Samplingsteoremet

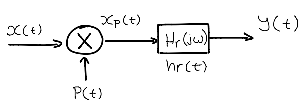
Låt en kontinuerlig signal $x(t)$ vara bandbegränsad. $x(t) \overset{FT}{\longleftrightarrow} X(j\omega) = 0$ för $|\omega| > \omega_M$

Om samplingsvinkelfrekvensen $\omega_s > 2\omega_M$ kan signalen $x(t)$ återskapas från dess samplevärden $x(nT_s)$; $n \in \mathbb{Z}$ där $T_s = \frac{2\pi}{\omega_s}$

Några praktiska aspekter

Om $x(t)$ ej är bandbegränsad används ett antivikningsfilter (anti aliasing). Ett kontinuerligt låspassfilter som reducerar bandbredden hos signalen $x(t)$. Detta filter appliceras FÖRE sampling och minskar effekten av vikning/aliasing. Filtret undertrycker frekv.komponenter $> \frac{\omega_s}{2}$.

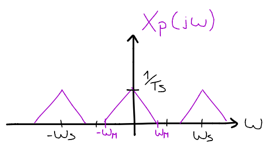
Ideal rekonstruktion

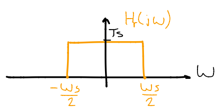
Modell 

$x(t) \overset{FT}{\longleftrightarrow} X(j\omega)$

$P(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s) \overset{FT}{\longleftrightarrow} P(j\omega) = \frac{2\pi}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega k)$

$x_p(t) = x(t)P(t) \overset{FT}{\longleftrightarrow} \frac{1}{2\pi} X(j\omega) * P(j\omega) = X_p(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (j(k - k\omega_s))$





Applicera ett idealt rekonstruktionsfilter $H_r(j\omega) = \begin{cases} T_s & |\omega| < \frac{\omega_s}{2} \\ 0 & \text{other} \end{cases}$

Vi får $Y(j\omega) = H_r(j\omega) X_p(j\omega)$

Vi ser att vi får $Y(j\omega) = X(j\omega)$ alltså blir även $y(t) = x(t)$ och

Vi får åter den ursprungliga signalen.

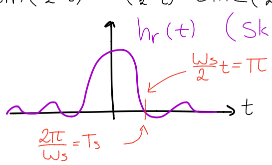
I tidsdomänen

Låt rekonstruktionssystemets impulssvar vara $h_r(t) = FT^{-1}\{H_r(j\omega)\}$

$y(t) = h_r(t) * x_p(t) = h_r(t) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\delta(t - nT_s) = \{x[n] = x(nT_s)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] h_r(t - nT_s)$

Räkna fram impulssvaret

$h_r(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H_r(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{T_s}{2\pi} \int_{-\frac{\omega_s}{2}}^{\frac{\omega_s}{2}} e^{j\omega t} d\omega = \frac{T_s}{2\pi} \left[\frac{e^{j\omega t}}{jt} \right]_{-\frac{\omega_s}{2}}^{\frac{\omega_s}{2}} = \frac{T_s}{\pi t} \cdot \frac{1}{2j} \left[e^{j\frac{\omega_s}{2}t} - e^{-j\frac{\omega_s}{2}t} \right] = \frac{T_s}{2\pi} \sin\left(\frac{\omega_s}{2} t\right) = \left\{ T_s = \frac{2\pi}{\omega_s} \right\} = \frac{2\pi}{\omega_s \pi t} \sin\left(\frac{\omega_s}{2} t\right) = \frac{\sin(\frac{\omega_s}{2}t)}{(\frac{\omega_s}{2}t)} = \mathrm{Sinc}\left(\frac{\omega_s}{2} t\right)$

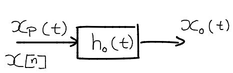


Notera!

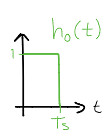
Impulssvaret $h_r(t)$ är icke kausalt samt har oändlig utsträckning. Ej praktiskt användbart.

Praktisk rekonstruktion

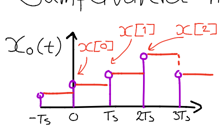
- Hållkrets av nollte ordningen



Låt impulssvaret $h_0(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t \leq T_s \\ 0 & \text{other} \end{cases}$



Sampelvärdet hålls kvar på sin nivå tills nästa samplevärde kommer.



$x_0(t) = h_0(t) * x_p(t) = \{x[n] = x(nT_s)\} = h_0(t) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\delta(t - nT_s) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n] h_0(t - nT_s)$

Fouriertransformera: $X_0(j\omega) = H_0(j\omega) X_p(j\omega)$

$h_0(t) \overset{FT}{\longleftrightarrow} H_0(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h_0(t) e^{-j\omega t} dt = 2 e^{(j\frac{T_s}{2}\omega)} \cdot \frac{\sin(\frac{\omega}{2}T_s)}{\omega}$

Första nollstället: $\frac{\omega T_s}{2} = \pi \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T_s} = \omega_s$