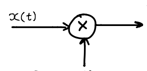
Fouriertabell	Periodic	Non-Periodic
Continious	Fourier Series	Fourier transform
Discrete	Discrete-Time Fourier series	Discrete-Time Fourier Transform

Re-Cap

Skapa en diskret signal av en kontinuerlig signal

Modell: 

$x_p(t) = P(t) \cdot X(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t-nT)$

$P(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT)$

Låt oss Fouriertransformera $x_p(t)$ direkt.

$X_p(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x_p(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t-nT)\right) e^{-j\omega t} dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t-nT) e^{-j\omega t} dt = \left\{\begin{matrix}\text{endast nollskiljda}\\ \text{bidrag om } t=nT\end{matrix}\right\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) e^{-j\omega nT} \overbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-nT) dt}^{=1} =$

$= \left\{\begin{matrix}\text{Låt: } x(nT) = x[n], \\ \omega t = \Omega\end{matrix}\right\} = \underline{\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\Omega n}}$

Detta är fouriertransformen för en icke periodisk diskret signal och den tecknas: $X(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\Omega n}$: DTFT Boken skriver: $X(\Omega)$

Egenskaper för DTFT

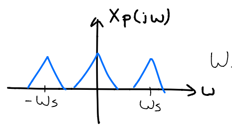
- $X(e^{j\Omega})$ är kontinuerlig i sin variabel Ω.
- $X(e^{j\omega})$ är periodisk i Ω.

$X(e^{j(\Omega+2k\pi)}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j(\Omega+2k\pi)n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\Omega n} \cdot e^{-j2\pi kn} = \{k, n \in \mathbb{Z} \Rightarrow e^{-j2k\pi n} = 1\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\Omega n} = X(e^{j\Omega})$

$X(e^{j\Omega})$ är alltså periodisk i Ω med 2π.

$$\underbrace{x[n]}_{\text{Diskret, Icke periodisk}} \overset{DTFT}{\longleftrightarrow} \underbrace{X(e^{j\Omega})}_{\text{Kontinuerlig, periodisk}}$$

Kom nu ihåg hur fouriertransformen såg ut för vårt viktade impulståg $x_p(t)$ då sampling introducerades.



$\omega_s = \frac{2\pi}{T_s}$

$X_p(j\omega)$ är också periodisk, men i ω och med perioden $\omega = \omega_s$. Men $\Omega = \omega T$, låt $\Omega = 2\pi \Rightarrow \omega = \frac{\Omega}{T} = \frac{2\pi}{T} = \omega_s$. $\Omega = 2\pi$ motsvar samplingsvinkelfrekvensen ω_s och "ett sampel per period".

Enheter

$[\omega]$: $\frac{rad}{s}$

$[T]$: s

$[\Omega]$: rad alt $\frac{rad}{sampel}$

Synteseekvation (invers DTFT)

$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(e^{j\Omega}) e^{j\Omega n} d\Omega$

Periodiska i Ω med 2π.

Integration över ~~ett~~ godtyckligt intervall om 2π.

Superposition av bassignal: $e^{j\Omega n} = \cos(\Omega n) + j\sin(\Omega n)$ med viktfunktion $X(e^{j\Omega})$.

Exempel Beräkna DTFT för $x[n] = \alpha^n \cdot u[n]$ med $0 \leq \alpha < 1$

$X(e^{j\Omega}) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n e^{-j\Omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha \cdot e^{-j\Omega})^n = \left\{\begin{matrix}\text{Geometrisk}\\ \text{serie}\end{matrix}\right\} = \frac{1}{1-\alpha \cdot e^{-j\Omega}}$

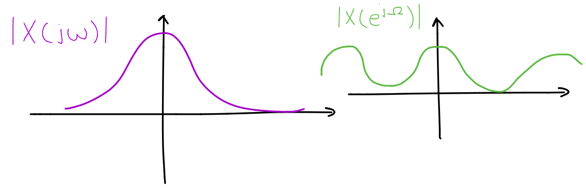
Kvar: $|\alpha e^{-j\Omega}| = |\alpha| < 1$, $X(e^{j\Omega}) = \frac{1}{1-\alpha\cos(\Omega)+j\sin(\Omega)}$

Notera! Periodisk, i Ω med 2π.

$|X(e^{j\Omega})| = \frac{1}{((1-\alpha\cos(\Omega))^2 + (\alpha\sin(\Omega))^2)^{1/2}} = \frac{1}{(1-2\alpha\cos(\Omega)+\alpha^2\cos^2(\Omega)+\alpha^2\sin^2(\Omega))^{1/2}} = \frac{1}{(1+\alpha^2-2\alpha\cos(\Omega))^{1/2}}$

$\arg\{X(e^{j\Omega})\} = -\arctan\left(\frac{\alpha\sin(\Omega)}{1-\alpha\cos(\Omega)}\right)$

För motsvarande kontinuerliga signal: $x(t)=e^{-at}u(t)$ har vi fouriertransformen $X(j\omega)=\frac{1}{a+j\omega}$
med: $|X(j\omega)|=\frac{1}{(a^2+\omega^2)^{1/2}}$, $\arg\{X(j\omega)\}=-\arctan\left(\frac{\omega}{a}\right)$



Vi ser att $|X(j\omega)|$ upprepas periodiskt i $|X(e^{j\Omega})|$. Genom att välja en lämplig samplingsfrekvens kan effekten av aliasing/vikning minskas och $X(j\omega)$ återfinns (i stort sett) i $X(e^{j\Omega})$ i intervallet $-\pi<\Omega<\pi$.

En kontinuerlig signals fouriertransform ($x(t) \xleftrightarrow{FT} X(j\omega)$) kan alltså erhållas ur den samplade signalens fouriertransform med $|\Omega|<\pi$ ($x[n]=x(nT) \xleftrightarrow{DTFT} X(e^{j\Omega})$) om effekten av aliasing kan göras tillräckligt liten. För praktiska beräkningar återstår dock några problem.

$$x(t) \xrightarrow{\text{Samplas}} \underset{\text{Diskret}}{x[n]} \xleftrightarrow{\text{DTFT}} \underset{\text{Kontinuerlig}}{X(e^{j\Omega})}$$

För numeriska beräkningar är kontinuerliga funktioner olämpliga.
Beräkna $X(e^{j\Omega})$ endast för vissa frekvenser i intervallet $\Omega=[0,2\pi]$. Välj $\Omega_k=\frac{2\pi}{N}\cdot k$, $k=0,1,2,\ldots N-1$
Vi landar nu i det som kallas Diskret Fouriertransform (DFT).