Supplemental Instructions

Benjamin Eriksson & Erik Thorsell
beneri@student.chalmers.se & erithor@student.chalmers.se

Repetition

Ett plan går genom punkterna $A = (1, 1, -2)$, $B = (-1, 5, 2)$ och $C = (3, 0, 2)$. Bestäm planets ekvation.

Matriser

1.

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 5 & -7 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ -2 & 8 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 7 & 1 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 5 & 7 & 3 \\ 4 & -6 & 9 \end{bmatrix}^T$

2.

a) Beräkna determinanten.

$$\begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

b) Vad kan sägas om vinkeln mellan vektorerna $u = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ utifrån determinanten?

3.

a) $\begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

b) Beräkna inversen

$$\begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}^{-1}$$

c) $\begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}^{-1}$

d) Bevisa att $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \implies A^{-1} = \frac{1}{det(A)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

Hint: $AA^{-1} = ...$

Linjära avbildningar

4.

Låt

$$D = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 6 & 3 & 7 \\ -3 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \vec{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \vec{v} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

och låt f_D vara matrisavbildningen m a p D. Beräkna

a) $f_D(\vec{u})$

b) $f_D(\vec{v})$

c) $f_D(\vec{u} + \vec{v})$

d) $f_D(2\vec{u})$

5.

Låt f vara en linjär avbildning i planet som uppfyller:

$$f\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 8 \\ 10 \end{pmatrix} \qquad och \qquad f\left(\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Bestäm matrisen A som är sådan att $f = f_A$, dvs matrisavbildningen map A.

Area och Volymförändringar

6.

Låt $P = (1, 2)$, $Q = (3, 4)$, $R = (-1, 6)$.

a) Vad är arean av triangeln $\triangle PQR$?

b) Låt f vara den linjära avbildningen med matrisen:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 2 \end{bmatrix}$$

Vad är arean av bilden $f(\triangle PQR)$, av triangeln $\triangle PQR$?

Affina avbildningar

7.

Bestäm en matris A och en vektor $\mathbf{b}$ så att den affina avbildning f som är spegling av punkterna i rummet i planet som ges av $y = 1$ ges av:

$$f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{b}$$

Lösningar

1

a)

Addera cellvis. $\begin{bmatrix} 1-2 & 2+4 \\ 5+6 & 9+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 6 \\ 11 & 10 \end{bmatrix}$

b)

Subtrahera cellvis. $\begin{bmatrix} 5-5 & -7-5 \\ 4-(-2) & -1-8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -12 \\ 6 & -9 \end{bmatrix}$

c)

Tänk rad gånger kolumn. $\begin{bmatrix} 2*5+5*7 \\ 2*2+3*7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 45 \\ 25 \end{bmatrix}$

d)

$$\begin{bmatrix} 2*5+5*7 & 5*8+5*1 \\ 2*2+3*7 & 2*8+3*1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 45 & 45 \\ 25 & 19 \end{bmatrix}$$

e)

Här byter vi plats på raderna och kolumnerna. $\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 7 & -6 \\ 9 & 9 \end{bmatrix}$

2

a)

$$\begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 7*2-1*4 = 10$$

a)

$Det(A) = 0 \implies \vec{u}$ och $\vec{v}$ är linjärt oberoende. Vilket betyder att vinkeln är skild från 0 och 180.

3

a)

$$\begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

b)

$$\begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{7*5-2*3} \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 7 \end{bmatrix}$$

c)

$AA^{-1} = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

d)

$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{det(A)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{det(A)} \begin{bmatrix} ad-bc & -ab+ab \\ cd-cd & -bc+ad \end{bmatrix} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} ad-bc & -ab+ab \\ cd-cd & -bc+ad \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

4

a) $f_D(\vec{u}) = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 6 & 3 & 7 \\ -3 & 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 30 \\ 1 \end{bmatrix}$

b) $f_D(\vec{v}) = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 6 & 3 & 7 \\ -3 & 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 27 \\ 26 \\ -9 \end{bmatrix}$

c) $f_D(\vec{u} + \vec{v}) = f_D(\vec{u}) + f_D(\vec{v}) = \begin{bmatrix} 32 \\ 56 \\ -8 \end{bmatrix}$

d) $f_D(\vec{2u}) = 2f_D(\vec{u}) = \begin{bmatrix} 10 \\ 60 \\ 2 \end{bmatrix}$

5

Dela upp i enhetsvektorer.

(1) $\quad f\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = 2f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) + f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = 2f_x + f_y = \begin{pmatrix} 8 \\ 10 \end{pmatrix}$

(2) $\quad f\left(\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}\right) = 4f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) + -3f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = 4f_x - 3f_y = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$ Lösning av (1) och (2) ger:

$f_x = \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{16}{5} \end{pmatrix}, \qquad f_y = \begin{pmatrix} 4 \\ \frac{18}{5} \end{pmatrix}$

Vilktet betyder att

$A = \begin{pmatrix} f_x & f_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ \frac{16}{5} & \frac{18}{5} \end{pmatrix}$