



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
CENTRO TECNOLÓGICO  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

Erika Pequeno dos Santos

**Estratégias de Análise em Regime Permanente para Avaliação de  
Confiabilidade Composta de Sistemas de Energia Elétrica**

Florianópolis  
2019

Erika Pequeno dos Santos

**Estratégias de Análise em Regime Permanente para Avaliação de  
Confiabilidade Composta de Sistemas de Energia Elétrica**

Tese submetida ao Programa de Pós-Graduação  
em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de  
Santa Catarina para a obtenção do título de doutor  
em Engenharia Elétrica.

Orientador: Prof. Mauro Augusto da Rosa, PhD

Florianópolis  
2019

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,  
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Santos, Erika Pequeno dos  
Estratégias de Análise em Regime Permanente para  
Avaliação de Confiabilidade Composta de Sistemas de Energia  
Elétrica / Erika Pequeno dos Santos ; orientador, Mauro  
Augusto da Rosa, 2019.  
172 p.

Tese (doutorado) - Universidade Federal de Santa  
Catarina, Centro Tecnológico, Programa de Pós-Graduação em  
Engenharia Elétrica, Florianópolis, 2019.

Inclui referências.

1. Engenharia Elétrica. 2. Confiabilidade Composta. 3.  
Simulação de Monte Carlo Sequencial. 4. Máximo  
Carregamento. 5. Métodos Tensoriais. I. da Rosa, Mauro  
Augusto. II. Universidade Federal de Santa Catarina.  
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica. III. Título.

Erika Pequeno dos Santos

**Estratégias de Análise em Regime Permanente para Avaliação de  
Confiabilidade Composta de Sistemas de Energia Elétrica**

O presente trabalho em nível de doutorado foi avaliado e aprovado por banca examinadora composta pelos seguintes membros:

Prof. Sérgio Luís Haffner, Dr  
Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Prof. Leonidas Chaves de Resende, Dr  
Universidade Federal de São João Del-Rei

Prof. Roberto de Souza Salgado, PhD  
Universidade Federal de Santa Catarina

Certificamos que esta é a **versão original e final** do trabalho de conclusão que foi julgado adequado para obtenção do título de doutor em Engenharia Elétrica.

---

Prof. Bartolomeu Ferreira Uchoa-Filho,  
PhD  
Coordenador do Programa

---

Prof. Mauro Augusto da Rosa, PhD  
Orientador

Florianópolis, 27 de Setembro de 2019.

Este trabalho é dedicado ao *pequeno príncipe* Rafael  
e à *japonesa portuguesa* Akane.  
Vamos brincar lá fora!

## **AGRADECIMENTOS**

À minha família:

meus filhos Rafael e Akane, por todo o tempo que era deles, e para eles, e que eles disponibilizaram para que eu pudesse concluir este projeto;

meu amigo, companheiro, pai dos meus filhos, e Professor coorientador oficioso Diego Issicaba por todo o seu apoio, pelos seus preciosos conselhos, ideias, contribuições e por toda a sua paciência. Pelas imensas horas, em horário de trabalho (e fora dele!), em que fizemos do tema deste trabalho nosso tema de conversa. Obrigada por estares ao meu lado;

minha mãe e meu pai, Isabel e Messias, por terem acreditado em mim desde o princípio e por todo o apoio e suporte disponibilizados, ainda que estivessem a mais de 8000 km de distância; e à minha restante família portuguesa, o meu irmão, às minhas minhas tias Deolinda e Idalina, e aos restantes, que sei que torceram por mim apesar de não nos termos visto muitas vezes nos últimos anos;

Sr. José Issicaba e à D. Beni Issicaba por todo o apoio, suporte e carinho que deram durante esta caminhada.

Ao meu orientador, o Professor Mauro Augusto da Rosa, por ter aberto a porta para este projeto quando ainda estávamos em Portugal e por todo o apoio e conhecimento que disponibilizou para que eu pudesse chegar aqui. Obrigada também pela sua amizade.

Aos Professores Dr Leonidas Chaves de Resende (UFSJ), Dr Sérgio Luís Haffner (UFRGS) e PhD Roberto de Souza Salgado (UFSC) por terem aceite o convite para participarem como membros da minha banca de defesa de doutorado.

Ao Professor Roberto de Souza Salgado pelas discussões sobre o tema que tivemos e por ter disponibilizado os materiais que tinha disponíveis.

À querida Isabel Uarthe Decker pelos momentos de descontração e de amizade que me proporcionou durante este processo.

Ao meu estimado amigo Leonardo Bremermann pela sua amizade e parceria.

Aos professores do programa de pós-graduação em Engenharia Elétrica da UFSC pela transmissão de conhecimento e à secretaria por todo o suporte prestado.

Aos colegas de curso e laboratório que me acompanharam neste percurso, e aos meus colegas da sala 6, em especial ao Lucas Fritzen Venturini, ao Pedro César Vieira e à Sandy Tondolo Miranda, pelo companheirismo, apoio e momentos de descontração.

À CAPES e ao INESC P&D Brasil pelo apoio financeiro.

A Deus e à Nossa Senhora de Fátima por iluminarem e guiarem o meu caminho.

A todos, o meu muito obrigado!

Erika Pequeno

*We can only see a short distance ahead, but we can see plenty there that needs to be done.*  
(Alan Turing, *Computing machinery and intelligence*, 1950)

## RESUMO

O método de simulação de Monte Carlo sequencial destaca-se como uma ferramenta adequada e flexível para a avaliação de confiabilidade de sistemas elétricos de potência. Esse método pode ser dividido em três estágios principais: seleção de estados, avaliação de estados e estimação de índices. Dentre esses três estágios, o estágio de avaliação de estados é conhecido como aquele que requer maior esforço computacional, principalmente quando um maior rigor é adotado na representação dos sistemas. Neste contexto, esta tese de doutorado tem como objetivo o desenvolvimento de estratégias de análise em regime permanente para a avaliação de confiabilidade composta de sistemas elétricos de potência. Desenvolvem-se metodologias que possibilitam evitar avaliações de estados via fluxo de potência e fluxo de potência ótimo no método de simulação de Monte Carlo sequencial, sem a perda do rigor adotado na representação dos sistemas e buscando manter a exatidão na estimação de índices de confiabilidade. Propõe-se assim uma modelagem do problema de mínimo e máximo carregamento considerando equações de rede linearizadas, com o fim de identificar patamares de carga limite acima e abaixo dos quais estados de sucesso são caracterizados. Essa modelagem é ainda explorada na otimização de parâmetros estocásticos promovida por um método de redução de variância baseado em conceitos de entropia cruzada. Além disso, uma extensão da modelagem supracitada é proposta considerando uma representação não linear para a rede, a aplicação de equações tensoriais para o problema de fluxo de potência, e uma abordagem preditor-corretor para a estimação de fatores de mínimo e máximo carregamento. Resultados numéricos são utilizados para realçar a efetividade das estratégias na redução do número de avaliações de estado necessárias à análise de confiabilidade de sistemas compostos.

**Palavras-chave:** Confiabilidade Composta. Simulação de Monte Carlo Sequencial. Máximo Carregamento. Métodos Tensoriais.



## ABSTRACT

The sequential Monte Carlo simulation method stands out as a suitable and flexible tool for the evaluation of the reliability of electrical power systems. This method can be divided in three main steps: state selection, state evaluation, and index estimation. Among these three stages, the state evaluation stage is recognized as the one that requires a significant part of the computational effort, particularly when major rigor is adopted in the system representation. In this context, this thesis aims to develop steady state analysis strategies to be applied in the evaluation of power system reliability. Methodologies are developed to avoid state evaluations via power flow and optimal power flow in the sequential Monte Carlo simulation method, without losing the rigor adopted in the system representation and targeting the maintenance of the accuracy in the index estimation. Therefore, a minimum and maximum loadability problem is modelled, considering linearized network equations, aiming at identifying loading thresholds above and below which success states are characterized. This modeling is further exploited in the optimization of stochastic parameters utilized in a variance reduction method based on cross entropy concepts. In addition, an extension of the aforementioned modeling is proposed, considering a nonlinear network representation, using the application of tensor equations at the power flow problem and a predictor-corrector approach to the estimation of minimum and maximum loading factors. Numerical results are used to improve the effectiveness of the strategies on reducing the number of state evaluations required to the analysis of composite system reliability.

**Keywords:** Composite Reliability. Sequential Monte Carlo Simulation. Maximum Loadability. Tensor Methods.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Zonas funcionais e níveis hierárquicos. . . . .	28
Figura 2 – Modelo para análise de bem-estar de sistemas. . . . .	33
Figura 3 – Modelo Markoviano a dois estados. . . . .	35
Figura 4 – Modelo Markoviano multi-estado. . . . .	35
Figura 5 – Representação de espaço de estados. . . . .	40
Figura 6 – Representação simplificada de uma sequência de eventos durante um período de tempo $T$ . . . . .	43
Figura 7 – Estágios do método de simulação de Monte Carlo destacando contribuições existentes no estado da arte. . . . .	49
Figura 8 – Estágios do método de simulação de Monte Carlo destacando contribuições propostas no Capítulo 3. . . . .	57
Figura 9 – Diagrama unifilar do sistema teste IEEE-RTS79. . . . .	69
Figura 10 – Estágios do método de simulação de Monte Carlo destacando contribuições propostas no Capítulo 4. . . . .	77
Figura 11 – Fluxograma dos métodos tensorial e tensorial modificado. . . . .	88
Figura 12 – Sistema de 3 barras. . . . .	104
Figura 13 – Análise comparativa das abordagens tensoriais para o sistema teste IEEE 14 barras. . . . .	108
Figura 14 – Análise comparativa das abordagens tensoriais para o sistema teste IEEE 300 barras. . . . .	109
Figura 15 – Análise comparativa das abordagens tensoriais para um equivalente do sistema sul-sudeste brasileiro. . . . .	110
Figura 16 – Efeito do vetor de correção melhorado para diferentes estimativas iniciais na análise do sistema teste IEEE 300 barras. . . . .	111
Figura 17 – Estágios do método de simulação de Monte Carlo destacando contribuições propostas no Capítulo 5. . . . .	120
Figura 18 – Evolução da indisponibilidade dos geradores para os métodos CE e CE modificado: caso base. . . . .	130
Figura 19 – Evolução da indisponibilidade dos elementos de transmissão para os métodos CE e CE modificado: caso base. . . . .	131
Figura 20 – Evolução da indisponibilidade dos geradores para os métodos CE e CE modificado: caso modificado. . . . .	135
Figura 21 – Evolução da indisponibilidade dos elementos de transmissão para os métodos CE e CE modificado: caso modificado. . . . .	136

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Resultados de análise de adequação em NH1 com $\beta = 5\%$ para os métodos analítico e $MCS_{\tau_{lin}}$ , considerando o sistema teste IEEE-RTS79. . . . .	70
Tabela 2 – Resultados de análise de adequação em NH1 com $\beta = 1\%$ para os métodos analítico e $MCS_{\tau_{lin}}$ , considerando o sistema teste IEEE-RTS79. . . . .	70
Tabela 3 – Resultados de análise de adequação em NH2 com $\beta = 5\%$ para o método de simulação de Monte Carlo não sequencial apresentado em (GONZÁLEZ-FERNÁNDEZ; SILVA <i>et al.</i> , 2013), considerando o sistema teste IEEE-RTS79. . . . .	71
Tabela 4 – Resultados de análise de adequação em NH2 com $\beta = 5\%$ para o método de simulação de Monte Carlo sequencial apresentado em (MAGALHÃES CARVALHO, 2013), considerando o sistema teste IEEE-RTS79. . . . .	71
Tabela 5 – Resultados de análise de adequação em NH2 com $\beta = 5\%$ para o método $MCS_{\tau_{lin}}$ , considerando o sistema teste IEEE-RTS79. . . . .	71
Tabela 6 – Resultados de análise de adequação em NH2 com $\beta = 1\%$ para o método $MCS_{\tau_{lin}}$ , considerando o sistema teste IEEE-RTS79. . . . .	72
Tabela 7 – Resultados de análise de adequação em NH2 com $\beta = 5\%$ para os métodos $MCS_{\tau_{lin}}$ , $MCS_{\rho_{lin}}$ e $MCS_{\hat{\rho}_{lin}}$ , considerando o sistema teste IEEE-RTS79. . . . .	73
Tabela 8 – Tipologia de avaliação de estados realizada na avaliação de adequação em NH2 para os métodos $MCS_{\tau_{lin}}$ , $MCS_{\rho_{lin}}$ e $MCS_{\hat{\rho}_{lin}}$ , considerando o sistema teste IEEE-RTS79, com $\beta = 5\%$ . . . . .	74
Tabela 9 – Índices das posições não nulas da fatia $l$ que conecta as barras $i$ e $j$ do tensor $\frac{\partial^2 I_l^2(\mathbf{e}, \mathbf{f})}{\partial \mathbf{z} \partial \mathbf{z}}$ . . . . .	94
Tabela 10 – Análise comparativa com um sistema teste de 1.354 barras . . . . .	106
Tabela 11 – Análise comparativa com os sistemas teste IEEE 14 barras e IEEE 300 barras. . . . .	106
Tabela 12 – Resultados de corte de carga, probabilidade e magnitudes de tensão via método analítico para um sistema teste de 2 barras. . . . .	113
Tabela 13 – Resultados de análise de adequação em NH2 com $\beta = 5\%$ para os métodos AM, $NLMCS_{\tau}$ , $NLMCS_{\tau'}$ , $NLMCS_{\hat{\rho}}$ , considerando um sistema teste de 2 barras. . . . .	114
Tabela 14 – Intervalos de confiança para os índices de confiabilidade dos métodos $NLMCS_{\tau}$ , $NLMCS_{\tau'}$ , $NLMCS_{\hat{\rho}}$ , considerando um sistema teste de 2 barras, com um nível de confiança de 95%. . . . .	114

Tabela 15 – Tipologia de avaliação de estados realizada na avaliação de adequação em NH2 para os métodos AM, $NLMCS_{\tau}$ , $NLMCS_{\tau'}$ , $NLMCS_{\hat{\rho}}$ , considerando um sistema teste de 2 barras, com $\beta = 5\%$ . . . . .	114
Tabela 16 – Resultados de análise de adequação em NH2 com $\beta = 5\%$ para os métodos $NLMC_{\tau}$ e $NLMCS_{\hat{\rho}}$ , considerando o sistema teste IEEE-RTS-79. . . . .	115
Tabela 17 – Intervalos de confiança para os índices de confiabilidade para os métodos $NLMC_{\tau}$ e $NLMCS_{\hat{\rho}}$ , considerando o sistema teste IEEE-RTS79, com um nível de confiança de 95%. . . . .	116
Tabela 18 – Tipologia de avaliação de estados realizada na avaliação de adequação em NH2 para os métodos $NLMC_{\tau}$ e $NLMCS_{\hat{\rho}}$ , considerando o sistema teste IEEE-RTS79, com $\beta = 5\%$ . . . . .	116
Tabela 19 – Resultados de análise de adequação em NH2 com $\beta = 5\%$ para os métodos $MCS_{\hat{\rho}_{lin}}$ , $CEMCS_{\hat{\rho}_{lin}}$ e $CE_{\hat{\rho}_{lin}}MCS_{\hat{\rho}_{lin}}$ , considerando o caso base. . . . .	132
Tabela 20 – Intervalos de confiança para os índices de confiabilidade dos métodos $MCS_{\hat{\rho}_{lin}}$ , $CEMCS_{\hat{\rho}_{lin}}$ e $CE_{\hat{\rho}_{lin}}MCS_{\hat{\rho}_{lin}}$ , considerando o caso base, com um nível de confiança de 95%. . . . .	132
Tabela 21 – Tipologia de avaliação de estados realizada na avaliação de adequação em NH2 para os métodos $MCS_{\hat{\rho}_{lin}}$ , $CEMCS_{\hat{\rho}_{lin}}$ e $CE_{\hat{\rho}_{lin}}MCS_{\hat{\rho}_{lin}}$ , considerando o caso base, com $\beta = 5\%$ . . . . .	133
Tabela 22 – Resultados de análise de adequação em NH2 com $\beta = 5\%$ para os métodos $MCS_{\hat{\rho}_{lin}}$ , $CEMCS_{\hat{\rho}_{lin}}$ e $CE_{\hat{\rho}_{lin}}MCS_{\hat{\rho}_{lin}}$ , considerando o caso modificado. . . . .	134
Tabela 23 – Intervalos de confiança para os índices de confiabilidade dos métodos $MCS_{\hat{\rho}_{lin}}$ , $CEMCS_{\hat{\rho}_{lin}}$ e $CE_{\hat{\rho}_{lin}}MCS_{\hat{\rho}_{lin}}$ , considerando o caso modificado, com um nível de confiança de 95%. . . . .	137
Tabela 24 – Tipologia de avaliação de estados realizada na avaliação de adequação em NH2 para os métodos $MCS_{\hat{\rho}_{lin}}$ , $CEMCS_{\hat{\rho}_{lin}}$ e $CE_{\hat{\rho}_{lin}}MCS_{\hat{\rho}_{lin}}$ , considerando o caso modificado, com $\beta = 5\%$ . . . .	137

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ACOPF	<i>Alternating Current Optimal Power Flow</i>
ACPF	<i>Alternating Current Power Flow</i>
ACS	<i>Ant Colony System</i>
ACTPF	<i>Alternating Current Tensor Power Flow</i>
AIS	<i>Artificial Immune System</i>
AM	Método analítico
CE	<i>Cross-Entropy Method</i>
$CE_{\hat{\rho}_{lin}}$	Método de entropia cruzada modificado
CEACUC	<i>Cross Entropy Alternating Current Unit Commitment Method</i>
CE-CV-IS	<i>Cross Entropy Control Variate and Importance Sampling Method</i>
CEPEL	Centro de Pesquisas de Energia Elétrica
CFO-ISSP	<i>Central Force Optimization Intelligent State Space Pruning</i>
DCOPF	<i>Direct Current Optimal Power Flow</i>
DCPF	<i>Direct Current Power Flow</i>
ECESMCS	<i>Enhanced Cross Entropy based Sequential Monte Carlo Simulation</i>
EENS	<i>Expected Energy Not Supplied</i>
EPNS	<i>Expected Power Not Supplied</i>
EPSO	<i>Evolutionary Particle Swarm Optimization</i>
GA	<i>Genetic Algorithm</i>
GA-ISSP	<i>Genetic Algorithm Intelligent State Space Pruning</i>
GMDH	<i>Group Method Data Handling</i>
IEEE	<i>Institute of Electrical and Electronics Engineers</i>
ISSP	<i>Intelligent State Space Pruning</i>
LOLC	<i>Loss Of Load Cost</i>
LOLD	<i>Loss Of Load Duration</i>
LOLE	<i>Loss Of Load Expectation</i>
LOLF	<i>Loss Of Load Frequency</i>
LOLP	<i>Loss Of Load Probability</i>
$MCS_{\rho}$	Método de simulação de Monte Carlo sequencial com determinação de limites de carregamento via método de otimização
$MCS_{\rho_{lin}}$	Método de simulação de Monte Carlo sequencial com determinação de limites de carregamento via método de otimização, considerando um modelo de rede linear
$MCS_{\tau}$	Método de simulação de Monte Carlo sequencial tradicional
$MCS_{\tau_{lin}}$	Método de simulação de Monte Carlo sequencial tradicional, considerando um modelo de rede linearizado
$MCS_{\hat{\rho}}$	Método de simulação de Monte Carlo sequencial com estimação de limites de carregamento via método analítico

$MCS_{\hat{\rho}_{lin}}$	Método de simulação de Monte Carlo sequencial com estimação de limites de carregamento via método analítico, considerando um modelo linear de rede
MTTF	<i>Mean Time To Failure</i>
MTTR	<i>Mean Time To Repair</i>
NH1	Nível Hierárquico 1
NH2	Nível Hierárquico 2
NH3	Nível Hierárquico 3
NLMCS $\tau$	Método de simulação de Monte Carlo sequencial tradicional considerando um modelo de rede não linear
NLMCS $\hat{\rho}$	Método de simulação de Monte Carlo sequencial com determinação de limites de carregamento via método de otimização considerando um modelo de rede não linear
PSO	<i>Particle Swarm Optimization</i>
PSO-ISSP	<i>Particle Swarm Optimization Intelligent State Space Pruning</i>
RTS	<i>Reliability Test System</i>
SOM	<i>Self Organizing Map</i>
SSC	<i>State Space Classification</i>
SSP	<i>State Space Pruning</i>
SVM	<i>Support Vector Machine</i>

## LISTA DE SÍMBOLOS

$x$	Variável
$\mathbf{x}$	Vetor
$\mathbf{X}$	Matriz e variável aleatória vetorial
$\mathcal{X}$	Conjunto
$*$	Operador conjugado
$\mathbf{x}^*$	Operador conjugado para os elementos de $\mathbf{x}$
$\mathbf{x}^2$	Operador quadrado para os elementos de $\mathbf{x}$
$[\cdot]^t$	Operador transposto
$\triangleq$	Operador igual por definição
$\sim_{iid}$	Operador independente e identicamente distribuído
$diag(\mathbf{x})$	Operador diagonalização do vetor $\mathbf{x}$
$\oslash \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix}$	Operador divisão elemento a elemento de vetores
$\mathbf{x} \otimes \mathbf{y}$	Operador produto elemento a elemento de vetores
$Im(\cdot)$	Operador imaginário de números complexos
$Re(\cdot)$	Operador real de números complexos
$\sin(\cdot)$	Função seno
$\cos(\cdot)$	Função cosseno
$\lfloor \cdot \rfloor$	Função piso
$\lceil \cdot \rceil$	Função teto
$E[\cdot]$	Esperança matemática
$Var[\cdot]$	Variância matemática

## LISTA DE ALGORITMOS

1	Método de simulação de Monte Carlo não sequencial . . . . .	41
2	Método de simulação de Monte Carlo sequencial . . . . .	44
3	Método de entropia cruzada para a estimação de eventos raros . . . . .	46
4	Método de entropia cruzada para otimização . . . . .	47
5	Método de simulação de Monte Carlo sequencial com estratégias de estimação de fatores limite de carregamento considerando modelo de rede linearizado . . . . .	66
6	Método tensorial modificado . . . . .	87
7	Escalonamento de geradores via método de entropia cruzada . . . . .	96
8	Método de simulação de Monte Carlo sequencial com estratégias de estimação de fatores limite de carregamento considerando modelo de rede não linear . . . . .	101
9	Método de entropia cruzada para a otimização de parâmetros estocás- ticos . . . . .	123
10	Método de simulação de Monte Carlo sequencial com entropia cruzada	124
11	Método de entropia cruzada modificado para otimização de parâmetros estocásticos . . . . .	127
12	Método primal-dual de pontos interiores . . . . .	165
13	Método preditor-corretor primal-dual de pontos interiores . . . . .	169



## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>20</b>
1.1	CONTEXTO E MOTIVAÇÃO	20
1.2	QUESTÕES DE PESQUISA E HIPÓTESES CONSIDERADAS	21
1.3	OBJETIVOS	22
1.4	ESTRUTURA DO DOCUMENTO	23
<b>2</b>	<b>AVALIAÇÃO DE CONFIABILIDADE EM SISTEMAS ELÉTRICOS DE POTÊNCIA</b>	<b>25</b>
2.1	CONSIDERAÇÕES INICIAIS	25
2.2	ASPECTOS DO PROBLEMA DE AVALIAÇÃO DE ADEQUAÇÃO DE SISTEMAS COMPOSTOS	26
2.2.1	<b>Adequação versus segurança</b>	<b>27</b>
2.2.2	<b>Zonas funcionais e níveis hierárquicos</b>	<b>28</b>
2.2.3	<b>Avaliação de adequação de capacidade de geração</b>	<b>29</b>
2.2.4	<b>Avaliação de adequação de sistemas compostos</b>	<b>30</b>
2.2.5	<b>Índices de confiabilidade</b>	<b>31</b>
2.2.6	<b>Análise de bem-estar</b>	<b>33</b>
2.3	MODELAGEM DE COMPONENTES APLICADA À AVALIAÇÃO DE ADEQUAÇÃO DE SISTEMAS COMPOSTOS	34
2.3.1	<b>Unidades de geração</b>	<b>36</b>
2.3.2	<b>Linhas de transmissão e transformadores</b>	<b>37</b>
2.3.3	<b>Carga</b>	<b>37</b>
2.4	SIMULAÇÃO DE MONTE CARLO APLICADA À ADEQUAÇÃO DE SISTEMAS COMPOSTOS	37
2.4.1	<b>Método de simulação de Monte Carlo não sequencial</b>	<b>40</b>
2.4.2	<b>Método de simulação de Monte Carlo sequencial</b>	<b>42</b>
2.4.3	<b>Método de entropia cruzada</b>	<b>44</b>
2.5	DISCUSSÕES ACERCA DO ESTADO DA ARTE	49
2.6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	54
<b>3</b>	<b>ESTRATÉGIAS DE AVALIAÇÃO DE ESTADOS EM SISTEMAS COMPOSTOS CONSIDERANDO MODELO DE REDE LINEARIZADO</b>	<b>56</b>
3.1	CONSIDERAÇÕES INICIAIS	56
3.2	PRÉ-AVALIAÇÃO DE ESTADOS VIA FLUXO DE POTÊNCIA LINEARIZADO	56
3.3	DETERMINAÇÃO DE CORTE DE CARGA E AÇÕES CORRETIVAS VIA FLUXO DE POTÊNCIA ÓTIMO LINEARIZADO	59
3.4	MODELO DE DETERMINAÇÃO DE FATORES LIMITE DE CARREGAMENTO	61

3.4.1	<b>Modelo de determinação de fatores limite de carregamento com perfil de despacho irrestrito (<math>MCS_{\rho_{lin}}</math>)</b>	62
3.4.2	<b>Modelo de determinação de fatores limite de carregamento com perfil de despacho restrito (<math>MCS_{\hat{\rho}_{lin}}</math>)</b>	63
3.5	ALGORITMO DE INCLUSÃO DE CÁLCULO DE FATORES LIMITE DE CARREGAMENTO NO MÉTODO DE SIMULAÇÃO DE MONTE CARLO SEQUENCIAL	66
3.6	RESULTADOS PARA O MÉTODO DE SIMULAÇÃO DE MONTE CARLO SEQUENCIAL CONSIDERANDO MODELO DE REDE LINEARIZADO	67
3.6.1	<b>Validação do método de simulação de Monte Carlo sequencial</b>	68
3.6.1.1	Resultados para o método de simulação de Monte Carlo sequencial em NH1	68
3.6.1.2	Resultados para o método de simulação de Monte Carlo sequencial em NH2	70
3.6.2	<b>Resultados para o método de simulação de Monte Carlo sequencial considerando estratégias de determinação de fatores limite de carregamento</b>	72
3.7	CONCLUSÕES E DISCUSSÕES	75
4	<b>ESTRATÉGIAS DE AVALIAÇÃO DE ESTADOS EM SISTEMAS COMPOSTOS CONSIDERANDO MODELO DE REDE NÃO LINEAR</b>	76
4.1	CONSIDERAÇÕES INICIAIS	76
4.2	PRÉ-AVALIAÇÃO DE ESTADOS VIA FLUXO DE POTÊNCIA TENSORIAL MODIFICADO	78
4.2.1	<b>Formulação vetorial do problema de fluxo de potência em coordenadas retangulares</b>	78
4.2.2	<b>Discussões acerca do método de fluxo de potência tensorial</b>	81
4.2.3	<b>Proposta de fluxo de potência tensorial modificado</b>	84
4.2.3.1	Simetria entre produtos matriz-vetor envolvendo a matriz Jacobiana.	84
4.2.3.2	Algoritmo proposto	86
4.3	DETERMINAÇÃO DE CORTE DE CARGA E AÇÕES CORRETIVAS VIA FLUXO DE POTÊNCIA ÓTIMO E ESCALONAMENTO	90
4.3.1	<b>Determinação de corte de carga e ações corretivas via fluxo de potência ótimo</b>	90
4.3.2	<b>Determinação de corte de carga e ações corretivas via escalonamento de unidades</b>	94
4.4	MODELO DE DETERMINAÇÃO DE FATORES LIMITE DE CARREGAMENTO	96

4.4.1	<b>Modelo de determinação de fatores limite de carregamento via modelo de otimização (<math>MCS_{\rho}</math>)</b> . . . . .	97
4.4.2	<b>Modelo de determinação de fatores limite de carregamento via método preditor-corretor tensorial (<math>MCS_{\hat{\rho}}</math>)</b> . . . . .	98
4.5	ALGORITMO DE INCLUSÃO DE SELOS DE PASSAGEM NO MÉTODO DE SIMULAÇÃO DE MONTE CARLO SEQUENCIAL . . . . .	101
4.6	RESULTADOS PARA O MÉTODO DE SIMULAÇÃO DE MONTE CARLO SEQUENCIAL CONSIDERANDO MODELO DE REDE NÃO LINEAR . . . . .	103
4.6.1	<b>Resultados para o problema do fluxo de potência tensorial modificado</b> . . . . .	103
4.6.1.1	Exemplo didático . . . . .	103
4.6.1.2	Análise comparativa . . . . .	105
4.6.2	<b>Resultados para o método de simulação de Monte Carlo sequencial</b> . . . . .	109
4.6.2.1	Resultados de validação . . . . .	112
4.6.2.2	Resultados para o sistema IEEE-RTS79 . . . . .	115
4.7	CONSIDERAÇÕES FINAIS . . . . .	117
5	<b>ESTRATÉGIA DE SELEÇÃO DE ESTADOS VIA MÉTODO DE ENTROPIA CRUZADA MODIFICADO</b> . . . . .	119
5.1	CONSIDERAÇÕES INICIAIS . . . . .	119
5.2	MÉTODO DA ENTROPIA CRUZADA APLICADO À CONFIABILIDADE DE SISTEMAS COMPOSTOS . . . . .	120
5.3	ESTIMAÇÃO DE FATOR DE MÁXIMO CARREGAMENTO NO MÉTODO DE ENTROPIA CRUZADA . . . . .	125
5.4	SIMULAÇÕES E RESULTADOS NUMÉRICOS . . . . .	128
5.4.1	<b>Resultados para o caso base</b> . . . . .	129
5.4.2	<b>Resultados para o caso modificado</b> . . . . .	134
5.5	CONCLUSÕES E DISCUSSÕES . . . . .	139
6	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS E TRABALHOS FUTUROS</b> . . . . .	140
6.1	CONCLUSÕES . . . . .	140
6.2	PROPOSTAS DE TRABALHOS FUTUROS . . . . .	141
	<b>REFERÊNCIAS</b> . . . . .	143
	<b>APÊNDICE A – FORMULAÇÃO DO PROBLEMA DO FLUXO DE POTÊNCIA ÓTIMO</b> . . . . .	152
A.1	FORMULAÇÃO DO PROBLEMA . . . . .	152
A.2	EQUAÇÕES PARA A SOLUÇÃO DO PROBLEMA . . . . .	153
A.3	EQUAÇÕES ADICIONAIS PARA REPRESENTAÇÃO DE RESTRIÇÕES DE FLUXO DE CORRENTE . . . . .	159

	<b>APÊNDICE B – MÉTODO DE PONTOS INTERIORES E SUAS VA-</b>	
	<b>RIANTES . . . . .</b>	<b>162</b>
B.1	MÉTODO PRIMAL-DUAL DE PONTOS INTERIORES . . . . .	162
B.1.1	Método preditor-corretor primal-dual de pontos interiores . . . .	166
B.1.2	Métodos primal-dual e preditor-corretor primal-dual de pontos interiores reduzidos . . . . .	170

## 1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo são apresentados o contexto e motivação, hipóteses e questões de pesquisa, objetivos e estrutura do documento.

### 1.1 CONTEXTO E MOTIVAÇÃO

A principal função de um sistema elétrico de potência é fornecer energia elétrica aos consumidores, com qualidade e segurança adequados, no instante em que a energia é solicitada. Esse balanço entre a demanda e o fornecimento é afetado não apenas pela capacidade de geração e transmissão do sistema, mas também por falhas fortuitas que podem ocorrer nos componentes do mesmo. O elevado número de componentes geograficamente distribuídos, aliado a incertezas na demanda e disponibilidade de recursos, tornam o planejamento de sistemas elétricos de potência uma tarefa de expressiva complexidade.

Dentre os estudos considerados no planejamento de sistemas elétricos de potência, destacam-se as análises de confiabilidade de sistemas compostos, compreendendo os componentes e recursos de geração e transmissão. Para a avaliação de confiabilidade de um sistema composto, dois aspectos principais devem ser considerados: adequação e segurança. Sob o aspecto de segurança, os estudos estão relacionados com o comportamento dinâmico do sistema frente a distúrbios. Quando os estudos de confiabilidade visam a adequação, a análise é direcionada para a verificação do regime estático do sistema.

De forma geral, define-se *confiabilidade* como sendo a probabilidade de um dispositivo (ou sistema) desempenhar a sua função de forma adequada por um período de tempo específico nas condições de operação encontradas (BILLINTON; ALLAN, 1992). Em um sistema elétrico de potência de grande porte, o conceito de confiabilidade pode ser associado à probabilidade do sistema em suprir, sem corte de carga, a potência requerida no período considerado. Existem diversos métodos para avaliar a confiabilidade dos sistemas elétricos, sendo os mesmos geralmente divididos em métodos analíticos e métodos baseados em simulação. Os métodos analíticos permitem o cálculo de índices de confiabilidade, ou aproximações dos mesmos, através de uma análise matemática, possuindo aplicação limitada para a avaliação de sistemas de grande porte. Por outro lado, métodos baseados em simulação permitem a realização de estimativas para esses índices aliados a intervalos de confiança, viabilizando a avaliação de sistemas de grande porte.

Os algoritmos de avaliação de confiabilidade de sistemas elétricos podem ser divididos em três estágios principais, a saber: seleção de estados, avaliação de estados e estimação de índices. O método de simulação de Monte Carlo, pertencente, como o nome indica, à categoria de métodos baseados em simulação, tendo a capacidade

de representar de forma adequada complexidades dos sistemas elétricos. Ademais, dentre os três estágios principais que o compõem, o estágio de avaliação de estados é conhecido como aquele que requer maior esforço computacional, esforço este dependente do rigor adotado na representação dos fenômenos inerentes aos sistemas elétricos.

Modelagens comuns à avaliação de estados estão associadas a uma representação linearizada da rede elétrica. O cálculo do fluxo de potência linearizado e fluxo de potência ótimo linearizado são usualmente aplicados nesses casos, nos quais incertezas intrínsecas ao planejamento do sistema no longo prazo não justificam uma modelagem mais detalhada da rede. Por outro lado, uma modelagem não linear pode ser requerida quando justificada pelas incertezas inerentes à avaliação ou quando fenômenos de interesse requerem a verificação das tensões complexas nas barras da rede. Programas como o NH2 do Centro de Pesquisas de Energia Elétrica (CEPEL) já assumem uma representação de rede não linear e modelagem de procedimentos operativos do sistema. Porém, a avaliação promovida pelo NH2 utiliza de uma versão não sequencial do método de Monte Carlo, na qual relações temporais sequenciais são negligenciadas em favor de uma redução de esforço computacional, além de considerar simplificações como na modelagem de carga. Em contrapartida, existem ferramentas computacionais de avaliação de confiabilidade que já contemplam as dependências temporais utilizando-se de modelos não lineares de rede. Contudo, empregam uma representação simplificada da carga, abandonando a representação cronológica com variação horária e assumindo um ponto médio fixo de carregamento para viabilizar a avaliação da confiabilidade (LEITE DA SILVA; MANSO, 1997). Essa simplificação busca garantir o desempenho da avaliação de fluxo de potência e de fluxo de potência ótimo e, sobretudo, garantir a convergência dos mesmos. Ademais, enfatiza-se que o nível de resolução da representação de uma curva cronológica de carga pode elevar consideravelmente o número de avaliações de estado necessários a uma estimação precisa de indicadores de confiabilidade via método de Monte Carlo sequencial.

O desenvolvimento de estratégias de avaliação de estado de sistemas compostos, com o fim de acrescentar eficiência à estimação de indicadores do método de simulação de Monte Carlo sequencial, representa a motivação e foco desta tese de doutorado.

## 1.2 QUESTÕES DE PESQUISA E HIPÓTESES CONSIDERADAS

No contexto apresentado, selecionam-se as seguintes questões de pesquisa:

1. É possível desenvolver estratégias de análise com o fim de evitar avaliações de estado baseadas em fluxo de potência e fluxo de potência ótimo, assim redu-

zindo o esforço computacional do método de simulação de Monte Carlo no estágio de avaliação, sem prejuízo à estimação de indicadores de confiabilidade?

2. É possível buscar eficiência no método de simulação de Monte Carlo sequencial combinando estratégias de análise em regime permanente com as modernas técnicas de redução de variância?

Como hipóteses consideradas enfatizam-se:

1. O método de simulação de Monte Carlo sequencial pode ser considerado o mais adequado e flexível para representar as dependências temporais e complexidades intrínsecas aos sistemas elétricos de potência de grande porte.
2. Uma modelagem cronológica da simulação com elevada resolução temporal, pode reduzir consideravelmente a eficiência de abordagens de avaliação de confiabilidade para sistemas compostos via método de simulação Monte Carlo sequencial.
3. O método de simulação de Monte Carlo sequencial permite obter as distribuições de probabilidade para os índices de confiabilidade, ao contrário do método de Monte Carlo não sequencial e métodos analíticos.

A inclusão de representações cronológicas conduz a um aumento significativo do número de estados a serem avaliados. Considerando todas as definições e avanços que se encontram no estado da arte, pesquisam-se novas soluções metodológicas ou simplificações das soluções atualmente utilizadas para aperfeiçoar o desempenho da avaliação de confiabilidade via método de simulação de Monte Carlo sequencial. Visa-se desenvolver metodologias alternativas para a análise da adequação de sistemas compostos, onde se considerem modelos para a disponibilidade de unidades de geração e transmissão considerando o comportamento cronológico da carga.

### 1.3 OBJETIVOS

O objetivo geral da tese é o desenvolvimento de estratégias de análise de regime permanente para a avaliação de confiabilidade composta de sistemas elétricos de potência. Os seguintes objetivos específicos definem as contribuições do trabalho, como segue:

- Desenvolvimento de estratégias, baseadas na estimação de fatores de mínimo e máximo carregamento, para evitar avaliações de estado via fluxo de potência e fluxo de potência ótimo, no método de simulação de Monte Carlo sequencial, considerando modelagem linearizada e não linear de rede;

- Desenvolvimento de estratégias, baseadas em métodos tensoriais, para a avaliação de confiabilidade composta, considerando modelagem não linear da rede;
- Desenvolvimento de estratégia para a integração da estimação de fator de máximo carregamento, considerando modelagem linear de rede, na otimização de parâmetros estocásticos utilizada no método de entropia cruzada para a simulação de Monte Carlo sequencial.

## 1.4 ESTRUTURA DO DOCUMENTO

Este documento está organizado como segue:

**Capítulo 1:** Este capítulo contém uma breve contextualização do tema e escopo do problema de pesquisa em estudo, além da motivação para o desenvolvimento desta tese de doutorado. Apresentam-se as questões de pesquisa, quais as hipóteses consideradas e os objetivos da tese. A última seção tem por fim a descrição da estrutura do documento.

**Capítulo 2:** Neste capítulo, são apresentados fundamentos e discussões acerca da avaliação de confiabilidade de sistemas elétricos de potência. Estabelece-se como foco a descrição de aspectos do problema de avaliação de confiabilidade de sistemas compostos, da modelagem de componentes, dos métodos de simulação empregados para a avaliação, além de discussões acerca do estado da arte.

**Capítulo 3:** Neste capítulo, são apresentadas estratégias de avaliação de estados em sistemas compostos considerando modelo de rede linearizado. O capítulo contempla a pré-avaliação e avaliação de estados no método de simulação de Monte Carlo sequencial, e duas estratégias para a supressão de avaliações de estados via fluxo de potência linearizado. A inclusão dessas estratégias de avaliação no método de simulação é mostrada no algoritmo descrito neste capítulo. Na seção de resultados é validado o método de simulação de Monte Carlo sequencial implementado e são apresentados os resultados obtidos com as estratégias propostas.

**Capítulo 4:** Neste capítulo, são apresentadas estratégias de avaliação de estados em sistemas compostos considerando uma modelagem não linear da rede. Este capítulo inclui a proposta de pré-avaliação de estados via fluxo de potência tensorial modificado, e para a avaliação de estados são apresentadas algumas ações corretivas, entre elas a avaliação via fluxo de potência ótimo e escalonamento de geradores via método de entropia cruzada. Visando suprimir pré-avaliações e avaliações realizadas por meio dos métodos propostos, uma formulação para a



determinação de fatores de mínimo e máximo carregamento via modelo preditor-corretor tensorial é incorporado. Um algoritmo é apresentado para a inclusão das propostas de avaliação de estados no método de simulação de Monte Carlo sequencial. A seção de resultados inclui a validação dos métodos propostos e os ganhos obtidos.

**Capítulo 5:** Neste capítulo, apresenta-se uma estratégia para a seleção de estados no método de simulação de Monte Carlo sequencial via método de entropia cruzada. Descreve-se o método de entropia cruzada e propõe-se uma variante para o método que contempla uma estratégia de estimação de fator de máximo carregamento na etapa de otimização de parâmetros estocásticos. O capítulo inclui resultados numérico mostrando o impacto da variante proposta.

**Capítulo 6:** Neste último capítulo, apresentam-se as conclusões da tese e trabalhos futuros.

**Apêndice A:** Este apêndice contém a formulação do problema do fluxo de potência ótimo, para a minimização de corte carga, considerando modelo não linear de rede.

**Apêndice B:** Este apêndice contém a formulação do método de pontos interiores, suas variantes e forma de resolução.

## 2 AVALIAÇÃO DE CONFIABILIDADE EM SISTEMAS ELÉTRICOS DE POTÊNCIA

Este capítulo possui como objetivo a apresentação de conceitos, fundamentação e discussões acerca da avaliação de confiabilidade de sistemas compostos, tendo por foco os elementos necessários para a compreensão das contribuições do trabalho. Considerações iniciais e aspectos do problema de avaliação de confiabilidade de sistemas compostos são descritos nas Seções 2.1 e 2.2, respectivamente. A modelagem de componentes e métodos de simulação empregados na avaliação de sistemas compostos são apresentados, respectivamente, nas Seções 2.3 e 2.4. Discussões acerca do estado da arte são elaboradas na Seção 2.5, enquanto considerações finais são descritas na Seção 2.6.

### 2.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Os estudos de avaliação de confiabilidade têm como objetivo auxiliar em decisões providas de incerteza, relacionadas a eventos como interrupções forçadas, indisponibilidade de recursos, entre outros. Em geral, os resultados desses estudos são traduzidos em índices de confiabilidade, podendo ser usados como figuras de mérito de relevância para a tomada de decisão no planejamento da expansão do sistema. Esses estudos foram historicamente conduzidos a partir de duas abordagens distintas, denominadas de abordagem determinística e probabilística (BILLINTON; ALLAN, 1996).

A abordagem determinística consiste no uso de simples regras ou heurísticas baseadas em experiências passadas dos operadores, com o objetivo de inferir/estimar quantitativamente a confiabilidade do sistema elétrico. Regras determinísticas surgiram de experiências passadas das próprias companhias de energia elétrica, regras estas amparadas na organização interna das companhias e características do sistema que as mesmas operavam. Algumas dessas regras podem ser encontradas na literatura especializada ou em manuais, como por exemplo a regra “da maior unidade geradora”, correspondente a uma avaliação supondo a indisponibilidade da maior unidade geradora do sistema, ou o “critério  $N - 1$ ”, correspondente a uma avaliação assumindo a indisponibilidade não simultânea de todos os componentes do sistema (BILLINTON; ALLAN, 1996). Essas regras possuem significativa difusão entre as empresas do setor elétrico nacional e internacional.

Por outro lado, a abordagem probabilística é baseada na modelagem matemática do comportamento estocástico dos componentes do sistema e no modo como o sistema é operado. Os métodos integrados na abordagem probabilística assumem uma representação mais completa e, por conseguinte, mais complexa do sistema em comparação com as abordagens determinísticas. Novas metodologias capazes de lidar com as complexidades dos sistemas de energia modernos são objeto de interesse

tanto da indústria quanto da academia. Neste contexto, os métodos de simulação de Monte Carlo (BILLINTON; LI, 1994; RUBINSTEIN; KROESE, 2007) estão entre as metodologias mais aplicadas para a avaliação de confiabilidade de sistemas compostos.

Os métodos de simulação de Monte Carlo podem ser divididos em duas abordagens: abordagem não sequencial e abordagem sequencial (BILLINTON; LI, 1994; LEITE DA SILVA; MELO; CUNHA, 1991). O método de simulação de Monte Carlo não sequencial aplica uma amostragem aleatória de estados do sistema, negligenciando dependências temporais dos mesmos, embora correlações possam ser representadas. Por outro lado, o método de simulação de Monte Carlo sequencial pode reproduzir acertadamente o ciclo de falha e reparo de componentes, através de uma representação explícita do tempo. Por este motivo, esse método pode ser usado para encapsular modelos representativos para o comportamento estocástico e cronológico de inúmeros processos correspondentes aos sistemas de potência, tal como modelos de carga espacialmente correlacionados, manutenções programadas, efeitos climáticos, etc. (BILLINTON; LI, 1994; SANKARAKRISHNAN; BILLINTON, 1995). Claramente, o método de simulação de Monte Carlo sequencial é a ferramenta mais indicada para simular a agregação do comportamento de diversos componentes de interesse (BILLINTON; LI, 1994; SANKARAKRISHNAN; BILLINTON, 1995), fornecendo subsídios ao planejamento e modernização dos sistemas de potência.

A abordagem probabilística é a única que permite a avaliação do risco de interrupções no fornecimento e as respectivas consequências econômicas de uma forma completa e rigorosa (BILLINTON; ALLAN, 1996). Portanto, é natural que a maioria dos trabalhos encontrados na literatura sobre a avaliação da confiabilidade de sistemas de potência seja dedicada a abordagens probabilísticas (MAGALHÃES CARVALHO, 2013). A despeito da abordagem utilizada, o esforço computacional requerido para avaliar a confiabilidade de um sistema de potência também depende da complexidade da modelagem empregada e dos aspectos de interesse do problema, tópicos explorados na seção a seguir.

## 2.2 ASPECTOS DO PROBLEMA DE AVALIAÇÃO DE ADEQUAÇÃO DE SISTEMAS COMPOSTOS

Dentre os aspectos do problema de avaliação de adequação de sistemas compostos, destacam-se para o trabalho os conceitos de adequação e segurança, zonas funcionais e níveis hierárquicos, avaliação de adequação de capacidade de geração e sistemas compostos, além de indicadores de confiabilidade e de bem-estar.

### 2.2.1 Adequação versus segurança

Em sistemas de potência, a avaliação da confiabilidade é tradicionalmente dividida em dois conceitos fundamentais: adequação e segurança.

A capacidade de um sistema de potência voltar a condições de operabilidade estáveis depois de uma perturbação é analisada no âmbito dos estudos de avaliação de segurança. Assim, a avaliação de segurança está direcionada a verificar a capacidade (robustez) do sistema quando ocorrem perturbações que podem conduzir a variações de frequência ou tensões instáveis, ou mesmo a falhas do sistema em cascata. Estudos da avaliação completa da segurança, que incluem representações detalhadas de sistemas de proteção, ações de controle ou processos de restauração, podem implicar o uso de métodos numéricos, tais como o método de Runge-Kutta (PRESS *et al.*, 2007), para solucionar equações diferenciais capazes de representar o comportamento dinâmico do sistema.

Considerando a natureza significativamente complexa dos estudos de avaliação de segurança, estes são normalmente efetuados para um pré-determinado número plausível de cenários de operação e perturbações. De igual modo, as variáveis que influenciam esses estudos têm um comportamento intrinsecamente estocástico que apenas pode ser modelado de forma precisa sob uma abordagem probabilística, mas que ao invés disso são frequentemente representados por parâmetros fixos e determinísticos.

A avaliação de segurança probabilística tem sido vista como um problema desafiante essencialmente devido ao elevado detalhe requerido para a modelagem de componentes, tal que a sequência aleatória dos eventos após uma perturbação seja precisamente reproduzida (REI *et al.*, 2000). Além disso, o enorme esforço computacional requerido para simulações de tal detalhe tem constituído uma barreira à análise minuciosa da segurança probabilística. Técnicas de reconhecimento de padrões (BISHOP, 2006), que ajudam a detectar se os estados do sistema são seguros ou inseguros (VASCONCELOS; PEÇAS LOPES, 2006; KIM; SINGH, 2005; KALYANI; SWARUP, 2011), têm sido propostas para reduzir o esforço computacional dessas avaliações.

A avaliação de adequação do sistema, foco deste trabalho, está direcionada à verificação da existência de recursos suficientes para suprir as necessidades dos consumidores de energia cumprindo requerimentos estáticos de operação. Esses recursos incluem os equipamentos geração, transmissão e distribuição necessários para produzir, transportar e distribuir energia elétrica aos consumidores. A avaliação da adequação está associada às condições estáticas e não considera efeitos dinâmicos do sistema ou a sua resposta a distúrbios. Dessa forma, um estado do sistema é considerado de sucesso se, depois da avaliação, todos os requisitos de operação associados ao atendimento à carga, tensão nas barras, limites de geração e os limites de carre-

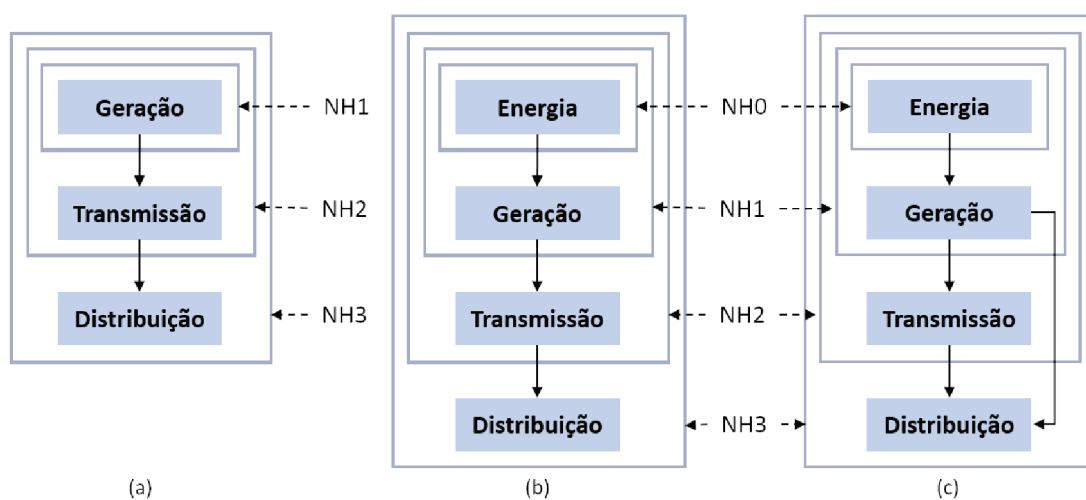
gamento dos equipamentos são respeitados. Se alguma dessas condições é violada, ações corretivas devem ser efetuadas. Essas ações incluem re-despacho de unidades de geração, ajuste de tensão nas barras de saída das unidades de geração, entre outras. Um corte de carga pode ocorrer como consequência da obrigação de atendimento dos requerimentos de operação; apenas neste caso, o estado do sistema é considerado falha.

### 2.2.2 Zonas funcionais e níveis hierárquicos

Os sistemas de potência modernos são de dimensões consideravelmente grandes e extremamente complexos. Dependendo do detalhe considerado para a representação desses sistemas e do potencial computacional disponível, os estudos de avaliação de adequação adotam modelos diferentes para os componentes do sistema e técnicas matemáticas e/ou de simulação. Esta multiplicidade de modelos e técnicas exigiu uma divisão dos sistemas de potência em zonas funcionais.

Em uma primeira categorização dos estudos de avaliação de adequação, propôs-se uma separação para os sistemas de potência em três zonas funcionais nomeadas de Geração, Transmissão e Distribuição (BILLINTON; ALLAN, 1996), conforme apresentado na Figura 1(a). Mais recentemente, uma zona funcional denominada Energia foi adicionada à primeira categorização proposta (LEITE DA SILVA; CASSULA *et al.*, 2002), como ilustrado na Figura 1(b). Essa nova zona tem em conta a variabilidade intrínseca ou intermitência de recursos energéticos primários (mais especificamente, os recursos renováveis) ambicionando uma representação mais precisa da capacidade de geração disponível de um sistema em cada período de tempo.

Figura 1 – Zonas funcionais e níveis hierárquicos.



Fonte: do autor, baseado em (ROSA, 2010).

As zonas funcionais são organizadas de forma a constituir níveis hierárquicos. Estudos de adequação pertencentes ao Nível Hierárquico 1 (NH1) referem-se à avaliação da geração e à sua capacidade para fornecer energia aos consumidores, garantindo um balanço adequado entre geração e carga. As avaliações do Nível Hierárquico 2 (NH2) incluem modelos para os componentes de geração e transmissão, cujo objetivo é determinar a capacidade do sistema de produzir/fornecer e transportar energia ao conjunto de pontos de consumo. Finalmente, o Nível Hierárquico 3 (NH3) envolve todas as zonas funcionais e abrange a capacidade do sistema como um todo para garantir um fornecimento contínuo a cada consumidor individual. Estudos pertencentes ao NH3 são normalmente realizados assumindo modelos aproximados para os componentes das zonas de Energia, Geração e Transmissão (LEITE DA SILVA; CASSULA *et al.*, 2002), dado que uma representação detalhada de todos os equipamentos dessas zonas tornaria a avaliação da adequação computacionalmente inviável.

A recente reorganização dos sistemas elétricos de potência levou à separação, descentralização e, cada vez mais, a privatização das atividades de geração, transmissão e distribuição. Além disso, a combinação da reorganização dos sistemas aliado às inovações tecnológicas modernas tem renovado o interesse em geração distribuída. Assim, a integração massiva deste tipo de geração na rede de distribuição tem sido promovida. De acordo com estes novos desenvolvimentos, o conceito tradicional dos níveis hierárquicos, que foi desenvolvido sob o paradigma de centralização, foi reformulado de forma a considerar a capacidade de geração distribuída em redes de distribuição (ROSA, 2010), como exibido na Figura 1(c).

Os estudos de avaliação da adequação e técnicas descritos neste documento estão concentrados no NH2. Os estudos em NH2 são computacionalmente mais dispendiosos quando comparados com os estudos no NH1. A avaliação de um estado do sistema pertencente ao NH2, que inclua picos de carga horárias das 8.760 horas de um ano, bem como a disponibilidade de recursos energéticos primários, unidades de geração e circuitos de transmissão, tende a requer cálculos de fluxos de potência e fluxo de potência ótimo em vez de simples comparações, como por exemplo, a diferença entre produção e carga nos estudos associados ao NH1. Além do mais, ações corretivas, tal como re-despacho da geração, são por vezes necessárias em estudos em NH2 (PEREIRA; BALU, 1992), para eliminar potenciais violações às restrições do sistema. Esses procedimentos caracterizam a tipologia de avaliação realizada para cada estado em NH2.

### **2.2.3 Avaliação de adequação de capacidade de geração**

A avaliação da adequação da capacidade de geração pertence ao tipo de estudos do NH1 (BILLINTON; ALLAN, 1996), considerando apenas as zonas funcionais Energia e Geração. Assume-se que todas as unidades de geração e todas as cargas

do sistema estão ligados a uma mesma barra, configurando um modelo de nó único. Esse tipo de avaliação pode ser dividido de acordo com duas perspectivas, correspondente as reservas estática (LEITE DA SILVA; CASSULA *et al.*, 2002) e operativa (MATOS *et al.*, 2009; LEITE DA SILVA; SALES *et al.*, 2010).

Os estudos acerca de reservas estáticas auxiliam na identificação da capacidade necessária para satisfazer a demanda esperada, num determinado nível de risco. A incerteza associada à reserva estática, que é uma variável estocástica, é causada pela intermitência dos recursos de energia primária, pelos cortes de carga planejados e forçados e pela aleatoriedade da carga do sistema. Os eventos de reserva estática insuficiente ocorrem quando a capacidade de geração é menor do que a carga, assinalando a ocorrência de corte de carga. Por outro lado, os estudos de reserva operativa estão orientados à análise a longo-prazo da flexibilidade do sistema de geração para lidar com as variações no curto prazo que podem ocorrer durante a operação do sistema (MATOS *et al.*, 2009; LEITE DA SILVA; SALES *et al.*, 2010). Neste caso, o sistema deve ser capaz de, não apenas suprir a carga, mas também acomodar as diferenças entre as previsões de curto prazo e as realizações efetivas das variáveis estocásticas, cumprindo as restrições operacionais estabelecidas pelas empresas. Essas restrições incluem níveis mínimos de reservas de energia primária e secundária, além de escalonamentos prioritários das unidades. Dessa forma, se as regras de operação estão disponíveis para diferentes cenários de atuação é possível avaliar a adequação da reserva operativa sob uma perspectiva de planejamento.

#### **2.2.4 Avaliação de adequação de sistemas compostos**

A avaliação de adequação de sistemas de geração-transmissão, ou simplesmente, do sistema composto, pertence ao grupo de estudos em NH2 (BILLINTON; ALLAN, 1996; PEREIRA; BALU, 1992). Esses estudos incluem não só modelos detalhados para as unidades de geração e cargas, mas também para os circuitos de transmissão. Assim, os estudos de sistemas compostos podem incluir mais restrições que os estudos de capacidade de geração, tais como limites de tensões, limites máximos de carga de circuitos de transmissão e questões relacionadas a potências ativas e reativas (BILLINTON; ALLAN, 1996; PEREIRA; BALU, 1992). Tal como nos estudos em NH1, a adequação do sistema composto pode ser estudada no curto e longo prazo. Nesta pesquisa, os desenvolvimentos na área de avaliação de adequação de sistemas compostos referem-se a análises de longo prazo, fase de planejamento, com ênfase na avaliação direta de indicadores de corte de carga utilizados para na avaliação de reserva estática.

Os estudos sobre sistemas compostos focam-se em determinar a capacidade de geração e transmissão necessárias para proporcionar um fornecimento confiável ao conjunto de consumo (BILLINTON; ALLAN, 1996; PEREIRA; BALU, 1992). Ao re-

presentar os circuitos de transmissão, esses estudos são capazes de capturar, de uma forma mais precisa, o efeito geográfico da dispersão de cargas e recursos de energias primárias na adequação do sistema a longo prazo.

Em avaliação de sistema composto, uma falha envolvendo o subsistema de geração é caracterizada pela insuficiência de geração no atendimento à carga, onde a quantidade de carga cortada corresponde aproximadamente à diferença entre a carga do sistema e a capacidade de geração disponível. Uma falha devida ao subsistema de transmissão ocorre quando há corte de carga independentemente do fato da capacidade de geração ser suficiente para atender a carga. As restantes falhas são causadas por défices simultâneos da capacidade de geração e transmissão.

