

13.1) Extremvärdesproblem & lokala karakteriseringar av kritiska punkter

Vill studera lokalt beteende för kritiska punkter till funktioner $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eller $f: U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

Kr pkt: $\nabla f(a,b) = 0$
 (a,b) s.g.

Vi vill veta när dessa ptkr är lokala max, min eller inget av detta. Varken eller kallas i boken för Sadelpunkt. Genom TaylorPolynom!

$$f(x,y) \approx P_2(x,y) \text{ i punkten } (a,b)$$

$$\begin{aligned} P_2(x,y) &= f(a,b) + \nabla f(a,b) \cdot \begin{bmatrix} x-a \\ y-b \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} (x-a)(y-b) \end{bmatrix} \cdot H(f)(a,b) \\ &= 0 \text{ ty kritisk p} \end{aligned}$$

P_2 är kontrollerad av $H(f)$. Föra gången talade vi om posdef, neg.def, indefinita, matriser eller kvadratiska ytter.

$$\text{Kvadratisk form: } f(x,y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2$$

$$\text{Om } f(x,y) > 0 \quad \text{för } (x,y) \neq 0 \Rightarrow P_2(x,y) = f(a,b) + > 0$$

$$\text{Om } (x,y) \neq (a,b)$$

i det här fallet är (a,b) lokalt min

Plus neg > 0

$$f(x,y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2$$

dela med y^2 (som är > 0)

$$f(x,y) = A \frac{x^2}{y^2} + 2B \frac{xy}{y^2} + C$$

sätt $\frac{x}{y} = t$

$$f(t) = At^2 + 2Bt + C$$

- Hitta minpunkter för att se om $f > 0 < 0$

- $f(t)$ har inga reella nollställen om alltid pos eller alltid negativ \Rightarrow leta nollställen

$$f(t) = 0 \Rightarrow t = -\frac{B \pm \sqrt{B^2 - AC}}{2A} \Rightarrow \text{Om } B^2 - AC < 0 \text{ existerar inga nollställen.}$$

$$B^2 - AC < 0 \quad \& \quad A > 0 \Rightarrow F(t) \text{ alltid pos}$$

$$B^2 - AC < 0 \quad \& \quad A < 0 \Rightarrow F(t) \text{ alltid neg}$$

$$\text{Om } B^2 - AC > 0 \Rightarrow \quad F(t) \text{ ibland pos ibland neg}$$

$$B^2 - AC = 0 \Rightarrow \quad \text{Vi vet inget}$$

Översättning till kritiska punkter $A = f_{11}(a,b)$, $B = f_{12}(a,b)$, $C = f_{22}(a,b)$.

$B^2 - AC < 0$	$A > 0$	lokalt min
$B^2 - AC < 0$	$A < 0$	lokalt max
$B^2 - AC > 0$		Sadelpunkt (rikts)
$B^2 - AC = 0$		ingen info

$$\text{Notera: } B^2 - AC = -\det(H(f))$$

Ex Bestäm och klassificera kritiska punkter till $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$.

Kr Pkt: $\nabla f(x,y) = 0$

$$\begin{cases} \nabla f(x,y) = (3x^2 - 3y, 3y^2 - 3x) = (0,0) \\ x^2 - y = 0 \\ y^2 - x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ x = y^2 \end{cases} \Rightarrow y = x^2 = (y^2)^2 = y^4 \Rightarrow y^4 - y = 0 \Rightarrow y(y^3 - 1) = 0 \Rightarrow y_1 = 0, y_2 = 1 \\ x_1 = 0, x_2 = 1 \end{cases}$$

Kr. Pktr

Hitta partiella derivater! Klassificera. $P_1 = (0,0)$ $P_2 = (1,1)$

$$\text{Hess}(f) = \begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{pmatrix} \text{ om } P_1 = (0,0) \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A = 0, B = -3, C = 0 \Rightarrow B^2 - AC = 9 > 0$$

P_1 är alltså en saderpunkt.

$$\text{Hess}(f) \text{ om } P_2 = (1,1) = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow A = 6, B = -3, C = 6 \Rightarrow B^2 - AC = -27 < 0 \Rightarrow P_2 \text{ är lokalt min}$$

Dugga 26/9, V&V, 8³⁰-11³⁰ inkluderar allt till och med Lagranges metod (B3).

