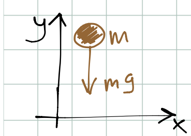
Fritt fall

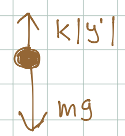


$my'' = -mg$

$y'' = -g \Rightarrow y' = -gt + C \Rightarrow y = -\frac{gt^2}{2} + Ct + D$

C och D kan bestämmas med hjälp av begynnelsevärdena $y(0)$, $y'(0)$.

Med luftmotstånd



$my'' = -mg - ky'$

$y'' = -g - \frac{k}{m} \cdot y'$

Sätt $y' = v$

multiplicera med $e^{\frac{k}{m} \cdot t}$

$v' + \frac{k}{m} \cdot v = -g$

$e^{\frac{k}{m} \cdot t} \cdot v' + e^{\frac{k}{m} \cdot t} \cdot \frac{k}{m} \cdot v = -g \cdot e^{\frac{k}{m} \cdot t}$

$(e^{\frac{k}{m} t} \cdot v)' = -g e^{\frac{k}{m} t}$

$e^{\frac{k}{m} t} v = -g e^{\frac{k}{m} t} \cdot \frac{m}{k} + c$

$(fg)' = f'g + fg'$

Begynnelsevärden $v(0) = 0$

$0 = -\frac{gm}{k} + c$

$c = \frac{gm}{k}$

$v = -\frac{gm}{k} + \frac{gm}{k} e^{-\frac{k}{m} t}$

$\lim_{t \to \infty} v(t) = -\frac{gm}{k}$

$y' = v = -\frac{gm}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{m} t}\right)$

$y = -\frac{gm}{k}\left(t + e^{-\frac{k}{m} t} \cdot \frac{m}{k}\right) + D$ [D bestämms av vilken höjd vi gjorde släppet ifrån.]

DEF absolutbeloppet |x|

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

Ex.

$|x - a| \leq h$

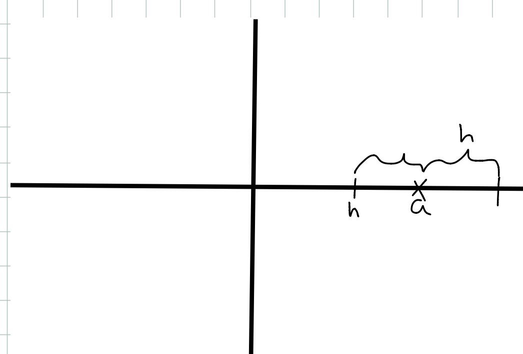
$x - a \leq h$ om $x - a \geq 0$

$-(x - a) \leq h$ om $x - a < 0$

$x \leq a + h$

$x - a \geq -h$

$x \geq a - h$



SATS

$|xy| = |x| \cdot |y|$

$|x + y| \leq |x| + |y|$ (triangelolikheten)

OBS!

$|x| = \sqrt{x^2}$

$|x-y|$ är avståndet mellan x och y. $x > y \Rightarrow |x-y| = x-y$

$x < y \Rightarrow |x-y| = y-x$

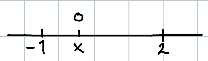
Ex.

Lös ekvationen $|2x+2| = |x-2|$

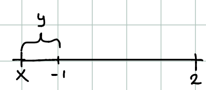
Metod I.

$|2x+2| = 2|x+1| = x-2$

avståndet mellan $(x,2) = 2 \cdot \text{avst}(x,-1)$



$\boxed{x=0}$



$2y = y+3$

$y = 3$

$\boxed{x=-4}$

Metod II

Ta bort beloppstecknen, olika fall.

$$\begin{cases} x \geq -1 \\ x < -1 \end{cases} \Rightarrow x<-1,\ -1 \leq x \leq 2,\ x \geq 2$$

