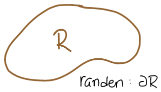
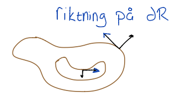
16.3| Greens Sats



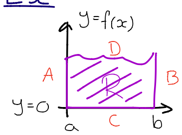
$F=(F_1,F_2) \Rightarrow \int_{\partial R} \vec{F}\cdot dr = \iint_R \text{curl}\, F\cdot k\, dA = \iint_R \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)dxdy$

∂R har en riktning/orientering. Grundidéen är att



För att få motsatt riktning negerar man uttrycket.

Ex



$\vec{F}=(-y,0)$

Green: $\iint_R \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\, dxdy = \iint 0-(-1)dxdy = \iint dxdy =$ Arean av R.

$\int_{\partial R}(-y,0)\cdot dr = -\int y\,dx + 0\,dy = \int -y\,dx = \int_A^{①} -y\,dx + \int_B^{②} -y\,dx + \int_C^{③} -y\,dx + \int_D^{④} -y\,dx =$

1) Parametrisera: $y=t, x=a$, $dy=dt$, $dx=0 \Rightarrow \int -y\,dx = 0$
2) Samma som 1).
3) $y=0$, $x=t \Rightarrow dy=0$, $dx=1 \Rightarrow \int 0\,dy = 0$
4) Parametrisering: $y=f(t), x=t$. $a\leq t\leq b$ (moturs $\Rightarrow b\to a$), $dy=f'(t)dt$, $dx=dt$
$\int_D -y\,dx = \int_b^a -f(t)dt = \int_a^b f(t)dt$

Green säger: Area(R) $= \int_a^b f(t)dt = \int_{\partial R} F\cdot dr$

Ex Beräkna arbetsintegralen över ◗ = högra halvan av enhetsdisken där $F=(y^2,x)$.
Två approacher.
1. Parametrisera alla kurvor (| och ⊃) och beräkna de två arbetsintegralerna.
2. Green!

$\int_{\partial R} F\cdot dR = \iint_R \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)dxdy = \iint_R (1-2y)dxdy = \iint 1\,dxdy - \iint 2y\,dxdy$

Två alternativ igen. 1: Polära koordinater
2: Vara listig...

$\iint_R 1\,dxdy =$ Arean(R) $= \frac{\pi\cdot 1^2}{2} = \frac{\pi}{2}$ $\quad \left| -2\iint y\,dxdy = \left\{ \frac{\iint y\,dxdy}{\iint dxdy} = \text{tyngdpunkt i y-led för densitet 1, och även medelvärdet till y} \right\} = -2\,(\text{Arean}(R)\cdot \overbrace{\text{Medel av } y}^{0}) = 0\right.$

Svar: $\frac{\pi}{2} + 0 = \frac{\pi}{2}$

Ex Räkna ut arbetsintegralen för ⟩ (cirkeldelen av förra kurvan) med samma vektorfält.
Problem: Kurvan är inte sluten, men om vi lägger till $x=0$ så får vi samma område igen.
$\int_{⟩} F\cdot dr + \int_{x=0} F\cdot dr = \int_{◗} F\cdot dr = \{\text{Samma som förra}\} = \frac{\pi}{2}$

För att få ut vår båj måste vi hitta $\int_{x=0} F\cdot dr$. Parametrisera: $y=t$, t går från $1\to -1$, $x=0$
$dx=0$, $dy=dt$

$\int F\cdot dr = \int_1^{-1} y^2dx + x\,dy = 0 \Rightarrow \int_{⟩} F\cdot dr = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$

16.4| Gauß divergenssats

Greens idé är att överföra en arbetsintegral över en rand till en dubbelintegral av det inre.
Gauß idé är att överföra en flödesintegral över randen till något till en trippelintegral över det inre.

Gauß divergenssats

Givet ett område i $\mathbb{R}^3$ (ex en boll men inte en sfär (sfären är bara skalet)):
$\iiint_R (\text{div}\, F)dV = \iint_{\partial R} F\cdot \hat{N}\, dS = \iint_{\partial R} F\cdot d\vec{S}$ där flödesintegralen alltid pekar ut från området.

Bevis

Fyll upp området med boxar. Flödesintegralen för två boxar som ligger dikt an är densamma som om de båda var en stor box (Skarven = 0). [Kolla på nätet.]

