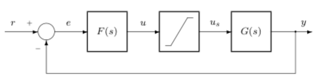
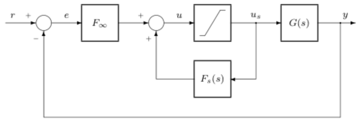
Övningstal 9.13 (pirWindup)
I praktiska reglersystem begränsas normalt den styrsignal som generas till processen via en begränsningsfunktion. Den begränsade styrsignalen $u_s(t)$ (s=saturation) kan då uttryckas som

$$u_s = \begin{cases} u_{max} & u > u_{max} \\ u & u_{min} \leq u \leq u_{max} \\ u_{min} & u < u_{min} \end{cases}$$

Begränsningsfunktionen illustreras också i följande blockschema.



Då styrsignalen hamnar i begränsningsläget upphör återkopplingen temporärt att fungera, eftersom styr. cessen $u_s(t)$ då är konstant (lika med u_{min} eller u_{max}). Detta leder till problem då regulatorn i sig är instabil, vilket gäller exempelvis i det vanligt förekommande fallet att regulatorn $F(s)$ är en PI-regulator. Ett sätt att råda bot på detta problem visas i följande blockschema, där den begränsade styrsignalen u_s återkopplas via positiv återkoppling.



Denna realisering ger ett väl fungerande system då överföringsfunktionen $F_s(s)$ är *stabil* och konstanten K_∞ väljs lika med regulatorns högfrekvensförstärkning, d.v.s. $K_\infty = F(\infty)$.

a) Bestäm $F_s(s)$ då

$$F(s) = 3\,\frac{s + 0.5}{s}$$

så att reglersystemen i de båda ovanstående figurerna får samma beteende så länge som styrsignalen u håller sig innanför begränsningarna u_{min} och u_{max} (med andra ord bortse från begränsningsfunktionen).

b) Antag att $u_{max} = 10$ och att referenssignalen $r(t)$ varieras så att reglerfelet e hamnar på en konstant nivå $e = 5$. Ange för de båda regulatorstrukturerna det asymptotiska beteendet hos signalen $u(t)$ för stora värden på t efter att inledande transienter har klingat av. I det första fallet bortses från eventuella konstanta bidrag hos $u(t)$. Kommentera skillnaden i beteende mellan de båda reglerfunktionerna.

a) $F(s) = \frac{3(s+0.5)}{s}$

$F_\infty = F(\infty) = 3$

Utgå från blockschemat och sätt $U_s = U$. $U(s) = E(s)F_\infty + F_s(s)U(s) \Rightarrow U(s) = \frac{F_\infty}{1 - F_s(s)} E(s)$

$F(s) = \frac{F_\infty}{1 - F_s(s)} \Leftrightarrow F(s)(1 - F_s(s)) = F_\infty \Leftrightarrow F_s(s) = 1 - \frac{F_\infty}{F(s)} = 1 - \frac{3}{\frac{3(s+0.5)}{s}} = \frac{0.5}{s+0.5}$

Fall 1: Utan intern återkoppling

$e(t) = 5\Theta(t) \Rightarrow E(s) = \frac{5}{s}$

$U(s) = F(s)E(s) = \frac{3(s+0.5)}{s} \cdot \frac{5}{s} = \frac{15}{s} + \frac{7.5}{s^2}$

$u(t) = (15 + 7.5t)\Theta(t)$

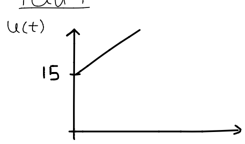
Fall 2: Med intern återkoppling

$U_s(t) = 10\Theta(t)$, $e(t) = 5\Theta(t)$

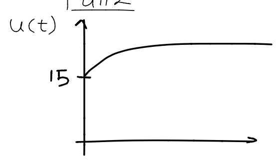
$U(s) = E(s)F_\infty + U_s F_s(s) = \frac{5}{s} \cdot 3 + \frac{10}{s} \cdot \frac{0.5}{s+0.5} = \frac{25}{s} - \frac{10}{s+0.5}$

$u(t) = (15 + 10 - 10e^{-0.5t})\Theta(t)$

Fall 1



Fall 2



Övningstal 9.1 (pir1)
Nedanstående fysikaliska system är givna med tidskontinuerliga överföringsfunktioner. Antag att systemen samplas och att insignalen är konstant över varje samplingsintervall h. Beräkna motsvarande tidsdiskretiserade överföringsfunktioner. Bestäm även de tidsdiskreta polerna i deluppgift a)-e). Jämför och kommentera!

a) $G(s) = \frac{3}{1+s}$ $\quad h = 1\,\text{s}$

1. Ta fram tillståndsmodell för kontinuerliga systemet

$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{3}{1+s} U(s) \Leftrightarrow (1+s)Y(s) = 3U(s) \overset{\mathcal{L}^{-1}}{\Rightarrow} \dot{y}(t) + y(t) = 3u(t)$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -x(t) + 3u(t) \\ y(t) = x(t) \end{cases}$$

Tidskont: $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$
$y(t) = Cx(t) + Du(t)$