De forma similar ao verificado em estudos de capacidade de geração, a adequação do sistema composto depende da capacidade de geração disponível ser suficiente para suprir a carga do sistema. Como referido anteriormente, o procedimento usado para detectar perda de carga é mais complexo que a simples comparação descrita na Seção 2.2.3. Adicionalmente, esquemas de prioridade são comumente usadas para se obter uma avaliação mais representativa de procedimentos de corte de carga no sistema (PEREIRA; BALU, 1992).

### 2.2.5 Índices de confiabilidade

O principal resultado dos estudos probabilísticos de avaliação de adequação de sistemas de potência são os índices de confiabilidade e podem ser obtidos através de estudos de diferentes configurações para o sistema (BILLINTON; SATISH, 1994).

Tradicionalmente, índices de confiabilidade podem ter diferentes designações, dependendo do nível hierárquico considerado. Apesar da grande variedade de designações, os índices de confiabilidade podem ser categorizados como índices probabilísticos, índices de potência/energia, ou ainda, índices de frequência e duração (BILLINTON; ALLAN, 1996). Exemplos de índice de probabilidade são:

- LOLP (*Loss Of Load Probability*) - Probabilidade de perda de carga: indica a probabilidade de corte de carga;
- LOLE (*Loss Of Load Expectation*) - Perda de carga esperada (hora/dia, dia/ano, hora/ano): representa a média do número de horas, dias ou semanas com corte de carga, durante o período de avaliação (normalmente 1 ano).

Exemplos de índice de potência/energia:

- EPNS (*Expected Power Not Supplied*) - Potência não fornecida esperada (MW): média de carga cortada;



- EENS (*Expected Energy Not Supplied*) - Energia não fornecida esperada (MWh/ano): média de energia cortada durante o período de avaliação (normalmente 1 ano).

Exemplos de índice de frequência e duração:

- LOLF (*Loss Of Load Frequency*) - Frequência de perda de carga (ocorrência/ano): número médio de eventos de corte de carga durante o período de avaliação (normalmente 1 ano);
- LOLD (*Loss Of Load Duration*) - Duração da perda de carga (hora/ocorrência, dia/ocorrência, semana/ocorrência): média da duração de eventos de corte de carga.

Esses índices não consideram o custo de corte de carga, uma vez que esse custo depende do tipo de consumidor desconectado (quais as atividades interrompidas, a eletricidade exigida, os graus de dependência das atividades na eletricidade, etc.) e das características das interrupções, tais como a frequência, a hora de ocorrência, a profundidade do corte e a respectiva duração ou ainda se o consumidor foi informado com antecedência (SILVA, A. L. da *et al.*, 1997; MELLO; PEREIRA; SILVA *et al.*, 1997). Esses custos podem ser obtidos a partir de estudos econômicos específicos, tais como avaliações analíticas indiretas, análises de *blackouts* reais e de inquéritos a consumidores. O resultado principal desses estudos é o custo médio a que cada classe de consumidores fica sujeita depois de cada interrupção em função do tempo (BILLINTON; ALLAN, 1996). Permite-se assim estimar índices que traduzem o custo de interrupções como por exemplo (SILVA, A. L. da *et al.*, 1997; MELLO; PEREIRA; SILVA *et al.*, 1997):

- LOLC (*Loss Of Load Cost*) - Custo de perda de carga (\$/ano): média do custo do corte de carga durante o período de avaliação (normalmente 1 ano).

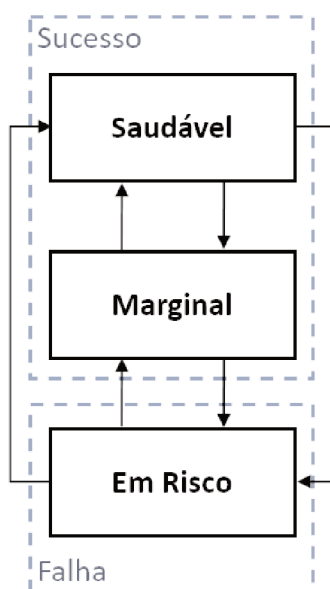
Neste trabalho, os índices de probabilidade, de energia e de frequência e duração serão estimados na avaliação de sistemas compostos. A estimação de índices de confiabilidade requer o uso de funções teste (PEREIRA; BALU, 1992), que convertem a definição dos indicadores em fórmulas matemáticas. Essas funções são usadas para verificar se os estados do sistema são de sucesso ou falha, isto é, se é possível suprir a carga ou não, respectivamente. Os índices de confiabilidade são dados pelos valores esperados dessas funções teste, as quais possuem distribuição de probabilidade associada frequentemente desconhecida.

### 2.2.6 Análise de bem-estar

Os índices de confiabilidade são o resultado mais importante da aproximação probabilística. No entanto, os tomadores de decisão dos sistemas de potência ainda apresentam alguma relutância no uso desta informação, justificado principalmente pela dificuldade na interpretação de medidas probabilísticas. Essa dificuldade pode ser reduzida pela incorporação de um critério determinístico na estimação probabilística, como por exemplo o critério  $N - 1$ , através do conceito de bem-estar (BILLINTON; FOTUHI-FIRUZABAD, 1994; BILLINTON; KARKI, 1999; GOEL; FENG, 1999; LEITE DA SILVA; RESENDE *et al.*, 2004).

No conceito de bem-estar, classifica-se o grau de sucesso ou falha dos estados do sistema dividindo-os em *saudável*, *marginal* e *em risco*, conforme mostrado na Figura 2. Os estados saudáveis contêm recursos suficientes para suprir a carga e atender ao critério determinístico pré-definido. Se a carga pode ser suprida com os recursos disponíveis mas estes são insuficientes para atender ao critério determinístico pré-definido, o estado é considerado marginal. Finalmente, quando os recursos são insuficientes para suprir a carga do sistema, o estado é definido como sendo em risco. Os índices de bem-estar são então dados pela probabilidade, frequência e duração dos estados saudável, marginal e em risco.

Figura 2 – Modelo para análise de bem-estar de sistemas.



Fonte: do autor, baseado em (LEITE DA SILVA; RESENDE *et al.*, 2004).

A análise de bem-estar tem sido aplicada à avaliação da adequação de sistemas de geração e de sistemas compostos (GOEL; FENG, 1999; GOEL; GUPTA, 2000; LEITE DA SILVA; RESENDE *et al.*, 2004). Na avaliação de bem-estar da ade-

quação de sistemas de geração o critério determinístico frequentemente utilizado é o de verificação de suficiência de reserva estática em caso de falha da maior unidade de geração disponível. Para estudos de bem-estar de adequação de sistemas compostos, o critério aplicado geralmente é a verificação se o sistema é capaz de suportar a falha de qualquer unidade de geração sozinha ou de qualquer circuito de transmissão ou transformação sem que haja perda de carga (GOEL; FENG, 1999), (LEITE DA SILVA; RESENDE *et al.*, 2004), usualmente denominado de critério  $N - 1$ .

Existem no estado da arte outros critérios determinísticos passíveis de ser aplicados em estudos de bem-estar para separar os estados em saudável, marginal e em risco, como por exemplo, critérios de reserva girante (ABIRI-JAHROMI; FOTUHI-FIRUZABAD; ABBASI, 2007), risco da alocação de unidade de geração (FOTUHI-FIRUZABAD; BILLINTON, 1999; BILLINTON; FOTUHI-FIRUZABAD; ABORESHAID, 1997) e reserva de operação a longo prazo. Um critério, cuja a aplicação direta na avaliação de adequação não foi encontrado no estado arte, é a verificação do mínimo e máximo carregamento que um sistema pode atender sem que limites operativos sejam violados. Essa tipologia de critério revela um caráter diferenciado aos estados, caráter este explorado nas contribuições deste trabalho.

## 2.3 MODELAGEM DE COMPONENTES APLICADA À AVALIAÇÃO DE ADEQUAÇÃO DE SISTEMAS COMPOSTOS

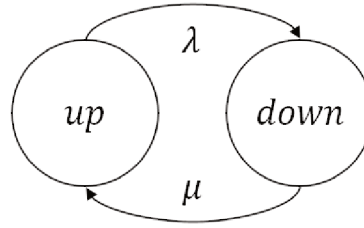
As metodologias utilizadas neste trabalho possibilitam a aplicação de modelos para a representação da disponibilidade de equipamentos e unidades de geração, flutuação de capacidade de usinas hídricas e eólicas, e comportamento cronológico da carga. Foca-se na avaliação de adequação de sistemas compostos a longo prazo, destacando a necessidade de:

- modelagem estocástica de ciclo de falha/reparo;
- modelagem temporal de flutuações de capacidade de geração proveniente de fontes com dependência hidrológica e/ou eólica, quando de interesse.

O modelo estocástico para o ciclo de falha/reparo está relacionado com o comportamento estocástico de cortes forçados, definindo a indisponibilidade de componentes, isto é, definindo as transições entre os estados *up* (sucesso) e *down* (falha). Os modelos estocásticos de ciclos de falha/reparo considerados são os modelos de Markov a dois estados, conforme mostrado na Figura 3, e multi-estados, conforme mostrado na Figura 4 (BILLINTON; LI, 1994; RUBINSTEIN; KROESE, 2007).

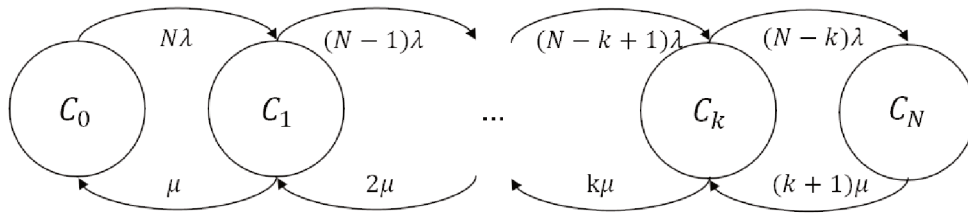
Um componente, cujo o ciclo de falha/reparo seja representado por um modelo Markoviano a dois estados, apresenta capacidade máxima disponível quando se encontra no estado *up*. No estado *down*, a sua capacidade é considerada nula. No

Figura 3 – Modelo Markoviano a dois estados.



Fonte: do autor, baseado em (BILLINTON; LI, 1994).

Figura 4 – Modelo Markoviano multi-estado.



Fonte: do autor, baseado em (RUBINSTEIN; KROESE, 2007).

modelo Markoviano, assume-se que a duração de permanência nos estados é exponencialmente distribuída, sendo que o tempo de permanência nos estados *up* e *down* é dado pelo método da transformação inversa (RUBINSTEIN; KROESE, 2007) de acordo com as expressões:

$$T^{up} = -\frac{1}{\lambda} \ln U_1 \quad (1)$$

e

$$T^{down} = -\frac{1}{\mu} \ln U_2, \quad (2)$$

onde  $T^{up}$  é o tempo de permanência no estado *up*,  $T^{down}$  é o tempo de permanência no estado *down*,  $U_1$  e  $U_2$  números aleatórios escolhidos segundo uma distribuição uniforme no intervalo  $[0, 1]$ .

Se o ciclo de falha/reparo de cada um de  $N$  componentes agregados for independente e identicamente distribuído, pode ser aplicado o modelo de Markov multi-estado, ilustrado na Figura 4. Neste caso, a capacidade máxima de um estado  $C_k$  é dado por:

$$\mathcal{C}_{C_k} = (N - k)\mathcal{C} \quad (3)$$

onde  $N$  é o número de componentes,  $k = 0, 1, \dots, N$ , e  $\mathcal{C}$  é a capacidade de um componente. Caso o tempo de permanência em um estado seja exponencialmente distribuído, o tempo de permanência nos estados  $C_0$  e  $C_N$  é dado por :

$$T^{(0)} = -\frac{1}{N\lambda} \ln U_1 \quad (4)$$

e

$$T^{(N)} = -\frac{1}{N\mu} \ln U_2, \quad (5)$$

onde  $T^{(0)}$  é o tempo de permanência no estado  $C_0$ ,  $T^{(N)}$  é o tempo de permanência no estado  $C_N$ ,  $\lambda$  e  $\mu$  são as taxas de falha e reparo de um componente da agregação, respectivamente. Para os restantes estados, o tempo de permanência é calculado usando a expressão:

$$T^{(k)} = \min \left\{ -\frac{1}{(N-k)\lambda} \ln U_1, -\frac{1}{k\mu} \ln U_2 \right\}. \quad (6)$$

Ao invés da aplicação das taxas  $\lambda$  e  $\mu$ , faz-se comum o emprego dos parâmetros Tempo Médio de Falha (MTTF – *Mean Time To Failure*) e Tempo Médio de Reparo (MTTR – *Mean Time To Repair*), definidos pelas fórmulas (BILLINTON; ALLAN, 1996):

$$\text{MTTF} = \frac{1}{\lambda} \quad (7)$$

e

$$\text{MTTR} = \frac{1}{\mu} \quad (8)$$

Os modelos temporais de capacidade focam-se na representação temporal das capacidades dos recursos das unidades de geração. São modelos de extrema importância dado que representam as variações horárias, mensais, ou ainda, anuais da capacidade (MATOS *et al.*, 2009; LEITE DA SILVA; SALES *et al.*, 2010). Essa característica temporal é representada por meio de séries horárias/mensais com probabilidades associadas, geradas a partir de vários anos de observação.

### 2.3.1 Unidades de geração

Unidades de geração podem ser tipicamente modeladas por ciclos de falha/reparo representados por modelos de Markov de dois estados. Assume-se assim que as transições de estado seguem uma distribuição de probabilidade exponencial. No estado *up*, a capacidade de produção da unidade de geração é considerada plena. Inversamente, no estado *down*, a capacidade é considerada nula. Variantes para essa modelagem podem ser aplicadas em caso de necessidade de maior representatividade das tecnologias envolvidas e disponibilidade de recurso, como por exemplo no caso de unidades em plantas de geração hídrica e eólica.

Unidades de geração hídrica são aquelas que convertem a energia potencial da água em eletricidade. O modelo temporal da capacidade das unidades hídricas é complexo, uma vez que a potência gerada por cada unidade depende dos níveis de água armazenados em reservatórios e da afluência. Uma aproximação para o modelo temporal baseia-se nas observações históricas anuais e probabilidades associadas a

cada ano do histórico, onde se estima um polinômio que relaciona volumes mensais armazenados com capacidade disponível. Essa capacidade pode ainda ser reduzida frente a aplicação de um modelo estocástico de falha/reparo multi-estados (MATOS *et al.*, 2009).

As unidades de geração eólica são aquelas que convertem a energia eólica em eletricidade. O modelo de Markov com multi-estados pode ser usado para representar o ciclo de falha/reparo de todo um parque eólico uma vez que as turbinas eólicas num mesmo parque eólicos são geralmente iguais (MAGALHÃES CARVALHO, 2013). A capacidade máxima dos estados pode ser ainda multiplicada pelo correspondente valor retirado de séries eólicas horárias. Essas séries captam a produção horária dos parques eólicos em percentagem da capacidade total do parque.

Uma vez que o foco deste trabalho é o desenvolvimento de estratégias de análise em regime permanente para a avaliação de sistemas compostos, o modelo convencional de Markov de dois estados foi utilizado para a representação das unidades de geração.

### **2.3.2 Linhas de transmissão e transformadores**

O ciclo de falha/reparo de linhas de transmissão e transformadores pode ser, similarmente aos casos anteriores, representado por um modelo de Markov a dois estados, com transições que seguem uma distribuição probabilidade exponencial. A aplicação de modelos alternativos é citada na literatura, como em (CASTEREN, 2001).

### **2.3.3 Carga**

Visando a aplicação em métodos de simulação não sequencial, a carga de um sistema pode ser modelada a partir de modelos de Markov não-agregados com múltiplos níveis (RESENDE, 2006; LEITE DA SILVA; FONSECA MANSO *et al.*, 2000). A carga também pode ser modelada usando uma representação cronológica e determinística que contém o nível de carga para cada hora do ano (MELLO; PEREIRA; LEITE DA SILVA, 1994; MELLO; PEREIRA; SILVA *et al.*, 1997). O método de simulação de Monte Carlo sequencial segue cronologicamente esses níveis à medida que a simulação prossegue. Adicionalmente, cada barra pode ter o seu próprio perfil horário de carga em percentagem do seu pico de carga. Cada percentagem horária é obtida dividindo-se o pico de carga da hora pelo pico de carga do ano.

## **2.4 SIMULAÇÃO DE MONTE CARLO APLICADA À ADEQUAÇÃO DE SISTEMAS COMPOSTOS**

Existem no estado da arte diversos métodos de avaliação de confiabilidade de sistemas compostos. Esses métodos podem ser subdivididos em métodos analíticos,

onde se englobam os métodos enumerativos e aproximados, ou métodos baseados em simulação, aos quais pertencem os métodos de simulação de Monte Carlo não sequencial e sequencial. Conforme descrito na Seção 1.1, os métodos de simulação de Monte Carlo se destacam por permitir a modelagem adequada de complexidades dos sistemas elétricos de potência, fato pelo qual uma descrição detalhada dos mesmos é apresentada a seguir.

Os métodos de simulação de Monte Carlo (RUBINSTEIN; KROESE, 2007; PEREIRA; BALU, 1992) permitem obter, além de estimativas para os índices de confiabilidade, um intervalo de confiança que os contenham. A vantagem desses métodos em relação aos métodos analíticos reside no número de amostras necessárias para garantir o nível de precisão desejado para as estimativas, as quais não dependem da dimensão do sistema de potência, mas antes da sua confiabilidade (PEREIRA; BALU, 1992). A flexibilidade desses métodos permitiu também a sua vasta aplicação em estudos em NH1 e em NH2.

Para um sistema elétrico de potência contendo  $m$  componentes (geradores, linhas de transmissão, transformadores, etc.), um estado  $\mathbf{x}_i$  do sistema pode ser visto como uma condição particular onde cada componente possui o seu próprio estado  $x_j$ , o qual pode assumir valores correspondentes ao estado *up*, *down* ou outro, para todo  $j = 1, \dots, m$ . Cada estado  $\mathbf{x}_i$  a se avaliar pode ser modelado por um vetor

$$\mathbf{x}_i = [x_1, \dots, x_m, x_{m+1}]^t$$

com  $m + 1$  elementos, sendo o elemento  $m + 1$  correspondente ao fator de carga.

Os métodos de simulação de Monte Carlo são classificados de acordo com a forma como os estados do sistema são amostrados. Se os estados são selecionados desconsiderando a sequência temporal entre eles, o método de simulação de Monte Carlo é denominado não sequencial. Por outro lado, quando os estados do sistema são amostrados tendo em consideração a cronologia dos eventos, o método é denominado sequencial. Existem também métodos híbridos, tais como o método de simulação de Monte Carlo pseudo-sequencial (MELLO; PEREIRA; LEITE DA SILVA, 1994), pseudo-cronológico (LEITE DA SILVA; FONSECA MANSO *et al.*, 2000) e quasi-sequencial (LEITE DA SILVA; GONZÁLEZ-FERNÁNDEZ *et al.*, 2010), propostos como alternativas para diminuir o esforço computacional para a estimação dos índices. Esses métodos adotam de maneira conjunta representações no espaço de estados e representações cronológicas.

A avaliação de um estado no método de Monte Carlo depende do nível hierárquico onde decorre a avaliação. Se o estudo ocorre no nível hierárquico NH1, a avaliação consiste em verificar apenas se o total de capacidade de geração naquele estado do sistema é superior ao total de carga demandado nesse instante. Em caso afirmativo, o estado é denominado de sucesso. Caso contrário, é denominado de falha. Quando a avaliação da adequação ocorre em NH2, é necessário verificar o sucesso

do estado de forma que seja possível suprir a demanda verificando limites operativos correspondentes às unidades geradoras e sistemas de transmissão. Tradicionalmente isto é aferido através da resolução de um fluxo de potência ou fluxo de potência ótimo. Existindo uma solução sem violações de limites, o estado é considerado de sucesso, sendo considerado de falha em caso contrário.

A convergência do método de simulação de Monte Carlo é monitorada pelo coeficiente de variação  $\beta$  das estimativas dos índices de confiabilidade (RUBINSTEIN; KROESE, 2007). Considerando  $H(\mathbf{X})$  uma função teste representando um determinado índice de confiabilidade, o coeficiente de variação é calculado de acordo com a equação:

$$\beta = \frac{\sqrt{\text{Var}[H(\mathbf{X})]/N_s}}{\tilde{E}[H(\mathbf{X})]}, \quad (9)$$

onde  $\tilde{E}[H(\mathbf{X})]$  é a estimativa de um dado índice de confiabilidade calculada pela esperança matemática de  $H(\mathbf{X})$ ,  $\text{Var}[H(\mathbf{X})]$  é a variância da função teste e  $N_s$  é o número de amostras. A variância pode ser estimada usando o estimador não enviesado:

$$\widetilde{\text{Var}}[H(\mathbf{X})] = \frac{1}{N_s - 1} \sum_{i=1}^{N_s} \left( H(\mathbf{x}_i) - \tilde{E}[H(\mathbf{X})] \right)^2, \quad (10)$$

com  $\mathbf{x}_i$  um estado do sistema nos  $N_s$  estados amostrados (RUBINSTEIN; KROESE, 2007). A função teste adequada para o índice de confiabilidade depende do método de simulação de Monte Carlo (PEREIRA; BALU, 1992).

Suponhamos que o parâmetro a ser estimado pelo método de simulação é dado por  $\mu = E[H(\mathbf{X})]$ . O Teorema do Limite Central (ROSS, 2010) estabelece que a soma de variáveis independentes e identicamente distribuídas

$$Z = \frac{\sqrt{N_s}}{\sigma} \left( \left( \frac{1}{N_s} \sum_{i=1}^{N_s} H(\mathbf{x}_i) \right) - \mu \right) \quad (11)$$

tende para a distribuição Gaussiana de média nula e variância 1 quando  $N_s \rightarrow \infty$ . Para qualquer  $z \geq 0$  é possível encontrar números  $-z$  e  $z$  tais que  $Z$  está contido no intervalo por eles definidos com probabilidade  $1 - \alpha$ . Matematicamente, isto pode ser descrito como

$$\mathcal{P}(-z \leq Z \leq z) = 1 - \alpha. \quad (12)$$

O valor de  $z$  pode ser obtido usando a distribuição cumulativa de probabilidade

$$\Phi(z) = \mathcal{P}(Z \leq z) = 1 - \alpha. \quad (13)$$

Dada uma probabilidade  $1 - \alpha$ , o intervalo de confiança para  $\mu$  é expresso por

$$\mathcal{P} \left( \underbrace{\tilde{\mu} - \Phi^{-1} \left( 1 - \frac{\alpha}{2} \right) \frac{\sigma}{\sqrt{N_s}}}_{\text{Inf } 1-\alpha} \leq \mu \leq \underbrace{\tilde{\mu} + \Phi^{-1} \left( 1 - \frac{\alpha}{2} \right) \frac{\sigma}{\sqrt{N_s}}}_{\text{Sup } 1-\alpha} \right) = 1 - \alpha, \quad (14)$$



onde

$$\tilde{\mu} = \frac{1}{N_s} \sum_{i=1}^{N_s} H(\mathbf{x}_i). \quad (15)$$

Por exemplo, o intervalo de confiança para  $\alpha$  igual a 5% é

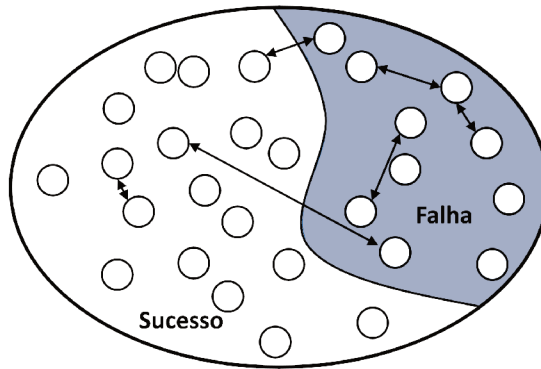
$$\mathcal{P} \left( \tilde{\mu} - 1,96 \frac{\sigma}{\sqrt{N_s}} \leq \mu \leq \tilde{\mu} + 1,96 \frac{\sigma}{\sqrt{N_s}} \right) = 0,95 \quad (16)$$

e esse intervalo contém o valor real do índice com uma probabilidade de 95%.

#### 2.4.1 Método de simulação de Monte Carlo não sequencial

No método de simulação de Monte Carlo não sequencial os estados do sistema são amostrados através de “fotografias” amostradas do seu comportamento estocástico. O estado de todos os componentes é amostrado sem considerar qualquer dependência temporal entre estados consecutivos. A confiabilidade desses estados é estimada realizando uma exploração estocástica do espaço de estados, como ilustrado na Figura 5. Os estados de falha do sistema são aqueles que se encontram na região sombreada da figura, sendo os estados de sucesso do sistema aqueles que se encontram na região branca. As setas entre estados mostram que o novo estado em avaliação pode proceder tanto de um estado de sucesso como de um estado de falha, e que este pode ser avaliado como sendo de sucesso ou falha, independentemente do resultado de avaliação do estado anterior.

Figura 5 – Representação de espaço de estados.



Fonte: do autor.

Matematicamente, a esperança de uma função teste no espaço de estados é dada por:

$$\tilde{E}[H(\mathbf{X})] = \frac{1}{N_s} \sum_{i=1}^{N_s} H(\mathbf{x}_i). \quad (17)$$

Essa esperança compõe uma estimativa para o índice de confiabilidade correspondente a função  $H(\mathbf{X})$ .

Como exemplo, observa-se que a função teste para o índice LOLP (MELO; PEREIRA; LEITE DA SILVA, 1992) pode ser escrita como:

$$H_{\text{LOLP}}(\mathbf{x}_i) = \begin{cases} 1 & \text{se } \mathbf{x}_i \in S_{\mathbf{x}_f} \\ 0 & \text{se } \mathbf{x}_i \in S_{\mathbf{x}_s} \end{cases} \quad (18)$$

onde  $S_{\mathbf{x}} = S_{\mathbf{x}_s} \cup S_{\mathbf{x}_f}$  é o conjunto de todos os estados do sistema divididos em sub-conjuntos de estados de sucesso,  $S_{\mathbf{x}_s}$ , e de estados de falha,  $S_{\mathbf{x}_f}$ .

A função de teste para o índice EPNS (MELO; PEREIRA; LEITE DA SILVA, 1992) é:

$$H_{\text{EPNS}}(\mathbf{x}_i) = \begin{cases} \Delta P & \text{se } \mathbf{x}_i \in S_{\mathbf{x}_f} \\ 0 & \text{se } \mathbf{x}_i \in S_{\mathbf{x}_s} \end{cases} \quad (19)$$

onde  $\Delta P$  é o valor do corte de carga do estado  $\mathbf{x}_i$ .

Calcular a frequência e duração de falhas tendo como base um espaço de estados pode ser uma tarefa difícil (MELO; PEREIRA; LEITE DA SILVA, 1992). Tradicionalmente esses cálculos envolvem enumerar todos os estados de sucesso (ou falha) que podem ser alcançados a partir de um estado de falha (ou sucesso), efetuando-se mudança de estado em apenas um componente do sistema (MELO; PEREIRA; LEITE DA SILVA, 1992). Esse processo enumerativo é preferencialmente usado nos estudos de capacidade de geração, cujo esforço computacional de enumerar e avaliar os estados é reduzido. De acordo com esta definição, a função de teste seguinte pode ser usada para o índice LOLF

$$H_{\text{LOLF}}(\mathbf{x}_i) = \begin{cases} \sum_{i \neq k}^k \lambda_{ik} & \text{se } \mathbf{x}_i \in S_{\mathbf{x}_f} \\ 0 & \text{se } \mathbf{x}_i \in S_{\mathbf{x}_s} \end{cases} \quad (20)$$

onde  $\lambda_{ik}$  é a taxa de transição entre o estado de falha  $\mathbf{x}_i$  e o estado de sucesso  $\mathbf{x}_k$  que pode ser alcançado a partir de  $\mathbf{x}_i$  mudando apenas o estado de um componente do sistema.

O algoritmo do método de simulação de Monte Carlo não sequencial é apresentado no Algoritmo 1.

---

**Algoritmo 1** Método de simulação de Monte Carlo não sequencial

---

Seja  $N_s^{\text{max}}$  o número máximo de amostras a simular e  $N_s = 0$ .

---

- 1: Atualizar o número de amostras:  $N_s \leftarrow N_s + 1$ ;
- 2: Sortear um estado do sistema a partir das funções de distribuição de probabilidade de falha dos componentes;
- 3: Avaliar o estado do sistema;
- 4: Atualizar os valores das funções teste e índices de confiabilidade de acordo com (17);
- 5: Atualizar os coeficientes de variação  $\beta$  de acordo com (9);

- 
- 6: Se  $N_s = N_s^{max}$  ou se os coeficientes de variação são inferiores a uma tolerância especificada, parar a simulação; senão voltar ao Passo 1.
- 

Incluir aspectos cronológicos da operação do sistema no método de simulação de Monte Carlo não sequencial, tais como variações de carga, hidrológicas ou de recurso eólico, não é uma tarefa simples. No entanto, esforços foram realizados para circunscrever esta limitação (SILVA DIAS; TANCREDO BORGES, 2010; BORGES, 2012).

### 2.4.2 Método de simulação de Monte Carlo sequencial

No método de simulação de Monte Carlo sequencial, os estados do sistema são amostrados definindo movimento através de um relógio virtual ou fictício e, com o decorrer do tempo, sequências de eventos são sinteticamente gerados criando uma história de operação do sistema. Nesse método, dois estados consecutivos do sistema diferem um do outro no estado de um único componente (BILLINTON; LI, 1994; PEREIRA; BALU, 1992). Uma vez que se pode simular sequencialmente eventos no sistema, é viável modelar aspectos cronológicos, tais como, modelos de carga espaço-temporais correlacionados, flutuação de capacidade de fontes de energia renováveis, funções de custo de clientes por área ou barra, manutenção programada, etc. Ademais, modelos não-Markovianos para representar as falhas de componentes do sistema podem ser considerados e as distribuições dos índices de adequação podem ser obtidos (BILLINTON; LI, 1994; PEREIRA; BALU, 1992).

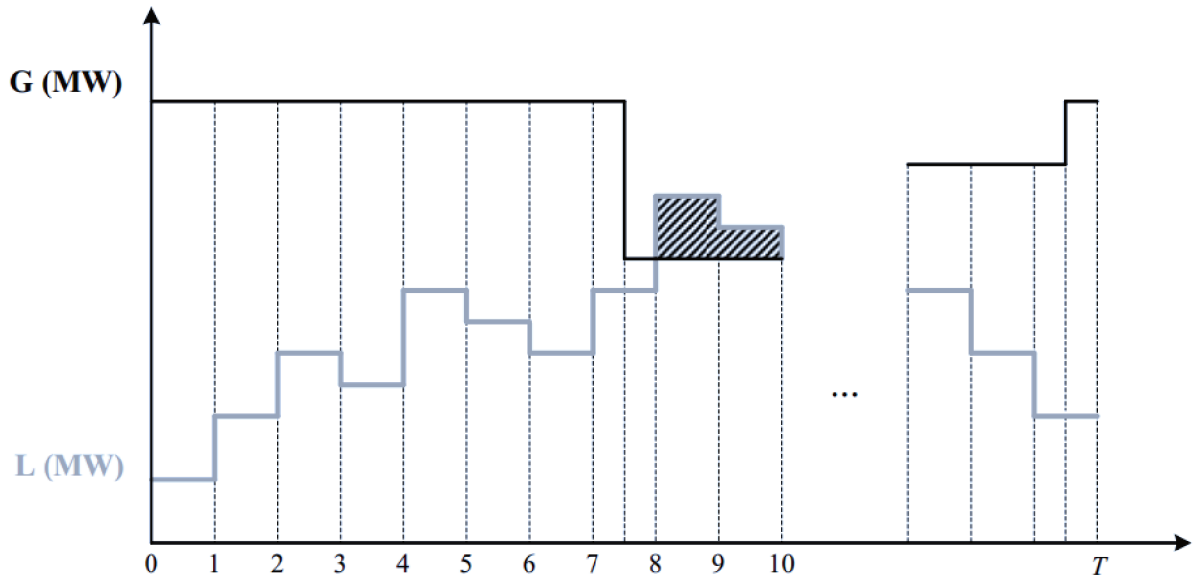
A título de exemplo, a Figura 6 descreve como os estados do sistema são amostrados pelo método de simulação de Monte Carlo sequencial para a avaliação da adequação da capacidade de geração. As áreas sombreadas nesta figura representam a energia cortada. Mostra-se também que os estados de transição entre diferentes níveis de carga são avaliados segundo intervalos de tempo fixos, enquanto o tempo de permanência das unidades de geração em determinado estado não é fixa, pois depende de um processo de amostragem.

Similarmente ao método de simulação de Monte Carlo não sequencial, a estimação dos índices de confiabilidade é realizada de acordo com a expressão:

$$\tilde{E}[H(\mathbf{X})] = \frac{1}{N_y} \sum_{i=1}^{N_y} H(\{\mathbf{x}_n\}_{n=1}^{S_i}), \quad (21)$$

onde  $\{\mathbf{x}_n\}_{n=1}^{S_i} = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{S_i}\}$  é a sequência sintética dos estados do sistema durante o período  $i$ ,  $S_i$  é o número de estados do período  $i$  e  $N_y$  é o número de períodos simulados. Como exemplo, a função teste  $H$  para o índice LOLP, que é avaliado no

Figura 6 – Representação simplificada de uma sequência de eventos durante um período de tempo  $T$ .



Fonte: (MAGALHÃES CARVALHO, 2013)

final de cada período de simulação  $T$ , é definida por:

$$H_{\text{LOLP}}(\{\mathbf{x}_n\}_{n=1}^{S_i}) = \frac{1}{T} \sum_{n=1}^{S_i} d(\mathbf{x}_n) \times H_{\text{LOLP}}(\mathbf{x}_n), \quad (22)$$

onde  $\mathbf{x}_n$  é o  $n$ -ésimo estado da sequência,  $T$  é a duração do intervalo de tempo sintético (tipicamente  $T = 8.760$  h),  $d(\mathbf{x}_n)$  é a duração do estado  $\mathbf{x}_n$  e  $H_{\text{LOLP}}(\mathbf{x}_n)$  é a transformação de (18) tomando  $\mathbf{x}_n$  como argumento.

A próxima função teste pode ser usada no caso do índice EPNS:

$$H_{\text{EPNS}}(\{\mathbf{x}_n\}_{n=1}^{S_i}) = \frac{1}{T} \sum_{n=1}^{S_i} d(\mathbf{x}_n) \times H_{\text{EPNS}}(\mathbf{x}_n), \quad (23)$$

onde  $H_{\text{EPNS}}(\mathbf{x}_n)$  é a transformação de (19) usando  $\mathbf{x}_n$  como argumento.

Ao contrário do método de simulação de Monte Carlo não sequencial, os cálculos da frequência e duração são bastante simples de se efetuar: a detecção de eventos de corte de carga é realizada a partir da simulação sequencial do sistema tal que:

$$H_{\text{LOLF}}(\{\mathbf{x}_n\}_{n=1}^{S_i}) = \sum_{n=1}^{S_i} h(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_{n-1}), \quad (24)$$

onde

$$h(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_{n-1}) = \begin{cases} 1 & \text{se } \mathbf{x}_n \in S_{\mathbf{x}_f} \text{ e } \mathbf{x}_{n-1} \in S_{\mathbf{x}_s} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}, \quad (25)$$

uma vez que esse método tem subjacente uma noção temporal.

O algoritmo do método de simulação de Monte Carlo sequencial é apresentado no Algoritmo 2.

---

**Algoritmo 2** Método de simulação de Monte Carlo sequencial

---

Seja  $N_y^{max}$  o número máximo de anos a simular,  $h = 0$  o instante de tempo do relógio fictício,  $N_y = 1$  e  $T = 8.760$  h.

- 1: Inicializar estados de componentes e carga;
  - 2: Amostrar tempo de permanência dos componentes nesses estados de acordo com (1) e (2);
  - 3: Identificar o instante da próxima transição de estado e efetuar a transição do componente ou patamar de carga correspondente; atualizar  $h$  com o instante de transição;
  - 4: Avaliar o estado do sistema;
  - 5: Atualizar os valores das funções teste;
  - 6: Se  $h = 8.760$  h, atualizar os índices de confiabilidade de acordo com (21); senão voltar ao Passo 2;
  - 7: Atualizar os coeficientes de variação  $\beta$  de acordo com (9);
  - 8: Se  $N_y = N_y^{max}$  ou se os coeficientes de variação são inferiores a uma tolerância especificada, parar a simulação; senão  $N_y = N_y + 1$ ,  $h = 0$  e voltar ao Passo 2.
- 

A adição de temporalidade ao método de simulação de Monte Carlo tem por desvantagem a necessidade de maiores tempos de execução para a estimação de índices de confiabilidade. Contudo, existem no estado da arte vários exemplos de aplicações de técnicas estatísticas ou métodos de otimização, que quando aplicados ao método de simulação de Monte Carlo, buscam minimizar esforços computacionais. Uma das melhorias encontrada na literatura recente está relacionada com a otimização da seleção dos estados do método de simulação de Monte Carlo a partir de técnicas de redução de variância. O método de entropia cruzada se enquadra como uma técnica de redução de variância, a qual tem sido aplicada com sucesso em problemas voltados à análise de confiabilidade de sistemas elétricos.

### 2.4.3 Método de entropia cruzada

A aplicação do método de simulação de Monte Carlo para a avaliação da confiabilidade de sistemas elétricos de potência está bem documentada no estado da arte. No entanto, para sistemas elétricos robustos, ou quando se visa a estimação de índices com coeficientes de variação reduzidos, um grande esforço computacional pode ser requerido, dado que os estados a serem avaliados e que contribuem para a convergência do método são estados de falha cuja probabilidade de ocorrência é

muito baixa. Em (RUBINSTEIN, 1997; KROESE; TAIMRE; BOTEV, 2011; BOTEV *et al.*, 2013), técnicas de redução de variância tais como *importance sampling* (amostragem por importância, em tradução livre) são aplicadas com a finalidade de reduzir o esforço computacional de métodos de Monte Carlo. Dentre essas técnicas, destaca-se a aplicação do método de entropia cruzada, que é visto como uma técnica genérica de Monte Carlo para problemas de estimação e otimização complexos (KROESE; TAIMRE; BOTEV, 2011).

O método de entropia cruzada foi inicialmente proposto em (RUBINSTEIN, 1997) para a estimação de probabilidades de eventos raros, e pode ser utilizado de duas formas distintas a depender do objetivo da aplicação (BOTEV *et al.*, 2013):

- **Estimação:** Estimar  $\ell = \mathbb{E}[H(\mathbf{x})]$ , onde  $\mathbf{x}$  é um objeto aleatório que assume valores num conjunto  $\mathcal{X}$  e  $H$  é uma função em  $\mathcal{X}$ ;
- **Otimização:** minimizar (ou maximizar) uma função objetivo  $S(\mathbf{x})$ , com  $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ .

A ideia de usar o método de entropia cruzada é buscar uma solução ótima de distribuição de probabilidade para direcionar a amostragem por importância (RUBINSTEIN; KROESE, 2007). A solução ótima é encontrada em dois passos: a) gerar uma amostra aleatória de acordo com um determinado mecanismo; b) atualizar os parâmetros do mecanismo com base na amostra aleatória visando produzir uma amostra melhor na próxima iteração.

O método de entropia cruzada surgiu a partir de um algoritmo adaptativo para a estimação de probabilidade de eventos raros baseada em redução de variância. A aplicação do método de entropia cruzada para estimar eventos com probabilidade de ocorrência baixa pode ser formulada da seguinte forma. Suponha que se pretende estimar uma probabilidade  $P$ , associada a um evento raro, que atende a seguinte definição:

$$\ell = \mathbb{P}(S(\mathbf{x}) \geq \gamma) = \mathbb{E}[\mathbf{1}_{S(\mathbf{x}) \geq \gamma}] = \int \mathbf{1}_{S(\mathbf{x}) \geq \gamma} f(\mathbf{x}; \mathbf{u}) d\mathbf{x}, \quad (26)$$

onde  $S$  é uma função real,  $\gamma$  é o parâmetro de nível e a variável aleatória  $\mathbf{x}$  tem função de densidade de probabilidade  $f(\cdot; \mathbf{u})$ , parametrizada por um vetor real de dimensão finita  $\mathbf{u}$ . Suponhamos agora que existe outra função de densidade de probabilidade  $g$  tal que  $g(\mathbf{x}) = 0 \implies H(\mathbf{x})f(\mathbf{x}; \mathbf{u}) = 0, \forall \mathbf{x}$ . A probabilidade  $\ell$  pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\ell = \int \frac{\mathbf{1}_{S(\mathbf{x}) \geq \gamma} f(\mathbf{x}; \mathbf{u})}{g(\mathbf{x})} g(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \mathbb{E} \left[ \frac{\mathbf{1}_{S(\mathbf{x}) \geq \gamma} f(\mathbf{x}; \mathbf{u})}{g(\mathbf{x})} \right], \mathbf{x} \sim g. \quad (27)$$

Se  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N$  forem  $N$  vetores aleatórios independentes e identicamente distribuídos com função de densidade de probabilidade  $g$ , então um estimador não envies-

sado para a probabilidade  $\ell$  é dado por:

$$\hat{\ell} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \mathbf{I}_{S(\mathbf{x}) \geq \gamma} \frac{f(\mathbf{x}_k; \mathbf{u})}{g(\mathbf{x}_k)}, \quad (28)$$

onde a fração  $f(\mathbf{x}_k; \mathbf{u})/g(\mathbf{x}_k)$  é denominada de razão de verosimilhança. A função de densidade de probabilidade  $g^*$  para a qual a variância de  $\hat{\ell}$  é mínima é a função de densidade de  $\mathbf{x}$  condicionada ao evento  $S(\mathbf{x}) \geq \gamma$  (RUBINSTEIN; KROESE, 2007):

$$g^* = \frac{f(\mathbf{x}; \mathbf{u}) \mathbf{I}_{S(\mathbf{x}) \geq \gamma}}{\ell}. \quad (29)$$

Com a aplicação do método de entropia cruzada busca-se a determinação de uma função de densidade de probabilidade no conjunto  $\{f(\cdot; \mathbf{v}, \mathbf{v} \in V)\}$  tal que seja mínima a divergência de Kullback-Leibler entre  $g^*$  e  $g$ . O parâmetro de referência ótimo  $\mathbf{v}^*$  é dado por (BOTEV *et al.*, 2013):

$$\mathbf{v}^* = \operatorname{argmax}_{\mathbf{v} \in V} \mathbb{E}_{\mathbf{w}} \left( \mathbf{I}_{S(\mathbf{x}) \geq \gamma} \ln f(\mathbf{x}; \mathbf{v}) \frac{f(\mathbf{x}; \mathbf{v})}{f(\mathbf{x}; \mathbf{w})} \right), \quad (30)$$

onde  $\mathbf{W}$  é um parâmetro de referência. Tem-se ainda que  $\mathbf{v}^*$  pode ser estimado a partir da seguinte equação:

$$\hat{\mathbf{v}} = \operatorname{argmax}_{\mathbf{v} \in V} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \mathbf{I}_{S(\mathbf{x}) \geq \gamma} \frac{f(\mathbf{X}_k; \mathbf{v})}{f(\mathbf{X}_k; \mathbf{w})} \ln f(\mathbf{X}_k; \mathbf{v}). \quad (31)$$

A dificuldade em resolver a equação (31) está relacionada com o fato da probabilidade associada ao evento raro em estudo ser nula para a maioria dos indicadores  $\mathbf{I}_{S(\mathbf{x}) \geq \gamma}$ , o que torna o problema de otimização muito difícil de resolver. Nesses casos, a aplicação de uma metodologia de entropia cruzada de níveis múltiplos é frequentemente usada com o objetivo de criar sequências de referência  $\{\hat{\mathbf{v}}_t\}$  e  $\{\hat{\gamma}_t\}$  convergentes para o parâmetro  $\mathbf{v}^*$  e para o nível  $\gamma$ , respectivamente. A ideia chave é, para cada iteração  $t$ , selecionar  $N$  amostras independentes das variáveis  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N$ , considerando a função de densidade  $f(\cdot; \hat{\mathbf{v}}_{t-1})$  estimada via amostragem por importância e definindo o parâmetro de nível  $\hat{\gamma}_t$  como sendo o quantil  $(1 - \varrho)$  dos valores de desempenho  $S(\mathbf{x}_1), \dots, S(\mathbf{x}_N)$ , onde  $\varrho \in (0, 1)$  é o parâmetro de raridade. O valor de  $\hat{\mathbf{v}}_t$  é atualizado considerando o método de minimização de entropia cruzada baseada nas  $N^e = \lceil \varrho N \rceil$  amostras de elite. Um algoritmo de entropia cruzada para a estimação de eventos raros é apresentado no Algoritmo 3.

---

**Algoritmo 3** Método de entropia cruzada para a estimação de eventos raros

---

Seja  $N$  a dimensão da amostra a considerar,  $\varrho$  o parâmetro de raridade e  $N^e$  o número de amostras de elite. Defina-se ainda  $t = 1$ .

1: Definir  $\hat{\mathbf{v}}_0 = \mathbf{u}$ ;

- 2: Gerar as  $N$  amostras  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N \sim_{iid} f(\cdot; \hat{\mathbf{v}}_{t-1})$ . Calcular  $S_i = S(\mathbf{x}_i), \forall i$  e ordenar tal que  $S_{(1)} \leq \dots \leq S_{(N)}$ . Seja  $\hat{\gamma}_t = S_{(N-N^e+1)}$  o quantil  $1 - \varrho$  de desempenho. Se  $\hat{\gamma} > \gamma$ , definir  $\hat{\gamma} = \gamma$ ;
- 3: Calcule-se  $\hat{\mathbf{v}}_t$  a partir da equação (31) considerando a mesma amostra  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N$  e  $\mathbf{w} = \hat{\mathbf{v}}_t$ ;
- 4: Se  $\hat{\gamma}_t, \gamma$ , atualizar  $t = t + 1$  e voltar ao Passo 2. Caso contrário, seguir para o Passo 5;
- 5: Seja  $T = t$  o número total de iterações. Gerar  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N \sim_{iid} f(\cdot; \hat{\mathbf{v}}_T)$  e estimar a probabilidade  $\ell$  via *importance sampling* usando a equação (28) considerando  $\mathbf{u} = \hat{\mathbf{v}}_T$ .

A adaptação deste algoritmo com o intuito de otimizar funções ao invés de estimar probabilidades de eventos raros se baseia não em estimar  $\ell$ , mas em encontrar uma distribuição ótima baseada em amostragem por importância que concentra as suas observações em torno de um ponto ótimo (RUBINSTEIN; KROESE, 2007; BOTEV *et al.*, 2013). Assuma, sem perda de generalidade, que a função  $S(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \mathcal{X}$ , atinge o seu máximo em  $\mathbf{x}^*$  e denote esse máximo por  $\gamma^*$  tal que:

$$\gamma^* = \max_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}} S(\mathbf{x}). \quad (32)$$

O problema de maximização pode ser interpretado como sendo o problema de estimar a probabilidade  $\ell = \mathbb{P}(S(\mathbf{x}) \geq \gamma)$ , onde  $\mathbf{x}$  tem função de densidade de probabilidade  $f(\mathbf{x}; \mathbf{u})$  em  $\mathcal{X}$  e  $\gamma$  é próximo de  $\gamma^*$  (desconhecido). Ao amostrar considerando esta distribuição, os novos estados amostrados estarão na vizinhança do valor ótimo  $\mathbf{x}^*$ . O método de entropia cruzada aplicado segundo esta visão irá produzir uma sequência de níveis  $\{\hat{\gamma}_t\}$  que converge para  $\gamma^*$ , e uma sequência de parâmetros  $\{\hat{\mathbf{v}}_t\}$  que converge para um vetor ótimo  $\mathbf{v}^*$ . De fato, o que se tem aplicando o método de entropia cruzada à otimização é uma sequência de funções de densidade de probabilidade  $f(\cdot; \hat{\mathbf{v}}_0), \dots, f(\cdot; \hat{\mathbf{v}}_t)$  convergindo para uma medida de Dirac, onde no limite se atribui todas as probabilidades a um só ponto, neste caso,  $\mathbf{x}^*$  (RUBINSTEIN; KROESE, 2007).

O algoritmo de entropia cruzada aplicado à otimização é apresentado no Algoritmo 4.

---

**Algoritmo 4** Método de entropia cruzada para otimização

---

Seja  $N$  a dimensão da amostra a considerar,  $\varrho$  o parâmetro de raridade e  $N^e$  o número de amostras de elite. Defina-se ainda  $t = 1$ .

- 1: Escolha-se um vetor inicial de parâmetros  $\hat{\mathbf{v}}_0$ ;
- 2: Gerar as  $N$  amostras  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N \sim_{iid} f(\cdot; \hat{\mathbf{v}}_{t-1})$ . Calcular  $S_i = S(\mathbf{x}_i), \forall i$  e ordenar tal que  $S_{(1)} \leq \dots \leq S_{(N)}$ . Seja  $\hat{\gamma}_t = S_{(N-N^e+1)}$  o quantil  $1 - \varrho$  de desempenho;



3: Considerando a mesma amostra  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N$  resolver o problema estocástico

$$\max_{\mathbf{v}} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \mathbb{I}_{S(\mathbf{x}_k) \geq \hat{\gamma}_t} \ln f(\mathbf{x}_k; \mathbf{v}). \quad (33)$$

Denotar a solução por  $\hat{\mathbf{v}}_t$ ;

4: Se a condição de parada for verificada, finalizar. Caso contrário, definir  $t = t + 1$  e seguir para o Passo 2.

---

Verifica-se que para executar qualquer um dos algoritmos baseados em entropia cruzada é necessário propor uma classe de funções de densidade  $\{f(\cdot; \mathbf{v}), \mathbf{v} \in \mathcal{V}\}$ , o vetor inicial  $\hat{\mathbf{v}}_0$ , a dimensão da amostra  $N$ , o parâmetro de raridade  $\varrho$  e um critério de parada. Durante a estimação do novo vetor de probabilidades  $\hat{\mathbf{v}}_t$  pode ocorrer que o vetor apresente posições nulas ou unitárias (GONZÁLEZ-FERNÁNDEZ, 2012), o que pode incorrer num menor desempenho quando se busca estimar essas probabilidades. A fim de evitar o aparecimento desses valores no vetor  $\hat{\mathbf{v}}_t$ , um parâmetro de suavização pode ser considerado, procedendo a uma atualização de  $\hat{\mathbf{v}}_t$  que atende a equação

$$\hat{\mathbf{v}}_t = \alpha \hat{\mathbf{v}}_t + (1 - \alpha) \hat{\mathbf{v}}_{t-1}. \quad (34)$$

Esse parâmetro de suavização  $\alpha$  assume valores em  $[0, 1]$  (BOTEV *et al.*, 2013).

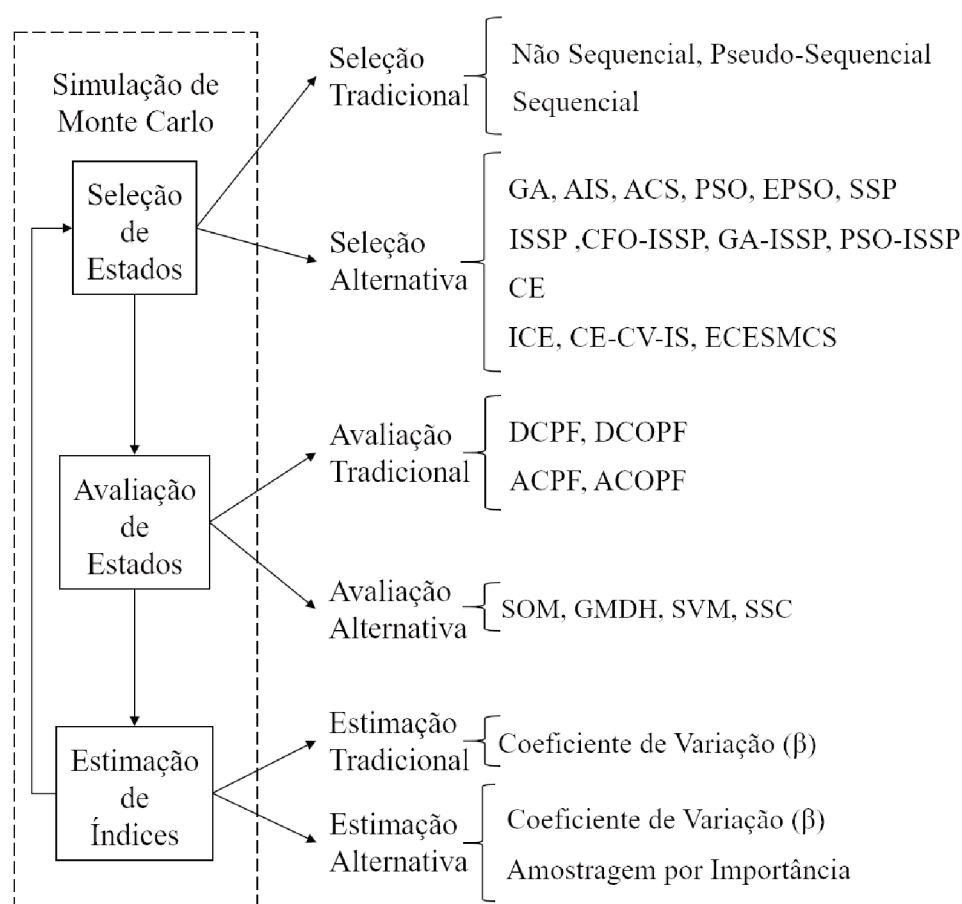
O método entropia cruzada para a estimação de eventos raros foi usado como uma técnica de redução de variância para a estimação de indicadores de confiabilidade em conjunto com o método de simulação de Monte Carlo. Exemplos de avaliação de índices de confiabilidade em NH1 foram apresentados em (GONZÁLEZ-FERNÁNDEZ; SILVA, 2011; GONZÁLEZ-FERNÁNDEZ, 2012), com a aplicação dos métodos de simulação de Monte Carlo sequencial, pseudo-cronológico e quasi-sequencial juntamente com o método de entropia cruzada, e em (M. CARVALHO *et al.*, 2013), onde é apresentado um algoritmo de simulação de Monte Carlo com uma variante simplificada do método de entropia cruzada. O método de entropia cruzada para eventos raros foi também explorado para a avaliação de índices de confiabilidade em NH2 em (GONZÁLEZ-FERNÁNDEZ; SILVA *et al.*, 2013; GONZÁLEZ-FERNÁNDEZ, 2012; TANG; LI; ZHAO, 2017) no método de simulação de Monte Carlo não sequencial, em (DA SILVA *et al.*, 2014) no método de simulação de Monte Carlo quais-sequencial, e em (ZHAO *et al.*, 2019) no método de simulação de Monte Carlo sequencial. Há ainda uma aplicação do método de entropia cruzada conjuntamente com o método de simulação de Monte Carlo, onde no método de otimização de entropia cruzada se considera, além dos componentes de geração e transmissão do sistema, a variação da carga nas barras. Essa metodologia pode ser encontrada em (TÓMASSON; SÖDER, 2017).

O conceito de aplicação de método de entropia cruzada ao NH2 utilizado em (GONZÁLEZ-FERNÁNDEZ; SILVA, 2011; GONZÁLEZ-FERNÁNDEZ, 2012) foi objeto de aprimoramento neste trabalho, a partir da inserção de uma função de desempenho alternativa responsável pelo cálculo de um fator aproximado de máximo carregamento de cada estado visitado pelo método. Por outro lado, o método de entropia cruzada foi também aplicado para a otimização de variáveis discretas relacionadas ao problema de busca por ações corretivas que minimizem o corte de carga para um dado estado visitado pelo método de Monte Carlo sequencial.

## 2.5 DISCUSSÕES ACERCA DO ESTADO DA ARTE

A avaliação de adequação de sistemas elétricos de grande porte usando o método de simulação de Monte Carlo, utilizada para a avaliação de capacidade de geração em NH1 e capacidade de sistema composto em NH2, contempla 3 estágios principais, conforme apresentado na Figura 7:

Figura 7 – Estágios do método de simulação de Monte Carlo destacando contribuições existentes no estado da arte.



Fonte: do autor.

- a seleção dos estados do sistema a serem avaliados;
- a avaliação do estado selecionado incluindo a determinação de valor de corte de carga;
- a estimação dos índices de confiabilidade.

Esses estágios são repetidos até que a estimação dos índices alcance a exatidão desejada.

A seleção de estados é realizada segundo duas vertentes: uma vertente aqui denominada de tradicional e outra denominada de alternativa. A vertente tradicional busca selecionar estados baseado nas taxas de falha e reparo dos componentes do sistema, constituindo assim um estado a ser avaliado. Quando a seleção do estado é não sequencial (BILLINTON; SANKARAKRISHNAN, 1995), os estados a avaliar pelo método são tais que o processo de amostragem de um estado não depende do estado anterior, ou seja, na definição de um novo estado não são considerados os estados dos componentes de seleções passadas. Por outro lado, a seleção sequencial (BILLINTON; SANKARAKRISHNAN, 1995) de estados imprime uma noção temporal ao método. O novo estado a ser definido e avaliado depende do momento temporal de transição do próximo componente ou patamar de carga, seja esta transição de sucesso ou falha, onde o tempo de permanência nesse estado é o tempo mínimo entre os tempos de transição. O tempo de permanência de um componente num determinado estado está diretamente relacionado com os tempos médios para a falha e para o reparo dos componentes, conforme descrito na Seção 2.3. Adicionar temporalidade ao estágio de seleção de estados tem uma principal desvantagem: entre o estado atual e o anterior apenas o estado de um componente ou patamar de carga variam, o que aumenta de forma significativa o número de estados a avaliar até ao alcance da convergência dos índices.

Neste contexto, e buscando amenizar esse impacto, variações do método de simulação de Monte Carlo para a avaliação da confiabilidade de sistemas elétricos foram propostas. Destacam-se as variações aqui denominadas de pseudo-sequencial/pseudo-cronológico, entropia cruzada e series temporais correlacionadas. Os métodos de simulação de Monte Carlo pseudo-sequencial e pseudo/cronológico (MELLO; PEREIRA; LEITE DA SILVA, 1994; LEITE DA SILVA; FONSECA MANSO *et al.*, 2000) são métodos híbridos, onde estados de falha são selecionados de forma não sequencial e a simulação sequencial é apenas aplicada na subsequencia de estados vizinhos ao estado de falha selecionado que definem a interrupção de forma completa. De fato, na aplicação desses métodos, primeiramente são criadas sequências anuais  $x_t$  de estados do sistema; depois, é selecionado uniformemente uma sequência anual  $k$ , com  $k$  variando entre 1 e o número de sequências anuais; seleciona-se um tempo  $t$ ,  $t \in [0, 8.760]$  e avalia-se  $x_k(t)$ . Se  $x_k(t)$  for um estado de

falha, determina-se a subsequência completa que define o estado de falha. Essa subsequência é a união de duas subsequências, uma *forward* e outra *backward*, onde a *forward* é sequência de estados que sucedem o estado de falha até um estado de sucesso  $x_k(t + i), i > 0$ ; a sequência *backward* é a sequência de estados anteriores a  $x_k(t)$ , considerados a partir do último estado avaliado como sucesso.

