1.

a)

p	q	¬(p ∧ q)	⇔	¬p ∨ ¬q
0	0	1 0	✓	1
0	1	1 0	✓	1
1	0	1 0	✓	1
1	1	0 1	✓	0

aka De Morgan

b)

p	q	p → q	⇔	q → p
F	F	1	✓	1
F	S	1	×	0
S	F	0	×	1
S	S	1	✓	1

c)

p	q	r	(p → q)	∧	(q → r)	⇔	p → r
F	F	F	S	S	S	✓	S
F	F	S	S	S	S	✓	S
F	S	F	S	F	F	×	S
F	S	S	S	S	S	✓	S
S	F	F	F	F	S	✓	F
S	F	S	F	F	S	×	S
S	S	F	S	F	F	✓	F
S	S	S	S	S	S	✓	S

2.

$f: [0,1] \longrightarrow B$

$f(x) = \sqrt{1-x^2}$

a) $y = f(x) = \sqrt{1-x^2}$

Eftersom $x: [0,1]$ kan y anta värden på intervallet $[0,1]$.

$B: [0,1]$

b) $\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-y^2} \iff x^2 = y^2$

Eftersom endast x, y i intervallet $[0,1]$ (alltså icke-negativa) är aktuella gäller det att $x = y$.

Inversen fås av att lösa: $y = \sqrt{1-x^2}$

$y^2 = 1-x^2$

$x^2 = 1-y^2$

$x = \sqrt{1-y^2}$

$f^{-1}(y) = \sqrt{1-y^2}$

3.

Emil = $P: 29x_p + 37y_p = 533$

Emilia = $L: 29x_L + 37y_L = 491$

$\text{sgd}(29,37) = 1$

$37 = 1 \cdot 29 + 8$

$29 = 3 \cdot 8 + 5$

$8 = 1 \cdot 5 + 3$

$5 = 1 \cdot 3 + 2$

$3 = 1 \cdot 2 + 1$

<u>Bezout</u>

$1 = 3 - 1 \cdot 2 = 3 - 1(5-3) = 2 \cdot 3 - 1 \cdot 5 = 2(8-5) - 1 \cdot 5 = 2 \cdot 8 - 3 \cdot 5 =$
$2 \cdot 8 - 3(29 - 3 \cdot 8) = 11 \cdot 8 - 3 \cdot 29 = 11(37-29) - 3 \cdot 29 =$
$-14 \cdot 29 + 11 \cdot 37 \Rightarrow (x, y) = (-14, 11)$

$P: 533 = -14\cdot 29\cdot 533 + 11\cdot 37\cdot 533 + n\cdot 29\cdot 37 - n\cdot 29\cdot 37 = 29(-14\cdot 533 + 37n) + 37(11\cdot 533 - 29n)$

Test: $n=0: 29(-14\cdot 533) + 37(11\cdot 533) = 533$ $\quad (x_P, y_P) = (-7462 + 37n, 5863 - 29n)$

$n=1: 29(-14\cdot 533 + 37) + 37(11\cdot 533 - 29) = 533$

$n=4: 533$

$L: 491 = -14\cdot 29\cdot 491 + 11\cdot 37\cdot 491 + n\cdot 29\cdot 37 - n\cdot 29\cdot 37 = 29(-14\cdot 491 + 37n) + 37(11\cdot 491 - 29n)$

Test: $n=0: 491$ $\quad (x_L, y_L) = (-6874 + 37n, 5401 - 29n)$

$n=1: 491$

$n=4: 491$

Finn rätt n

$$P: \left.\begin{array}{l} -7462 + 37n > 0 \Rightarrow 37n > 7462 \\ 5863 - 29n > 0 \Rightarrow 5863 > 29n \end{array}\right\} \frac{7462}{37} < n < \frac{5863}{29} \iff 201.676 < n < 202.172$$

$(x_p, y_p) = (-7462 + 37\cdot 202, 5863 - 29\cdot 202) = (12, 5)$

$$L: \left.\begin{array}{l} -6874 + 37n > 0 \\ 5401 - 29n > 0 \end{array}\right\} 185.784 < n < 186.241$$

$(x_L, y_L) = (-6874 + 37\cdot 186, 5401 - 29\cdot 186) = (8, 7)$

$y_L > y_P$: Emilia köpte fler!