Tidsdiskret: $x(kh+h) = A_d x(kh) + B_d u(kh)$
$y(kh) = C(kh) + Du(kh)$

$A_d = e^{Ah}$, $B_d = \int_0^h e^{A \cdot s} ds \cdot B$

Vi har: $A = -1$, $B = 3$, $C = 1$, $D = 0$

$A_d = e^{-h}$
$B = 3(1 - e^{-h})$ $\Rightarrow$ $\begin{cases} x(kh+h) = e^{-h} \cdot x(kh) + 3(1 - e^{-h})u(kh) \\ y(kh) = x(kh) \end{cases}$

Ztransform: $X(z)(z-e^{-h}) = 3(1-e^{-h})U(z)$ $\Rightarrow$ $G_d(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{3(1-e^{-h})}{z-e^{-h}} = \{h=1\} = \frac{1.896}{z-0.368}$

$Y(z) = X(z)$

Polerna ges av $z = 0.368$

$(z = e^{sh})$

Övningstal 9.4 (pir3)
Processen

$$G(s) = \frac{1-s}{1+s}$$

samplas med samplingsintervallet $h = \ln 2$. (Detta val visar sig ge enkla siffror!). Ställ upp en differensekvation som relaterar det tidsdiskreta systemets in- och utsignaler, $u(k)$ och $y(k)$ respektive, till varandra. Beräkna även $y(0)$, $y(1)$, $y(2)$, $y(3)$ och $y(4)$ i det tidsdiskreta systemets stegsvar, där $u(k) = 1$ för $k \geq 0$. Antag att $u(k), y(k) = 0$ för $k < 0$.

Gradtal täljare = Gradtal nämnare

$\Leftrightarrow$

Direktterm

Direktterm

$G(s) = \frac{1-s}{1+s} = \frac{2}{1+s} - 1$ $X(s) = \frac{2}{1+s}U(s)$ $Y(s) = G(s)U(s) = \frac{2}{1+s}U(s) - U(s)$

Tillståndsmodell: $\dot{x}(t) = -x + 2u$ $A=-1,\ B=2,\ C=1,\ D=-1$

$y(t) = x - u$

$A_d = e^{-\ln(2)} = \frac{1}{2}, \quad B_d = 1$

Differensekvation: $x(kh+h) = \underline{0.5x(kh) + u(kh)}$

$y(kh) = x(kh) - u(kh)$

Beräkna: $y(0), y(1), \dots y(4)$ för $u(k) = \begin{cases} 1 & k \geq 0 \\ 0 & k<0 \end{cases}$ givet att $y(k) = 0$ om $k<0$.

$y(kh+h) = x(kh+h) - u(kh+h) = \underline{0.5x(kh) + u(kh)} - u(kh+h)$

$y(kh+h) + u(kh+h) = \underline{0.5x(kh)} + u(kh)$

$y(kh+h) + u(kh+h) = \underline{0.5y(kh) + 0.5u(kh)} + u(kh)$

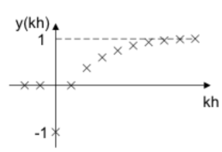
$y(kh+h) - 0.5y(kh) = -u(kh+h) + 1.5u(kh)$

$y(0) = 0.5y(-h) - u(0) + 1.5u(-h) = 0 - 1 + 0 = -1$

$y(h) = 0.5y(0) - u(h) + 1.5u(0) = 0$

• Lösning till 9.4

$$\begin{aligned} y(kh) - 0.5y(kh-h) &= -u(kh) + 1.5u(kh-h) \\ y(0) &= -1 \\ y(kh) &= 1 - \frac{1}{2^{k+1}},\ k > 0 \end{aligned}$$



Övningstal 9.6 (pirLFHF)
En process som beskrivs av den tidskontinuerliga överföringsfunktionen

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G(s) = \frac{5}{(s+1)(s+2)}$$

ska regleras med en dator. För att åstadkomma detta diskretiseras denna processmodell. Antag att datorn lägger ut en styckvis konstant styrsignal $u(t)$.

a) Bestäm motsvarande tidsdiskreta överföringsfunktion $G_d(z)$, och ange speciellt resultatet för samplingsintervallet $h = \ln 2$. Kommentera även de tidsdiskreta polernas placering som funktion av samplingsintervallet h speciellt för korta och långa intervall.

$$G(s) = \frac{5}{(s+1)(s+2)} = 2.5\left(\frac{2}{s+1} - \frac{2}{s+2}\right)$$

Om $F(s) = \frac{1}{s+a} \Rightarrow \dot{x} = -ax + u$, $A_d = e^{-ah}$, $B_d = \int_0^h e^{as}\,ds = \frac{1}{a}(1-e^{-ah})$

$$\underbrace{x(kh+h)}_{z \cdot x(kh)} = e^{-ah} \cdot x(kh) + \frac{1}{a}(1-e^{-ah})u(kh)$$

$$(z - e^{-ah})x(kh) = \frac{1}{a}(1-e^{-ah})u(kh) \Rightarrow F_d(z) = \frac{\frac{1}{a}(1-e^{-ah})}{z - e^{-ah}}$$

$$G_d(z) = 2.5\left(\frac{2(1-e^{-h})}{z-e^{-h}} - \frac{(1-e^{-2h})}{z-e^{-2h}}\right) = \frac{2.5(1-e^{-h})^2(z+e^{-h})}{(z-e^{-h})(z-e^{-2h})} = \{h = \ln 2\} = \frac{0.625(z+0.5)}{(z-0.5)(z-0.25)}$$