10.1

Def Topologiska objekt

En mängd $S \subseteq \mathbb{R}^n$.

* En omgivning av en punkt $P \in \mathbb{R}^n$, är en mängd $S \in \mathbb{R}^n$ som är på formen $\underbrace{B_r(P)}_{\{\text{boll av punkter med avstånd } < r \text{ till } P\}} = \{Q \in \mathbb{R}^n \mid |P-Q| < r\}$

Ex: $n=1$ öppet intervall $\rightarrow (0,1) = \{x \in \mathbb{R},\ 0 < x < 1\}$
$n=2$ öppen disk
$n=3$ öppen sfär

* S är öppen om varje punkt, $P \in S$, har en omgivning som ligger i S.

Ex: • En omgivning är öppen.
• Objekt som är givna av strikta olikheter är öppna.
Viktigt för kontinuitet.

* Komplementet till S, S^c, är alla punkter, $P \in \mathbb{R}^n$, som inte ligger i S.
* S är sluten om S^c är öppet.
Viktigt i optimeringsproblem.

Ex: Objekt som beskrivs av icke-strikta olikheter.

* S är begränsad om $S \subseteq B_r(0)$ för något r.

Ex: $y = 3x+4$ är obegränsad
$x^2+y^2 = 1$ är begränsad

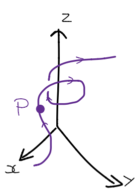
* $P \in \mathbb{R}^n$ är en randpunkt till S om varje omgivning till P innehåller både punkter från S och S^c.

Ex: $x^2+y^2 \leq 1$ har randpunkter i form av cirkeln som innesluter disken.
$x^2+y^2 < 1$ —— " ——

* $P \in \mathbb{R}^n$ är en inre/yttre punkt om P har en omgivning som ligger i S/S^c.

11.1 Vektorfunktioner i en variabel

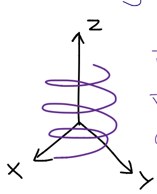
Om vi vill modellera en partikel som rör sig i rummet/planet använder vi en tidsvariabel (t). Vid tidpunkt t befinner sig partikeln sig i $\vec{r}(t) = x(t), y(t), z(t) = x(t)\hat{\imath} + y(t)\hat{\jmath} + z(t)\hat{k}$.



Positionen ges av $\vec{r}(t) = x(t)\hat{\imath} + y(t)\hat{\jmath} + z(t)\hat{k}$
Hastigheten ges av $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}(t)$
Farten ges av $|\vec{v}|$
Accelerationen ges av $\frac{d\vec{r}^2}{d^2t} = \vec{a}(t)$

Ex: $\vec{r}(t) = (t,0,0)$ och $\vec{r}(t) = (t^3,0,0)$ beskriver båda en partikel som rör sig längs x-axeln i $\mathbb{R}^3$. Trots detta är detta två olika partiklar ty hastigheten skiljer dem.

Ex: Räkna ut hastighet och accelerationen för $\vec{r}(t) = (\cos(t), \sin(t), t)$.



$\vec{r}(t) = (\cos(t), \sin(t), t)$
$\vec{v}(t) = \vec{r}\,'(t) = (-\sin(t), \cos(t), 1)$
$a(t) = (-\cos(t), -\sin(t), 0)$

Notera att $|a(t)| = \sqrt{-\cos^2 t + (-\sin^2 t) + 0} = \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t} = 1$. Den rör sig alltså med konstant abs.belopp på accelerationen trots att farten $|\vec{v}(t)| = \sqrt{2}$ är konstant.

Minirepitition

$\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$ $\quad \vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ $\quad$ Skalärprodukt: $\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 \in \mathbb{R}$

$\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ $\quad$ Vektorprodukt: $\vec{u} \times \vec{v} = (\text{bös})$

Norm: $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$

Sats

Låt u och v vara deriverbara funktioner $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$. Då gäller: a) $\frac{d}{dt}(u+v) = u' + v'$

Om det även gäller att $\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ är deriverbar: b) $\frac{d}{dt}(\lambda u) = \lambda' u + \lambda u'$

c) $\frac{d}{dt}(u \cdot v) = u' \cdot v + u \cdot v'$

d) $\frac{d}{dt}(u \times v) = u' \times v + u \times v'$

e) $\frac{d}{dt}(u(\lambda(t))) = \lambda'(t) u'(\lambda(t))$

Ex: I exemplet ovan var farten konstant $(|\vec{v}| = \sqrt{2})$. Konstant fart $\Leftrightarrow |r'(t)|$ är konstant. $= \sqrt{r'(t) \cdot r'(t)} \Leftrightarrow$ $r'(t) \cdot r'(t)$ är konstant $\Leftrightarrow \frac{d}{dt}(r'(t) \cdot r'(t)) = 0$

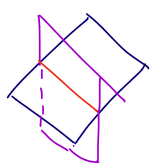
Enligt c) är $\frac{d}{dt}(r'(t) \cdot r'(t)) = r''(t) \cdot r'(t) + r'(t) \cdot r''(t) = 2\, r''(t) \cdot r'(t)$.

Slutsats: Farten är alltså konstant omm accelerationen är vinkelrät mot hastigheten.

11.3, Kurvor och Parametrisering

Ex: 2 plan $\quad$ ① $3x + 4y + 5z = 0$

② $4x + 4y + 6z = 0$



Snittet mellan planen: ② − ① $= (4x + 4y + 6z) - (3x + 4y + 5z) =$ $x + z = 0 \Rightarrow x = -z$

Insättning i ① $\rightsquigarrow 3x + 4y + 5(-x) = 0 \rightsquigarrow y = \frac{1}{2}x$

Låt nu $x = t \rightarrow y = \frac{1}{2}t,\ z = -t$

Alltså är $r(t) = (t, \frac{1}{2}t, -t)$ en partikel som ritar ut banan som är snittet av planen.