

EJEMPLO 1

Ejemplo Sea $f(x)$ una función definida por

$$f(x) = \begin{cases} cx^2 & 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

1. Calcule el valor de la constante C para que $f(x)$ sea la función de densidad de la variable aleatoria X .

$$\int_0^2 cx^2 dx = 1 \rightarrow \left. \frac{cx^3}{3} \right|_0^2 = \frac{0}{3} + \frac{8}{3} = \frac{8}{3}$$

$$\frac{8}{3}C = 1 \rightarrow C = 1/8/3 = \frac{3}{8}$$

2. Calcule $P[0 < X \leq 1]$

$$\int_0^1 \frac{3}{8}x^2 dx = \frac{3}{8} \left. \frac{x^3}{3} \right|_0^1 = \frac{1}{8}$$

FLUJO VEHICULAR

Problema del flujo vehicular

$$f(x) = \begin{cases} \frac{k}{x^4}, & \text{si } x > 1 \\ 0 & \text{si } x \leq 1 \end{cases}$$

a) Determine el valor de k para la cual $f(x)$ es una función de densidad de probabilidad (f.d.p.).

$$\int_1^{\infty} \frac{k}{x^4} dx = 1 \rightarrow \left. -\frac{k}{3x^3} \right|_1^{\infty} = 0 - \left(-\frac{k}{3}\right) = \frac{k}{3} \rightarrow \frac{k}{3} = 1 \rightarrow k = 3$$

b) ¿Cuál será el valor esperado entre autos? ¿su variancia?

$$E(X) = \int_1^{\infty} x f(x) dx = \int_1^{\infty} x \cdot \frac{3}{x^4} dx = 3 \int_1^{\infty} \frac{1}{x^3} dx \rightarrow \left. -\frac{1}{2x^2} \right|_1^{\infty} = 3 \left(0 - \left(-\frac{1}{2}\right)\right) = \frac{3}{2}$$

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

$$E(X^2) = \int_1^{\infty} x^2 \cdot \frac{3}{x^4} dx = 3 \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = 3 \left. \left(-\frac{1}{x}\right) \right|_1^{\infty} = 3(0 - (-1)) = 3$$

$$\text{Var}(X) = 3 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 3 - \frac{9}{4} = \frac{3}{4}$$

c) ¿Cuál será la probabilidad de que se tarde un auto más de 2 seg? ¿A lo más 2? ¿x segundos o menos?

$$P(X > 2) = \int_2^{\infty} \frac{3}{x^4} dx \rightarrow 3 \left. \left(-\frac{1}{3x^3}\right) \right|_2^{\infty} = 0 - \left(-\frac{1}{8}\right) = \frac{1}{8}$$

$$P(X \leq 2) = 1 - P(X > 2) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

$P(X \leq x)$

$$\int_1^x \frac{3}{t^4} dt = 3 \left. \left(-\frac{1}{3t^3}\right) \right|_1^x = -\frac{1}{x^3} - \left(-\frac{1}{1}\right) = -\frac{1}{x^3} + 1 = 1 - \frac{1}{x^3}$$