Supplemental Instructions

1

a

Multiplicera in $1/2$ och beräkna determinanten.
$Det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 1/2-\lambda & -3/2 \\ -3/2 & 1/2-\lambda \end{vmatrix} = (1/2-\lambda)(1/2-\lambda) - (-3/2)(-3/2) = \lambda^2 - \lambda - 2 = 0$
Detta ger $\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = 2$
$\begin{pmatrix} 1/2-\lambda_1 & -3/2 \\ -3/2 & 1/2-\lambda_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 & -3/2 \\ -3/2 & 3/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
Därav blir $\mathbf{v_1} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ På samma sätt kan vi räkna ut $\mathbf{v_2} = t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

b

Normalisera vektorerna för att få en ON-bas och använd sedan $PDP^{-1} = PDP^t$

$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+2^{1000} & 1-2^{1000} \\ 1-2^{1000} & 1+^{1000} \end{pmatrix}$

2

Multiplicera bara vektorn med basmatrisen.
$F \cdot \mathbf{v}_F = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}$

3

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad M = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & 1/4 & 1/4 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4

Riktningsvektor $\vec{v} = (1,2,3)^t$.
Låt Q vara den punkt på linjen som ligger närmast P. Vi vet då att Q = (3+t, 4+2t, 5+3t) för något t. Vi vet även att

$$\vec{PQ} = \vec{OQ} - \vec{OP} = \begin{bmatrix} 3+t \\ 4+2t \\ 5+3t \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+t \\ 3+2t \\ 5+3t \end{bmatrix}$$

$\vec{PQ}$ och $\vec{v}$ är ortogonala $\Rightarrow 0 = \vec{PQ} \cdot \vec{v} =$ 1+t + 2(3+2t) + 3(5+3t) = 22 + 14t $\Rightarrow t = -\frac{11}{7}$.

Det sökta avståndet är alltså: $\left\|\vec{PQ}\right\| = \left\|\begin{matrix} 1-11/7 \\ 3-22/7 \\ 5-33/7 \end{matrix}\right\| = \left\| \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\| = \frac{1}{7}\sqrt{16+1+4} = \frac{\sqrt{21}}{7}$

5

Matrisen för spegling: $S = \begin{bmatrix} Se_1 & Se_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

Rotation för rotation: $R = \begin{bmatrix} \cos\pi/6 & -\sin\pi/6 \\ \sin\pi/6 & \cos\pi/6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}$

$RS = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{bmatrix}$

6

a)

Totalmatrisen $T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -4 & 0 \\ a & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 3 & -4 & 0 \\ 0 & 7 & -7 & 0 \\ 0 & 2+3a & 1-4a & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 3 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3-a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

För $a \neq 3$ har systemet entydig lösning: $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.
För $a = 3$ har systemet oändligt antal lösningar.

b)

$\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}$ är linjärt beroende omm ekvationssystemet i a) har icke-triviala lösningar; dvs: Precis för $a = 3$.