ITESO

$\sqrt{x}$

MODELADO Y SIMULACIÓN DEL MOVIMIENTO DE UNA MASA EN UN RESORTE CON AMORTIGUAMIENTO

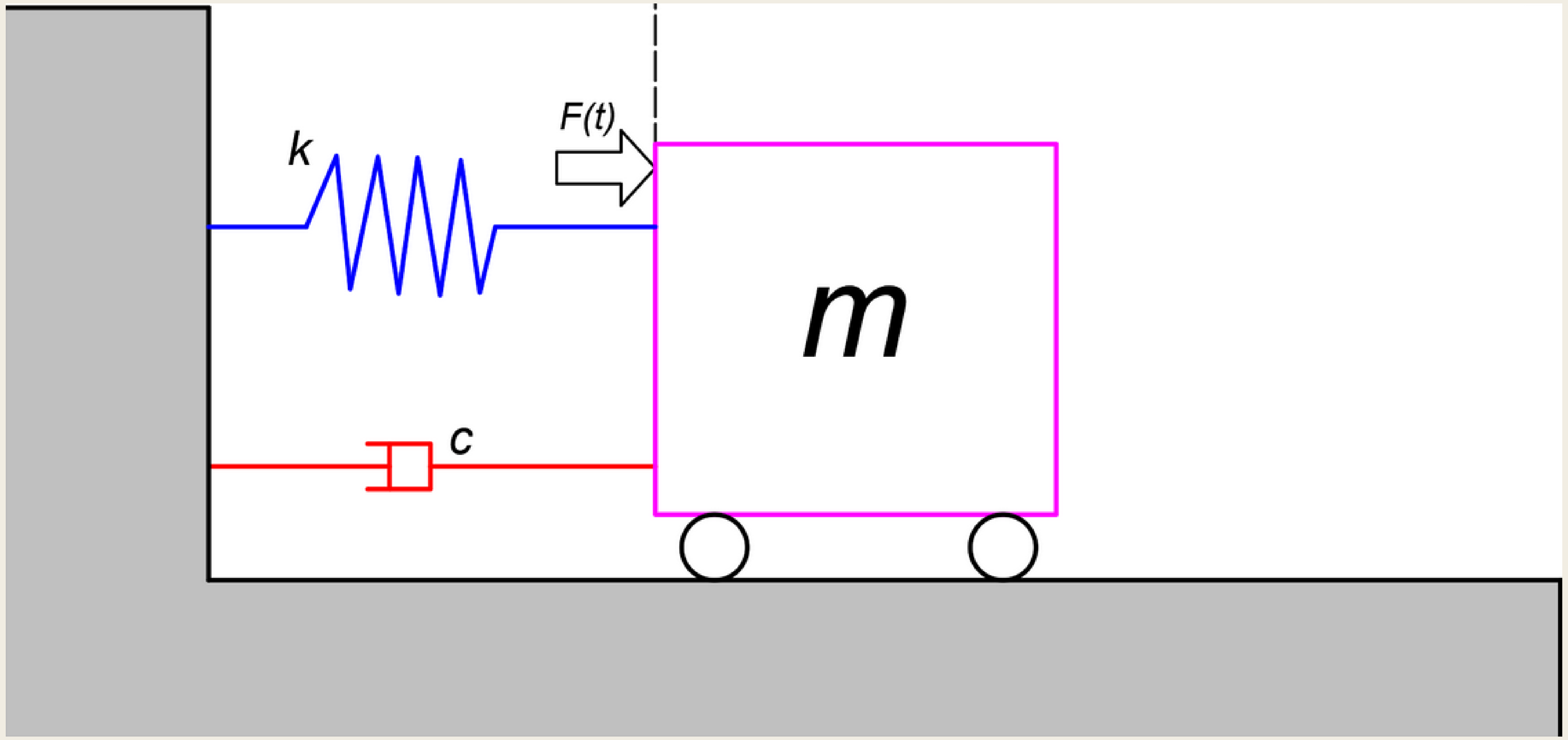
- ISRAEL SANTIAGO
- ERIK VEGA

Objetivos

Objetivo general

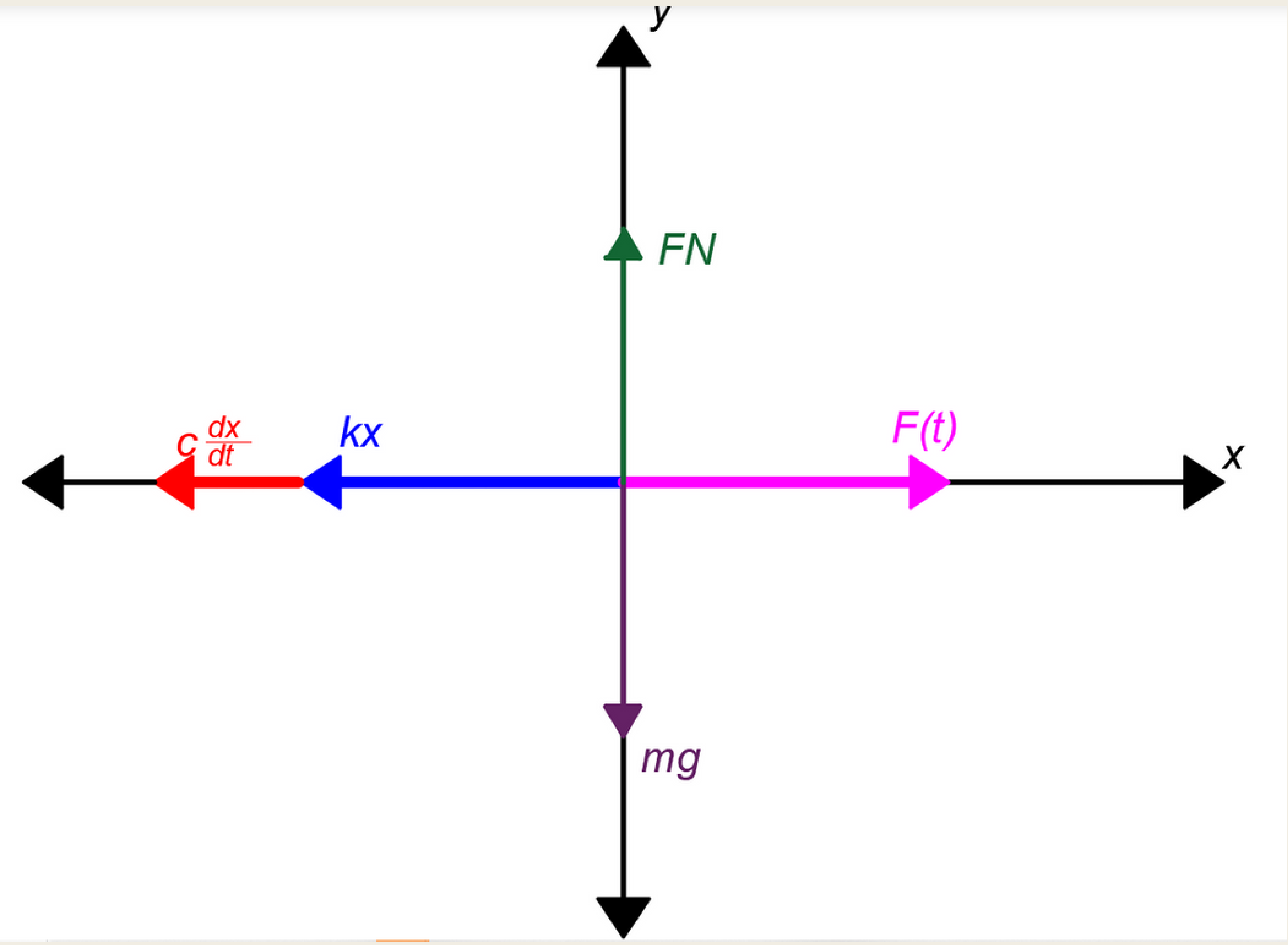
✓ Desarrollar un modelo matemático que describa el movimiento de una masa en un resorte con amortiguamiento y simular dicho movimiento para comprender su comportamiento.

Modelo



El modelo se basa en las siguientes ecuaciones diferenciales que describen el movimiento de una masa (m), unida a un resorte de constante (k) y sometida a un coeficiente de amortiguamiento (c) bajo una fuerza externa $F(t)$, tal como se muestra en la figura:

DIAGRAMA DE CUERPO LIBRE



Ecuaciones diferenciales

Por sumatorias de fuerzas en el eje x segun nos dictan las leyes de Newton tenemos lo siguiente:

$$-c\frac{dx}{dt} - kx + F(t) = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

Acomodando los signos obtenemos la siguiente ecuacion:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + kx = F(t)$$

Simulación

Para el primer caso consideraremos los siguientes valores:

