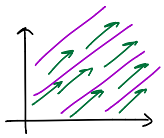
## 15.1 | Vektorfält. forts

I ekv $\frac{dx}{F_1}=\frac{dy}{F_2}=\frac{dz}{F_3}$ finns inget t-beroende (Dennis ströк dt i MVA 6.2) I första hand är dessa diff.ekv. Men vi kommer behandla dem som integral ekv.

**Ex** $F(x,y)=(1,1)$



fältlinjerna: $y=x+C$

$F=(F_1,F_2) \Rightarrow F_1=1, F_2=1 \Rightarrow \frac{dx}{1}=\frac{dy}{1} \Rightarrow dx=dy \Rightarrow x+C=\int dx=\int dy=y+C' \Rightarrow$

$y=x+(C-C')=x+D$

**Ex** $F(x,y)=(y,-x)$

$F_1=y,\ F_2=-x$

Fältlinjeekv. $\Rightarrow \frac{dx}{y}=\frac{dy}{-x}$, $x$ & $y$ är "beroende av varandra".

Kasta om: $-x\,dx=y\,dy \Rightarrow -\frac{x^2}{2}=\frac{y^2}{2}+C \Rightarrow -x^2=y^2+2C \Rightarrow x^2+y^2=D$

**Ex** $F(x,y)=(x,-y)$

$F_1=x,\ F_2=-y \Rightarrow \frac{1}{x}dx=-\frac{1}{y}dy \Rightarrow \ln|x|=-\ln|y|+c \Rightarrow |x|=|y|^{-1}\cdot e^{c} \Rightarrow |xy|=$ positiv konstant

$y=\frac{c}{x}$, $x,y>0$

## 15.2 | Konservativa vektorfält

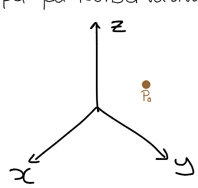
Exempel på vektorfält associerat till en funktion $\phi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ \mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$. $\nabla\phi=\left(\frac{d\phi}{dx},\frac{d\phi}{dy},\frac{d\phi}{dz}\right)$

**Def**

Ett vektorfält $F$ är konservativt om det är på formen $F=\nabla\phi$ & $\phi$ kallas då potentialen till $F$.

- $\phi$ är inte unik. $F$ kan ha flera potentialer.
- Gradienten till funktioner $\phi:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R},\ \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ är som "derivator".
- Potentialen är den primitiva funktionen till ett vektorfält.
- Potentialer finns inte alltid.

Ett exempel på konservativa vektorfält är gravitationsfält.




$P_0$ är en punkt med massa m.

$F(P)=$ gravitationspilarna i en punkt P.

Vektorn: Riktningsvektor: $-\frac{P-P_0}{|P-P_0|}$
Storlek: $\frac{k\cdot m}{|P-P_0|^2}$ $\Bigg\}$ $F=\frac{-(P-P_0)}{|P-P_0|}\cdot\frac{k\,m}{|P-P_0|^2}=-\frac{k\,m(P-P_0)}{|P-P_0|^3}$

Potentialenergi: $\phi=\frac{km}{|P-P_0|}+C$

$\nabla\phi=-k\cdot m\frac{(P-P_0)}{|P-P_0|^3}$

Potentialenergin beror bara på läget från masscentrum.

**Potential finns inte alltid?**

$F(x,y)=(-y,x)$

Antag att det finns $\nabla\phi=\left(\frac{\partial\phi}{\partial x},\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)=(-y,x)$

$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2\phi}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right) \Rightarrow -1=\frac{\partial}{\partial y}(-y)=\ldots\ldots=\frac{\partial}{\partial x}(x)=1$ ajdå

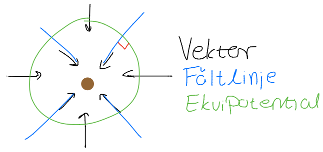
$F(x,y)=(-y,x)$ är ej konservativt.

Ett nödvändigt villkor för att kons.v-fält ska existera är att: $\nabla\phi=F=(F_1,F_2,F_3)$ och eftersom de blandade derivatorna för en funktion är samma $\Rightarrow \frac{\partial F_1}{\partial y}=\frac{\partial F_2}{\partial x},\ \frac{\partial F_1}{\partial z}=\frac{\partial F_3}{\partial x},\ \frac{\partial F_2}{\partial z}=\frac{\partial F_3}{\partial y}$

Om $F$ är konservativt, dvs $F = \nabla\phi$ så är $\phi$ bestämd upp till en konstant. Vi kallar ändå kurvorna bestämda av $\phi = C$, för en konstant $C$, för ekvipotentialkurvor.

