det alltid möjligt att bestämma L_u, oberoende av valet av poler för det slutna systemet, dvs egenvärden till $A - BL_u$?

Svar: Ja, under förutsättning att den så kallade *styrbarhetsmatrisen*

$$\mathcal{C}(A,B) = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$$

där n är antalet tillstånd, har full rang (d.v.s. n linjärt oberoende rader). Systemet kallas i detta fall *styrbart*.

Om det sker förkortningar då man beräknar $G(s)$ (dvs man får en överföringsfunktion av lägre ordning än n), så är detta en indikation på att systemet inte är styrbart.