

12.5-6

Utifrån tangentplanet har vi fått skrämjära approximationer.

$$f(x,y): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

Tangentplanet till funktionsytan $z = f(x,y)$ i $(a,b, f(a,b))$ ges av $f_1(a,b)(x-a) + f_2(a,b)(y-b) - (z-f(a,b))=0$

Linjäriseringen ges av: $Lf(a+b, h+k) = f(a,b) + f_1(a,b)h + f_2(a,b)k$
 $Lf(x,y) = f(a,b) + f_1(a,b)(x-a) + f_2(a,b)(y-b)$

Diverbarhet \Leftrightarrow Linj appx är "bra" (små feltermer)

Sats

f deriverbar om f_1 & f_2 kontinuerliga

For att gå från den ena formeln till den andra sätts $x=a+h$, $y=b+k$ alternativt $h=x-a$, $k=y-b$

Kedjeregel

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \lambda: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(\lambda(t))' = f'(\lambda(t)) \cdot \lambda'(t) = \frac{df}{d\lambda} \cdot \frac{d\lambda}{dt}$$

Vi vill få bra formulor för $\frac{\partial}{\partial s} f(u(s,t), v(s,t))$ & $\frac{\partial}{\partial t} (u(s,t), v(s,t))$, $u(s,t): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ $v(s,t): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

Typiskt om man vill göra variabelbyte.

$$\text{Hypothes: } a=b=f(a,b)=0$$

$$u(0,0) = v(0,0) = 0$$

$$\text{Vi vill visa att } L(f(u,v)) = Lf \cdot (Lu, Lv)$$

$$u(s,t) \approx Lu = \frac{\partial u}{\partial s} s + \frac{\partial u}{\partial t} t$$

$$v(s,t) \approx Lv = \frac{\partial v}{\partial s} s + \frac{\partial v}{\partial t} t$$

(Betraktar jag linjeriseringar map (u,v) & (s,t).

$$f \approx Lf = \frac{\partial f}{\partial s} s + \frac{\partial f}{\partial t} t = \frac{\partial f}{\partial u} u + \frac{\partial f}{\partial v} v \approx \frac{\partial f}{\partial u} Lu + \frac{\partial f}{\partial v} Lv = \frac{\partial f}{\partial u} \left(\frac{\partial u}{\partial s} s + \frac{\partial u}{\partial t} t \right) + \frac{\partial f}{\partial v} \left(\frac{\partial v}{\partial s} s + \frac{\partial v}{\partial t} t \right)$$

$$\text{Jämför två uttryck för } Lf. \quad ① \quad Lf = \left(\frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial s} \right) s + \left(\frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial t} \right) t$$

$$② \quad Lf = \frac{\partial f}{\partial s} s + \frac{\partial f}{\partial t} t$$

$f \neq Lf$, men om f diff $\Rightarrow f = Lf + \text{liten felterm}$

$$u = Lu + \dots$$

$$v = Lv + \dots$$

Feltermerna kommer inte spela någon roll för sammanställningen \Rightarrow
 s -linjära termerna & t -linjära termerna motsvarer varandra.

Formler

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial s}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial t}$$

Ex

Triggetten mha kedjeregeln.

$$f(u,v) = u^2 + v^2, \quad u = \cos t, \quad v = \sin t \quad (\text{ingen } s\text{-variabel})$$

$$f(\cos t, \sin t) = 1$$

Vill visa att deriv i t är 0 $\Rightarrow f(\cos t, \sin t) = \text{konst. } f=1$ m test g

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial t}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 2u, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = 2v$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\sin t, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = \cos t$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial t} = 2 \end{array} \right\} \frac{\partial f}{\partial t} = 2 \cos t (-\sin t) + 2 \sin t \cos t = 0$$

$$\cos 0 = 1, \sin 0 = 0$$

Ytterliggare härledning av formeln i linjära fallet:

$$f(u, v) = Au + Bv, \quad \frac{\partial f}{\partial u} = A, \quad \frac{\partial f}{\partial v} = B$$

$$u(s, t) = As + bt, \quad \frac{\partial u}{\partial s} = A, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = b$$

$$v(s, t) = Cs + dt, \quad \frac{\partial v}{\partial s} = C, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = d$$

Vill ha deriv. av sammansättningen: $f(u(s, t), v(s, t)) = A(as+bt) + B(cs+dt) = (Aa+Bc)s + (Ab+Bd)t$

$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial s} = Aa + Bc$ $\frac{\partial f}{\partial t} = Ab + Bd$

Insättning av λ bekräftar kedjeregeln.

Låt $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $\lambda: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $\lambda(s, t) = (u(s, t), v(s, t))$

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v} \right)$$
 velter $d\lambda = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial s} & \frac{\partial u}{\partial t} \\ \frac{\partial v}{\partial s} & \frac{\partial v}{\partial t} \end{pmatrix}$ Kedjeregeln: $d(f \circ \lambda) = df \circ d\lambda$ ← vanliga kedjeregeln

Ex

Beräkna $\frac{\partial F}{\partial x}(x^2+y^2, x+y)$ & $\frac{\partial F}{\partial y}(x^2+y^2, x+y)$ i termer av f_1 och f_2

$$F(x, y) = f(x^2+y^2, x+y)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = f_1 \cdot 2x + f_2 \cdot 1 \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} = f_1 \cdot 2y + f_2 \cdot 1$$

Tredje gången....

Kedjeregeln enl. boken i en variabel

$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $u=u(t)$, $v=v(t)$, finns inget s.