Uma seleção inteligente de estados pode incluir a aplicação de algoritmos de busca no espaço de estados baseados em populações tais como PSO (do inglês *Particle Swarm Optimization*), AIS (do inglês *Artificial Immune System*), ACS (do inglês *Ant Colony System*) (WANG; SINGH, 2008), EPSO (do inglês *Evolutionary Particle Swarm Optimization*) (MIRANDA *et al.*, 2009), GA (do inglês *Genetic Algorithms*) (SAMAAN; SINGH, 2002), ou ainda algoritmos que particionam o espaço de estados, como por exemplo o SSP (do inglês *State Space Pruning*) (SINGH; MITRA, 1997) e o ISSP (do inglês *Intelligent SSP*), além de combinações dessas abordagens como o CFO-ISSP (do inglês *Central Force Optimization ISSP*), GA-ISSP e PSO-ISSP (GREEN; WANG; ALAM, 2012). Para todos esses modelos, a aplicação consiste em realizar a seleção em subconjunto de estados que contribuem significativamente para a convergência dos índices de confiabilidade, ao invés de realizar uma seleção de estados cega. O método de entropia cruzada (GONZÁLEZ-FERNÁNDEZ; SILVA, 2011; GONZÁLEZ-FERNÁNDEZ; SILVA *et al.*, 2013) aplicado ao método de simulação de Monte Carlo, sozinho (WANG; GUO; WU, 2013; TÓMASSON; SÖDER, 2017; ZHAO *et al.*, 2019) ou associado a outras técnicas, como por exemplo minimização de variância (YAN, C. *et al.*, 2017), programação geométrica (YAN, C. *et al.*, 2017), ou ainda *control variate* (TANG; LI; ZHAO, 2017) (controle de variáveis, em tradução livre) provoca uma distorção nas taxas de falha dos componentes com o fim de aumentá-las. Uma maior taxa de falha dos componentes provoca a visitação de mais estados de falha. Desta forma, os índices de confiabilidade do sistema em análise são estimados de forma mais rápida, pois são selecionados mais estados com falhas quando comparado com outros métodos de seleção de estados. O viés inserido pelo método de entropia cruzada é corrigido aquando da estimação dos índices, sendo a sua aplicação possível tanto em abordagens não sequenciais quanto sequenciais. Finalmente, a inclusão de séries temporais correlacionadas (BORGES; DIAS, 2016) busca, usando o método de simulação de Monte Carlo não sequencial, alcançar a exatidão obtida com o método de simulação de Monte Carlo sequencial através da aplicação de funções de densidade de probabilidade estimadas a partir das séries históricas e de dependências estatísticas.

Após a definição do estado que deve ser avaliado, a etapa seguinte do método de simulação de Monte Carlo consiste na avaliação desse estado, o que corresponde a responder à seguinte questão: o estado em avaliação permite suprir as cargas respeitando os limites de operação? Senão, existem ações a serem tomadas para que

a carga possa ser suprida sem que haja corte de carga? Para a análise estática de capacidade de geração em NH1, a resposta à primeira questão reside apenas em verificar se o total de capacidade geração no sistema é suficiente para suprir o total de carga demandada. Caso a demanda seja superior à capacidade de geração do sistema, a diferença entre esses dois valores compõe o corte de carga e o estado é definido como sendo de falha.

Em NH2, responder às questões apresentadas pode conduzir a duas situações distintas: ou apenas em um passo se responde a ambas, ou se responde às duas questões em separado. Optando pela primeira escolha, a resolução de um problema de fluxo de potência ótimo é suficiente. No entanto, avaliar estados recorrendo sempre à resolução de um problema de otimização torna o alcance da convergência do método de simulação mais demorada, e além disso para classificar o estado como de sucesso, a princípio basta encontrar um despacho que verifique os limites operativos, não sendo este necessariamente ótimo. Caso se opte por responder as questões de forma separada, a resposta à primeira questão pode ser obtida avaliando o estado elétrico da rede resolvendo um problema de fluxo de potência, cuja resolução é mais rápida e simples do que a resolução de um problema de fluxo de potência ótimo. A avaliação via fluxo de potência ótimo só é vital quando os limites operativos não são atendidos para despachos base. Calcula-se outra distribuição dos fluxos recorrendo ao uso de um fluxo de potência ótimo e essa redistribuição permite, além de verificar a viabilidade do estado, obter de imediato qual o corte de carga em caso de estado de falha. A avaliação de um estado recorrendo primeiro a um fluxo de potência e depois a um fluxo de potência ótimo pode ser interpretado como uma pré-avaliação e avaliação do estado. Apesar do número de referências limitadas que explicitamente fazem uso de pré avaliações (PEREIRA; BALU, 1992; SILVA, A. M. L. da *et al.*, 2007), denomina-se tal abordagem como “tradicional”, que engloba a avaliação do sistema considerando o sistema representado por um equacionamento linear ou não linearizado. Entretanto, mesmo com a aplicação dessa abordagem, os tempos computacionais da simulação Monte Carlo podem ser considerados elevados, principalmente para a análise de sistemas de grande porte. Neste contexto, várias metodologias surgiram com o fim de reduzir o esforço computacional associado ao método Monte Carlo. Dentro das aplicações encontradas no estado da arte destacam-se o uso de metodologias baseadas em Redes Neurais, cuja ideia é classificar de forma rápida os estados como estados de sucesso ou falha, como por exemplo o SOM (do inglês *Self Organizing Map*) (LUO; SINGH; PATTON, 2000), GMDH (do inglês *Group Method Data Handling*) (SILVA, A. M. L. da *et al.*, 2007), SVM (do inglês *Support Vector Machine*) (RESENDE *et al.*, 2015), ou ainda usando algoritmos baseados em populações, também com o intuito de classificar os estados como sendo de sucesso ou falha, como por exemplo o SSC (do inglês *State Space Classification*) (BENIDRIS; ELSAIAH; MITRA, 2015).

No último estágio do método de simulação de Monte Carlo, que corresponde à estimação dos índices de confiabilidade, pretende-se caracterizar o sistema elétrico com base na sua capacidade de suprir a carga ao longo do tempo. Por exemplo, um sistema cujos índices de confiabilidade assumam um valor mais baixo pode ser visto como um sistema elétrico mais robusto pois, ou consegue suprir a carga mesmo que vários dos componentes se encontrem em estado de falha, ou então os componentes do sistema têm uma taxa de falha baixa. É na etapa da estimação dos índices de confiabilidade que se define, em geral, o critério de parada do método de Monte Carlo. Este critério pode ser dependente do número de iterações realizadas no método, ou então da precisão desejada para os índices estimados (BILLINTON; ALLAN, 1992). O primeiro critério de parada apenas é escolhido quando o comportamento do sistema já é bem conhecido pois os resultados obtidos podem não apresentar a fiabilidade desejada. Por outro lado, optar por definir como critério de parada a precisão dos resultados, além de transmitir uma maior segurança relativamente aos resultados obtidos, permite ainda definir um intervalo de confiança para os índices estimados. O processo consiste em calcular o erro relativo (ou incerteza) no decorrer da simulação, que é comparado com uma precisão pré-especificada. A simulação continua até que o critério seja atendido.

No estado da arte, existem ainda aplicações que buscam reduzir o tempo computacional do método de Monte Carlo, mas que não consideram a manipulação direta de alguma das três etapas do método. A título de exemplo, em (BORGES; FALCAO *et al.*, 2001) propõe-se reduzir o tempo computacional recorrendo a computação paralela e em (ROSA *et al.*, 2010) propõe-se incorporar agentes no método de simulação de Monte Carlo para mostrar que mudanças na concepção de *software* permite obter programas de análise de sistemas elétricos de energia mais adequados à dimensão e escopo dos problemas atuais. No estado da arte existem ainda artigos onde se propõem formas alternativas para avaliar a confiabilidade de um sistema elétrico sem usar o método de Monte Carlo, como por exemplo em (MIRANDA *et al.*, 2009), onde se calculam índices usando algoritmos baseados em populações.

O tema central deste documento de tese é a avaliação dos estados sorteados do sistema via análise de regime permanente. Mantendo o foco nos modelos tradicionais de avaliação de estados, os métodos aplicados em análise de sistemas compostos dependem das hipóteses adotadas para a modelagem da rede, a saber:

- Fluxo de Potência Linearizado (DCPF) (PEREIRA; BALU, 1992; MELLO; PEREIRA; LEITE DA SILVA, 1994; SINGH; MITRA, 1997; LEITE DA SILVA; FONSECA MANSO *et al.*, 2000; BORGES; FALCAO *et al.*, 2001; GONZÁLEZ-FERNÁNDEZ; SILVA *et al.*, 2013; RESENDE *et al.*, 2015): geralmente utilizado para uma pré-análise do estado do sistema quando o modelo de rede considerado é o simplificado;

- Fluxo de Potência (ACPF) (PEREIRA; BALU, 1992; SILVA, A. M. L. da *et al.*, 2007): geralmente utilizado para uma pré-análise do estado do sistema quando o modelo de rede é composto por equações não lineares;
- Fluxo de Potência Ótimo Linearizado (DCOPF) (PEREIRA; BALU, 1992; MELLO; PEREIRA; LEITE DA SILVA, 1994; SINGH; MITRA, 1997; LEITE DA SILVA; FONSECA MANSO *et al.*, 2000; BORGES; FALCAO *et al.*, 2001; GREEN; WANG; ALAM, 2012; GONZÁLEZ-FERNÁNDEZ; SILVA *et al.*, 2013; RESENDE *et al.*, 2015): geralmente utilizado para testar se o estado pode ser categorizado como de sucesso ou falha e calcular o valor de corte de carga considerando um modelo de rede simplificado;
- Fluxo de Potência Ótimo (ACOPF) (PEREIRA; BALU, 1992; LUO; SINGH; PATTON, 2000; SILVA, A. M. L. da *et al.*, 2007): geralmente utilizado para testar se o estado pode ser categorizado como de sucesso ou falha e calcular o valor de corte de carga considerando um modelo de rede composto por equações não lineares.

Os métodos de fluxo de potência e fluxo de potência ótimo são também aplicados em funções de avaliação de desempenho aquando da utilização de técnicas de redução de variância em métodos de simulação de Monte Carlo, nomeadamente, em métodos de simulação de Monte Carlo com entropia cruzada.

## 2.6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este capítulo aborda o estado da arte de avaliação de adequação de sistemas elétricos de potência. A presente tese foca-se na avaliação de adequação de sistemas compostos usando o método de simulação de Monte Carlo sequencial. Uma possibilidade de aperfeiçoar a aplicação do método nesses sistemas consiste em aprimorar o estágio mais exigente em termos de tempo computacional: a avaliação de estados. Esse aperfeiçoamento pode ser conseguido através da aplicação ao método de simulação de Monte Carlo sequencial de metodologias que visam evitar pré-avaliações e avaliações de estados. Para tal, uma modelagem do problema de estimação de limites de carregamento é proposta, considerando uma modelagem de rede linearizada, para identificar fatores de carga contidos nesses limites onde os estados de sucesso são caracterizados. Essa modelagem é ainda aplicada na otimização de parâmetros estocásticos realizada via método de entropia cruzada. Quando considerada uma modelagem de rede não linear, uma extensão da modelagem anterior é proposta. Na pré-avaliação de estados são aplicadas equações tensoriais ao problema de fluxo de potência, visando tornar as soluções mais precisas. Para a supressão de avaliações,

a nova abordagem estima os fatores de mínimo e máximo carregamento via modelo preditor-corretor.



### **3 ESTRATÉGIAS DE AVALIAÇÃO DE ESTADOS EM SISTEMAS COMPOSTOS CONSIDERANDO MODELO DE REDE LINEARIZADO**

Neste capítulo, são propostas estratégias para o estágio de avaliação de estados do método de simulação de Monte Carlo sequencial, com o fim de aperfeiçoar a eficiência da avaliação de confiabilidade de sistemas compostos considerando um modelo linearizado de rede. Considerações iniciais acerca do tópico são apresentadas na Seção 3.1. A Seção 3.2 contém informação acerca dos processos de pré-avaliação de estados empregados. Na Seção 3.3, foca-se em métodos de otimização para a avaliação de estados quando a pré-avaliação é insuficiente para verificar se ações corretivas são necessárias ao estado. Na Seção 3.4, são apresentadas metodologias alternativas, baseadas na análise de fatores de mínimo e máximo carregamento, propostas para a avaliação de estados do método de simulação de Monte Carlo sequencial. O algoritmo de inclusão da estimativa de fatores de mínimo e máximo carregamento no método de simulação de Monte Carlo sequencial é apresentado na Seção 3.5. A Seção 3.6 contém os resultados numéricos para as estratégias propostas, enquanto considerações finais são expostas na Seção 3.7.

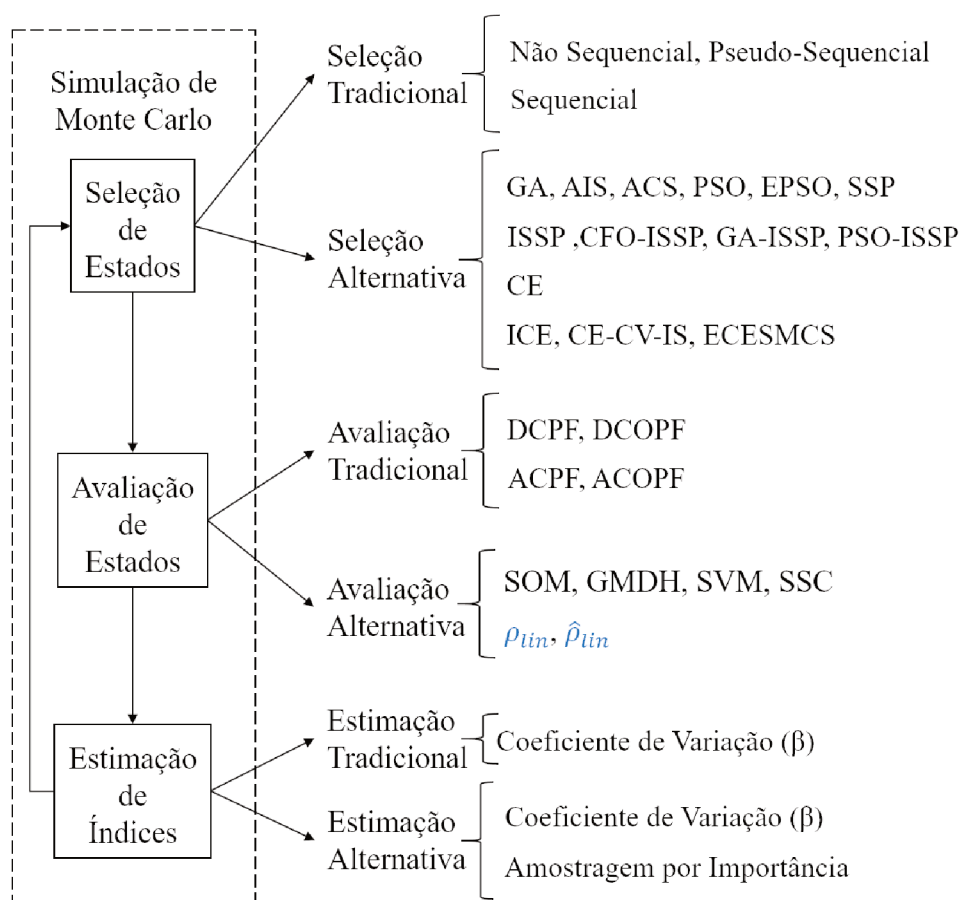
#### **3.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS**

A contribuição apresentada neste capítulo para o estado da arte enquadra-se na fase de avaliação de estados do método de simulação de Monte Carlo e está devidamente identificada na Figura 8. Destaca-se que o método de simulação de Monte Carlo sequencial é apresentado no estado da arte como sendo o método que possibilita a estimativa de índices de confiabilidade de um sistema elétrico, dando a possibilidade de se modelar aspectos que envolvam dependências temporais (cronologia). A adaptabilidade e maleabilidade do método de simulação é tal que existem as mais distintas contribuições nos três principais estágios do método. Além disso, a avaliação dos estados no método depende não só do nível hierárquico ao qual corresponde o problema em estudo, mas também das hipóteses adotadas na representação da rede. Neste capítulo, são apresentadas as estratégias desenvolvidas para o estágio de avaliação de estados considerando a formulação linearizada da rede. Neste contexto, uma forma alternativa para se avaliar estados, baseada na estimativa dos fatores de mínimo e máximo carregamento do estado, é apresentada, bem como os ganhos da sua aplicação.

#### **3.2 PRÉ-AVALIAÇÃO DE ESTADOS VIA FLUXO DE POTÊNCIA LINEARIZADO**

O objetivo da pré-avaliação de estados é identificar se ações corretivas são necessárias nos estados visitados sem a necessidade da resolução de problemas de otimização mais dispendiosos computacionalmente. Para tanto, assumindo-se um

Figura 8 – Estágios do método de simulação de Monte Carlo destacando contribuições propostas no Capítulo 3.



Fonte: do autor.

modelo linearizado da rede, a ferramenta básica para a pré-avaliação de estados é o fluxo de potência linearizado.

Existem na literatura diversas versões para o fluxo de potência linearizado, cujas diferenças residem nas definições de injeções de potência e admitâncias nas equações que definem o problema, ou em variações menores nas próprias equações (STOTT; JARDIM; ALSAC, 2009). De maneira geral, a linearização das equações do problema de fluxo de potência tem em consideração o seguinte conjunto de hipóteses: (a) as aberturas angulares entre barras são pequenas; (b) considera-se a magnitude da tensão ao longo do sistema igual a 1,0 pu e a inexistência de fluxo de potência reativa; (c) uma vez que a reatância das linhas de transmissão é, geralmente, muito superior à sua resistência em redes de alta tensão, a resistência série das linhas de transmissão é desprezada. Essas simplificações indicam que o modelo de fluxo de potência linearizado não tem por consideração magnitudes de tensões nodais, nem potências reativas, nem tão pouco os taps dos transformadores.

Considerando-se as simplificações supracitadas, pode-se calcular o fluxo de

potência ativa que sai da barra  $i$  em direção à barra  $k$  através de um elemento de transmissão a partir da expressão

$$P_{ik} = \frac{\theta_i - \theta_k}{x_{ik}} \quad (35)$$

onde  $x_{ik}$  é a reatância do elemento e  $\theta_i$  denota o ângulo da tensão na barra  $i$ .

Desta forma, a injeção de potência na barra  $i$  é dada por

$$P_i = \sum_{k=1}^n P_{ik} = \sum_{k=1}^n \frac{\theta_i - \theta_k}{x_{ik}} \quad (36)$$

Esta relação, em forma matricial, pode ser escrita para todas as barras como

$$\mathbf{P} = \mathbf{B}\boldsymbol{\theta} \quad (37)$$

onde  $\mathbf{P}$  é o vetor de injeções de potência ativa nas barras,  $\mathbf{B}$  é a matriz de susceptâncias cujos elementos são dados por

$$B_{ik} = \begin{cases} \sum_{j=1}^n \frac{1}{x_{ij}} & \text{se } k = i \\ -\frac{1}{x_{ik}} & \text{se } k \neq i \end{cases} \quad (38)$$

e  $\boldsymbol{\theta}$  o vetor de ângulos das tensões complexas das barras.

O sistema de equações apresentado em (37) não apresenta solução pois a matriz  $\mathbf{B}$  é singular, uma vez que a injeção de potência ativa de uma barra pode ser expressa pela combinação linear das injeções de potência nas demais barras. Retirando a equação correspondente ao ângulo da barra definida como referência angular, obtém-se o sistema linear

$$\hat{\mathbf{P}} = \hat{\mathbf{B}}\hat{\boldsymbol{\theta}} \quad (39)$$

onde  $\hat{\mathbf{B}}$  resulta da matriz  $\mathbf{B}$  à qual foi eliminada a linha e coluna correspondentes à barra de referência,  $\hat{\mathbf{P}}$  e  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$  são vetores obtidos de  $\mathbf{P}$  e  $\boldsymbol{\theta}$ , respectivamente, eliminando-se também as linhas correspondentes à barra de referência.

Quando não é requerida uma solução precisa para pré-avaliar o estado, o modelo de fluxo de potência linearizado pode ser uma escolha adequada para a tomada de decisão. Além da vantagem de não necessitar de tantos dados de rede para se avaliar um estado, outra vantagem é a reduzida necessidade de esforço computacional para a solução de (39). Dessa forma, a partir de um caso base onde são definidas as potências geradas em cada unidade geradora, com exceção de uma unidade de geração na barra de referência, pode-se proceder com a execução de fluxos de potência linearizados seguidos de verificações se restrições operacionais são atendidas. Ademais, pode-se aplicar como heurística o aumento/redução da produção das unidades geradoras, frente ao caso base, de acordo com o aumento/redução da carga.

Essa heurística tem por vantagem evitar sobrecarga de produção na barra de referência e nas linhas que escoam potência a partir da mesma. Esse princípio motivou o desenvolvimento de formulações para se determinar fatores de mínimo e máximo carregamento de um sistema, conforme exposto neste capítulo.

Quando a solução do fluxo de potência linearizado não atende a inequações correspondentes a limites operativos, nomeadamente limites de transmissão e de geração de potência ativa na barra de referência, não é possível afirmar se o estado em avaliação é um estado de sucesso ou se a realização de cortes de carga é inevitável. Nesses casos, a etapa de pré-avaliação de estados do método de simulação de Monte Carlo é inconclusiva, tornando-se necessária a resolução de um fluxo de problema ótimo para esse estado do sistema. Essa abordagem é explorada na próxima seção.

### 3.3 DETERMINAÇÃO DE CORTE DE CARGA E AÇÕES CORRETIVAS VIA FLUXO DE POTÊNCIA ÓTIMO LINEARIZADO

A pré-avaliação do estado selecionado pelo método de simulação de Monte Carlo em avaliações de NH2 visa identificar se o estado é de sucesso em dois níveis: o encontro da geração com a carga e a verificação de não violação de limites operacionais para que este encontro seja satisfeito. Em caso afirmativo, considera-se o valor de corte de carga como nulo. Se a solução do problema de fluxo de potência apresenta incumprimentos de limites operacionais, então o teste é insuficiente para avaliar o estado. Torna-se assim necessário verificar se é possível suprir a carga sem que limites operacionais sejam violados e, em caso negativo, deve-se calcular o valor de corte de carga correspondente. A ferramenta indicada para esta avaliação é o fluxo de potência ótimo.

Apresentado pela primeira vez em 1962 por J. Carpentier, a busca da solução do problema do fluxo de potência ótimo incitou o desenvolvimento de ferramentas de otimização para o problema (HUNEULT; GALIANA, 1991). Pode ser descrito como um problema de otimização não-linear estático, para o qual são calculados valores de variáveis associados à rede elétrica. O fluxo de potência ótimo pode ter como objetivo minimizar os custos ou as perdas elétricas na rede, minimizar as violações dos limites de variáveis, maximizar carregamento, entre outros. Além disso, a solução ótima encontrada deve atender a restrições de igualdade e desigualdade, que correspondem a restrições de operação.

Quando aplicado à análise da adequação visando a estimação de índices de confiabilidade, a função objetivo do problema de fluxo de potência ótimo tem por fim, em geral, minimizar o montante de corte de carga no sistema em estudo. No contexto de modelagem linear da rede, as equações de balanço de potência e de fluxo de potência são representadas por (39) e (35), respectivamente. Restrições operativas

estão relacionadas a limites de fluxo de potência ativa nos elementos de rede e limites de potência ativa gerada em cada unidade geradora. Variações nas potências geradas frente ao caso base são consideradas ações corretivas, as quais devem buscar a minimização do corte de carga do sistema. Unidades geradoras fictícias de custo de produção elevado são criadas com o fim de modelar o corte de carga em cada barra.

O fluxo de potência ótimo linearizado pode ser equacionado como segue para a minimização de corte de carga do sistema:

$$\begin{aligned} & \text{minimizar} && c(\hat{\theta}, \mathbf{P}_g) \\ & \text{sujeito a} && -\bar{\mathbf{B}}\hat{\theta} + \mathbf{A}_g\mathbf{P}_g = \mathbf{P}_d \\ & && -\mathbf{P}_l^{\max} \leq \Gamma\hat{\mathbf{A}}_s\hat{\theta} \leq \mathbf{P}_l^{\max} \\ & && \mathbf{P}_g^{\min} \leq \mathbf{P}_g \leq \mathbf{P}_g^{\max} \end{aligned} \quad (40)$$

onde

- $c(\hat{\theta}, \mathbf{P}_g)$  é o custo de corte de carga;
- $\bar{\mathbf{B}}$  é a matriz de susceptâncias excluindo a coluna correspondente à barra de referência;
- $\mathbf{A}_g$  é a matriz de adjacência tal que

$$\mathbf{A}_g(i, j) \triangleq \begin{cases} 1 & \text{se o gerador } i \text{ está conectado na barra } j \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

- $\mathbf{P}_g$  é o vetor de potências produzidas em cada unidade geradora, incluindo as potências produzidas pelos geradores fictícios nos barramentos de carga;
- $\mathbf{P}_d$  é o vetor de demandas em cada barra;
- $\Gamma \triangleq \text{diag}\left(\frac{1}{x_1}, \dots, \frac{1}{x_{nl}}\right)$ , onde  $nl$  representa o número de ramos no sistema;
- $\mathbf{A}_s$  é a matriz de adjacência linha-barra tal que

$$\mathbf{A}_s(l, i) \triangleq \begin{cases} 1 & \text{se } i \text{ é o barramento de origem da linha } l \\ -1 & \text{se } i \text{ é o barramento de chegada da linha } l \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

- $\hat{\mathbf{A}}_s$  é a matriz de adjacência linha-barra excluindo a coluna relacionada com a barra de referência;
- $\mathbf{P}_l^{\max}$  é o vetor dos limites de transmissão das linhas;
- $\mathbf{P}_g^{\min}$  e  $\mathbf{P}_g^{\max}$  são os vetores de capacidades mínimas e máximas de geração em cada unidade geradora, respectivamente.

A função  $c(\hat{\theta}, \mathbf{P}_g)$  pode ser representada por uma equação linear e na forma matricial por  $\mathbf{u}^t \mathbf{z}$ , onde  $\mathbf{u}$  é um vetor coluna de dimensão  $(n-1) + n_g + n_g^f$ , e cujas posições são todas nulas exceto as  $n_g^f$  últimas, onde  $n_g^f$  é o número de geradores fictícios que corresponde ao número de barras de carga. A variável  $\mathbf{z}$  representa um vetor de solução da forma:

$$\mathbf{z} = [\theta_1, \dots, \theta_{n-1}, P_{g_1}, \dots, P_{g_{n_g}}, P_{g_1}^f, \dots, P_{g_{n_g}^f}^f]^t. \quad (41)$$

Apesar da formulação do fluxo de potência ótimo linearizado apresentar um número menor de restrições a satisfazer em comparação com o seu correspondente não linear, para problemas reais de grande porte a resolução deste problema pode implicar tempos computacionais significativos para a convergência do método de simulação de Monte Carlo sequencial. Com vista a reduzir este tempo computacional, são propostos na próxima seção dois modelos com o fim de aferir o sucesso ou a falha de estados nos procedimentos de simulação.

### 3.4 MODELO DE DETERMINAÇÃO DE FATORES LIMITE DE CARREGAMENTO

O foco deste trabalho centra-se na avaliação de estados. Assim, procurou-se identificar novas formas de avaliação que permitissem, por um lado, prescindir de etapas de avaliação evitando-as, e por outro, contribuir para tornar o método de simulação de Monte Carlo sequencial um método mais eficiente.

Quando a variação da carga ao longo do tempo é considerada na avaliação de adequação do sistema com uma resolução temporal estreita (e.g. 1 hora), existe um aumento significativo de estados a serem avaliados no método de simulação de Monte Carlo sequencial até que o coeficiente de variação atinja a convergência desejada. Em muitos desses estados consecutivos, a variação reside apenas na transição do estado de carga e não na transição do estado de componentes. Posto isto, propõe-se um método para lidar com as variações temporais oriundas da carga sem aumentar o número de avaliações no segundo estágio do algoritmo de simulação de Monte Carlo sequencial. Dessa forma, propõe-se o cálculo de fatores de mínimo e máximo carregamento de estados de sucesso com o fim de identificar, enquanto as próximas transições forem de carga, se o patamar de carga é superior/inferior ao valor de mínimo/máximo carregamento estabelecido para o estado avaliado. Se sim, o estado é automaticamente avaliado como sendo de sucesso. Caso contrário, avalia-se a possibilidade de corte de carga por meio de um fluxo de potência ótimo linearizado.

Nesta subseção, duas metodologias aplicadas à avaliação de estados do método de simulação de Monte Carlo sequencial são apresentadas. Essas metodologias pretendem permitir a variação temporal advinda da carga suprimindo avaliações de estados via fluxo de potência linearizado ou fluxo de potência ótimo linearizado, reduzindo assim tempos de execução e esforço computacional do método de simulação. A

primeira aplicação consiste na inclusão da solução do problema do mínimo e máximo carregamento linearizado no método de simulação. O valor de cada fator de carregamento  $\rho$  é dependente dos estados dos componentes do sistema. Enquanto não houver mudança de estado em algum componente, a solução de mínimo e máximo carregamento pode ser considerada válida, sem incorrer no risco de avaliar de forma errônea o estado. Uma segunda metodologia é apresentada, onde ao invés do cálculo de fatores de mínimo e máximo carregamento é usada uma estimativa desses valores.

### 3.4.1 Modelo de determinação de fatores limite de carregamento com perfil de despacho irrestrito ( $MCS_{\rho_{lin}}$ )

Quando no método de simulação é incluída a variação horária da carga, verifica-se que, frequentemente, um estado difere do seguinte apenas no valor do patamar de carga. Dessa forma, quando um estado é avaliado como sucesso, o mais provável é que os estados consecutivos tenham os mesmos componentes em funcionamento e em falha. Também é muito provável que o valor da nova carga possa ser suprido pois, em geral, o sistema não se encontra em estado marginal, em que uma pequena variação do patamar de carga conduza a corte de carga. A inclusão do problema do mínimo e máximo carregamento linearizado no método de simulação de Monte Carlo sequencial pretende facilitar as avaliações de estados, por meio de uma avaliação mais simples e rápida, evitando assim as formas tradicionais de avaliação.

O problema do máximo carregamento linearizado, onde se considera que todas as cargas do sistema são aumentadas na mesma proporção  $\rho$ , apresenta a seguinte formulação:

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} && c(\hat{\theta}, \mathbf{P}_g, \rho) \\ &\text{sujeito a} && -\bar{\mathbf{B}}\hat{\theta} + \mathbf{A}_g\mathbf{P}_g - \rho\Delta\mathbf{P}_d = \mathbf{P}_d \\ & && -\mathbf{P}_l^{\max} \leq \Gamma\hat{\mathbf{A}}_s\hat{\theta} \leq \mathbf{P}_l^{\max} \\ & && \mathbf{P}_g^{\min} \leq \mathbf{P}_g \leq \mathbf{P}_g^{\max} \end{aligned} \tag{42}$$

onde  $c(\hat{\theta}, \mathbf{P}_g, \rho) = -\rho$ ,  $\Delta\mathbf{P}_d$  é o vetor de incremento de carga e as demais variáveis atendem as definições apresentadas anteriormente.

A formulação apresentada em (42) tem como restrições os balanços de potência ativa onde se identifica o incremento de carga ponderado. Como hipótese de trabalho, assumiu-se ainda que o vetor de incremento de carga é igual ao vetor de carga. Desse modo,  $\rho$  pode ser interpretado como uma variação percentual da carga, e essa variação é igual para todas as cargas conectadas. Observa-se ainda que a solução de máximo carregamento deve atender não só os limites de operação dos geradores, mas também os limites de transmissão. A inclusão dessa condição é vital para a definição de estado de sucesso. A formulação do problema de mínimo carregamento é análoga à de máximo carregamento, diferenciando-se apenas pela troca de sinal da função objetivo.

No presente caso,  $c(\hat{\theta}, \mathbf{P}_g, \rho)$  é uma função linear representada de forma matricial por  $\mathbf{u}^t \mathbf{z}$ , onde  $\mathbf{u}$  é o vetor coluna de dimensão  $(n-1) + n_g + n_g^f + 1$ , e cujas posições são todas nulas exceto a última, que assume o valor  $-1$ . A variável que representa o vetor de solução  $\mathbf{z}$  tem a seguinte definição:

$$\mathbf{z} = \left[ \theta_1, \dots, \theta_{n-1}, P_{g_1}, \dots, P_{g_{n_g}}, P_{g_1}^f, \dots, P_{g_{n_g}^f}^f, \rho \right]^t. \quad (43)$$

A inclusão da solução do problema do mínimo e máximo carregamento no método de simulação de Monte Carlo sequencial faz-se da seguinte forma durante o estágio de avaliação de estado: é realizada uma comparação direta entre o fator de carga do estado em avaliação e os fatores de mínimo e máximo carregamento, calculados sempre que o estado anterior é de sucesso e o estado atual provém de uma transição de carga. Se o fator de carga do estado estiver contido no intervalo definido pelos limites de carregamento, o estado é considerado de sucesso e o corte de carga definido como nulo.

A estratégia desenvolvida é de mais valia, como se pode constatar na seção de resultados. No entanto, a inclusão consiste em resolver dois problemas de otimização, o que requer tempo computacional não desprezível. Na próxima seção é apresentada uma forma alternativa para estimar os fatores limite de carregamento visando eliminar o tempo associado à resolução do problema de otimização.

### 3.4.2 Modelo de determinação de fatores limite de carregamento com perfil de despacho restrito (MCS $\hat{\rho}_{lin}$ )

A estratégia apresentada na seção anterior reduz de forma significativa o número de estados avaliados usando fluxo de potência linearizado ou fluxo de potência ótimo linearizado, conforme apresentado na Seção 3.6. No entanto, apresenta um pequeno percalço em relação ao objetivo que se pretende alcançar, pois o tempo de resolução do problema do mínimo/máximo carregamento é não negligenciável. Foi neste contexto e com o objetivo de reduzir não só o número de avaliações via fluxo de potência linearizado, mas também o tempo computacional, que surgiu a metodologia apresentada nesta seção.

Considere-se a restrição de igualdade do problema de otimização apresentado em (42)

$$-\bar{\mathbf{B}}\hat{\theta} + \mathbf{A}_g \mathbf{P}_g - \rho \Delta \mathbf{P}_d = \mathbf{P}_d. \quad (44)$$

A parcela  $-\rho \Delta \mathbf{P}_d$  pode ser interpretada como um percentual da variação da carga do sistema. De fato, se  $\rho$  aumenta, então a carga do sistema aumenta e vice-versa. Supondo que  $\Delta \mathbf{P}_d = \mathbf{P}_d$  em cada transição de carga, a variável  $\mathbf{P}_g$  tem que ser recalculada a fim de se verificar a igualdade. Fixe-se, à semelhança do que sucede com  $\mathbf{P}_d$  e  $\Delta \mathbf{P}_d$ ,  $\Delta \mathbf{P}_g = \mathbf{P}_g$  e seja  $\rho_g \Delta \mathbf{P}_g$  a variação da geração que acompanha a variação



da carga numa determinada transição. Então, a equação (44) pode ser reescrita na forma

$$-\overline{\mathbf{B}}\hat{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{A}_g\mathbf{P}_g + \rho_g\mathbf{A}_g\Delta\mathbf{P}_g - \rho\Delta\mathbf{P}_d = \mathbf{P}_d. \quad (45)$$

À semelhança do que acontece com  $\rho$ ,  $\rho_g$  também se comporta como uma proporção, mas agora em relação a  $\mathbf{P}_g$ . Além disso, na solução do fluxo de potência linearizado, tem-se que a geração do sistema tem que ser igual à demanda do sistema, ou seja,

$$\sum P_{gi} = \sum P_{di} \quad (46)$$

donde se conclui que  $\rho_g = \rho$ . Assim, uma formulação alternativa para o problema do máximo carregamento linearizado é

$$\begin{aligned} &\text{minimizar } c(\hat{\boldsymbol{\theta}}, \mathbf{P}_g, \rho) \\ &\text{sujeito a } \begin{aligned} &-\overline{\mathbf{B}}\hat{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{A}_g\mathbf{P}_g + \rho\mathbf{A}_g\Delta\mathbf{P}_g - \rho\Delta\mathbf{P}_d = \mathbf{P}_d \\ &-\mathbf{P}_1^{\max} \leq \Gamma\hat{\mathbf{A}}_s\hat{\boldsymbol{\theta}} \leq \mathbf{P}_1^{\max} \\ &\mathbf{P}_g^{\min} \leq \mathbf{P}_g + \rho\Delta\mathbf{P}_g \leq \mathbf{P}_g^{\max} \end{aligned} \end{aligned} \quad (47)$$

Nesta formulação,  $\mathbf{P}_g$  é um vetor constante, e portanto as variáveis a estimar são o vetor dos ângulos das barras  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$  e o fator de máximo carregamento  $\rho$ . Observa-se então que a equação que define o fluxo de potência que percorre as linhas é

$$\mathbf{P}_l = \Gamma\hat{\mathbf{A}}_s\hat{\boldsymbol{\theta}} \quad (48)$$

e no fluxo de potência linearizado tem-se que

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \hat{\mathbf{B}}^{-1}\hat{\mathbf{P}}. \quad (49)$$

Por outro lado, partindo da equação (45) também se tem que

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\theta}} &= \hat{\mathbf{B}}^{-1} [\mathbf{A}_g\mathbf{P}_g + \rho\mathbf{A}_g\Delta\mathbf{P}_g - \mathbf{P}_d - \rho\Delta\mathbf{P}_d] \\ &= \hat{\mathbf{B}}^{-1} [\hat{\mathbf{P}} + \rho\Delta\hat{\mathbf{P}}] \end{aligned} \quad (50)$$

onde  $\hat{\mathbf{P}} = \mathbf{A}_g\mathbf{P}_g - \mathbf{P}_d$ ,  $\Delta\hat{\mathbf{P}} = \mathbf{A}_g\Delta\mathbf{P}_g - \Delta\mathbf{P}_d$ , e substituindo  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$  em (48), tem-se que

$$\mathbf{P}_l = \Gamma\hat{\mathbf{A}}_s\hat{\mathbf{B}}^{-1} [\hat{\mathbf{P}} + \rho\Delta\hat{\mathbf{P}}] \quad (51)$$

sendo que apenas uma variável é desconhecida para o cálculo do fluxo de potência nas linhas:  $\rho$ .

Dessa forma, os fluxos de potência nas linhas são limitados como segue

$$-\mathbf{P}_l^{\max} \leq \mathbf{P}_l \leq \mathbf{P}_l^{\max} \quad (52)$$

onde  $\rho$  pode ser isolado utilizando (51) como na expressão abaixo

$$\underbrace{\left[ \frac{-\mathbf{P}_l^{\max} - \Gamma\hat{\mathbf{A}}_s\hat{\mathbf{B}}^{-1}\hat{\mathbf{P}}}{\Gamma\hat{\mathbf{A}}_s\hat{\mathbf{B}}^{-1}\Delta\hat{\mathbf{P}}} \right]}_{\rho_l^{\text{left}}} \leq \rho \leq \underbrace{\left[ \frac{\mathbf{P}_l^{\max} - \Gamma\hat{\mathbf{A}}_s\hat{\mathbf{B}}^{-1}\hat{\mathbf{P}}}{\Gamma\hat{\mathbf{A}}_s\hat{\mathbf{B}}^{-1}\Delta\hat{\mathbf{P}}} \right]}_{\rho_l^{\text{right}}} \quad (53)$$

e o operador  $\oslash \left[ \frac{x}{y} \right]$  denota a divisão elemento a elemento dos componentes dos vetores  $x$  e  $y$ .

As restrições de capacidade de geração também necessitam ser verificadas, condição alcançada pelas desigualdades abaixo

$$\underbrace{\oslash \left[ \frac{P_g^{\min} - P_g}{\Delta P_g} \right]}_{\rho_g^{\text{left}}} \leq \rho \leq \underbrace{\oslash \left[ \frac{P_g^{\max} - P_g}{\Delta P_g} \right]}_{\rho_g^{\text{right}}}. \quad (54)$$

Usando as desigualdades (53) e (54) conclui-se que uma possível solução do problema (47) está contida em

$$\rho \in [\rho^{\min}, \rho^{\max}] \quad (55)$$

tal que  $\rho^{\min}$  e  $\rho^{\max}$  são valores reais que verificam

$$\rho^{\min} = \max \left\{ \left[ [\text{lLim}_1]^t [\rho_g^{\text{left}}]^t \right]^t \right\} \quad (56)$$

$$\rho^{\max} = \min \left\{ \left[ [\text{rLim}_1]^t [\rho_g^{\text{right}}]^t \right]^t \right\} \quad (57)$$

onde  $\text{lLim}_1$  e  $\text{rLim}_1$  são vetores coluna que contêm os limites inferior e superior para  $\rho$  dependentes da capacidade de transmissão de cada linha, tais que

$$\text{lLim}_1 = \left[ \left( \Gamma \hat{A}_s \hat{B}^{-1} \Delta \hat{P} > 0 \right) \otimes \rho_1^{\text{left}} \right] + \left[ \left( \Gamma \hat{A}_s \hat{B}^{-1} \Delta \hat{P} < 0 \right) \otimes \rho_1^{\text{right}} \right] \quad (58)$$

$$\text{rLim}_1 = \left[ \left( \Gamma \hat{A}_s \hat{B}^{-1} \Delta \hat{P} < 0 \right) \otimes \rho_1^{\text{left}} \right] + \left[ \left( \Gamma \hat{A}_s \hat{B}^{-1} \Delta \hat{P} > 0 \right) \otimes \rho_1^{\text{right}} \right]. \quad (59)$$

Da operação  $X > Y$  resulta um vetor binário, com 1 se  $X_i > Y_i$  for afirmação verdadeira e 0 caso contrário. O operador  $X \otimes Y$  denota o produto elemento a elemento dos componentes dos vetores  $X$  e  $Y$ .

A definição de  $\rho$  apresentada em (57) pode ainda ser interpretada como sendo um *limite inferior do fator de máximo carregamento*, supondo uma proporção no aumento de geração que acompanhe o aumento da carga. Similarmente, (56) compõe o limite superior do fator de mínimo carregamento. As principais vantagens da estimação do fator de máximo carregamento atendendo ao que foi exposto são:

1. menor número de variáveis a estimar (de fato, apenas os limites de carregamento são desconhecidos);
2. eliminação do tempo de execução do problema de otimização, sendo este substituído pelo cálculo dos limites inferiores e superiores de  $\rho$ , apresentados anteriormente.

Destaca-se que a restrição de perfil de geração fixo pode ser relaxada assumindo-se que a variável  $\Delta P_g$  pode ser alterada durante a avaliação de estados diferenciados por transição de patamar de carga. Neste caso, os limites em (56) e (57) necessitam de ser alterados sempre que a variável  $\Delta P_g$  for sujeita a mudanças. Isto permite a modelagem de variabilidade de recursos energéticos ligados à produção de energia, tais como vento, irradiação solar, água, entre outros. Todavia, essas mudanças afetam a simplicidade da abordagem, a qual habilita a supressão de avaliações via fluxo de potência apenas pela execução de testes simples de pertença. Os ganhos da inclusão da abordagem proposta na avaliação de estados do método de simulação de Monte Carlo sequencial podem ser verificados na Seção 3.6.

### 3.5 ALGORITMO DE INCLUSÃO DE CÁLCULO DE FATORES LIMITE DE CARREGAMENTO NO MÉTODO DE SIMULAÇÃO DE MONTE CARLO SEQUENCIAL

No Algoritmo 5, é apresentada a inclusão das estratégias de estimação de fatores limite de carregamento no método de simulação de Monte Carlo sequencial ( $MCS_{\rho_{lin}}$ ,  $MCS_{\hat{\rho}_{lin}}$ ), tendo como base o algoritmo presente na Seção 2.4.2.

---

**Algoritmo 5** Método de simulação de Monte Carlo sequencial com estratégias de estimação de fatores limite de carregamento considerando modelo de rede linearizado

---

Seja  $N_y^{max}$  o número máximo de anos a simular,  $h = 0$  o instante de tempo do relógio fictício,  $N_y = 1$  e  $T = 8.760$  h.

- 1: Inicializar estados de componentes e carga;
- 2: Amostrar tempo de permanência dos componentes nesses estados de acordo com (1) e (2);
- 3: Identificar o instante da próxima transição de estado e efetuar a transição do componente ou patamar de carga correspondente; atualizar  $h$  com o instante de transição;
- 4: Avaliar o estado do sistema:
  - i: se a transição é de componente:
    - Executar pré-avaliação de estado usando um fluxo de potência linearizado. Caso o estado seja de sucesso, calcular os fatores limite de carregamento;
    - Caso a pré-avaliação não caracterize o estado como de sucesso, avaliá-lo por meio de um fluxo de potência ótimo linearizado. Se o estado for de sucesso, calcular os fatores limite de carregamento. Se o estado for de falha, determinar o corte de carga;
  - ii: se a transição é de patamar de carga:

- Caso o valor do patamar de carga esteja contido entre os limites de carregamento, categorizá-lo como de sucesso.
  - Caso contrário, executar avaliação do estado por meio de um fluxo de potência ótimo linearizado determinando o corte de carga.
- 5: Atualizar os valores das funções teste;
- 6: Se  $h = 8.760$  h, atualizar os índices de confiabilidade de acordo com (21); senão voltar ao Passo 2;
- 7: Atualizar os coeficientes de variação  $\beta$  de acordo com (9);
- 8: Se  $N_y = N_y^{max}$  ou se os coeficientes de variação são inferiores a uma tolerância especificada, parar a simulação; senão  $N_y = N_y + 1$ ,  $h = 0$  e voltar ao Passo 2.
- 

Os resultados obtidos a partir da aplicação deste algoritmo onde se evidenciam ganhos obtidos são apresentados na próxima seção.

### 3.6 RESULTADOS PARA O MÉTODO DE SIMULAÇÃO DE MONTE CARLO SEQUENCIAL CONSIDERANDO MODELO DE REDE LINEARIZADO

Nesta seção, são apresentados os resultados para a avaliação de adequação de um sistema elétrico, com base nas metodologias descritas neste capítulo. Esta seção está organizada em duas subseções: na primeira subseção são descritos os resultados de validação do algoritmo do método de simulação de Monte Carlo sequencial implementado. Na segunda subseção são apresentados os resultados obtidos com o método de simulação de Monte Carlo sequencial considerando as duas estratégias de determinação de fatores limite de carregamento propostas neste trabalho.

Os algoritmos implementados consideram o modelo linearizado da rede e, para todos eles, o estágio de avaliação se subdivide em pré-avaliação e avaliação. Além disso:

- i: No primeiro algoritmo, denominado  $MCS_{\tau_{lin}}$ , visa-se avaliar os índices de confiabilidade de um sistema elétrico seguindo a forma tradicional; o seu algoritmo foi apresentado na Subseção 2.4.2;
- ii: No segundo algoritmo, consideram-se as estratégias de determinação de fatores limite de carregamento apresentadas na Seção 3.4, a saber  $MCS_{\rho_{lin}}$  e  $MCS_{\hat{\rho}_{lin}}$ ; o seu algoritmo foi apresentado na Seção 3.5;
- iii: Para facilitar a comparação de resultados entre as diferentes estratégias abordadas, manteve-se a mesma sequência de eventos no sistema por meio do uso da mesma semente de números aleatórios.

Para validar e testar as metodologias propostas usou-se o sistema teste IEEE-RTS79 (SUBCOMMITTEE, 1979), representado na Figura 9. Esse sistema foi desenvolvido para colmatar a necessidade de uma base de dados padronizada de realização de testes e comparação de resultados de diferentes metodologias. O sistema é constituído por 24 barras, 32 unidades geradoras distribuídas em 14 usinas, 33 linhas de transmissão e 5 transformadores. A capacidade total instalada do sistema é de 3.405 MW e a carga do sistema é modelada por uma curva constituída de 8.736 patamares com pico anual de 2.850 MW.

### 3.6.1 Validação do método de simulação de Monte Carlo sequencial

Nesta subsecção é apresentada a validação do algoritmo do método de simulação de Monte Carlo sequencial tradicional ( $MCS_{\tau_{lin}}$ ) para a avaliação de adequação de um sistema elétrico em NH1 e NH2. Os resultados obtidos para a avaliação de adequação em NH1 são comparados com os resultados obtidos via método analítico apresentados em (LEITE DA SILVA; MELO; CUNHA, 1991). Na análise de adequação em NH2, os resultados obtidos são comparados com os resultados apresentados em (GONZÁLEZ-FERNÁNDEZ; SILVA *et al.*, 2013) e (MAGALHÃES CARVALHO, 2013). Em (GONZÁLEZ-FERNÁNDEZ; SILVA *et al.*, 2013), os valores de índices de confiabilidade são relativos ao método de simulação de Monte Carlo não sequencial (MCNS), para um coeficiente de variação de 5%. Já em (MAGALHÃES CARVALHO, 2013), os índices de confiabilidade são obtidos a partir de uma implementação do método de simulação de Monte Carlo sequencial, também com coeficiente de variação de 5%.

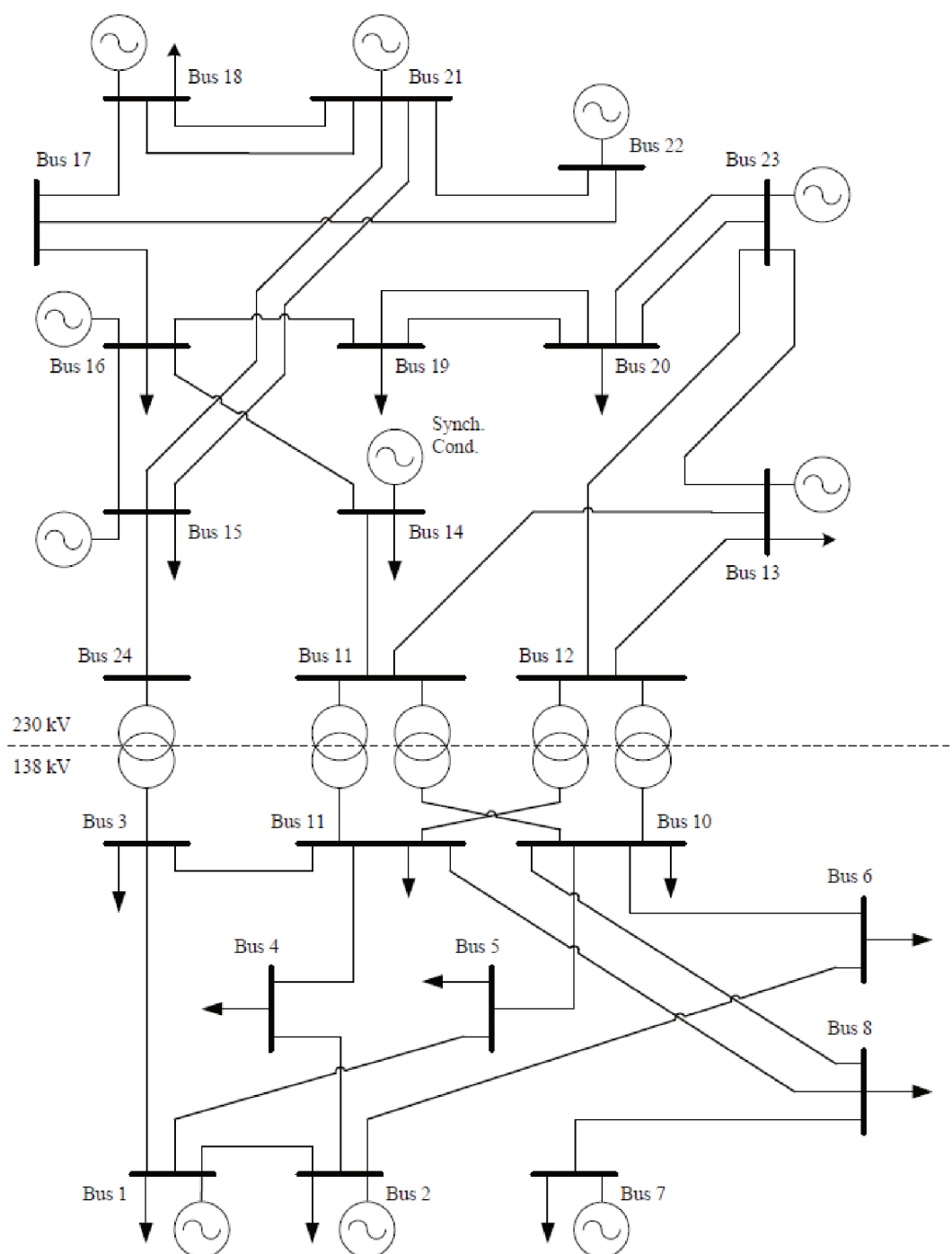
#### 3.6.1.1 Resultados para o método de simulação de Monte Carlo sequencial em NH1

Com o fim de realizar uma avaliação de adequação em NH1 considerou-se a redefinição de alguns dados de entrada, de forma a permitir uma avaliação a partir da modelagem do problema composto. Para tal, considerou-se que as taxas de falha de linhas e transformadores assumem um valor próximo de zero ( $\lambda \times 10^{-10}$  [oc./ano]) e que os limites de transmissão são de 5.000 MW.

A validação do algoritmo do método de simulação de Monte Carlo sequencial foi realizada para dois valores de coeficiente de variação: 5% e 1%. Os índices de confiabilidade para um coeficiente de variação igual a 5% encontram-se na Tabela 1. Na Tabela 2, apresentam-se os índices de confiabilidade considerando um coeficiente de variação igual a 1%. Os índices analíticos foram consultados em (LEITE DA SILVA; MELO; CUNHA, 1991).

Verifica-se ao analisar a Tabela 1 que os índices de confiabilidade obtidos para o coeficiente de variação de 5% assumem valores próximos daqueles obtidos via método analítico. Observa-se ainda que os valores dos índices obtidos via método analí-

Figura 9 – Diagrama unifilar do sistema teste IEEE-RTS79.



Fonte: (MAGALHÃES CARVALHO, 2013)

tico (LOLP, LOLE, LOLF, EPNS e EENS) estão contidos nos respectivos intervalos de confiança de 99%, calculados conforme exposto na Seção 2.4.

Os índices de confiabilidade obtidos para o coeficiente de variação de 1% são ainda mais próximos aos índices de confiabilidade obtidos via método analítico. De forma análoga ao verificado anteriormente, os intervalos dos índices LOLP, LOLE,

Tabela 1 – Resultados de análise de adequação em NH1 com  $\beta = 5\%$  para os métodos analítico e  $MCS_{\tau_{lin}}$ , considerando o sistema teste IEEE-RTS79.

Índice	Analítico	$MCS_{\tau_{lin}}$	Inf 95%	Sup 95%
LOLP [ $\times 10^{-3}$ ]	1,0724	1,0137	0,92353	1,1039
LOLE [h/ano]	9,394	8,8801	8,0902	9,6700
LOLF [occ./ano]	2,025	1,9324	1,7973	2,0675
EPNS [MW]	0,1343	0,1263	0,1100	0,1426
EENS [MWh/ano]	1.176,3	1.106,1	963,5	1.248,8

Fonte: do autor

Tabela 2 – Resultados de análise de adequação em NH1 com  $\beta = 1\%$  para os métodos analítico e  $MCS_{\tau_{lin}}$ , considerando o sistema teste IEEE-RTS79.

Índice	Analítico	$MCS_{\tau_{lin}}$	Inf 99%	Sup 99%
LOLP [ $\times 10^{-3}$ ]	1,0724	1,0703	1,0512	1,0895
LOLE [h/ano]	9,394	9,3762	9,2085	9,5440
LOLF [occ./ano]	2,025	2,0100	1,9814	2,0386
EPNS [MW]	0,1348	0,1348	0,1313	0,1383
EENS [MWh/ano]	1.176,3	1.180,7	1.150,2	1.211,2

Fonte: do autor

LOLF, EPNS e EENS contêm, para uma confiança de 99%, os valores calculados via método analítico.

Dado que os índices de confiabilidade obtidos a partir do método  $MCS_{\tau_{lin}}$  para a avaliação de adequação em NH1 assumem valores próximos àqueles obtidos via método analítico, e além disso, os intervalos de confiança calculados contêm os índices reais, conclui-se que o algoritmo implementado fornece estimativas adequadas para os índices de confiabilidade em NH1.

### 3.6.1.2 Resultados para o método de simulação de Monte Carlo sequencial em NH2

A validação do algoritmo do método de simulação de Monte Carlo sequencial em NH2 também foi realizada considerando dois coeficientes de variação: 5% e 1%. As Tabelas 3, 4 e 5 apresentam os índices de confiabilidade e respectivos intervalos de confiança, considerando um coeficiente de variação de 5%. As Tabelas 3 e 4 contêm os resultados dos métodos implementados em (GONZÁLEZ-FERNÁNDEZ; SILVA *et al.*, 2013) e (MAGALHÃES CARVALHO, 2013). A Tabela 5 contém os resultados do método  $MCS_{\tau_{lin}}$  implementado neste trabalho.

Da análise das Tabelas 3 e 5 verifica-se que os índices obtidos pelo método  $MCS_{\tau_{lin}}$  e os índices referenciados em (GONZÁLEZ-FERNÁNDEZ; SILVA *et al.*, 2013) são numericamente próximos, apesar da diferença entre as duas metodologias aplicadas. Os índices LOLP e LOLE do método MCNS estão contidos nos respectivos intervalos de confiança estimados pelo método  $MCS_{\tau_{lin}}$ . Isso não se verifica para os

Tabela 3 – Resultados de análise de adequação em NH2 com  $\beta = 5\%$  para o método de simulação de Monte Carlo não sequencial apresentado em (GONZÁLEZ-FERNÁNDEZ; SILVA *et al.*, 2013), considerando o sistema teste IEEE-RTS79.

Índice	MCNS	Inf 95%	Sup 95%
LOLP [ $\times 10^{-3}$ ]	1,179	1,0635	1,2945
LOLE [h/ano]	10,3280	9,3159	11,3402
LOLF [occ./ano]	2,056	1,8545	2,2575
EPNS [MW]	0,1312	0,1183	0,1441
EENS [MWh/ano]	1.149,3	1.036,7	1.261,9

Fonte: do autor

Tabela 4 – Resultados de análise de adequação em NH2 com  $\beta = 5\%$  para o método de simulação de Monte Carlo sequencial apresentado em (MAGALHÃES CARVALHO, 2013), considerando o sistema teste IEEE-RTS79.

Índice	MCS	Inf 99%	Sup 99%
LOLP [ $\times 10^{-3}$ ]	1,1457	1,0409	1,2505
LOLE [h/ano]	10,036	9,118	10,954
LOLF [occ./ano]	2,084	1,934	2,234
EPNS [MW]	0,1418	0,1235	0,1601
EENS [MWh/ano]	1.241,99	1.081,85	1.402,13

Fonte: do autor

Tabela 5 – Resultados de análise de adequação em NH2 com  $\beta = 5\%$  para o método  $MCS_{\tau_{lin}}$ , considerando o sistema teste IEEE-RTS79.

