Ordinära, linjära, diffekv. av första ordningen

$a(x)y' + b(x)y = g(x)$. $y(x)$ söks.

Linjär: Om y_1 resp y_2 löser DE med högerled g_1 resp g_2 så löser cy_1 (c konstant) DE med H.L. cg_1 och y_1+y_2 DE med H.L. g_1+g_2.

Bevis

$a(y_1+y_2)' + b(y_1+y_2) = a(y_1'+y_2') + by_1 + by_2 = ay_1' + by_1 + ay_2' + by_2 = g_1 + g_2$

$a(cy_1)' + b(cy_1) = cay_1' + cby_1 = c(ay_1' + by_1) = cg_1$

Lösningsmetod

Ex: $xy' + y = e^x$

$xy' + y = e^x$

$(xy)' = e^x$

$xy = \int e^x dx = e^x + C$

$y = \frac{e^x + C}{x}$

Teori

$y' + f(x)y = g(x)$

Finn F så $F' = f$. Multiplicera med den integrerande faktorn e^F.

$e^{F(x)} \cdot y' + e^{F(x)} \cdot f(x)y = e^{F(x)} \cdot g(x)$

$(e^{F(x)} \cdot y)' = e^{F(x)} \cdot g(x)$

$e^{F(x)} y = \int e^{F(x)} \cdot g(x)\,dx$

$y = e^{-F(x)} \int e^{F(x)} \cdot g(x)\,dx$

Ex

$y' + \frac{1}{x} \cdot y = x$, $y(1) = 1$ Integrerande faktor: $\int \frac{1}{x} dx = \ln x$

$e^{\ln(x)} = x$

$y' + \frac{1}{x} \cdot y = x$

$xy' + y = x^2$

$(xy)' = x^2$

$xy = \frac{x^3}{3} + C$

$1 \cdot 1 = \frac{1}{3} + C \Leftrightarrow C = \frac{2}{3}$

$xy = \frac{x^3}{3} + \frac{2}{3}$

$y = \frac{x^2}{3} + \frac{2}{3x}$

Ex 2

$xy' + 2x^2 y = xe^{-x^2}$

$xy' + 2x^2 y = xe^{-x^2}$, dela med $x \neq 0$.

$y' + 2xy = e^{-x^2}$

$IF = e^{\wedge} \int 2x\,dx = e^{x^2}$

$e^{x^2} y' + e^{x^2} 2xy = e^{x^2} e^{-x^2} = 1$

$(e^{x^2} \cdot y)' = 1$

$e^{x^2} \cdot y = \int 1\,dx = x + C$

$y = \frac{x + C}{e^{x^2}} = e^{-x^2} x + e^{-x^2} C$

Separabla ekvationer

Antag att ekv är av typ: $f(y) \cdot \frac{dy}{dx} = g(x)$ Allt som innehåller y på ena sidan, x på andra.

Kedjeregeln: $F(y) = G(x) + C$

Detta kan skrivas: $\int f(y)\,dy = \int g(x)\,dx$ vilket antyder att det bekväma betraktningssättet: $f(y)\frac{dy}{dx} = g(x)$

$f(y)\,dy = g(x)\,dx$

$\int f(y)\,dy = \int g(x)\,dx$

Ex $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$

$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$

$y\,dy = -x\,dx$

$\int y\,dy = \int -x\,dx$

$\frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + C$

$\frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2} = C$

$y^2 + x^2 = 2C = D$

$y = \pm\sqrt{D - x^2}$

Enkla tillväxtmodeller

I. Exponentiell tillväxt. (Malthusisk tillväxt)

Antag tillväxthastigheten proportionerlig mot populationen. $x'(t) = cx(t)$, $x(0) = x_0$ $\Rightarrow$ $x(t) = x_0 e^{ct}$

II. Logistisk tillväxt.

$x'(t) = cx(t) \underbrace{- Dx(t^2)}_{\text{Konkurrensterm}}$

$x'(t) = D\left(\frac{c}{D}x - x^2\right) = Dx(t)\left(\overbrace{\frac{c}{D}}^{M} - x(t)\right) = Dx(t)\left(M - x(t)\right)$