m = 1.0

c = 0.8

k = 10

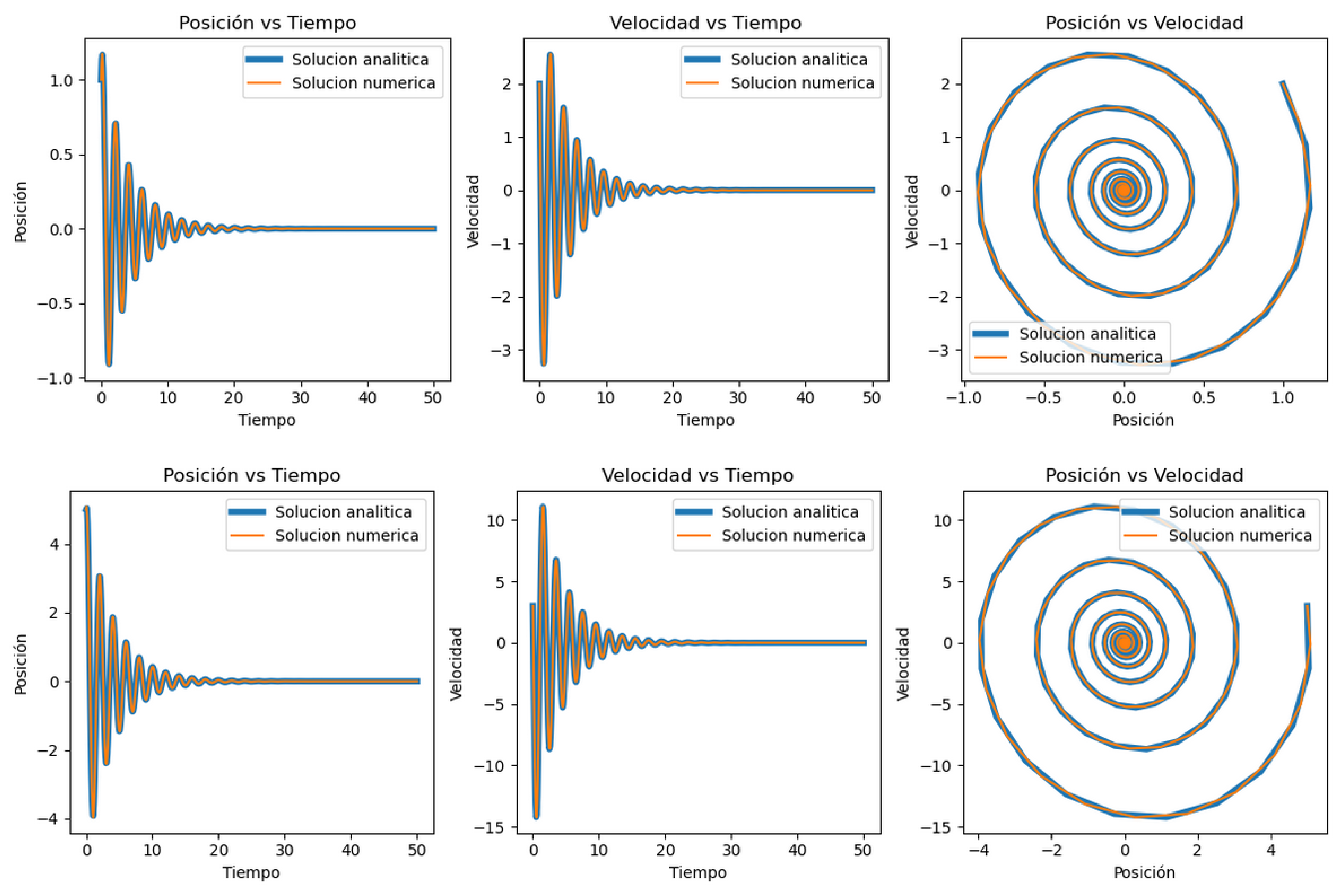
$F(t)$ = 0