Ex gravitation: $F = \frac{-(P-P_0)\,km}{|P-P_0|^3}$, $\phi = \frac{km}{|P-P_0|} + C$

Ekvipotential av typen $|P-P_0| = $ konstant




Ekvipotentialkurvorna skär alltid fältlinjerna ortogonalt $\Leftrightarrow$ $\nabla\phi$ är ortogonal till nivåytorna till $\phi$.

**Ex** $F(x,y) = (x, -y)$, är $F$ konservativt?

Test: $F = (F_1, F_2) = (\hat{\imath} F_1 + \hat{\jmath} F_2) = x\hat{\imath} - y\hat{\jmath}$

$0 = \frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x} = 0$

$F_1 = x \Rightarrow \frac{\partial F_1}{\partial y} = 0$

$F_2 = -y \Rightarrow \frac{\partial F_2}{\partial x} = 0$

Sätt upp ekvationer $\nabla\phi = (x, -y)$. 1) $\frac{\partial\phi}{\partial x} = x$

2) $\frac{\partial\phi}{\partial y} = -y$

Integrera 1) map $x$: $\phi = \frac{x^2}{2} + C(y) \Rightarrow \phi = \frac{x^2}{2} + C(y)$ för någon funktion $C(y)$, dvs oberoende av $x$.

Sätt in i 2) $\Rightarrow \frac{\partial\phi}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^2}{2} + C(y)\right) = \frac{\partial}{\partial y} C(y) = -y$

Integrera map $y$: $C(y) = -\frac{y^2}{2} + D$ (vänsterledet beror enbart på $y \rightarrow D$ konstant)

1) + 2) + räkning $\Rightarrow \phi = \frac{x^2}{2} + C(y) = \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} + D$, $D$ konstant

Sanity check: $\nabla\phi = \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}\right) = \left(\frac{2x}{2}, \frac{-2y}{2}\right) = (x, -y)$

## 15.3 | Linjeintegraler / Kurvintegraler

Om vi har en kurva, $C$, i rymden eller planet är längden mellan punkt vid $t=a$ och $t=b$ för en parametrisering $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$: $\int_C ds = \int_a^b (x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2)^{1/2}\, dt$

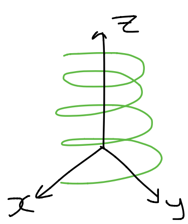
Om vi har en funktion $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ vill vi ibland integrera den över $C(C)$: int. $f$ längs $C$.

$\int_C f\, ds = \int_a^b f(r(t)) \cdot \left|\frac{dr}{dt}\right| dt$ Här är $r(t)$ en param. av kurvan.

Betydelse: $f = 1 \rightsquigarrow$ längden

$f > 0 \rightsquigarrow$ densitet per längdenhet

**Ex**




En helix, tänk en kedja med varierande tjocklek. $r(t) = (\cos(t), \sin(t), t)$

Densitet: $f(x,y,z) = \frac{1}{2}\frac{x^2}{x^2+y^2}$

Beräkna massa mellan $t = [0, 2\pi]$.

$\int_C \frac{1}{2}\frac{x^2}{x^2+y^2}\, ds = \begin{cases} r(t) \text{ given} \\ ds = \left|\frac{dr}{dt}\right| dt = \sqrt{(-\sin^2(t) + \cos^2(t)) + 1} = \sqrt{2}\, dt \end{cases}$

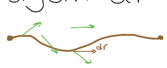
$\int_C f\, ds = \int_0^b \frac{1}{2}\frac{x^2}{x^2+y^2}\sqrt{2}\, dt = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\frac{\cos^2 t}{1}\sqrt{2}\, dt = \left\{\begin{matrix}\text{dubbla} \\ \text{vinkeln}\end{matrix}\right\} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\left(\frac{\cos(2t)+1}{2}\right) dt = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}\, dt = 2\pi \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2} = \frac{\pi}{2}$

## 15.4 | Kurvintegrering längs vektorfält

Högstadiet (var gick Dennis på högstadiet?) och Newton säger att $W = F \cdot S$.

Nu vill Dennis att $S = \{\text{en kurva}\} = C$ och kraften $F$ ett varierande vektorfält.

Frågan är nu vad $W$ blir....




Enda kraften som räknas är projiceringen av $F$ ner på $dr$. $W = F \cdot dr$, åtminstone om vi rör oss oändligt lite. $W_C = \int_C F \cdot dr$