Índice	$MCS_{\tau_{lin}}$	Inf 95%	Sup 95%
LOLP [ $\times 10^{-3}$ ]	1,1880	1,0823	1,2937
LOLE [h/ano]	10,4068	9,4807	11,3329
LOLF [occ./ano]	2,2268	2,0662	2,3875
EPNS [MW]	0,1436	0,1417	0,1454
EENS [MWh/ano]	1.257,6	1.241,4	1.273,8

Fonte: do autor

índices LOLF, EPNS e EENS, mas os intervalos de confiança de ambos os métodos para esses índices se intersectam. Além disso, todos os índices estimados pelo método  $MCS_{\tau_{lin}}$  estão contidos nos intervalos de confiança estimados pelo método MCNS apresentado em (GONZÁLEZ-FERNÁNDEZ; SILVA *et al.*, 2013).

Com a comparação entre os índices apresentados em (MAGALHÃES CARVALHO, 2013) com os índices calculados pelo método  $MCS_{\tau_{lin}}$ , mostra-se que existe proximidade numérica entre os valores calculados, e que todos os valores referenciados em (MAGALHÃES CARVALHO, 2013) se encontram nos respectivos intervalos de confiança calculados no âmbito deste trabalho com um nível de confiança de 95%. De igual forma, todos os índices de confiabilidade calculados na metodologia imple-



mentada também se encontram contidos nos intervalos de confiança apresentados em (MAGALHÃES CARVALHO, 2013), com nível de confiança de 95%.

Na Tabela 6 são apresentados os índices de confiabilidade e respectivos intervalos de confiança para um coeficiente de variação de 1%.

Tabela 6 – Resultados de análise de adequação em NH2 com  $\beta = 1\%$  para o método  $MCS_{\tau_{lin}}$ , considerando o sistema teste IEEE-RTS79.

Índice	$MCS_{\tau_{lin}}$	Inf 99%	Sup 99%
LOLP [ $\times 10^{-3}$ ]	1, 2055	1, 1838	1, 2272
LOLE [h/ano]	10, 5602	10, 3700	10, 7505
LOLF [occ./ano]	2, 2034	2, 1714	2, 2353
EPNS [MW]	0, 1489	0, 1451	0, 1528
EENS [MWh/ano]	1.304, 5	1.270, 8	1.338, 1

Fonte: do autor

Verifica-se similarmente que os índices obtidos assumem valores próximos àqueles disponíveis em (GONZÁLEZ-FERNÁNDEZ; SILVA *et al.*, 2013) e (MAGALHÃES CARVALHO, 2013). Posto isto, conclui-se que o algoritmo implementado fornece também estimativas adequadas para os índices de confiabilidade na avaliação de adequação em NH2, e portanto a implementação do método  $MCS_{\tau_{lin}}$  é considerada válida para a avaliação de adequação de sistemas elétricos.

### 3.6.2 Resultados para o método de simulação de Monte Carlo sequencial considerando estratégias de determinação de fatores limite de carregamento

Como descrito anteriormente, busca-se neste trabalho identificar métodos alternativos que melhorem a eficiência do estágio de avaliação de estados na análise de adequação de sistemas compostos quando usado o método de simulação de Monte Carlo sequencial. Para tal, uma possibilidade consiste em suprimir etapas de pré-avaliação via fluxo de potência, e de avaliação via fluxo de potência ótimo, tendo conhecimento dos fatores limite de carregamento do sistema, ou um valor aproximado deste, para um dado estado em avaliação. Os resultados apresentados nesta seção visam mostrar a eficiência da metodologia enunciada.

Os resultados descritos utilizam como base comparativa o tempo de simulação, a tipologia e número de avaliações realizadas. Utiliza-se de uma comparação entre o formato tradicional para avaliar estados ( $MCS_{\tau_{lin}}$ ) e o aliado do uso de uma técnica para estimar os dos fatores limite de carregamento. No método  $MCS_{\rho_{lin}}$  considera-se a estimação de fatores limite de carregamento via problema de otimização, como apresentado na Subseção 3.4.1. Por outro lado, no método  $MCS_{\hat{\rho}_{lin}}$  estimam-se os fatores limite de carregamento do sistema usando a aproximação analítica descrita na Subseção 3.4.2.

Considere-se as seguintes nomenclaturas:

**Estados visitados:** Número de estados visitados. Corresponde ao número de estados sorteados via método de simulação;

**Estados avaliados:** Número de estados avaliados. Corresponde ao número de estados com algum componente do sistema no estado *down* e cujo estado foi definido como sendo de sucesso ou falha via pré-avaliação, avaliação ou via comparação com fatores limite de carregamento;

**Sucessos via PF:** Número de estados avaliados como sendo de sucesso via pré-avaliação com fluxo de potência;

**Avaliações via OPF:** Número de estados avaliados como sendo de sucesso ou falha via fluxo de potência ótimo linearizado<sup>1</sup>;

**Estimativas de  $\rho$ :** Número de estimativas de fatores limite de carregamento. Corresponde ao número de estados que foram pré-avaliados ou avaliados como sendo de sucesso e cuja transição foi de carga;

**Avaliações suprimidas:** Número de estados para os quais uma pré-avaliação ou avaliação foi dispensada. Corresponde aos estados avaliados usando fatores limite de carregamento.

Na Tabela 7 são apresentados os resultados da avaliação de adequação em NH2 para os métodos  $MCS_{\tau_{lin}}$ ,  $MCS_{\rho_{lin}}$  e  $MCS_{\hat{\rho}_{lin}}$ .

Tabela 7 – Resultados de análise de adequação em NH2 com  $\beta = 5\%$  para os métodos  $MCS_{\tau_{lin}}$ ,  $MCS_{\rho_{lin}}$  e  $MCS_{\hat{\rho}_{lin}}$ , considerando o sistema teste IEEE-RTS79.

Método	$MCS_{\tau_{lin}}$	$MCS_{\rho_{lin}}$	$MCS_{\hat{\rho}_{lin}}$
Anos	2.267	2.267	2.267
Tempo [s]	12.126,5	12.216,8	1.996,8
LOLP [ $\times 10^{-3}$ ]	1,1880	1,1880	1,1880
EPNS [MW]	0,1436	0,1436	0,1436
LOLF [occ./ano]	2,2268	2,2268	2,2268

Fonte: do autor.

Conclui-se, através da análise dos resultados obtidos, que com as novas metodologias propostas ( $MCS_{\rho_{lin}}$  e  $MCS_{\hat{\rho}_{lin}}$ ) se mantém a precisão na estimação dos índices de confiabilidade. Além disso, verifica-se também que os tempos de execução dos métodos  $MCS_{\tau_{lin}}$  e  $MCS_{\rho_{lin}}$  são semelhantes e aproximadamente de 3,4 h, havendo uma redução de aproximadamente 16% desse tempo aquando do uso do método  $MCS_{\hat{\rho}_{lin}}$  para aproximadamente 33,28 min.

<sup>1</sup> Quando da ocorrência de uma avaliação usando fluxo de potência ótimo linearizado isto significa que também ocorreu uma pré-avaliação usando fluxo de potência. Essa avaliação via fluxo de potência não é contabilizada na variável Sucessos via PF.

A Tabela 8 contém as tipologias de avaliação de estados realizadas nos métodos  $MCS_{\tau_{lin}}$ ,  $MCS_{\rho_{lin}}$  e  $MCS_{\hat{\rho}_{lin}}$ , considerando as nomenclaturas e definições apresentadas anteriormente.

Tabela 8 – Tipologia de avaliação de estados realizada na avaliação de adequação em NH2 para os métodos  $MCS_{\tau_{lin}}$ ,  $MCS_{\rho_{lin}}$  e  $MCS_{\hat{\rho}_{lin}}$ , considerando o sistema teste IEEE-RTS79, com  $\beta = 5\%$ .

Método Número	$MCS_{\tau_{lin}}$	$MCS_{\rho_{lin}}$	$MCS_{\hat{\rho}_{lin}}$
Estados visitados	20.961.532	20.961.532	20.961.532
Estados avaliados	16.235.897	16.235.897	16.235.897
Sucessos via PF	16.172.261	971.308	971.276
Avaliações via OPF	63.636	31.734	63.636
Estimativas de $\rho$	0	977.235	977.235
Avaliações suprimidas	0	15.232.855	15.200.985

Fonte: do autor.

Como esperado, o número total de estados visitados é igual para todos os métodos e assume o valor de 20.961.532. O mesmo se verifica para o número de estados avaliados. As novas metodologias permitem a redução do número de pré-avaliações via fluxo de potência linearizado para aproximadamente 6% das avaliações quando comparadas com o método  $MCS_{\tau_{lin}}$ . No método  $MCS_{\rho_{lin}}$  o número de estados que requerem o uso do fluxo de potência ótimo linearizado para serem avaliados é reduzido para aproximadamente metade. Isto sucede porque, no método  $MCS_{\rho_{lin}}$ , os valores dos fatores limite de carregamento calculados são exatos, e portanto, quando um estado é avaliado usando esses valores, o mesmo é caracterizado como sendo de falha, visto que não há dúvidas quanto à sua caracterização. Assim, só são realizados os fluxos de potência ótimos necessários para calcular o valor de potência ativa não suprida. No método  $MCS_{\hat{\rho}_{lin}}$ , o número de estados que requerem o uso do fluxo de potência ótimo linearizado se mantém o mesmo, quando comparado com o método  $MCS_{\tau_{lin}}$ . Ademais, o valor estimado para  $\rho$  pelo método  $MCS_{\hat{\rho}_{lin}}$  é um valor inferior àquele obtido sem restrições ao perfil de despacho. Assim, quando não se pode categorizar o estado como sendo de sucesso, torna-se necessário avaliá-lo. A avaliação do estado nesse caso ocorre de forma similar a uma avaliação tradicional de estado: resolve-se primeiro um fluxo de potência linearizado, e em caso de incumprimento de limites operativos, o estado é avaliado via fluxo de potência ótimo, calculando o corte de carga caso se aplique. Por conseguinte, o método  $MCS_{\hat{\rho}_{lin}}$  acarreta no mesmo número de fluxos de potência ótimo linearizados que o método  $MCS_{\tau_{lin}}$ , mas apenas para os estados que suscitam dúvidas quanto ao seu sucesso. Já no método  $MCS_{\rho_{lin}}$ , o número de fluxos de potência ótimo linearizados realizados são essenciais para identificar qual o valor de corte de carga dos estados de falha.

O método  $MCS_{\rho_{lin}}$  dispensa de avaliação 15.232.855 estados, e 15.200.985 são dispensados usando o método  $MCS_{\hat{\rho}_{lin}}$ , o que corresponde a aproximadamente 93,6% dos estados totais avaliados até ao alcance da convergência. Observa-se também que o número de avaliações que são dispensadas pelo método  $MCS_{\rho_{lin}}$  e que não são dispensadas pelo método  $MCS_{\hat{\rho}_{lin}}$  é 31870, o que justifica o maior número de avaliações realizadas com fluxo de potência ótimo linearizado pelo método  $MCS_{\hat{\rho}_{lin}}$ . Apesar desse aumento, o desempenho do método  $MCS_{\hat{\rho}_{lin}}$ , método este que considera a estimativa de valores de limite de carregamento, é superior ao desempenho do método baseado na solução iterativa de um problema de otimização, permitindo assim uma diminuição considerável no tempo de execução do algoritmo. De fato, o método  $MCS_{\hat{\rho}_{lin}}$  é aproximadamente 6 vezes mais rápido que os métodos  $MCS_{\tau_{lin}}$  e  $MCS_{\rho_{lin}}$  a estimar os índices de confiabilidade para o sistema teste. Sem a aplicação de mecanismos de pré-avaliação, o método  $MCS_{\tau_{lin}}$  tem seu tempo de execução aumentado em aproximadamente 12, 14 vezes.

Em resumo, as principais conclusões que se podem retirar dos resultados obtidos é que as novas metodologias propostas permitem evitar avaliações de estados via fluxo de potência de forma considerável. No entanto, o tempo de resolução de problemas de mínimo e máximo carregamento no método  $MCS_{\rho_{lin}}$  e o número de vezes que esses problemas são resolvidos tornam esta implementação pouco atrativa. Por outro lado, a resolução analítica do problema de mínimo e máximo carregamento no método de simulação de Monte Carlo sequencial, na tentativa de suprimir avaliações baseadas em análises de fluxo de potência, trouxe resultados de interesse, o que motivou a pesquisa e implementação do método  $MCS_{\hat{\rho}_{lin}}$ .

### 3.7 CONCLUSÕES E DISCUSSÕES

Neste capítulo, foram apresentadas estratégias de pré-avaliação de estados, mecanismos de aferição e determinação de valor de corte de carga, além de duas metodologias propostas para melhorar a eficiência do método de simulação de Monte Carlo sequencial, através da supressão de avaliações de estados via análise de fatores limite de carregamento. A estratégia empregada no método  $MCS_{\hat{\rho}_{lin}}$  se destacou como aquela cujo emprego forneceu resultados mais atrativos. Os resultados obtidos neste capítulo motivaram a pesquisa de técnicas similares aplicáveis ao método de simulação de Monte Carlo sequencial quando considerada a formulação não linear da rede. As formulações matemáticas desenvolvidas e melhorias alcançadas para a formulação não linear da rede são apresentadas no Capítulo 4. A estratégia de determinação de fatores limite de carregamento empregada no método  $MCS_{\hat{\rho}_{lin}}$  foi também explorada junto ao método de entropia cruzada, conforme exposto no Capítulo 5.

## **4 ESTRATÉGIAS DE AVALIAÇÃO DE ESTADOS EM SISTEMAS COMPOSTOS CONSIDERANDO MODELO DE REDE NÃO LINEAR**

No estado da arte existem diversos estudos destinados à avaliação de confiabilidade de sistemas elétricos considerando uma representação linear para as equações que definem a rede. No entanto, e atendendo a que a evolução tecnológica permitiu o desenvolvimento de computadores com maior capacidade de processamento, uma possibilidade para avaliar os índices de confiabilidade com mais exatidão passa por considerar uma representação do sistema através de um conjunto de equações não lineares. Neste capítulo é explorada a avaliação de sistemas elétricos considerando a sua representação via modelo não linear. Considerações iniciais acerca deste tópico são apresentadas na Seção 4.1. Na Seção 4.2 apresenta-se a formulação do fluxo de potência tensorial modificado considerado neste trabalho para efetuar a pré-avaliação de estados no método de simulação de Monte Carlo sequencial. A aferição do estado de sucesso ou falha e a aplicação de medidas corretivas via fluxo de potência ótimo e escalonamento é discutida na Seção 4.3. Na Seção 4.4 apresenta-se a formulação do problema de determinação de fatores limite de carregamento via modelo preditor-corretor tensorial adicionado no método de simulação de Monte Carlo buscando suprimir avaliações de estados baseadas em fluxo de potência e fluxo de potência ótimo. Na Seção 4.5 apresenta-se o algoritmo de inclusão de cálculo de fatores limite de carregamento no método de simulação de Monte Carlo, cujos resultados obtidos são exibidos na Seção 4.6. A Seção 4.7 é a seção de considerações finais.

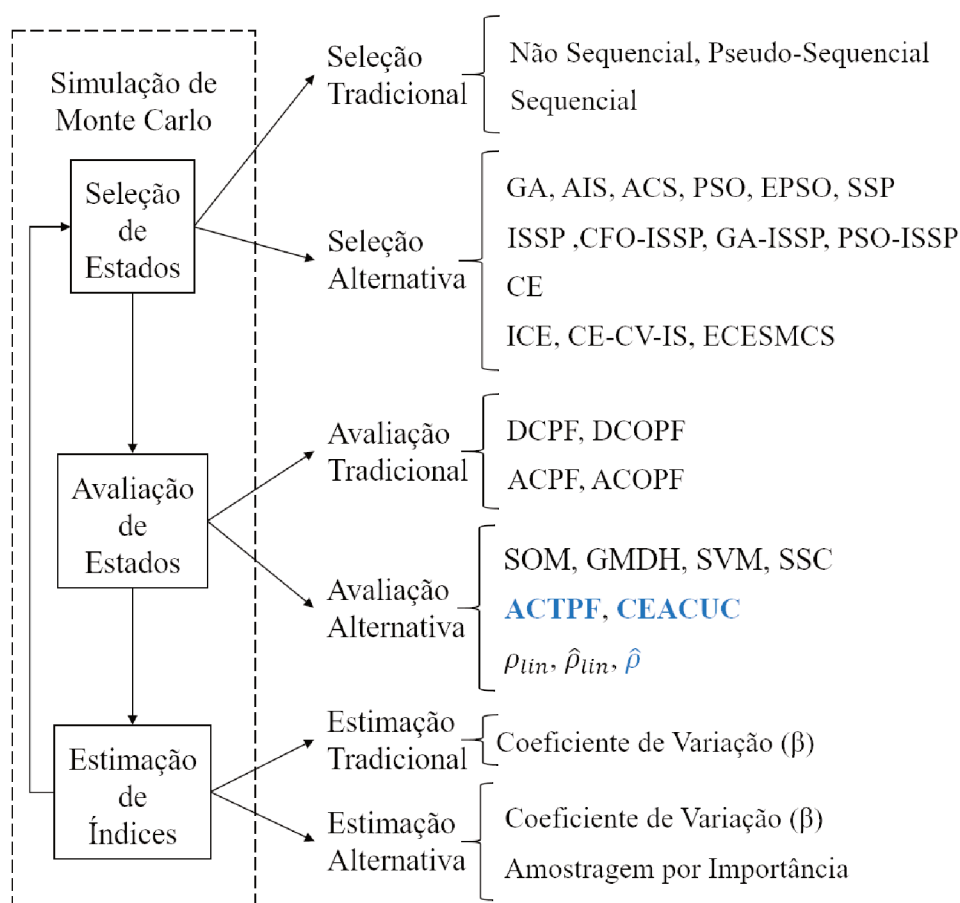
### **4.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS**

O método de simulação de Monte Carlo sequencial aplicado à avaliação de confiabilidade de sistemas elétricos permite adicionar características da operação dos sistemas elétricos, sejam essas características temporais ou intrínsecas do sistema em avaliação. Quanto maior o detalhamento adicionado à modelagem, mais características da operação do sistema podem ser considerados, afastando a ferramenta da definição tradicional de uma ferramenta do universo do planejamento. Por outro lado, o acréscimo de detalhes pode aumentar o tempo de avaliação da adequação do sistema para valores de tempos inoportunos. Dessa forma, a adição de detalhamento na modelagem acompanhado de alguma técnica que possa reduzir tempos de execução pode ser vantajosa. Assim sendo, neste capítulo é considerada a modelagem não linear da rede, aliada a estratégias propostas para o estágio de avaliação de estados com o fim de aperfeiçoar a eficiência da aplicação do método de simulação de Monte Carlo sequencial na avaliação de confiabilidade de sistemas compostos.

A contribuição para o estado da arte apresentada neste capítulo enquadra-se na fase de avaliação de estados do método de simulação de Monte Carlo e está devi-

damente identificada na Figura 10, com três metodologias adicionadas ao método de simulação, visando melhorar a sua eficiência: o método de fluxo de potência tensorial (ACTPF) o qual estabelece maior robustez à solução garantindo convergência para os estados operativos amostrados, o método de escalonamento de geração considerando entropia cruzada (CEACUC) o qual robustece a determinação de ações corretivas a serem adotadas durante o processo de simulação, e o método de determinação de fatores limite de carregamento via modelo preditor-corretor tensorial, visando suprimir avaliações baseadas em fluxo de potência e fluxo de potência ótimo durante a execução do método de simulação de Monte Carlo sequencial, de forma similar ao que foi apresentado no Capítulo 3.

Figura 10 – Estágios do método de simulação de Monte Carlo destacando contribuições propostas no Capítulo 4.



Fonte: do autor.

## 4.2 PRÉ-AVALIAÇÃO DE ESTADOS VIA FLUXO DE POTÊNCIA TENSORIAL MODIFICADO

Após o sorteio do estado no método de simulação de Monte Carlo sequencial, torna-se de interesse realizar uma pré-avaliação com o fim de verificar se, para um determinado perfil de carga no sistema, é possível suprir a carga sem que limites técnicos sejam violados. Essa pré-avaliação consiste numa análise simplificada e rápida do sistema, evitando assim o desperdício de tempo computacional. Para os estados em casos de estudo pertencentes ao NH1, não há lugar para pré-avaliação de estados, e neste caso, os limites técnicos que devem ser respeitados são apenas aqueles associados aos limites de capacidade das unidades geradoras. Uma avaliação de estados nesta análise consiste apenas em somar toda a capacidade de geração disponível (que depende do estado em avaliação), somar toda a carga demandada pelo sistema e verificar se a primeira soma é superior à segunda. Por outro lado, na pré-avaliação de estados pertencentes ao NH2, além das restrições na capacidade de geração, os limites de transmissão também devem ser considerados. Para um dado estado do sistema, essa pré-avaliação pode ser realizada através da solução de um problema de fluxo de potência, sucedida de uma análise da solução onde se busca identificar possíveis violações de limites operativos.

O problema do fluxo de potência numa rede elétrica visa determinar as tensões complexas nas barras e a distribuição dos fluxos de potência de forma a compor uma representação em regime permanente de operação da rede elétrica (MONTICELLI, 1983; SOUZA SALGADO, 2009). A aplicação do problema do fluxo de potência em sistemas elétricos é vasta, sendo de importância para o planejamento e operação desses sistemas. Para a avaliação do estado elétrico em regime permanente é considerada uma modelagem de rede, onde a mesma é representada por um conjunto de equações e inequações algébricas não lineares. As equações algébricas têm por fim a representação dos componentes do sistema, enquanto que as inequações são utilizadas para modelar limites operativos.

Nas próximas subseções são apresentadas as formulações para o problema do fluxo de potência em coordenadas retangulares e para o problema do fluxo de potência tensorial modificado proposto nesta tese, ambos aplicados na pré-avaliação de estados para análises em NH2.

### 4.2.1 Formulação vetorial do problema de fluxo de potência em coordenadas retangulares

A escolha do plano retangular complexo para representar as tensões complexas das barras conduz a que a tensão em uma dada barra  $i$  assuma a representação  $E_i = e_i + jf_i$ , onde  $e_i$  e  $f_i$  correspondem a parte real e imaginária da tensão complexa,

respectivamente, na barra  $i$ . A partir dessa definição, pode-se escrever a potência injetada em uma barra  $i$  como:

$$\begin{aligned} S_i(e_i, f_i) &= E_i \sum_{k=1}^{n_b} Y_{ik}^* E_k^* \\ &= (e_i + j f_i) \sum_{k=1}^{n_b} (G_{ik} - j B_{ik})(e_k - j f_k) \end{aligned} \quad (60)$$

onde  $n_b$  denota o número de barras do sistema;  $Y_{ik}$  o elemento  $(i, k)$  da matriz admittância de barra do sistema; e  $G_{ik}$  e  $B_{ik}$  as correspondentes partes real e imaginária de  $Y_{ik}$ , respectivamente. Desenvolvendo a equação (60) obtém-se:

$$\begin{aligned} S_i(e_i, f_i) &= \sum_{k=1}^{n_b} \left[ e_i (G_{ik} e_k - B_{ik} f_k) + f_i (G_{ik} f_k + B_{ik} e_k) \right] \\ &+ j \sum_{k=1}^{n_b} \left[ f_i (G_{ik} e_k - B_{ik} f_k) - e_i (G_{ik} f_k + B_{ik} e_k) \right] \end{aligned} \quad (61)$$

donde se tem que as injeções de potência ativa e reativa na barra  $i$  são dadas pelas expressões:

$$P_i(e_i, f_i) = \sum_{k=1}^{n_b} \left[ e_i (G_{ik} e_k - B_{ik} f_k) + f_i (G_{ik} f_k + B_{ik} e_k) \right] \quad (62)$$

$$Q_i(e_i, f_i) = \sum_{k=1}^{n_b} \left[ f_i (G_{ik} e_k - B_{ik} f_k) - e_i (G_{ik} f_k + B_{ik} e_k) \right]. \quad (63)$$

A solução do problema do fluxo de potência é encontrada quando as componentes real e imaginária das tensões complexas são calculadas de forma a que os balanços de potência ativa  $\Delta P_i(e_i, f_i)$ , potência reativa  $\Delta Q_i(e_i, f_i)$ , e tensão  $\Delta V_i(e_i, f_i)$  sejam inferiores a uma tolerância especificada, onde os balanços têm as seguintes definições matemáticas:

$$\Delta P_i(e_i, f_i) = P_i^{esp} - \sum_{k=1}^{n_b} \left[ e_i (G_{ik} e_k - B_{ik} f_k) + f_i (G_{ik} f_k + B_{ik} e_k) \right] \quad (64)$$

$$\Delta Q_i(e_i, f_i) = Q_i^{esp} - \sum_{k=1}^{n_b} \left[ f_i (G_{ik} e_k - B_{ik} f_k) - e_i (G_{ik} f_k + B_{ik} e_k) \right] \quad (65)$$

$$\Delta V_i(e_i, f_i) = V_i^{esp^2} - (e_i^2 + f_i^2) \quad (66)$$

e o símbolo sobrescrito " $(\cdot)^{esp}$ " indica a especificação da grandeza.

As equações de balanço de potência podem ser escritas de forma compacta utilizando notação matricial. Essa forma de representação simplifica a apresentação



dos modelos e facilita a construção de deduções matemáticas. A saber, pode-se definir o vetor de correntes injetadas nas barras de uma rede como:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{I}(\mathbf{e}, \mathbf{f}) &= \mathbf{Y}\mathbf{E} \\
 &= (\mathbf{G} + j\mathbf{B})(\mathbf{e} + j\mathbf{f}) \\
 &= (\mathbf{G}\mathbf{e} - \mathbf{B}\mathbf{f}) + j(\mathbf{B}\mathbf{e} + \mathbf{G}\mathbf{f}) \\
 &= \mathbf{I}_e + j\mathbf{I}_f,
 \end{aligned} \tag{67}$$

onde  $\mathbf{e}$  e  $\mathbf{f}$  representam vetores contendo as componentes real e imaginária das tensões complexas nas barras;  $\mathbf{Y}$  é a matriz admitância de barra;  $\mathbf{G}$  e  $\mathbf{B}$  denotam as componentes real e imaginária de  $\mathbf{Y}$ ; e  $\mathbf{I}_e = \mathbf{G}\mathbf{e} - \mathbf{B}\mathbf{f}$  e  $\mathbf{I}_f = \mathbf{B}\mathbf{e} + \mathbf{G}\mathbf{f}$  são as componentes real e imaginária de  $\mathbf{I}$ .

Seja  $\mathbf{D}_u$  uma matriz gerada a partir da diagonalização do vetor  $\mathbf{u}$ , então o vetor de potências complexas injetadas em cada barra pode ser expresso por:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{S}(\mathbf{e}, \mathbf{f}) &= \mathbf{D}_E \mathbf{I}^* \\
 &= (\mathbf{D}_e + j\mathbf{D}_f)(\mathbf{I}_e - j\mathbf{I}_f) \\
 &= (\mathbf{D}_e \mathbf{I}_e + \mathbf{D}_f \mathbf{I}_f) + j(\mathbf{D}_f \mathbf{I}_e - \mathbf{D}_e \mathbf{I}_f),
 \end{aligned} \tag{68}$$

ou ainda,

$$\mathbf{S}(\mathbf{e}, \mathbf{f}) = \mathbf{P}(\mathbf{e}, \mathbf{f}) + j\mathbf{Q}(\mathbf{e}, \mathbf{f}) \tag{69}$$

no qual

$$\mathbf{P}(\mathbf{e}, \mathbf{f}) = \mathbf{D}_e \mathbf{I}_e + \mathbf{D}_f \mathbf{I}_f \tag{70}$$

$$\mathbf{Q}(\mathbf{e}, \mathbf{f}) = \mathbf{D}_f \mathbf{I}_e - \mathbf{D}_e \mathbf{I}_f \tag{71}$$

representam vetores de injeção de potência ativa e reativa em coordenadas retangulares, respectivamente.

Desenvolvendo e reescrevendo de forma matricial  $\mathbf{P}(\mathbf{e}, \mathbf{f})$  e  $\mathbf{Q}(\mathbf{e}, \mathbf{f})$  obtém-se:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P}(\mathbf{e}, \mathbf{f}) &= \mathbf{D}_e \mathbf{I}_e + \mathbf{D}_f \mathbf{I}_f \\
 &= \mathbf{D}_e (\mathbf{G}\mathbf{e} - \mathbf{B}\mathbf{f}) + \mathbf{D}_f (\mathbf{B}\mathbf{e} + \mathbf{G}\mathbf{f}) \\
 &= \begin{bmatrix} \mathbf{D}_e & \mathbf{D}_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{G} & -\mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{G} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e} \\ \mathbf{f} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{72}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{Q}(\mathbf{e}, \mathbf{f}) &= \mathbf{D}_f \mathbf{I}_e - \mathbf{D}_e \mathbf{I}_f \\
 &= \mathbf{D}_f (\mathbf{G}\mathbf{e} - \mathbf{B}\mathbf{f}) + \mathbf{D}_e (\mathbf{B}\mathbf{e} + \mathbf{G}\mathbf{f}) \\
 &= \begin{bmatrix} -\mathbf{D}_e & \mathbf{D}_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{G} \\ \mathbf{G} & -\mathbf{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e} \\ \mathbf{f} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{73}$$

que resultam em representações matriciais das equações apresentadas em (62) e (63). Destaca-se ainda que as equações matriciais que modelam a injeção de potência ativa e reativa em cada barra apresentam uma natureza quadrática em função das tensões das barras, quando representadas em coordenadas retangulares.

Usando a notação matricial, os balanços de potência ativa, reativa e de tensão podem ser escritos de forma mais compacta como:

$$\begin{aligned}\Delta P(e, f) &= P^{\text{esp}} - P(e, f) \\ \Delta Q(e, f) &= Q^{\text{esp}} - Q(e, f) \\ \Delta V(e, f) &= V^{\text{esp}^2} - (e^2 + f^2),\end{aligned}\tag{74}$$

onde  $P^{\text{esp}}$ ,  $Q^{\text{esp}}$  e  $V^{\text{esp}}$  são vetores com valores especificados para as injeções de potência ativa, injeções de potência reativa e magnitude de tensão ao quadrado; enquanto  $u^2$  é um vetor contendo os elementos de  $u$  ao quadrado.

Representando o vetor de funções em (74) por  $h(\hat{x})$ , tem-se que  $h(\hat{x})$  contém  $3n_b$  funções escalares e  $2n_b$  variáveis, onde  $\hat{x} = [e, f]^T$ . Usualmente, os termos  $V\delta$ ,  $PQ$  e  $PV$  são empregados para diferenciar as tipologias de barras, onde são pré-especificados valores de ângulos e magnitudes de tensão, injeções de potência ativa e reativa, e injeção de potência ativa e magnitude de tensão, respectivamente. As equações de fluxo de potência são então definidas a partir de um subconjunto de equações de  $h(\hat{x})$  composto por  $n_{PV} + n_{PQ}$  funções relacionadas com balanços de potência ativa, sendo  $n_{PQ}$  funções associadas a balanços de potência reativa e  $n_{PV}$  funções relacionadas com o balanços de tensão, onde  $n_{PV}$  e  $n_{PQ}$  correspondem ao número de barras PV e número de barras PQ, respectivamente. Tradicionalmente, apenas uma barra é escolhida para ser de tipo  $V\delta$ , resultando num conjunto de  $2n_b - 2$  funções que podem ser representadas por  $g(x)$ , onde  $x$  é um vetor<sup>1</sup> contendo as partes reais e imaginárias das tensões das barras PQ e PV. A solução do problema do fluxo de potência consiste em determinar os  $2n_b - 2$  valores das tensões das barras presentes em  $x$ , com o objetivo de reduzir os balanços a zero, ou pelo menos a valores próximos de zero para uma dada tolerância.

#### 4.2.2 Discussões acerca do método de fluxo de potência tensorial

O problema do fluxo de potência pode ser representado na forma compacta como

$$g(x) = g_s - g_c(x)\tag{75}$$

onde  $g(x)$  é um vetor de funções com balanços calculados em  $x$ ,  $g_s$  é um vetor de injeções e tensões ao quadrado especificadas e  $g_c(x)$  é um vetor de injeções e tensões ao quadrado calculadas em  $x$ .

<sup>1</sup> Nesta seção, a notação  $x$  representa a solução do problema de fluxo de potência, e não um estado selecionado pelo método de simulação de Monte Carlo.

A função vetorial  $g(x)$  pode ser aproximada a partir da sua expansão em série de Taylor de primeira ordem, calculada no ponto  $x$  adicionado da direção  $d_n$  como segue

$$g(x + d_n) \approx g(x) + J(x)d_n \quad (76)$$

onde  $J(x)$  é a matriz Jacobiana de  $g(x)$  calculada em  $x$ .

Usando (76), e partindo de uma estimativa da solução  $x^{(0)}$ , a direção para a qual  $g(x + d_n)$  é um vetor nulo pode ser calculada através do uso da expressão  $d_n = -[J(x)]^{-1}g(x)$ . No método de Newton-Raphson, aplica-se este conceito num procedimento iterativo baseado na regra de atualização

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + d_n^{(k)} \quad (77)$$

onde

$$d_n^{(k)} = -[J(x^{(k)})]^{-1}g(x^{(k)}). \quad (78)$$

Contudo, dado que  $g(x)$  é uma função quadrática de  $x$ ,  $g(x + d)$  pode ser calculada sem aproximações através da expansão em série de Taylor de segunda ordem:

$$g(x + d) = g(x) + J(x)d + \frac{1}{2}d^t T d \quad (79)$$

onde  $T$  é uma matriz tridimensional constante denominada de *tensor*.

Ainda que (79) permita a expansão em série de Taylor de  $g(x)$  na direção  $d$  sem truncamento, a determinação de uma fórmula fechada para  $d$  é ainda um problema a se resolver. No entanto, a expansão de segunda ordem pode ser utilizada para desenvolver métodos iterativos melhorados, como documentado em (SALGADO, R.; ZEITUNE, A., 2009; SALGADO, R. S.; ZEITUNE, A. F., 2013). De fato, a partir de (75) tem-se:

$$g(x + d) = g_s - g_c(x + d). \quad (80)$$

No ponto  $x = 0$  tem-se por (79) que

$$\begin{aligned} g(d) &= g(0) + J(0)d + \frac{1}{2}d^t T d \\ &= g_s + [0] d + \frac{1}{2}d^t T d \\ &= g_s + \frac{1}{2}d^t T d \end{aligned} \quad (81)$$

e pela equação (80)

$$g(d) = g_s - g_c(d) \quad (82)$$

donde se conclui que

$$g_c(d) = -\frac{1}{2}d^t T d, \quad (83)$$

que é uma expressão já introduzida anteriormente em (IWAMOTO; TAMURA, 1978), deduzida entretanto de uma forma distinta.

Portanto, usando (83), a expansão em série de Taylor de segunda ordem em (79) pode ser escrita como sendo

$$g(\mathbf{x} + \mathbf{d}) = g(\mathbf{x}) + \mathbf{J}(\mathbf{x})\mathbf{d} - g_c(\mathbf{d}). \quad (84)$$

Suponha agora que a direção  $\mathbf{d}$  é tal que  $\mathbf{d} = \mathbf{d}_n + \mathbf{d}_t$ , onde  $\mathbf{d}_n$  representa a direção de Newton e  $\mathbf{d}_t$  a componente tensorial da direção. Então tem-se que:

$$\begin{aligned} g(\mathbf{x} + \mathbf{d}) &= g(\mathbf{x} + \mathbf{d}_n + \mathbf{d}_t) \\ &= g(\mathbf{x}) + \mathbf{J}(\mathbf{x})(\mathbf{d}_n + \mathbf{d}_t) - g_c(\mathbf{d}_n + \mathbf{d}_t) \\ &= g(\mathbf{x}) + \mathbf{J}(\mathbf{x})\mathbf{d}_n + \mathbf{J}(\mathbf{x})\mathbf{d}_t - g_c(\mathbf{d}_n + \mathbf{d}_t). \end{aligned} \quad (85)$$

Atendendo a que  $\mathbf{d}_n = -[\mathbf{J}(\mathbf{x})]^{-1} g(\mathbf{x})$ , a expressão (85) pode ser simplificada como se segue

$$g(\mathbf{x} + \mathbf{d}) = \mathbf{J}(\mathbf{x})\mathbf{d}_t - g_c(\mathbf{d}_n + \mathbf{d}_t). \quad (86)$$

Uma vez que a direção perfeita  $\mathbf{d}$  é desconhecida, a aproximação  $g_c(\mathbf{d}_n + \mathbf{d}_t) \approx g_c(\mathbf{d}_n)$  pode ser aplicada assumindo que a variação incremental  $\mathbf{d}$  é predominantemente composta pela direção fornecida pelo modelo linear do método de Newton-Raphson. Consequentemente, a direção adicional para a qual  $g(\mathbf{x} + \mathbf{d})$  é um vetor nulo pode ser estimada usando a expressão  $\mathbf{d}_t = [\mathbf{J}(\mathbf{x})]^{-1} g_c(\mathbf{d}_n)$ . O método de fluxo de potência tensorial utiliza-se desta expressão num método iterativo de acordo com a regra de atualização:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{d}_n^{(k)} + \mathbf{d}_t^{(k)}, \quad (87)$$

onde  $\mathbf{d}_n^{(k)}$  é calculada usando (78) e

$$\mathbf{d}_t^{(k)} = [\mathbf{J}(\mathbf{x}^{(k)})]^{-1} g_c(\mathbf{d}_n^{(k)}). \quad (88)$$

A estratégia baseada em tensores mostrou proporcionar maior eficiência e robustez, quando comparada com o método de Newton-Raphson e uma aproximação tensorial baseada em interpolações. O algoritmo introduzido em (SALGADO, R.; ZEITUNE, A., 2009) tem a particularidade de promover cálculos que verificam se a aplicação do termo  $\mathbf{d}_t$  reduz efetivamente os balanços, isto é, se

$$\left\| g(\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{d}_n^{(k)} + \mathbf{d}_t^{(k)}) \right\|_{\infty} \leq \left\| g(\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{d}_n^{(k)}) \right\|_{\infty}. \quad (89)$$

Em caso negativo, apenas a direção padrão de Newton  $\mathbf{d}_n$  é utilizada e  $\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{d}_n^{(k)}$  é a regra escolhida para atualizar  $\mathbf{x}^{(k+1)}$ . Como em teoria a direção complementar baseada em tensores deveria melhorar a direção  $\mathbf{d}$ , a necessidade deste procedimento sugere que existe a possibilidade de melhorar a estimação de  $\mathbf{d}_t$ .

De fato, note-se que a suposição  $g_c(\mathbf{d}_n + \mathbf{d}_t) \approx g_c(\mathbf{d}_n)$  implica, por (83), que:

$$\begin{aligned} g_c(\mathbf{d}_n) - g_c(\mathbf{d}_n + \mathbf{d}_t) &\approx 0 \\ -\frac{1}{2} \mathbf{d}_n^t \mathbf{T} \mathbf{d}_n + \frac{1}{2} (\mathbf{d}_n + \mathbf{d}_t)^t \mathbf{T} (\mathbf{d}_n + \mathbf{d}_t) &\approx 0 \\ \frac{1}{2} \mathbf{d}_n^t \mathbf{T} \mathbf{d}_t + \frac{1}{2} \mathbf{d}_t^t \mathbf{T} \mathbf{d}_n + \frac{1}{2} \mathbf{d}_t^t \mathbf{T} \mathbf{d}_t &\approx 0. \end{aligned} \quad (90)$$

Esta análise indica que dois termos da expansão de segunda ordem de  $g(\mathbf{x})$ , e que são linearmente dependentes de  $\mathbf{d}_t$ , são de fato negligenciadas durante a estimação de  $\mathbf{d}_t$ . O método tensorial modificado aqui proposto explora esta linearidade para melhorar o vetor de correção  $\mathbf{d}_t$  tirando vantagens das relações matemáticas existentes entre o tensor e a matriz Jacobiana de  $g(\mathbf{x})$  e de uma igualdade envolvendo multiplicações matriz-vetor calculada usando a matriz Jacobiana.

### 4.2.3 Proposta de fluxo de potência tensorial modificado

Nesta seção apresenta-se a prova para a igualdade  $\mathbf{J}(\mathbf{d}_n) \mathbf{d}_t = \mathbf{J}(\mathbf{d}_t) \mathbf{d}_n$ , a modificação proposta na regra de atualização do método tensorial e o algoritmo resultante.

#### 4.2.3.1 Simetria entre produtos matriz-vetor envolvendo a matriz Jacobiana.

Para a demonstração da igualdade  $\mathbf{J}(\mathbf{d}_n) \mathbf{d}_t = \mathbf{J}(\mathbf{d}_t) \mathbf{d}_n$ , assumamos duas direções vectoriais  $\mathbf{d}_n^h$  e  $\mathbf{d}_t^h$ , em  $\Re^{2n_b}$ , escritas na forma:

$$\mathbf{d}_n^h = [\mathbf{a}, \mathbf{b}]^t \quad (91)$$

$$\mathbf{d}_t^h = [\mathbf{r}, \mathbf{s}]^t \quad (92)$$

onde  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$  correspondem aos incrementos nas partes reais e imaginárias das tensões das barras no vetor  $\mathbf{d}_n^h$ , enquanto que  $\mathbf{r}$  e  $\mathbf{s}$  são os incrementos nas partes reais e imaginárias das tensões das barras no vetor  $\mathbf{d}_t^h$ , respectivamente.

A matriz Jacobiana de  $h(\hat{\mathbf{x}})$  avaliada em  $\hat{\mathbf{x}}$  pode ser escrita na forma

$$\mathbf{J}^h(\hat{\mathbf{x}}) = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_1^h(\hat{\mathbf{x}}) & \mathbf{J}_2^h(\hat{\mathbf{x}}) \\ \mathbf{J}_3^h(\hat{\mathbf{x}}) & \mathbf{J}_4^h(\hat{\mathbf{x}}) \\ \mathbf{J}_5^h(\hat{\mathbf{x}}) & \mathbf{J}_6^h(\hat{\mathbf{x}}) \end{bmatrix} \quad (93)$$

onde

$$\mathbf{J}_1^h(\hat{\mathbf{x}}) = \frac{\partial \Delta \mathbf{P}}{\partial \mathbf{e}} = -\mathbf{D}_e \mathbf{G} - \mathbf{D}_f \mathbf{B} - \mathbf{D}_{Ge} + \mathbf{D}_{Bf} \quad (94)$$

$$\mathbf{J}_2^h(\hat{\mathbf{x}}) = \frac{\partial \Delta \mathbf{P}}{\partial \mathbf{f}} = -\mathbf{D}_f \mathbf{G} + \mathbf{D}_e \mathbf{B} - \mathbf{D}_{Be} - \mathbf{D}_{Gf} \quad (95)$$

$$\mathbf{J}_3^h(\hat{\mathbf{x}}) = \frac{\partial \Delta \mathbf{Q}}{\partial \mathbf{e}} = -\mathbf{D}_f \mathbf{G} + \mathbf{D}_e \mathbf{B} + \mathbf{D}_{Be} + \mathbf{D}_{Gf} \quad (96)$$

$$\mathbf{J}_4^h(\hat{\mathbf{x}}) = \frac{\partial \Delta \mathbf{Q}}{\partial \mathbf{f}} = +\mathbf{D}_e \mathbf{G} + \mathbf{D}_f \mathbf{B} - \mathbf{D}_{Ge} + \mathbf{D}_{Bf} \quad (97)$$

$$\mathbf{J}_5^h(\hat{\mathbf{x}}) = \frac{\partial \Delta \mathbf{V}}{\partial \mathbf{e}} = -2\mathbf{D}_e \quad (98)$$

$$\mathbf{J}_6^h(\hat{\mathbf{x}}) = \frac{\partial \Delta \mathbf{V}}{\partial \mathbf{f}} = -2\mathbf{D}_f \quad (99)$$

Como consequência, usando as equações (91)–(99), as seguintes multiplicações podem ser definidas.

$$\mathbf{J}_1^h(\mathbf{d}_n^h) \mathbf{r} = -\mathbf{D}_a \mathbf{G} \mathbf{r} - \mathbf{D}_b \mathbf{B} \mathbf{r} - \mathbf{D}_{Ga} \mathbf{r} + \mathbf{D}_{Bb} \mathbf{r} \quad (100)$$

$$\mathbf{J}_1^h(\mathbf{d}_t^h) \mathbf{a} = -\mathbf{D}_r \mathbf{G} \mathbf{a} - \mathbf{D}_s \mathbf{B} \mathbf{a} - \mathbf{D}_{Gr} \mathbf{a} + \mathbf{D}_{Bs} \mathbf{a} \quad (101)$$

$$\mathbf{J}_2^h(\mathbf{d}_n^h) \mathbf{s} = -\mathbf{D}_b \mathbf{G} \mathbf{s} + \mathbf{D}_a \mathbf{B} \mathbf{s} - \mathbf{D}_{Ba} \mathbf{s} - \mathbf{D}_{Gb} \mathbf{s} \quad (102)$$

$$\mathbf{J}_2^h(\mathbf{d}_t^h) \mathbf{b} = -\mathbf{D}_s \mathbf{G} \mathbf{b} + \mathbf{D}_r \mathbf{B} \mathbf{b} - \mathbf{D}_{Br} \mathbf{b} - \mathbf{D}_{Gs} \mathbf{b} \quad (103)$$

$$\mathbf{J}_3^h(\mathbf{d}_n^h) \mathbf{r} = -\mathbf{D}_b \mathbf{G} \mathbf{r} + \mathbf{D}_a \mathbf{B} \mathbf{r} + \mathbf{D}_{Ba} \mathbf{r} + \mathbf{D}_{Gb} \mathbf{r} \quad (104)$$

$$\mathbf{J}_3^h(\mathbf{d}_t^h) \mathbf{a} = -\mathbf{D}_s \mathbf{G} \mathbf{a} + \mathbf{D}_r \mathbf{B} \mathbf{a} + \mathbf{D}_{Br} \mathbf{a} + \mathbf{D}_{Gs} \mathbf{a} \quad (105)$$

$$\mathbf{J}_4^h(\mathbf{d}_n^h) \mathbf{s} = +\mathbf{D}_a \mathbf{G} \mathbf{s} + \mathbf{D}_b \mathbf{B} \mathbf{s} - \mathbf{D}_{Ga} \mathbf{s} + \mathbf{D}_{Bb} \mathbf{s} \quad (106)$$

$$\mathbf{J}_4^h(\mathbf{d}_t^h) \mathbf{b} = +\mathbf{D}_r \mathbf{G} \mathbf{b} + \mathbf{D}_s \mathbf{B} \mathbf{b} - \mathbf{D}_{Gr} \mathbf{b} + \mathbf{D}_{Bs} \mathbf{b} \quad (107)$$

$$\mathbf{J}_5^h(\mathbf{d}_n^h) \mathbf{r} = -2\mathbf{D}_a \mathbf{r} \quad (108)$$

$$\mathbf{J}_5^h(\mathbf{d}_t^h) \mathbf{a} = -2\mathbf{D}_r \mathbf{a} \quad (109)$$

$$\mathbf{J}_6^h(\mathbf{d}_n^h) \mathbf{s} = -2\mathbf{D}_b \mathbf{s} \quad (110)$$

$$\mathbf{J}_6^h(\mathbf{d}_t^h) \mathbf{b} = -2\mathbf{D}_s \mathbf{b} \quad (111)$$

Por uma questão de simplicidade, definam-se os seguintes vetores

$$\boldsymbol{\alpha}_{nt} = \mathbf{J}_1^h(\mathbf{d}_n^h) \mathbf{r} + \mathbf{J}_2^h(\mathbf{d}_n^h) \mathbf{s} \quad (112)$$

$$\boldsymbol{\beta}_{nt} = \mathbf{J}_3^h(\mathbf{d}_n^h) \mathbf{r} + \mathbf{J}_4^h(\mathbf{d}_n^h) \mathbf{s} \quad (113)$$

$$\boldsymbol{\gamma}_{nt} = \mathbf{J}_5^h(\mathbf{d}_n^h) \mathbf{r} + \mathbf{J}_6^h(\mathbf{d}_n^h) \mathbf{s} \quad (114)$$

$$\boldsymbol{\alpha}_{tn} = \mathbf{J}_1^h(\mathbf{d}_t^h) \mathbf{a} + \mathbf{J}_2^h(\mathbf{d}_t^h) \mathbf{b} \quad (115)$$

$$\boldsymbol{\beta}_{tn} = \mathbf{J}_3^h(\mathbf{d}_t^h) \mathbf{a} + \mathbf{J}_4^h(\mathbf{d}_t^h) \mathbf{b} \quad (116)$$

$$\boldsymbol{\gamma}_{tn} = \mathbf{J}_5^h(\mathbf{d}_t^h) \mathbf{a} + \mathbf{J}_6^h(\mathbf{d}_t^h) \mathbf{b} \quad (117)$$

Sejam  $\mathbf{z}$  e  $\mathbf{q}$  vetores em  $\mathbb{R}^{n_b}$ . Seja também  $\mathbf{A}$  uma matriz em  $\mathbb{R}^{n_b \times n_b}$ . Então, é verdadeira a seguinte igualdade:

$$\mathbf{D}_z \mathbf{A} \mathbf{q} = \mathbf{D}_{\mathbf{A} \mathbf{q}} \mathbf{z}. \quad (118)$$

Assim, usando (100)–(117), tem-se:

$$\begin{aligned}
 \alpha_{nt} &= -D_a Gr - D_b Br - D_{Ga} r + D_{Bb} r \\
 &\quad - D_b Gs + D_a Bs - D_{Ba} s - D_{Gb} s \\
 &= -D_{Gr} a - D_{Br} b - D_r Ga + D_r Bb \\
 &\quad - D_{Gs} b + D_{Bs} a - D_s Ba - D_s Gb \\
 &= \alpha_{tn}
 \end{aligned} \tag{119}$$

$$\begin{aligned}
 \beta_{nt} &= -D_b Gr + D_a Br + D_{Ba} r + D_{Gb} r \\
 &\quad + D_a Gs + D_b Bs - D_{Ga} s + D_{Bb} s \\
 &= -D_{Gr} b + D_{Br} a + D_r Ba + D_r Gb \\
 &\quad + D_{Gs} a + D_{Bs} b - D_s Ga + D_s Bb \\
 &= \beta_{tn}
 \end{aligned} \tag{120}$$

$$\begin{aligned}
 \gamma_{nt} &= -2D_a r - 2D_b s \\
 &= -2D_r a - 2D_s b \\
 &= \gamma_{tn}.
 \end{aligned} \tag{121}$$

A partir de (119)–(121), tem-se:

$$\mathbf{J}^h(\mathbf{d}_n^h) \mathbf{d}_t^h = \begin{bmatrix} \alpha_{nt} \\ \beta_{nt} \\ \gamma_{nt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{tn} \\ \beta_{tn} \\ \gamma_{tn} \end{bmatrix} = \mathbf{J}^h(\mathbf{d}_t^h) \mathbf{d}_n^h. \tag{122}$$

Sejam  $\mathbf{d}_n$  e  $\mathbf{d}_t$  vetores obtidos a partir da eliminação dos elementos correspondentes à barra  $V\delta$  em  $\mathbf{d}_n^h$  e  $\mathbf{d}_t^h$ , respectivamente. Seja também  $\mathbf{J}_{red}^h(\hat{\mathbf{x}})$  a matriz resultante da eliminação das linhas em  $\mathbf{J}^h(\hat{\mathbf{x}})$  correspondentes às funções não consideradas em  $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ . Uma vez que a tensão complexa na barra de referência é pré-especificada no problema do fluxo de potência, as derivadas de  $\mathbf{g}(\mathbf{x})$  em relação às partes real e imaginária da tensão da barra de referência são nulas. Como consequência, usando (122), tem-se:

$$\mathbf{J}(\mathbf{d}_n) \mathbf{d}_t = \mathbf{J}_{red}^h(\mathbf{d}_n^h) \mathbf{d}_t^h = \mathbf{J}_{red}^h(\mathbf{d}_t^h) \mathbf{d}_n^h = \mathbf{J}(\mathbf{d}_t) \mathbf{d}_n. \tag{123}$$

A igualdade (123) é usada na regra de atualização proposta para o método tensorial modificado.

#### 4.2.3.2 Algoritmo proposto

Observe-se que, dado que (82) e (83) são verdadeiras para qualquer  $\mathbf{d}$ , as primeiras derivadas de  $\mathbf{g}(\mathbf{x})$  podem ser escritas na forma

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}) = \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = -\frac{\partial \mathbf{g}_c(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{x}^t \mathbf{T}_0. \tag{124}$$

Como consequência, utilizando (83) e (124), o vetor de correção introduzido em (SALGADO, R.; ZEITUNE, A., 2009), ou seja  $\mathbf{d}_t = [\mathbf{J}(\mathbf{x})]^{-1} \mathbf{g}_c(\mathbf{d}_n)$ , pode ser reescrito na forma

$$\mathbf{d}_t = -[\mathbf{J}(\mathbf{x})]^{-1} \frac{1}{2} \mathbf{J}(\mathbf{d}_n) \mathbf{d}_n. \quad (125)$$

No entanto, ao usar (83) e (124) em (86), a expansão em série de Taylor de segunda ordem pode ser calculada em função das matrizes Jacobianas, estimativas e direções como se segue.

$$\begin{aligned} \mathbf{g}(\mathbf{x} + \mathbf{d}) &= \mathbf{J}(\mathbf{x}) \mathbf{d}_t + \frac{1}{2} \mathbf{d}_n^t \mathbf{T} \mathbf{d}_n + \frac{1}{2} \mathbf{d}_n^t \mathbf{T} \mathbf{d}_t + \frac{1}{2} \mathbf{d}_t^t \mathbf{T} \mathbf{d}_n \\ &\quad + \frac{1}{2} \mathbf{d}_t^t \mathbf{T} \mathbf{d}_t \\ &= \mathbf{J}(\mathbf{x}) \mathbf{d}_t + \frac{1}{2} \mathbf{J}(\mathbf{d}_n) \mathbf{d}_n + \frac{1}{2} \mathbf{J}(\mathbf{d}_n) \mathbf{d}_t + \frac{1}{2} \mathbf{J}(\mathbf{d}_t) \mathbf{d}_n \\ &\quad + \frac{1}{2} \mathbf{J}(\mathbf{d}_t) \mathbf{d}_t \end{aligned} \quad (126)$$

e, usando (123) tem-se:

$$\mathbf{g}(\mathbf{x} + \mathbf{d}) = \mathbf{J}(\mathbf{x}) \mathbf{d}_t + \frac{1}{2} \mathbf{J}(\mathbf{d}_n) \mathbf{d}_n + \mathbf{J}(\mathbf{d}_n) \mathbf{d}_t + \frac{1}{2} \mathbf{J}(\mathbf{d}_t) \mathbf{d}_t. \quad (127)$$

Ao negligenciar apenas o termo  $\frac{1}{2} \mathbf{J}(\mathbf{d}_t) \mathbf{d}_t$ , a direção complementar para a qual  $\mathbf{g}(\mathbf{x} + \mathbf{d})$  é um vetor nulo pode ser calculada usando a expressão

$$\mathbf{d}_t = -[\mathbf{J}(\mathbf{x}) + \mathbf{J}(\mathbf{d}_n)]^{-1} \frac{1}{2} \mathbf{J}(\mathbf{d}_n) \mathbf{d}_n \quad (128)$$

Isto permite estimar a solução de  $\mathbf{x}$  iterativamente de acordo com a regra de atualização

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{d}_n^{(k)} + \mathbf{d}_t^{(k)}, \quad (129)$$

onde  $\mathbf{d}_n^{(k)}$  é calculada usando (78) e

$$\mathbf{d}_t^{(k)} = -[\mathbf{J}(\mathbf{x}^{(k)}) + \mathbf{J}(\mathbf{d}_n^{(k)})]^{-1} \frac{1}{2} \mathbf{J}(\mathbf{d}_n^{(k)}) \mathbf{d}_n^{(k)}. \quad (130)$$

O método tensorial modificado resultante encontra-se resumido no Algoritmo 6. Todos os passos do método tensorial e do método tensorial modificado são exibidos na Figura 11.

---

**Algoritmo 6** Método tensorial modificado

---

- 1: Seleciona uma estimativa inicial  $\mathbf{x}^{(0)}$ ;
- 2: Calcula  $\mathbf{g}(\mathbf{x}^{(0)})$ ;
- 3:  $k = 0$ ;
- 4: **while**  $\|\mathbf{g}(\mathbf{x}^{(k)})\|_\infty \geq \text{tolerância}$  **do**
- 5:     Calcula direção de Newton:

$$\mathbf{d}_n^{(k)} = -[\mathbf{J}(\mathbf{x}^{(k)})]^{-1} \mathbf{g}(\mathbf{x}^{(k)});$$



6: Calcula a direção tensorial adicional:

$$\mathbf{d}_t^{(k)} = - [\mathbf{J}(\mathbf{x}^{(k)}) + \mathbf{J}(\mathbf{d}_n^{(k)})]^{-1} \frac{1}{2} \mathbf{J}(\mathbf{d}_n^{(k)}) \mathbf{d}_n^{(k)};$$

7: Atualiza a estimativa:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{d}_n^{(k)} + \mathbf{d}_t^{(k)};$$

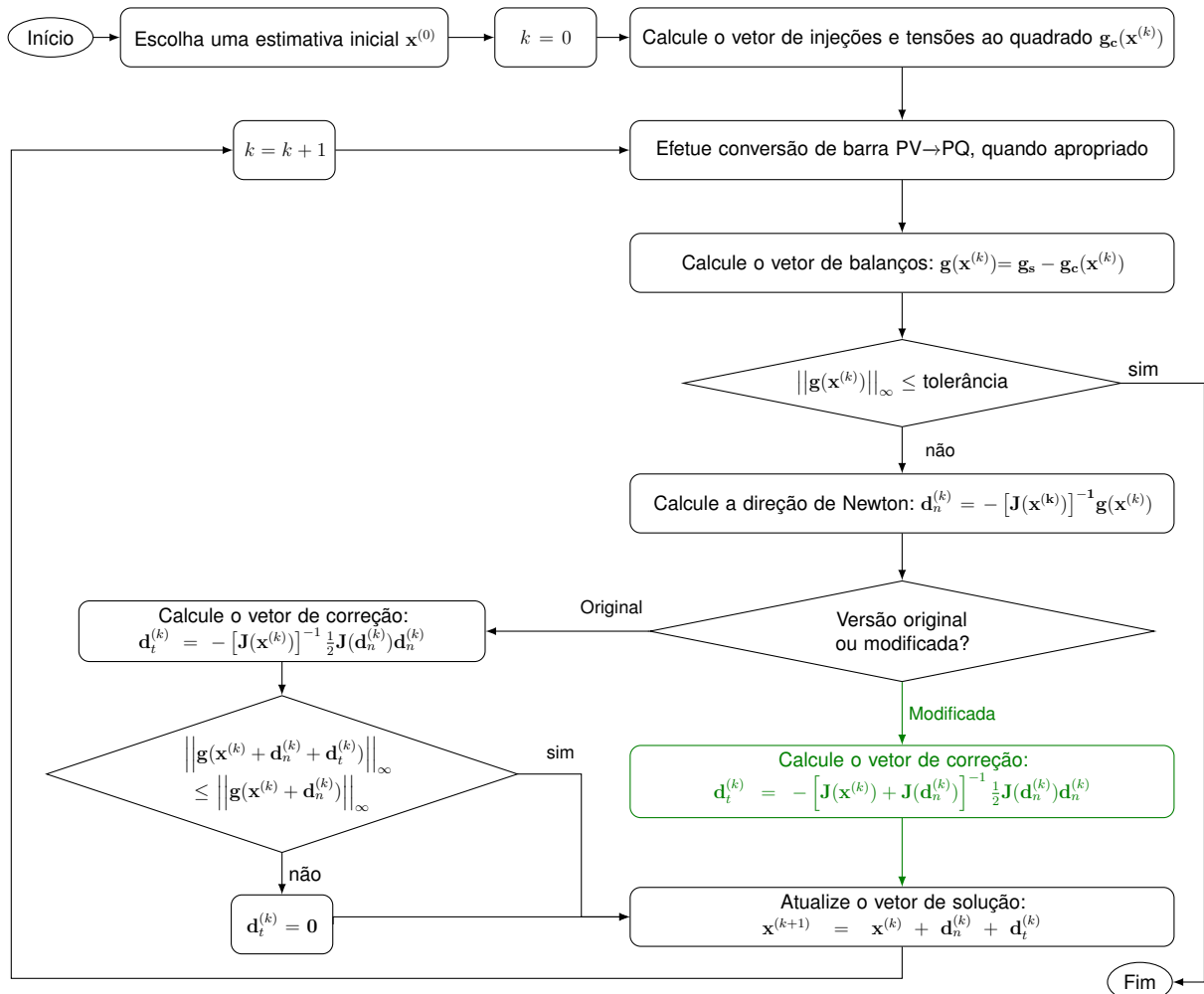
8: Calcula  $\mathbf{g}(\mathbf{x}^{(k+1)})$ ;

9:  $k = k + 1$ ;

10: **end while**

No algoritmo, como é usual, as barras PV podem ser convertidos em barras PQ se os limites de potência reativa são alcançados em alguma iteração.

