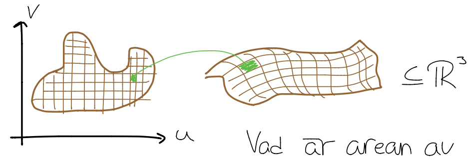
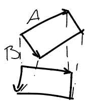
15.5 | Ytintegraler

Utgå från den parametriserade ytan: $x = x(u,v)$
$y = y(u,v)$
$z = z(u,v)$



Vad är arean av rektangl på "filten" i förhållande till arean i första bilden?

dS = ytarea-elementet = ▨ $du\,dv$



← arean av rektangeln uppe $= |A \times B|$.
Formeln som tidigare härletts: $dS = \left|\frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v}\right| du\,dv = \left|\left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}, \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}, \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)\right| du\,dv$

Notera

$A \times B$ = vektor som har längd "area som spänns upp av $A \times B$", men är också vinkelrät mot planet som spänns upp av A & B, dvs normal till ytan.

I ett specialfall: $z = f(x,y)$ (funktionsyta) med $x = u$, $y = v$, $z = f(u,v)$ ⇒
$N = (-f_u, -f_v, 1)$ ⇒ $dS = \sqrt{f_u^2 + f_v^2 + 1}\; du\,dv$

Hemläxa till Dennis att kolla så han gjort rätt.

Om vi använder sfäriska koordinater: $x = a \cos\theta \sin\phi$
Parametrisering av sfär med $r = a$ → $y = a \sin\theta \sin\phi$ ⇒ $dS = a^2 \sin\phi \, d\phi \, d\theta$
$z = a \cos\phi$

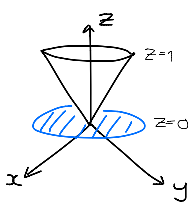
Jämför med volymelementet $dV = R^2 \sin\phi \, dR \, d\theta \, d\phi$

Ex Funktionsytor $z = \sqrt{x^2+y^2}$, $z \geq 0$
Beräkna arean av den del av konen som ligger mellan $0 \leq z \leq 1$.
Funktionsyta ⇒ $dS = \left(\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1\right)^{1/2} dx\,dy$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{1}{2}\frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{aligned}\right\} \; dS = \left(\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2 + 1\right)^{1/2} dx\,dy = \left(\frac{x^2}{x^2+y^2} + \frac{y^2}{x^2+y^2} + 1\right)^{1/2} dx\,dy = \sqrt{2}\, dx\,dy$$

$\iint_{\text{Parametrisering}} dS = \iint \sqrt{2}\, dx\,dy$

Vad går x & y mellan?



Det är en integral över $x^2+y^2 \leq 1$
$0 \leq z = \sqrt{x^2+y^2} \leq 1 \Leftrightarrow 0 = 0^2 \leq x^2+y^2 \leq 1^2 = 1$

dvs $\iint_{\nabla} dS = \iint_{⊘} \sqrt{2}\, dx\,dy$ = 1. Polär form / 2. Arean $= \pi r^2 = \pi \cdot 1 = \pi$ ⇒ $\sqrt{2}\pi$

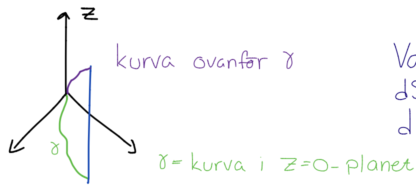
Ex $x = 2uv$, $y = u^2 - v^2$, $z = u^2 + v^2$ Bestäm arean av ytan som motsvaras av att $u^2+v^2 \leq 1$.
Detta är ingen giltig funktionsyta...

$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = -4(u^2+v^2)$
$\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} = 4(u^2-v^2)$ ⇒ $dS = 4\sqrt{2}(u^2+v^2)\,du\,dv$ ⇒ $\iint_{u^2+v^2 \leq 1} dS = \iint_{u^2+v^2 \leq 1} 4\sqrt{2}(u^2+v^2)\,du\,dv$ = Polära koordinater $\left\{\begin{array}{l} u = r\cos\theta \\ v = r\sin\theta \\ du\,dv = r\,dr\,d\theta \end{array} \middle| \begin{array}{l} 0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{array}\right\}$ =
$\frac{\partial(z,y)}{\partial(u,v)} = 8uv$

$$4\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^2 \cdot r\,dr\,d\theta = 4\sqrt{2} \cdot 2\pi \cdot \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^1 = 2\sqrt{2}\pi$$

Svaren i de två exemplen liknar varandra, vfr? Jo, om: $x = 2uv$, $y = u^2 - v^2$, $z = u^2 + v^2$ ⇒
$x^2 + y^2 = z^2$, $z \geq 0 \rightsquigarrow z = \sqrt{x^2+y^2}$. Emellertid skiljer de sig åt: $2\sqrt{2}\pi \neq \sqrt{2}\pi$
Detta eftersom exempel 2 inte bjuder på en korrekt parametrisering. $(-u,-v)$ ger samma punkt som (u,v).

