Partialbråksuppdelning

q_1, q_2 relativt prima.

$\frac{p}{q_1 \cdot q_2} = \frac{p_1}{q_1} + \frac{p_2}{q_2}$, alla täljare är av lägre grad än nämnarna.

Bevis

$\frac{p}{q_1 q_2} = [\text{Bezouts id}] = \frac{p(uq_1 + vq_2)}{q_1 \cdot q_2} = \frac{puq_1}{q_1 q_2} + \frac{pvq_2}{q_1 q_2} = \frac{pu}{q_2} + \frac{pv}{q_1} = k_2 + \frac{p_2}{q_2} + k_1 + \frac{p_1}{q_1}$, k_2 måste vara lika med $-k_1$ ty V.L $\to 0$ när $x \to \infty$ och $\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}$ likaså.

Ex. $\frac{x^4+2x^3+x^2-2x}{x^3+x^2-x-1} = r$

$$
\begin{array}{l}
x + 1 \\
\hline
x^4+2x^3+x^2-2x \;\big|\; x^3+x^2-x-1 \\
-(x^4+x^3-x^2-x) \\
\hline
\quad x^3+2x^2-x \\
\quad -(x^3+x^2-x-1) \\
\hline
\qquad x^2+1
\end{array}
$$

$r(x) = x+1 + \frac{x^2+1}{x^3+x^2-x-1}$

Faktorisera $x^3+x^2-x-1 = q(x)$

$q(1) = 0 \Rightarrow$ det går att dividera

$$
\begin{array}{l}
x^2+2x+1 \\
\hline
x^3+x^2-x-1 \;\big|\; x-1 \\
-(x^3-x^2) \\
\hline
\quad 2x^2-x \\
\quad -(2x^2-2x) \\
\hline
\qquad x-1 \\
\qquad -(x-1) \\
\hline
\qquad\quad 0
\end{array}
$$

$q(x) = (x^2+2x+1)(x-1) = (x-1)(x+1)^2$

$r(x) = x+1 + \frac{x^2+1}{(x-1)(x+1)^2} = x+1 + \frac{A}{x-1} + \frac{bx+c}{(x+1)^2} = x+1 + \frac{A}{x-1} + \frac{b(x+1)+(c-b)}{(x+1)^2} = x+1 + \frac{A}{x-1} + \frac{b}{x+1} + \frac{c-b}{(x+1)^2} = x+1 + \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}$

$= x+1 + \frac{A(x+1)^2 + B(x+1)(x-1) + C(x-1)}{(x-1)(x+1)(x+1)}$

x^2-termer:	$A+B$	=	1
x-termer:	$2A+C$	=	0
konst:	$A-B-C$	=	1

$C = -2A$

$3A - B = 1$

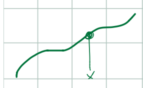
$A + B = 1$

$4A = 2 \Rightarrow A = \frac{1}{2},\ B = \frac{1}{2},\ C = -1 \Rightarrow r(x) = x+1 + \frac{1}{2(x-1)} + \frac{1}{2(x+1)} - \frac{1}{(x+1)^2}$

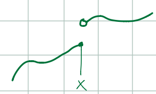
Def

En funktion kallas kontinuerlig om tillräckligt små ändringar i x ger godtyckligt givna små förändringar i $y = f(x)$.

Kontinuerlig

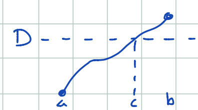


Diskontinuerlig



Satsen om mellanliggande värden

Om $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ är kontinuerlig och $f(a)<f(b)$ $(f(a)>f(b))$, $a<b$, och $f(a)<D<f(b)$ så finns ett c
$a<c<b$, $f(c)=D$

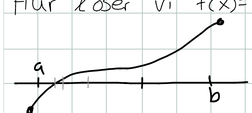


Inte sant om $f: \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$

Ex $f(x)=x^2$
$f(1)=1$
$f(2)=4$
$1<2<4$ men $\nexists x$. så $x^2=2$

Intervallhalvering

Om $f(a)<0$ och $f(b)>0$ finns ett x s.a. $f(x)=0$.
Hur löser vi $f(x)=0$?



