Supplemental Instructions

1

a) $\int 4x^2 dx = \frac{4x^3}{3} + C$

b) $\int \frac{1}{x}\, dx = ln(x) + C$

c) $\int y'(x)\, dx = \int (3x + sin(x))\, dx = \frac{3x^2}{2} - cos(x) + C$

2

a)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{2x} \Rightarrow \frac{2\frac{dy}{dx}}{y} = \frac{1}{x} \Rightarrow \int \frac{2\frac{dy}{dx}}{y} dx = \int \frac{1}{x} dx \Rightarrow 2log(y) = log(x) + c_1 \Rightarrow y(x) = e^{\frac{c_1}{2}}\sqrt{x}$$

b)

$$\frac{dy}{dx} = x^2y^2 \Rightarrow \frac{\frac{dy}{dx}}{y^2} = x^2 \Rightarrow \int \frac{\frac{dy}{dx}}{y^2} dx = \int x^2 dx \Rightarrow -\frac{1}{y} = \frac{x^3}{3} + c_1 \Rightarrow y(x) = -\frac{3}{x^3 + 3c_1}$$

c)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3y-1}{x} \Rightarrow \frac{\frac{dy}{dx}}{3y-1} = \frac{1}{x} \Rightarrow \int \frac{\frac{dy}{dx}}{3y-1} dx = \int \frac{1}{x} dx \Rightarrow \frac{1}{3}\ln(3y-1) = \ln(x) + c_1 \Rightarrow y(x) = \frac{1}{3}(e^{3c_1}x^3 + 1)$$

3

Hitta den karakteristiska ekvationen och lös sedan ekvationerna.

a) $y'' + 2y' - 15y = 0$
KE: $r^2 + 2r - 15 = 0 \Rightarrow r_1 = 3, r_2 = -5$
Alltså får vi följande form på lösningen:

$$y = c_1e^{r_1x} + c_2r^{r_2x} = c_1e^{3x} + c_2r^{-5x}$$

b) $y'' - 4y' + 13y = 0$
KE: $r^2 - 4r + 13 = 0 \Rightarrow r_1 = 2 + 3i, r_2 = 2 - 3i$
Alltså får vi följande form på lösningen:

$$y = e^{sx}\left[c_1sin(tx) + c_2cos(tx)\right] = e^{2x}\left[c_1sin(3x) + c_2cos(3x)\right]$$

4

Lös $\quad y'' + 4y = e^{2x}$
Vi löser y_h och y_p separat. Vi börjar med y_h.

$$y_h'' + 4y_h = 0 \Rightarrow r^2 + 4 = 0 \Rightarrow r = \pm 2i$$

$$y_h = e^{0x}\big[c_1 sin(2x) + c_2 cos(2x)\big] = \big[c_1 sin(2x) + c_2 cos(2x)\big]$$

Nu vill vi lösa y_p. Här måste vi 'gissa' hur lösningen kan se ut. En bra gissning är $y_p = ae^{2x}$.

$$y'' + 4y' = (2^2)ae^{2x} + 4ae^{2x} = 8ae^{bx} = e^{2x}$$

.
Här ser vi att $a = \frac{1}{8} \Rightarrow y_p = \frac{1}{8}e^{2x}$.

$$y = y_h + y_p = c_1 sin(2x) + c_2 cos(2x) + \frac{1}{8}e^{2x}$$

5

$\frac{dy}{dx} - y = 2xe^x$
Integrerande faktor: e^{-x}

$$e^{-x}y' - e^{-x}y = 2x \Rightarrow (e^{-x}y)' = 2x \Rightarrow e^{-x}y = x^2 + c_1$$

$y(0) = 1 \Rightarrow c_1 = 1$

$y = x^2e^x + e^x$