Supplemental Instructions

1

Beräkna

$$det \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 5 \\ 3 & 7 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} = 1 * det \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = 1 * (4-5) = -1$$

2

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/6 & 1/2 & 1/6 \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & -1/3 \\ -1/6 & 1/2 & 1/6 \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5/6 & 1/2 & 1/6 \\ 1/3 & 0 & -1/3 \\ -1/6 & 1/2 & 1/6 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/6 & 1/2 & 7/6 \\ 1/3 & 0 & -1/3 \\ -1/6 & 1/2 & -1/6 \end{bmatrix}$$

3

$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \implies det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 0 & 5-\lambda \end{bmatrix} = 0$

$\lambda_1 = 2$ och $\lambda_2 = 5$.

$\lambda_1 \implies \begin{bmatrix} 2-2 & 3 \\ 0 & 5-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \implies v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\lambda_2 \implies \begin{bmatrix} 2-5 & 3 \\ 0 & 5-5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \implies v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ Nu har vi alltså

$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \quad P^-1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Till sist: $A^n = PD^nP^-1$

$$\begin{bmatrix} 2^n & 5^n - 2^n \\ 0 & 5^n \end{bmatrix}$$

4

Låt A vara matrisen för rotationen. Då får vi

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Låt sedan B vara matrisen för projektionen. Då får vi

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Den sammansatta, sökta, avbildningen har då matrisen

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

5

a) Matrisen för g m.a.p basen F är

$$A_F = (g(\mathbf{f}_1)_F \; g(\mathbf{f}_2)_F \; g(\mathbf{f}_3)_F) = ((\mathbf{f}_1)_F \; (\mathbf{f}_2)_F \; (-\mathbf{f}_3)_F) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

b) Matrisen för g m.a.p standardbasen är

$$A = FA_FF^{-1} = FA_FF^t = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 2/3 & -2/3 & -1/3 \\ -2/3 & -1/3 & -2/3 \\ -1/3 & -2/3 & 2/3 \end{bmatrix}$$

6

Planets normal är $n = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ Välj en godtycklig punkt i planet $P_o = (7, 0, 0)$.

$$(\vec{P_oP}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Det sökta avståndet är

$$d = \left|\left|(\vec{P_oP})_L\right|\right| = \left|\left|\frac{(\vec{P_oP}) \cdot n}{||n||^2} n\right|\right| = \frac{\left|(\vec{P_oP}) \cdot n\right|}{||n||} = \frac{\left|\begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}\right|}{\left|\left|\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}\right|\right|} = \frac{|-5-6-3|}{\sqrt{1+4+9}} = \frac{14}{\sqrt{14}} = \sqrt{14}$$