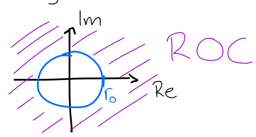
Repetition

Z-transform för en generell sekvens (diskret signal) $x[n] \Rightarrow X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$, $z=r\cdot e^{j\Omega}$

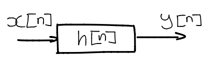
$X(z)=X(re^{j\Omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n](re^{j\Omega})^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(x[n]\cdot r^{-n})e^{-j\Omega n}=DTFT\{x[n]\cdot r^{-n}\}$

Konvergens om $\sum_{n=-\infty}^{\infty}|x[n]\cdot r^{-n}|<\infty$, konvergens beror på $|z|=r$.

De värden på z för vilka $X(z)$ konvergerar kallas konvergensområde (ROC).
För en kausal signal $(x[n]=0,\ n<0)$: $\sum_{n=0}^{\infty}|\frac{x[n]}{r^n}|<0$. Antag nu att summan konvergerar för $r=r_0$ då konvergerar den även för $r>r_0$. ROC är alltså området utanför en cirkel med radie r_0.



Systemanalys



$h[n]$: Impulssvar till ~~ett~~ kausalt LTI-system
$y[n]=(h*x)[n]$
$\mathcal{Z}$: $Y(z)=H(z)X(z)$

Insignal

$x[n]=\delta[n] \Rightarrow X(z)=1$
$x[n]=u[n] \Rightarrow X(z)=\frac{z}{z-1}$
Sinusar

Utsignal

Impulssvar: $Y(z)=H(z)$
Stegssvar: $Y(z)=H(z)\frac{z}{z-1}$
Sinusar med annan amp och fas

$H(z)=\mathcal{Z}\{h[n]\}$ "systemets överföringsfunktion"
För ett kausalt system $(h[n]=0,\ n<0)$ kan vi efter faktorisering och PBU erhålla en summa av termer enligt $H_k(z)=\frac{r_k}{1-d_k z^{-1}}=r_k\frac{z}{z-d_k}$. Detta motsvarar signalen $h_k[n]=r_k\cdot d_k^n\cdot u[n]$.
För ett stabilt system måste absolutbeloppet av impulssvaret vara absolutsummerbart.

$r_k\sum_{n=0}^{\infty}|d_k|^n<\infty$, vilket kräver att $|d_k|<1$. Jämför summa för en geometrisk serie: $\sum_{k=0}^{\infty}a^k=\frac{1}{1-a}$, $|a|<1$

Diskreta LTI-system kan beskrivas med differensekvationer
$y[n]+\sum_{k=1}^{N}a_k\cdot y[n-k]=\sum_{k=0}^{M}b_k\,x[n-k]$

Z-transformera genom att använda egenskaper för linjäritet och tidsskift.
$Y(z)+\sum_{k=1}^{N}(a_k z^{-k}\cdot Y(z))=\sum_{k=0}^{M}(b_k z^{-k}\cdot X(z))$
$Y(z)(1+\sum_{k=1}^{N}a_k z^{-k})=X(z)\sum_{k=0}^{M}b_k\cdot z^{-k}$

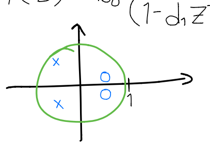
$$\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{\sum_{k=0}^{M}b_k z^{-k}}{1+\sum_{k=1}^{N}a_k z^{-k}}$$

Men $Y(z)=H(z)X(z)$ där $H(z)$ är systemets överföringsfunktion. Detta är en vanlig form på z-transformen i våra ingenjörstillämpningar: en kvot mellan polynom i z^{-1} (eller i z). En rationell funktion.

$H(z)=\frac{b_0+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}+\dots+b_nz^{-n}}{1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}+\dots+a_Nz^{-N}}$, men detta är inte så överskådligt så vi faktoriserar.

$H(z)=b_0\frac{(1-c_1z^{-1})(1-c_2z^{-1})\dots(1-c_nz^{-1})}{(1-d_1z^{-1})(1-d_2z^{-1})\dots(1-d_Nz^{-1})}$

c_k: Nollställe till $H(z)$ aka rötter till täljarpolynomet.
d_k: Poler till $H(z)$ —— " —— nämnarpolynomet.

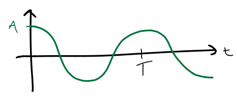


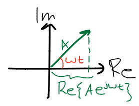
Kort Summering för ROC-egenskaper

- Inga poler i ROC!
- För en kausal signal: ROC = området utanför cirkel med radie r_0
- r_0 är det största av beloppen till $H(z)$'s poler om sådana finns.
- Om enhetscirkeln ligger i ROC $\Rightarrow H(z)\big|_{z=e^{j\Omega}} = H(e^{j\Omega}) = \text{DTFT}\{h[n]\}$ (DTFT existerar)

Frekvenser och Sampling

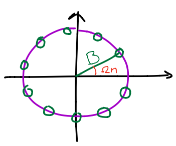
En kontinuerlig signal $x(t) = A\cos(\omega t) = \text{Re}\{Ae^{j\omega t}\}$

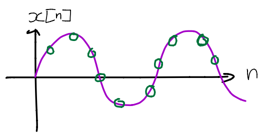




$\omega: \frac{rad}{s}$

$x[n] = B\cdot\cos(\Omega n) = \text{Re}\{Be^{j\Omega n}\}$





Ω: rad

Om vi har ~~ett~~ samplat system: $x[n] = x(nT)$ där T: sampleintervall

Låt oss sampla en sinusformad signal: $x(nT) = A\cdot\cos(\omega nT) = A\cdot\cos(\omega T\cdot n)$

Alltså: $\Omega = T\omega$

Samplingsteoremet

Signalens högsta frekvens för att undvika aliasing vid återskapning av signalen $\Rightarrow \omega_s > 2\omega_M$ $\left(\omega_s = \frac{2\pi}{T}\right)$

Om signalfrekvens och samplingfrekvens är lika $\Rightarrow \Omega = \omega T = \omega_s\cdot\frac{2\pi}{\omega_s} = 2\pi \Rightarrow$ Vi samplar signalen en gång per period.

Om signalfrekvensen: $\omega = \omega_M = 0.5\,\omega_s \Rightarrow \Omega = \pi \Rightarrow$ Vi samplar signalen två ggr per period.

Om signalfrekvensen: $\omega = \omega_M = \frac{1}{M}\omega_s \Rightarrow \Omega = \frac{2\pi}{M} \Rightarrow$ Vi samplar M ggr per period.