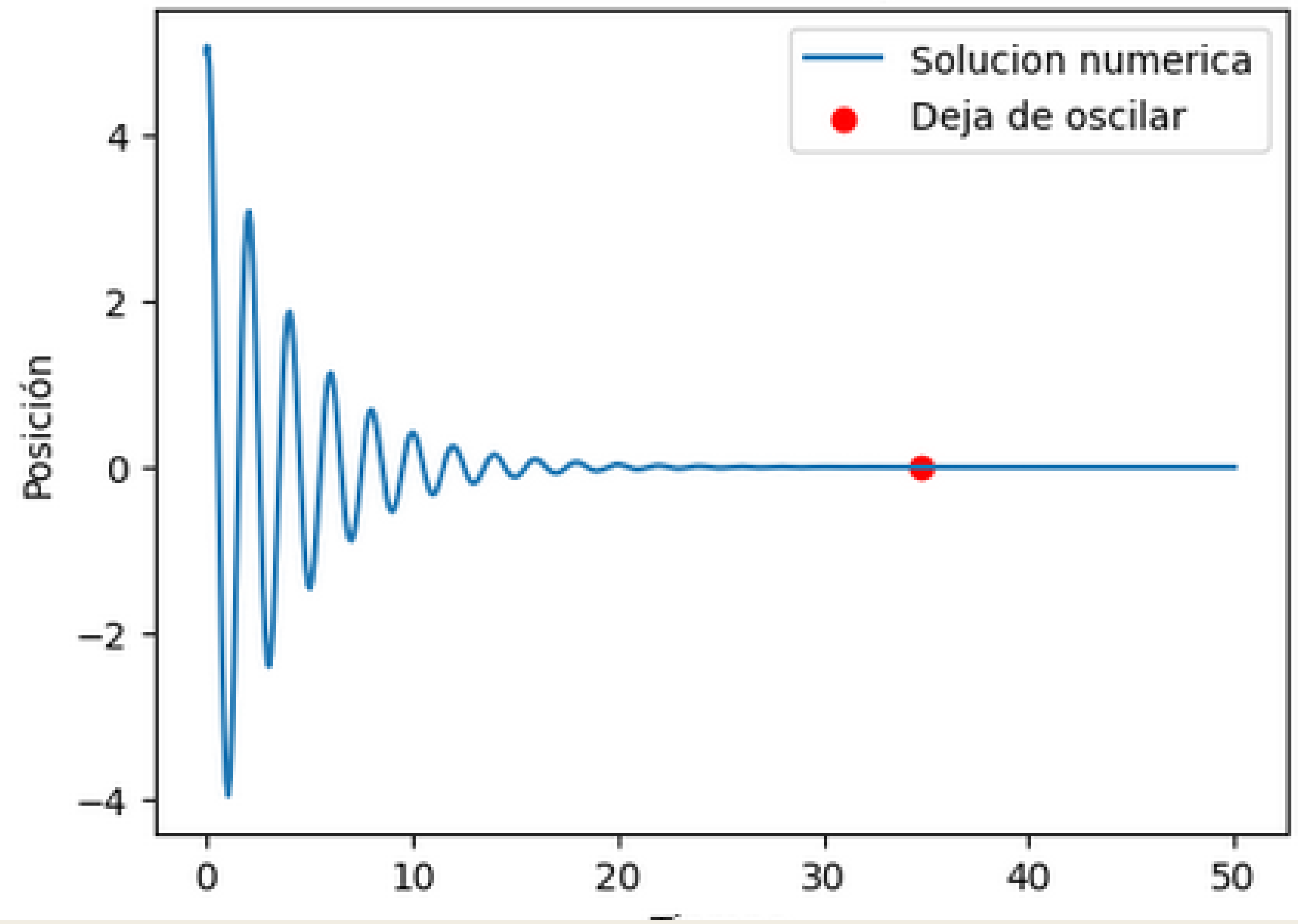
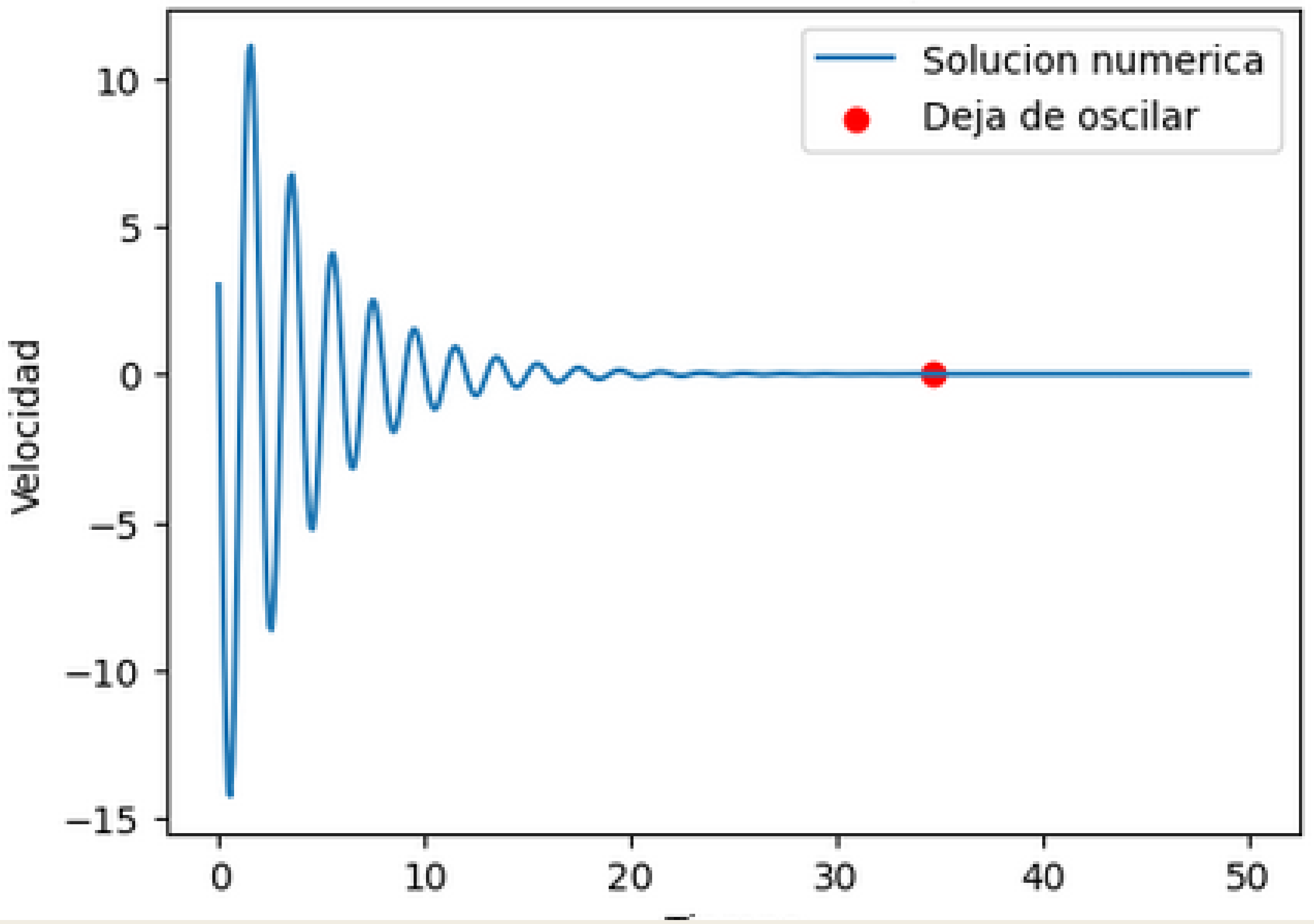
Condiciones iniciales:

x_0 = 1,5

v_0 = 2,3

- m es la masa.
- x es la posición de la masa.
- t es el tiempo.
- c es el coeficiente de amortiguamiento.
- k es la constante del resorte.
- $F(t)$ es la fuerza externa en función del tiempo.

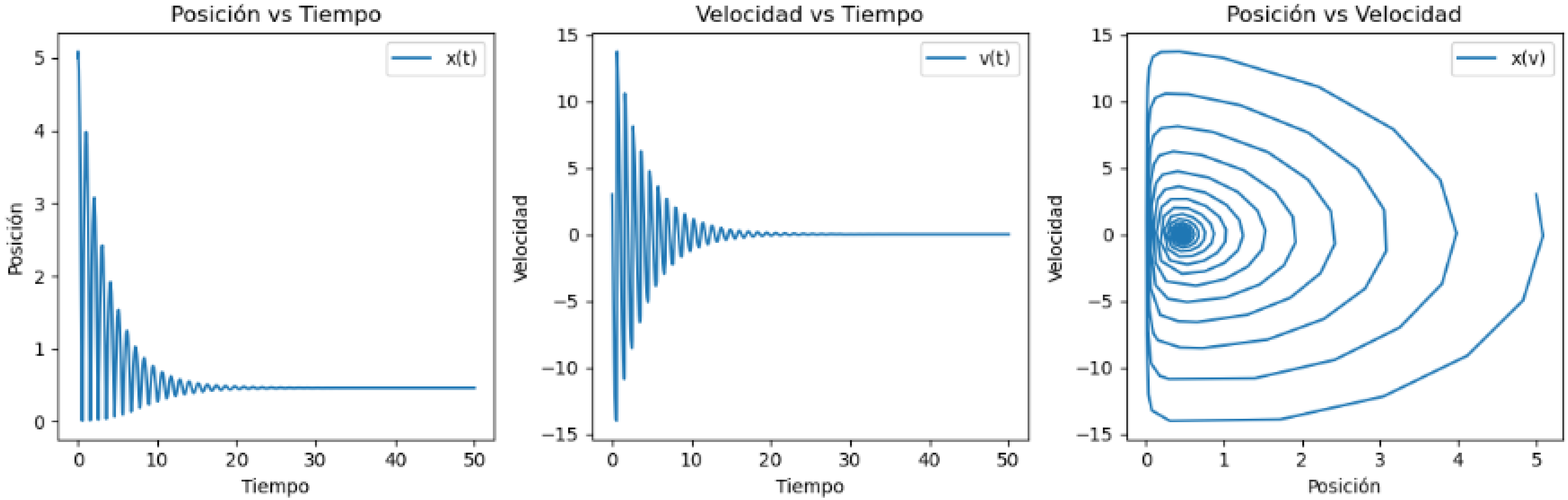

Posición vs Tiempo
Solucion analitica
Solucion numerica
Posición
Tiempo
Velocidad vs Tiempo
Solucion analitica
Solucion numerica
Velocidad
Tiempo
Posición vs Velocidad
Solucion analitica
Solucion numerica
Velocidad
Posición
Posición vs Tiempo
Solucion analitica
Solucion numerica
Posición
Tiempo
Velocidad vs Tiempo
Solucion analitica
Solucion numerica
Velocidad
Tiempo
Posición vs Velocidad
Solucion analitica
Solucion numerica
Velocidad
Posición


Solucion numerica
Deja de oscilar
Posición
4
2
0
−2
−4
0
10
20
30
40
50

Solucion numerica
Deja de oscilar
Velocidad
10
5
0
−5
−10
−15
0
10
20
30
40
50

Simulación

Ahora agregaremos una fuerza externa $F(t)$= 1/x^2 , de esta manera el sistema ya no cuenta con una solucion analitica, para este caso usaremos las siguientes condiciones iniciales:

- x0=5
- v0=3


Posición vs Tiempo
x(t)
Posición
Tiempo
Velocidad vs Tiempo
v(t)
Velocidad
Tiempo
Posición vs Velocidad
x(v)
Velocidad
Posición

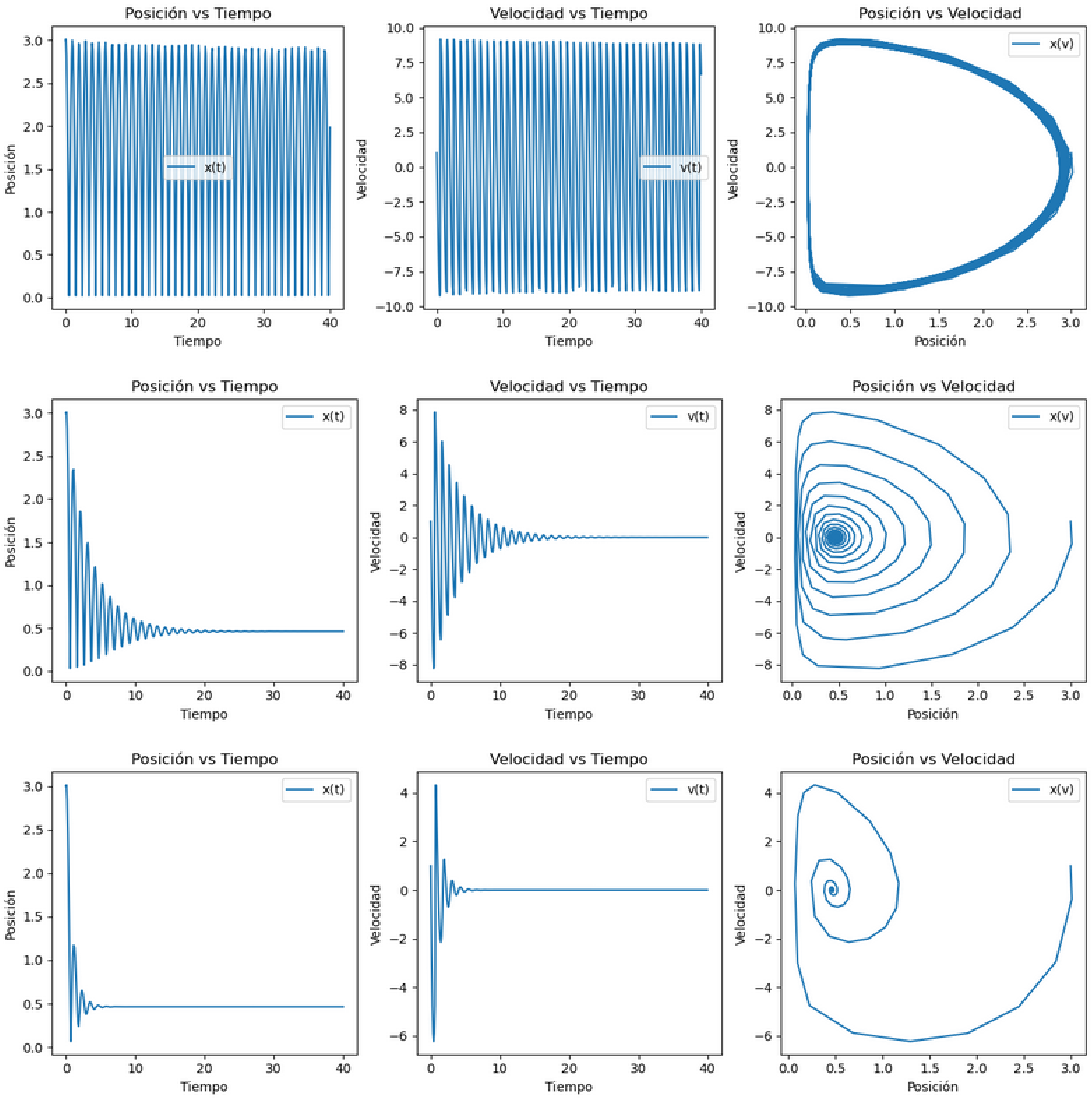
Simulación

Para finalizar observaremos el comportamiento del sistema al variar las constates de amortiguamiento, resorte y la masa, con unas condiciones iniciales de Vo=0 , Xo=3 en un intervalo de 40 segundos con las siguientes constantes como base:

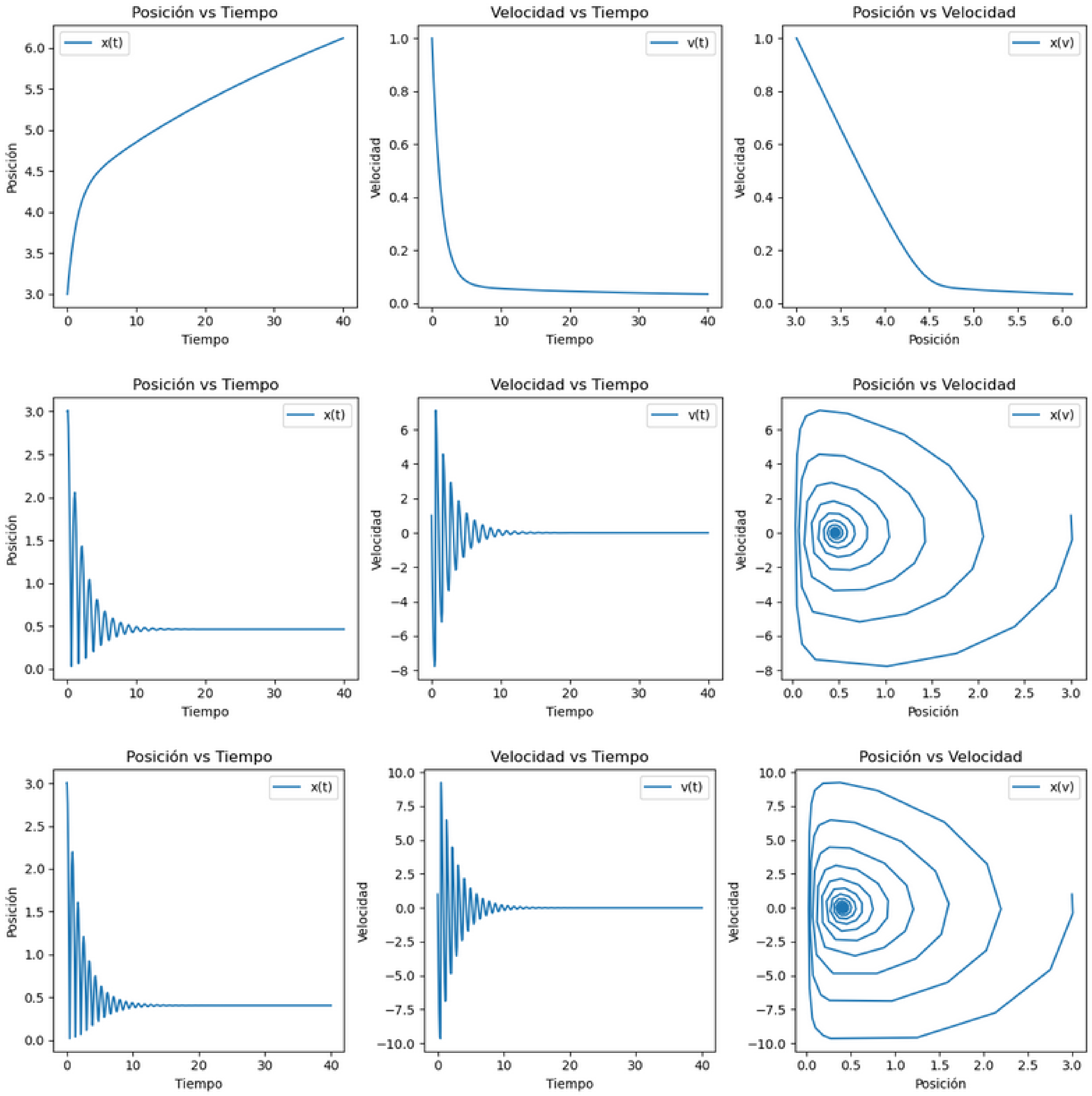
- m=1.0
- c=0.8
- k=10
- $F(t)$=0

resultado de variar la constante de amortiguamiento

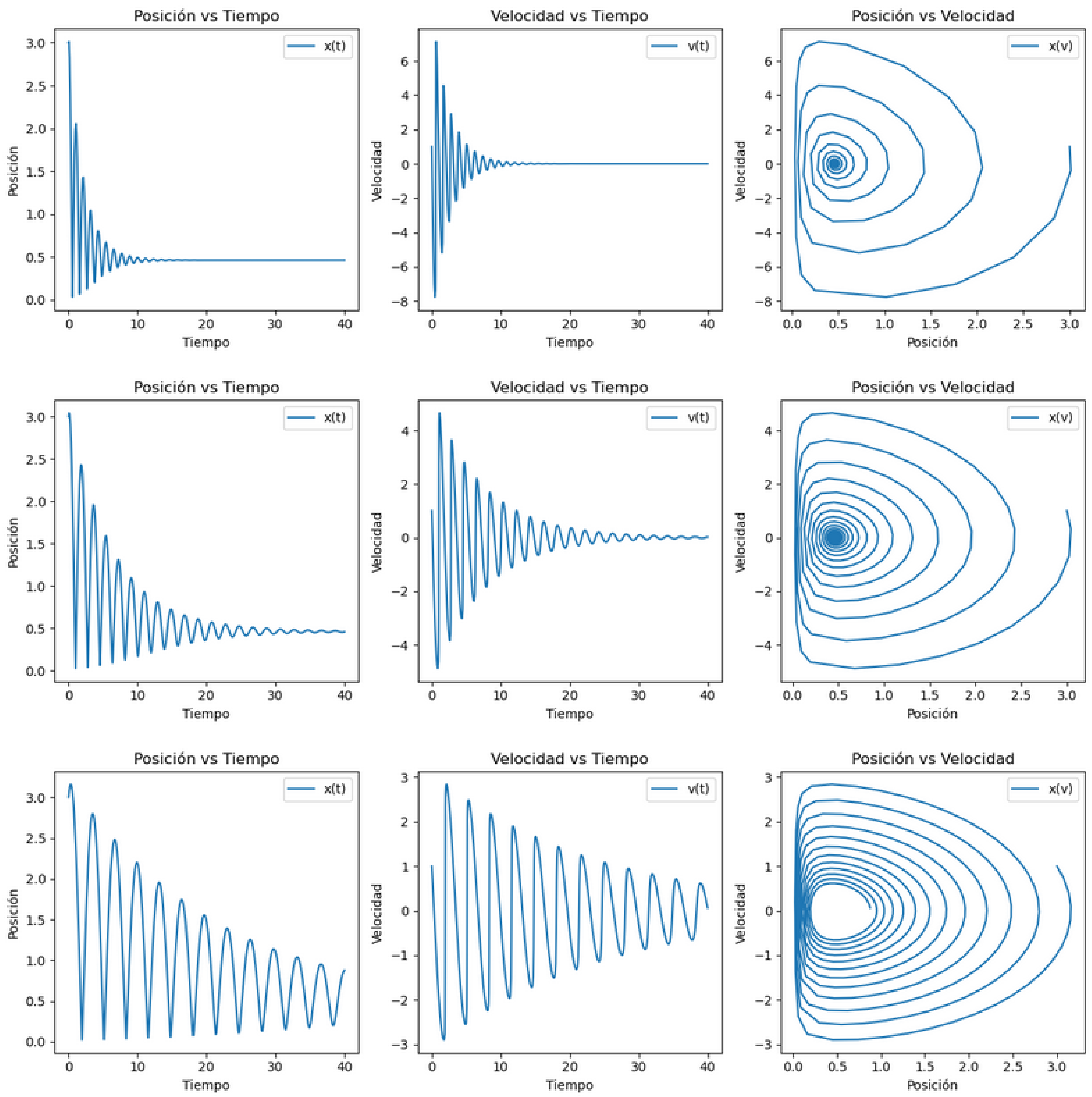
- [0, 0.5, 2]


Posición vs Tiempo
x(t)
Posición
Tiempo
Velocidad vs Tiempo
v(t)
Velocidad
Tiempo
Posición vs Velocidad
x(v)
Velocidad
Posición
Posición vs Tiempo
x(t)
Posición
Tiempo
Velocidad vs Tiempo
v(t)
Velocidad
Tiempo
Posición vs Velocidad
x(v)
Velocidad
Posición
Posición vs Tiempo
x(t)
Posición
Tiempo
Velocidad vs Tiempo
v(t)
Velocidad
Tiempo
Posición vs Velocidad
x(v)
Velocidad
Posición

Resultado de variar la constante del resorte k [0, 10, 15]



Resultado de variar la masa m [1, 3, 10]



Conclusión

En conclusion, se logró desarrollar un modelo matemático basado en ecuaciones diferenciales, resolviendo numéricamente el sistema masa-resorte con amortiguamiento. Se analizaron varios conjuntos de condiciones iniciales y se compararon las soluciones numéricas obtenidas con el programa con soluciones analíticas obtenidas de Wolfram Alpha y se identificó el punto en el cual deja de oscilar. Finalmente las gráficas mostraron una buena aproximacion con las soluciones analiticas

Tambien se exploró el sistema ante una fuerza externa variable para mostrar los casos en los que es conveniente utilizar este tipo de simulacion. El proyecto proporciono una comprensión clara del comportamiento del sistema

Referencias

García, J. (2023-11-20). Las ecuaciones diferenciales y sus aplicaciones en la ingeniería. Recuperado de https://campus.usal.es/~modelosmatematicos/ModelosMatematicos/index_files/Trabajo%20Ec%20Diferenciales%20en%20Ingenieria.pdf

Señales y Sistemas. (2018, 15 enero). Masa-resorte-amortiguador: ecuación diferencial y función de transferencia [Vídeo]. YouTube. https://www.youtube.com/watch?v=O9yIRbC7CoE