2.3

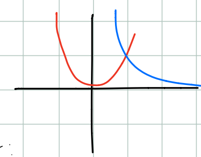
48. Kurvorna $y = x^2$ och $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ skär varandra i rät vinkel.

Kurvornas skärning: $y = x^2 = \frac{1}{\sqrt{x}}$

$x^4 = \frac{1}{x}$

$x^5 = 1$

$x = 1$ (+ komplexa)



Kurvornas tangenter har koefficienter:

$y' = 2x = 2$ i $x = 1$

$y' = -\left(\frac{1}{2x}\right)^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}$ i $x = 1$

Alt 1

Två linjer med r.k. k_1, k_2 är $\perp$ om $k_1 \cdot k_2 = -1$. $2 \cdot -\frac{1}{2} = -1$

Alt 2

Riktningsvektorerna $(1, k)$ är $\perp$ ty $(1, 2) \cdot (1, -\frac{1}{2}) = 1^2 + 2(\frac{-1}{2}) = 0$

2.7

11. Ett klots radie ökar med 2%. Hur mycket ökar volymen?

$V = \frac{4\pi}{3} \cdot r^3$

$V'r = 4\pi r^2$

Lin. app.

$V(r + \frac{2}{100}r) \approx V(r) + V'(r) \cdot (\frac{2}{100}r)$

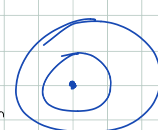
ökningen $\approx V'(r) \frac{2}{100} r$

relativa ändringen: $\frac{1}{V(r)} \cdot V'(r) \cdot \frac{2}{100} \cdot r = \frac{4\pi \cdot r^2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot r}{4\pi \cdot r^3 \cdot 100} = \frac{6}{100}$

Svar: 6%

4.1

3. En sten släpps i vatten och en cirkulär våg utbreder sig. Hur fort växer arean innanför cirkeln när radien är 20cm och växer med $4 \frac{m}{s}$?



Arean $A(r) = \pi r^2$

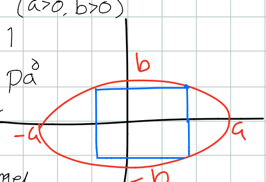
$\frac{dA}{dt} = \frac{dA}{dr} \cdot \frac{dr}{dt} = 2\pi r \cdot r'$

$2\pi r \cdot r' = 2\pi \cdot 20 \cdot 4 = 160\pi \ \frac{cm^2}{s}$

4.8

13. Ellips $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(a>0, b>0)$

Punkten (x, y) på ellipsen beskriver en axelparallell inskriven rektangel.



Dess area (rektangelns) är $2x \cdot 2y = 4x \cdot y$

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \iff \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2} \iff y^2 = b^2(1 - \frac{x^2}{a^2}) \iff y = \sqrt{b^2(1 - \frac{x^2}{a^2})}$, antag $x, y > 0$

$A(x) = 4x b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} = 4x \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$

$$A'(x)=\frac{4b}{a}\left(\sqrt{a^2-x^2}+x\frac{1}{2}(a^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot(-2x)\right)=\frac{4b}{a}\left(\sqrt{a^2-x^2}-\frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\right)=\frac{4b}{a}\cdot\frac{a^2-2x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

$A'(x)=0$ för $a^2-2x^2=0$

$a^2=2x^2$

$x^2=\frac{a^2}{2}$

$x=\overset{+}{(-)}\frac{a}{\sqrt{2}}$

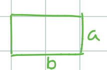
Anmärkning

Ellipsens area är πab

Detta är maximum ty extremerna har arean 0.

$$A\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)=4\cdot\frac{a}{\sqrt{2}}\cdot\frac{b}{a}\left(\underbrace{\sqrt{a^2-\frac{a^2}{2}}}_{\frac{a^2}{2}}\right)=4\cdot\frac{b}{\sqrt{2}}\frac{a}{\sqrt{2}}=2ab$$

8) Finn den största rektangeln med given omkrets



$A=ab$

$2P=2a+2b$

$a+b=P$

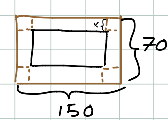
$b=P-a$

$A(a)=a(P-a)=aP-a^2$

$A'(a)=P-2a$

$A'(a)=0 \Leftrightarrow P=2a \Leftrightarrow a=\frac{P}{2}$, $b=P-\frac{P}{2}=\frac{P}{2}=a$, rektangeln är en kvadrat.

18) Vi gör en låda av ett rektangulärt stycke wellpapp.



Maximera volymen.

Lådans volym

$V(x)=(150-2x)(70-2x)x=10500x-440x^2+4x^3$

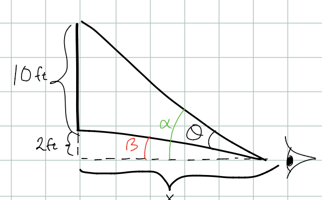
$V'(x)=10500-880x+12x^2$

$V'(x)=0 \Leftrightarrow x^2-\frac{880x}{12}+\frac{10500}{12}=0 \Leftrightarrow x^2-\frac{220}{3}x+875=0 \Leftrightarrow x=\frac{110}{3}\pm\sqrt{\left(\frac{110}{3}\right)^2-875}=\frac{110}{3}\pm\frac{65}{3}$ $\quad x=\begin{cases}58+\frac{1}{3}\\15\end{cases}$, $2\times 58+\frac{1}{3}$ kan inte dras ifrån 70. $\Rightarrow x=15$.

Extremerna $x=0$ och $x=35$ ger båda volym $=0$.

$V(15)=72000\ cm^3$

46)



Maximera θ

$\theta=\arctan\frac{12}{x}-\arctan\frac{2}{x}$

$$\theta'=\frac{1}{1+\left(\frac{12}{x}\right)^2}\left(-\frac{12}{x^2}\right)-\frac{1}{1+\left(\frac{2}{x}\right)^2}\left(-\frac{2}{x^2}\right)=\frac{-12}{x^2+144}+\frac{2}{x^2+4}=\frac{-12(x^2+4)+2(x^2+144)}{(x^2+4)(x^2+144)}=\frac{240-10x^2}{(x^2+144)(x^2+4)}$$

$\theta'=0$ för $240-10x^2=0$

$240=10x^2$

$x^2=24$

$x=\overset{+}{(-)}2\sqrt{6}\approx 4{,}9$

Optimalt $\theta=45.6^\circ$