Figura 11 – Fluxograma dos métodos tensorial e tensorial modificado.



Fonte: do autor.

É importante salientar que a matriz Jacobiana é uma função linear de  $\mathbf{x}$ , isto é,  $\mathbf{J}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^t \mathbf{T}_0$ , como definido em (124). Assim, a matriz de coeficientes do sistema

linear em (128) pode ser escrita na forma

$$\begin{aligned} \mathbf{J}(\mathbf{x}) + \mathbf{J}(\mathbf{d}_n) &= \mathbf{x}^t \mathbf{T}_0 + \mathbf{d}_n^t \mathbf{T}_0 \\ &= (\mathbf{x} + \mathbf{d}_n)^t \mathbf{T}_0 \\ &= \mathbf{J}(\mathbf{x} + \mathbf{d}_n), \end{aligned} \quad (131)$$

onde  $\mathbf{J}(\mathbf{d}_n)$  pode ser interpretado como um ajuste aplicado à matriz  $\mathbf{J}(\mathbf{x})$  e  $\mathbf{J}(\mathbf{x} + \mathbf{d}_n)$  representa a matriz Jacobiana que seria calculada na iteração seguinte caso a direção de Newton fosse usada. Dado que todos os termos da expansão em série de Taylor que são linearmente dependentes de  $\mathbf{d}_t$  são usados na formulação, a aplicação do ajuste  $\mathbf{J}(\mathbf{d}_n)$  fornece uma melhor estimativa para  $\mathbf{d}_t$ , melhorando a direção de pesquisa em direção à solução do problema do fluxo de potência. Esta é a principal contribuição do método proposto relativamente ao método introduzido em (SALGADO, R.; ZEITUNE, A., 2009). Ou seja, do ponto de vista teórico, demonstrou-se que existe uma simetria nos produtos definidos em (123), que é posteriormente usada para atualizar a matriz Jacobiana durante as iterações. Adicionalmente, observa-se que o teste realizado em (89) não é utilizado no método proposto.

Uma vez que o método tensorial modificado provê uma direção aperfeiçoada para a solução do problema de fluxo de potência, este método é aplicado na pré-avaliação de estados do método de Monte Carlo sequencial quando se considera a formulação não linear da rede. Partindo-se de uma solução do problema para o primeiro patamar de carga, esta solução pode ser utilizada como estimativa inicial para a análise de regime permanente do próximo patamar de carga. Uma vez que a variação de valor de patamar de carga não é grande no período de discretização da curva de carga (usualmente em horas), a solução para o novo patamar de carga tende a ser encontrada em poucas iterações.

Após a obtenção de uma solução para o regime permanente via fluxo de potência tensorial são verificados os limites operativos. Se todos os limites forem atendidos, o estado é avaliado como sendo de sucesso. Caso existam limites operativos não atendidos, uma análise das violações é efetuada. Se o limite operativo não respeitado for a capacidade de geração de potência ativa na barra de referência, a produção de potência ativa nas demais barras pode ser redefinida heurísticamente, por exemplo a partir do aumento proporcional ao excedente de geração na barra de referência, tal que um novo fluxo de potência tensorial é executado. À nova solução obtida são aplicados novamente os testes de verificação de limites operativos. Se a solução obtida violar limites de tensão, uma re-especificação das tensões nas barras PV é considerada, tendo em conta um aumento proporcional à necessidade de elevação/ redução de tensão na rede, e um novo fluxo de potência tensorial é executado. Se ainda assim a solução obtida não atender os limites de operação, a pré-avaliação é considerada inconclusiva, finalizando assim a fase de pré-avaliação e seguindo para a avaliação

via fluxo de potência ótimo. Na próxima seção é apresentada uma discussão acerca da avaliação de estados e ações corretivas que podem ser tomadas.

### 4.3 DETERMINAÇÃO DE CORTE DE CARGA E AÇÕES CORRETIVAS VIA FLUXO DE POTÊNCIA ÓTIMO E ESCALONAMENTO

A avaliação de estados no método de simulação Monte Carlo busca determinar se existe ou não, para um determinado estado elétrico do sistema, corte de carga. Em caso afirmativo, a solução da avaliação deve buscar a minimização do corte de carga a partir de ações corretivas no sistema. Em aplicações onde se realiza pré-avaliação de estados via fluxo de potência considerando as equações não lineares da rede, geralmente combina-se uma avaliação também considerando a representação mais completa da rede por meio de um fluxo de potência ótimo (PEREIRA; BALU, 1992; SILVA, A. M. L. da *et al.*, 2007).

#### 4.3.1 Determinação de corte de carga e ações corretivas via fluxo de potência ótimo

Na Seção 4.2 foram apresentadas as formulações do problema do fluxo de potência tensorial modificado em coordenadas retangulares. Sem perda de generalidade, e com o intuito de mostrar as aplicações do uso das coordenadas retangulares em conjunto com tensores na avaliação de estados do método de simulação de Monte Carlo, apresenta-se nesta seção a formulação em coordenadas retangulares do problema de fluxo de potência ótimo, baseado nos desenvolvimentos descritos em (MORAES, 2015; CAIN; ONEILL; CASTILLO, 2012; TORRES, 1998; ALMEIDA, 1994). A formulação do fluxo de potência ótimo em coordenadas polares pode ser encontrada em (DOMMEL; TINNEY, 1968; LUO; SINGH; PATTON, 2000; ALMEIDA, 1994).

A solução do problema do fluxo de potência ótimo para a minimização de corte de carga pode ser calculada via método de pontos interiores. Nesta tese, a formulação do problema de fluxo de potência ótimo tem em consideração a existência de geradores fictícios, afim de permitir a identificação de estados onde o sistema composto não é capaz de suprir a carga total do sistema, além da determinação do valor de corte de carga. Limites operacionais correspondentes aos limites de produção de potência ativa e reativa das unidades geradoras; limites de transmissão; e de tensão nas barras, são representados na formulação. Destaca-se que, restrições de desigualdade para limites de transmissão podem ser escritas a partir de expressões para o fluxo de potência (ALMEIDA, 1994) e/ou para o quadrado do módulo da corrente que percorre cada componente (TORRES, 1998). Nesta tese, optou-se pela restrição ao quadrado do módulo da corrente, pois a mesma pode ser expressa como uma função quadrática das componentes real e imaginária das tensões nas barras, com correspondente

segunda derivada dada por uma função constante.

O problema de minimização de corte de carga é um problema de otimização similar ao problema de minimização de potência gerada, onde a principal alteração consiste em considerar a existência de geradores de potência ativa fictícios nos baramentos de carga. Em se tratando de uma representação não linear para a rede, faz-se necessário estimar o correspondente corte de potência reativa para um dado montante de potência ativa não suprida. Tal estimativa é realizada considerando que, na ocorrência de potência ativa não suprida, a potência reativa não suprida ocorre de forma proporcional, multiplicando-se a fração  $\frac{Q_i}{P_i}$  pelo valor de potência ativa não suprida (LUO; SINGH; PATTON, 2000). Assim, o problema para a minimização de corte de carga considerando limites operacionais pode ser expresso como um problema de otimização da forma

$$\begin{aligned}
 &\text{minimizar} && \frac{1}{2} \mathbf{P}_g^t \mathbf{D}_C \mathbf{P}_g \\
 &\text{sujeito a} && \mathbf{A}_g \mathbf{P}_g - \mathbf{P}_d - \mathbf{P}(e, f) = 0 \\
 &&& \mathbf{A}_g^r \mathbf{Q}_g - \mathbf{Q}_d + \mathbf{A}_g^f \mathbf{P}_g - \mathbf{Q}(e, f) = 0 \\
 &&& \mathbf{P}_g^{\min} \leq \mathbf{P}_g \leq \mathbf{P}_g^{\max} \\
 &&& \mathbf{Q}_g^{\min} \leq \mathbf{Q}_g \leq \mathbf{Q}_g^{\max} \\
 &&& (\mathbf{V}^{\min})^2 \leq (e^2 + f^2) \leq (\mathbf{V}^{\max})^2 \\
 &&& (\mathbf{I}^{\min})^2 \leq \mathbf{I}^2(e, f) \leq (\mathbf{I}^{\max})^2
 \end{aligned} \tag{132}$$

onde

- $\mathbf{P}_g = \begin{bmatrix} P_{g_1} \dots P_{g_{n_g}} P_{g_1}^f \dots P_{g_{n_g}^f} \end{bmatrix}^t$  é o vetor de produções de potência ativa em unidades geradoras;
- $\mathbf{A}_g$ ,  $\mathbf{A}_g^r$  e  $\mathbf{A}_g^f$  são matrizes de adjacência de dimensão  $n_b \times (n_g + n_g^f)$ ,  $n_b \times n_g$  e  $n_b \times n_g^f$ , respectivamente, com  $n_b$  o número de barras,  $n_g$  o número de geradores e  $n_g^f$  o número de geradores fictícios (que corresponde ao número de barras de carga), tais que

$$\mathbf{A}_g(i, j) \triangleq \begin{cases} 1 & \text{se o gerador } j \text{ (real ou fictício) está conectado} \\ & \text{à barra } i \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$\mathbf{A}_g^r(i, j) \triangleq \begin{cases} 1 & \text{se o gerador real } j \text{ está conectado à barra } i \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$\mathbf{A}_g^f(i, j) \triangleq \begin{cases} \frac{Q_{d_i}}{P_{d_i}} & \text{se o gerador fictício } j \text{ está conectado} \\ & \text{à barra } i \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

- $D_C$  é uma matriz diagonal com custos de produção das unidades de geração, onde os custos das unidades de geração reais são nulos e os custos correspondentes aos geradores fictícios são considerados unitários;
- $P_d$  e  $Q_d$  são vetores contendo as cargas ativa e reativa nas barras;
- $P_g^{\min}$  e  $P_g^{\max}$  são vetores contendo os limites mínimos e máximos de produção ativa em cada unidade geradora;
- $Q_g^{\min}$  e  $Q_g^{\max}$  são vetores contendo os limites mínimos e máximos de produção reativa em cada unidade geradora;
- $V^{\min}$  e  $V^{\max}$  são vetores contendo os limites mínimos e máximos de magnitude de tensão nas barras;
- $I^{\min}$  e  $I^{\max}$  são vetores contendo os limites mínimos e máximos de corrente nos elementos de transmissão.

As expressões para  $P(e; f)$  e  $Q(e; f)$  estão definidas em (72) e (73). Considerando que a admitância série da linha  $l$  é tal que  $y_l = g_l + jb_l$ , com  $g_l$  e  $b_l$  a condutância série e susceptância série, respectivamente, o quadrado do módulo da corrente  $I_l$  que percorre a linha  $l$ , conectando as barras  $i$  e  $j$ , é dado pela equação

$$\begin{aligned} I_l^2(e, f) = & b_l^{sh} (b_l^{sh} + 2b_l) (e_i^2 + f_i^2) \\ & - 2b_l^{sh} b_l (e_i e_j + f_i f_j) \\ & + 2b_l^{sh} g_l (e_j f_i - e_i f_j) \\ & + (g_l^2 + b_l^2) [(e_i - e_j)^2 + (f_i - f_j)^2]. \end{aligned} \quad (133)$$

Definindo a matriz de adjacência linha-barra  $A_s$  tal que

$$A_s(l, i) \triangleq \begin{cases} 1 & \text{se } i \text{ é a barra de origem da linha } l \\ -1 & \text{se } i \text{ é a barra de chegada da linha } l \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

e  $A_s^+$  e  $A_s^-$  as matrizes de adjacência linha-barra de partida e chegada, respectivamente, tais que

$$\begin{aligned} A_s^+(l, i) & \triangleq \begin{cases} 1 & \text{se } i \text{ é a barra de origem da linha } l \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \\ & \triangleq \{A_s(l, i) : A_s(l, i) > 0\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_s^-(l, i) & \triangleq \begin{cases} 1 & \text{se } i \text{ é a barra de chegada da linha } l \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \\ & \triangleq \{|A_s(l, i)| : A_s(l, i) < 0\} \end{aligned}$$

e considerando ainda as matrizes diagonais  $D_{g_l}$ ,  $D_{b_l}$  e  $D_{b_l^{sh}}$  as diagonalizações de  $g_l$ ,  $b_l$  e  $b_l^{sh}$ , respectivamente,  $I_l^2(e, f)$  pode ser reescrito na seguinte forma matricial:

$$\begin{aligned}
 I^2(e, f) = & D_{A_s^+ e} \left[ D_{b_l^{sh}} (D_{b_l^{sh}} + 2D_{b_l}) \right] (A_s^+ e) \\
 & + D_{A_s^+ f} \left[ D_{b_l^{sh}} (D_{b_l^{sh}} + 2D_{b_l}) \right] (A_s^+ f) \\
 & - 2D_{A_s^+ f} \left[ D_{b_l^{sh}} D_{b_l} \right] (A_s^- f) \\
 & - 2D_{A_s^+ e} \left[ D_{b_l^{sh}} D_{b_l} \right] (A_s^- e) \\
 & + 2D_{A_s^- e} \left[ D_{b_l^{sh}} D_{g_l} \right] (A_s^+ f) \\
 & - 2D_{A_s^+ e} \left[ D_{b_l^{sh}} D_{g_l} \right] (A_s^- f) \\
 & + D_{A_s e} [D_{g_l} D_{g_l} + D_{b_l} D_{b_l}] (A_s e) \\
 & + D_{A_s f} [D_{g_l} D_{g_l} + D_{b_l} D_{b_l}] (A_s f).
 \end{aligned} \tag{134}$$

Em notação matricial, a primeira derivada de  $I^2(e, f)$  resulta numa matriz esparsa de dimensão  $n_l \times n_{varopt}$ , com  $n_{varopt} = 2n_b + 2n_g + n_g^f$ , cujos elementos não nulos, para cada linha de  $\frac{\partial I^2(e, f)}{\partial z}$ , são os elementos das colunas  $i, j, i + n_b$  e  $j + n_b$ , correspondendo a um máximo de  $4n_l$  elementos não nulos em toda a matriz. Genericamente, esses elementos não nulos são definidos pelas seguintes equações:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial I^2(e, f)}{\partial e} = & 2 \left\{ D_{A_s^+ e} \left[ D_{b_l^{sh}} (D_{b_l^{sh}} + 2D_{b_l}) \right] - D_{A_s^- e} D_{b_l^{sh}} D_{b_l} \right. \\
 & \left. - D_{A_s^- f} D_{b_l^{sh}} D_{g_l} + D_{A_s e} [[D_{g_l}]^2 + [D_{b_l}]^2] \right\} A_s^+ \\
 & + 2 \left\{ -D_{A_s^+ e} D_{b_l^{sh}} D_{b_l} + D_{A_s^+ f} D_{b_l^{sh}} D_{g_l} - D_{A_s e} [[D_{g_l}]^2 + [D_{b_l}]^2] \right\} A_s^-
 \end{aligned} \tag{135}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial I^2(e, f)}{\partial f} = & 2 \left\{ D_{A_s^+ f} \left[ D_{b_l^{sh}} (D_{b_l^{sh}} + 2D_{b_l}) \right] - D_{A_s^- f} D_{b_l^{sh}} D_{b_l} \right. \\
 & \left. + D_{A_s^- e} D_{b_l^{sh}} D_{g_l} + D_{A_s f} [[D_{g_l}]^2 + [D_{b_l}]^2] \right\} A_s^+ \\
 & + 2 \left\{ -D_{A_s^+ f} D_{b_l^{sh}} D_{b_l} - D_{A_s^+ e} D_{b_l^{sh}} D_{g_l} - D_{A_s f} [[D_{g_l}]^2 + [D_{b_l}]^2] \right\} A_s^-
 \end{aligned} \tag{136}$$

$$\frac{\partial I^2(e, f)}{\partial P_g} = [0]_{n_l \times (n_g + n_g^f)} \tag{137}$$

$$\frac{\partial I^2(e, f)}{\partial Q_g} = [0]_{n_l \times n_g} \tag{138}$$

A segunda derivada de  $I^2(e, f)$  resulta num tensor esparsa de dimensão  $n_l \times n_{varopt} \times n_{varopt}$ . Defina-se uma “fatia” como sendo a submatriz obtida do tensor tal que,

fixando  $l$ , a correspondente fatia é uma matriz esparsa, de dimensão  $n_{varopt} \times n_{varopt}$  contendo as derivadas de segunda ordem de  $I_l^2(e, f)$ . Nestas condições, o tensor que define a segunda derivada da função vetorial  $I^2(e, f)$  tem  $n_l$  fatias, onde cada fatia contém, no máximo, 16 posições não nulas correspondentes às 16 derivadas de segunda ordem de  $I_l^2(e, f)$  em função das variáveis  $e$  e  $f$ , e que correspondem às posições apresentadas na Tabela 9. O tensor resultante de  $\frac{\partial^2 I^2(e, f)}{\partial \mathbf{z} \partial \mathbf{z}}$  é constante, pelo que o seu cálculo na resolução do problema do fluxo de potência ótimo pode ser realizado apenas uma vez.

Tabela 9 – Índices das posições não nulas da fatia  $l$  que conecta as barras  $i$  e  $j$  do tensor  $\frac{\partial^2 I_l^2(e, f)}{\partial \mathbf{z} \partial \mathbf{z}}$ .

$(i, i)$	$(i, j)$	$(j, i)$	$(j, j)$
$(i, i + n_b)$	$(i, j + n_b)$	$(j, i + n_b)$	$(j, j + n_b)$
$(i + n_b, i)$	$(i + n_b, j)$	$(j + n_b, i)$	$(j + n_b, j)$
$(i + n_b, i + n_b)$	$(i + n_b, j + n_b)$	$(j + n_b, i + n_b)$	$(j + n_b, j + n_b)$

A função objetivo e as restrições do problema são não lineares, definindo assim um problema de otimização não linear. Para a solução do problema, utilizou-se do método primal dual de pontos interiores reduzido, devido a sua conhecida eficiência e robustez. As equações para a solução do problema via método de pontos interiores são descritas no Apêndice A, enquanto uma descrição do método de pontos interiores é apresentada no Apêndice B. Essa solução provê como subprodutos as ações corretivas a serem executadas para a minimização do corte de carga, incluindo alterações nas especificações das produções de potência nas unidades geradoras e tensões em barramentos de geração.

A solução de problemas de fluxo de potência ótimo exige tempo e esforço computacional não negligenciáveis no estágio de avaliação de estados. Isto justifica a aplicação dos procedimentos de pré-avaliação abordados na Seção 4.2. Entretanto, mesmo a avaliação via fluxo de potência ótimo pode ser inconclusiva. Neste caso, procede-se com a determinação de corte de carga e ações corretivas via escalonamento de unidades.

#### 4.3.2 Determinação de corte de carga e ações corretivas via escalonamento de unidades

Apesar do método de pontos interiores ser um método robusto, por vezes o problema em estudo não possui solução. Como exemplo, em sistemas compostos confiáveis, para estados com elevada disponibilidade de unidades de geração, nem sempre é possível despachar todas as unidades sem que limites técnicos mínimos de potência gerada sejam violados. Dessa forma, faz-se necessário o escalonamento/alocação de unidades geradoras, com o fim de buscar um ponto de operação viável e minimizar o

corte de carga. Esse escalonamento introduz um aspecto combinatorial ao problema, não diretamente endereçado na formulação apresentada na Seção 4.3.1.

Diversas aplicações do estado da arte não consideram esta etapa de avaliação, a qual é enfatizada aqui como crucial para a busca por pontos de operação viáveis a estados amostrados. Rigorosamente, todos os estados cuja pré-avaliação é inconclusiva deveriam ser avaliados via procedimento que tenha em conta o escalonamento de unidades geradoras. Isto porque, embora a solução de um problema de fluxo de potência ótimo possa ser utilizada para a estimação do mínimo corte de carga associado a um estado, não existe garantia que o perfil de escalonamento utilizado na solução do problema de fluxo de potência ótimo aponta para o mínimo corte do estado. A despeito deste fato, o escalonamento de unidades é um processo geralmente ainda mais dispendioso computacionalmente que o fluxo de potência ótimo, fato pelo qual o mesmo é utilizado como último recurso de avaliação. Aceita-se assim, como estimativa do valor de corte de carga, o valor de corte resultante da execução de um fluxo de potência ótimo cuja a convergência fora alcançada para um dado perfil de escalonamento.

Nesse contexto, foi adicionada à etapa de avaliação de estados do método de simulação de Monte Carlo, a execução de um escalonamento de geração considerando uma variante do método apresentado em (ERNST *et al.*, 2007). O problema do escalonamento de geração é tratado, nesta tese, como sendo um problema de otimização combinatorial, que é resolvido por meio da aplicação do método de entropia cruzada. A ideia base da aplicação deste método consiste em, a partir da definição de um conjunto de vetores  $n_g$ -dimensionais de estados *ligado/desligado*, buscar iterativamente um vetor representativo de uma solução viável para o problema de fluxo de potência ótimo. Dessa forma, a função de desempenho, em caso de não convergência, é dada pelo negativo da mínima norma do gradiente do Lagrangeano do problema de fluxo de potência ótimo, ponderado por um valor elevado. Em caso de convergência, é dada pelo negativo do valor do corte de carga, ponderado por um valor pequeno.

Para a aplicação do método de entropia cruzada, assume-se que o estado *ligado/desligado* de cada gerador  $j$  segue uma lei de Bernoulli ( $x_{ij} \sim Ber(p_j)$ ), onde o gerador  $j$  possui uma probabilidade  $p_j$  de se encontrar no estado *ligado*, e consequentemente, uma probabilidade  $(1 - p_j)$  de se encontrar no estado *desligado*. Então, para o vetor  $n_g$ -dimensional  $\mathbf{x}_i$  que contém a informação acerca do estado *ligado/desligado* das unidades geradoras, tem-se que

$$Ber_{n_g}(\mathbf{x}_i, \mathbf{p}) = \prod_{j=1}^{n_g} p_j^{x_j} (1 - p_j)^{(1-x_j)} \quad (139)$$

onde  $Ber_{n_g}(\cdot, \mathbf{p})$  é a função de massa de probabilidade de Bernoulli  $n_g$ -dimensional,  $\mathbf{p} = [p_1 \cdots p_{n_g}]^t$  é o vetor de probabilidades associado à distribuição de Bernoulli e  $x_j$  denota a  $j$ -ésima componente da variável aleatória  $\mathbf{x}_i$ . A solução de (139) é dada em



(ERNST *et al.*, 2007) pela expressão

$$\mathbf{p}_j^* = \frac{\sum_{i=1}^N \{\mathbf{I}_{S(X_i) \geq \gamma} x_{ij}\}}{\sum_{i=1}^N \{\mathbf{I}_{S(X_i) \geq \gamma}\}} \quad (140)$$

onde  $N$  é o número de amostras,  $\gamma$  é o parâmetro de nível e  $\mathbf{I}$  é a função indicatriz.

O conjunto de passos a seguir para o escalonamento de geradores usando o método de entropia cruzada está descrito no Algoritmo 7.

---

**Algoritmo 7** Escalonamento de geradores via método de entropia cruzada

---

Seja  $N$  a dimensão da amostra,  $\varrho$  o parâmetro de raridade e  $N^e = \lceil \varrho N \rceil$  o número de amostras de elite. Defina ainda  $t = 1$ ,  $U_t$  um conjunto vazio,  $r_t$  um vetor vazio.

- 1: Escolher um vetor inicial de probabilidades  $\mathbf{p}^t$ ;
- 2: Gerar  $N$  amostras  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N$  tal que  $x_{ij} \sim Ber(p_j)$  e definir  $U_t = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N\}$ . Calcular  $S(\mathbf{x}_i), \forall i$ , e definir  $r_t = \{S(\mathbf{x}_1), \dots, S(\mathbf{x}_N)\}$ . Ordenar  $r_t$  em ordem decrescente e definir  $\hat{\gamma}_t = r_t(N^e)$ ;
- 3: Considerando a mesma amostra  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N$  calcular

$$p_j^{t+1} = \frac{\sum_{u \in U_t} \{\mathbf{I}_{S(u) \geq \hat{\gamma}_t} u_j\}}{N^e} \quad (141)$$

- 4: Se a condição de parada for verificada, finalizar. Caso contrário, definir  $t = t + 1$  e seguir para o Passo 2;
- 

Como condição de parada para o algoritmo do escalonamento de geradores via método de entropia cruzada, considerou-se que o escalonamento é finalizado assim que, em alguma iteração  $t$ , pelo menos um dos seguintes critérios é satisfeito: (a) Se for encontrado estado convergente com corte de carga igual a zero; (b) Se as probabilidades  $p_j^{t+1}$  alcançaram a convergência; (c) Se pelo menos um estado no conjunto de elite possui corte de carga avaliado via execução convergente de um fluxo de potência ótimo; (d) Se um número máximo de iterações é atingido. Em todos os casos, o escalonamento com menor valor de corte de carga é escolhido como solução.

A partir da solução do problema de escalonamento de unidades de geração, identifica-se se ações corretivas correspondentes à partida ou desligamento de unidades geradoras são necessárias. Outras variáveis discretas podem ser agregadas ao problema combinatorial, como por exemplo o ligar/desligar de bancos de reatores e capacitores.

#### 4.4 MODELO DE DETERMINAÇÃO DE FATORES LIMITE DE CARREGAMENTO

Uma das principais propostas deste documento de tese é a supressão de avaliações de estados via fluxo de potência ou fluxo de potência ótimo através da determinação de fatores limite de carregamento no método de simulação de Monte Carlo

sequencial, buscando reduzir os tempos de execução e o esforço computacional do método. Partindo desse pressuposto, são apresentadas propostas de estimação de fatores limite de carregamento que consideram um modelo não linear para as equações da rede elétrica. Na primeira subseção, é apresentada uma formulação para a determinação de fatores limite de carregamento via modelo de otimização. Na subseção seguinte, é apresentado o modelo de determinação de fatores limite de carregamento via modelo preditor-corretor.

#### 4.4.1 Modelo de determinação de fatores limite de carregamento via modelo de otimização ( $MCS_\rho$ )

A determinação do fator de máximo carregamento, ou do ponto de máximo carregamento do sistema, também referido na bibliografia como *ponto de bifurcação*, *ponto limite*, *ponto nó-sela* (YAN, Z. et al., 2004), ou ainda, *ponto de colapso*, equivale a determinar a quantidade de carga que o sistema consegue suportar antes da ocorrência de eventos de instabilidade de tensão que podem conduzir o sistema ao colapso (ZEITUNE, 2012).

Para identificar o ponto de máximo carregamento diversos métodos são apresentados na literatura. Dentre eles destacam-se os métodos baseados em otimização e os métodos de continuação. Os métodos baseados em otimização possibilitam o cálculo direto do ponto de máximo carregamento, sem a determinação de demais pontos existentes entre este e um caso base. Nos métodos de continuação, não só o ponto de máximo carregamento é calculado, mas também a curva da solução do fluxo de potência associada a um parâmetro em estudo.

À luz da abordagem apresentada no Capítulo 3 para a versão do método de simulação de Monte Carlo sequencial considerando o modelo linearizado de rede, apresenta-se a determinação direta do fator de máximo carregamento via modelo de otimização, com o fim de evitar avaliações de estado no método de simulação de Monte Carlo sequencial, agora para um modelo não linear de rede. Sem perda de generalidade, apresenta-se a formulação do problema do máximo carregamento em coordenadas retangulares:

$$\begin{aligned}
 &\text{minimizar} && c(\mathbf{e}, \mathbf{f}, \mathbf{P}_g, \mathbf{Q}_g, \rho) \\
 &\text{sujeito a} && \mathbf{P}_g - (\mathbf{P}_d + \rho^2 \Delta \mathbf{P}_d) - \mathbf{P}(\mathbf{e}, \mathbf{f}) = \mathbf{0} \\
 &&& \mathbf{Q}_g - (\mathbf{Q}_d + \rho^2 \Delta \mathbf{Q}_d) - \mathbf{Q}(\mathbf{e}, \mathbf{f}) = \mathbf{0} \\
 &&& \mathbf{P}_g^{\min} \leq \mathbf{P}_g \leq \mathbf{P}_g^{\max} \\
 &&& \mathbf{Q}_g^{\min} \leq \mathbf{Q}_g \leq \mathbf{Q}_g^{\max} \\
 &&& (\mathbf{V}^{\min})^2 \leq (\mathbf{e}^2 + \mathbf{f}^2) \leq (\mathbf{V}^{\max})^2 \\
 &&& (\mathbf{I}^{\min})^2 \leq \mathbf{I}^2(\mathbf{e}, \mathbf{f}) \leq (\mathbf{I}^{\max})^2
 \end{aligned} \tag{142}$$

onde todas as variáveis atendem as definições apresentadas anteriormente neste ca-

pítulo. Essa formulação foi baseada em (MORAES, 2015), com a adição de restrições de corrente, necessárias para a determinação de soluções que atendam a limites de transmissão. Na presente pesquisa a função objetivo é uma função linear tal que:

$$c(\mathbf{e}, \mathbf{f}, \mathbf{P}_g, \mathbf{Q}_g, \rho) = -\rho,$$

para o problema de máximo carregamento, e

$$c(\mathbf{e}, \mathbf{f}, \mathbf{P}_g, \mathbf{Q}_g, \rho) = \rho,$$

para o problema de mínimo carregamento.

Similarmente ao caso linearizado, o tempo esperado de simulação e o esforço computacional associado à resolução de um problema de otimização pode ser não vantajoso frente ao ganho esperado com as supressões de avaliações via fluxo de potência e fluxo de potência ótimo. Nesse caso, torna-se interessante buscar uma forma de estimar os fatores limite de carregamento num menor tempo computacional a partir de um modelo alternativo.

#### 4.4.2 Modelo de determinação de fatores limite de carregamento via método preditor-corretor tensorial (MCS $\hat{\rho}$ )

A identificação de fatores limite de carregamento para um determinado estado é condição suficiente, porém não necessária, para se concluir acerca do sucesso do próprio estado e de estados consequentes, durante a execução do método de simulação de Monte Carlo sequencial. De fato, para a supressão de avaliações de estados realizadas com fluxo de potência ou fluxo de potência ótimo, basta identificar o patamar de carga contido nos limites de carregamento que caracterizam os estados como sendo de sucesso.

Para tanto, propõe-se a aplicação de um método de continuação no intervalo de possibilidades de variação de patamares de carga para estimar um fator de mínimo/máximo carregamento de interesse, acima/abaixo do qual os estados podem ser considerados como de sucesso. Seja  $\rho$  o fator de carga, as equações de balanço de potência podem ser reescritas como:

$$\Delta P_i(e_i, f_i, \rho) = \rho P_i^{esp} - P_i(e_i, f_i) \quad (143)$$

$$\Delta Q_i(e_i, f_i, \rho) = \rho Q_i^{esp} - Q_i(e_i, f_i) \quad (144)$$

$$\Delta V_i(e_i, f_i, \rho) = V_i^{esp^2} - (e_i^2 + f_i^2). \quad (145)$$

Com a inclusão do fator de carregamento  $\rho$ , o problema tem infinitas soluções, pois o número de variáveis supera o número de equações. Pode-se então especificar

uma equação adicional ao conjunto como segue:

$$\Delta P_i(e_i, f_i, \rho) = \rho P_i^{esp} - P_i(e_i, f_i) \quad (146)$$

$$\Delta Q_i(e_i, f_i, \rho) = \rho Q_i^{esp} - Q_i(e_i, f_i) \quad (147)$$

$$\Delta V_i(e_i, f_i, \rho) = V_i^{esp^2} - (e_i^2 + f_i^2) \quad (148)$$

$$\Delta \sigma(e_i, f_i, \rho) = \sigma^{esp} - \rho, \quad (149)$$

onde  $\sigma^{esp} = \frac{\rho^{max}}{nsteps}$ ,  $\rho^{max}$  representa o patamar máximo de carga durante uma sequência de estados com falhas de componente, e  $nsteps$  é um parâmetro de projeto que identifica o número de passos entre o patamar de carga do estado e  $\rho^{max}$ .

De forma matricial, o conjunto de equações acima pode ser expresso por:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \Delta P(e, f, \rho) \\ \Delta Q(e, f, \rho) \\ \Delta V(e, f, \rho) \\ \Delta \sigma(e, f, \rho) \end{bmatrix}}_{\mathbf{h}(\mathbf{x})} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathbf{V}^{esp^2} \\ \sigma^{esp} \end{bmatrix}}_{\mathbf{h}_s} - \underbrace{\begin{bmatrix} -\rho \mathbf{P}^{esp} - \mathbf{P}(e, f) \\ -\rho \mathbf{Q}^{esp} - \mathbf{Q}(e, f) \\ e^2 + f^2 \\ \rho \end{bmatrix}}_{\mathbf{h}_c(\mathbf{x})} \quad (150)$$

onde a variável  $\mathbf{x}$  é redefinida como  $[e, f, \rho]$ .

A expressão em série de Taylor no ponto  $\mathbf{x}$  é dada pela resolução do sistema de equações:

$$\mathbf{h}(\mathbf{x} + \mathbf{d}_n) = \mathbf{h}_s + \mathbf{J}_{mod}(\mathbf{x})\mathbf{d}_n. \quad (151)$$

Dessa forma, uma predição de  $\mathbf{x}$  a partir de um passo de Newton é dada por:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial \Delta P}{\partial e} & \frac{\partial \Delta P}{\partial f} & \mathbf{P}^{esp} \\ \frac{\partial \Delta Q}{\partial e} & \frac{\partial \Delta Q}{\partial f} & \mathbf{Q}^{esp} \\ \frac{\partial \Delta V}{\partial e} & \frac{\partial \Delta V}{\partial f} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{J}_{mod}(\mathbf{x})} \underbrace{\begin{bmatrix} \Delta e \\ \Delta f \\ \Delta \rho \end{bmatrix}}_{\mathbf{d}_n} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{\rho^{max}}{nsteps} \end{bmatrix}}_{-\mathbf{h}(\mathbf{x})}. \quad (152)$$

A direção de Newton toma por referência a expansão da série de Taylor até a primeira ordem. Entretanto, observa-se que  $\mathbf{h}(\mathbf{x})$  pode ser expandido considerando o termo tensorial como segue

$$\mathbf{h}(\mathbf{x} + \mathbf{d}) = \mathbf{h}(\mathbf{x}) + \mathbf{J}_{mod}(\mathbf{x})\mathbf{d} + \frac{1}{2}\mathbf{d}^t \mathbf{T}_{mod} \mathbf{d} \quad (153)$$

e, por (150), tem-se que

$$\mathbf{h}(\mathbf{x} + \mathbf{d}) = \mathbf{h}_s - \mathbf{h}_c(\mathbf{x} + \mathbf{d}). \quad (154)$$

Por (153), no ponto  $\mathbf{x} = 0$  tem-se que

$$\begin{aligned} \mathbf{h}(\mathbf{d}) &= \mathbf{h}(0) + \mathbf{J}_{mod}(0)\mathbf{d} + \frac{1}{2}\mathbf{d}^t \mathbf{T}_{mod} \mathbf{d} \\ &= \mathbf{h}_s + \mathbf{J}_{mod}(0)\mathbf{d} + \frac{1}{2}\mathbf{d}^t \mathbf{T}_{mod} \mathbf{d} \end{aligned} \quad (155)$$

e pela equação (154)

$$\mathbf{h}(\mathbf{d}) = \mathbf{h}_s - \mathbf{h}_c(\mathbf{d}) \quad (156)$$

donde se conclui que

$$\mathbf{h}_c(\mathbf{d}) = -\mathbf{J}_{\text{mod}}(\mathbf{0})\mathbf{d} - \frac{1}{2}\mathbf{d}^t\mathbf{T}_{\text{mod}}\mathbf{d}. \quad (157)$$

Suponha agora que a direção  $\mathbf{d}$  é tal que  $\mathbf{d} = \mathbf{d}_n + \mathbf{d}_t$ , onde  $\mathbf{d}_n$  representa a direção de Newton e  $\mathbf{d}_t$  a componente tensorial da direção. Então tem-se que

$$\begin{aligned} \mathbf{h}(\mathbf{x} + \mathbf{d}) &= \mathbf{h}(\mathbf{x} + \mathbf{d}_n + \mathbf{d}_t) \\ &= \mathbf{h}(\mathbf{x}) + \mathbf{J}_{\text{mod}}(\mathbf{x})(\mathbf{d}_n + \mathbf{d}_t) + \frac{1}{2}(\mathbf{d}_n + \mathbf{d}_t)^t\mathbf{T}_{\text{mod}}(\mathbf{d}_n + \mathbf{d}_t) \\ &= \mathbf{h}(\mathbf{x}) + \mathbf{J}_{\text{mod}}(\mathbf{x})\mathbf{d}_n + \mathbf{J}_{\text{mod}}(\mathbf{x})\mathbf{d}_t \\ &\quad + \frac{1}{2}(\mathbf{d}_n + \mathbf{d}_t)^t\mathbf{T}_{\text{mod}}(\mathbf{d}_n + \mathbf{d}_t). \end{aligned} \quad (158)$$

Atendendo a que  $\mathbf{d}_n = -[\mathbf{J}_{\text{mod}}(\mathbf{x})]^{-1}\mathbf{h}(\mathbf{x})$  tem-se

$$\mathbf{h}(\mathbf{x} + \mathbf{d}) = \mathbf{J}_{\text{mod}}(\mathbf{x})\mathbf{d}_t + \frac{1}{2}(\mathbf{d}_n + \mathbf{d}_t)^t\mathbf{T}_{\text{mod}}(\mathbf{d}_n + \mathbf{d}_t). \quad (159)$$

Ao resolver o sistema (150) visa-se obter

$$\begin{bmatrix} \Delta\mathbf{P}(\mathbf{e} + \Delta\mathbf{e}, \mathbf{f} + \Delta\mathbf{f}, \rho + \Delta\rho) \\ \Delta\mathbf{Q}(\mathbf{e} + \Delta\mathbf{e}, \mathbf{f} + \Delta\mathbf{f}, \rho + \Delta\rho) \\ \Delta\mathbf{V}(\mathbf{e} + \Delta\mathbf{e}, \mathbf{f} + \Delta\mathbf{f}, \rho + \Delta\rho) \\ \Delta\sigma(\mathbf{e} + \Delta\mathbf{e}, \mathbf{f} + \Delta\mathbf{f}, \rho + \Delta\rho) \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

o que equivale a buscar componentes de passo  $\Delta\mathbf{e}$ ,  $\Delta\mathbf{f}$  e  $\Delta\rho$  tal que  $\mathbf{h}(\mathbf{x} + \mathbf{d})$  seja igual a um vetor nulo, obtendo-se assim

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_t &= -\frac{1}{2}[\mathbf{J}_{\text{mod}}(\mathbf{x})]^{-1}[(\mathbf{d}_n + \mathbf{d}_t)^t\mathbf{T}_{\text{mod}}(\mathbf{d}_n + \mathbf{d}_t)] \\ &= [\mathbf{J}_{\text{mod}}(\mathbf{x})]^{-1}[\mathbf{h}_c(\mathbf{d}_n + \mathbf{d}_t) + \mathbf{J}_{\text{mod}}(\mathbf{0})(\mathbf{d}_n + \mathbf{d}_t)]. \end{aligned} \quad (160)$$

Em geral, quando o passo da iteração é pequeno, o comportamento das funções é aproximadamente linear, e portanto o passo de Newton é considerado uma boa aproximação. Além disso, é o componente de maior peso (importância) na direção  $\mathbf{d} = \mathbf{d}_n + \mathbf{d}_t$ , logo

$$\mathbf{h}_c(\mathbf{d}_n + \mathbf{d}_t) + \mathbf{J}_{\text{mod}}(\mathbf{0})(\mathbf{d}_n + \mathbf{d}_t) \approx \mathbf{h}_c(\mathbf{d}_n) + \mathbf{J}_{\text{mod}}(\mathbf{0})(\mathbf{d}_n). \quad (161)$$

Portanto  $\mathbf{d}_t$  pode ser estimada resolvendo o sistema de equações

$$\mathbf{J}_{\text{mod}}(\mathbf{x})\mathbf{d}_t = \mathbf{h}_c(\mathbf{d}_n) + \mathbf{J}_{\text{mod}}(\mathbf{0})(\mathbf{d}_n) \quad (162)$$

tal que

$$\mathbf{x}^{\text{pred}} = \mathbf{x} + \mathbf{d} \quad (163)$$

corresponde a uma etapa de predição para a solução do problema de com variação de carregamento. Cada etapa de predição é seguida de uma etapa de correção, realizado através de uma iteração do problema de fluxo de potência descrito na Seção 4.2, utilizando o parâmetro  $\rho$  obtido na etapa de predição.

Durante a simulação de Monte Carlo sequencial, os estados em avaliação estão sujeitos a uma curva de carga, cuja variação do patamar para dois estados consecutivos em geral é pequena. Isto sugere que estratégias para o cálculo aproximado de fatores de carregamento, contido no intervalo de possibilidades de variação de patamares de carga entre falhas de componentes, podem ser de mais valia para avaliar estados de forma mais eficiente. Assim, ao invés da execução das etapas de predição e correção para fatores de carregamento que não fazem parte da curva de carga do sistema, optou-se por calcular as tensões nas barras para fatores de carregamento pertencentes ao conjunto de variação de patamares entre falhas de componentes.

Sob o ponto de vista metodológico, as seguintes etapas são executadas quando da identificação de um estado  $k$  de sucesso: (a) ordenação dos patamares de carga até a próxima transição de componente; (b) partindo-se do estado  $k$ , calcular as tensões nas barras via modelo preditor-corretor, até que limites operativos descritos em (142) sejam violados, tendo em conta a visita de patamares de carga em ordem crescente; (c) partindo-se do estado  $k$ , calcular as tensões nas barras via modelo preditor-corretor, até que limites operativos sejam violados, tendo em conta a visita de patamares de carga em ordem decrescente. Os estados correspondentes a pontos de operação sem limites violados são assinalados com um “selo” de passagem, indicando que a sua avaliação via fluxo de potência, fluxo de potência ótimo, ou mesmo escalonamento, não é necessária. Note que, a modelagem tem por base matemática as equações de um problema de variação de carregamento, tendo em conta casos em que a redução do carregamento pode acarretar em violação de limites operacionais como, por exemplo, relacionados a limites técnicos mínimos de produção em unidades geradoras.

#### 4.5 ALGORITMO DE INCLUSÃO DE SELOS DE PASSAGEM NO MÉTODO DE SIMULAÇÃO DE MONTE CARLO SEQUENCIAL

No Algoritmo 8 são apresentados os passos de inclusão das ações corretivas na avaliação dos estados e das estratégias de estimação de fatores limite de carregamento para a supressão de avaliações no método de simulação de Monte Carlo sequencial ( $MCS_\rho$  e  $MCS_{\hat{\rho}}$ ) considerando uma representação não linear da rede, tendo como base o algoritmo presente na Seção 2.4.2.

---

**Algoritmo 8** Método de simulação de Monte Carlo sequencial com estratégias de estimação de fatores limite de carregamento considerando modelo de rede não linear

---

Seja  $N_y^{max}$  o número máximo de anos a simular,  $h = 0$  o instante de tempo do relógio fictício,  $N_y = 1$  e  $T = 8.760$  h.

- 1: Inicializar estados de componentes e carga;
- 2: Amostrar tempo de permanência dos componentes nesses estados de acordo com (1) e (2) ;
- 3: Identificar o instante da próxima transição de estado e efetuar a transição do componente ou patamar de carga correspondente; atualizar  $h$  com o instante de transição;
- 4: Avaliar o estado do sistema:
  - i: se a transição é de componente:
    - a) Executar pré-avaliação de estado usando um fluxo de potência tensorial modificado. Aplicar medidas corretivas, como descrito na Seção 4.2. Caso o estado seja de sucesso, seguir para o Passo d. Caso contrário, executar o passo seguinte;
    - b) Avaliar o estado por meio de um fluxo de potência ótimo. Caso o estado seja de sucesso, seguir para o Passo d. Caso contrário, armazenar corte de carga. Em caso de não convergência, executar o passo seguinte;
    - c) Avaliar o estado por meio de um escalonamento de unidades. Caso o estado seja de sucesso, seguir para o Passo d. Caso contrário, armazenar corte de carga e finalizar avaliação de estado.
    - d) Calcular os selos de passagem para os estados de transição de carga via método preditor-corretor tensorial;
  - ii: se a transição é de patamar de carga:
    - a) Caso o valor do patamar de carga tenha selo de passagem, categorizá-lo como de sucesso. Caso contrário, executar o passo seguinte;
    - b) Executar pré-avaliação de estado usando um fluxo de potência tensorial modificado. Aplicar medidas corretivas, como descrito na Seção 4.2. Caso o estado seja de sucesso, definir corte de carga nulo e seguir para o Passo e. Caso contrário, executar o passo seguinte;
    - c) Avaliar o estado por meio de um fluxo de potência ótimo. Em caso de convergência, seguir para o Passo e. Em caso de não convergência, executar o passo seguinte;
    - d) Avaliar o estado por meio de um escalonamento de unidades. Em caso de convergência, seguir para o Passo e. Caso contrário, definir o estado como de sucesso e finalizar avaliação de estado.
    - e) Verificar o corte de carga. Se o corte de carga é nulo, definir o estado como de sucesso e finalizar avaliação de estado. Caso contrário, armazenar corte de carga e finalizar avaliação de estado.

- 5: Atualizar os valores das funções teste;
- 6: Se  $h = 8.760$  h, atualizar os índices de confiabilidade de acordo com (21); senão voltar ao Passo 2;
- 7: Atualizar os coeficientes de variação  $\beta$  de acordo com (9);
- 8: Se  $N_y = N_y^{max}$  ou se os coeficientes de variação são inferiores a uma tolerância especificada, parar a simulação; senão  $N_y = N_y + 1$ ,  $h = 0$  e voltar ao Passo 2.

Na próxima seção são apresentados resultados para a aplicação do problema do fluxo de potência tensorial modificado, bem como para a aplicação do algoritmo apresentado nesta seção.

#### 4.6 RESULTADOS PARA O MÉTODO DE SIMULAÇÃO DE MONTE CARLO SEQUENCIAL CONSIDERANDO MODELO DE REDE NÃO LINEAR

Nesta seção, são apresentados dois conjuntos de resultados considerando a rede modelada a partir de um conjunto de equações não lineares. No primeiro conjunto de resultados é apresentada e discutida a eficiência do método de fluxo de potência tensorial modificado considerando vários sistemas teste. O segundo conjunto de resultados visa destacar a eficiência do algoritmo do método de simulação de Monte Carlo sequencial apresentado na Seção 4.5.

##### 4.6.1 Resultados para o problema do fluxo de potência tensorial modificado

Esta subseção introduz um exemplo completo da aplicação do método de fluxo de potência tensorial modificado, bem como uma análise comparativa envolvendo o método de fluxo de potência tensorial original e a abordagem proposta.

###### 4.6.1.1 Exemplo didático

Com o objetivo de ilustrar a aplicabilidade da abordagem proposta, os passos principais do Algoritmo 6 são descritos usando um sistema teste de 3 barras, cujos dados e diagrama unifilar são apresentados na figura 12.

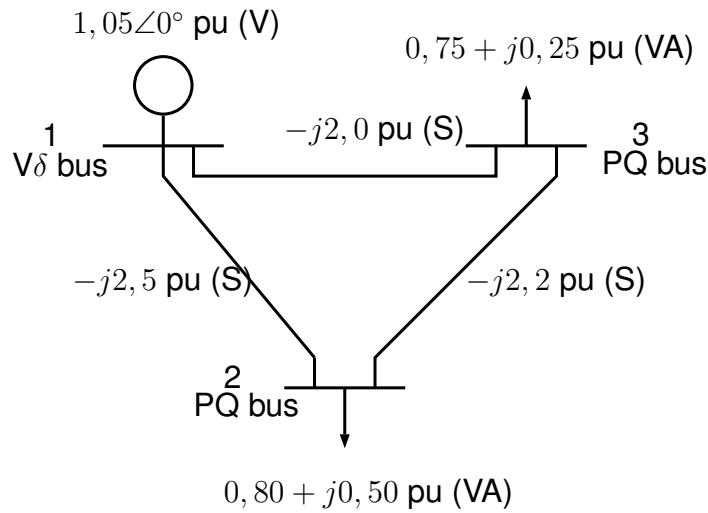
- Passo 1: A partida plana é escolhida como estimativa inicial como se segue:

$$\mathbf{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} 1,0000 & 1,0000 & 0,0000 & 0,0000 \end{bmatrix}^t$$

onde os dois primeiros elementos correspondem às partes reais das tensões complexas das Barras 2 e 3, enquanto os restantes elementos denotam as partes imaginárias das tensões complexas nas mesmas barras.



Figura 12 – Sistema de 3 barras.



Fonte: do autor.

- Passo 2: Usando (75), os desvios podem ser determinados como sendo

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}^{(0)}) = \begin{bmatrix} -0,8000 \\ -0,7500 \\ -0,5000 \\ -0,2500 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0,0000 \\ 0,0000 \\ -0,1250 \\ -0,1000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,8000 \\ -0,7500 \\ -0,3750 \\ -0,1500 \end{bmatrix}$$

o que corresponde aos balanços de potência ativa na Barra 2, potência ativa na Barra 3, potência reativa na Barra 2 e potência reativa na Barra 3.

- Passo 5: A matriz Jacobiana de  $\mathbf{g}(\mathbf{x})$  calculada em  $\mathbf{x}^{(0)}$  é dada por

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}^{(0)}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -5,1250 & +2,5000 \\ 0 & 0 & +2,5000 & -4,6000 \\ -4,8750 & +2,5000 & 0 & 0 \\ +2,5000 & -4,4000 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A direção de Newton pode ser calculada usando  $\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{d}_n^{(k)}$ :

$$\mathbf{d}_n^{(0)} = \begin{bmatrix} -0,1332 & -0,1098 & -0,3206 & -0,3373 \end{bmatrix}^T$$

- Passo 6: A matriz jacobiana de  $\mathbf{g}(\mathbf{x})$  calculada em  $\mathbf{d}_n^{(0)}$  pode ser calculada como sendo

$$\mathbf{J}(\mathbf{d}_n^{(0)}) = \begin{bmatrix} -0,8433 & +0,8016 & +0,2745 & -0,3331 \\ +0,8433 & -0,8016 & -0,2745 & +0,3331 \\ +1,0578 & -0,3331 & +2,3631 & -0,8016 \\ -0,2745 & +0,6550 & -0,8433 & +2,2341 \end{bmatrix}$$

A direção tensorial complementar pode ser calculada usando (130) tal que

$$\mathbf{d}_t^{(0)} = \begin{bmatrix} -0,1743 & -0,1766 & +0,0039 & -0,0049 \end{bmatrix}^t$$

- Passo 7: Usando (129), a solução estimada é atualizada como se segue

$$\mathbf{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} +0,6925 & +0,7136 & -0,3167 & -0,3422 \end{bmatrix}^t$$

- Passo 8: Os balanços atualizados são calculados através da equação (75) tal que

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}^{(1)}) = \begin{bmatrix} -0,8000 \\ -0,7500 \\ -0,5000 \\ -0,2500 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -0,8039 \\ -0,7461 \\ -0,4249 \\ -0,1864 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +0,0039 \\ -0,0039 \\ -0,0751 \\ -0,0636 \end{bmatrix}$$

determinando um desvio absoluto máximo com o valor de 0,0751. A aplicação da direção tensorial apresentada em (SALGADO, R.; ZEITUNE, A., 2009) resultaria num desvio absoluto máximo com o valor de 0,1219.

É importante mencionar que a matriz Jacobiana de  $\mathbf{g}(\mathbf{x})$  calculada em  $\mathbf{d}_t^{(0)}$  é dada por

$$\mathbf{J}(\mathbf{d}_t^{(0)}) = \begin{bmatrix} -0,0123 & -0,0098 & +0,4416 & -0,4358 \\ +0,0123 & +0,0098 & -0,4416 & +0,4358 \\ +1,3014 & -0,4358 & -0,0516 & +0,0098 \\ -0,4416 & +1,1539 & -0,0123 & +0,0541 \end{bmatrix}$$

Como consequência, o produto matriz-vetor

$$\mathbf{J}(\mathbf{d}_t^{(0)})\mathbf{d}_t^{(0)} = \begin{bmatrix} +0,0081 & -0,0081 & -0,1123 & -0,0822 \end{bmatrix}^t$$

$$\mathbf{J}(\mathbf{d}_t^{(0)})\mathbf{d}_n^{(0)} = \begin{bmatrix} +0,0081 & -0,0081 & -0,1123 & -0,0822 \end{bmatrix}^t$$

fornece o mesmo resultado, como provado na Subseção 4.2.3.1.

#### 4.6.1.2 Análise comparativa

Diversas análises foram realizadas usando sistemas teste do IEEE e um equivalente do sistema sul-sudeste brasileiro. Todos os resultados foram validados com a ferramenta MATPOWER (ZIMMERMAN; MURILLO-SANCHEZ; THOMAS, 2011). Apesar das comparações com o método Newton-Raphson terem sido exaustivas em (SALGADO, R.; ZEITUNE, A., 2009), uma comparação inicial é também aqui apresentada. As Tabelas 10 e 11 mostram resultados para um sistema teste do MATPOWER com 1354 barras, correspondente a uma parte da rede de transmissão de alta tensão europeia (JOSZ *et al.*, 2016), e para os sistemas teste IEEE 14 barras e IEEE 300 barras.

Os fatores de carga foram usados como fatores multiplicadores das potências geradas e demandadas, ou seja, as potência geradas e demandas das barras foram multiplicadas pelos fatores de carga indicados como se segue

$$P_{gi} = \rho P_{gi}^0 \quad (164)$$

$$P_{di} = \rho P_{di}^0 \quad (165)$$

$$Q_{gi} = \rho Q_{gi}^0 \quad (166)$$

$$Q_{di} = \rho Q_{di}^0 \quad (167)$$

onde  $\rho$  é o fator de carga;  $P_{gi}, P_{di}, Q_{gi}, Q_{di}$  denotam a geração de potência ativa, a demanda de potência ativa, a geração de potência reativa e a demanda de potência reativa na barra  $i$ , respectivamente;  $P_{gi}^0, P_{di}^0, Q_{gi}^0, Q_{di}^0$  são a geração de potência ativa, demanda de potência ativa, geração de potência reativa e demanda de potência reativa na barra  $i$ , respectivamente, dadas em (U. OF WASHINGTON, s.d.; ZIMMERMAN; MURILLO-SANCHEZ; THOMAS, 2011).

Os acrônimos MTM, TM e NR são usados para indicar os métodos Tensorial Modificado, Tensorial e Newton-Raphson (implementado no MATPOWER), respectivamente. Buscando comparar o efeito dos vetores de correção tensoriais, os limites de potência reativa foram negligenciados. Todas as análises foram efetuadas assumindo uma tolerância de  $10^{-8}$ , a partida plana e um número máximo de iterações igual a 50.

Tabela 10 – Análise comparativa com um sistema teste de 1.354 barras

Fator de carga	No. de iterações			$P_{losses}$ (MW)		
	NR	TM	MTM	NR	TM	MTM
1,000	5	5	3	16,635	16,636	16,636
1,330	5	5	4	31,280	31,282	31,282
1,525	8	7	5	44,096	44,098	44,098
1,528	10	9	6	44,419	44,421	44,421

Tabela 11 – Análise comparativa com os sistemas teste IEEE 14 barras e IEEE 300 barras.

