Supplemental Instructions

Erik Thorsell
erithor@student.chalmers.se

2015-10-22

Tentakött!

1. a) Antalet grafer sammanfaller med antalet sätt att välja ut k stycken bland alla de $\binom{n}{2}$ paren av element man kan bilda från V. Svaret blir således:

$$\binom{\binom{n}{2}}{k}$$

   b) Här handlar det om antalet sätt de n noderna kan delas in i två grupper. Låt oss kalla dem "de röda noderna" och "de blå noderna". För varje nod finns det två alternativ, blå eller röd, så enligt multiplikationsprincipen finns det 2^n olika sätt att dela in noderna i röda och blå noder. Dock gäller det att varje fullständig bipartit graf kan uppkomma från precis två sådana uppdelningar, vilka fås från varandra genom att kalla alla blå noder röda och vice versa. Således är antalet fullständiga - bipartita - grafer 2^{n-1}.

   c) Varje n-väg svarar mot precis en permutation av de n noderna varför det finns precis $n!$ stycken n-vägar.

   d) Varje n-väg svarar mot precis n stycken n-väga (ty det finns precis n ställen där en cykel kan "klippas av" och bilda en väg), varför svaret blir:

$$\frac{n!}{n} = (n-1)!$$

2. Kalla högerledet $f(n)$, dvs $f(n) = n^8 + 6n^3 + 4$. Eftersom 21 kan skrivas som produkten av två primtal (7 och 3) gäller att $21|f(n)$ om och endast om $3|f(n)$ och $7|f(n)$. Detta kan skrivas om som: $f(n) \equiv 0$ modulo 3 och $f(n) \equiv 0$ modulo 7. Vid räkning i $\mathbb{Z}_7$ gäller att $f(n) = n^8+6n^3+4 = n^2-n^3+4$.

$$f(0) = 4$$

$$f(1) = 4$$

$$f(2) = 0$$

$$f(3) = 0$$

$$f(4) = 4$$

$$f(5) = 2$$

$$f(6) = 6$$

Vi ser att att $f(n) \equiv 0 \bmod 7$ omm $n \equiv 2$ eller $n \equiv 3 \bmod 7$. Vid räkning i $\mathbb{Z}_3$ gäller att $f(n) = 1 - n^5 + 4 = 5 - n - 2 = 2 - n$ varför $f(n) \equiv 0 \bmod 3$ omm $n \equiv 2 \bmod 3$.
Summa summarum gäller alltså att $21|f(n)$ gäller då:

$$\begin{cases} n \equiv 2 \bmod 3 \\ n \equiv 2 \bmod 7 \end{cases}$$

eller

$$\begin{cases} n \equiv 2 \bmod 3 \\ n \equiv 3 \bmod 7 \end{cases}$$

En lösning till ekvationssytemet är att $n = 2$ så enligt kinesiska restsatsen gäller att den allmänna lösningen är $n = 2 + 21m$, $m \in \mathbb{Z}$. Till det andra ekvationssystemet är $n = 17$ en lösning så den allmänna lösningen är $n = 17 + 21m$, $m \in \mathbb{Z}$. De n vi söker är alltså de n som kan skrivas som $2 + 21m$ eller $17 + 21m$ där m är något heltal.

3. a) Först väljer vi ut bollarna till urna 1. Detta kan ske på $\binom{n}{k}$ olika sätt. Bland de återstående $n-k$ bollarna väljs sedan l bollar ut till urna 2. Detta kan ske på $\binom{n-k}{l}$ olika sätt. Till sist finns det bara ett val; att lägga de återstående $n - k - l = m$ bollarna i urna 3. Enligt multiplikationsprincipen finns totalt:

$$\binom{n}{k}\binom{n-k}{l} = \frac{n!}{k!l!m!}$$

sätt att placera ut bollarna.

b) $A(k, l, m)$ är antalet sätt att välja ut k parenteser att plocka a ur, l parenteser att plocka b ur och m parentser att plocka c ur. Genom att associera a med urna 1, b med urna 2 och c med urna 3 i uppgift (a) kan man efter lite tankegymnastik komma fram till att $A(k, l, m)$ blir just svaret i (a).

4. Använd induktion. Uppgiftens påstående är uppenbart sant då $n = 1$ så antag att det gäller även för $n = m$ där m är ett godtyckligt valt positivt heltal. Antagandet säger att precis hälften av följderna av längd m innehåller ett udda antal ettor. Därför måste också precis hälften av följderna innehålla ett jämt antal ettor. Nu är ju antalet följder av läng $m + 1$ med ett udda antal ettor dels de som börjar med en etta och följd av en följd mav längd m med ett jämt antal ettor, dels de som börjar med en nolla och följs av en följd av längd m med ett udda antal ettor. Summerar vi dessa två antal får vi $2^{m-1} + 2^{m-1} = 2^m$ och det önskade resultatet följer av induktionsprincipen.

5. $f_1 = 1 = \sqrt{1}$ så om vi under antagandet $f_n = \sqrt{n}$ för ett givet n kan visa att $f_{n+1} = \sqrt{n+1}$ följer det önskade resultatet av induktionsprincipen. Men detta är rättframt:

$$f_{n+1} = \sqrt{1 + f_n^2} = \sqrt{1 + \sqrt{n}^2} = \sqrt{n+1}$$

6. Uppenbarligen är $f_1 = 3$. För att bilda en rekursiv formel, antag att vi känner till f_{n-1} för ett givet n. Av varje godkänd följd av läng $n - 1$ kan man bilda en följd av längd n genom att sätta en av siffrorna 1, 2, eller 3 omedelbart före följden. På detta sätt kan man bilda $3f_{n-1}$ olika följder.
Nu är inte alla dessa godkända, nämligen de följder som man får genom att ta en "längd-$n-1$-följd" som börjar med en tvåa och sätta en etta framför. Antalet sådana är f_{n-2} ty med en tvåa i början

bildar man en godkänd följd genom att sätta vilken godkänd följd som helst efter denna tvåa. Den korrekta rekursiva formeln blir alltså:

$$f_{n-3} - f_{n-1} - f_{n-2}$$

med startvärdet $f_1 = 3$.

7. Relationen är R är ingen ekvivalensrelation, ty den är inte transitiv. Att x är granne med y och y är granne med z garanterar inte att x och z är grannar.
   Inte heller T är en ekvivalensrelation, den är till exempel inte symmetrisk. Om $d_x = 1$ och $d_y = 2$ gäller ju att xTy men inte yTx.
   Relationen S är däremot en ekvivalensrelation. Varje nod är naturligtvis samma komponent som sig själv, och om det finns en väg från x till y så finns det en väg från y till x. Den är transitiv för att om det finns en väg från x till y och en väg från y till z så finns där en väg från x till z via y.