11.3 | Parametrisering av en kurva

Def
$\vec{r}(t)=(x(t),y(t),z(t))$ parametriserar en kurva ℓ i $\mathbb{R}^3$ om $\vec{r}$ exakt täcker upp ℓ. Den får emellertid inte träffa flera gånger.

Ex
$\ell: x^2+y^2=1$, en parametrisering ges av $\vec{r}(t)=(\cos(t),\sin(t))$ $t\in[0,2\pi)$

Ex
Något som inte är en parametrisering av samma ℓ är $r(t)=(\cos(t),\sin(t))$ $t\in\mathbb{R}$. Detta eftersom $\vec{r}$ träffar punkter fler än en gång.

Ex
Betrakta snittet av Planet $\pi: x+y+z=3$ ① och den elliptiska cylindern: $4x^2+y^2=9$ ②.

② Cylinder med godtyckligt z. Ett uttryck ges av $\left(\frac{3\cos t}{2}, 3\sin t, z\right)$.
① Ger att $z=3-x-y=3-\frac{3}{2}\cos(t)-3\sin(t)$

Alltså ges parametrisering av $\vec{r}(t)=\left(\frac{3}{2}\cos(t), 3\sin(t), 3-\frac{3}{2}\cos(t)-3\sin(t)\right)$ $t\in[0,2\pi)$.

Kurvlängd
En sluten och begränsad kurva ℓ har oftast en längd. $|\ell|$ = längd för en kurva.

Antag att vi har en parametrisering $\vec{r}(t)=(x(t),y(t))$. Vad är längden mellan a och t?
$s(t)$ = kurvlängden

Alt 1
Vad är $s'(t)$? $\frac{ds}{dt}=\lim_{h\to 0}\frac{s(t+h)-s(t)}{h}$ = avstånd mellan $r(t+h)$ och $r(t)$, delat med h. $r(t+h)\overset{\text{litet } h}{\approx} r(t)+v(t)\cdot h$
$\left|\frac{r(t+h)-r(t)}{h}\right|=|v(t)|=|r'(t)|$, $s'(t)=|r'(t)| \Rightarrow s(t)=\int_a^t |r'(t)|dt + C$. Eftersom $s(0)=0 \Rightarrow C=0$

Alt 2
Formeln för avstånd mellan $r(t+h)$ och $r(t)$ kommer vara $\sqrt{dx^2+dy^2} \overset{\text{Förläng med } dt}{=} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$ och sedan integrerar vi och får samma resultat.

Specialfall: $y=f(x)$ $\qquad$ $\int_a^b\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt=\int_a^b\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$
Längden mellan a och b.

Viktigt: Med parametrisering

Ex
Räkna ut längden mellan tiden 1 och e^2 för den parametriserade kurvan $\vec{r}(t)=(t^2, 2t, \ln(t))$ enligt formeln: $\int_1^{e^2}\sqrt{(2t)^2+2^2+\left(\frac{1}{t}\right)^2}\,dt=\int_1^{e^2}\sqrt{4t^2+4+\frac{1}{t^2}}\,dt$

Kvadratkomplettera! $4t^2+4+\frac{1}{t^2}=\left(2t+\frac{1}{t}\right)^2$

$\int_1^{e^2}\sqrt{\left(2t+\frac{1}{t}\right)^2}\,dt=\int_1^{e^2}2t+\frac{1}{t}\,dt=\left[t^2+\ln(t)\right]_1^{e^2}=e^4-1+2\ln e=e^4+1$

12.1 Funktioner i flera variabler & Nivåytor/kurvor

Vi betrakter $f: \begin{smallmatrix}\mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\end{smallmatrix}$ m.m.

Ex

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ ger problem om $1-x^2 < 0$ ty det är jobbigt med komplexa tal.

Def

En mängd $U \subseteq \mathbb{R}^n$ är en domän eller definitionsmängd till f om $f: U \to \mathbb{R}$.

I exemplet ovan är domänen alla x s.a. $1-x^2 \geq 0$, dvs intervallet $[-1,1]$.

Def

En mängd $V \subseteq \mathbb{R}$ är en målmängd om f tar sina värden i V.

Ex

$f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}$.

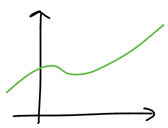
Domän: Alla (x,y) s.a. $x^2+y^2 \neq 0$ dvs $\mathbb{R}^2 \setminus$ origo.

Målmängden: Alla positiva tal $\neq 0$. $\mathbb{R}_{>0}$

$f: \mathbb{R}^2 \setminus \text{origo} \to \mathbb{R}_{>0}$

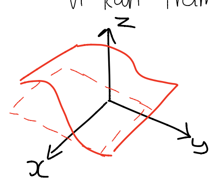
Grafer till funktioner $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$n=1$: $y = f(x)$



$n=2$: $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, ex att f är temp i (x,y)

Vi kan framställa detta grafiskt som $z = \text{temperatur} = f(x,y)$



Om vi har $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ hur gör vi då? Ja, det är svårt med 4-dim bilder så vi skippar att rita dem och använder oss av nivå-ytor/kurvor.

Def

Om $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ges nivåytorna till f vid C av alla $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ s.a. $f(x) = C$

Ex

$f(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2)$, $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

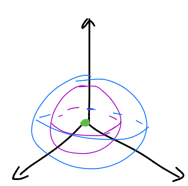
Vad är nivåytorna?

$f(x,y,z) = C$ för $C = 0,1,2$

$C=0$, $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2 = 0$ dvs $x=y=z=0$

$C=1$, $f(x,y,z) = 1$ dvs sfär med $r=1$

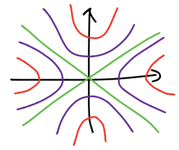
$C=2$ $f(x,y,z) = 2$ — " — $r=\sqrt{2}$



Ex

På en nivåkurva $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2 - y^2$

Nivå $C = 0, 1, 2$



$C=0$: $x^2 - y^2 = 0 = (x-y)(x+y) \Rightarrow x = y$

$C=1$: $x^2 - y^2 = 1$

$C=2$: $x^2 - y^2 = 2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{x^2 - 2}$

$x = \pm\sqrt{y^2 + 2}$

Återkommer formodligen på MVA 2.1 men då visas det på dator.

12.2 Gränsvärden och Kontinuitet

Detta är den teoretiska bakgrunden till partiella derivator. (Vi kommer formodligen inte använda dem så mycket...)

Kontinuerlig = Vi kan rita en graf utan att lyfta pennan.

Def

$f: U \subseteq \mathbb{R}^2 \to V \subseteq \mathbb{R}$

Vi säger att $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L \in \mathbb{R}$ om
1) Varje omgivning till (a,b) innehåller element i domän U.
2) $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ s.a. om $(x,y) \in U$ och $0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta$ $\Rightarrow |f(x,y) - L| < \varepsilon$

Vi säger också att f är kontinuerlig i (a,b) om $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$.

De gränsvärden vi betraktar existerar inte, och då får vi visa det, eller kan återföras på ett std-gränsvärde från envariabeln.

Ex

$f(x,y) = \frac{x}{y}$

$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ om gränsv finns så

Testa: $(x, 3x)$ $f(x,y) = \frac{x}{3x} = \frac{1}{3}$

$(x, 2x)$ $f(x,y) = \frac{1}{2}$

Speciellt då $x \to 0$ får vi 2 olika värden så gränsv. existerar ej.