1.

a) Exempelvis $=$, för alla mängder.
b) Exempelvis $<$, för t.ex. $\mathbb{Z}$.
c) Exempelvis $\neq$, — " —.

2.

a) Antag att f är en strikt växande funktion och att $a \neq b$. Då gäller antingen $a > b$ eller $a < b$. Eftersom f är strikt växande gäller i det första fallet $f(a) > f(b)$ och i det andra fallet $f(a) < f(b)$, $f(a) \neq f(b)$ i båda fallen. Vi har visat att så fort $a \neq b$ gäller det att $f(a) \neq f(b)$.

b) Låt ex. $f(x) = 0$, för alla $x \in \mathbb{R}$. (Jupp, den är avtagande också.)

3.

Base case $n = 1$

$VL = \sum_{k=1}^{1} 3 \cdot 1(1-1) + 1 = 3 \cdot 0 + 1 = 1$

$HL = 1^3 = 1$

Antag induktionsantagande sant för $n = p$

$\sum_{k=1}^{p} 3k(k-1) + 1 = p^3$

Visa induktionsantagande sant för $n = p+1$

$$\sum_{k=1}^{p+1} 3k(k-1) + 1 = \sum_{k=1}^{p} 3k(k-1) + 1 + \sum_{k=p+1}^{p+1} 3k(k-1) + 1 = p^3 + 3(p+1)(p+1-1) + 1 = p^3 + 3p^2 + 3p + 1 = (p+1)^3$$

Den allmänna likheten följer av induktionsprincipen.

4.

Base case $n = 1$

$VL = 1$

$HL = \left(\frac{1+1}{2}\right)^2 = \left(\frac{2}{2}\right)^2 = 1^2 = 1$

Antag induktionsantagande sant för $n = p$

$1 + 3 + 5 + \ldots + p = \left(\frac{p+1}{2}\right)^2$

Visa induktionsantagande sant för $n = p+2$

$$1 + 3 + \ldots + p + (p+2) = \left(\frac{p+1}{2}\right)^2 + p + 2 = \frac{p^2 + 2p + 1 + 4p + 8}{4} = \frac{p^2 + 6p + 9}{4} = \left(\frac{p+3}{2}\right)^2 = \left(\frac{(p+1)+1}{2}\right)^2$$

Den allmänna likheten följer av induktionsprincipen.

5.

Base case $n = 1$

$VL = \sum_{k=1}^{1} \frac{k}{3^k} = \frac{1}{3^1} = \frac{1}{3}$

$HL = \frac{3}{4} - \frac{2 \cdot 1 + 3}{4 \cdot 3^1} = \frac{3}{4} - \frac{5}{12} = \frac{9-5}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$

Antag induktionsantagande sant för n

$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{3^k} = \frac{3}{4} - \frac{2 \cdot n + 3}{4 \cdot 3^n}$

Visa induktionsantagande sant för $n+1$

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{k}{3^k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{3^k} + \sum_{k=n+1}^{n+1} \frac{k}{3^k} = \frac{3}{4} - \frac{2n+3}{4 \cdot 3^n} + \frac{n+1}{3^{(n+1)}} = \frac{3}{4} - \frac{3(2n+3) - 4(n+1)}{4 \cdot 3^{(n+1)}} = \frac{3}{4} - \frac{2n+5}{3^{(n+1)}} = \frac{3}{4} - \frac{2(n+1)+3}{3^{(n+1)}}$$

Den allmänna likheten följer av induktionsprincipen.

6.

$f(x) = x!$

$f(0) = f(1) = 1$

$f(x) = x \cdot f(x-1)$

Ex: $f(3) = 3 \cdot f(2) = 3 \cdot 2 = 6$

$f(2) = 2 \cdot f(1) = 2 \cdot 1 = 2$

7.

$F(0) = 0$

$F(1) = 1$

$F(n) = F(n-1) + F(n-2)$

Fib: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144...

8.

a) $\sum_{k=1}^{7} 5^k = 97\,655$

b) $\frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{27} + \ldots + \frac{64}{2187} = \sum_{n=1}^{7} \frac{2^{n-1}}{3^n}$