Minikomplettering

- Deriverbar och differentierbar är samma sak.
- Kurvor
  - ℓ är en kurva i $\mathbb{R}^2$ eller $\mathbb{R}^3$. Vi säger att kurvan är sluten om man kommer tillbaka till starten när vi går runt den.
  - ℓ är enkel om den inte skär sig själv.

  Sats i topologi (Jordans kurvsats)

  Om kurvan ℓ är enkel och sluten i $\mathbb{R}^2$ kan man dela upp $\mathbb{R}^2$ i två delar (inre/yttre).
  - Längden till en kurva kallas också båglängden. Om $\text{längd}(t) = \int_a^t ds$ och $ds = ((r_x)^2 + (r_y)^2)^{1/2} dt$ för en param av kurvan $r(t) = x(t), y(t)$.
- Gradienter

  Ökningen för en funktion $f(x,y)$ i riktningen $\vec{u}$ (enhetsvektor) ges av $D_u f(a,b) = \nabla f(a,b) \cdot \vec{u}$.
  Det räcker med att ha koll på riktningarna $(1,0)$ & $(0,1)$ för att få koll på alla riktningar, om f differentierbar.

- Tangentplan

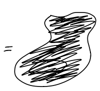
  Funktionsyta: $z = f(x,y) \Rightarrow f_1(x-a) + f_2(y-b) - (z - f(a,b)) = 0$

  Nivåyta: $f(x,y,z) = C \Rightarrow \nabla f(a,b,c) \cdot (x-a, y-b, z-c) = 0$

  En funktionsyta bestämmer en nivåyta genom
  $z = f(x,y) \rightsquigarrow F(x,y,z) = f(x,y) - z = 0$

14.1 Dubbelintegraler

Om $f(x): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ symboliserar $\int_a^b f(x)\,dx$ en viktad area. Specialfall: Om $f = 1 \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = b - a =$ längden mellan b och a.

I flera variabler... $\iint_R f(x,y)\,dA$, $R =$  ett område i $\mathbb{R}^2$.

Detta betyder att man borde få integrering två ggr, dvs volym. Specialfallet $f=1$ ger istället för längden nu arean av R.

$\iint_R f(x,y)\,dA$ = den viktade volymen till området "ovanför" R och under grafen till funktionen.
dA: areaelement (jmf dx som är ett längdelement)

Hur definierar vi detta?

En dator skulle dela upp området R i rektanglar och ta ett tal/vektor i rektangeln och sedan ta ett element från rektangeln. Om rektangeln $= R_{ij}$, elementet $= P_{ij} \Rightarrow$
$\iint f\,dA = \sum f(P_{ij}) \cdot \text{arean}(R_{ij}) + \sum \text{Höjden}_{ij} \cdot \text{Basen}_{ij}$

Def

$\iint_R f\,dA = I$ om $\forall \varepsilon > 0; \exists \delta > 0$ så $\left|\sum_{i,j} f(P_{ij}) \,\text{Area}(R_{ij}) - I\right| < \varepsilon$ om största arean till rektanglarna $R_{ij} < \delta$.
Säger att om rektanglarna blir mindre så närmar sig vår approximation ett värde.

Ex Inte Riemann-integrerbart.

Låt R vara en enhetskvadrat och $f(x,y) = \begin{cases} 1, & x \,\&\, y \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \,\&\, y \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

Eftersom P_{ij} är godtycklig i varje rektangel kan vi välja P_{ij} är 1 eller 0.

$$\left.\begin{aligned} \text{Om } P_{ij} \in \mathbb{Q} &\Rightarrow \iint_R f\,dA = 1 \\ P_{ij} \notin \mathbb{Q} &\Rightarrow \iint_R f\,dA = 0 \end{aligned}\right\} \text{Ej samma, ty ej samma!}$$

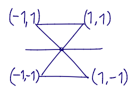
Sats

Om f är kontinuerlig i R och R är kompakt samt att R har en rand beståendes av kurvor med ändlig längd existerar $\iint_R f\,dA$.

Några egenskaper för $\iint_R f\,dA = I$

$f \leq 0 \Rightarrow \iint_R f\,dA \leq 0$

- $I=0$ om R har area 0.
- Om $f \geq 0$ är $\iint_R f\,dA \geq 0$, det omvända gäller och båda ger volymen till grafen.
- Linjär. Om $a,b \in \mathbb{R}$, $f,g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ samt kontinuerliga $\Rightarrow \iint_R (af+bg)\,dA = a\iint_R f\,dA + b\iint_R g\,dA$
- Olikheter bevaras
- Triangelolikheten gäller. $\left|\iint_R f\,dA\right| \leq \iint_R |f|\,dA$
- $R = \cup D_i$, olika D_i skär inte varandra. $\iint_R f\,dA = \sum \iint_{D_i} f\,dA$

Ex $f(x,y) = x^3 - 1$, $R=$ 

$D_1 = -D_2$

$$\iint_R (x^3-1)\,dA = [\text{linjär}] = \iint_R x^3\,dA - \underbrace{\iint_R 1\,dA}_{=2} = \iint_{D_1} x^3\,dA + \iint_{D_2} x^3\,dA - 2 = \cancel{\iint_{-D_2} f\,dA} + \cancel{\iint_{D_2} f\,dA} - 2 = -2$$