4.

$45x + 50y = 25$

$sgd(45, 50) = 5$ $\quad 50 = 1\cdot 45 + 5$

$45 = 9\cdot 5 + 0$

$9x + 10y = 5$

$sgd(9, 10) = 1$ $\quad 10 = 1\cdot 9 + 1$ $\quad$ Bezout: $1 = 1\cdot 10 - 1\cdot 9$

5

$5 = 1\cdot 10\cdot 5 - 1\cdot 9\cdot 5 + n\cdot 9\cdot 10 - n\cdot 9\cdot 10 = 9(-1\cdot 5 + 10n) + 10(1\cdot 5 - 9n) = 9(-5 + 10n) + 10(5 - 9n)$

$(x, y) = (-5 + 10n, 5 - 9n)$

5.

$8^{20} + 13^{41}$ i $\mathbb{Z}_{25}$

$\Phi(25) = \Phi(5^2) = 5^2 - 5^1 = 5^1(5-1) = 20 \Rightarrow a^{20} = 1$ i $\mathbb{Z}_{25}$ för alla a med $sgd(a, 25) = 1$.

$sgd(8, 25) = 1$

$sgd(13, 25) = 1$

$8^{20} + 13^{41} = 8^{20} + 13\cdot 13^{40} = 8^{20} + 13\cdot (13^{20})^2 = 1 + 13\cdot 1^2 = 14$ i $\mathbb{Z}_{25}$

6.

Vi ska lösa följande system: $\begin{cases} x \equiv 3 \mod 7 & ① \\ x \equiv 7 \mod 10 & ② \\ x \equiv 10 \mod 13 & ③ \end{cases}$ a_1, m_1 / a_2, m_2 / a_3, m_3

Kolla lösbarhet

$7 = 2 \cdot 3 + 1$
$sgd(7,3) = 1$

$10 = 7 \cdot 1 + 3$
$7 = 2 \cdot 3 + 1$
$sgd(10,7) = 1$

$13 = 1 \cdot 10 + 3$
$10 = 3 \cdot 3 + 1$
$sgd(13,10) = 1$

$13 = 1 \cdot 7 + 6$
$7 = 6 \cdot 1 + 1$
$sgd(7,13) = 1$

Lös 1 och 2

$1 = 7 - 2 \cdot 3 = 7 - 2(10 - 7) = \overset{u}{3} \cdot 7 - \underset{v}{2} \cdot 10$

$x_0 = 7 \cdot 3 \cdot 7 - 3 \cdot 2 \cdot 10 = 147 - 60 = 87$

Vi får då

$x \equiv 87 \mod 70 = 17 \mod 70$ ④
$x \equiv 10 \mod 13$

Lös 4 & 3

$70 = 5 \cdot 13 + 5$
$13 = 2 \cdot 5 + 3$
$5 = 1 \cdot 3 + 2$
$3 = 1 \cdot 2 + 1$

$1 = 3 - 1 \cdot 2 = 3 - 1(5 - 3) = 2 \cdot 3 - 1 \cdot 5 = 2(13 - 2 \cdot 5) - 1 \cdot 5 = 2 \cdot 13 - 5 \cdot 5 =$
$2 \cdot 13 - 5(70 - 5 \cdot 13) = 27 \cdot 13 - 5 \cdot 70$

$u = 27, \ v = -5$

$x_1 = -10 \cdot 5 \cdot 70 + 17 \cdot 27 \cdot 13 = 2467$

$x_0 = 2467 + 13 \cdot 70 \cdot n = 2467 + 910n$

Vi vet att det ligger 1500~ish mynt på bordet. Väljer vi $n = -1$ får vi: $2467 - 910 = \underline{\underline{1557}}$