Sammanfattning

LTI-System $y = h * x$

- Stabilt $\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\,dt < +\infty$
- Kausalitet $\Leftrightarrow h(t) = 0,\ t < 0$

Om $\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\,dt,\ \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|\,dt < \infty$ definierar vi $\begin{cases} X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t}\,dt, & \omega \text{ reellt tal} \\ H(j\omega) = \ldots \end{cases}$

och $Y(j\omega) = H(j\omega) X(j\omega)$

Exponentiellt Begränsad Signal

Anta: $x : (-\infty, \infty) \to \mathbb{C}$

x sägs vara exponentiellt begränsad om det existerar b så $|x(t)| e^{-bt} \leq M$ för alla t, för något $M < \infty$

Ex

$x(t) = e^{2t}$ begränsad ty $|e^{2t}| \cdot e^{-2t} = e^{2t-2t} = e^{0} = 1 = M$ ← $b=2$

$x(t) = e^{t^2}$ ej begränsad

OBS!

Om $|x(t)| e^{-bt} \leq M$ så existerar $\boxed{X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-st}\,dt}$ där $s \in \mathbb{C}$, för alla $\mathrm{Re}(s) > b$

Bevis Antag: $x(t) = 0,\ t < 0$

$|e^{-t\mathrm{Re}(s)} \cdot e^{-tj\,\mathrm{Im}(s)}| = e^{-t\mathrm{Re}(s)} \cdot |e^{-tj\,\mathrm{Im}(s)}| = e^{-t\mathrm{Re}(s)} \cdot 1$ ← triggettan för alla t, s

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-st}\,dt\right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| \cdot |e^{-st}|\,dt \leq \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{|x(t)| e^{-bt}}_{M \text{ för alla } t} \cdot \underbrace{e^{-(s-b)|t|}\,dt}_{\int e^{-(\mathrm{Re}(s)-b)t}\,dt \,\leq\, \infty \text{ om } \mathrm{Re}(s) > b}$$

Def

Om $|x(t) e^{-bt}| \leq M$ för alla t definieras Laplacetransformen $X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-st}\,dt$ om $\mathrm{Re}(s) > b$

Om $s = j\omega$ så återfås Fouriertransformen av x om $b < 0$

Antag att $|x(t)| \leq e^{bt} M$, $x(t) = 0$, $t < 0$

Tag $s = a + j\omega$, $\mathrm{Re}(a) > b$.

Inför $x_a(t) = e^{-at} \cdot x(t)$ ← Exponentiell dämpning!

Då gäller att $\int_{-\infty}^{\infty} |x_a(t)|\,dt < \infty \rightsquigarrow X_a(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-at} \cdot e^{-j\omega t}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-st}\,dt = X(s)$

Egenskaper

- Om $y = h * x$ och h, x är exp begr samt y existerar $\Rightarrow$ $Y(s) = H(s) X(s)$
- $H(s)$ kallas överföringsfunktionen.
- β innehåller alla formler vi behöver.

Laplacetransform

Ensidig: $X(s) = \int_{0}^{\infty} x(t) e^{-st}\,dt$ om $x(t) = 0$ för $t < 0$.

Dubbelsidig: $X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-st}\,dt$

Egenskap ensidig

Om $z(t) = x'(t)$, $x(t) = 0$ för $t < 0$, gäller $Z(s) = s \cdot X(s) - x(0)$ ← Begynnelsevärde

- $Z(s) = \int_{0}^{\infty} z(t) e^{-st}\,dt = \int_{0}^{\infty} x'(t) e^{-st}\,dt = \{\text{Partiell integration}\} = [x(t) e^{-st}]_{0}^{\infty} - (-s) \int_{0}^{\infty} x(t) e^{-st}\,dt = 0 - x(0) + s \cdot X(s)$ ← för tillräckligt stora $\mathrm{Re}(s)$.

Om $z(t) = x''(t) \rightsquigarrow Z(s) = s^2 X(s) - s x(0) - x'(0)$

Ex $x''(t) - 3x'(t) + 2x(t) = e^{-t}u(t)$, $x(0)=0$, $x'(0)=1$

* Laplacetransformera VL & HL.

$VL = s^2X(s) - \cancel{sx(0)} - x'(0) - 3(sX(s) - \cancel{x(0)}) + 2X(s) = (s^2-3s+2)X(s) - 1$

$HL = \{\beta\} = \frac{1}{s+1}$

$VL = HL \Leftrightarrow (s^2-3s+2)X(s) - 1 = \frac{1}{s+1} \Rightarrow X(s) = \frac{\frac{1}{s+1}+1}{(s^2-3s+2)} = \frac{s+2}{(s+1)(s-1)(s-2)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s-1} + \frac{C}{s-2} \rightsquigarrow \beta$

$$x(t) = Ae^{-t}u(t) + Be^{-t}u(t) + Ce^{2t}u(t)$$

Bestäm A,B,C! (Handpåläggning)

* Multiplicera med s+1. $A + (s+1)\left(\frac{B}{\cdots} + \frac{C}{\cdots}\right) = \frac{s+2}{(s-1)(s-2)}$
* Sätt $s=-1$ för att bli av med B och C. $\Rightarrow A + 0 = \frac{1}{(-2)(-3)} = \frac{1}{6}$
* Multiplicera med s-1. $B + (s-1)\left(\frac{A}{\cdots} + \frac{C}{\cdots}\right) = \frac{s+2}{(s+1)(s-2)} \Rightarrow \{s=1\} \Rightarrow B = \frac{3}{2\cdot(-1)} = \frac{-3}{2}$
* Multiplicera med s-2. $\Rightarrow C = \frac{4}{3}$

$A = \frac{1}{6}$, $B = \frac{-3}{2}$, $C = \frac{4}{3}$

Ex Omtenta elektro 2015-08-27 Uppg 2

Givet	**Sökt**
$y = h * x$	a) Överföringsfunktionen för systemet $x \mapsto z$
$z = h * y$	b) Är $x \mapsto z$ stabilt?
$h(t) = e^{-t}u(t)$	c) Om $x(t) = u(t)$ vad är z?
	d) Om $z(t) = t^2e^{-t}$ Vad var x?

Lösning

a) $z = h*y = h*(h*x) = (h*h)*x = h_2 * x$ h_2 är impulssvaret för $x \mapsto z$.

$H_2(s) = H(s)H(s) = \left\{H(s) \overset{(\beta)}{=} \frac{1}{s+1}\right\} = \frac{1}{s^2+2s+1} = \frac{1}{(s+1)^2}$

b) $\int_{-\infty}^{\infty} |h_2(t)|\,dt < \infty$

$h_2(t) \overset{(\beta)}{=} te^{-t}u(t)$, $\int_{-\infty}^{\infty} |te^{-t}|\,dt \overset{(\beta)}{=} \ldots < \infty \Rightarrow$ Stabilt!

c) (β) $X(s) = \frac{1}{s}$, $Re(s) > 0$

$Z(s) = H_2(s)X(s) = \frac{1}{s(s+1)^2} = \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{(s+1)^2} \Rightarrow z(t) = A\cdot u(t) + Be^{-t}u(t) + Cte^{-t}u(t)$

Räkna ut A, B och C.

d) $Z(s) = \frac{2}{(s+1)^3}$

$Z(s) = H_2(s)X(s) \Rightarrow X(s) = \frac{Z(s)}{H_2(s)} = \frac{\frac{2}{(s+1)^3}}{\frac{1}{(s+1)^2}} = \frac{2}{s+1} \overset{(\beta)}{\Rightarrow} x(t)\, 2 e^{-t}u(t)$