Sammanfattning

LTI-System $y = h * x$

- Stabilt $\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < +\infty$
- Kausalitet $\Leftrightarrow h(t) = 0, \quad t < 0$

Om $\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt, \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty$ definierar vi $\begin{cases} X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt, & \omega \text{ reellt tal} \\ H(j\omega) = \dots \end{cases}$

och $Y(j\omega) = H(j\omega) X(j\omega)$

Exponentiellt Begränsad Signal

Anta $x : (-\infty, \infty) \to \mathbb{C}$

x sägs vara exponentiellt begränsad om det existerar b så $|x(t)| e^{-bt} \leqslant M$ för alla t, för något $M < \infty$

Ex

$x(t) = e^{2t}$ begränsad ty $|e^{2t}| \cdot e^{-2t} = e^{2t-2t} = e^0 = 1 = M$ ← $b=2$

$x(t) = e^{t^2}$ ej begränsad

OBS!

Om $|x(t)| e^{-bt} \leqslant M$ så existerar $\boxed{X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-st} dt}$ där $s \in \mathbb{C}$, för alla $\operatorname{Re}(s) > b$

Bevis

Antag: $x(t) = 0, \ t < 0$

$|e^{-t\operatorname{Re}(s)} e^{-tj\operatorname{Im}(s)}| = e^{-t\operatorname{Re}(s)} \cdot |e^{-tj\operatorname{Im}(s)}| = e^{-t\operatorname{Re}(s)} \cdot 1$ ← triggettan för alla t, s

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-st} dt\right| \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| \cdot |e^{-st}| dt \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{|x(t)| e^{-bt}}_{M \text{ för alla } t} \cdot \underbrace{e^{-(s-b)|t|} dt}_{\int e^{-(\operatorname{Re}(s)-b)t} dt \leqslant \infty \text{ om } \operatorname{Re}(s) > b}$$

Def

Om $|x(t) e^{-bt}| \leqslant M$ för alla t definieras Laplacetransformen $X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-st} dt$ om $\operatorname{Re}(s) > b$

Om $s = j\omega$ så återfås Fouriertransformen av x om $b < 0$.

Antag att $|x(t)| \leqslant e^{bt} M$, $x(t) = 0$, $t < 0$

Tag $s = a + j\omega$, $\operatorname{Re}(a) > b$

Inför $x_a(t) = e^{-at} x(t)$ ← Exponentiell dämpning!

Då gäller att $\int_{-\infty}^{\infty} |x_a(t)| dt < \infty \rightsquigarrow X_a(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-at} e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-st} dt = X(s)$

Egenskaper

- Om $y = h * x$ och h, x är exp begr samt y existerar $\Rightarrow Y(s) = H(s) X(s)$
- $H(s)$ kallas överföringsfunktionen.
- β innehåller alla formler vi behöver.

Laplacetransform

Ensidig: $X(s) = \int_{0}^{\infty} x(t) e^{-st} dt$ om $x(t) = 0$ för $t < 0$.

Dubbelsidig: $X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-st} dt$

Egenskap ensidig

Om $z(t) = x'(t)$, $x(t) = 0$ för $t < 0$, gäller $Z_1(s) = s \cdot X(s) - x(0)$ ← Begynnelsevärde

- $Z_1(s) = \int_0^{\infty} z(t) e^{-st} dt = \int_0^{\infty} x'(t) e^{-st} dt = \left\{\begin{matrix}\text{Partiell} \\ \text{integration}\end{matrix}\right\} = [x(t) e^{-st}]_0^{\infty} - (-s) \int_0^{\infty} x(t) e^{-st} dt = 0 - x(0) + s \cdot X(s)$ ← för tillräckligt stora $\operatorname{Re}(s)$

Om $z(t) = x''(t) \rightsquigarrow Z_1(s) = s^2 X(s) - s x(0) - x'(0)$

Ex $x''(t) - 3x'(t) + 2x(t) = e^{-t} \cdot u(t)$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$

* Laplacetransformera VL & HL.

$VL = s^2 X(s) - \cancel{s x(0)} - x'(0) - 3(sX(s) - \cancel{x(0)}) + 2X(s) = (s^2 - 3s + 2)X(s) - 1$

$HL = \{\beta\} = \frac{1}{s+1}$

$VL = HL \iff (s^2 - 3s + 2)X(s) - 1 = \frac{1}{s+1} \implies X(s) = \frac{\frac{1}{s+1} + 1}{(s^2 - 3s + 2)} = \frac{s+2}{(s+1)(s-1)(s-2)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s-1} + \frac{C}{s-2} \rightsquigarrow \beta$

$$x(t) = Ae^{-t} \cdot u(t) + Be^{-t} u(t) + Ce^{2t} u(t)$$

Bestäm A, B, C! (Handpåläggning)

* Multiplicera med $s+1$. $A + (s+1)\left(\frac{B}{\dots} + \frac{C}{\dots}\right) = \frac{s+2}{(s-1)(s-2)}$
* Sätt $s = -1$ för att bli av med B och C. $\implies A + 0 = \frac{1}{(-2)(-3)} = \frac{1}{6}$
* Multiplicera med $s-1$. $B + (s-1)\left(\frac{A}{\dots} + \frac{C}{\dots}\right) = \frac{s+2}{(s+1)(s-2)} \Rightarrow \{s = 1\} \Rightarrow B = \frac{3}{2 \cdot (-1)} = \frac{-3}{2}$
* Multiplicera med $s-2$. $\implies C = \frac{4}{3}$

$A = \frac{1}{6}$, $B = \frac{-3}{2}$, $C = \frac{4}{3}$

Ex Omtenta elektro 2015-08-27 Uppg 2

Givet

$y = h * x$

$z = h * y$

$h(t) = e^{-t} u(t)$

Sökt

a) Överföringsfunktionen för systemet $x \mapsto z$

b) Är $x \mapsto z$ stabilt?

c) Om $x(t) = u(t)$ vad är z?

d) Om $z(t) = t^2 e^{-t}$ Vad var x?

Lösning

a) $z = h * y = h * (h * x) = (h * h) * x = h_2 * x$ h_2 är impulssvaret för $x \mapsto z$.

$H_2(s) = H(s)H(s) = \left\{ H(s) \overset{(\beta)}{=} \frac{1}{s+1} \right\} = \frac{1}{s^2 + 2s + 1} = \frac{1}{(s+1)^2}$

b) $\int_{-\infty}^{\infty} |h_2(t)| \, dt < \infty$

$h_2(t) \overset{(\beta)}{=} te^{-t} u(t)$, $\int_{-\infty}^{\infty} |te^{-t}| \, dt \overset{(\beta)}{=} \dots < \infty \implies$ Stabilt!

c) (β) $X(s) = \frac{1}{s}$, $Re(s) > 0$

$Z(s) = H_2(s)X(s) = \frac{1}{s(s+1)^2} = \frac{A}{s} + \frac{Bs + C}{(s+1)^2} \implies z(t) = A \cdot u(t) + Be^{-t} u(t) + Cte^{-t} u(t)$

Räkna ut A, B och C.

d) $Z(s) = \frac{2}{(s+1)^3}$

$Z(s) = H_2(s) X(s) \Rightarrow X(s) = \frac{Z(s)}{H_2(s)} = \frac{\frac{2}{(s+1)^3}}{\frac{1}{(s+1)^2}} = \frac{2}{s+1} \overset{(\beta)}{\implies} x(t) \, 2 \cdot e^{-t} u(t)$