Ex



Vad är dS?
dS = båglängdselementet
dz = längd i z-led $\Rightarrow$ $dS = \overset{\text{bas}}{ds}\cdot \overset{\text{höjd}}{dz}$

En yta går längs en kurva $y = \frac{x^2}{2}$ i xy-planet ($z=0$) & upp till en kurva $z = 2x$.
Vad är arean till denna yta, $0 \leq x \leq 1$?

$\iint dS = \iint 1 \cdot dz\, ds$

$ds = \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx = \sqrt{1+x^2}\,dx$ $\Rightarrow$ $\iint dS = \int_0^1 \int_0^{2x} \sqrt{1+x^2}\,dz\,dx = \int_0^1 2x\sqrt{1+x^2}\,dx = \left[\begin{matrix} u = 1+x^2 \\ du = 2x\,dx \end{matrix}\right] = \int \sqrt{u}\,du = \left[\frac{2}{3}u^{3/2}\right] =$

$f(x) = \frac{x^2}{2}$

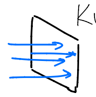
$\left[\frac{2}{3}(1+x^2)^{3/2}\right]_0^1 = \frac{2}{3}(2^{3/2}-1) = \frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)$

ÖB $G(x,y,z) = 0$, där z entydigt bestämt av x och y. $dS = \left|\frac{\nabla G}{G_3}\right| dx\,dy$

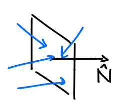
15.6 | Flödesintegraler

En typ av spacade arbetsintegraler ($\int F \cdot dr$) och även ytintegraler. Med dessa eftersträvar vi att modellera följande:

Givet ett vektorfält (hastighetsfält) i $\mathbb{R}^3$ & en yta vilken hastighetsfältet går igenom kan ett enkelt fall vara:

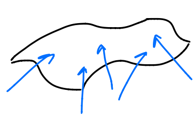


Kvadrat där vektorfältet går $\perp$ ytan.
Flödet borde då vara: (Längden på vektorfältet)(arean på ytan)



Flödet: Vektorfältets komponenter vilka är sammriktade med $\hat{N}$. $\Rightarrow$ $(F \cdot \hat{N})(\text{arean})$

Param yta:



$\Rightarrow$ Flödesintegral: $\iint_{\text{Ytan}} F \cdot \hat{N}\, dS$

Vi har sedan tidigare formler för dS men vad gör vi med $\hat{N}$?
Ovan kan skrivas som: $\hat{N}\,dS = d\vec{S}$ (eller $d\mathbf{S}$) vilket är någon form av "vektorytareaelement".
$\iint_Y F \cdot \hat{N}\,dS = \iint_Y F \cdot d\vec{S}$

Enhetsnormalen kan peka åt två håll och bestämmer ytans orientering.

Om $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$, $z = z(u,v)$ $\Rightarrow$ $dS = \left|\frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v}\right| du\,dv = |N|\,du\,dv$
$\hat{N} = \pm\frac{N}{|N|}$ $\Rightarrow$ $d\vec{S} = \hat{N}\,dS = \frac{N}{|N|}\,|N|\,du\,dv = N\,du\,dv$

Specialfall

Parametriserad fall: $\left(\frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v}\right) = \left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}, \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}, \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)$ $\Rightarrow$ $d\vec{S} = \pm \quad du\,dv$

Funktionsyta: $x = u$, $y = v$, $z = f(x,y)$. $\left(\frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v}\right) du\,dv = \pm(-f_u, -f_v, 1)\,du\,dv$

$G(x,y,z) = 0$: Implicit def yta (z entydigt bestämd av x & y) $\Rightarrow$ $d\vec{S} = \pm\left|\frac{\nabla G}{G_3}\right| dx\,dy$

<u>Ex</u> Bestäm flödesintegralen där $F(x,y,z)=(x,x,1)$ genom ytan $z=x^2-y^2$, begränsad av cylindern $x^2+y^2=a^2$.

F är given men vi saknar $d\vec{S}$ och integralen...

Ytan är en funktionsyta: $z=f(x,y)=x^2-y^2 \Rightarrow$

$$\left.\begin{aligned} d\vec{S} &= \pm(-f_x,-f_y,1)\,dxdy \\ f_x &= 2x \\ f_y &= -2y \end{aligned}\right\} \pm(-2x,2y,1)\,dxdy$$

väljer +

Integralen: $\iint_Y F\cdot d\vec{S} = \iint_Y (x,x,1)\cdot(-2x,2y,1)\,dxdy = \iint_Y -2x^2+2xy+1\,dxdy$

Y: $z=x^2-y^2$ är någon form av sadel innuti cylindern $x^2+y^2=a^2$. Dvs området vi integrerar över är $x^2+y^2\leq a^2$

$$\iint_{x^2+y^2\leq a^2}(2xy-2x^2+1)\,dx\,dy = \left\{\begin{matrix} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{matrix}\;\middle|\;\begin{matrix} 0\leq r\leq a \\ 0\leq\theta\leq 2\pi \end{matrix}\right\} = \int_0^a\int_0^{2\pi}(2r^2\cos\theta\sin\theta+1-2r^2\cos^2\theta)\,r\,dr\,d\theta$$