Supplemental Instructions

Repetition

a) Skalärprodukten är störst då vektorerna pekar i samma riktning.

b) Vektorprodukten är störst då vektorerna är ortogonala.

c) Kvadratisk och nollskild determinant.

d) Determinanten är lika med 0.

e) $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$

f) $f_A(c\vec{u} + d\vec{v}) = cf_A(\vec{u}) + df_A(\vec{v})$

1

Genom att beräkna determinanten av matrisen med de tre vektorerna som rader ser vi att denna är nollskiljd. Detta är fallet **om och endast om** vektorerna är linjärt oberoende.

2

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & 5 & -6 \\ 0 & -2 & -1 & 2 & -2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & 5 & -6 \\ 0 & 0 & -3 & -3 & 4 \end{bmatrix} \to$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{-5}{2} & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{-4}{3} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{-5}{2} & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{-4}{3} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-3}{2} & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{-4}{3} \end{bmatrix}$$

Från detta får vi en lösning med två fria parametrar och alltså geometrisk ett plan i $\mathbb{R}^5$. En parametrisering av planet ges av:

$$\mathbf{x} = s \begin{bmatrix} -1 \\ 3/2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ -5/3 \\ 4/3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

3

Vi kan skriva avbildningen som $f(x) = t_u \circ S \circ t_{-u} = t_u(S(t_{-u}))$, där S är den linjära speglingsmatrisen för $y = 3x$ och u vår förskjutning från origo. I det här fallet är allt flyttat upp två steg och därför är $u = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$
S vet vi är $\frac{1}{10}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$. Så nu stoppar vi in allt i formeln.

$$f(x) = t_u(S(t_{-u})) = t_u(S(x-u)) = t_u(Sx - Su) = Sx - Su + u$$

Här ser vi att $A = S$ och $\mathbf{b} = -Su + u$.

$$\mathbf{b} = -Su + u = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Svar: $A = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$, $\quad \mathbf{b} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

4

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -2 & -4 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2/3 & -1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & -3 & -2 & -4 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1/3 & -2/3 & 2/3 \\ 0 & 1 & 0 & -2/3 & -1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 2/3 & 4/3 & -1/3 \end{bmatrix}$$

WOHO!

5

Tanken är att skriva matrisen på övertriangulär form för att sedan multiplicera diagonalen.
R_i beteckna rad i.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 8 & -1 & 2 \\ 4 & -4 & 0 & 3 \\ 8 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$R_1 * (-2) + R_2 \rightarrow R_2, \quad R_1 * (-4) + R_3 \rightarrow R_3, \quad R_4 * (-8) + R_4 \rightarrow R_4$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & -1 & 0 \\ 0 & -8 & 0 & -1 \\ 0 & -6 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

$R_2 * (8/6) + R_3 \rightarrow R_3, \quad R_2 * (1) + R_4 \rightarrow R_4$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4/3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

$1 \cdot 6 \cdot -4/3 \cdot -4 = 32$

6

$$det\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 6 \end{vmatrix} = -16$$

$$det\begin{vmatrix} 3 & -2 & 8 \\ 7 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 246$$

Det finns invers till matriserna, ty determinanten $\neq 0$.