Sistema Teste	Método	$V_{min}$ (p.u.)	$V_{max}$ (p.u.)	$P_{losses}$ (MW)
IEEE 14 barras	NR	1,010	1,090	13,393
	TM	1,010	1,090	13,393
	MTM	1,010	1,090	13,393
IEEE 300 barras	NR	0,929	1,073	408,316
	TM	0,929	1,073	408,316
	MTM	0,929	1,073	408,316

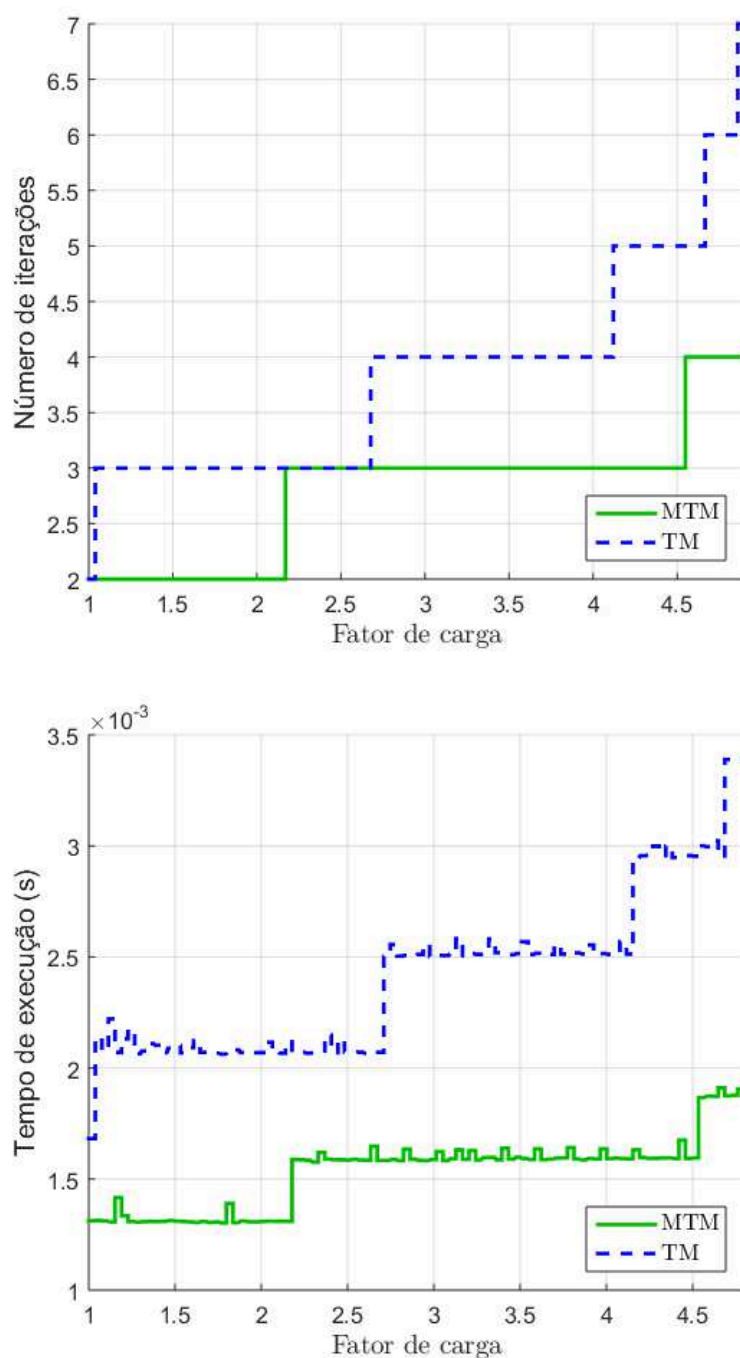
Os fatores de carga na Tabela 10 variam entre 1,000 e 1,528, correspondendo, respectivamente, ao caso base disponibilizado no conjunto de dados e ao fator de

máximo carregamento. As colunas 2-4 mostram o número de iterações requeridas até à convergência, enquanto que as colunas 5-7 indicam as perdas de transmissão de potência ativa. Os resultados apontam que o vetor de correção melhora o processo iterativo, reduzindo o número de iterações necessárias até à convergência. Como exemplos de tempo de execução dos métodos, usando um método NR implementado excluindo o vetor de correção da análise, os métodos NR, TM e MTM demoraram 8,60, 9,38 e 6,05 segundos, respectivamente, para o caso base. Apesar do tempo requerido por iteração pelos métodos NR, TM e MTM ter sido 1,72, 1,88, 2,02, respectivamente, o tempo total de execução indica um efeito positivo quando aplicado o vetor de correção. É importante mencionar que todos os tempos de execução dependem consideravelmente do nível de esforço aplicado na implementação. De fato, o método NR implementado no MATPOWER é significativamente mais rápido que todos os métodos implementados aqui. Finalmente, as perdas de transmissão de potência ativa apresentadas nas colunas 5-7 mostram que todos os métodos proporcionam soluções adequadas para o problema do fluxo de potência. Uma conclusão similar pode ser retirada a partir da análise de outros sistemas, como exemplificado na Tabela 11, onde os resultados para a tensão mínima das barras (coluna 3), tensão máxima das barras (coluna 4) e perdas de transmissão de potência ativa (na coluna 5) calculadas para os sistemas teste IEEE 14 barras e IEEE 300 barras são destacados.

Com o objetivo de comparar o método proposto com o método original mostra-se nas Figuras 13 e 14 o número de iterações e o tempo de execução computacional da análise de fluxo de potência usando fatores de carga distintos para os sistemas teste IEEE 14 barras e IEEE 300 barras, respectivamente, para os métodos TM e MTM. Na Figura 15 retrata-se a mesma informação para um sistema brasileiro com 1916 barras, enquanto que na Figura 16 é ilustrado o efeito da escolha da estimativa inicial na análise do sistema teste IEEE 300 barras. A última figura exhibe os desvios por iteração dos métodos TM e MTM para diferentes pontos iniciais. Mostra-se que o desempenho do método MTM depende do ponto inicial escolhido, à semelhança do que sucede com o método TM. Para ambos os métodos, espera-se que estimativas iniciais próximas da solução do problema requeiram um pequeno número de iterações.

Todos as análises de resultados indicam que o método proposto converge num número de iterações menor ou igual ao do método tensorial original, proporcionando redução de tempos de execução. Este resultado era esperado já que o vetor de correção do método proposto considera termos adicionais da expansão de Taylor de segunda ordem de  $g(x)$ , fornecendo uma direção estimada melhorada quando comparada com a direção do método tensorial original. Há casos, para os quais o fator de carga é elevado, onde o método proposto alcança a solução, enquanto que o método tensorial original diverge, como exemplificado na Figura 15. Este resultado é mais uma vez justificado pelo uso da direção de busca melhorada. Por fim, verificou-se

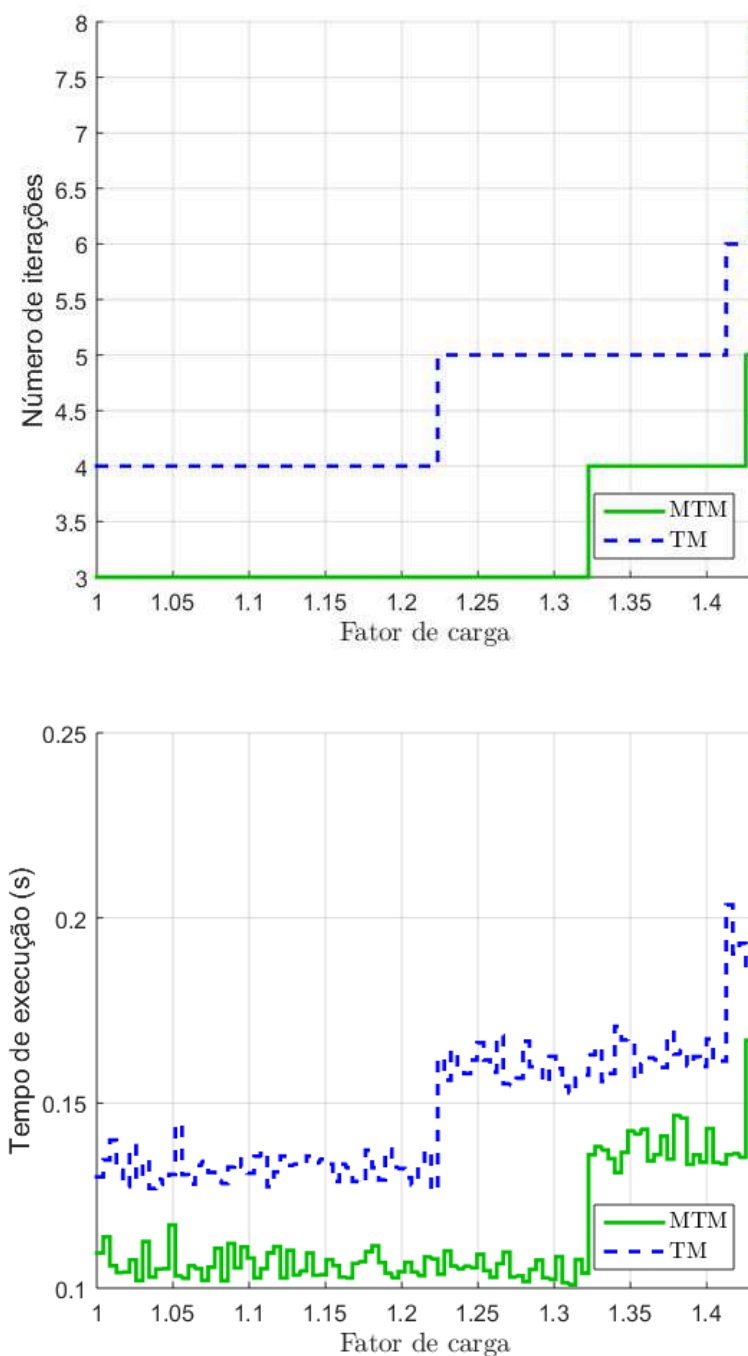
Figura 13 – Análise comparativa das abordagens tensoriais para o sistema teste IEEE 14 barras.



Fonte: do autor.

que o teste do desvio apresentado em (89) é relevante para promover a convergência do método tensorial original. Por exemplo, nas análises efetuadas para o sistema teste IEEE 300 barras, há diversos fatores de carga entre  $[1,08; 1,30]$  para os quais o método tensorial original apenas alcança a convergência se realizado esse teste e desconsiderando o vetor de correção pelo menos uma vez. Por outro lado, o método proposto disponibiliza uma direção elegante e confiável, tornando desnecessário o

Figura 14 – Análise comparativa das abordagens tensoriais para o sistema teste IEEE 300 barras.



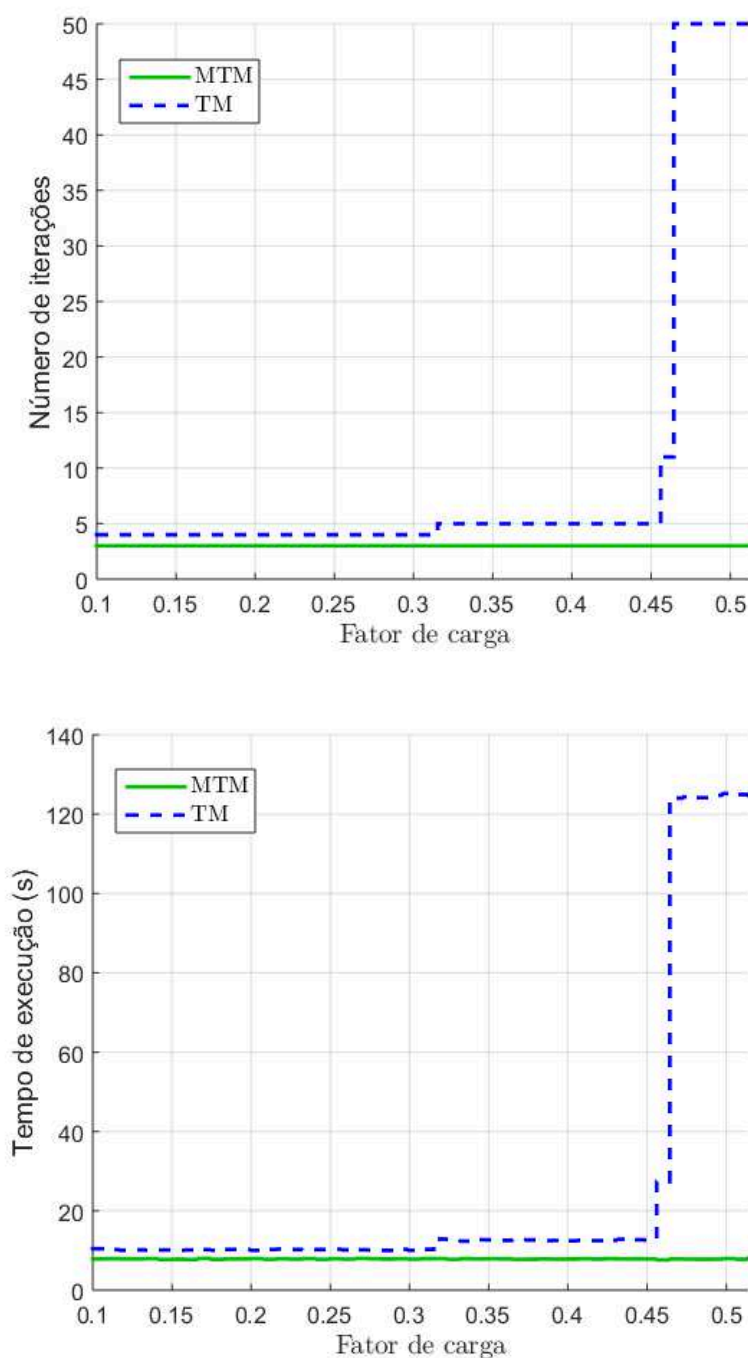
Fonte: do autor.

teste anteriormente mencionado.

#### 4.6.2 Resultados para o método de simulação de Monte Carlo sequencial

Nesta seção, são apresentados os resultados para dois métodos de simulação de Monte Carlo sequencial implementados considerando a formulação não linear da

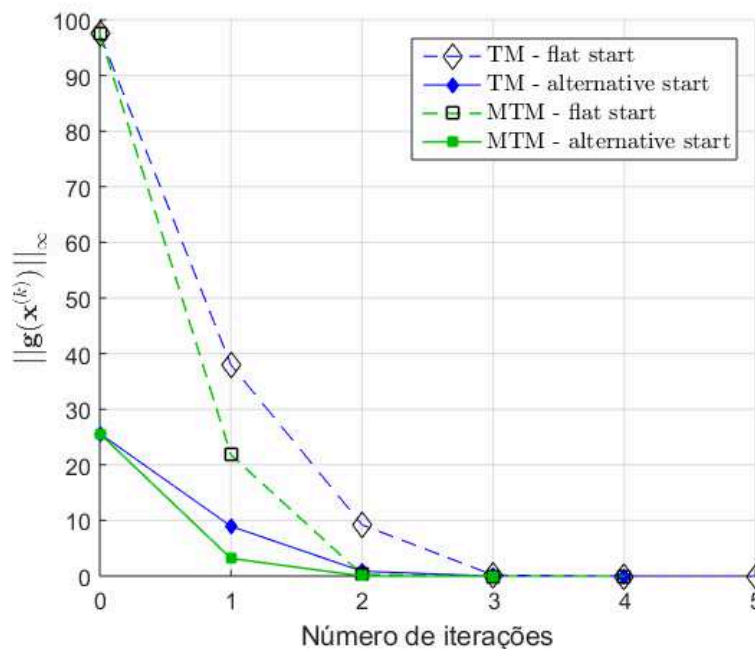
Figura 15 – Análise comparativa das abordagens tensoriais para um equivalente do sistema sul-sudeste brasileiro.



Fonte: do autor.

rede. Um dos métodos, o qual neste contexto considerar-se-á o método tradicional, corresponde ao método de simulação de Monte Carlo sequencial no qual os estados são avaliados via fluxo de potência, fluxo de potência ótimo e escalonamento. A aplicação do escalonamento de geradores como medida corretiva foi realizada recorrendo ao método da entropia cruzada, que apresenta parâmetros que precisam ser definidos, tais como o número de amostras ou o parâmetro de raridade. Uma lista de todos os

Figura 16 – Efeito do vetor de correção melhorado para diferentes estimativas iniciais na análise do sistema teste IEEE 300 barras.



Fonte: do autor.

parâmetros escolhidos para as simulações realizadas é apresentada na sequência:

- parâmetros do método de simulação de Monte Carlo sequencial:
  - número máximo de anos de simulação: 500.000;
  - tolerância de convergência: 5%;
- parâmetros do fluxo de potência:
  - número máximo de iterações: 50;
  - tolerância de convergência:  $1 \times 10^{-4}$ ;
- parâmetros do fluxo de potência ótimo:
  - número máximo de iterações : 300;
  - parâmetro de barreira: 0,05;
  - parâmetro de suavização: 0,99995;
  - parâmetro  $\beta$ : 10;
  - tolerância de convergência:  $1 \times 10^{-4}$ ;
  - tolerância do parâmetro de barreira:  $1 \times 10^{-4}$ ;



- parâmetros do método de entropia cruzada para o escalonamento de geradores:
  - dimensão da amostra: 40;
  - parâmetro de raridade: 0, 4;
  - número de amostra de elite: 16;
  - probabilidades iniciais: 0, 85;
  - número máximo de iterações: 4.

Para casos nos quais o escalonamento não encontrou solução convergente de fluxo de potência ótimo, procedeu-se com o armazenamento do estado e considerou-se o mesmo como sendo de sucesso, com um valor de corte de carga nulo. Verifica-se assim, no universo de todos os estados sorteados até à convergência, se existem estados nessas condições afim de quantificar a sua significância nos resultados obtidos durante a simulação.

Na Subseção 4.6.2.1, apresentam-se resultados de validação do método de simulação de Monte Carlo sequencial para um sistema reduzido. Os métodos abordados são o método analítico (AM), o método de simulação de Monte Carlo sequencial “tradicional” ( $NLMCS_{\tau}$ ), uma variante do método tradicional onde os estados são avaliados apenas via fluxo de potência ótimo ( $NLMCS_{\tau'}$ ), e o método que alia ao método de simulação de Monte Carlo sequencial ao uso de uma técnica para estimar os limites de carregamento ( $NLMCS_{\hat{\rho}}$ ). A Subseção 4.6.2.2 contém resultados para o sistema IEEE-RTS79 considerando os modelos  $NLMCS_{\tau}$  e  $NLMCS_{\hat{\rho}}$ . Os resultados apresentados em ambas as subseções têm por ênfase a comparação do tempo de simulação, tipologia e número de avaliações e intervalos de confiança para os métodos em estudo.

#### 4.6.2.1 Resultados de validação

Para fins de validação dos algoritmos implementados, utilizou-se de um sistema reduzido constituído por duas barras, onde em uma das barras estão alocadas 3 unidades de geração e na outra uma carga constante. As unidades de geração possuem capacidade de produção ativa mínima e máxima de 0 MW e 100 MW, respectivamente, assim como capacidade de produção reativa mínima e máxima de -25 Mvar e 60 Mvar. A carga do sistema é modelada por uma curva de 8.760 patamares horários constantes correspondentes a carga de 200 MW. As barras são conectadas por 3 linhas de transmissão em paralelo, de reatância de 0,30 p.u. ( $\Omega$ ), e capacidade de 1,10 p.u. (A). A tensão na barra de geração é especificada em 1,00 p.u. e os limites mínimo e máximo de magnitude de tensão nas barras são de 0,95 p.u. e 1,05 p.u., respectivamente. A base de tensão e potência do sistema é de 230 kV e 100 MVA, respectivamente. Assume-se que apenas 2 geradores, nomeados de  $G_1$  e  $G_2$ , e uma das linhas de

transmissão, nomeada  $LT_1$  estão sujeitas a falhas. As taxas de falha e tempos médio de reparo dos componentes são de 0,002 oc./ano e 10 h, respectivamente, totalizando uma probabilidade de falha de 0,02. Os demais componentes são considerados perfeitos.

A enumeração e análise dos estados desse sistema é ilustrada na Tabela 12.

Tabela 12 – Resultados de corte de carga, probabilidade e magnitudes de tensão via método analítico para um sistema teste de 2 barras.

Estados			Corte [MW]	Prob	$V^{min}$ [p.u.]	
$G_1$	$G_2$	$LT_1$			FP	FPO
up	up	up	0	0,941192	0,9789	-
up	up	down	0	0,019208	0,9487	0,9880
up	down	up	0	0,019208	0,9789	-
up	down	down	0	0,000392	0,9487	0,9878
down	up	up	0	0,019208	0,9789	-
down	up	down	0	0,000392	0,9487	0,9878
down	down	up	100	0,000392	0,9789	0,9875
down	down	down	100	0,000008	0,9487	0,9886

Fonte: do autor.

Na Tabela 12, as colunas 1-3 apontam para os estados dos elementos do sistema que podem falhar, as colunas 4 e 5 o corte de carga e probabilidade de ocorrência de cada estado, e as colunas 6 e 7 a magnitude da tensão na barra de carga após a execução do fluxo de potência e do fluxo de potência ótimo, este último quando necessário para que a solução atenda a limites operativos.

Observa-se que, para o sistema de 2 barras em análise, apenas dois estados conduzem ao corte de carga, ambos com valor de corte igual a 100 MW. Além disso, a probabilidade de ocorrência desses estados é de  $3,92 \times 10^{-4}$  para o estados com os geradores  $G_1$  e  $G_2$  em falha, e  $8 \times 10^{-6}$  para o estado com os três componentes passíveis de falhar nesse estado, totalizando uma LOLP de  $4 \times 10^{-4}$ . O índice EPNS é dado por  $(0,000392)(100) + (0,000008)(100) = 4 \times 10^{-2}$  MW e o índice LOLF pode ser calculado como  $(0,000392)(\frac{8.760}{10} + \frac{8.760}{10}) + (0,000008)(\frac{8.760}{10} + \frac{8.760}{10} + \frac{8.760}{10}) = 0,707808$  oc./ano. Observa-se também que apenas três estados não requerem a execução de fluxo de potência ótimo e que, apesar do estado exposto na sétima linha apresentar uma magnitude de tensão dentro dos limites, o fluxo de potência ótimo foi executado devido a insuficiência de capacidade de geração do sistema.

Nas Tabelas 13, 14 e 15, apresenta-se a análise comparativa da avaliação da adequação do sistema de 2 barras em NH2 para os métodos AM,  $NLMCS_{\tau}$ ,  $NLMCS_{\tau'}$  e  $NLMCS_{\hat{\rho}}$ .

Com a análise conjunta das Tabelas 13 e 14, permite-se afirmar que os índices de confiabilidade obtidos com os métodos  $NLMCS_{\tau}$ ,  $NLMCS_{\tau'}$  e  $NLMCS_{\hat{\rho}}$  são iguais e próximos aos índices de confiabilidade calculados pelo método analítico. Além

Tabela 13 – Resultados de análise de adequação em NH2 com  $\beta = 5\%$  para os métodos AM, NLMCS $_{\tau}$ , NLMCS $_{\tau'}$ , NLMCS $\hat{\rho}$ , considerando um sistema teste de 2 barras.

Método	AM	NLMCS $_{\tau}$	NLMCS $_{\tau'}$	NLMCS $\hat{\rho}$
Anos	-	1.313	1.313	1.313
Tempo MCS [s]	-	900,31	3.983,69	651,03
LOLP [ $\times 10^{-4}$ ]	4,0000	3,9097	3,9097	3,9097
EPNS [MW]	0,0400	0,0391	0,0391	0,0391
LOLF [occ./ano]	0,7078	0,6662	0,6662	0,6662

Fonte: do autor.

Tabela 14 – Intervalos de confiança para os índices de confiabilidade dos métodos NLMCS $_{\tau}$ , NLMCS $_{\tau'}$ , NLMCS $\hat{\rho}$ , considerando um sistema teste de 2 barras, com um nível de confiança de 95%.

Método	LOLP [ $\times 10^{-4}$ ]	EPNS [MW]	LOLF [occ./ano]
NLMCS $_{\tau}$	[3,5268; 4,2926]	[0,0353; 0,0429]	[0,6200; 0,7123]
NLMCS $_{\tau'}$	[3,5268; 4,2926]	[0,0353; 0,0429]	[0,6200; 0,7123]
NLMCS $\hat{\rho}$	[3,5268; 4,2926]	[0,0353; 0,0429]	[0,6200; 0,7123]

Fonte: do autor.

Tabela 15 – Tipologia de avaliação de estados realizada na avaliação de adequação em NH2 para os métodos AM, NLMCS $_{\tau}$ , NLMCS $_{\tau'}$ , NLMCS $\hat{\rho}$ , considerando um sistema teste de 2 barras, com  $\beta = 5\%$ .

Método Número	AM	NLMCS $_{\tau}$	NLMCS $_{\tau'}$	NLMCS $\hat{\rho}$
Estados visitados	8	11.585.012	11.585.012	11.585.012
Estados avaliados	8	501.360	501.360	501.360
Sucessos via PF	3	496.002	0	89.643
Avaliações via OPF	5	5.358	501.360	5.358
Execuções de UC	-	0	0	0
Estimativas de $\rho$	-	0	0	45.946
Avaliações suprimidas	-	0	0	406.359

Fonte: do autor.

disso, os intervalos de confiança, com uma confiança de 95% e para um beta de 5%, estimados para os índices de confiabilidade também são os mesmos e contêm os respectivos índices de confiabilidade calculados via método analítico. Na Tabela 13, expõe-se também que o número de anos necessários para alcançar a convergência é o mesmo para os três métodos baseados em simulação de Monte Carlo, ainda que apresentem tempos de execução distintos. De fato, tem-se que o método NLMCS $\hat{\rho}$  é aquele que apresenta menor tempo de convergência, com um *speed up* de 1,38 vezes quando comparado com o método NLMCS $_{\tau}$ . Ademais, a comparação dos tempos de execução dos métodos NLMCS $_{\tau}$  e NLMCS $_{\tau'}$  evidencia a importância da aplicação da

pré-avaliação no método de simulação de Monte Carlo sequencial. De fato, sem pré-avaliação, o método de simulação  $NLMCS_{\tau'}$  demora mais 4,42 vezes que o método  $NLMCS_{\tau}$  para alcançar os mesmos índices de confiabilidade com igual precisão.

Na Tabela 15, estão expostas as tipologias de avaliação de estados realizadas nos métodos AM,  $NLMCS_{\tau}$ ,  $NLMCS_{\tau'}$  e  $NLMCS_{\hat{\rho}}$ . O número total de estados visitados e avaliados é igual para todos os métodos baseados em simulação de Monte Carlo e assumem os valores de 11.585.012 e 501.360, respectivamente. Observa-se também que o número de estados avaliados via fluxo de potência no método  $NLMCS_{\tau}$  é 496.002, e no método  $NLMCS_{\hat{\rho}}$  é 89.643, o que corresponde a apenas 18,07% do número de fluxos de potência realizado pelo método tradicional. Ainda comparando o método tradicional com o método baseado na estimação de limites de carregamento, o número de estimativas desses limites foi de 45.946, o que conduziu a 406.359 avaliações suprimidas. Nota-se que, para este sistema teste de pequeno porte, apenas avaliações via fluxo de potência foram suprimidas.

Na próxima seção, resultados similares são apresentados considerando o sistema teste IEEE-RTS79.

#### 4.6.2.2 Resultados para o sistema IEEE-RTS79

Nas Tabelas 16, 17 e 18, apresentam-se os resultados obtidos na avaliação de adequação do sistema IEEE-RTS79 para os métodos tradicional ( $NLMCS_{\tau}$ ) e com supressão de avaliações via limites de carregamento ( $NLMCS_{\hat{\rho}}$ ), considerando um coeficiente de variação  $\beta$  de 5%.

Tabela 16 – Resultados de análise de adequação em NH2 com  $\beta = 5\%$  para os métodos  $NLMCS_{\tau}$  e  $NLMCS_{\hat{\rho}}$ , considerando o sistema teste IEEE-RTS-79.

Método	$NLMCS_{\tau}$	$NLMCS_{\hat{\rho}}$
Anos	2.077	2.102
Tempo MCS [s]	104.845,47	77.550,33
LOLP [ $\times 10^{-3}$ ]	1,3660	1,3118
EPNS [MW]	0,1488	0,1454
LOLF [occ./ano]	2,6570	2,3441

Fonte: do autor.

Identifica-se que os índices obtidos executando ambos os métodos são similares. Além disso, os índices LOLP e EPNS obtidos via método tradicional estão contidos nos intervalos de confiança daqueles método via  $NLMCS_{\hat{\rho}}$ . O mesmo se observa para os índices LOLP e EPNS calculados com o método  $NLMCS_{\hat{\rho}}$  e os intervalos de confiança do método tradicional. A maior diferença numérica é observada no índice LOLF, não ocorrendo a pertença de nenhum dos índices de um modelo no intervalo de confiança do outro modelo. Contudo, os intervalos de confiança dos métodos intersectam-se. Ainda a partir da análise dos resultados da Tabela 16 é possível observar que

Tabela 17 – Intervalos de confiança para os índices de confiabilidade para os métodos  $NLMC_{\tau}$  e  $NLMCS_{\hat{\rho}}$ , considerando o sistema teste IEEE-RTS79, com um nível de confiança de 95%.

Método	LOLP [ $\times 10^{-3}$ ]	EPNS [MW]	LOLF [occ./ano]
$NLMC_{\tau}$	[1, 2698; 1, 4621]	[0, 1343; 0, 1633]	[2, 3970; 2, 9171]
$NLMCS_{\hat{\rho}}$	[1, 2230; 1, 4005]	[0, 1311; 0, 1596]	[2, 1818; 2, 5064]

Fonte: do autor.

Tabela 18 – Tipologia de avaliação de estados realizada na avaliação de adequação em NH2 para os métodos  $NLMC_{\tau}$  e  $NLMCS_{\hat{\rho}}$ , considerando o sistema teste IEEE-RTS79, com  $\beta = 5\%$ .

Método Número	$NLMC_{\tau}$	$NLMCS_{\hat{\rho}}$
Estados visitados	19.202.348	19.433.516
Estados avaliados	14.862.995	15.040.817
Sucessos via PF	14.778.582	8.059.994
Avaliações via OPF	63.819	51.303
Execuções de UC	20.594	15.857
Estimativas de $\rho$	0	904.273
Avaliações suprimidas	0	6.913.663

Fonte: do autor.

o método  $NLMC_{\tau}$  requer 2077 anos até à convergência precisando de aproximadamente 29,12 h para tal, enquanto que o método  $NLMCS_{\hat{\rho}}$  necessita de 2102 anos e aproximadamente 21,54 h, totalizando uma diferença de 25 anos e 7,58h. Apesar dessa diferença, o número de estados visitados e avaliados em cada método é similar: o método tradicional promove o sorteio de 19.202.348 e avaliação de 14.862.995 estados, enquanto que o método  $NLMCS_{\hat{\rho}}$  promove o sorteio de 19.433.516 e avaliação de 15.040.817 estados. No método  $NLMC_{\tau}$ , o número de estados identificados como sendo de sucesso avaliados por meio de fluxo de potência é 14.778.582, por meio de fluxo de potência ótimo é 63.819 e via escalonamento de geradores é 20.594, o que corresponde a 99,43%, 0,43% e 0,14% dos estados avaliados nesse método, respectivamente. Relativamente ao método  $NLMCS_{\hat{\rho}}$ , o número de estados avaliados de sucesso via fluxo de potência é 8.059.994, por meio de fluxo de potência ótimo é 51.303 e via escalonamento de geradores é 15.857, o que corresponde a 53,59%, 0,34% e 0,11% dos estados avaliados nesse método, respectivamente. Os restantes 45,96% dos estados avaliados tiveram a sua avaliação via fluxo de potência e fluxo de potência ótimo suprimida por meio de pertença no intervalo definido pelos limites de carregamento estimados. Aliás, ocorreram 904.273 estimações de intervalos de limite de carregamento, que conduziram a um total de 6.913.663 de avaliações suprimidas. É importante salientar aqui que o método  $NLMCS_{\hat{\rho}}$  permitiu suprimir não só avalia-

ções realizadas via fluxo de potência, mas também suprimir avaliações baseadas em fluxo de potência ótimo e escalonamento de geração. Identificou-se que a diferença entre índices pode ser reduzida ainda mais ao se agregar passos intermediários de aumento/redução de carga junto à aplicação do método preditor-corretor, melhorando as estimativas das tensões frente a variação de carga. Julgou-se, entretanto, as estimativas como adequadas frente às incertezas inerentes ao planejamento de sistemas elétricos.

Existem situações em que o estado é definido como de sucesso via selo de passagem advindo da aplicação do método preditor-corretor tensorial, sendo este estado de difícil convergência para o algoritmo de escalonamento aquando da execução do método NLMCS $\tau$ . Neste caso, o estado pode ser avaliado como sendo de insucesso no método NLMCS $\tau$ , com o valor de corte de carga correspondente ao menor valor encontrado entre as amostras sorteadas no algoritmo de escalonamento.

Ainda sobre a convergência, durante a avaliação de estados, apesar de todas as medidas corretivas aplicadas nos métodos de simulação em estudo, para ambos os métodos houve 40 estados sorteados que não foram possíveis de serem identificados como sendo estados de sucesso ou de falha, para o conjunto de parâmetros estabelecidos para o algoritmo de escalonamento. Para esses casos, o estado foi definido como sendo de sucesso com corte de carga nulo. Note-se que o número de estados inconclusivos corresponde a  $2,083 \times 10^{-4}\%$  dos estados visitados no método NLMCS $\tau$  e  $2,058 \times 10^{-4}\%$  dos estados sorteados no método NLMCS $\hat{\rho}$ , o que não influencia de forma significativa a estimação dos índices de confiabilidade do sistema.

Termina-se esta análise de resultados avaliando o tempo de *speed up* da aplicação do método NLMCS $\hat{\rho}$  comparando-a com o método NLMCS $\tau$ . O tempo de execução do método baseado na estimação de limites de carregamento é 77.550,33 s, o que representa um *speed up* de 1,35 vezes relativamente ao tempo de execução do método tradicional que é de 104.845,47 s.

#### 4.7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste capítulo, foram apresentadas estratégias de pré-avaliação de estados via fluxo de potência tensorial modificado e de determinação de corte de carga e ações corretivas por meio de fluxo de potência ótimo e escalonamento, sempre considerando a formulação não linear da rede. Ainda sob a mesma hipótese, foi apresentado um modelo de determinação de fatores limite de carregamento via método preditor-corretor tensorial. A resolução do problema de fluxo de potência por meio do método do fluxo de potência tensorial modificado apresentou melhores resultados quando comparado com o método de fluxo de potência tensorial “tradicional”. Por outro lado, a aplicação do método de entropia cruzada no escalonamento de geradores como ação corretiva foi uma mais valia aos métodos considerados neste capítulo, além de se mostrar

uma ferramenta valiosa durante a avaliação de estados nos métodos de simulação de Monte Carlo sequencial apresentados.

A estratégia empregada no método  $NLMCS_{\hat{\rho}}$  produziu resultados atrativos para a estimação de índices de confiabilidade de um sistema composto. De fato, os índices de confiabilidade obtidos usando os métodos tradicional e baseado em estratégias de estimação de limites de carregamento apresentam ordens de grandezas similares aos índices obtidos via método analítico, e ainda, aos índices calculados considerando uma formulação linearizada para a rede.

## 5 ESTRATÉGIA DE SELEÇÃO DE ESTADOS VIA MÉTODO DE ENTROPIA CRUZADA MODIFICADO

Para sistemas robustos o tempo necessário para a estimação de índices de confiabilidade via método de simulação de Monte Carlo sequencial pode ser considerável. No entanto, esse tempo de execução pode ser reduzido com a aplicação do método de entropia cruzada. Neste capítulo, descreve-se com detalhe essa aplicação e propõe-se uma modificação afim de minimizar ainda mais o tempo de obtenção dos índices de confiabilidade, mantendo seus valores esperados e coeficiente de convergência.

Este capítulo está organizado da seguinte forma. Na Seção 5.1 são expostas as considerações iniciais. Na Seção 5.2, é descrita a avaliação de estados de um sistema elétrico de potência considerando a otimização de parâmetros estocásticos do sistema via método de entropia cruzada. Uma adaptação do processo de otimização do método de entropia cruzada usando o método de estimação do fator de máximo carregamento, apresentado na Seção 3.4, é exposta na Seção 5.3. Os resultados obtidos com a nova abordagem são mostrados na Seção 5.4. Considerações finais são expostas na Seção 5.5.

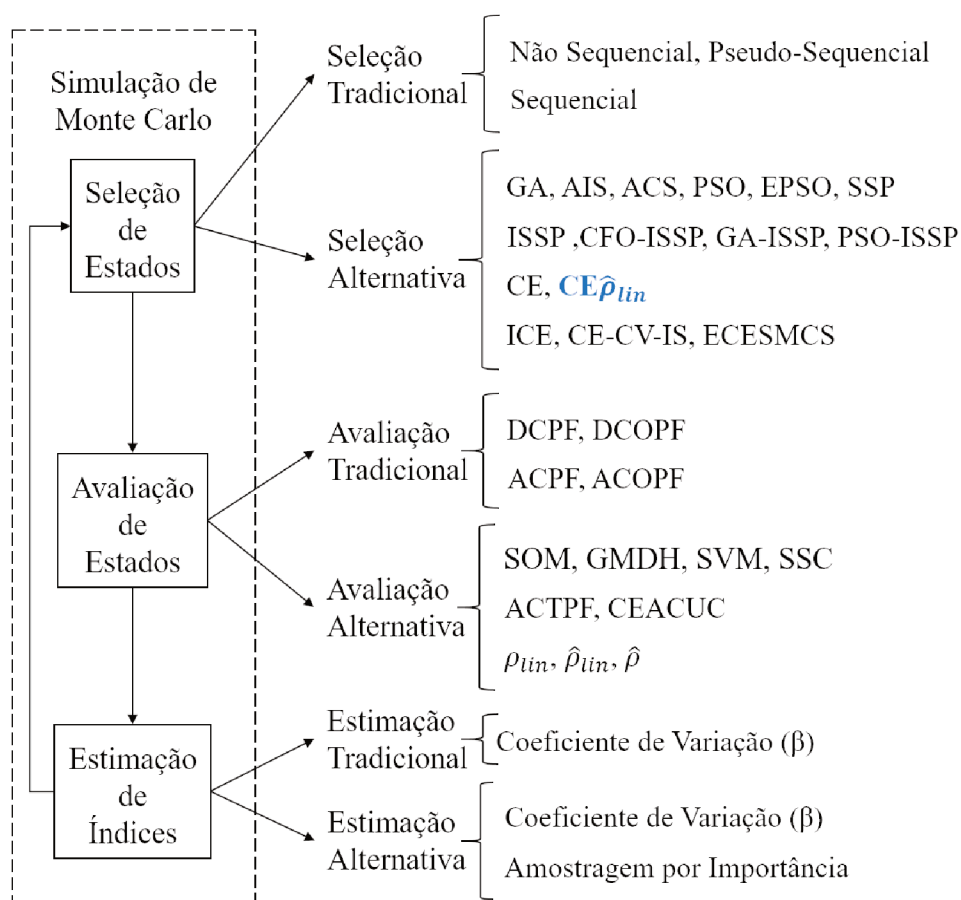
### 5.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

No estado da arte apresentado na Seção 2.4 foram introduzidos métodos passíveis de se aplicar na avaliação de adequação de sistemas compostos. Dentre esses métodos destacou-se o método de simulação de Monte Carlo sequencial, tendo sido esse o método escolhido nesta tese para o desenvolvimento de contribuições ao estado da arte. No Capítulo 3 apresentaram-se duas estratégias de avaliação de estados, denominadas  $MCS_{\rho_{lin}}$  e  $MCS_{\hat{\rho}_{lin}}$ , baseadas na determinação de fatores limite de carregamento para a supressão de avaliações via fluxo de potência no método de simulação de Monte Carlo sequencial. O Capítulo 4 também inclui a formulação de duas estratégias baseadas na determinação de fatores limite de carregamento,  $MCS_{\rho}$  e  $MCS_{\hat{\rho}}$ , para a supressão de avaliações via fluxo de potência e fluxo de potência ótimo no método de simulação de Monte Carlo sequencial, mas considerando modelos não lineares de rede. Neste capítulo apresenta-se uma estratégia cuja contribuição se enquadra no estágio de seleção de estados do método de simulação de Monte Carlo sequencial, conforme identificado na Figura 17, tendo em conta a aplicação de modelo linearizado para a rede.

Como apresentado no estado da arte, o método de entropia cruzada já foi aplicado ao método de simulação de Monte Carlo com o objetivo de acelerar a convergência do método de simulação. A nova estratégia aqui apresentada visa propor uma alteração no método de entropia cruzada, por forma a minimizar o tempo necessário para a otimização dos parâmetros estocásticos.



Figura 17 – Estágios do método de simulação de Monte Carlo destacando contribuições propostas no Capítulo 5.



Fonte: do autor.

## 5.2 MÉTODO DA ENTROPIA CRUZADA APLICADO À CONFIABILIDADE DE SISTEMAS COMPOSTOS

A aplicação de entropia cruzada no método de simulação de Monte Carlo tem por finalidade aumentar a probabilidade de seleção de estados que mais contribuem para a estimativa dos índices de confiabilidade. O viés adicionado pela modificação das probabilidades é corrigido no momento do cálculo do índice. Nesta seção, é apresentado um algoritmo para o método de simulação de Monte Carlo sequencial considerando o método de entropia cruzada para otimizar parâmetros estocásticos baseado nos algoritmos sequencial em NH1 e não sequencial em NH2 apresentados em (GONZÁLEZ-FERNÁNDEZ; SILVA, 2011; GONZÁLEZ-FERNÁNDEZ, 2012).

Em (GONZÁLEZ-FERNÁNDEZ; SILVA, 2011; GONZÁLEZ-FERNÁNDEZ, 2012), destaca-se a possibilidade de se considerar variáveis de Bernoulli para a representação dos estados de unidades geradoras e elementos de transmissão. Considera-se também que a carga do sistema pode ser representada como uma

carga constante em todas as barras, ou por uma variação discreta do patamar de carga em cada barra, podendo ou não existir correlação entre os patamares de carga. No método de simulação de Monte Carlo, considerando o método de entropia cruzada, duas etapas são definidas: uma primeira etapa que corresponde ao processo de otimização dos parâmetros estocásticos da rede onde se estimam indisponibilidades distorcidas ótimas para todos os componentes, e uma segunda fase onde são estimados os índices de confiabilidade tradicionais do sistema a partir de uma correção de viés.

Seja  $\mathbf{x}_i$  o vetor que representa um estado do sistema amostrado e que contém informações acerca dos estados *up/down* das unidades geradoras, elementos de transmissão do sistema e ainda informação acerca dos patamares de carga em cada barra (se o sistema possuir  $n_g$  geradores,  $n_l$  elementos de transmissão e se considerarmos que todas as barras seguem um mesmo perfil de carga, a dimensão de  $\mathbf{x}_i$  será  $(n_g + n_l + 1)$ ). Seja  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N$  uma sequência sintética dos estados do sistema e suponha que se objetiva estimar os índices de confiabilidade do sistema elétrico. Os índices LOLP, ENPS e LOLF podem ser estimados a partir das expressões (21), (22), (23) e (24), apresentadas na Subseção 2.4.2, quando o método de simulação de Monte Carlo sequencial é aplicado para a estimação dos índices. Aquando da utilização de técnicas de redução de variância e aplicando conceitos de amostragem por importância, a estimação de índices de confiabilidade é realizada de acordo com a expressão:

$$\tilde{E}[H(\mathbf{X})] = \frac{\sum_{k=1}^{N_y} \tilde{E}_k[H(\mathbf{X}, \mathbf{W}(\mathbf{X}; \mathbf{u}, \mathbf{v}))]}{\sum_{k=1}^{N_y} \omega_k}, \quad (168)$$

onde  $\omega_k$  é o peso associado ao ano  $k$ , tal que

$$\omega_k = \frac{\sum_{n=1}^{S_k} [(T_{don} + T_{upn}) \mathbf{W}(\mathbf{x}_n; \mathbf{u}, \mathbf{v})]}{T} \quad (169)$$

com  $T_{don}$  e  $T_{upn}$  os tempos de permanência do estado  $\mathbf{x}_n$  em falha e sucesso, respectivamente,  $\mathbf{W}(\mathbf{x}_n; \mathbf{u}, \mathbf{v})$  a razão de verossimilhança associada ao estado  $\mathbf{x}_n$ ,  $T$  a duração do intervalo de tempo sintético (tipicamente o período de simulação é de 8.760 horas),  $N_y$  o número de períodos simulados,  $\mathbf{u}$  o vetor que contém as indisponibilidades originais dos componentes do sistema e  $\mathbf{v}$  o vetor que contém as indisponibilidades modificadas/distorcidas. O termo  $\tilde{E}_k[H(\mathbf{X}, \mathbf{W}(\mathbf{X}; \mathbf{u}, \mathbf{v}))]$  é o índice de confiabilidade do ano  $k$  dado pela equação:

$$\tilde{E}_k[H(\mathbf{X}, \mathbf{W}(\mathbf{X}; \mathbf{u}, \mathbf{v}))] = \frac{\sum_{n=1}^{S_k} H(\{\mathbf{x}_n\}_{n=1}^{S_k}, \{\mathbf{W}(\mathbf{x}_n; \mathbf{u}, \mathbf{v})\}_{n=1}^{S_k})}{\sum_{n=1}^{S_k} [(T_{don} + T_{upn}) \mathbf{W}(\mathbf{x}_n; \mathbf{u}, \mathbf{v})]} \omega_k, \quad (170)$$

com  $\{\mathbf{x}_n\}_{n=1}^{S_k} = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{S_k}\}$  a sequência sintética dos estados do sistema durante o período  $k$ ,  $\{\mathbf{W}(\mathbf{x}_n; \mathbf{u}, \mathbf{v})\}_{n=1}^{S_k}$  a sequência de dimensão  $S_k$  de razões de verossimilhança associados às  $S_k$  variáveis  $\mathbf{x}_n$  e  $S_k$  o número de estados do período  $k$ .

A função  $\mathbf{W}(\mathbf{x}_n; \mathbf{u}, \mathbf{v})$  é denominada de razão de verossimilhança associada ao estado  $\mathbf{x}_n$  e é dada por

$$\mathbf{W}(\mathbf{x}_n; \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{\prod_{j=1}^{(n_g+n_l)} (1 - u_j)^{x_j} (u_j)^{1-x_j}}{\prod_{j=1}^{(n_g+n_l)} (1 - v_j)^{x_j} (v_j)^{1-x_j}}. \quad (171)$$

A função teste  $H$  para o índice LOLP, que é avaliado no final de cada período de simulação  $k$ , é definida por

$$H_{LOLP}(\{\mathbf{x}_n\}_{n=1}^{S_k}, \{\mathbf{W}(\mathbf{x}_n; \mathbf{u}, \mathbf{v})\}_{n=1}^{S_k}) = \sum_{n=1}^{S_k} d(\mathbf{x}_n) H_{LOLP}(\mathbf{x}_n) \mathbf{W}(\mathbf{x}_n; \mathbf{u}, \mathbf{v}), \quad (172)$$

onde  $d(\mathbf{x}_n)$  é a duração do estado  $\mathbf{x}_n$  e  $H_{LOLP}(\mathbf{x}_n)$  é a transformação de (18) tomando  $\mathbf{x}_n$  como argumento.

As próximas funções teste podem ser usadas nos cálculos dos índices EPNS e LOLF:

$$H_{EPNS}(\{\mathbf{x}_n\}_{n=1}^{S_k}, \{\mathbf{W}(\mathbf{x}_n; \mathbf{u}, \mathbf{v})\}_{n=1}^{S_k}) = \sum_{n=1}^{S_k} d(\mathbf{x}_n) H_{EPNS}(\mathbf{x}_n) \mathbf{W}(\mathbf{x}_n; \mathbf{u}, \mathbf{v}) \quad (173)$$

$$H_{LOLF}(\{\mathbf{x}_n\}_{n=1}^{S_k}, \{\mathbf{W}(\mathbf{x}_n; \mathbf{u}, \mathbf{v})\}_{n=1}^{S_k}) = \sum_{n=1}^{S_k} d(\mathbf{x}_n) H_{LOLF}(\mathbf{x}_n) \mathbf{W}(\mathbf{x}_n; \mathbf{u}, \mathbf{v}), \quad (174)$$

onde  $H_{EPNS}(\mathbf{x}_n)$  e  $H_{LOLF}(\mathbf{x}_n)$  são as transformações de (19) e (20) tomando  $\mathbf{x}_n$  como argumento, respectivamente.

A avaliação dos estados durante a execução do método de entropia cruzada busca seriar os estados em função da capacidade de geração do sistema, partindo da premissa que as cargas nas barras são afetadas por um fator de carga unitário. O processo de avaliação de um estado requer a verificação de ocorrência de corte de carga, tendo em conta a existência de limites operativos. Em caso do estado ser assinalado como de sucesso, a capacidade de geração total disponível é utilizada como valor de desempenho do estado. Caso contrário, o valor de desempenho do estado é dado pelo pico da carga subtraído do valor do corte de carga calculado.

Como já foi referido anteriormente, a aplicação do método de entropia cruzada no método de simulação de Monte Carlo sequencial ocorre em dois passos distintos. O primeiro passo, que consiste na estimação das novas indisponibilidades para os componentes, visando acelerar a seleção de estados de falha sistêmicos, é efetuado antes do início do laço principal do método de simulação de Monte Carlo. Essas indisponibilidades são utilizadas para calcular taxas de falha modificadas utilizando a expressão:

$$\lambda^* = \frac{v\mu}{1-v} \quad (175)$$

onde  $\lambda^*$  e  $v$  são as taxa de falha e indisponibilidade modificadas, respectivamente.

O algoritmo aplicado durante a execução do primeiro passo está apresentado no Algoritmo 9.

---

**Algoritmo 9** Método de entropia cruzada para otimização de parâmetros estocásticos

---

Sejam  $N_{CE}$  o número de amostras,  $\varrho$  o parâmetro de raridade,  $\alpha$  o parâmetro de suavização e  $\gamma$  o parâmetro de nível.

- 1: Definir  $\mathbf{v}_0 := \mathbf{u}$ , onde  $\mathbf{u}$  é o vetor de indisponibilidades originais dos componentes do sistema; Definir a distorção para a carga pico do sistema considerando fator de carga unitário para todas as barras, i.e.,  $\gamma = L_{MAX}$ , onde  $L_{MAX}$  é o somatório de todas as cargas pico de todas as barras. Definir  $k := 1$  (contador de iterações do processo de otimização do método CE);
- 2: Gerar  $N_{CE}$  amostras  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_{N_{CE}}$  (de estados de geração e transmissão) de acordo com  $f(\cdot; \mathbf{n}, \mathbf{v}_{k-1})$ ;
- 3: Avaliar a função desempenho  $S(\mathbf{x}_i)$  para todo o  $\mathbf{x}_i, i = 1, \dots, N_{CE}$ :
  - i: Executar fluxo de potência linearizado com o estado sorteado (formulação apresentada na Seção 3.2);
  - ii: Avaliar se os limites operativos de geração e transmissão são respeitados. Se sim, seguir para o Passo iv. Caso contrário, seguir para o Passo v;
  - iii: Executar fluxo de potência ótimo linearizado e calcular o valor de corte de carga do sistema (formulação apresentada na Seção 3.3). Caso o corte de carga seja nulo, seguir para o Passo iv. Caso contrário, seguir para o Passo v.
  - iv: Definir  $S(\mathbf{x}_i)$  como a capacidade de suprimento do sistema, como segue:

$$S(\mathbf{x}_i) = [C_{i1} \dots C_{in_g}]^t \mathbf{x}_i \quad (176)$$

onde  $C_{ij}, j = 1, \dots, n_g$  representa a capacidade de geração do gerador  $j$  na amostra  $i$ .

- v: Definir  $S(\mathbf{x}_i)$  como a potência suprida ao sistema, como segue:

$$S(\mathbf{x}_i) = \text{Pico de carga} - \text{Corte de Carga}. \quad (177)$$

- 4: Ordenar os resultados em ordem crescente tal que

$$\mathbf{S} = [S_{[1]}, \dots, S_{[N_{CE}]}] \quad (178)$$

e  $S_{[1]} \leq S_{[2]} \leq \dots \leq S_{[N_{CE}]}$ ;

- 5: Se  $S_{[\rho N_{CE}]} \leq \gamma$ , então  $\gamma_k := \gamma$ ; caso contrário,  $\gamma_k := S_{[\rho N_{CE}]}$ ; Avaliar a função teste  $H(\mathbf{x}_i)$  para todo o  $\mathbf{x}_i$  tal que  $H(\mathbf{x}_i) = 1$ , se  $S(\mathbf{x}_i) < \gamma$ , e  $H(\mathbf{x}_i) = 0$  caso contrário; Calcular a razão de verossimilhança  $\mathbf{W}(\mathbf{x}_i; \mathbf{u}, \mathbf{v}_{k-1})$  para todo o  $\mathbf{x}_i$  de acordo com a equação (171);

- 6: Usar a mesma amostra  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{N_{CE}}$  para avaliar cada elemento  $j = 1, 2, \dots, (n_g + n_l)$  dos novos vetores de parâmetros de referência  $\mathbf{v}_{k,j}$  utilizando

$$\mathbf{v}_{k,j} = 1 - \left[ \frac{\sum_{i=1}^{N_{CE}} H(\mathbf{X}_i) \mathbf{W}(\mathbf{X}_i; \mathbf{u}, \mathbf{v}_{k-1}) X_{ij}}{\sum_{i=1}^{N_{CE}} H(\mathbf{X}_i) \mathbf{W}(\mathbf{X}_i; \mathbf{u}, \mathbf{v}_{k-1})} \right] \quad (179)$$

e corrigir esses vetores usando a expressão

$$v_{k,j} = \hat{v}_{k,j} \alpha + v_{k-1,j} (1 - \alpha) \quad (180)$$

onde  $\hat{v}_{k,j}$  é o valor resultante da expressão (179) na iteração  $k$ ,  $v_{k-1,j}$  é o valor resultante da expressão (180) na iteração  $k - 1$  e  $\alpha$  é o parâmetro de suavização.

- 7: Se  $\gamma_k = \gamma$ , então marca-se o fim do processo de otimização; caso contrario, atualizar o contador de iterações  $k := k + 1$  e voltar ao Passo 2;

Após a estimação das taxas de falha otimizadas, e assumindo, à semelhança do que foi apresentado na Seção 2.3, que a duração de permanência nos estados é exponencialmente distribuída, os tempos de permanência nos estados *up* e *down* são dados pelas equações (181) e (182):

$$T^{up} = -\frac{1}{\lambda^*} \ln U_1 \quad (181)$$

e

$$T^{down} = -\frac{1}{\mu} \ln U_2, \quad (182)$$

onde  $U_1$  e  $U_2$  são números aleatórios escolhidos segundo uma distribuição uniforme no intervalo  $[0, 1]$ . Note-se que o método de entropia cruzada apenas afeta os valores de taxa de falha e nada provoca nas taxas de reparo dos componentes. Assim, na prática, os tempos sorteados usando (182) serão sorteados seguindo a mesma função de densidade de probabilidade dos dados originais.

O segundo passo é executado durante o método de simulação de Monte Carlo, aquando do cálculo da estimativa dos pesos que corrigem o viés introduzido pelas taxas modificadas, pesos estes aplicados durante a estimação do índice. No Algoritmo 10 é apresentada a sequência completa de passos para a execução do método de simulação de Monte Carlo sequencial com entropia cruzada.

#### **Algoritmo 10** Método de simulação de Monte Carlo sequencial com entropia cruzada

Seja  $N_y^{max}$  o número máximo de anos a simular,  $h = 0$  o instante de tempo do relógio fictício,  $N_y = 1$  e  $T = 8.760$  h. Sejam ainda  $N_{CE}$  o número de amostras,  $\varrho$  o parâmetro de raridade,  $\alpha$  o parâmetro de suavização e  $\gamma$  o parâmetro de nível igual ao pico da carga do sistema.

- 1: Inicializar estados de componentes e carga;

- 2: Aplicar do método de entropia cruzada para otimização das taxas de falha dos componentes de acordo com o Algoritmo 9;
  - 3: Amostrar tempo de permanência dos componentes nesses estados de acordo com (181) e (182);
  - 4: Identificar o instante da próxima transição de estado e efetuar a transição do componente ou patamar de carga correspondente; atualizar  $h$  com o instante de transição;
  - 5: Avaliar o estado do sistema:
    - Executar pré-avaliação de estado usando um fluxo de potência linearizado;
    - Caso a pré-avaliação não caracterize o estado como de sucesso, avaliá-lo por meio de um fluxo de potência ótimo linearizado;
  - 6: Estimar a razão de verossimilhança para o estado em avaliação de acordo com a equação (171);
  - 7: Atualizar os valores das funções teste;
  - 8: Se  $h = 8.760$  h, atualizar os índices de confiabilidade anuais de acordo com (170); senão voltar ao Passo 3;
  - 9: Atualizar os coeficientes de variação  $\beta$  de acordo com a equação (9);
  - 10: Se  $N_y = N_y^{max}$  ou se os coeficientes de variação são inferiores a uma tolerância especificada, parar a simulação e atualizar os índices de confiabilidade de acordo com (168); senão  $N_y = N_y + 1$ ,  $h = 0$  e voltar ao Passo 3;
- 

O método de entropia cruzada apresentado no Algoritmo 9 para a otimização de parâmetros estocásticos é considerado, neste capítulo, o método “tradicional”. Na próxima seção é apresentada uma variante para o método de entropia cruzada, denominada método de entropia cruzada modificado, e que corresponde à abordagem proposta para a aplicação de estimação de fator de máximo carregamento na otimização de parâmetros estocásticos.

### 5.3 ESTIMAÇÃO DE FATOR DE MÁXIMO CARREGAMENTO NO MÉTODO DE ENTROPIA CRUZADA

Na avaliação da função de desempenho dos estados no algoritmo do método de entropia cruzada (Passo 3 do Algoritmo 9) observa-se que, quando o estado é de sucesso, o seu valor de desempenho é igual à capacidade de geração do sistema, e quando o estado é de falha, a sua função de desempenho assume o valor do pico da carga diminuído do valor do corte de carga do sistema. Essa função de desempenho foi utilizada com sucesso em (GONZÁLEZ-FERNÁNDEZ, 2012).

Destaca-se entretanto que, a função de desempenho deve permitir a classificação dos estados frente a eventos de corte de carga, possibilitando, sempre que

possível, a ordenação da performance de acordo com a proximidade para com a fronteira do espaço que separa os estados de sucesso dos estados de falha. Entretanto, a separação de definição de desempenho empregada nos Passos 3.iv e 3.v do Algoritmo 9, promove uma descontinuidade do conceito, prejudicando, pelo menos sob o ponto de vista conceitual, a ordenação da performance.

Como exemplo, suponha um sistema composto por dois geradores conectados a uma carga a partir de duas linhas de transmissão em paralelo. As capacidades individuais dos geradores e linhas de transmissão são de 100 MW, enquanto a carga varia de 80 a 100 MW durante o ano. Assuma agora que todos os componentes estão disponíveis. Neste caso, quando a carga assumir valor de 100 MW, o desempenho do estado é dado pela capacidade total de geração do sistema de 200 MW. Em caso de falha de uma linha de transmissão, o desempenho do novo estado é idêntico, mesmo que esse estado seja claramente um estado de maior risco ao corte de carga do que o primeiro.

Tal exemplificação motivou, nesta tese, a aplicação da análise de fator de máximo carregamento para a avaliação de desempenho de estados no método de entropia cruzada. Essa forma de aplicação tem a vantagem de permitir a avaliação do estado sem a necessidade de vincular um valor de carga, como o pico da carga, à função de desempenho. No exemplo descrito acima, caso todos os componentes estejam disponíveis, o máximo carregamento do sistema está associado ao atendimento de 200 MW de potência pelo conjunto gerador. Em caso de falha de uma linha de transmissão ou de uma unidade geradora, o máximo carregamento do sistema está associado ao atendimento de uma carga de 100 MW.