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial t}$$

Beweis

$$g(t) = f(u(t), v(t))$$

$$\frac{dg}{dt} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(t+h) - g(t)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(u(t+h), v(t+h)) - f(u(t), v(t))}{h} = \left[\text{rägg till, dra bort} \atop f(u(t), v(t+h)) \right] =$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(u(t+h), v(t+h)) - f(u(t), v(t+h))}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(u(t), v(t+h)) - f(u(t), v(t))}{h} \Rightarrow$$

inget h-beroende i första variabeln

Andra termen är en vanlig sammansättning av 1-var-funktionen \Rightarrow Vanlig kedjeregel

$$\Rightarrow \text{Andra termen} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial t}$$

~ Med lite värul; a första termen

Ex

$$f(u, v) = u^2 v, \quad u = \cos(xy), \quad v = e^x \quad \text{Vad är } \frac{\partial f}{\partial x} \text{ och } \frac{\partial f}{\partial y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = 2uv(-y(\sin(xy))) + u^2 \cdot e^x = 2\cos(xy)e^x(-y\sin(xy) + \cos^2(xy))e^x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = P.S.$$

Idén är att linjäriseringarna ger goda approximationer som vi fick från geometri.
Vad betyder de?

$$\lambda(s,t) = (u(s,t), v(s,t)) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad d\lambda = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial s} & \frac{\partial u}{\partial t} \\ \frac{\partial v}{\partial s} & \frac{\partial v}{\partial t} \end{pmatrix} \leftarrow \begin{array}{l} \text{Matrisen är en linjär avbildningen} \\ \text{mellan tangentplanet som består av olika} \\ \text{ytör.} \end{array}$$

Detta kallas Jacobimatrizen av transformationsen $(u(s,t), v(s,t)) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

Def

$|\det M|$ = Jacobiderminanten, den mäter hur mycket volymen/arean ändras under avbildningen
(Funktionaldeterminanten)

Ex

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} (0,1) \\ (1,0) \end{matrix} \xrightarrow{M} \begin{matrix} \text{hatched area} \\ (1,1) \end{matrix} \quad \leftarrow |\det M| = \text{Volym/area} \cdot \text{vändning} \quad \text{dvs areaen av parallelogram}$$

Ex

$$\begin{aligned} x &= r \cos \alpha \\ y &= r \sin \alpha \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \text{Polära koordinater} \\ \text{Jacobi matrisen } M \text{ och } \det M? \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} r & & x \\ \uparrow & \curvearrowright & \uparrow \\ (r, \alpha) & & (x, y) = (r \cos \alpha, r \sin \alpha) \\ \downarrow & & \downarrow \\ x & & y \end{array}$$

$$M = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -r \sin \alpha \\ \sin \alpha & r \cos \alpha \end{pmatrix}$$

$$\det M = (\cos \alpha \cdot r \cos \alpha - (-r \sin \alpha \cdot \sin \alpha)) = r(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) = r$$

12.7.1 Gradienter och Riktningsvektorer

Def

$$\nabla f = (f_1, f_2) = \text{gradienten till funktionen } f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

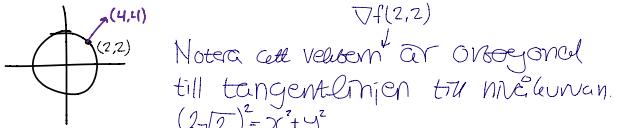
Ex

$$\text{Jacobimatrisen } M \text{ för } (u(s,t), v(s,t)) \quad M = \begin{pmatrix} \nabla u \\ \nabla v \end{pmatrix} \quad \nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j \\ \frac{\partial}{\partial z} i + \frac{\partial}{\partial y} j \end{pmatrix}$$

Ex

$$f(x,y) = x^2 + y^2 \Rightarrow \nabla f = (2x, 2y)$$

i punkten $x=y=2$ kommer $\nabla f(2,2) = (4,4)$



$\nabla f(2,2)$
Notera att vektorn är ortogonal till tangentlinjen till nivåkurvan.
 $(2\sqrt{2})^2 = x^2 + y^2$

Ex

$$f(x,y) = 5x + 3y - 7, \text{ Gradienten i } (1,1)$$

$$\nabla f = (5, 3) \Rightarrow \text{Z}(1,1) = 5+3-7=1$$

Kurvan $5x + 3y = 8$ är en nivåkurva till $Z=1$. Vektorn $(5,3)$ är exakt normalen till kurvan.

Sats

$\nabla f(a,b)$ är ortogonal till tangenten till nivåkurvan $z = f(x,y)$ för fixt x,y . $f(a,b) = f(x,y)$
Om $\nabla f(a,b) \neq 0$

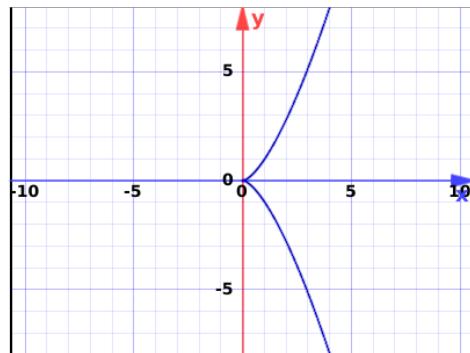
Motexempel

$$z = x^3 - y^2, (0,0) \Rightarrow \nabla f(3x^2, -2y), z = 0 = x^3 - y^2 \xleftarrow{\text{relevant nivåkurva}} x^3 = y^2$$

Bir konstig när man ritar...

$$\text{Kurvan } y^2 = x^3$$

Dette är en singularitet,
en sk. spets



Bevis

Betrakta $z = c = f(x, y)$. Antag att vi har en parametrisering. $C = f(x(t), y(t)) = \text{konst}$

$$\frac{dz}{dt} = 0 = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} \right); (x', y')$$

det product tangentvinkel/
hastigheten