Supplemental Instructions

Repetition

Dra streck mellan koncept som hänger ihop.

$ad - bc$	Determinant av 2x2 matris
$\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + ...}$	Längd av vektor
$f_A(c\vec{u} + d\vec{v}) = cf_A(\vec{u}) + df_A(\vec{v})$	Linjär avbildning
$B = \begin{pmatrix} f(e_x) & f(e_y) & f(e_z) \end{pmatrix}$	Basbyte
$\lvert\lvert u \times v \rvert\rvert$	Area av parallellogram
$\frac{u \cdot v}{u \cdot u} u$	Projektion
$\begin{pmatrix} e_x & e_y \end{pmatrix}$	Identitetsmatris
$\begin{pmatrix} e_y & e_x \end{pmatrix}$	Spegling i y=x
$A^t A x = A^t b$	Minsta kvadratlösning
$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$	Spegling i y-axeln

1

Börja med att skriva om på matrisform.
R_i beteckna rad i.

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & a & 1 \\ 1 & -a & 2 & 1 \\ a & -4 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$R_1 * (-1) + R_2 \to R_2, \quad R_1 * (-a) + R_3 \to R_3,$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & a & 1 \\ 0 & 2-a & 2-a & 0 \\ 0 & 2a-4 & 4-a^2 & 2-a \end{bmatrix}$$

$a = 2 \implies \infty$ antal lösningar, ty överbestämt matris.
$a = -4 \implies$ ingen lösningen.
$a \neq 2$ och $a \neq -4 \implies$ entydlig lösning.

2

Skriv om på punkterna, (1, 3/2), (2,8) och (3, 11/2), på följande sätt:

$$\begin{cases} y_1 = kx_1 + l \\ y_2 = kx_2 + l \\ y_3 = kx_3 + l \end{cases} \tag{1}$$

=

$$\begin{cases} 3/2 = k * 1 + l \\ 8 = k * 2 + l \\ 11/2 = k * 3 + l \end{cases} \tag{2}$$

Gör sedan om till en matris ekvation $Ax = b$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k \\ l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/2 \\ 8 \\ 11/2 \end{bmatrix}$$

Vi vill nu lösa $A^t Ax = A^t b$.

$$A^t A = \begin{bmatrix} 14 & 6 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}, \qquad A^t b = \begin{bmatrix} 34 \\ 15 \end{bmatrix}$$

Använd gauss för att lösa ekvationen.

$$\begin{bmatrix} 14 & 6 & 34 \\ 6 & 3 & 15 \end{bmatrix}$$

Vilkter leder till att $x = (2, 1) \implies k = 2, l = 1$

3

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & 5 & -6 \\ 0 & -2 & -1 & 2 & -2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & 5 & -6 \\ 0 & 0 & -3 & -3 & 4 \end{bmatrix} \to$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{-5}{2} & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{-4}{3} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{-5}{2} & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{-4}{3} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-3}{2} & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{-4}{3} \end{bmatrix}$$

Från detta får vi en lösning med två fria parametrar och alltså geometrisk ett plan i $\mathbb{R}^5$. En parametrisering av planet ges av:

$$\mathbf{x} = s \begin{bmatrix} -1 \\ 3/2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ -5/3 \\ 4/3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

4

Lösning saknas ty pivotelement!

5

Tanken är att skriva matrisen på övertriangulär form för att sedan multiplicera diagonalen.
R_i beteckna rad i.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 8 & -1 & 2 \\ 4 & -4 & 0 & 3 \\ 8 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$R_1 * (-2) + R_2 \to R_2, \quad R_1 * (-4) + R_3 \to R_3, \quad R_4 * (-8) + R_4 \to R_4$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & -1 & 0 \\ 0 & -8 & 0 & -1 \\ 0 & -6 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

$R_2 * (8/6) + R_3 \to R_3, \quad R_2 * (1) + R_4 \to R_4$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4/3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

$1 \cdot 6 \cdot -4/3 \cdot -4 = 32$

6

Genom att beräkna determinanten av matrisen med de tre vektorerna som rader ser vi att denna är nollskiljd.
Detta är fallet **om och endast om** vektorerna är linjärt oberoende.