Note-se que, nos procedimentos expostos no Passo 3, a identificação de existência e cálculo de corte de carga exige que limites operativos sejam atendidos, e quando o estado é de falha, um problema de fluxo de potência ótimo precisa ser resolvido para a determinação do valor do corte de carga, o que requer um tempo de execução não desprezível. Uma forma de diminuir os tempos de avaliação foi mostrada no Passo 3 do Algoritmo 9, através de uma pré-avaliação de estado via fluxo de potência. No entanto, haverá sempre casos em que a resolução de um fluxo de potência ótimo é necessária. Atendendo a este fato, o método de entropia cruzada modificado busca prover uma ordenação de estados resultante da avaliação de função de desempenho, mas usando um método que, por um lado, não depende de métodos iterativos para a determinação do valor de demanda que o estado do sistema pode suprir, e por outro, que considere os limites de transmissão no cálculo da função de desempenho.

A inclusão da determinação do fator de máximo carregamento com perfil de despacho restrito no método de entropia cruzada incorre em pequenas alterações no algoritmo do método. De fato, a alteração impacta apenas no Passo 3 do Algoritmo 9, mais especificamente, no cálculo do valor da função de desempenho. A ideia base é,

ao invés de avaliar o sistema via fluxo de potência ou fluxo de potência ótimo e depois calcular o valor da função de desempenho de acordo com (176) ou (177), estimar o fator de máximo carregamento do estado em avaliação e definir o seu desempenho como igual ao valor do fator estimado, conforme (57). A modificação proposta é destacada no Algoritmo 11.

---

**Algoritmo 11** Método de entropia cruzada modificado para otimização de parâmetros estocásticos

---

Sejam  $N_{CE}$  o número de amostras,  $\rho$  o parâmetro de raridade,  $\alpha$  o parâmetro de suavização e  $\gamma$  o parâmetro de nível.

- 1: Definir  $\mathbf{v}_0 := \mathbf{u}$ , onde  $\mathbf{u}$  é o vetor de indisponibilidades originais dos componentes do sistema; Definir a distorção para a carga pico do sistema considerando fator de carga unitário para todas as barras, i.e.,  $\gamma = L_{MAX}$ , onde  $L_{MAX}$  é o somatório de todas as cargas pico de todas as barras. Definir  $k := 1$  (contador de iterações do processo de otimização do método CE);
- 2: Gerar  $N_{CE}$  amostras  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_{N_{CE}}$  (de estados de geração e transmissão) de acordo com  $f(\cdot; \mathbf{n}, \mathbf{v}_{k-1})$ ;
- 3: Avaliar a função desempenho  $S(\mathbf{x}_i)$  para todo o  $\mathbf{x}_i, i = 1, \dots, N_{CE}$ :
  - i: Estimar o fator de máximo carregamento com perfil de despacho restrito  $\hat{\rho}_{lin}$  para o estado  $\mathbf{x}_i$  (formulação Seção 3.4.2);
  - ii: Definir  $S(\mathbf{x}_i) = \hat{\rho}_{lin}$ ;
- 4: Ordenar os resultados em ordem crescente tal que

$$\mathbf{S} = [S_{[1]}, \dots, S_{[N_{CE}]}] \quad (183)$$

e  $S_{[1]} \leq S_{[2]} \leq \dots \leq S_{[N_{CE}]}$ ;

- 5: Se  $S_{[\rho N_{CE}]} \leq \gamma$ , então  $\gamma_k := \gamma$ ; caso contrário,  $\gamma_k := S_{[\rho N_{CE}]}$ ; Avaliar a função teste  $H(\mathbf{x}_i)$  para todo o  $\mathbf{x}_i$  tal que  $H(\mathbf{x}_i) = 1$ , se  $S(\mathbf{x}_i) < \gamma$ , e  $H(\mathbf{x}_i) = 0$  caso contrário; Calcular a razão de verossimilhança  $\mathbf{W}(\mathbf{x}_i; \mathbf{u}, \mathbf{v}_{k-1})$  para todo o  $\mathbf{x}_i$  de acordo com a equação (171);
- 6: Usar a mesma amostra  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{N_{CE}}$  para avaliar cada elemento  $j = 1, 2, \dots, (n_g + n_l)$  dos novos vetores de parâmetros de referência  $\mathbf{v}_{k,j}$  utilizando

$$\mathbf{v}_{k,j} = 1 - \left[ \frac{\sum_{i=1}^{N_{CE}} H(\mathbf{X}_i) \mathbf{W}(\mathbf{X}_i; \mathbf{u}, \mathbf{v}_{k-1}) X_{ij}}{\sum_{i=1}^{N_{CE}} H(\mathbf{X}_i) \mathbf{W}(\mathbf{X}_i; \mathbf{u}, \mathbf{v}_{k-1})} \right] \quad (184)$$

e corrigir esses vetores usando a expressão

$$v_{k,j} = \hat{v}_{k,j} \alpha + v_{k-1,j} (1 - \alpha) \quad (185)$$



onde  $\hat{v}_{k,j}$  é o valor resultante da expressão (184) na iteração  $k$ ,  $v_{k-1,j}$  é o valor resultante da expressão 185 na iteração  $k - 1$  e  $\alpha$  é o parâmetro de suavização.

- 7: Se  $\gamma_k = \gamma$ , então marca-se o fim do processo de otimização; caso contrario, atualizar o contador de iterações  $k := k + 1$  e voltar ao Passo 2;

A definição da função de desempenho como foi apresentada no Passo 3 do Algoritmo 11 impacta essencialmente no tempo de execução do método de entropia cruzada, mantendo inalterados todos os outros passos do algoritmo. De fato, note-se que esta nova definição mantém inclusive a essência da serialização dos estados no método de entropia cruzada. Por um lado, no método tradicional, os estados são ordenados por ordem crescente da sua capacidade de geração ou capacidade de suprimento face ao pico de carga, em caso de corte de carga. Por outro lado, no método de entropia cruzada modificado os estados são ordenado por ordem crescente do seu fator de máximo carregamento. Note-se que, em casos cujas falhas e limites de transmissão são negligenciados, as duas abordagens são equivalentes. O impacto da utilização da variante proposta para o método de entropia cruzada é exposto na próxima seção.

#### 5.4 SIMULAÇÕES E RESULTADOS NUMÉRICOS

Nesta seção são apresentados os resultados de simulação obtidos com os métodos de simulação de Monte Carlo sequencial considerando a otimização de parâmetros estocásticos via métodos de entropia cruzada (CE) e de entropia cruzada modificado ( $CE_{\hat{\rho}_{lin}}$ ). Os resultados apresentados são para dois casos de estudo definidos a partir do caso base do sistema teste IEEE-RTS79. No caso de estudo 1, considera-se os dados originais já descritos na Seção 3.6. No segundo caso de estudo, estipula-se que a carga do sistema é reduzida em 25%, onde o pico da carga assume o valor de 2.137,5 MW. Essa condição no segundo caso de estudo conduz a um aumento da raridade dos eventos de falha, o que permite uma melhor comparação entre as metodologias implementadas. Assim, são apresentados resultados para os 3 modelos combinados a seguir:

**$MCS_{\hat{\rho}_{lin}}$** : Simulação de Monte Carlo sequencial suprimindo avaliações via fluxo de potência a partir da estimação de fator de máximo carregamento;

**$CEMCS_{\hat{\rho}_{lin}}$** : Simulação de Monte Carlo sequencial suprimindo avaliações via fluxo de potência a partir da estimação de fator de máximo carregamento, com otimização de parâmetros estocásticos usando CE tradicional;

**$CE_{\hat{\rho}_{lin}}MCS_{\hat{\rho}_{lin}}$** : Simulação de Monte Carlo sequencial suprimindo avaliações via fluxo

de potência a partir da estimação de fator de máximo carregamento, com otimização de parâmetros estocásticos usando CE modificado;

Para o método de simulação de Monte Carlo e para os métodos de entropia cruzada, os parâmetros escolhidos para as simulações realizadas foram:

- parâmetros do método de simulação de Monte Carlo sequencial:
  - número máximo de anos de simulação: 500.000;
  - tolerância de convergência: 5%;
- parâmetros dos métodos de entropia cruzada para otimização de parâmetros estocásticos:
  - dimensão da amostra: 25.000;
  - parâmetro de raridade: 0, 1;
  - parâmetro de suavização: 0, 99;
  - número de amostra de elite: 2.500;
  - número máximo de iterações: 10.

Nas próximas subseções são apresentados os resultados para os dois casos de estudo.

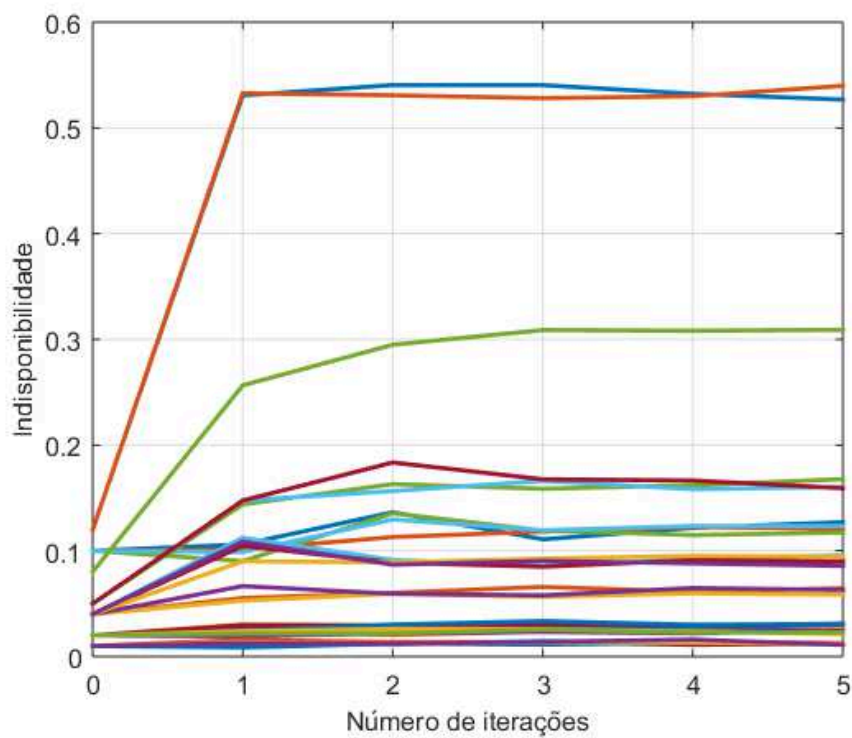
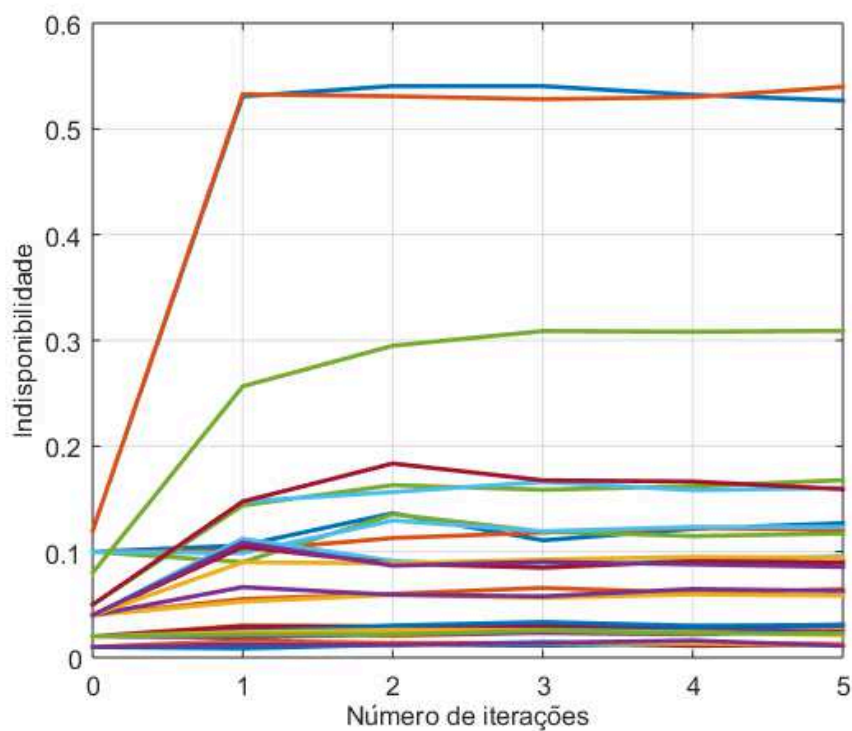
#### 5.4.1 Resultados para o caso base

No primeiro conjunto de resultados desta subseção mostra-se que os parâmetros estocásticos otimizados resultantes da aplicação das duas metodologias de redução de variância alcançam a convergência. Na Figura 18(a) está representada a evolução dos valores estimados para a indisponibilidade dos geradores do caso base, em cada iteração da otimização do método CE tradicional. A Figura 18(b) apresenta uma informação similar, mas para as indisponibilidades dos geradores em cada iteração da otimização do CE modificado. Uma informação análoga pode ser visualizada para os parâmetros estocásticos do sistema de transmissão nas Figuras 19(a) e 19(b).

A análise das Figuras 18 e 19 evidencia que a evolução das indisponibilidades dos geradores e dos elementos de transmissão utilizando a metodologia CE ou  $CE_{\hat{\rho}_{lin}}$  é similar. É possível identificar também que depois de três iterações as indisponibilidades dos elementos do sistema variam pouco, concluindo-se assim que ocorreu uma convergência dos parâmetros. Observa-se também que, para alguns elementos do sistema, a sua indisponibilidade fica muito próxima de zero. Isto é um indicativo de que a diminuição da taxa de falha desses elementos em conjunto com o aumento da taxa de falha de outros elementos conduz a uma maior seleção de estados de falha. Tem-se ainda, para o caso base, que a aplicação da função teste baseada na estimativa

Figura 18 – Evolução da indisponibilidade dos geradores para os métodos CE e CE modificado: caso base.

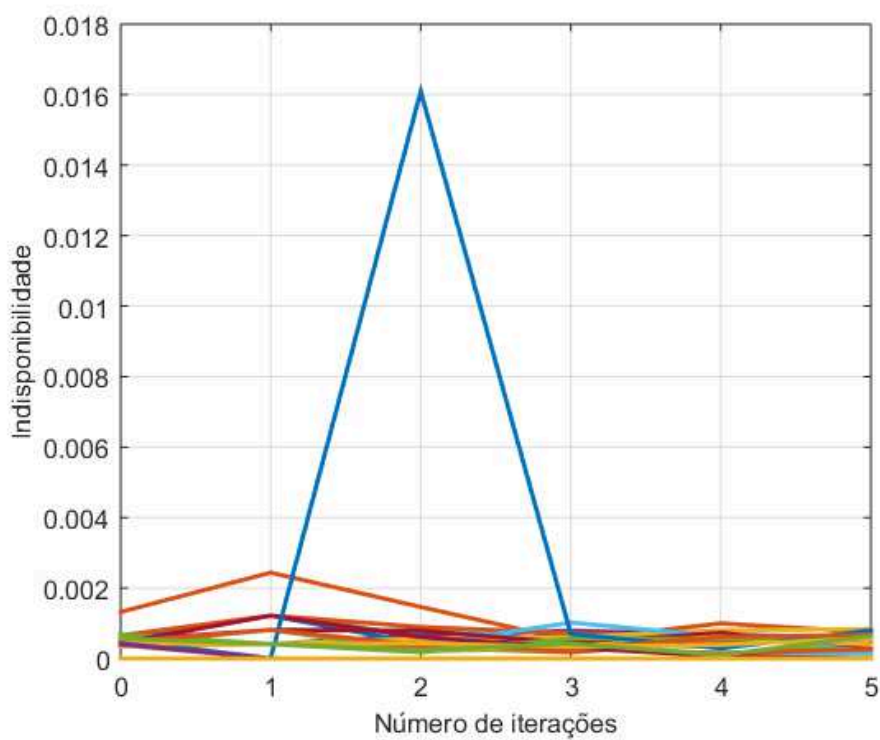
(a) Método CE

(b) Método  $CE_{\hat{\rho}_{lin}}$ 

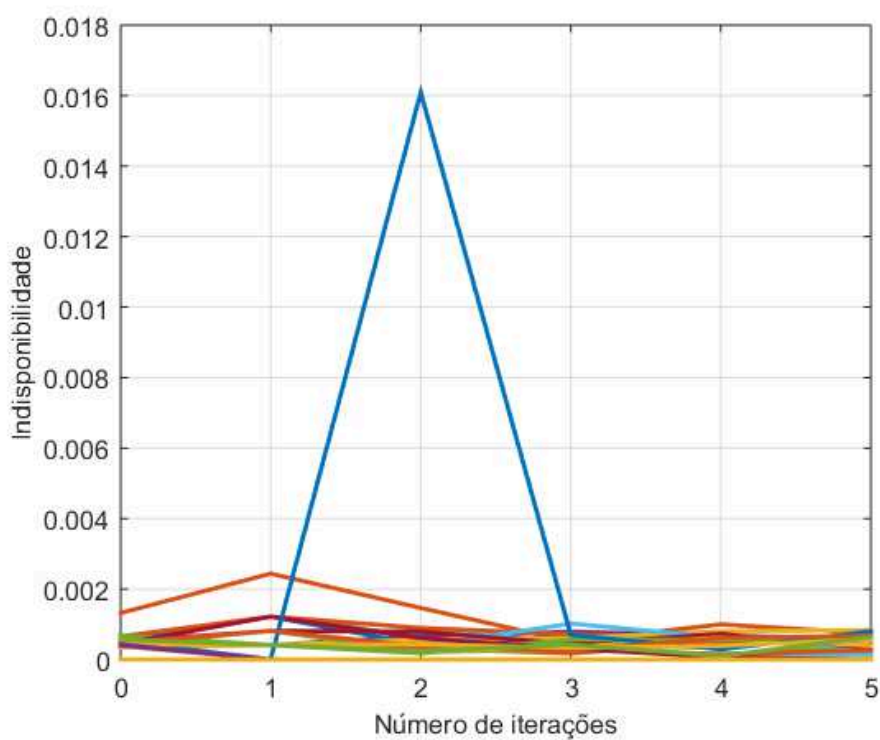
Fonte: do autor.

Figura 19 – Evolução da indisponibilidade dos elementos de transmissão para os métodos CE e CE modificado: caso base.

(a) Método CE



(b) Método  $CE_{\hat{\rho}_{lin}}$



Fonte: do autor.

do fator de máximo carregamento do sistema no método de entropia cruzada modificado conduz a resultados similares aos obtidos com o método de entropia cruzada tradicional.

No segundo conjunto de resultados para o caso base, inclui-se a análise comparativa dos tempos de simulação, tipologia e número de avaliações realizadas para os métodos de simulação de Monte Carlo sequencial considerando a supressão de avaliações de estados via fluxo de potência a partir do conhecimento do fator de máximo carregamento, com otimização ou não dos parâmetros estocásticos para os componentes do sistema. Esses resultados podem ser consultados nas Tabelas 19, 20 e 21.

Tabela 19 – Resultados de análise de adequação em NH2 com  $\beta = 5\%$  para os métodos  $\text{MCS}\hat{\rho}_{lin}$ ,  $\text{CEMCS}\hat{\rho}_{lin}$  e  $\text{CE}\hat{\rho}_{lin}\text{MCS}\hat{\rho}_{lin}$ , considerando o caso base.

Método	$\text{MCS}\hat{\rho}_{lin}$	$\text{CEMCS}\hat{\rho}_{lin}$	$\text{CE}\hat{\rho}_{lin}\text{MCS}\hat{\rho}_{lin}$
Anos	2.267	38	38
Tempo CE [s]	-	194, 91	12, 54
Tempo MCS [s]	1.996, 8	446, 67	443, 15
Tempo Total [s]	1.996, 8	641, 58	455.70
LOLP [ $\times 10^{-3}$ ]	1, 1880	1, 2892	1, 2892
EPNS [MW]	0, 1436	0, 1497	0, 1497
LOLF [occ./ano]	2, 2268	2, 4345	2, 4345

Fonte: do autor.

Tabela 20 – Intervalos de confiança para os índices de confiabilidade dos métodos  $\text{MCS}\hat{\rho}_{lin}$ ,  $\text{CEMCS}\hat{\rho}_{lin}$  e  $\text{CE}\hat{\rho}_{lin}\text{MCS}\hat{\rho}_{lin}$ , considerando o caso base, com um nível de confiança de 95%.

Método	LOLP [ $\times 10^{-3}$ ]	EPNS [MW]	LOLF [(occ./ano)]
$\text{MCS}\hat{\rho}_{lin}$	[1, 1077; 1, 2683]	[0, 1295; 0, 1576]	[2, 1048; 2, 3489]
$\text{CEMCS}\hat{\rho}_{lin}$	[1, 2130; 1, 3654]	[0, 1380; 0, 1614]	[2, 2070; 2, 6620]
$\text{CE}\hat{\rho}_{lin}\text{MCS}\hat{\rho}_{lin}$	[1, 2130; 1, 3654]	[0, 1380; 0, 1614]	[2, 2070; 2, 6620]

Fonte: do autor.

A partir da análise das Tabelas 19 e 20 observa-se que os índices de confiabilidade LOLP, EPNS e LOLF, e correspondentes intervalos de confiança, obtidos com os métodos  $\text{CEMCS}\hat{\rho}_{lin}$  e  $\text{CE}\hat{\rho}_{lin}\text{MCS}\hat{\rho}_{lin}$  são iguais e próximos aos valores dos índices obtidos com o método  $\text{MCS}\hat{\rho}_{lin}$ . Além disso, os índices EPNS e LOLF do método  $\text{MCS}\hat{\rho}_{lin}$  estão contidos nos respectivos intervalos de confiança calculados nos métodos com otimização de parâmetros estocásticos. Embora essa circunstância não se verifique para o índice LOLP, os intervalos de confiança para este índice calculados nos três métodos intersectam-se. Observa-se também que os índices LOLP e LOLF

Tabela 21 – Tipologia de avaliação de estados realizada na avaliação de adequação em NH2 para os métodos  $MCS\hat{\rho}_{lin}$ ,  $CEMCS\hat{\rho}_{lin}$  e  $CE\hat{\rho}_{lin}MCS\hat{\rho}_{lin}$ , considerando o caso base, com  $\beta = 5\%$ .

Método Número	$MCS\hat{\rho}_{lin}$	$CEMCS\hat{\rho}_{lin}$	$CE\hat{\rho}_{lin}MCS\hat{\rho}_{lin}$
Estados visitados	20.961.532	358.715	358.715
Estados avaliados	16.235.897	351.821	351.821
Sucessos via PF	971.276	30.685	30.685
Avaliações via OPF	63.636	36.528	36.528
Estimativas de $\rho$	977.235	34.215	34.215
Avaliações suprimidas	15.200.985	284.608	284.608

Fonte: do autor.

estimados pelos métodos que consideram CE não estão contidos nos respectivos intervalos calculados usando o método  $MCS\hat{\rho}_{lin}$ . Contudo, também aqui os intervalos de confiança para estes índices calculados nos três métodos intersectam-se. A partir da Tabela 19 também se observa que os métodos  $CEMCS\hat{\rho}_{lin}$  e  $CE\hat{\rho}_{lin}MCS\hat{\rho}_{lin}$  precisam apenas de 38 anos para atingir a convergência. Ademais, o tempo de execução do método de entropia cruzada tradicional é de 194,91 s, enquanto que o método de entropia cruzada modificado requer apenas 12,54 s para efetuar a otimização dos parâmetros estocásticos. Isto corresponde a um *speed up* de 15,54 vezes do método  $CE\hat{\rho}_{lin}$  em relação ao método CE. Por outro lado, o tempo de execução do método de simulação de Monte Carlo sequencial apenas em ambos os métodos que consideram entropia cruzada é similar, diferindo apenas em 3,52 s. Quando comparados os tempos totais de execução dos métodos usando entropia cruzada com o método que apenas suprime avaliações, tem-se que o método  $CEMCS\hat{\rho}_{lin}$ , que requer aproximadamente 10,693 min até à convergência, é 3,11 mais rápido que o método  $MCS\hat{\rho}_{lin}$  e 1,41 vezes mais lento que o método  $CE\hat{\rho}_{lin}MCS\hat{\rho}_{lin}$ . Já o método  $CE\hat{\rho}_{lin}MCS\hat{\rho}_{lin}$ , que requer aproximadamente 7,595 min até à convergência, é 4,38 vezes mais rápido que o método  $MCS\hat{\rho}_{lin}$ . Se compararmos o tempo de execução deste método com o método  $MCS\tau_{lin}$  apresentado no Capítulo 3, temos um *speed up* de 26,61 vezes.

A análise da Tabela 21 permite verificar que, para os métodos  $CEMCS\hat{\rho}_{lin}$  e  $CE\hat{\rho}_{lin}MCS\hat{\rho}_{lin}$ , coincidem o número de estados sorteados e avaliados, e também a forma como foram avaliados (via fluxo de potência, fluxo de potência ótimo ou via fator de máximo carregamento), bem como o número de vezes que os fatores limite de carregamento foram estimados e o número de estados que não foram avaliados. Este fato confirma os resultados observados nas Figuras 18 e 19. Naturalmente, estes números são muito inferiores quando comparados com as contabilizações realizadas durante a execução do método  $MCS\hat{\rho}_{lin}$ .

Na próxima subseção uma análise similar é realizada para o caso modificado.

### 5.4.2 Resultados para o caso modificado

O segundo caso de estudo é uma variação do caso base apresentado na subseção anterior, onde se estipula que a carga do sistema (e consequentemente o pico de carga) é reduzida em 25%, tendo-se que o pico da carga assume o valor de 2.137,5 MW. A peculiaridade deste caso de estudo está na diminuição da probabilidade de corte de carga no sistema associado à falha de componentes, e como tal, tornar ainda mais rara a ocorrência de eventos relacionados com o não suprimento de carga. Similarmente ao realizado na subseção anterior, dois conjuntos de resultados são apresentados. No primeiro conjunto de resultados, aborda-se a convergência dos parâmetros estocásticos otimizados. No segundo conjunto de resultados, compara-se os resultados obtidos com os métodos  $MCS\hat{\rho}_{lin}$ ,  $CEMCS\hat{\rho}_{lin}$  e  $CE\hat{\rho}_{lin}MCS\hat{\rho}_{lin}$ .

As Figuras 20 e 21 mostram a evolução dos parâmetros estocásticos para os geradores e elementos de transmissão, respectivamente, durante a execução dos métodos de entropia cruzada e entropia cruzada modificado.

Com a observação dos gráficos das Figuras 20 e 21, identifica-se que há uma convergência para a indisponibilidade dos diferentes componentes do sistema, atendendo à estabilidade dos gráficos na Figura 21, e à variabilidade inferior a  $2,5 \times 10^{-3}$  das indisponibilidades dos elementos de transmissão. Contudo, observa-se que a evolução de um elemento do sistema pode ser diferente quando aplicado o método de entropia cruzada ou o método de entropia cruzada modificada. Também neste caso observa-se que, para alguns elementos do sistema, a sua indisponibilidade fica muito próxima de zero, conduzindo à conclusão similar de que a diminuição da taxa de falha desses elementos em conjunto com o aumento da taxa de falha de outros conduz a uma maior seleção de estados de falha.

Os resultados de análise comparativa de tempos de simulação, tipologia e número de avaliações realizadas para os métodos  $MCS\hat{\rho}_{lin}$ ,  $CEMCS\hat{\rho}_{lin}$  e  $CE\hat{\rho}_{lin}MCS\hat{\rho}_{lin}$ , considerando o caso modificado, são apresentados nas Tabelas 22, 23 e 24.

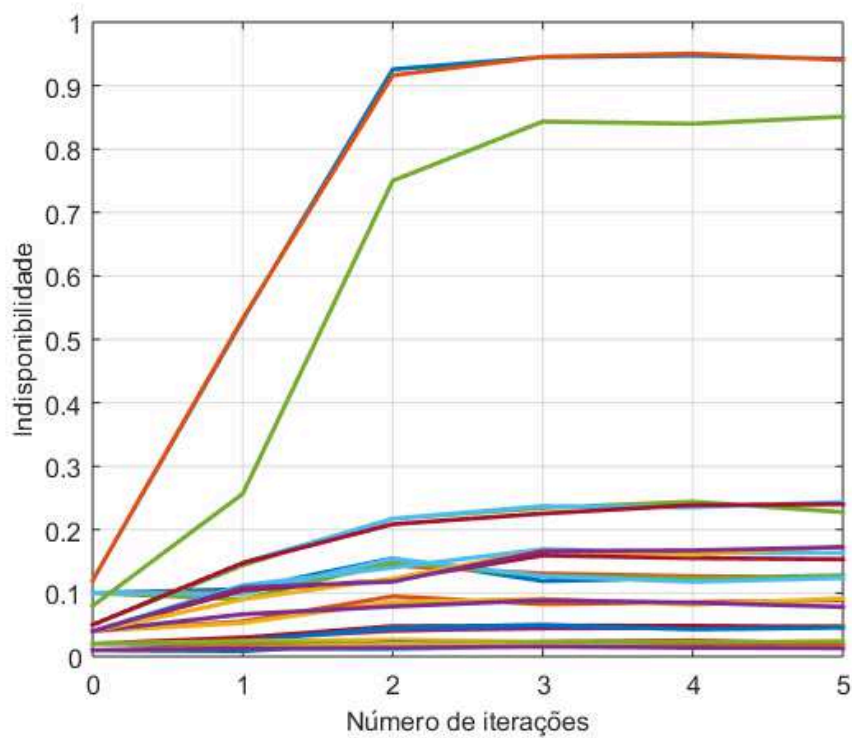
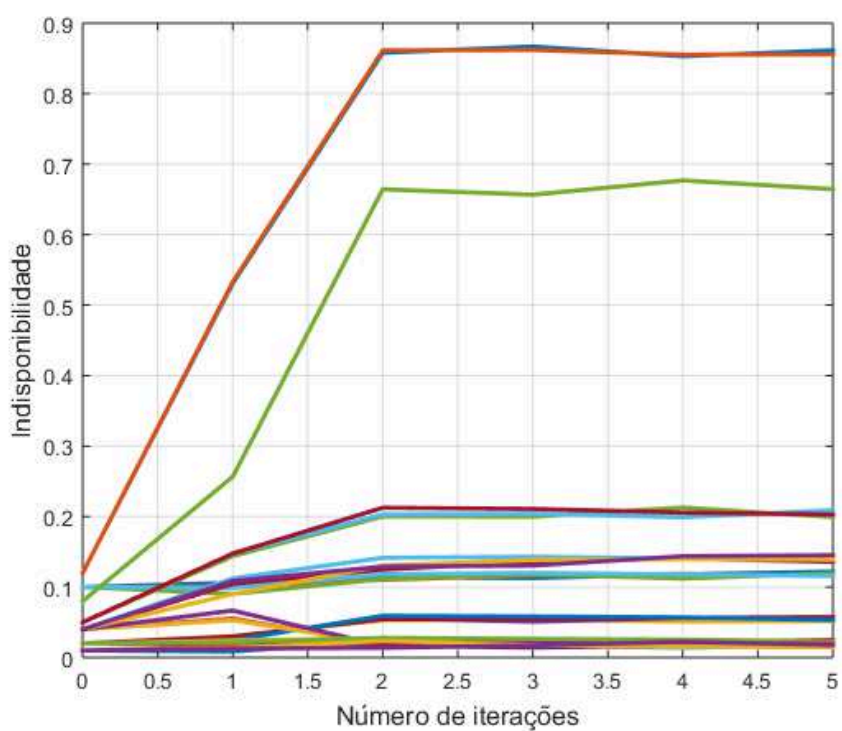
Tabela 22 – Resultados de análise de adequação em NH2 com  $\beta = 5\%$  para os métodos  $MCS\hat{\rho}_{lin}$ ,  $CEMCS\hat{\rho}_{lin}$  e  $CE\hat{\rho}_{lin}MCS\hat{\rho}_{lin}$ , considerando o caso modificado.

Método	$MCS\hat{\rho}_{lin}$	$CEMCS\hat{\rho}_{lin}$	$CE\hat{\rho}_{lin}MCS\hat{\rho}_{lin}$
Anos	378.011	1.292	257
Tempo CE [s]	-	251,01	12,78
Tempo MCS [s]	261.539,5	19.305,13	2.645,90
Tempo Total [s]	261.539,5	19.556,14	2.658,68
LOLP [ $\times 10^{-6}$ ]	3,4223	3,5478	3,5509
EPNS [ $MW \times 10^{-4}$ ]	2,5202	2,6230	2,5847
LOLF [(occ./ano) $\times 10^{-3}$ ]	8,5289	8,7745	8,6123

Fonte: do autor.

Figura 20 – Evolução da indisponibilidade dos geradores para os métodos CE e CE modificado: caso modificado.

(a) Método CE

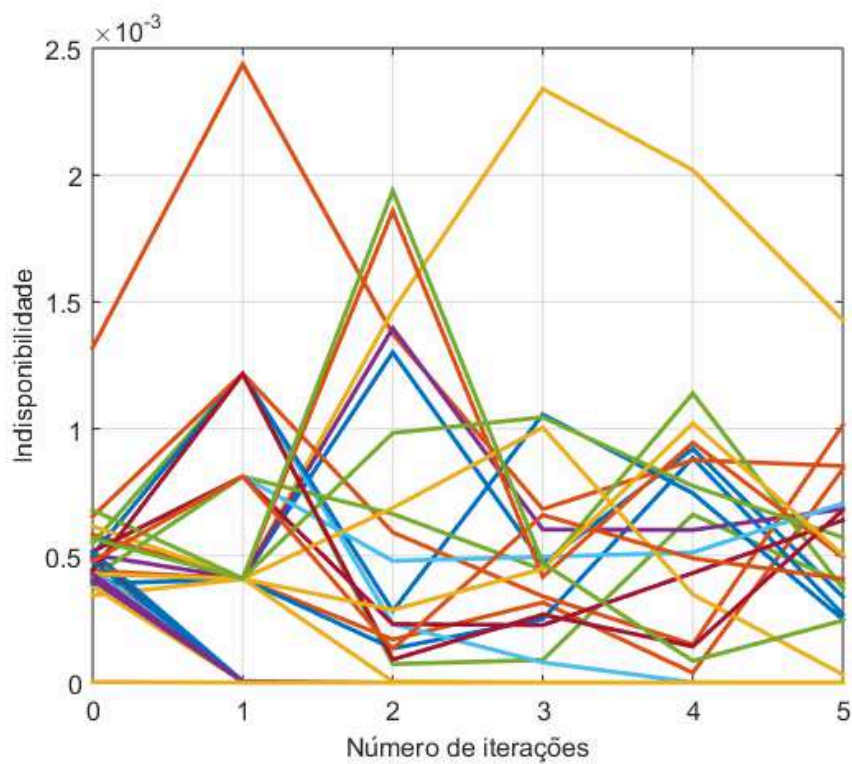
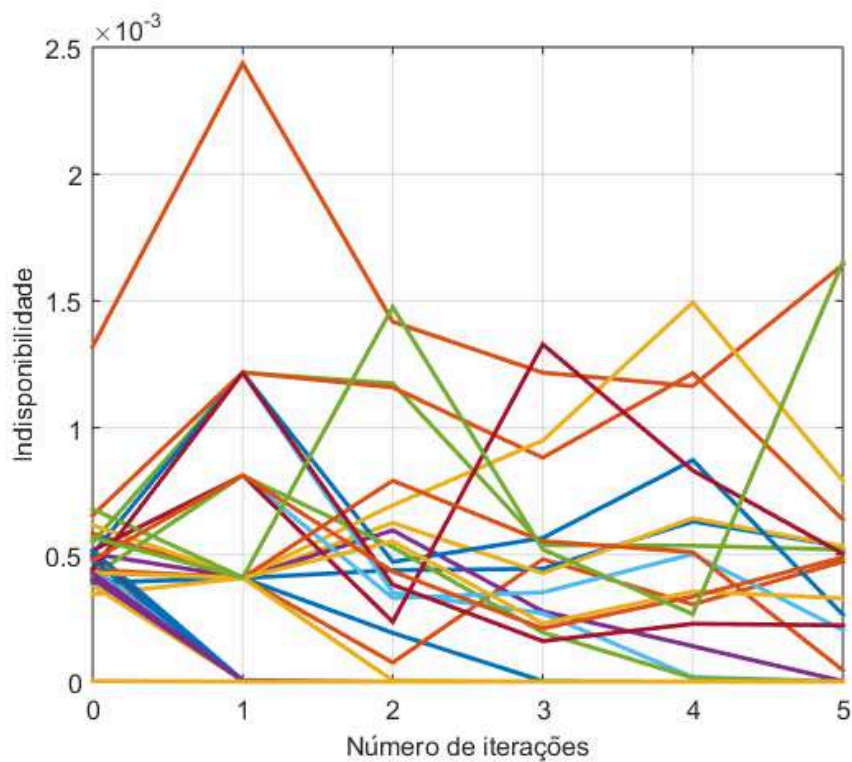
(b) Método  $CE_{\hat{\rho}_{lin}}$ 

Fonte: do autor.



Figura 21 – Evolução da indisponibilidade dos elementos de transmissão para os métodos CE e CE modificado: caso modificado.

(a) Método CE

(b) Método  $CE_{\hat{\rho}_{lin}}$ 

Fonte: do autor.

Tabela 23 – Intervalos de confiança para os índices de confiabilidade dos métodos  $MCS\hat{\rho}_{lin}$ ,  $CEMCS\hat{\rho}_{lin}$  e  $CE\hat{\rho}_{lin}MCS\hat{\rho}_{lin}$ , considerando o caso modificado, com um nível de confiança de 95%.

Método	LOLP [ $\times 10^{-6}$ ]	EPNS [MW $\times 10^{-4}$ ]	LOLF [(occ./ano) $\times 10^{-3}$ ]
$MCS\hat{\rho}_{lin}$	[3, 2043; 3, 6402]	[2, 2733; 2, 7672]	[8, 1139; 8, 9439]
$CEMCS\hat{\rho}_{lin}$	[3, 4986; 3, 5969]	[2, 5841; 2, 6619]	[7, 8988; 9, 6502]
$CE\hat{\rho}_{lin}MCS\hat{\rho}_{lin}$	[3, 3805; 3, 7213]	[2, 4392; 2, 7301]	[7, 7654; 9, 4592]

Fonte: do autor.

Tabela 24 – Tipologia de avaliação de estados realizada na avaliação de adequação em NH2 para os métodos  $MCS\hat{\rho}_{lin}$ ,  $CEMCS\hat{\rho}_{lin}$  e  $CE\hat{\rho}_{lin}MCS\hat{\rho}_{lin}$ , considerando o caso modificado, com  $\beta = 5\%$ .

Método Número	$MCS\hat{\rho}_{lin}$	$CEMCS\hat{\rho}_{lin}$	$CE\hat{\rho}_{lin}MCS\hat{\rho}_{lin}$
Estados visitados	3.496.457.563	13.114.714	2.553.232
Estados avaliados	2.703.508.100	13.114.255	2.551.478
Sucessos via PF	162.245.676	1.587.281	284.291
Avaliações via OPF	226.628	1.716.609	211.982
Estimativas de $\rho$	162.266.673	1.787.838	309.631
Avaliações suprimidas	2.541.035.796	9.810.365	2.055.205

Fonte: do autor.

Na Tabela 22 estão expostos o número de anos necessários até à convergência de cada um dos três métodos em avaliação neste capítulo, bem como os tempos de execução e os índices de confiabilidade obtidos. Como esperado, observa-se que com a diminuição da probabilidade de ocorrência de corte de carga no sistema, o número de anos necessários até à convergência aumenta para os três métodos aplicados. O método  $MCS\hat{\rho}_{lin}$  necessitou de 378.011 anos até à convergência, enquanto que o método  $CEMCS\hat{\rho}_{lin}$  precisou de 1.292 anos, o que representa aproximadamente 0,34% dos anos requeridos pelo método  $MCS\hat{\rho}_{lin}$ . Já o método  $CE\hat{\rho}_{lin}MCS\hat{\rho}_{lin}$  atingiu a convergência desejada em apenas 257 anos, o que representa menos de 0,07% dos anos requeridos pelo método  $MCS\hat{\rho}_{lin}$ , e 19,89% dos anos requeridos pelo método  $CEMCS\hat{\rho}_{lin}$ . Observou-se também que o tempo de execução do método de entropia cruzada modificado foi 19,64 vezes mais rápido a otimizar os parâmetros estocásticos que método CE. Além disso, o tempo de execução do método  $CE\hat{\rho}_{lin}MCS\hat{\rho}_{lin}$ , que foi de 44,31 min, foi muito inferior quando comparado com os outros dois métodos, apresentando um aumento de *speed up* de 7,36 vezes quando comparado com o método  $CEMCS\hat{\rho}_{lin}$ , que demorou aproximadamente 5,43 h até alcançar a convergência, e 98,37 vezes mais rápido que o método  $MCS\hat{\rho}_{lin}$ , que necessitou de aproximadamente 72,65 h para convergir.

A partir da análise das Tabelas 22 e 23, observa-se que os índices de confiabili-

dade LOLP, EPNS e LOLF estimados pelo método  $MCS\hat{\rho}_{lin}$  e pelo método  $CEMCS\hat{\rho}_{lin}$  estão contidos nos intervalos de confiança estimados para os mesmos índices no método  $CE\hat{\rho}_{lin}MCS\hat{\rho}_{lin}$ , e vice-versa. Todavia, apenas o intervalo de confiança para a LOLF do método  $CEMCS\hat{\rho}_{lin}$  contém o índice LOLF estimado pelo método  $MCS\hat{\rho}_{lin}$ , embora todos os índices de confiabilidade estimados pelo método  $CEMCS\hat{\rho}_{lin}$  estejam contidos nos intervalos de confiança definidos pelo método  $MCS\hat{\rho}_{lin}$  para esses índices. De qualquer modo, para cada um dos índices de confiabilidade aqui estimados, os respectivos intervalos de confiança definidos pelos três métodos intersectam-se. É importante salientar que, apesar dos parâmetros serem otimizados de forma distinta pelo métodos CE e  $CE\hat{\rho}_{lin}$ , os índices de confiabilidade estimados apresentam precisões similares.

A Tabela 24 apresenta informações acerca do número de estados avaliados e os tipos de avaliações que foram aplicados para cada método em análise. Naturalmente, um maior número de anos simulados conduz a um maior número de estados avaliados. No entanto, esta tabela provê também informações relacionadas com o impacto da função de desempenho usada no método de entropia cruzada, principalmente quando se busca concluir acerca da metodologia aplicada na estimação dos parâmetros estocásticos ótimos em cada método. Por exemplo, a proporção de estados que foram avaliados dentro do universo de estados sorteados foi aproximadamente 77,321% para o método  $MCS\hat{\rho}_{lin}$ , 99,997% para o método  $CEMCS\hat{\rho}_{lin}$  e 99,931% para o método  $CE\hat{\rho}_{lin}MCS\hat{\rho}_{lin}$ . Estes resultados eram esperados, já que a ideia da aplicação do método de entropia cruzada no método de simulação de Monte Carlo sequencial é aumentar a probabilidade de seleção de estados que mais contribuem para a convergência dos índices de confiabilidade. No entanto, e restringindo as análises agora apenas ao universo dos estados que requereram avaliação, tem-se que no método  $MCS\hat{\rho}_{lin}$ , aproximadamente 6,001% são avaliados via fluxo de potência, 0,008% são avaliados via fluxo de potência ótimo e 93,990% dos estados têm a sua avaliação via fluxo de potência suprimida pela estimação do fator de máximo carregamento dos estados de sucesso. Já no método  $CEMCS\hat{\rho}_{lin}$ , aproximadamente 12,103% são avaliados via fluxo de potência, 13,090% são avaliados via fluxo de potência ótimo e 74,807% dos estados têm a sua avaliação via fluxo de potência suprimida pela estimação do fator de máximo carregamento. Para o método  $CE\hat{\rho}_{lin}MCS\hat{\rho}_{lin}$  as proporções aproximadas são 11,142% de estados avaliados via fluxo de potência, 8,308% de estados avaliados via fluxo de potência ótimo e 80,550% de estados com avaliação via fluxo de potência suprimida pela estimação do fator de máximo carregamento. A primeira conclusão é que a supressão de avaliações de estados via estimação de fatores limite de carregamento é maior quando considerado o método  $MCS\hat{\rho}_{lin}$ , isto é, a otimização dos parâmetros estocásticos diminui o número de estados consecutivos onde apenas ocorre transição de carga, como esperado. Por outro lado, a proporção de estados

cuja a avaliação é suprimida via comparação com fatores limite de carregamento é superior no método  $CE_{\hat{\rho}_{lin}}MCS_{\hat{\rho}_{lin}}$  quando comparada com a proporção de estados cuja a avaliação é suprimida no método  $CEMCS_{\hat{\rho}_{lin}}$ . Este resultado pode estar relacionado com a ordenação de estados considerada no método de entropia cruzada modificado, que se baseia no princípio de estimação do fator de máximo carregamento.

Por último, como conclusão geral desta subseção, pode-se afirmar que o método  $CE_{\hat{\rho}_{lin}}MCS_{\hat{\rho}_{lin}}$  apresenta uma melhor otimização dos parâmetros estocásticos do sistema IEEE-RTS79 e que, além disso, é um método mais bem sucedido na estimação dos índices de confiabilidade, quando a probabilidade de ocorrência de corte de carga do sistema é muito reduzida.

## 5.5 CONCLUSÕES E DISCUSSÕES

A inclusão do método de entropia cruzada no método de simulação de Monte Carlo sequencial com vista a estimar os índices de confiabilidade de um sistema, mas com um número menor de estados sorteados e num tempo de execução menor, mostrou ser uma opção adequada, tal como já havia sido descrito no estado da arte. De acordo com isso, e partindo da estimativa do fator de máximo carregamento para um dado estado do sistema, mostrou-se que é possível estimar os mesmos índices, com similar precisão, mas de forma muito mais rápida, diminuindo significativamente o tempo necessário para estimar os novos parâmetros estocásticos dos elementos do sistema, apenas alterando a função de desempenho do método de entropia cruzada. Ademais, na presença de sistemas mais robustos, onde a probabilidade de corte de carga é muito reduzida, o método de simulação de Monte Carlo sequencial com entropia cruzada modificado apresentou uma performance superior a seus métodos pares para um sistema teste consolidado no estado da arte.

## 6 CONSIDERAÇÕES FINAIS E TRABALHOS FUTUROS

Neste capítulo apresentam-se as conclusões do trabalho e propostas de trabalhos futuros.

### 6.1 CONCLUSÕES

Nesta tese, propõe-se estratégias de análise em regime permanente para a avaliação de confiabilidade composta de sistemas de energia elétrica. Duas questões de pesquisa são enunciadas visando direcionar o escopo deste trabalho. Em resposta a essas questões de pesquisa, conclui-se que é possível o projeto de estratégias de análise com o fim de evitar avaliações de estado via fluxo de potência e fluxo de potência ótimo, reduzindo assim o esforço computacional do método de simulação de Monte Carlo sequencial. Ademais, verifica-se que é possível acrescentar eficiência ao método de simulação de Monte Carlo sequencial combinando estratégias de análise em regime permanente com técnicas consolidadas de redução de variância.

O trabalho abre uma linha de pesquisa focada no desenvolvimento de estratégias de análise de fatores limite de carregamento para a avaliação de estados no estágio de avaliação do método de simulação de Monte Carlo sequencial. A aplicação de estratégias de análise de fatores limite de carregamento é abordada ao longo de todos os capítulos de desenvolvimento. Como contribuições, no Capítulo 3, demonstra-se que a inclusão do cálculo de fatores limite de carregamento, estimados via modelo de otimização, permite identificar e suprimir pré-avaliações e avaliações de estados mantendo a precisão dos índices estimados, quando considerada uma modelagem de rede linearizada. No entanto, o tempo computacional exigido e o número de resoluções do problema de otimização para o cálculo de fatores limite de carregamento não é desprezível. Esse fato estimulou a procura de um método alternativo visando estimar esses limites, permitindo não só suprimir pré-avaliações e avaliações mantendo as precisões dos índices de confiabilidade, como também reduzir de forma significativa o tempo de execução computacional.

Os resultados obtidos considerando um modelo linearizado da rede foram a motivação necessária para buscar alternativas similares passíveis de serem aplicadas quando considerado um modelo não linear para a rede elétrica. Apresentam-se assim, como contribuições, alternativas que permitem suprimir, de forma similar ao caso linearizado, pré-avaliações e avaliações no método de simulação de Monte Carlo sequencial. Conforme apresentado no Capítulo 4, uma primeira alternativa consiste na aplicação da estimação do fatores limite de carregamento via modelo de otimização. A outra alternativa, de forma similar ao efetuado quando considerada a modelagem linearizada da rede, tem em consideração o uso de um modelo preditor-corretor para estimar os fatores limite de carregamento, o que possibilita não só suprimir avaliações

via fluxo de potência, fluxo de potência ótimo e escalonamento de unidades geradoras, mas também reduzir tempo e esforço computacionais.

Ainda motivado pelos resultados obtidos na abordagem de estimação de fatores limite de carregamento considerando um modelo linear de rede, no Capítulo 5, é apresentada, como contribuição, a aplicação da estratégia de estimação de fator de máximo carregamento no método de entropia cruzada. Partindo da estimativa do fator de máximo carregamento para um dado estado do sistema, mostra-se que é possível otimizar os parâmetros estocásticos do sistema de forma mais eficiente. Para a obtenção desses resultados basta alterar a função de desempenho do método de entropia cruzada tendo em conta a estimativa de fator de máximo carregamento de cada estado.

Outro ponto de contribuição é a aplicação de tensores na análise utilizada no estágio de avaliação do método de simulação de Monte Carlo sequencial, a qual foi considerada na resolução do problema de fluxo de potência e no cálculo do passo do problema de determinação de fatores limite de carregamento via modelo preditor-corretor. Ainda considerando um modelo de rede não linear, verifica-se a aplicação do método de entropia cruzada no escalonamento de geradores no âmbito da avaliação de estados no método de simulação de Monte Carlo sequencial. Durante a simulação de Monte Carlo sequencial, por vezes ocorre o sorteio de estados para os quais a aferição de sucesso ou falha, é mais complexa, donde a aplicação do escalonamento de geradores mostrou ser uma mais valia, apesar dos esforços em melhorar a pré-avaliação e avaliação de estados aplicando a teoria de tensores.

## 6.2 PROPOSTAS DE TRABALHOS FUTUROS

Considerando o atual estado da arte e as conclusões obtidas, as propostas de trabalhos futuros no âmbito desta tese de doutorado são as seguintes:

1. Aplicação das metodologias propostas tendo em conta a variabilidade de recursos energéticos, provenientes de energia solar, eólica, hídrica, dentre outros;
2. Verificar ganhos das metodologias desenvolvidas em problemas envolvendo curvas determinísticas de carga e de recursos energéticos com estreita resolução de tempo (exemplo: 30 min., 15 min., etc.);
3. Construir casos de estudo para verificar a influência do escalonamento de geradores na análise de confiabilidade de sistemas teste, considerando modelos linearizados de rede;
4. Incluir nos modelos desenvolvidos a possibilidade de otimização de taps de transformadores e bancos de capacitores/reactores;

5. Desenvolver estratégias baseadas em análise de sensibilidade para a composição de heurísticas na pré-avaliação de estados;
6. Verificar a possibilidade de aperfeiçoar o vetor de correção do modelo preditor-corretor utilizado na estratégia de determinação de fatores limite de carregamento;
7. Verificar a aplicabilidade do método de entropia cruzada modificado tendo em conta o modelo preditor-corretor para a estimação de fator de máximo carregamento, considerando modelo de rede não linear;
8. Aplicação das metodologias propostas a sistemas de grande porte.

## REFERÊNCIAS

ABIRI-JAHROMI, A.; FOTUHI-FIRUZABAD, M.; ABBASI, E. Optimal Scheduling of Spinning Reserve Based on Well-Being Model. **Power Systems, IEEE Transactions on**, v. 22, n. 4, p. 2048–2057, nov. 2007. DOI: 10.1109/TPWRS.2007.907378.

ALMEIDA, Katia Campos de. **A General Parametric Optimal Power Flow**. Nov. 1994. Tese (Doutorado) – McGill University, Montreal, Canada.

BARBOZA, Luciano Vitoria. **Análise e desenvolvimento de metodologias corretivas para a restauração da solução das equações da rede elétrica**. Fev. 2001. Tese (Doutorado) – Universidade Federal de Santa Catarina.

BENIDRIS, M.; ELSAIAH, S.; MITRA, J. Power system reliability evaluation using a state space classification technique and particle swarm optimisation search method. **IET Generation, Transmission Distribution**, v. 9, n. 14, p. 1865–1873, out. 2015. DOI: 10.1049/iet-gtd.2015.0581.

BILLINTON, R.; FOTUHI-FIRUZABAD, M. A basic framework for generating system operating health analysis. **Power Systems, IEEE Transactions on**, v. 9, n. 3, p. 1610–1617, ago. 1994. DOI: 10.1109/59.336097.

BILLINTON, R.; FOTUHI-FIRUZABAD, M.; ABORESHAID, S. Unit commitment health analysis for interconnected systems. **Power Systems, IEEE Transactions on**, v. 12, n. 3, p. 1194–1201, ago. 1997. DOI: 10.1109/59.630461.

BILLINTON, R.; KARKI, R. Application of Monte Carlo simulation to generating system well-being analysis. **Power Systems, IEEE Transactions on**, v. 14, n. 3, p. 1172–1177, ago. 1999. DOI: 10.1109/59.780954.

BILLINTON, R.; SANKARAKRISHNAN, A. A comparison of Monte Carlo simulation techniques for composite power system reliability assessment. *In: WESCANEX 95. Communications, Power, and Computing. Conference Proceedings., IEEE. [S.l.: s.n.], mai. 1995. p. 145–150. DOI: 10.1109/WESCAN.1995.493961.*

BILLINTON, R.; SATISH, J. Predictive assessment of bulk-system-reliability performance indices. **Generation, Transmission and Distribution, IEE Proceedings-**, v. 141, n. 5, p. 466–472, set. 1994. DOI: 10.1049/ip-gtd:19941219.

BILLINTON, Roy; ALLAN, Ronald N. **Reliability Evaluation of Engineering Systems: Concepts and Techniques**. 2nd. New York: Plenum Press, 1992.

BILLINTON, Roy; ALLAN, Ronald N. **Reliability Evaluation of Power Systems**. 2nd. New York: Plenum Press, 1996.



BILLINTON, Roy; LI, Wenyuan. **Reliability Assessment of Electric Power Systems Using Monte Carlo Methods**. New York: Plenum Press, nov. 1994.

BISHOP, Christopher M. **Pattern Recognition and Machine Learning (Information Science and Statistics)**. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2006. ISBN 0387310738.

BORGES, C.L.T.; FALCAO, D.M. *et al.* Composite reliability evaluation by sequential Monte Carlo simulation on parallel and distributed processing environments. **Power Systems, IEEE Transactions on**, v. 16, n. 2, p. 203–209, mai. 2001. DOI: 10.1109/59.918287.

BORGES, Carmen Lucia Tancredo. An overview of reliability models and methods for distribution systems with renewable energy distributed generation. **Renewable and Sustainable Energy Reviews**, v. 16, n. 6, p. 4008–4015, ago. 2012. DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.rser.2012.03.055>.

BORGES, Carmen; DIAS, Julio. A Model to Represent Correlated Time Series in Reliability Evaluation by Non-Sequential Monte Carlo Simulation. **IEEE Transactions on Power Systems**, v. 32, p. 1–1, jan. 2016. DOI: 10.1109/TPWRS.2016.2585619.

BOTEV, Zdravko I. *et al.* Chapter 3 - The Cross-Entropy Method for Optimization. *In*: RAO, C.R.; GOVINDARAJU, Venu (Ed.). **Handbook of Statistics**. [S.l.]: Elsevier, dez. 2013. v. 31. (Handbook of Statistics). p. 35–59. DOI: <https://doi.org/10.1016/B978-0-444-53859-8.00003-5>.

CAIN, M.B.; ONEILL, R.P.; CASTILLO, A. History of optimal power flow and formulations. Federal Energy Regulatory Commission. **Optimal Power Flow Paper**, jan. 2012.

CASTEREN, Jasper van. **Power System Reliability Assessment using the Weibull-Markov Model**. [S.l.], fev. 2001.

DA SILVA, A. M. L. *et al.* Composite reliability evaluation with renewable sources based on quasi-sequential Monte Carlo and cross entropy methods. *In*: 2014 International Conference on Probabilistic Methods Applied to Power Systems (PMAPS). [S.l.: s.n.], jul. 2014. p. 1–6. DOI: 10.1109/PMAPS.2014.6960618.

DOMMEL, H. W.; TINNEY, W. F. Optimal Power Flow Solutions. **IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems**, PAS-87, n. 10, p. 1866–1876, out. 1968. DOI: 10.1109/TPAS.1968.292150.

ERNST, D. *et al.* The cross-entropy method for power system combinatorial optimization problems. *In*: 2007 IEEE Lausanne Power Tech. [S.l.: s.n.], jul. 2007. p. 1290–1295. DOI: 10.1109/PCT.2007.4538502.

- FIACCO, Anthony V.; MCCORMICK, G. P. **Nonlinear Programming: Sequential Unconstrained Minimization Techniques**. New York, NY, USA: John Wiley & Sons, 1968. Reprinted by SIAM Publications in 1990.
- FOTUHI-FIRUZABAD, M.; BILLINTON, R. Unit commitment health analysis in composite generation and transmission systems considering stand-by units. **Generation, Transmission and Distribution, IEE Proceedings-**, v. 146, n. 2, p. 164–168, mar. 1999. DOI: 10.1049/ip-gtd:19990177.
- GOEL, L.; FENG, C. Well-being framework for composite generation and transmission system reliability evaluation. **Generation, Transmission and Distribution, IEE Proceedings-**, v. 146, n. 5, p. 528–534, set. 1999. DOI: 10.1049/ip-gtd:19990412.
- GOEL, L.; GUPTA, R. Extending health considerations in subtransmission systems to include reliability worth. **Generation, Transmission and Distribution, IEE Proceedings-**, v. 147, n. 6, p. 381–386, nov. 2000. DOI: 10.1049/ip-gtd:20000660.
- GONZÁLEZ-FERNÁNDEZ, R. A.; SILVA, A. M. Leite da. Reliability Assessment of Time-Dependent Systems via Sequential Cross-Entropy Monte Carlo Simulation. **IEEE Transactions on Power Systems**, v. 26, n. 4, p. 2381–2389, nov. 2011. DOI: 10.1109/TPWRS.2011.2112785.
- GONZÁLEZ-FERNÁNDEZ, R. A.; SILVA, A. M. Leite da *et al.* Composite Systems Reliability Evaluation Based on Monte Carlo Simulation and Cross-Entropy Methods. **IEEE Transactions on Power Systems**, v. 28, n. 4, p. 4598–4606, nov. 2013. DOI: 10.1109/TPWRS.2013.2267154.
- GONZÁLEZ-FERNÁNDEZ, Reinaldo Andrés. **Aplicações do Método da Entropia Cruzada na confiabilidade de Sistemas Elétricos de Potência**. Out. 2012. Tese (Doutorado) – Universidade Federal de Itajubá.
- GRANVILLE, S.; MELLO, J. C. O.; MELO, A. C. G. Application of interior point methods to power flow unsolvability. **IEEE Transactions on Power Systems**, v. 11, n. 2, p. 1096–1103, mai. 1996. DOI: 10.1109/59.496200.
- GREEN, R. C.; WANG, L.; ALAM, M. Intelligent State Space Pruning with local search for power system reliability evaluation. *In*: 2012 3rd IEEE PES Innovative Smart Grid Technologies Europe (ISGT Europe). [S.l.: s.n.], out. 2012. p. 1–8. DOI: 10.1109/ISGTEurope.2012.6465775.
- HUNEALT, M.; GALIANA, F. D. A survey of the optimal power flow literature. **IEEE Transactions on Power Systems**, v. 6, n. 2, p. 762–770, mai. 1991. DOI: 10.1109/59.76723.