Ex Bestäm största och minsta area till en box med given volym 5ve.



$$V = xyz = 5$$

$$A = 2xz + 2yz + 2xy$$

Om vi trycker ihop lådan \Rightarrow oändlig area...

$$\text{Volymformeln} \Rightarrow z = \frac{5}{xy}$$

$$\text{Arean} = f(x,y) = 2x\left(\frac{5}{xy}\right) + 2y\left(\frac{5}{xy}\right) + 2xy = \frac{10}{y} + \frac{10}{x} + 2xy$$

$$f(x,y) = \frac{10}{y} + \frac{10}{x} + 2xy$$

Minimum ges av en kritisk punkt.

$$\nabla f = \left(-\frac{10}{x^2} + 2y, -\frac{10}{y^2} + 2x \right) = (0,0) \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{5}{x^2} \\ x = \frac{5}{y^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \left(\frac{5}{x^2}\right)^2 = \frac{y^4}{5} \\ x = \frac{x^4}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq 0 \text{ men } x_1 > 0 \\ x_2^3 = 5 \Rightarrow x_2 = \sqrt[3]{5} \\ y_2 = \sqrt[3]{5} \\ z = \frac{5}{xy} = \sqrt[3]{5} \end{cases}$$

13.2] Extremproblem med Bi-villkor

Ofta behöver man lägga till bi-villkor. Hur max/minimerar vi en funktion $f(x,y)$ över ett område

U definierat via
 $g(x,y) = C$
 $g(x,y) > C$
 $g(x,y) \leq C$

Sats

Om f har lokalt min/max i (a,b) gäller

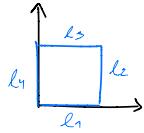
- i) $\nabla f(a,b) = 0$
- ii) $(a,b) =$ randpunkt
- iii) ∇f odef

Ex Hitta max/min till $f(x,y) = x^2 + y^2$ på kvadraten med hörn $(0,0), (0,1), (1,1), (1,0)$

$$\nabla f = (2x, 2y) = (0,0) \rightarrow x=y=0 \text{ motsvarar en kritisk punkt}$$

$$\text{Spara } f(0,0)=0$$

Måste kolla värden på randen till kvadraten. Detta genom att parametrisera kvadraten



Finns 4 sidor som behöver fixas....

$$l_3 \text{ kan parametriseras gm } l_3(t) = (t, 1)$$

För att kolla värden till $f(x,y)$ sät in l_3 . $g(t) = f(l_3(t)) = t^2 + 1^2$ Kolla kritiska punkter och randen.

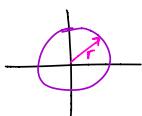
$$g'(t) = 2t \Rightarrow t=0 \text{ motsvarar } (0,1). \quad \text{Värde: Spara } f(0,1)=1$$

Ränderna: $(0,0)$ & $(1,1)$

Övriga linjer lämnas till läsaren att visa.

$$\begin{array}{ll} \text{I slutänden har vi sparat massor med tal. Hittills har vi:} & \begin{array}{ll} f(0,0)=0 & \text{Min ges av minsta värdet} \\ f(0,1)=1 & \\ f(1,1)=2 & \text{Max ges av största} \\ \vdots & \end{array} \end{array}$$

Ex Hitta max/min till $f(x,y) = ax + by$ på diskten av radie r : $x^2 + y^2 \leq r^2$



Kritiska punkter: $\nabla f = (a, b)$

Om $(a,b) \neq (0,0)$ finns ingen kritisk punkt

$$\text{Alltså ligger max eller min på randen: } x^2 + y^2 = r^2 \Rightarrow \begin{aligned} x &= r \cos t \\ y &= r \sin t \end{aligned}$$

$$f(x,y) = f(x,y \text{ på randen})(t) = a \cdot r \cos t + b \cdot r \sin t$$

$$g(t) = ar \cos t + br \sin t$$

$$g'(t) = -ar \sin t + br \cos t = 0$$

$$-ar \sin t + br \cos t = 0$$

$$(a,b) \cdot (-\sin t, \cos t) = 0 \Leftrightarrow \text{vinkelräta}$$

En annan vinkelräta vektor till (a,b) är $(-b,a)$
det innebär att: $(-\sin t, \cos t) = \lambda(-b,a)$

$$\lambda = \pm \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \text{ eftersom VL har längd 1}$$

Sammansättningen av detta ger att $|(a,b) \cdot (x,y)| \leq \| (a,b) \| \cdot \| (x,y) \|$

Cauchy-Schwartz olikhet