$$\begin{cases} x \geq 2 \\ x < 2 \end{cases}$$

$x<-1$

$-2x-2 = -(x-2)$

$-2x-2 = -x+2 \Rightarrow -x = 4 \Rightarrow x=-4$

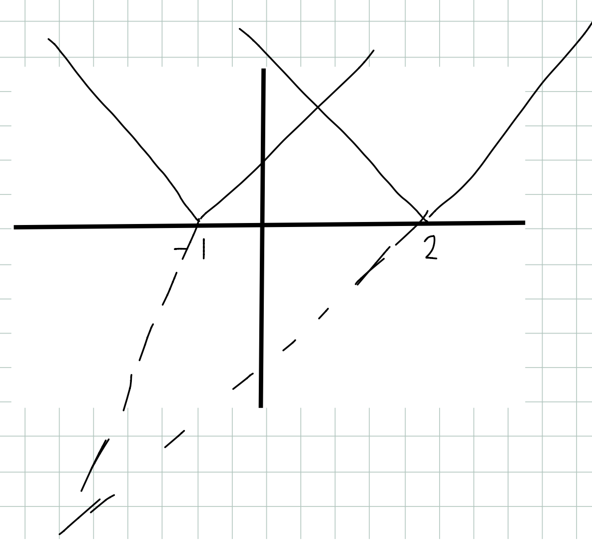
$-1 \leq x < 2$

$2x+2 = -(x-2)$

$2x+2 = -x+2 \Rightarrow 3x = 0 \Rightarrow x=0$

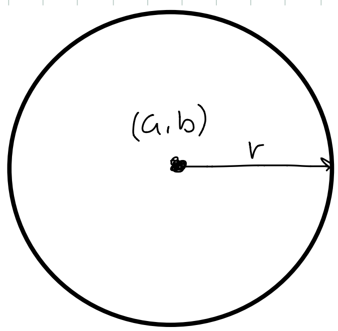
$x \geq 2$

$2x+2 = x-2 \Rightarrow x=-4$ men $-4 \not\geq 2$



Räta linjer
Kom ihåg $Ax+By+C=0$, (A,B) är normal

Cirkel
Centrum (a,b), radie r



$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$

Ex

$x^2+y^2=x$

$x^2-x+y^2=0$

$\underbrace{(x-\tfrac{1}{2})^2}_{x^2-x+\frac{1}{4}}+y^2=\frac{1}{4}$

cirkel med centrum $(\frac{1}{2},0)$ och radie $\frac{1}{2}$

Parabel
$y=-2x^2+4x+10$

$=-2(x^2-2x)+10$

$=-2(x-1)^2+2+10$

$=-2(x+1)^2+12$

Trigonometriska identiteter
Kan återföras på Eulers identitet. $e^{ix}=\cos x+i\sin x$

Ex

$e^{i(x+y)}=\cos(x+y)+i\sin(x+y)=e^{ix}\cdot e^{iy}=(\cos x+i\sin y)(\cos y+i\sin y)=\cos x\cdot\cos y+i\sin x\cdot\cos y+i\cos x\cdot\sin y-\sin x\cdot\sin y$

$=\underbrace{(\cos x\cos y-\sin x\sin y)}_{\cos(x+y)}+i\underbrace{(\sin x\cos y+\cos x\cdot\sin y)}_{\sin(x+y)}$

Ex

$e^{3ix}=\cos 3x+i\sin 3x=(e^{ix})^3$

$(e^{ix})^3=(\cos x+i\sin x)^3=\cos^3x+3i\cos^2x\sin x-3\cos x\cdot\sin^2x-i\sin^3x$

$=\underbrace{(\cos^3x-3\cos x\cdot\sin^2x)}_{\cos^3x}+i\underbrace{(3\cos^2x\cdot\sin x-\sin^3x)}_{\sin^3x}$

Faktorsatsen
P är ~~ett~~ polynom.

$P(a)=0 \Leftrightarrow P(x)=(x-a)q(x)$ dvs. $(x-a)|P$

Bevis
$\Leftarrow$ $P(a)=0\cdot q(a)=0$

$\Rightarrow$ divisionsalgoritmen ger att $P(x)=(x-a)k(x)+r(x)$ där graden av r < graden av $(x-a)$, dvs r är konstant.

$x=a$ ger $0=0\cdot k(x)+r \Rightarrow r=0$

Ex

$x^3-4x^2+5x-2=0$ Vi ser att $x=1$ är en lösning.

$x-1$ delar VL.

$$\begin{array}{l} \quad x^2-3x+2 \\ \hline x^3-4x^2+5x-2 \;\big|\; x-1 \\ -(x^3-x^2) \\ \hline -3x^2+5x-2 \\ -(-3x^2+3x) \\ \hline 2x-2 \\ -(2x-2) \\ \hline 0 \end{array}$$

$x^3-4x^2+5x-2=(x-1)(x^2-3x+2)$

$x^2-3x+2=0$

$x=\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}-\frac{8}{4}}$

$x=\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}}$

$x=\frac{3}{2}\pm\frac{1}{2}$

$x_1=2$

$x_2=1$

$x_3=1$

Partialbråksuppdelning

Låt $\frac{P(x)}{q(x)}=\frac{P(x)}{q_1(x)q_2(x)}$ grad $P<$ grad q och $sgd(q_1,q_2)=1$

Då är $\frac{P(x)}{q(x)}=\frac{P_1}{q_1}+\frac{P_2}{q_2}$ grad $P(k)<$ grad $q(k)$ $k=1.2$

Ex

$\frac{1}{x^2-1}=\frac{1}{(x+1)(x-1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-1}$

$\frac{A(x-1)+B(x+1)}{(x+1)(x-1)}=\frac{(A+B)x+B-A}{(x+1)(x-1)}$

$\left.\begin{array}{l} A+B=0 \\ B-A=1 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} B=-A \\ -2A=1 \end{array}$ $\Rightarrow A=-\frac{1}{2}$

$B=\frac{1}{2}$