Mathematik für Informatiker 1

Blatt 2 [1]

Prof. Dr. Theo de Jong
Klaus Mattis

Übung 2.1

Seien A, B und C drei Mengen. Beweisen Sie:

- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Man nehme nun an, dass A und B Teilmengen einer Obermenge X seien. Beweisen Sie:

- $X \setminus (A \cup B) = (X \setminus A) \cap (X \setminus B)$
- $X \setminus (A \cap B) = (X \setminus A) \cup (X \setminus B)$

Hinweis: Um eine Gleichheit von Mengen $Y = Z$ zu beweisen, müssen sie nacheinander die beiden Inklusionen $Y \subset Z$ und $Z \subset Y$ beweisen.

Übung 2.2

Wir betrachten die Abbildung $f\colon A \to B, x \mapsto x^2$. Betrachten Sie folgende Fälle und beweisen Sie die Aussage P und Q:

A	B	P	Q
$[-1,1]$	$[-1,1]$	f ist nicht injektive	f ist nicht surjektive
$[0,1]$	$[-1,1]$	f ist injektive	f ist nicht surjektive
$[-1,1]$	$[0,1]$	f ist nicht injektive	f ist surjektive
$[0,1]$	$[0,1]$	f ist injektive	f ist surjektive

Hinweis: Um zu beweisen, dass eine Funktion nicht injektive (oder nicht surjektiv) ist, reicht es, jeweils ein *Gegenbeispiel anzugeben!*

Übung 2.3

Seien $f\colon A \to B$ und $g\colon B \to C$ zwei Abbildungen zwischen den nichtleeren Mengen A, B und C. Beweisen Sie:

- Ist $g \circ f$ injektiv, so ist f injektiv.
- Ist $g \circ f$ surjectiv, so ist g surjektiv.
- Sind f und g injektiv, so ist $g \circ f$ injektiv.

[1] Geben Sie das Übungsblatt in der Woche vom 4.11. bis 8.11. in ihrem Tutorium ab

- Sind f und g surjektiv, so ist $g \circ f$ surjektiv.

Finden Sie zudem ein Gegenbeispiel für folgende Aussagen:

- Ist g surjektive und f injektiv, so ist $g \circ f$ injektive.
- Ist g surjektive und f injektiv, so ist $g \circ f$ surjektiv.

Übung 2.4

Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion folgende Formeln:

- $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ für all $n \in \mathbb{N}_+$.
- $\sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 1$ für all $n \in \mathbb{N}_+$.
- $\sum_{k=0}^{n} 3^k = \frac{3^{n+1}-1}{2}$ für all $n \in \mathbb{N}_+$.

Hinweis: Ihr Beweis sollte folgende Struktur haben:

1. *Zeigen Sie zunächst den* Induktionsanfang*, das heißt, zeigen Sie die Aussage für* $n = 1$*.*
2. *Nehmen Sie nun an, dass Sie die Aussage bereits für ein* $n \in \mathbb{N}_+$ *gezeigt haben.*
3. *Zeigen Sie nun im* Induktionsschritt*, dass die Aussage auch für* $n + 1$ *gilt, unter der Annahme, dass die Aussage für* n *gilt.*