13.1 Extremvärdesproblem & lokala karaktäriseringar av kritiska punkter

Vill studera lokalt beteende för kritiska punkter till funktioner $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eller $f: U \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Kr pkt: $\nabla f(a,b) = 0$

(a,b) s.a.

Vi vill veta när dessa pkter är lokala max, min eller inget av detta. Varken eller kallas i boken för sadelpunkt. Genom taylorpolynom!

$f(x,y) \approx P_2(x,y)$ i punkten (a,b).

$$P_2(x,y) = f(a,b) + \underbrace{\cancel{\nabla f(a,b)(x-a)(y-b)}}_{=0 \text{ ty kritisk p}} + [(x-a)(y-b)] \cdot H(f)(a,b) \begin{bmatrix} x-a \\ y-b \end{bmatrix}$$

P_2 är kontrollerad av $H(f)$. Förra gången talade vi om pos.def, neg.def, indefinita, matriser eller kvadratiska ytor.

Kvadratisk form: $f(x,y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2$

Om $f(x,y) > 0$ för $(x,y) \neq 0 \Rightarrow P_2(x,y) = f(a,b) + \overset{\text{Plus ngt} > 0}{\geq 0}$

i det här fallet är (a,b) lokalt min om $(x,y) \neq (a,b)$

$f(x,y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2$

dela med y^2 (som är >0)

$f(x,y) = A\frac{x^2}{y^2} + 2B\frac{x}{y} + C$

sätt $\frac{x}{y} = t$

$f(t) = At^2 + 2Bt + C$

- Hitta minpunkter för att se om $f > || < 0$
- $f(t)$ har inga reella nollställen om alltid pos eller alltid negativ $\Rightarrow$ leta nollställen

$f(t) = 0 \Rightarrow t = -\frac{B \pm \sqrt{B^2 - AC}}{2A} \Rightarrow$ Om $B^2 - AC < 0$ existerar inga nollställen.

$B^2 - AC < 0$ & $A > 0 \Rightarrow F(t)$ alltid pos

$B^2 - AC < 0$ & $A < 0 \Rightarrow F(t)$ alltid neg

Om $B^2 - AC > 0 \Rightarrow$ $F(t)$ ibland pos ibland neg

$B^2 - AC = 0 \Rightarrow$ Vi vet inget

Översättning till kritiska punkter $A = f_{11}(a,b)$, $B = f_{12}(a,b)$ $C = f_{22}(a,b)$.

$B^2 - AC < 0$	$A > 0$	lokalt min
$B^2 - AC < 0$	$A < 0$	lokalt max
$B^2 - AC > 0$		Sadelpunkt (riktig)
$B^2 - AC = 0$		ingen info

Notera: $B^2 - AC = \det(H(f))$

Ex Bestäm och klassificera kritiska punkter till $f(x,y)=x^3+y^3-3xy$.

Kr.Pkt: $\nabla f(x,y)=0$

$$\nabla f(x,y)=(3x^2-3y,\,3y^2-3x)=(0,0) \Rightarrow$$

$$\left.\begin{matrix} x^2-y=0 \\ y^2-x=0 \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} y=x^2 \\ x=y^2 \end{matrix}\right\} y=x^2=(y^2)^2=y^4 \Rightarrow y^4=y \Rightarrow y(y^3-1)=0 \Rightarrow \begin{matrix} y_1=0,\ y_2=1 \\ x_1=0,\ x_2=1 \end{matrix}$$

Kr.Pktr

Hitta partiella derivator! Klassificera. $P_1=(0,0)$ $P_2=(1,1)$

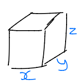
$$\text{Hess}(f)=\begin{pmatrix} \overset{A}{6x} & \overset{B}{-3} \\ \underset{B}{-3} & \underset{C}{6y} \end{pmatrix} \quad \text{om } P_1=(0,0) \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A=0,\ B=-3,\ C=0 \Rightarrow B^2-AC=9>0$$

P_1 är alltså en sadelpunkt.

$$\text{Hess}(f) \text{ om } P_2=(1,1) \Rightarrow \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow A=6,\ B=-3,\ C=6 \Rightarrow B^2-AC=-27<0 \Rightarrow P_2 \text{ är lokalt min.}$$

Dugga 26/9, V&V, $8^{30}-11^{30}$ Inkluderar allt till och med Lagranges metod (13.3).

