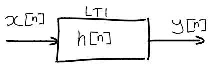
Frekvenssvar hos diskreta LTI-system



* Kausalt: $h[n]=0,\ n<0$

Låt $x[n]=z^n \quad (z \in \mathbb{C})$.

$$y[n]=(h*x)[n]=\sum_{k=0}^{\infty} h[k]x[n-k]=\sum_{k=0}^{\infty} h[k]z^{n-k}=\sum_{k=0}^{\infty} h[k]\,z^n z^{-k}=z^n\sum_{k=0}^{\infty} h[k]z^{-k}=z^n\, H(z)$$

Vi får alltså $y[n]=z^n H(z)$.

För en diskret, sinusformad, signal: $z=e^{j\Omega}$ och $z^n=e^{j\Omega n}=\cos(\Omega n)+j\sin(\Omega n)$

$y[n]=e^{j\Omega n}\,H(e^{j\Omega})$ där H är systemets frekvenssvar vilket påverkar amplitud och fas för den diskreta, sinusformade, signalen.

$$H(e^{j\Omega})=|H(e^{j\Omega})|\,e^{j\arg\{H(e^{j\Omega})\}}$$

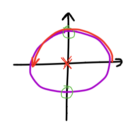
Ex

$y[n]=x[n]+x[n-2]$

$$\mathcal{Z}(y[n]) \Rightarrow Y(z)=X(z)+z^{-2}X(z) \Leftrightarrow Y(z)=X(z)(1+z^{-2}) \Leftrightarrow \frac{Y(z)}{X(z)}=(1+z^{-2})=\frac{z^2+1}{z^2}=H(z)$$

Nollställe: $z^2+1=0 \Leftrightarrow z^2=-1 \Leftrightarrow z=\pm j=e^{\pm j\frac{\pi}{2}}$

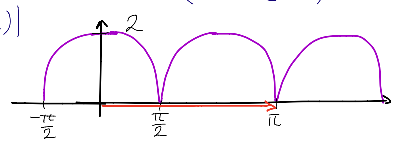
Pol: $z^2=0 \Leftrightarrow z=0$ (dubbelpol)



klockan blev leet

Frekvenssvar: $z=e^{j\Omega}$, $H(e^{j\Omega})=1+e^{-2j\Omega}=e^{-j\Omega}(e^{j\Omega}+e^{-j\Omega})=2e^{-j\Omega}\cos(\Omega)$

Amplitudpåverkan: $|H(e^{j\Omega})|=2|\cos(\Omega)|$



Sampling, $\Omega=\frac{\pi}{2}$

Detta skulle innebära att hela signalen släcks ut till följd av $x[n]+x[n-2]$.

Sammanfattning

$$\underbrace{X(j\omega)}_{\substack{\text{kontinuerlig}\\ \text{icke-periodisk}}} \overset{FT}{\Leftrightarrow} \underbrace{x(t)}_{\substack{\text{kontinuerlig}\\ \text{icke-periodisk}}} \xrightarrow{\text{Samplas}} \underbrace{x[n]}_{\substack{\text{diskret}\\ \text{icke-periodisk}}} \overset{DTFT}{\Longleftrightarrow} \underbrace{X(e^{j\Omega})}_{\substack{\text{kontinuerlig}\\ \text{Periodisk i } \Omega}} \xrightarrow[DFT]{\Omega_k=\frac{2\pi}{N}k} \underbrace{X[k]}_{\substack{\text{diskret}\\ \text{Periodisk}}}$$

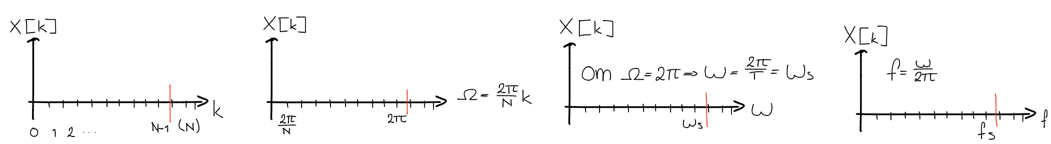
En kontinuerlig signals fouriertransform kan erhållas ur den samplade signalens fouriertransform (DTFT) om effekten av aliasing kan göras tillräckligt liten.

Mer om DTFT

Samband mellan k, ω, Ω och f.

$x(t)=\sin(\omega t)$ samplas: $t=nT \Rightarrow \sin(\omega nT)=\sin(\omega T\, n)=\sin(\Omega n)\big|_{\Omega=\omega T}$

DFT's frekvensaxel:



Tentamen Aug 2015

2) $y[n] = 2(0.2^n - (-0.6)^n) \cdot u[n]$

$\mathcal{Z} \Rightarrow Y(z) = \frac{2 \cdot 1}{1-0.2z^{-1}} - \frac{2 \cdot 1}{1+0.6z^{-1}} = \left\{ \begin{matrix} \text{gör} \\ \text{liknämnigt} \end{matrix} \right\} = \frac{2 \cdot 0.8 \cdot z^{-1}}{(1-0.2z^{-1})(1+0.6z^{-1})}$

$x[n] = (-0.6)^n u[n]$

$\mathcal{Z} \Rightarrow X(z) = \frac{1}{1+0.6z^{-1}}$

$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1.6z^{-1}}{1-0.2z^{-1}} = \frac{1.6}{z-0.2}$ = överföringsfunktion

Diffekv: $Y(z) = (1-0.2 \cdot z^{-1}) = X(z) \cdot 1.6 z^{-1}$

$Y(z) - 0.2z^{-1} Y(z) = 1.6 \cdot z^{-1} \cdot X(z)$

invers transform

$y[n] - 0.2y[n-1] = 1.6x[n-1]$

5) Aktuell signals fourierserie: $x(t) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cdot \sin(n \frac{\pi}{L} t)$

$A_n = 0, \forall n \quad B_n = \frac{2}{\pi} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \quad , \omega_0 = \frac{\pi}{L} = 10 \ \frac{\text{rad}}{s}$

Systemets frekvenssvar: $G(j\omega) = G(s)|_{s=j\omega} = \frac{400}{(j\omega+20)^2}$

Amplitudpåverkan: $|G(j\omega)| = \frac{400}{\omega^2 + 20^2}$

Amplitud hos utsignal:

$n=1, \ \omega = \omega_0$: $B_1^y = |B_1||G(j\omega_0)| = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{400}{10^2+20^2} = 0.509$

$n=2, \ \omega = 2\omega_0$: $B_2^y = |B_2||G(j2\omega_0)| = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{400}{20^2+20^2} = 0.159$

$n=3, \ \omega = 3\omega_0$: $B_3^y = |B_3||G(j3\omega_0)| = \frac{2}{3\pi} \cdot \frac{400}{30^2+20^2} = 0.065$