Supplemental Instructions

1

Separabel
$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$
$ydy = xdx$
$\frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + C$

$y(1) = 2 \Rightarrow 2 = \frac{1}{2} + C \Rightarrow C = \frac{3}{2}$

$y^2 = x^2 + 3$
$y = \sqrt{x^2 + 3}$

2

$y' - y = 2xe^x$
Integrerande faktor: e^{-x}

$e^{-x}y' - e^{-x}y = 2x$
$(e^{-x}y)' = 2x$
$e^{-x}y = x^2 + C$

$y(0) = 1 \Rightarrow C = 1$
$y = x^2e^x + e^x$

3

$y'' + y = x$
Kar. ekv: $r^2 + 1 = 0 \Rightarrow r = \pm i$

Homogenlösning: $y = A * cos(x) + B * sin(x)$
Partikulärlösning: $y = x$, $y'' = 0$

$y = x + A * cos(x) + B * sin(x)$
$y' = 1 - A * sin(x) + B * cos(x)$

$y(0) = y'(0) = 0 \Rightarrow A = 0, 1 - B = 0$

$y = x + sin(x)$

4

$y'' - 3y' + 2y = sin(2x)$
Kar. ekv: $r^2 - 3r + 2 = 0 \Rightarrow r_1 = 2, r_2 = 1$

Homogenlösning: $y = Ae^{2x} + Be^x$
Partikulärlösning:
$y = Acos(2x) + Bsin(2x)$
$y' = -2Asin(2x) + 2Bcos(2x)$
$y'' = -4Acos(2x) - 4Bsin(2x)$

$y'' - 3y' + 2y = cos(2x)(-4A - 6B + 2A) + sin(2x)(-4B + 6A + 2B)$

$$\begin{cases} -2A - 6B = 0 \\ -2B + 6A = 1 \end{cases}$$

$A = -3B$
$-B - 9B = \frac{1}{2}$
$B = -\frac{1}{20}$
$A = \frac{3}{20}$

Lösning:
$y = \frac{3}{20}cos(2x) - \frac{1}{20}sin(2x) + Ae^{2x} + Be^x$
$y' = -\frac{3}{10}sin(2x) - \frac{1}{10}cos(2x) + 2Ae^{2x} + Be^x$

$y(0) = y'(0) \Rightarrow$
$\frac{3}{20} + A + B = 0$
$-\frac{1}{10} + 2A + B = 0$
$A = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$
$B = -\frac{8}{20} = -\frac{2}{5}$

Svar: $y = \frac{3}{20}cos(2x) - \frac{1}{20}sin(2x) + \frac{1}{4}e^{2x} - \frac{2}{5}e^x$

5

Skivformeln ger:
$\int_0^2 \pi(e^x\sqrt{x})^2 dx =$
$\pi \int_0^2 x * e^{2x} dx =$
[partiell integration]
$\pi[\frac{x*e^{2x}}{2}]_0^2 - \pi \int_0^2 \frac{e^{2x}}{2} dx =$
$\pi(e^4 - 0 - \frac{e^4}{4+}\frac{1}{4}) =$
$\pi(\frac{1}{4} + \frac{3e^4}{4})$

6

Om vi vrider $8 - 6i$ $90°$ får vi $i(8 - 6i) = 8i + 6 = 2(3 + 4i)$ vilket är parallellt med $(3 + 4i)$.

Alternativt kan vi använda omvändningen av Pythagoras sats:
Hypotenusan$^2 = |8 - 6i - (3 + 4i)|^2 = |5 - 10i|^2 = 125 =$
$(64 + 36) + (9 + 16) = |8 - 6i|^2 + |3 + 4i|^2$

7

Om $v(t)$ är hastigheten har vi $v' = -k\sqrt(v)$, $v(0) = v_0$.
$\frac{dv}{\sqrt{v}} = -kdt$
$2\sqrt{v} = -kt + C$

$t = 0$ ger $C = 2\sqrt{v_0}$
$2\sqrt{v} = 2\sqrt{v_0} - kt = 0$
för $t = \frac{2\sqrt{v_0}}{k}$

8

Eulers metod är: $y_{k+1} - y_k = h({x_k}^2 + {y_k}^2)$

$y(0) = 0$
$y(\frac{1}{2}) = 0 + \frac{1}{2}(0^2 + 0^2) = 0$
$y(1) = 0 + \frac{1}{2}({\frac{1}{2}}^2 + 0^2) = \frac{1}{8}$

Svar: $0, 0, \frac{1}{8}$

9

$y^2 = 1 + \int_1^x y^3 dt$
Tricket här är analysens andra fundamentalsats: $\frac{d}{dx}\int_c^x f(t)dt = f(x)$

Derivera båda sidorna: $2y(x)y' = y(x)^3$
Nu behöver vi separera: $2y(x)\frac{dy}{dx} = y(x)^3$
$\frac{1}{y(x)^2}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}$
$\frac{1}{y(x)^2}\,dy = \frac{1}{2}\,dx$
$-\frac{1}{y} = \frac{x}{2} + c$
$\frac{1}{y} = -\frac{x+c}{2}$
$y = -\frac{2}{x+c}$

C kan vi beräkna från orginalekvationen. Vi väljer något x så att integralen blir enkel. I det här fallet passar x=1 bra.
$(-\frac{2}{1+c})^2 = 1 + \int_1^1 y^3 dt$

$\frac{4}{(1+c)^2} = 1 + 0$
Vi ser här att c=1 uppfyller kravet.
$y = -\frac{2}{x+1}$