1.

Base case, $n=1$

$VL = 1+3\cdot\sum_{i=1}^{1} 1(1-1) = 1+3\cdot 0 = 1$

$HL = 1^3 = 1$

Antag induktionsantagande sant för $n$

$n+3\cdot\sum_{i=1}^{n} k(k-1) = n^3$

Visa induktionsantagandet sant för $n+1$

$(n+1)+3\cdot\sum_{k=1}^{n+1} k(k-1) = 1+n^3+3(n+1)(n+1-1) = 1+n^3+3n^2+3n = (n+1)^3$

2.

a) Eftersom varje element i definitionsmängden kan ha två olika funktionsvärden finns det $2^3=8$ olika funktioner.

b) $|\text{Defmängd}| > |\text{Målmängd}| \Rightarrow$ Ingen injektiv funktion

c) Ja!

Ex: $f: f(1)=1, f(2)=2, f(3)=1$

3.

$x$ - dagar de åkt båt

$y$ - dagar de rest på annat vis $\Big\}$ $720x+400y=15200 \iff 9x+5y=190$

$sgd(9,5)=1$

$9\cdot(-1)+5\cdot(2)=1$

Multiplicera med $190 \Rightarrow 9\cdot(-190)+5\cdot(380)=190$ dvs: $(x,y)=(-190,380)$ är en lösning

Samtliga lösningar ges av: $(x,y)=(-190+5n, 380-9n)$ där $n$ är ett godtyckligt heltal. Problemet i sig vittnar om att $x$ och $y$ måste vara positiva. Dessutom gäller att $-190+5n<380-9n$. För att detta ska uppfyllas gäller det att $n=[39,40]$.

Vi har slutligen nått lösningarna: $(x,y)=(10,20)$ och $(x,y)=(5,29)$

4.

Använd Euklides algoritm:

a) $sgd(1001,748)=11$

b) $sgd(317,70)=1$ $\quad [317]^{-1}=[37]^{-1}=[-17]=[53]$ i $\mathbb{Z}_{70}$

c) $sgd(31,47)=1$ $\quad [31]^{-1}=[-3]^{-1}=[44]$ i $\mathbb{Z}_{47}$

5.

$28x+36y=100 \iff 7x+9y=25$

$sgd(7,9)=1$, ekvationen är lösbar

Mekka lite så ser man att $(x,y)=(1.2)$ är en lösning. Den allmänna lösningen ges av $(x,y)=(1+9n, 2-7n)$ $n\in\mathbb{Z}$

Inversen till $7$ i $\mathbb{Z}_9$ är $4$, ty $4\cdot 7=28\equiv 1 \bmod 9$

6.

Antag att $a>b$. Skriv med hjälp av divisionsalgoritmen $a=q_1b+r_1$. Upprepa med $b$ och $r_1$ $b=q_2r_1+r_2$. Fortsätt genom att dividera den föregående resten med den nya resten: $r_1=q_3r_2+r_3$, $r_2=q_4r_3+r_4$ etc tills du får en rest som är $0$. Då är $sgd(a,b)$ den sista nollskilda resten.

Algoritmen fungerar eftersom det i varje steg $k$ gäller att: $sgd(r_{k-1},r_k)=sgd(q_{k+1}r_k+r_{k+1},r_k)=sgd(r_{k+1},r_k)$

7.

a) $3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$

b) $2^2 \cdot 5 \cdot 17$

c) $5^2 \cdot 31 \cdot 37$

8.

```
primes = 2 : filter isPrime[3,5...]
isPrime n = all ((/0).(n `mod`)) $ takeWhile (\p -> p*p <= n) primes
```