

# Supplemental Instructions

## 1

Separabel

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$$

$$ydy = xdx$$

$$\frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + C$$

$$y(1) = 2 \Rightarrow 2 = \frac{1}{2} + C \Rightarrow C = \frac{3}{2}$$

$$y^2 = x^2 + 3$$

$$y = \sqrt{x^2 + 3}$$

## 2

$$y' - y = 2xe^x$$

Integrerande faktor:  $e^{-x}$

$$e^{-x}y' - e^{-x}y = 2x$$

$$(e^{-x}y)' = 2x$$

$$e^{-x}y = x^2 + C$$

$$y(0) = 1 \Rightarrow C = 1$$

$$y = x^2e^x + e^x$$

## 3

$$y'' + y = x$$

Kar. ekv:  $r^2 + 1 = 0 \Rightarrow r = \pm i$

Homogenlösning:  $y = A * \cos(x) + B * \sin(x)$

Partikulärlösning:  $y = x, y'' = 0$

$$y = x + A * \cos(x) + B * \sin(x)$$

$$y' = 1 - A * \sin(x) + B * \cos(x)$$

$$y(0) = y'(0) = 0 \Rightarrow A = 0, 1 - B = 0$$

$$y = x + \sin(x)$$

## 4

$$y'' - 3y' + 2y = \sin(2x)$$

$$\text{Kar. ekv: } r^2 - 3r + 2 = 0 \Rightarrow r_1 = 2, r_2 = 1$$

$$\text{Homogenlösning: } y = Ae^{2x} + Be^x$$

Partikulärlösning:

$$y = A\cos(2x) + B\sin(2x)$$

$$y' = -2A\sin(2x) + 2B\cos(2x)$$

$$y'' = -4A\cos(2x) - 4B\sin(2x)$$

$$y'' - 3y' + 2y = \cos(2x)(-4A - 6B + 2A) + \sin(2x)(-4B + 6A + 2B)$$

$$\begin{cases} -2A - 6B = 0 \\ -2B + 6A = 1 \end{cases}$$

$$A = -3B$$

$$-B - 9B = \frac{1}{2}$$

$$B = -\frac{1}{20}$$

$$A = \frac{3}{20}$$

Lösning:

$$y = \frac{3}{20}\cos(2x) - \frac{1}{20}\sin(2x) + Ae^{2x} + Be^x$$

$$y' = -\frac{3}{10}\sin(2x) - \frac{1}{10}\cos(2x) + 2Ae^{2x} + Be^x$$

$$y(0) = y'(0) \Rightarrow$$

$$\frac{3}{20} + A + B = 0$$

$$-\frac{1}{10} + 2A + B = 0$$

$$A = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$$

$$B = -\frac{8}{20} = -\frac{2}{5}$$

$$\text{Svar: } y = \frac{3}{20}\cos(2x) - \frac{1}{20}\sin(2x) + \frac{1}{4}e^{2x} - \frac{2}{5}e^x$$

## 5

Skivformeln ger:

$$\int_0^2 \pi(e^x \sqrt{x})^2 dx =$$

$$\pi \int_0^2 x * e^{2x} dx =$$

$$\pi \left[ \frac{x * e^{2x}}{2} \right]_0^2 - \frac{\pi}{2} \int_0^2 e^{2x} dx =$$

$$\pi \left( (e^4 - 0) + \left( \frac{1}{4} - \frac{e^4}{4} \right) \right) =$$

$$\pi \left( \frac{1}{4} + e^4 - \frac{e^4}{4} \right) =$$

$$\pi \left( \frac{1}{4} + \frac{3e^4}{4} \right)$$

## 6

Om vi vrider  $8 - 6i$   $90^\circ$  får vi  $i(8 - 6i) = 8i + 6 = 2(3 + 4i)$  vilket är parallellt med  $(3 + 4i)$ .

Alternativt kan vi använda omvändningen av Pythagoras sats:

$$\text{Hypotenusan}^2 = |8 - 6i - (3 + 4i)|^2 = |5 - 10i|^2 = 125 =$$

$$(64 + 36) + (9 + 16) = |8 - 6i|^2 + |3 + 4i|^2$$

## 7

Om  $v(t)$  är hastigheten har vi  $v' = -k\sqrt{v}$ ,  $v(0) = v_0$ .

$$\frac{dv}{\sqrt{v}} = -k dt$$

$$2\sqrt{v} = -kt + C$$

$$t = 0 \text{ ger } C = 2\sqrt{v_0}$$

$$2\sqrt{v} = 2\sqrt{v_0} - kt = 0$$

$$\text{för } t = \frac{2\sqrt{v_0}}{k}$$

## 8

Eulers metod är:  $y_{k+1} - y_k = h(x_k^2 + y_k^2)$

$$y(0) = 0$$

$$y\left(\frac{1}{2}\right) = 0 + \frac{1}{2}(0^2 + 0^2) = 0$$

$$y(1) = 0 + \frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 0^2\right) = \frac{1}{8}$$

Svar:  $0, 0, \frac{1}{8}$

## 9

$$y^2 = 1 + \int_1^x y^3 dt$$

Tricket här är analysens andra fundamentalsats:  $\frac{d}{dx} \int_c^x f(t) dt = f(x)$

Derivera båda sidorna:  $2y(x)y' = y(x)^3$

Nu behöver vi separera:  $2y(x) \frac{dy}{dx} = y(x)^3$

$$\frac{1}{y(x)^2} \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{y(x)^2} dy = \frac{1}{2} dx$$

$$-\frac{1}{y} = \frac{x}{2} + c$$

$$\frac{1}{y} = -\frac{x+c}{2}$$

$$y = -\frac{2}{x+c}$$

C kan vi beräkna från originalekvationen. Vi väljer något x så att integralen blir enkel. I det här fallet passar  $x=1$  bra.

$$\left(-\frac{2}{1+c}\right)^2 = 1 + \int_1^1 y^3 dt$$

$$\frac{4}{(1+c)^2} = 1 + 0$$

Vi ser här att  $c=1$  uppfyller kravet.

$$y = -\frac{2}{x+1}$$