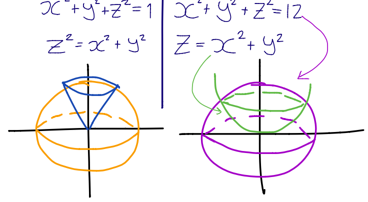
14.6 Trippelvariabelbyten - Ägg och glasstrutar

Ex Betrakta områderna begränsade av

Glasstrut	Ägg
$x^2+y^2+z^2=1$	$x^2+y^2+z^2=12$
$z^2=x^2+y^2$	$z=x^2+y^2$

Räkna ut volymen $\iiint_R dV$!



Glasstrut med sfäriska koordinater

Först behöver vi gränserna!

$0 \leq R \leq 1$ ty radien

$0 \leq \theta \leq 2\pi$ ty helt varv

$0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{4}$ liksidig triangel

$$\iiint_R dV = \int_0^1 \int_0^{\pi/4} \int_0^{2\pi} R^2 \sin\phi \, d\theta \, d\phi \, dR = \int_0^1 \int_0^{\pi/4} R^2 \sin\phi \, 2\pi \, d\phi \, dR = \int_0^1 2\pi R^2 \left(-\cos\left(\tfrac{\pi}{4}\right) - (-\cos(0)\right) dR = \int_0^1 2\pi R^2 \left(\tfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}\right) dR = 2\pi \tfrac{1}{3}\left(\tfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}\right) = \tfrac{\pi}{3}(2-\sqrt{2})$$

Ägg med cylindriska koordinater

Gränser!

$0 \leq \theta \leq 2\pi$ ty helt varv

Slica i r-riktning, Vi söker den maximala radien. Detta kräver lite räkning => Skärningen mellan de två ytorna. Notera att $r=\sqrt{x^2+y^2}$

$$\left.\begin{array}{l} r^2+z^2 = x^2+y^2+z^2 = 12 \\ r^2 = x^2+y^2 = z \\ r=\sqrt{x^2+y^2} \end{array}\right\} \quad r^2+(r^2)^2 = 12 \iff r^4+r^2-12=0 \iff r=\sqrt{3} \implies 0 \leq r \leq \sqrt{3}$$

$$r^2 \leq z \leq \sqrt{12-r^2}$$

Vi vet även att $dV = r\,dr\,d\theta\,dz$

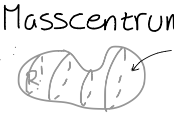
$$\text{Volym} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{3}}\int_{r^2}^{(12-r^2)^{1/2}} r\,dz\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{3}} (12-r^2)^{1/2} r\,dr\,d\theta - \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{3}} r^3\,dr\,d\theta = \underbrace{\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{3}} (12-r^2)^{1/2} r\,dr\,d\theta}_{u=12-r^2,\ du=-2r\,dr} - \frac{9}{4}\cdot 2\pi$$

Notera!

Glasstruten $\int_0^1\int_0^{\pi/4}\int_0^{2\pi} R^2 \sin\phi \, d\theta\, d\phi\, dR$ räknade vi ut i en viss ordning. Vi hade kunnat byte ordning men det finns ett trick!

$\int_a^b\int_c^d\int_e^f f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$ där $f(x,y,z) = g(z)h(x)i(y)$ kan integralen skrivas $\int_e^f h(x)dx \cdot \int_c^d i(y)\,dy \cdot \int_b^a g(z)\,dz$

14.7 Masscentrum & massa

Massa:  $\rho \geq 0$ densitet $= \frac{\text{massa}}{\text{volymenhet}}$ totala massan av $R = \iiint_R \rho \, dV$

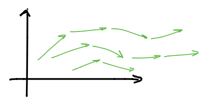
Låt $\rho = 1$

Betrakta $\frac{\iiint x\,dV}{\iiint dV} = \left\{\begin{array}{c}\text{medelvärdes-} \\ \text{satsen}\end{array}\right\} =$ det värde x antar som mest dvs x's medelvärde.

$\frac{\iiint x\rho\,dV}{\text{massan} = \iiint \rho\,dV} =$ R's tyngdpunkt i x-riktning. PSS för y och z.

15.1 Vektorfält

Vad vill vi modellera?



I varje punkt får man en vektor, ex: $\phi(x,y)=\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$\nabla\phi = (\phi_1, \phi_2)$ (x,y)-värde $\rightsquigarrow$ vektor i $\mathbb{R}^2$.

Def

Ett vektorfält är en funktion $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

Notation

$F(x,y): \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$F(x,y) = F_1 \cdot \hat{\imath} + F_2 \cdot \hat{\jmath}$

Ex $F(x,y) = (1,0)$

För varje (x,y) får man vektorn $[1\ 0]$, $\longrightarrow$

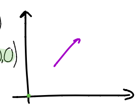
Ex $F(x,y) = (x,y)$

$P_1 = (0,0)$

$F(P_1) = (0,0)$

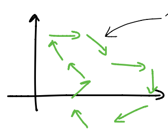
$P_2 = (1,1)$

$F(P_1) = (1,1)$



Om du "följer strömmen" i ~~ett~~ vektorfält följer du en linje aka fältlinjen.

Fältlinjer



positionsvektor $\vec{r}(t)$ för en fältlinje ska röra likt vektorfältet i varje punkt.

M.a.o. $r'(t) =$ hastigheten

$r'(t)$ & $F(r(t)) = F(r(t)) \cdot \lambda(t)$ är multiplar av varandra.

$\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$

$\frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right) = \left(\lambda(t) F_1(r(t)), \lambda(t) F_2(r(t)), \lambda(t) F_3(r(t))\right)$

Vektorvis: $\frac{dx}{dt} = \lambda(t) F_1(r(t))$

$\lambda(t) = \frac{dx}{dt} \cdot \frac{1}{F_1(r(t))} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{F_2(r(t))} = \frac{dz}{dt} \cdot \frac{1}{F_3(r(t))} \iff \frac{dx}{F_1} = \frac{dy}{F_2} = \frac{dz}{F_3}$