Ex Bestäm största och minsta area till en box med given volym 5ve.



$V=x\cdot y\cdot z=5$

$A=2xz+2yz+2xy$

Om vi trycker ihop lådan $\Rightarrow$ oändlig area...

Volymformeln $\Rightarrow z=\frac{5}{xy}$

Arean $=f(x,y)=2x\left(\frac{5}{xy}\right)+2y\left(\frac{5}{xy}\right)+2xy = \frac{10}{y}+\frac{10}{x}+2xy$

$f(x,y)=\frac{10}{y}+\frac{10}{x}+2xy$

Minimum ges av en kritisk punkt.

$$\nabla f=\left(\frac{-10}{x^2}+2y,\ \frac{-10}{y^2}+2x\right)=(0,0) \Rightarrow \begin{matrix} y=\frac{5}{x^2} \\ x=\frac{5}{y^2} \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} y=\frac{5}{\left(\frac{5}{y^2}\right)^2}=\frac{y^4}{5} \\ x=\frac{x^4}{5} \end{matrix} \Rightarrow \cancel{x_1=0} \text{ men } x_1>0$$

$x_2^3=5 \Rightarrow x_2=\sqrt[3]{5}$

$y_2=\sqrt[3]{5}$

$z=\frac{5}{xy}=\sqrt[3]{5}$

13.2| Extremproblem med Bi-villkor

Ofta behöver man lägga till bivillkor. Hur max/minimerar vi en funktion $f(x,y)$ över ett område U definierat via $g(x,y)=C$

$g(x,y)\geq C$

$g(x,y)\leq C$

Sats

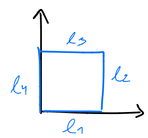
Om f har lokalt min/max i (a,b) gäller
i) $\nabla f(a,b)=0$
ii) $(a,b)=$ randpunkt
iii) ∇f odef

Ex Hitta max/min till $f(x,y)=x^2+y^2$ på kvadraten med hörn $(0,0),(0,1),(1,1),(1,0)$

$\nabla f=(2x,2y)=(0,0) \rightsquigarrow x=y=0$ motsvarar en kritisk punkt.

Spara $f(0,0)=0$

Måste kolla värden på randen till kvadraten. Detta genom att parametrisera kvadraten.



Finns 4 sidor som behöver fixas....

l_3 kan parametriseras gm $l_3(t)=(t,1)$

För att kolla värden till $f(x,y)$ sätt in l_3. $g(t)=f(l_3(t))=t^2+1^2$ Kolla kritiska punkter och randen.

$g'(t)=2t \Rightarrow t=0$ motsvarar $(0,1)$. Värde: Sparar $f(0,1)=1$

Randerna: $(0,0)$ & $(1,1)$ Spara också $f(1,1)=2$

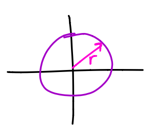
I slutänden har vi sparat massor med tal. Hittills har vi: $f(0,0)=0$ min ges av minsta värdet

$f(0,1)=1$ max ges av största

$f(1,1)=2$

$\vdots$

Ex Hitta max/min till $f(x,y)=ax+by$ på disken av radie r: $x^2+y^2\leq r$



Kritiska punkter: $\nabla f=(a,b)$

Om $(a,b)\neq(0,0)$ finns ingen kritisk punkt

Alltså ligger max eller min på randen: $x^2+y^2=r^2 \Rightarrow$ $x=r\cdot\cos t$

$y=r\cdot\sin t$

$f(x,y)=f(x,y \text{ på randen})(t)=a\cdot r\cdot\cos t+b\cdot r\cdot\sin t$

$g(t)=ar\cos t+br\sin t$

$g'(t)=-ar\sin t+br\cos t=0$

$-ar\sin t+br\cos t=0$

$(a,b)\cdot(-\sin t,\cos t)=0 \Leftrightarrow$ vinkelräta

En annan vinkelrät vektor till (a,b) är $(-b,a)$

det innebär att: $(-\sin t,\cos t)=\lambda(-b,a)$

$\lambda=\pm\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}$ eftersom VL har längd 1

Sammansättning av detta ger att $(a,b)\cdot(x,y)\leq\|(a,b)\|\cdot\|(x,y)\|$

Cauchy-Schwartz olikhet