Tag medelpunkten $m=\frac{a+b}{2}$, minst ett av intervallen $(a,m]$ och $[m,b)$ har olika tecken i ändpunkterna (om inte $f(m)=0$). Upprepa!

Def

Derivatan $f'(x)$ är $\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ om gränsvärdet existerar.

Ex $f(x)=x^2$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{(x+h)^2-x^2}{h}=\frac{x^2+2hx+h^2-x^2}{h}=2x+h \to 2x$$

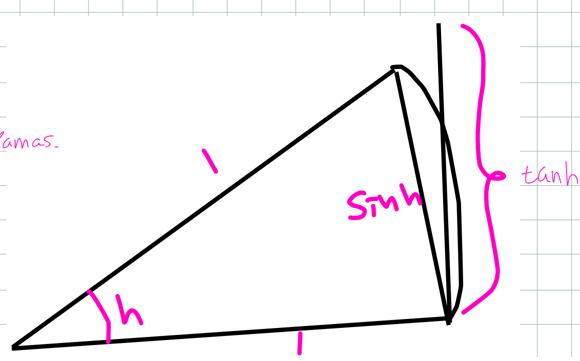
$f(x)=\sin x$, $x=0$

$$\frac{\sin(0+h)+\sin(h)}{h}=\frac{\sin h-\sin 0}{h}=\frac{\sin h}{h}\to 1$$

Bevis

Antag först $h>0$

Jämför sektorns area med trianglarnas.



$$\frac{1\cdot \sin h}{2}<\frac{h}{2\pi}<\frac{1\cdot \tan h}{2}$$

$\sin h<h<\tan h=\frac{\sin h}{\cos h}$

$\frac{\sin h}{h}<1<\frac{\sin h}{h}\cdot\frac{1}{\cos h}$

$\cos h<\frac{\sin h}{h}<1$

$h\to 0$, $\sin h\to 1$

Anm.

Gränsvärden när $x \to \infty$

$\log_a x$ växer långsammare än

x^α — " — $\alpha > 0$

x^β om $\beta > \alpha$ — " —

c^x

$\frac{x^2}{e^x} \to 0, \quad x \to \infty$

$\frac{\ln x}{x} \to 0, \quad x \to \infty$

$\frac{x^2+x}{x^3+1} = \frac{x^2(1+\frac{1}{x})}{x^3(1+\frac{1}{x^3})} \to 0$

$\frac{x^2+x}{x^2+2x} = \frac{x^2(1+\frac{1}{x})}{x^2(1+\frac{2}{x})} \to 1$

Derivatan mäter ändringstakt

1) Hastighet

$S(t)$: tillryggalagd sträcka

$\frac{S(t+h)-S(t)}{h}$, medelhastighet i tidsintervallet $[t, t+h]$

$S'(t)$: hastigheten i t

2) Marginalskatt

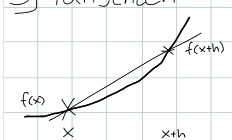
$S(k) =$ Skatt att betala på k kronor

$S(k+h) - S(k) =$ skatt att betala på de sista h kronorna.

$\frac{S(k+h)-S(k)}{h} =$ Skatt/krona på sista h

$S'(k)$ marginalskatten

3) Tangenten



Kordans lutning: $\frac{f(x+h)-f(x)}{(x+h)-x} = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, $h \to 0$ $f'(x) =$ tangentens lutning

4) Approximativa beräkningar i samband med mätfel

$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x)$, om h är litet: $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \approx f'(x)$ $\quad f(x+h) \approx f(x) + f'(x)h$

Ex

$(2{,}01)^2$

$f(x) = x^2$

$f'(x) = 2x$

$x = 2$

$(2{,}01)^2 = 2^2 + 2 \cdot 2 \cdot 0{,}01 = 4{,}04$

Exakt

$(2{,}01)^2 = (2 + 0{,}01)^2 = 4 + 4 \cdot 0{,}01 + 0{,}01^2 = 4{,}0401$