Detta kan fungera som modell för smittspridning eller informationsspridning. $x(t)$ = de smittade
$M - x(t)$ = de icke smittade

Ex $x' = x(1-x)$

$x' = x(1-x)$

$\frac{dx}{dt} = x(1-x)$

$\frac{dx}{x(1-x)} = dt$

$\int \frac{1}{x(1-x)}\,dx = t + C$

$\int \frac{A}{x} + \frac{B}{1-x}\,dx = t + C$

$\int \frac{A(1-x) + Bx}{x(1-x)}\,dx = t + C$ $\quad \left[\begin{array}{l} A = 1 \\ -A + B = 0 \Rightarrow B = 1 \end{array}\right]$

$\int \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}\,dx = t + C$

inre derivatan

$\ln|x| - \ln|1-x| = t + C$

$\ln x - \ln(1-x) = t + C$ $\quad$ [Om $0 < x(0) < 1$ fortsätter $x(t) \in (0,1)$]

$\ln\frac{x}{1-x} = t + C$

$\frac{x}{1-x} = e^{t+C} = e^t \cdot e^C = e^t \cdot D$

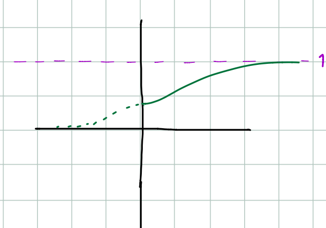
$x = De^t(1-x)$

$x = De^t - De^t x$

$x + xDe^t = De^t$

$x(1 + De^t) = De^t$

$x = \frac{De^t}{1 + De^t}$



$\lim_{t\to\infty} x(t) = 1$, $x(t) < 1$

III Linjära ODE av 2:a ordningen

$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = g(x)$

(Linjär: Se bevis för första ordningens)

Skriv ekvationen som $L(y) = g$. Då gäller att:

SATS

Om y_1 är en lösning så är även $y_1 + y$ en lösning om $L(y) = 0$. (y löser den homogena ekvationen.)

Det omvända gäller också: Om y_1 och y_2 löser $y_1 - y_2$ den homogena ekvationen.

Bevis

$L(y_1+y) = L(y_1) + L(y) = g + 0 = g$

$L(y_1 - y_2) = L(y_1) - L(y_2) = g - g = 0$

Betrakta nu ekvationer med konstanta koefficienter $a(x)=a$, $b(x)=b$, $c(x)=c$. Vi söker lösningar till den homogena ekv. $ay''+by'+cy=0$

gissa: $y = e^{rx}$

$y' = r \cdot e^{rx}$

$y'' = r^2 e^{rx}$

$ar^2e^{rx} + bre^{rx} + ce^{rx} = 0$

$e^{rx}(ar^2+br+c) = 0$

r måste lösa den karakteristiska ekvationen: $ar^2+br+c=0$. Om r_1 & r_2 är lösn till KE så blir $Ae^{r_1x} + Be^{r_2x}$ lösn till homogena ekv.

Ex $y''+2y'-3y=1$, $y(0)=y'(0)=0$

$y''+2y'-3y=1$

Homogena ekvationen: $y''+2y'-3y=0$

Karakteristiska ekvationen: $r^2+2r-3=0 \Rightarrow r = -1 \pm \sqrt{1+3} = -1 \pm 2 = \begin{matrix} r_1=1 \\ r_2=-3 \end{matrix} \Rightarrow y = Ae^{x} + Be^{-3x}$

Hitta nu en partikulär lösning: gissa: $y = c$

$y' = 0$, $y'' = 0$

$-3c = 1$

$c = -\frac{1}{3}$

Alla lösningar: $y = -\frac{1}{3} + Ae^{x} + Be^{-3x}$

Begynnelsevärden: $y(0) = -\frac{1}{3} + A + B = 0$

$y'(0) = A - 3B = 0$

$\begin{cases} A = 3B \\ 4B = \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow B = \frac{1}{12} \Rightarrow A = \frac{1}{4} \Rightarrow y(x) = -\frac{1}{3} + \frac{1}{4}e^{x} + \frac{1}{12}e^{-3x}$