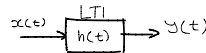


Laplace transform

En mer generell metod för att studera kontinuerliga LTI-system och signaler.

Låt $x(t) = e^{st}$ där $s = \sigma + j\omega$.



Den tidsberoende insignalen.
Kallas egenfunktion.

$$y(t) = (h * x)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) x(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{s(t-\tau)} d\tau = e^{st} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-s\tau} d\tau = e^{st} H(s)$$

Komplex, beror av tid
Kallas egenvärde
till e^{st}

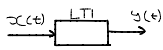
$$e^{st} = e^{(\sigma + j\omega)t} = e^{\sigma t} e^{j\omega t}, \quad \mathcal{L}\{x(t)\} = X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-st} dt = \text{FT}\{x(t) e^{-\sigma t}\}$$

$H(s) = \text{Laplace transform}$

Konvergenskrav hos Fouriertransformen
 $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t) e^{-\sigma t}| dt < \infty$

De värden på $\sigma = \text{Re}(s)$ för vilka integralen konvergerar kallas Laplace transformens konvergensområde ROC. Om ROC omfattar $j\omega$ -axeln i s -planet kan vi sätta $\sigma = 0$
 $X(s)|_{s=j\omega} = X(j\omega)$ (FT) Fouriertransformen är då lika med Laplace transformen utvärderad på $j\omega$ -axeln i s -planet.

— x —



Antag att vi har ett kontinuerligt LTI-system där sambandet mellan insignal och utsignal beskrivs av en differentialekvation

Allmänt $a_N \frac{d^N y}{dt^N} + a_{N-1} \frac{d^{N-1} y}{dt^{N-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y(t) = b_M \frac{d^M x}{dt^M} + b_{M-1} \frac{d^{M-1} x}{dt^{M-1}} + \dots + b_1 \frac{dx}{dt} + b_0 x(t)$

Allt: $\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y}{dt^k} = \sum_{k=0}^M b_k \frac{d^k x}{dt^k}$

Laplace transformera

Antag system i vila (beg. värden = 0)

$$\sum_{k=0}^N a_k s^k Y(s) = \sum_{k=0}^M b_k s^k X(s) \quad \text{Bryt ut: } Y(s) \sum_{k=0}^N a_k s^k = X(s) \sum_{k=0}^M b_k s^k$$

$$\text{Bild a kvot: } \frac{Y(s)}{X(s)} = H(s) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k s^k}{\sum_{k=0}^N a_k s^k}$$

detta är en vanlig form av Laplace-T i våra ingenjörstillämpningar.
En kvot mellan polynom i s .

Polynomen kan även skrivas på faktorerad form som:

$$H(s) = \frac{b_M \prod_{k=1}^M (s - c_k)}{a_N \prod_{k=1}^N (s - d_k)}$$

i Matlab kan man plotta pzmap där är \times d_k Poler till $H(s)$ som är rötter till nämnarpolynomet.

\circ c_k Nollställena till $H(s)$, rötter till täljarpolynomet.

Grafen innehåller all info om systemet $H(s)$ förutom skalfaktorn $\frac{b_M}{a_N}$.

Om vi behåller samma system har vi: $x(t) \xleftrightarrow{\text{LT}} X(s)$
 $y(t) \xleftrightarrow{\text{LT}} Y(s)$
 $h(t) \xleftrightarrow{\text{LT}} H(s)$

Faltning

I tidsdomänen vet vi att $y(t) = (h * x)(t) \xleftrightarrow{\text{LT}} Y(s) = H(s) X(s) \Rightarrow \frac{Y(s)}{X(s)} = H(s)$

Samma resultat som när vi utgick från diffek. (Vilken tur! \smile)

$H(s)$: Systemets överföringsfunktion $H(s) = \mathcal{L}\{h(t)\}$ $h(t)$ är systemets impulssvar.

Invers Laplace transform

Utgå ifrån $H(s) = \frac{B(s)}{A(s)}$ (en kvot av polynom i s)

$B(s)$: ordning M

$A(s)$: ordning N

Om $M > N \Rightarrow$ Polynomdivision krävs, men i fysikaliska system är det nästan alltid så att $M \leq N$.

Rent polynom

Division ger: $H(s) = \underbrace{\sum_{k=0}^{M-N} C_k s^k}_{\text{Rent polynom}} + \frac{\tilde{B}(s)}{A(s)}$

$\tilde{B}(s)$: ordning $N-1$

$A(s)$: ordning N

Partialbråksuppdelning, detta ger en summa av enklare termer vilka kan inverstransferas var och en för sig.

* 1:a ordningens term: reell pol, $s = d_k \Rightarrow \frac{A_k}{s - d_k} \xrightarrow{\mathcal{L}} A_k e^{d_k t} \cdot u(t) \rightarrow 0$ om $d_k < 0 \Rightarrow$ Pol i VHP.

Ty bara def $t > 0$

Vänstra halvplanet