Konsekvens av Gauß

Vi får en tolkning av $\nabla \cdot F$. Medelvärdesbilda runt en punkt P: $\operatorname{div} F(P) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\mathrm{Vol}(B_\varepsilon)} \iiint_{B_\varepsilon} \operatorname{div} F \, dV =$

Boll med radie ε

$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\frac{4\pi\varepsilon^3}{3}} \iint_{\partial B_\varepsilon} F \cdot \hat{N} dS = \frac{1}{\frac{4\pi\varepsilon^3}{3}} \cdot \left(\text{Flödet ur en liten sfär runt P}\right)$

Mao säger Gauß att summan av all källproduktion i R är flödet ut ur R.

Ex Beräkna flödet ut ur sfären med radie r och centrum i $(a,b,c) \Rightarrow (x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2 = A^2$

Gauß: $\iint_{\partial R} F \cdot \hat{N} dS = \iiint_R \operatorname{div} F \, dV = \iiint_R y + x + 2z \, dV$

Alt 1: Sfäriska koordinater $\Rightarrow$ $x = a + R\cos\theta \sin\varphi$
$y = b + R\sin\theta \sin\varphi$ lite jobbigt att hitta dV
$z = c + R\cos\varphi$

Alt 2: Betrakta $\iiint y \, dV$ som $\approx$ tyngdpunkt i y-led.

$$\frac{\iiint_R y \, dV}{\iiint_R dV} = b \qquad \text{(samma sak för x-led och z-led)}$$

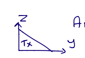
$$\iiint y \, dV = \iiint dV \cdot b = \frac{4\pi A^3}{3} b \Rightarrow \iint_{\partial R} F \cdot d\vec{S} = \frac{4\pi A^3}{3}(a+b+2c)$$

Notera!
Sökes flödet innåt negerar man $\nabla \cdot$.

Ex Beräkna utflödet från en tetraeder (Pyramid) vilken begränsas av: koordinataxlarna samt $x+2y+3z=6$. $F = (x, z, 0)$

Alt 1: Parametrisera de 4 sidorna till området.
Alt 2: GAUß!

$$\iint_R F \cdot dS = \iiint_R \nabla \cdot F \, dV = \iiint_R 1+0+0 \, dV = \iiint_R dV = \mathrm{Volym}(R) = [\text{Fråga Beta!}]$$

Trippelintegraler, Skiva i x-riktning. $\int_0^6 \left(\iint_{T(x)} dy\,dz \right) dx = \int_0^6 \mathrm{Arean}(T(x)) dx = \{$  $\mathrm{Arean} = \frac{b \cdot h}{2}$ $b = \frac{6-x}{2}$, $h = \frac{6-x}{3}$ $\Rightarrow$

Arean: $\frac{\left(\frac{6-x}{2}\right)\left(\frac{6-x}{3}\right)}{2} = \frac{(x-6)^2}{12}$

$\int_0^6 \frac{(x-6)^2}{12} dx = \left[\frac{(x-6)^3}{36}\right]_0^6 = 0 - \frac{(-6)^3}{6^2} = 6$

Ex Räkna ut flödet upp ur halvsfären $x^2+y^2+z^2=a^2$, $z \geq 0$. & $F = (x, y, z+x^2+y^2)$

Vi kan inte använda Gauß direkt ty halvsfären är ej randen till ett område. Lägg till en bott och gör istället Gauß på halvbollen: $\iiint \operatorname{div} F \, dV = \iint F \cdot d\vec{S} + \iint F \cdot d\vec{S}$
1 2

1) $\iiint \operatorname{div} F \, dV = \iiint 1+1+1 \, dV = 3 \cdot \mathrm{Volym}() = \frac{3 4\pi a^3}{3} = 4\pi a^3$

2) $\iint F \cdot \hat{N} \, dS = \left\{ \begin{array}{l} \text{Måste ha: } dS = dx\,dy \\ -\hat{N} = (0,0,-1) \end{array} \right\} = \iint (x, y, z+x^2+y^2) \cdot (0,0,1) \, dx\,dy = \iint -(z+x^2+y^2) \, dx\,dy = [z=0] =$
$\iint x^2+y^2 \, dx\,dy = -\int_0^{2\pi} \int_0^a r^3 dr\, d\theta = -\frac{a^4}{4} \cdot 2\pi = -\frac{\pi a^4}{2} \Rightarrow \iint F \cdot \hat{N} dS = 4\pi a^3 - \left(-\frac{\pi a^4}{2}\right)$