IRISARRI, G. D. *et al.* Maximum loadability of power systems using interior point nonlinear optimization method. **IEEE Transactions on Power Systems**, v. 12, n. 1, p. 162–172, fev. 1997. DOI: 10.1109/59.574936.

IWAMOTO, S.; TAMURA, Y. A Fast Load Flow Method Retaining Nonlinearity. **Power Apparatus and Systems, IEEE Transactions on**, PAS-97, n. 5, p. 1586–1599, set. 1978. DOI: 10.1109/TPAS.1978.354650.

JOSZ, C. *et al.* AC Power Flow Data in MATPOWER and QCQP Format: iTesla, RTE Snapshots, and PEGASE, 2016.

KALYANI, S.; SWARUP, K.S. Classification and Assessment of Power System Security Using Multiclass SVM. **Systems, Man, and Cybernetics, Part C: Applications and Reviews, IEEE Transactions on**, v. 41, n. 5, p. 753–758, set. 2011. DOI: 10.1109/TSMCC.2010.2091630.

KIM, Hyungchul; SINGH, Chanan. Power system probabilistic security assessment using Bayes classifier. **Electric Power Systems Research**, v. 74, n. 1, p. 157–165, abr. 2005. DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.epsr.2004.10.004>.

KROESE, Dirk P.; TAIMRE, Thomas; BOTEV, Zdravko I. **Handbook of Monte Carlo Methods**. New York: A JOHN WILEY & SONS, INC., 2011. (Wiley series in probability and statistics).

LEITE DA SILVA, A.M.; CASSULA, A.M. *et al.* Integrated reliability evaluation of generation, transmission and distribution systems. **Generation, Transmission and Distribution, IEE Proceedings-**, v. 149, n. 1, p. 1–6, jan. 2002. DOI: 10.1049/ip-gtd:20020081.

LEITE DA SILVA, A.M.; FONSECA MANSO, L.A. da *et al.* Pseudo-chronological simulation for composite reliability analysis with time varying loads. **Power Systems, IEEE Transactions on**, v. 15, n. 1, p. 73–80, fev. 2000. DOI: 10.1109/59.852103.

LEITE DA SILVA, A.M.; GONZÁLEZ-FERNÁNDEZ, R.A. *et al.* Reliability assessment of time-dependent systems via quasi-sequential Monte Carlo simulation. *In*: **PROBABILISTIC Methods Applied to Power Systems (PMAPS)**, 2010 IEEE 11th International Conference on. [S.l.: s.n.], jun. 2010. p. 697–702. DOI: 10.1109/PMAPS.2010.5528326.

LEITE DA SILVA, A.M.; MANSO, L. **REAL - Reliability Analysis of Electric Power Systems, Program Manual Version, 1.01**. [S.l.: s.n.], jan. 1997.

LEITE DA SILVA, A.M.; MELO, A.C.G.; CUNHA, S.H.F. Frequency and duration method for reliability evaluation of large-scale hydrothermal generating systems. **Generation, Transmission and Distribution, IEE Proceedings C**, v. 138, n. 1, p. 94–102, jan. 1991. DOI: 10.1049/ip-c.1991.0012.

LEITE DA SILVA, A.M.; RESENDE, L.C. de *et al.* Well-being analysis for composite generation and transmission systems. **Power Systems, IEEE Transactions on**, v. 19, n. 4, p. 1763–1770, nov. 2004. ISSN 0885-8950. DOI: 10.1109/TPWRS.2004.835633.

LEITE DA SILVA, A.M.; SALES, W.S. *et al.* Long-Term Probabilistic Evaluation of Operating Reserve Requirements With Renewable Sources. **Power Systems, IEEE Transactions on**, v. 25, n. 1, p. 106–116, fev. 2010. DOI: 10.1109/TPWRS.2009.2036706.

LUO, X.; SINGH, C.; PATTON, A. D. Power system reliability evaluation using self organizing map. *In: POWER Engineering Society Winter Meeting*, 2000. IEEE. [S.l.: s.n.], 2000. 1103–1108 vol.2. DOI: 10.1109/PESW.2000.850095.

M. CARVALHO, L. d. *et al.* Simplified Cross-Entropy Based Approach for Generating Capacity Reliability Assessment. **IEEE Transactions on Power Systems**, v. 28, n. 2, p. 1609–1616, mai. 2013. DOI: 10.1109/TPWRS.2012.2213618.

MAGALHÃES CARVALHO, Leonel de. **Advances on the Sequential Monte Carlo Reliability Assessment of Generation- Transmission Systems using Cross-Entropy and Population-based Methods**. Mai. 2013. Tese (Doutorado) – Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, Portugal.

MATOS, Manuel *et al.* Probabilistic evaluation of reserve requirements of generating systems with renewable power sources: The Portuguese and Spanish cases. **International Journal of Electrical Power & Energy Systems**, v. 31, n. 9, p. 562–569, out. 2009. Power Systems Computation Conference (PSCC) 2008Power Systems Computation Conference (PSCC) 200816th Power Systems Computation Conference (PSCC), 2008. DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.ijepes.2009.03.031>.

MEHROTRA, Sanjay. On the Implementation of a Primal-Dual Interior Point Method. **SIAM Journal on Optimization**, v. 2, n. 4, p. 575–601, 1992. DOI: 10.1137/0802028.

MELLO, J.C.O.; PEREIRA, M.V.F.; LEITE DA SILVA, A.M. Evaluation of reliability worth in composite systems based on pseudo-sequential Monte Carlo simulation. **Power Systems, IEEE Transactions on**, v. 9, n. 3, p. 1318–1326, ago. 1994. DOI: 10.1109/59.336134.

MELLO, J.C.O.; PEREIRA, M.V.F.; SILVA, A.M. Leite da *et al.* Application of chronological load modeling in composite reliability worth evaluation. **Electric Power Systems Research**, v. 40, n. 3, p. 167–174, mar. 1997. DOI: [http://dx.doi.org/10.1016/S0378-7796\(96\)01150-9](http://dx.doi.org/10.1016/S0378-7796(96)01150-9).

MELO, A.C.G.; PEREIRA, M.V.F.; LEITE DA SILVA, A.M. Frequency and duration calculations in composite generation and transmission reliability evaluation. **Power**

**Systems, IEEE Transactions on**, v. 7, n. 2, p. 469–476, mai. 1992. DOI: 10.1109/59.141748.

MIRANDA, V. *et al.* Improving Power System Reliability Calculation Efficiency With EPSO Variants. **IEEE Transactions on Power Systems**, v. 24, n. 4, p. 1772–1779, nov. 2009. DOI: 10.1109/TPWRS.2009.2030397.

MONTICELLI, Alcir José. **Fluxo de carga em redes de energia elétrica**. São Paulo: Edgard Blücher, Ltda, 1983.

MORAES, Guido Rossetto. **Soluções alternativas das equações estáticas da rede elétrica considerando o controle QV**. 2015. Diss. (Mestrado) – Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis.

PEREIRA, M.V.F.; BALU, N.J. Composite generation/transmission reliability evaluation. **Proceedings of the IEEE**, v. 80, n. 4, p. 470–491, abr. 1992. DOI: 10.1109/5.135372.

PRESS, William H. *et al.* **Numerical Recipes 3rd Edition: The Art of Scientific Computing**. 3. ed. New York, NY, USA: Cambridge University Press, 2007.

QIN, Zhijun; YANG, Yude. Vectorization implementation of optimal power flow in rectangular form based on interior point method. *In*: 2008 IEEE Power and Energy Society General Meeting - Conversion and Delivery of Electrical Energy in the 21st Century. [S.l.: s.n.], jul. 2008. p. 1–8. DOI: 10.1109/PES.2008.4596064.

REI, A.M. *et al.* Static and dynamic aspects in bulk power system reliability evaluations. **Power Systems, IEEE Transactions on**, v. 15, n. 1, p. 189–195, fev. 2000. DOI: 10.1109/59.852120.

RESENDE, L. C. *et al.* Support Vector Machine application in composite reliability assessment. *In*: INTELLIGENT System Application to Power Systems (ISAP), 2015 18th International Conference on. [S.l.: s.n.], set. 2015. p. 1–6. DOI: 10.1109/ISAP.2015.7325580.

RESENDE, Leonidas Chaves de. **Avaliação da confiabilidade preventiva de sistemas elétricos de grande porte utilizando redes neurais**. Out. 2006. Tese (Doutorado) – Instituto de Sistemas Elétricos e Energia da UNIFEI, Itajubá - MB - Brasil.

ROSA, M. A. da *et al.* Modern computing environment for power system reliability assessment. *In*: PROBABILISTIC Methods Applied to Power Systems (PMAPS), 2010 IEEE 11th International Conference on. [S.l.: s.n.], jun. 2010. p. 664–671. DOI: 10.1109/PMAPS.2010.5528321.

ROSA, Mauro Augusto da. **Agent-based Technology Applied to Power Systems Reliability**. 2010. Tese (Doutorado) – Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, Portugal.

ROSS, Sheldon M. **Introduction to Probability Models**. 10th. San Diego, CA, USA: Academic Press, 2010.

RUBINSTEIN, Reuven Y. Optimization of computer simulation models with rare events. **European Journal of Operational Research**, v. 99, n. 1, p. 89–112, mai. 1997. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0377-2217\(96\)00385-2](https://doi.org/10.1016/S0377-2217(96)00385-2).

RUBINSTEIN, Reuven Y.; KROESE, Dirk P. **Simulation and the Monte Carlo Method**. 2nd. [S.l.]: JOHN WILEY & SONS, INC., 2007. (Wiley Series in Probability and Statistics).

SALGADO, R.S.; ZEITUNE, A.F. Power flow solutions through tensor methods. **Generation, Transmission Distribution, IET**, v. 3, n. 5, p. 413–424, mai. 2009. DOI: 10.1049/iet-gtd.2008.0312.

SALGADO, Roberto S.; ZEITUNE, Anesio F. A direct method based on tensor calculation to determine maximum loadability power flow solutions. **Electric Power Systems Research**, v. 103, p. 114–121, out. 2013. DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.epsr.2013.05.011>.

SAMAAN, N.; SINGH, C. Adequacy assessment of power system generation using a modified simple genetic algorithm. **IEEE Transactions on Power Systems**, v. 17, n. 4, p. 974–981, nov. 2002. DOI: 10.1109/TPWRS.2002.804994.

SANKARAKRISHNAN, A.; BILLINTON, R. Sequential Monte Carlo simulation for composite power system reliability analysis with time varying loads. **Power Systems, IEEE Transactions on**, v. 10, n. 3, p. 1540–1545, ago. 1995. DOI: 10.1109/59.466491.

SILVA DIAS, J.A.; TANCREDO BORGES, C.L. Object oriented model for composite reliability evaluation including time varying load and wind generation. *In*: **PROBABILISTIC Methods Applied to Power Systems (PMAPS)**, 2010 IEEE 11th International Conference on. [S.l.: s.n.], jun. 2010. p. 767–772. DOI: 10.1109/PMAPS.2010.5528414.

SILVA, A. M. Leite da *et al.* Composite Reliability Assessment Based on Monte Carlo Simulation and Artificial Neural Networks. **IEEE Transactions on Power Systems**, v. 22, n. 3, p. 1202–1209, ago. 2007. DOI: 10.1109/TPWRS.2007.901302.

SILVA, A.M. Leite da *et al.* Loss of load costs in generating capacity reliability evaluation. **Electric Power Systems Research**, v. 41, n. 2, p. 109–116, mai. 1997. DOI: [http://dx.doi.org/10.1016/S0378-7796\(96\)01182-0](http://dx.doi.org/10.1016/S0378-7796(96)01182-0).

SINGH, C.; MITRA, J. Composite system reliability evaluation using state space pruning. **IEEE Transactions on Power Systems**, v. 12, n. 1, p. 471–479, fev. 1997. DOI: 10.1109/59.575787.

SOUZA SALGADO, Roberto de. **Introdução aos sistemas de energia elétrica**. Florianópolis, Santa Catarina, 2009.

SOUZA SALGADO, Roberto de. **Soluções do fluxo de potência com restrições de intercâmbio líquido de potência ativa**. [S.l.], jan. 2017.

STOTT, B.; JARDIM, J.; ALSAC, O. DC Power Flow Revisited. **Power Systems, IEEE Transactions on**, v. 24, n. 3, p. 1290–1300, ago. 2009. DOI: 10.1109/TPWRS.2009.2021235.

SUBCOMMITTEE, P. M. IEEE Reliability Test System. **IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems**, PAS-98, n. 6, p. 2047–2054, nov. 1979. DOI: 10.1109/TPAS.1979.319398.

TANG, Y.; LI, W.; ZHAO, Y. A cross-entropy-based control variate method for power system reliability assessment. *In*: 2017 IEEE Power Energy Society General Meeting. [S.l.: s.n.], jul. 2017. p. 1–5. DOI: 10.1109/PESGM.2017.8273801.

TÓMASSON, E.; SÖDER, L. Improved Importance Sampling for Reliability Evaluation of Composite Power Systems. **IEEE Transactions on Power Systems**, v. 32, n. 3, p. 2426–2434, mai. 2017. DOI: 10.1109/TPWRS.2016.2614831.

TORRES, G.L.; HUGO QUINTANA, Victor; LAMBERT-TORRES, Germano. Optimal Power Flow in Rectangular Form via an Interior Point Method. *In*: DOI: 10.13140/RG.2.1.1197.9127.

TORRES, Geraldo Leite. **Nonlinear Optimal Power Flow by Interior and Non-Interior Point Methods**. 1998. Tese (Doutorado) – University of Waterloo, Waterloo, Ontario, Canada.

U. OF WASHINGTON. **Power systems test case archive**. [S.l.: s.n.]. Disponível em: [https://www2.ee.washington.edu/research/pstca/pf14/pg%5C\\_tca14bus.htm](https://www2.ee.washington.edu/research/pstca/pf14/pg%5C_tca14bus.htm), %20accessed%20on%20May,%202018.

VASCONCELOS, H.; PEÇAS LOPES, J.A. ANN Design for Fast Security Evaluation of Interconnected Systems with Large Wind Power Production. *In*: PROBABILISTIC Methods Applied to Power Systems, PMAPS 2006. International Conference on. [S.l.: s.n.], jun. 2006. p. 1–6. DOI: 10.1109/PMAPS.2006.360206.

WANG, L.; SINGH, C. Population-Based Intelligent Search in Reliability Evaluation of Generation Systems With Wind Power Penetration. **IEEE Transactions on Power Systems**, v. 23, n. 3, p. 1336–1345, ago. 2008. DOI: 10.1109/TPWRS.2008.922642.

WANG, Y.; GUO, C.; WU, Q. H. A Cross-Entropy-Based Three-Stage Sequential Importance Sampling for Composite Power System Short-Term Reliability Evaluation. **IEEE Transactions on Power Systems**, v. 28, n. 4, p. 4254–4263, nov. 2013. DOI: 10.1109/TPWRS.2013.2276001.

WU, Yu-Chi; DEBS, A. S.; MARSTEN, R. E. A direct nonlinear predictor-corrector primal-dual interior point algorithm for optimal power flows. **IEEE Transactions on Power Systems**, v. 9, n. 2, p. 876–883, mai. 1994. DOI: 10.1109/59.317660.

YAN, C. *et al.* A Geometric Programming to Importance Sampling for Power System Reliability Evaluation. **IEEE Transactions on Power Systems**, v. 32, n. 2, p. 1568–1569, mar. 2017. DOI: 10.1109/TPWRS.2016.2568751.

YAN, X.; QUINTANA, V. H. An efficient predictor-corrector interior point algorithm for security-constrained economic dispatch. **IEEE Transactions on Power Systems**, v. 12, n. 2, p. 803–810, mai. 1997. DOI: 10.1109/59.589693.

YAN, Z. *et al.* Method for direct calculation of quadratic turning points. **IEE Proceedings - Generation, Transmission and Distribution**, v. 151, n. 1, p. 83–89, jan. 2004. DOI: 10.1049/ip-gtd:20030940.

ZEITUNE, Anésio Felipe. **Soluções do fluxo de potência em pontos de máximo carregamento utilizando métodos diretos baseados no uso de tensores**. 2012. Tese (Doutorado) – Universidade Federal de Santa Catarina.

ZHAO, Y. *et al.* Composite Power System Reliability Evaluation Based on Enhanced Sequential Cross-Entropy Monte Carlo Simulation. **IEEE Transactions on Power Systems**, p. 1–1, abr. 2019. DOI: 10.1109/TPWRS.2019.2909769.

ZIMMERMAN, R.D.; MURILLO-SANCHEZ, C.E.; THOMAS, R.J. Matpower: Steady-state operations, planning, and analysis tools for power systems research and education. **IEEE Transactions on Power Systems**, v. 26, n. 1, p. 12–19, fev. 2011.



## APÊNDICE A – FORMULAÇÃO DO PROBLEMA DO FLUXO DE POTÊNCIA ÓTIMO

Neste apêndice é apresentada a formulação e equações para a resolução do problema de fluxo de potência ótimo utilizados na tese. A formulação do problema, equações para a resolução do problema e equações adicionais para representação de restrições de fluxo de corrente são apresentadas nas seções A.1, A.2 e A.3, respectivamente.

### A.1 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

O problema de minimização de corte de carga, para um sistemas de energia elétrica, poder ser escrito na abaixo. Considera-se a existência de geradores de potência ativa fictícios nas barras de carga. Estima-se o corte de potência reativa considerando que, na ocorrência de potência ativa não suprida, a potência reativa não suprida ocorre de forma proporcional (LUO; SINGH; PATTON, 2000).

$$\begin{aligned}
 &\text{minimizar} && \frac{1}{2} \mathbf{P}_g^t \mathbf{D}_C \mathbf{P}_g \\
 &\text{sujeito a} && \mathbf{A}_g \mathbf{P}_g - \mathbf{P}_d - \mathbf{P}(\mathbf{e}, \mathbf{f}) = \mathbf{0} \\
 &&& \mathbf{A}_g^r \mathbf{Q}_g - \mathbf{Q}_d + \mathbf{A}_g^f \mathbf{P}_g - \mathbf{Q}(\mathbf{e}, \mathbf{f}) = \mathbf{0} \\
 &&& \mathbf{P}_g^{\min} \leq \mathbf{P}_g \leq \mathbf{P}_g^{\max} \\
 &&& \mathbf{Q}_g^{\min} \leq \mathbf{Q}_g \leq \mathbf{Q}_g^{\max} \\
 &&& (\mathbf{V}^{\min})^2 \leq (\mathbf{e}^2 + \mathbf{f}^2) \leq (\mathbf{V}^{\max})^2
 \end{aligned} \tag{186}$$

onde  $\mathbf{D}_C$  é uma matriz diagonal cujos elementos são as variáveis  $C_i$  que representam os custos de geração por MW;  $\mathbf{Q}_g$  é o vetor de potências reativas geradas; e  $\mathbf{P}_d$  e  $\mathbf{Q}_d$  são os vetores de cargas ativas e reativas. Os vetores  $\mathbf{e}$  e  $\mathbf{f}$  são, respectivamente, as partes real e imaginária das tensões das barras representados na forma retangular;  $\mathbf{e}^2$  e  $\mathbf{f}^2$  são vetores com elementos de  $\mathbf{e}$  e  $\mathbf{f}$  ao quadrado, respectivamente;  $\mathbf{P}_g^{\min}$  e  $\mathbf{P}_g^{\max}$  são os vetores de geração mínima e máxima de potência ativa;  $\mathbf{Q}_g^{\min}$  e  $\mathbf{Q}_g^{\max}$  são os vetores de geração mínima e máxima de potência reativa;  $\mathbf{V}^{\min}$  e  $\mathbf{V}^{\max}$  são os vetores de magnitude de tensão mínima e máxima. Ademais, tem-se que

- $\mathbf{P}_g = \left[ P_{g_1} \dots P_{g_{n_g}} P_{g_1}^f \dots P_{g_{n_g}^f}^f \right]^t$  é o vetor de potências ativas geradas, incluindo geradores fictícios;
- $\mathbf{A}_g$ ,  $\mathbf{A}_g^r$  e  $\mathbf{A}_g^f$  são matrizes de adjacência de dimensão  $n_b \times (n_g + n_g^f)$ ,  $n_b \times n_g$  e  $n_b \times n_g^f$ , respectivamente, tais que

$$\mathbf{A}_g(i, j) \triangleq \begin{cases} 1 & \text{se o gerador } j \text{ (real ou fictício)} \\ & \text{está conectado na barra } i \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$\mathbf{A}_g^r(i, j) \triangleq \begin{cases} 1 & \text{se o gerador real } j \text{ está} \\ & \text{conectado na barra } i \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$\mathbf{A}_g^f(i, j) \triangleq \begin{cases} \frac{Q_{d_i}}{P_{d_i}} & \text{se o gerador fictício } j \text{ está} \\ & \text{conectado na barra } i \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Se a matriz  $\mathbf{D}_C$  for definida tal que os primeiros  $n_g$  custos  $C_i$  correspondentes aos custos dos geradores reais sejam nulos, e tal que os  $n_g^f$  custos correspondentes aos geradores fictícios sejam unitários, então  $\mathbf{D}_C$  é a diagonalização do vetor

$$\underbrace{[0 \ 0 \ \dots \ 0]}_{n_g} \underbrace{[1 \ 1 \ \dots \ 1]}_{n_g^f}.$$

Desta forma, o problema de otimização acima corresponde ao problema de minimizar o corte de carga do sistema.

A função objetivo e as restrições do problema apresentado no conjunto de equações (186) são não-lineares, no entanto suaves, definindo assim um problema de otimização não-linear. O vetor solução é

$$\mathbf{x} = [\mathbf{e}^t \quad \mathbf{f}^t \quad \mathbf{P}_g^t \quad \mathbf{Q}_g^t]^t$$

onde  $\mathbf{P}_g = [(\mathbf{P}_g^r)^t \quad (\mathbf{P}_g^f)^t]^t$  é o vetor de dimensão  $n_g + n_g^f$  que contém as potências ativas geradas nos geradores reais e fictícios e  $\mathbf{Q}_g^t$  o vetor de dimensão  $n_g$  que contém as potências reativas geradas nos geradores reais.

Na próxima seção apresenta-se a solução do problema de minimização de corte de carga por meio do método preditor-corretor primal-dual de pontos interiores reduzido.

## A.2 EQUAÇÕES PARA A SOLUÇÃO DO PROBLEMA

Para aplicar o método preditor-corretor primal-dual de pontos interiores ao problema de fluxo de potência ótimo apresentado no conjunto de equações (186), o primeiro passo consiste em transformar todas as restrições de desigualdade em igualdades, adicionando variáveis não negativas denominadas de variáveis de folga, com vista a transformar o problema apresentado num problema não linear modelo. Obtém-se assim o seguinte problema de otimização

$$\begin{aligned}
& \text{minimizar} && \frac{1}{2} \mathbf{P}_g^t \mathbf{D}_C \mathbf{P}_g \\
& \text{sujeito a} && \Delta \mathbf{P} = \mathbf{A}_g \mathbf{P}_g - \mathbf{P}_d - \mathbf{P}(\mathbf{e}, \mathbf{f}) = \mathbf{0} \\
& && \Delta \mathbf{Q} = \mathbf{A}_g^r \mathbf{Q}_g - \mathbf{Q}_d + \mathbf{A}_g^f \mathbf{P}_g - \mathbf{Q}(\mathbf{e}, \mathbf{f}) = \mathbf{0} \\
& && \mathbf{P}_g - \mathbf{P}_g^{\min} - \mathbf{s}_{\mathbf{P}_g^{\min}} = \mathbf{0} \\
& && \mathbf{P}_g - \mathbf{P}_g^{\max} + \mathbf{s}_{\mathbf{P}_g^{\max}} = \mathbf{0} \\
& && \mathbf{Q}_g - \mathbf{Q}_g^{\min} - \mathbf{s}_{\mathbf{Q}_g^{\min}} = \mathbf{0} \\
& && \mathbf{Q}_g - \mathbf{Q}_g^{\max} + \mathbf{s}_{\mathbf{Q}_g^{\max}} = \mathbf{0} \\
& && (\mathbf{e}^2 + \mathbf{f}^2) - (\mathbf{V}^{\min})^2 - \mathbf{s}_{\mathbf{V}^{\min}} = \mathbf{0} \\
& && (\mathbf{e}^2 + \mathbf{f}^2) - (\mathbf{V}^{\max})^2 + \mathbf{s}_{\mathbf{V}^{\max}} = \mathbf{0} \\
& && \mathbf{s} \geq \mathbf{0}
\end{aligned} \tag{187}$$

onde  $\mathbf{s} = [\mathbf{s}_{\mathbf{P}_g^{\min}}^t \quad \mathbf{s}_{\mathbf{P}_g^{\max}}^t \quad \mathbf{s}_{\mathbf{Q}_g^{\min}}^t \quad \mathbf{s}_{\mathbf{Q}_g^{\max}}^t \quad \mathbf{s}_{\mathbf{V}^{\min}}^t \quad \mathbf{s}_{\mathbf{V}^{\max}}^t]^t$ . A não negatividade do vetor de variáveis de folga  $\mathbf{s}$  pode ser assegurada incorporando-o na função objetivo do problema na forma de barreira logarítmica. O problema de otimização pode ser então reescrito da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
& \text{minimizar} && \frac{1}{2} \mathbf{P}_g^t \mathbf{D}_C \mathbf{P}_g - \mu [\sum \ln s_i] \\
& \text{sujeito a} && \Delta \mathbf{P} = \mathbf{A}_g \mathbf{P}_g - \mathbf{P}_d - \mathbf{P}(\mathbf{e}, \mathbf{f}) = \mathbf{0} \\
& && \Delta \mathbf{Q} = \mathbf{A}_g^r \mathbf{Q}_g - \mathbf{Q}_d + \mathbf{A}_g^f \mathbf{P}_g - \mathbf{Q}(\mathbf{e}, \mathbf{f}) = \mathbf{0} \\
& && \mathbf{P}_g - \mathbf{P}_g^{\min} - \mathbf{s}_{\mathbf{P}_g^{\min}} = \mathbf{0} \\
& && \mathbf{P}_g - \mathbf{P}_g^{\max} + \mathbf{s}_{\mathbf{P}_g^{\max}} = \mathbf{0} \\
& && \mathbf{Q}_g - \mathbf{Q}_g^{\min} - \mathbf{s}_{\mathbf{Q}_g^{\min}} = \mathbf{0} \\
& && \mathbf{Q}_g - \mathbf{Q}_g^{\max} + \mathbf{s}_{\mathbf{Q}_g^{\max}} = \mathbf{0} \\
& && (\mathbf{e}^2 + \mathbf{f}^2) - (\mathbf{V}^{\min})^2 - \mathbf{s}_{\mathbf{V}^{\min}} = \mathbf{0} \\
& && (\mathbf{e}^2 + \mathbf{f}^2) - (\mathbf{V}^{\max})^2 + \mathbf{s}_{\mathbf{V}^{\max}} = \mathbf{0}
\end{aligned} \tag{188}$$

onde  $s_i = s(i)$  e  $\mu$  é o parâmetro de barreira tal que  $\mu \rightarrow 0$ .

A função Lagrangeana do problema apresentado na equação (188) é dada pela expressão

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(\mathbf{x}, \mu, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\pi}) = & \frac{1}{2} \mathbf{P}_g^t \mathbf{D}_C \mathbf{P}_g - \mu \left[ \sum \ln s_i \right] \\
& - \boldsymbol{\lambda}_{\Delta P}^t [\mathbf{A}_g \mathbf{P}_g - \mathbf{P}_d - \mathbf{P}(\mathbf{e}, \mathbf{f})] - \boldsymbol{\lambda}_{\Delta Q}^t [\mathbf{A}_g^r \mathbf{Q}_g - \mathbf{Q}_d + \mathbf{A}_g^f \mathbf{P}_g - \mathbf{Q}(\mathbf{e}, \mathbf{f})] \\
& - \boldsymbol{\pi}_{\mathbf{P}_g^{\min}}^t [\mathbf{P}_g - \mathbf{P}_g^{\min} - \mathbf{s}_{\mathbf{P}_g^{\min}}] - \boldsymbol{\pi}_{\mathbf{P}_g^{\max}}^t [\mathbf{P}_g - \mathbf{P}_g^{\max} + \mathbf{s}_{\mathbf{P}_g^{\max}}] \\
& - \boldsymbol{\pi}_{\mathbf{Q}_g^{\min}}^t [\mathbf{Q}_g - \mathbf{Q}_g^{\min} - \mathbf{s}_{\mathbf{Q}_g^{\min}}] - \boldsymbol{\pi}_{\mathbf{Q}_g^{\max}}^t [\mathbf{Q}_g - \mathbf{Q}_g^{\max} + \mathbf{s}_{\mathbf{Q}_g^{\max}}] \\
& - \boldsymbol{\pi}_{\mathbf{V}^{\min}}^t [(\mathbf{e}^2 + \mathbf{f}^2) - (\mathbf{V}^{\min})^2 - \mathbf{s}_{\mathbf{V}^{\min}}] \\
& - \boldsymbol{\pi}_{\mathbf{V}^{\max}}^t [(\mathbf{e}^2 + \mathbf{f}^2) - (\mathbf{V}^{\max})^2 + \mathbf{s}_{\mathbf{V}^{\max}}]
\end{aligned} \tag{189}$$

sendo  $\lambda = [\lambda_{\Delta P}^t \quad \lambda_{\Delta Q}^t]^t$  e  $\pi = [\pi_{P_g^{\min}}^t \quad \pi_{P_g^{\max}}^t \quad \pi_{Q_g^{\min}}^t \quad \pi_{Q_g^{\max}}^t \quad \pi_{V_{\min}}^t \quad \pi_{V_{\max}}^t]^t$  de dimensões  $(2n_{PQ} + n_{PV}) \times 1$  e  $(2n_g + n_g^f + n_b) \times 1$ , respectivamente, os multiplicadores de Lagrange, também denominados de variáveis duais, tais que  $\pi \geq 0$  e  $\lambda \geq 0$ .

Um mínimo local do problema apresentado na equação (188) é um ponto estacionário de  $\mathcal{L}(\mathbf{x}, \mu, \lambda, \pi)$  que atende as condições de Karush-Kuhn-Tucker de primeira ordem, ou seja, que verifique a condição

$$\nabla_{[\mathbf{x}, \lambda, \pi, \mu]} \mathcal{L}(\mathbf{x}, \mu, \lambda, \pi) = 0 \quad (190)$$

A função objetivo e os vetores que definem as restrições de igualdade e de desigualdade do problema apresentado em (188) são

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \mathbf{P}_g^t \mathbf{D}_C \mathbf{P}_g - \mu \left[ \sum \ln s_i \right] \quad (191)$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_g \mathbf{P}_g - \mathbf{P}_d - \mathbf{P}(\mathbf{e}, \mathbf{f}) \\ \mathbf{A}_g^r \mathbf{Q}_g - \mathbf{Q}_d + \mathbf{A}_g^f \mathbf{P}_g - \mathbf{Q}(\mathbf{e}, \mathbf{f}) \end{bmatrix} \quad (192)$$

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_g \\ \mathbf{Q}_g \\ (\mathbf{e}^2 + \mathbf{f}^2) \end{bmatrix}. \quad (193)$$

Os sistemas a resolver nas etapas de predição e correção do sistema reduzido no método de pontos interiores requerem que se tenha conhecimento das derivadas até à segunda ordem de  $f(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{g}(\mathbf{x})$  e  $\mathbf{h}(\mathbf{x})$  em ordem a  $\mathbf{x}$ . Para a função  $f(\mathbf{x})$  tem-se

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) &= [\nabla_{\mathbf{e}} f(\mathbf{x})^t \quad \nabla_{\mathbf{f}} f(\mathbf{x})^t \quad \nabla_{\mathbf{P}_g} f(\mathbf{x})^t \quad \nabla_{\mathbf{Q}_g} f(\mathbf{x})^t]^t \\ &= [[\mathbf{0}]_{1 \times n_b} \quad [\mathbf{0}]_{1 \times n_b} \quad \mathbf{P}_g^t \mathbf{D}_C \quad [\mathbf{0}]_{1 \times n_g}]^t \end{aligned} \quad (194)$$

$$\nabla_{\mathbf{x}}^2 f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} [\mathbf{0}]_{n_b \times n_b} & [\mathbf{0}]_{n_b \times n_b} & [\mathbf{0}]_{n_b \times (n_g + n_g^f)} & [\mathbf{0}]_{n_b \times n_g} \\ [\mathbf{0}]_{n_b \times n_b} & [\mathbf{0}]_{n_b \times n_b} & [\mathbf{0}]_{n_b \times (n_g + n_g^f)} & [\mathbf{0}]_{n_b \times n_g} \\ [\mathbf{0}]_{(n_g + n_g^f) \times n_b} & [\mathbf{0}]_{(n_g + n_g^f) \times n_b} & \frac{\partial}{\partial P_g} \nabla_{P_g} f(\mathbf{x}) & [\mathbf{0}]_{(n_g + n_g^f) \times n_g} \\ [\mathbf{0}]_{n_g \times n_b} & [\mathbf{0}]_{n_g \times n_b} & [\mathbf{0}]_{n_g \times (n_g + n_g^f)} & [\mathbf{0}]_{n_g \times n_g} \end{bmatrix} \quad (195)$$

com  $\frac{\partial}{\partial P_g} \nabla_{P_g} f(\mathbf{x}) = \mathbf{D}_C$ .

A primeira derivada das restrições de igualdade é a matriz

$$\nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{J}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Delta \mathbf{P}}{\partial \mathbf{e}} & \frac{\partial \Delta \mathbf{P}}{\partial \mathbf{f}} & \frac{\partial \Delta \mathbf{P}}{\partial \mathbf{P}_g} & \frac{\partial \Delta \mathbf{P}}{\partial \mathbf{Q}_g} \\ \frac{\partial \Delta \mathbf{Q}}{\partial \mathbf{e}} & \frac{\partial \Delta \mathbf{Q}}{\partial \mathbf{f}} & \frac{\partial \Delta \mathbf{Q}}{\partial \mathbf{P}_g} & \frac{\partial \Delta \mathbf{Q}}{\partial \mathbf{Q}_g} \end{bmatrix} \quad (196)$$

onde

$$\begin{aligned}
J_1 &= \frac{\partial \Delta P}{\partial \mathbf{e}} = -\mathbf{D}_e \mathbf{G} - \mathbf{D}_f \mathbf{B} - \mathbf{D}_{I_e} \\
J_2 &= \frac{\partial \Delta P}{\partial \mathbf{f}} = -\mathbf{D}_f \mathbf{G} + \mathbf{D}_e \mathbf{B} - \mathbf{D}_{I_f} \\
J_5 &= \frac{\partial \Delta P}{\partial \mathbf{P}_g} = \mathbf{A}_g \\
J_6 &= \frac{\partial \Delta P}{\partial \mathbf{Q}_g} = [\mathbf{0}]_{n_b \times (n_g + n_g^f)} \\
J_3 &= \frac{\partial \Delta Q}{\partial \mathbf{e}} = -\mathbf{D}_f \mathbf{G} + \mathbf{D}_e \mathbf{B} + \mathbf{D}_{I_f} \\
J_4 &= \frac{\partial \Delta Q}{\partial \mathbf{f}} = +\mathbf{D}_e \mathbf{G} + \mathbf{D}_f \mathbf{B} - \mathbf{D}_{I_e} \\
J_7 &= \frac{\partial \Delta Q}{\partial \mathbf{P}_g} = \mathbf{A}_g^f \\
J_8 &= \frac{\partial \Delta Q}{\partial \mathbf{Q}_g} = \mathbf{A}_g^r
\end{aligned}$$

onde  $\mathbf{D}_{I_e}$  e  $\mathbf{D}_{I_f}$  são diagonalizações dos vetores  $\mathbf{G}_e - \mathbf{B}_f$  e  $\mathbf{B}_e + \mathbf{G}_f$ , respectivamente, enquanto  $\mathbf{G}$  e  $\mathbf{B}$  são as componentes real e imaginária da matriz admitância de barra do sistema.

A primeira derivada das restrições de desigualdade é dada pela matriz

$$\nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}) = J_h(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{h}_1}{\partial \mathbf{e}} & \frac{\partial \mathbf{h}_1}{\partial \mathbf{f}} & \frac{\partial \mathbf{h}_1}{\partial \mathbf{P}_g} & \frac{\partial \mathbf{h}_1}{\partial \mathbf{Q}_g} \\ \frac{\partial \mathbf{h}_2}{\partial \mathbf{e}} & \frac{\partial \mathbf{h}_2}{\partial \mathbf{f}} & \frac{\partial \mathbf{h}_2}{\partial \mathbf{P}_g} & \frac{\partial \mathbf{h}_2}{\partial \mathbf{Q}_g} \\ \frac{\partial \mathbf{h}_3}{\partial \mathbf{e}} & \frac{\partial \mathbf{h}_3}{\partial \mathbf{f}} & \frac{\partial \mathbf{h}_3}{\partial \mathbf{P}_g} & \frac{\partial \mathbf{h}_3}{\partial \mathbf{Q}_g} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] & \frac{\partial \mathbf{h}_1}{\partial \mathbf{P}_g} & [\mathbf{0}] \\ [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] & \frac{\partial \mathbf{h}_2}{\partial \mathbf{Q}_g} \\ \frac{\partial \mathbf{h}_3}{\partial \mathbf{e}} & \frac{\partial \mathbf{h}_3}{\partial \mathbf{f}} & [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] \end{bmatrix} \quad (197)$$

onde

$$\frac{\partial \mathbf{h}_1}{\partial \mathbf{P}_g} = \mathbf{I}_{(n_g + n_g^f) \times (n_g + n_g^f)} \quad (198)$$

$$\frac{\partial \mathbf{h}_2}{\partial \mathbf{Q}_g} = \mathbf{I}_{n_g^f \times n_g^f} \quad (199)$$

$$\frac{\partial \mathbf{h}_3}{\partial \mathbf{e}} = 2\mathbf{D}_e \quad (200)$$

$$\frac{\partial \mathbf{h}_3}{\partial \mathbf{f}} = 2\mathbf{D}_f \quad (201)$$

$$\frac{\partial \mathbf{h}_1}{\partial \mathbf{e}} = \frac{\partial \mathbf{h}_1}{\partial \mathbf{f}} = [\mathbf{0}]_{(n_g + n_g^f) \times n_b} \quad (202)$$

$$\frac{\partial \mathbf{h}_1}{\partial \mathbf{Q}_g} = [\mathbf{0}]_{(n_g + n_g^f) \times n_g} \quad (203)$$

$$\frac{\partial \mathbf{h}_2}{\partial \mathbf{e}} = \frac{\partial \mathbf{h}_2}{\partial \mathbf{f}} = [\mathbf{0}]_{n_g \times n_b} \quad (204)$$

$$\frac{\partial \mathbf{h}_2}{\partial \mathbf{P}_g} = [\mathbf{0}]_{n_g \times (n_g + n_g^f)} \quad (205)$$

$$\frac{\partial \mathbf{h}_3}{\partial \mathbf{P}_g} = [\mathbf{0}]_{n_b \times (n_g + n_g^f)} \quad (206)$$

$$\frac{\partial \mathbf{h}_3}{\partial \mathbf{Q}_g} = [\mathbf{0}]_{n_b \times n_g} \quad (207)$$

e  $\mathbf{I}_{p \times p}$  é a matriz de identidade de dimensão  $p$ .

A construção da matriz  $\mathbf{H}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\pi}_l, \boldsymbol{\pi}_u)$  apresentada em (248) envolve o cálculo de  $\nabla_{\mathbf{x}}^2 f(\mathbf{x})$  e o produto de vetores por tensores no cálculo dos termos  $\sum_i \lambda_i \nabla_{\mathbf{x}}^2 g_i(\mathbf{x})$  e  $\sum_j (\pi_{l_j} + \pi_{u_j}) \nabla_{\mathbf{x}}^2 h_j(\mathbf{x})$ , dado que  $\mathbf{g}(\mathbf{x})$  e  $\mathbf{h}(\mathbf{x})$  são vetores de funções de  $\mathbf{e}$  e  $\mathbf{f}$ , e como tal, as segundas derivadas definem tensores. Assumindo que os transformadores de tap variável com a carga não são inclusos na formulação, os tensores associados às equações de fluxo de potência serão constantes em todas as iterações (QIN; YANG, 2008). Ademais, em (QIN; YANG, 2008) afirma-se que é possível calcular  $\sum_i \lambda_i \nabla_{\mathbf{x}}^2 g_i(\mathbf{x})$  de forma simples a partir do conhecimento de  $\mathbf{G}$ ,  $\mathbf{B}$  e  $\boldsymbol{\lambda}$  do seguinte modo

$$\sum_i \lambda_i \nabla_{\mathbf{x}}^2 g_i(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 & \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 & [\mathbf{0}]_{n_b \times (n_g + n_g^f)} & [\mathbf{0}]_{n_b \times n_g} \\ \mathbf{B}_1^t + \mathbf{B}_2^t & \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 & [\mathbf{0}]_{n_b \times (n_g + n_g^f)} & [\mathbf{0}]_{n_b \times n_g} \\ [\mathbf{0}]_{(n_g + n_g^f) \times n_b} & [\mathbf{0}]_{(n_g + n_g^f) \times n_b} & [\mathbf{0}]_{(n_g + n_g^f) \times (n_g + n_g^f)} & [\mathbf{0}]_{(n_g + n_g^f) \times n_g} \\ [\mathbf{0}]_{n_g \times n_b} & [\mathbf{0}]_{n_g \times n_b} & [\mathbf{0}]_{n_g \times (n_g + n_g^f)} & [\mathbf{0}]_{n_g \times n_g} \end{bmatrix} \quad (208)$$

onde

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_1 &= -\mathbf{D}_{\lambda_{\Delta P}} \mathbf{G} - \mathbf{G} \mathbf{D}_{\lambda_{\Delta P}} \\ \mathbf{A}_2 &= \mathbf{D}_{\lambda_{\Delta Q}} \mathbf{B} + \mathbf{B} \mathbf{D}_{\lambda_{\Delta Q}} \\ \mathbf{B}_1 &= \mathbf{D}_{\lambda_{\Delta P}} \mathbf{B} - \mathbf{B} \mathbf{D}_{\lambda_{\Delta P}} \\ \mathbf{B}_2 &= \mathbf{D}_{\lambda_{\Delta Q}} \mathbf{G} - \mathbf{G} \mathbf{D}_{\lambda_{\Delta Q}}. \end{aligned} \quad (209)$$

No cálculo de  $\sum_j (\pi_{l_j} + \pi_{u_j}) \nabla_{\mathbf{x}}^2 h_j(\mathbf{x})$  considera-se também o raciocínio exposto em (QIN; YANG, 2008). Para cada restrição de desigualdade  $h_i(\mathbf{x})$ , existem dois multiplicadores de Lagrange associados,  $\pi_{l_i}$  e  $\pi_{u_i}$ . Na análise individual de cada restrição de  $\mathbf{h}(\mathbf{x})$  tem-se que as derivadas de primeira ordem são

$$\nabla_{\mathbf{x}} h_j(\mathbf{x}) = [0 \dots 1 \dots 0]^t, i = 1, \dots, 2n_g + n_g^f \quad (210)$$

para as restrições associadas aos limites operativos dos geradores, onde o único elemento não nulo do vetor corresponde à  $k$ -ésima posição da variável  $P_{g_k}$  (ou  $Q_{g_k}$ ) no vetor  $\mathbf{x}$ . Para as restantes restrições  $h_j(\mathbf{x})$  tem-se

$$\nabla_{\mathbf{x}} h_j(\mathbf{x}) = [0 \dots 0 \ 2e_j \ 0 \dots 0 \ 2f_j \ 0 \dots 0]^t \quad (211)$$

com  $j = 2n_g + n_g^f + 1, \dots, 2n_g + n_g^f + n_b$ . Neste caso, as posições não nulas correspondem às  $k$ -ésimas posições das variáveis  $e_k$  e  $f_k$  no vetor  $\mathbf{x}$ . Considerando o exposto, tem-se que as derivadas de segunda ordem de cada uma das restrições  $h_j(\mathbf{x})$  para  $j = 1, \dots, 2n_g + n_g^f$  são matrizes quadradas nulas de dimensão  $2(n_b + n_g) + n_g^f$ . Para as restantes restrições, as matrizes resultantes das segundas derivadas de  $h_j(\mathbf{x})$  são

também matrizes quadradas, com apenas dois elementos não nulos na diagonal principal, de valor constante igual a 2, nas posições  $(k, k)$  e  $(n_b + k, n_b + k)$  da matriz, onde  $k$  e  $n_b + k$  identificam as  $k$ -ésimas posições das variáveis  $e_k$  e  $f_k$  no vetor  $\mathbf{x}$  em relação às quais se está a derivar. Conclui-se que finalmente que

$$\sum_j (\pi_{l_j} + \pi_{u_j}) \nabla_{\mathbf{x}}^2 h_j(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{0}_{(n_g \times n_g)} \\ \mathbf{0}_{(n_g \times n_b)} & \mathbf{0}_{(n_g \times n_g)} \end{bmatrix} \quad (212)$$

onde  $\mathbf{D}$  é uma matriz de dimensão  $2(n_b \times n_b)$  tal que

$$\mathbf{D} = 2 \begin{bmatrix} \text{diag}(\boldsymbol{\pi}_{l_m} + \boldsymbol{\pi}_{u_m}) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \text{diag}(\boldsymbol{\pi}_{l_m} + \boldsymbol{\pi}_{u_m}) \end{bmatrix} \quad (213)$$

para  $m = 2n_g + n_g^f + 1, \dots, 2n_g + n_g^f + n_b^1$ .

Com o conhecimento de todas as derivadas, o sistema a resolver na etapa de predição é

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{x}, \mathbf{s}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\pi}) & -\mathbf{J}(\mathbf{x})^t \\ -\mathbf{J}(\mathbf{x}) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{x} \\ \Delta \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{t}} \\ \mathbf{g}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \quad (214)$$

onde

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{x}, \mathbf{s}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\pi}) &= [\mathbf{H}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\pi}_l, \boldsymbol{\pi}_u) + \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{h}(\mathbf{x})^t [\mathbf{S}_l^{-1} \boldsymbol{\Pi}_l + \mathbf{S}_u^{-1} \boldsymbol{\Pi}_u] \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{h}(\mathbf{x})] \\ \tilde{\mathbf{t}} &= -\mathbf{t} + \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{h}(\mathbf{x})^t [\mathbf{S}_l^{-1} [\mathbf{v}_l - \boldsymbol{\Pi}_l \mathbf{y}_l] - \mathbf{S}_u^{-1} [\mathbf{v}_u - \boldsymbol{\Pi}_u \mathbf{y}_u]] \end{aligned} \quad (215)$$

com

$$\mathbf{H}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\pi}_l, \boldsymbol{\pi}_u) = \nabla_{\mathbf{x}}^2 f(\mathbf{x}) - \sum_i \lambda_i \nabla_{\mathbf{x}}^2 g_i(\mathbf{x}) - \sum_j (\pi_{l_j} + \pi_{u_j}) \nabla_{\mathbf{x}}^2 h_j(\mathbf{x})$$

e considerando

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_l &\equiv -\mathbf{S}_l \boldsymbol{\pi}_l \\ \mathbf{v}_u &\equiv \mathbf{S}_u \boldsymbol{\pi}_u \\ \mathbf{y}_l &\equiv -[\mathbf{h}(\mathbf{x}) - \mathbf{s}_l - \mathbf{h}^{min}] \\ \mathbf{y}_u &\equiv -[\mathbf{h}(\mathbf{x}) + \mathbf{s}_u - \mathbf{h}^{max}] \end{aligned} \quad (216)$$

Já na etapa de correção, o sistema a resolver é o mesmo apresentado em (214), mas aqui as variáveis  $\mathbf{v}_l, \mathbf{v}_u, \mathbf{y}_l, \mathbf{y}_u$  apresentam a seguinte definição

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_l &\equiv (\mu \mathbf{u} - \mathbf{S}_l \boldsymbol{\pi}_l) - \Delta \mathbf{S}_l \Delta \boldsymbol{\pi}_l \\ \mathbf{v}_u &\equiv (\mu \mathbf{u} + \mathbf{S}_u \boldsymbol{\pi}_u) + \Delta \mathbf{S}_u \Delta \boldsymbol{\pi}_u \\ \mathbf{y}_l &\equiv -[\mathbf{h}(\mathbf{x}) - \mathbf{s}_l - \mathbf{h}^{min}] \\ \mathbf{y}_u &\equiv -[\mathbf{h}(\mathbf{x}) + \mathbf{s}_u - \mathbf{h}^{max}]. \end{aligned} \quad (217)$$

<sup>1</sup> Note-se que  $\text{diag}(\boldsymbol{\pi}_{l_m} + \boldsymbol{\pi}_{u_m})$  corresponde à diagonalização do vetor extraído de  $\boldsymbol{\pi}_l + \boldsymbol{\pi}_u$  quando se considera apenas os multiplicadores de Lagrange associados às restrições de desigualdade relacionados com os limites de magnitude de tensão.

O problema de minimização apresentado em (186) contempla os limites operativos associados a limites de geração de potência ativa e reativa, e limites de magnitude de tensão nas barras. Contudo, os limites associados a limites de corrente nos elementos de transmissão também precisam ser considerados. Na próxima seção descreve-se como incluir essas restrições no problema de otimização.

### A.3 EQUAÇÕES ADICIONAIS PARA REPRESENTAÇÃO DE RESTRIÇÕES DE FLUXO DE CORRENTE

Em (TORRES, 1998) refere-se que restrições de podem ser incorporadas ao problema do fluxo de potência ótimo no conjunto das restrições de desigualdade em função do quadrado do módulo do fluxo de corrente que percorre as linhas. Definindo a tensão dos barramentos no plano complexo cartesiano tal que  $E_i = e_i + jf_i$  e considerando ainda que a admitância série da linha  $l$  é tal que  $y_l = g_l + jb_l$ , com  $g_l$  e  $b_l$  a condutância série e susceptância série, respectivamente, o quadrado do módulo do fluxo de corrente  $I_l$  que percorre a linha  $l$  conectando os barramento  $i$  e  $j$  pode ser escrito em coordenadas retangulares na forma (adaptado de (TORRES, 1998))

$$I_l^2(\mathbf{e}, \mathbf{f}) = b_l^{sh} (b_l^{sh} + 2b_l) (e_i^2 + f_i^2) - 2b_l^{sh}b_l (e_ie_j + f_if_j) + 2b_l^{sh}g_l (e_jf_i - e_if_j) + (g_l^2 + b_l^2) [(e_i - e_j)^2 + (f_i - f_j)^2] \quad (218)$$

onde  $b_{ij}^{sh}$  a susceptância shunt da linha  $l$ .

Considerando as seguintes definições de elementos matriciais

- $\mathbf{A}_s$  é a matriz de adjacência linha-barra tal que

$$\mathbf{A}_s(l, i) \triangleq \begin{cases} 1 & \text{se } i \text{ é o barramento de origem da linha } l \\ -1 & \text{se } i \text{ é o barramento de chegada da linha } l \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

e  $\mathbf{A}_s^+$  e  $\mathbf{A}_s^-$  são as matrizes de adjacência linha-barra de partida e chegada, respectivamente, tais que

$$\mathbf{A}_s^+(l, i) \triangleq \begin{cases} 1 & \text{se } i \text{ é o barramento de origem da linha } l \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \\ \triangleq \{\mathbf{A}_s(l, i) | \mathbf{A}_s(l, i) > 0\}$$

$$\mathbf{A}_s^-(l, i) \triangleq \begin{cases} 1 & \text{se } i \text{ é o barramento de chegada da linha } l \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \\ \triangleq \{abs(\mathbf{A}_s(l, i)) | \mathbf{A}_s(l, i) < 0\}$$

- $\mathbf{D}_{g_l}$ ,  $\mathbf{D}_{b_l}$  e  $\mathbf{D}_{b_l^{sh}}$  são matrizes diagonais contendo os elementos  $g_l$ ,  $b_l$  e  $b_l^{sh}$ , respectivamente.



em notação matricial  $I_l^2(\mathbf{e}, \mathbf{f})$  pode ser reescrita na forma

$$\begin{aligned} I_l^2(\mathbf{e}, \mathbf{f}) = & \text{diag}(\mathbf{A}_s^+ \mathbf{e}) \mathbf{D}_{b_1^{sh}} (\mathbf{D}_{b_1^{sh}} + 2\mathbf{D}_{b_1}) \text{diag}(\mathbf{A}_s^+ \mathbf{e}) \\ & + \text{diag}(\mathbf{A}_s^+ \mathbf{f}) \mathbf{D}_{b_1^{sh}} (\mathbf{D}_{b_1^{sh}} + 2\mathbf{D}_{b_1}) \text{diag}(\mathbf{A}_s^+ \mathbf{f}) \\ & - 2\text{diag}(\mathbf{A}_s^+ \mathbf{f}) \mathbf{D}_{b_1^{sh}} \mathbf{D}_{b_1} \text{diag}(\mathbf{A}_s^- \mathbf{f}) \end{aligned} \quad (219)$$

Considere-se que o vetor de variáveis de decisão é dado por

$$\mathbf{z} = \left[ e_1, \dots, e_{n-1}, f_1, \dots, f_{n-1}, P_{g_1}, \dots, P_{g_{ng}}, P_{g_1}^f, \dots, P_{g_{ng}}^f, Q_{g_1}, \dots, Q_{g_{ng}} \right]^t \quad (220)$$

onde  $e_i$  e  $f_i$  são as partes reais e imaginárias da tensão,  $P_{g_i}$  e  $Q_{g_i}$  as potências ativa e reativa geradas relativas à barra  $i$ , e  $P_{g_i}^f$  representa a geração ativa do gerador fictício existente na barra de carga  $i$ , o que permite identificar o montante de carga não suprida na barra.

As derivadas de primeira ordem de  $I_l^2(\mathbf{e}, \mathbf{f})$  em função do vetor de variáveis de decisão são dadas pelas seguintes equações:

$$\frac{\partial I_l^2(\mathbf{e}, \mathbf{f})}{\partial e_i} = 2b_{ij}^{sh} (b_{ij}^{sh} + 2b_{ij}) e_i - 2b_{ij}^{sh} b_{ij} e_j - 2b_{ij}^{sh} g_{ij} f_j + 2(g_{ij}^2 + b_{ij}^2)(e_i - e_j) \quad (221)$$

$$\frac{\partial I_l^2(\mathbf{e}, \mathbf{f})}{\partial e_j} = -2b_{ij}^{sh} b_{ij} e_i + 2b_{ij}^{sh} g_{ij} f_i + 2(g_{ij}^2 + b_{ij}^2)(e_i - e_j) \quad (222)$$

$$\frac{\partial I_l^2(\mathbf{e}, \mathbf{f})}{\partial f_i} = 2b_{ij}^{sh} (b_{ij}^{sh} + 2b_{ij}) f_i - 2b_{ij}^{sh} b_{ij} f_j + 2b_{ij}^{sh} g_{ij} e_j + 2(g_{ij}^2 + b_{ij}^2)(f_i - f_j) \quad (223)$$

$$\frac{\partial I_l^2(\mathbf{e}, \mathbf{f})}{\partial f_j} = -2b_{ij}^{sh} b_{ij} f_i - 2b_{ij}^{sh} g_{ij} e_i + 2(g_{ij}^2 + b_{ij}^2)(f_i - f_j) \quad (224)$$

$$\frac{\partial I_l^2(\mathbf{e}, \mathbf{f})}{\partial P_{g_i}} = \frac{\partial I_l^2(\mathbf{e}, \mathbf{f})}{\partial P_{g_j}} = \frac{\partial I_l^2(\mathbf{e}, \mathbf{f})}{\partial P_{g_i}^f} = \frac{\partial I_l^2(\mathbf{e}, \mathbf{f})}{\partial P_{g_j}^f} = \frac{\partial I_l^2(\mathbf{e}, \mathbf{f})}{\partial Q_{g_i}} = \frac{\partial I_l^2(\mathbf{e}, \mathbf{f})}{\partial Q_{g_j}} = 0 \quad (225)$$

As derivadas de segunda ordem de  $I_l^2(\mathbf{e}, \mathbf{f})$  em função do vetor de variáveis de decisão podem ser expressas por:

$$\frac{\partial^2 I_l^2(\mathbf{e}, \mathbf{f})}{(\partial e_i)^2} = 2b_{ij}^{sh} (b_{ij}^{sh} + 2b_{ij}) + 2(g_{ij}^2 + b_{ij}^2) \quad (226)$$

$$\frac{\partial^2 I_l^2(\mathbf{e}, \mathbf{f})}{\partial e_i \partial e_j} = -2b_{ij}^{sh} b_{ij} - 2(g_{ij}^2 + b_{ij}^2) \quad (227)$$

$$\frac{\partial^2 I_l^2(\mathbf{e}, \mathbf{f})}{\partial e_i \partial f_i} = 0 \quad (228)$$

$$\frac{\partial^2 I_l^2(\mathbf{e}, \mathbf{f})}{\partial e_i \partial f_j} = -2b_{ij}^{sh} g_{ij} \quad (229)$$

$$\frac{\partial^2 I_l^2(\mathbf{e}, \mathbf{f})}{\partial e_j \partial e_i} = -2b_{ij}^{sh} b_{ij} + 2(g_{ij}^2 + b_{ij}^2) \quad (230)$$

$$\frac{\partial^2 I_l^2(\mathbf{e}, \mathbf{f})}{(\partial e_j)^2} = -2(g_{ij}^2 + b_{ij}^2) \quad (231)$$

$$\frac{\partial^2 I_l^2(\mathbf{e}, \mathbf{f})}{\partial e_j \partial f_i} = 2b_{ij}^{sh} g_{ij} \quad (232)$$

$$\frac{\partial^2 I_l^2(\mathbf{e}, \mathbf{f})}{\partial e_j \partial f_j} = 0 \quad (233)$$

$$\frac{\partial^2 I_l^2(\mathbf{e}, \mathbf{f})}{\partial f_i \partial e_i} = 0 \quad (234)$$

$$\frac{\partial^2 I_l^2(\mathbf{e}, \mathbf{f})}{\partial f_i \partial e_j} = 2b_{ij}^{sh} g_{ij} \quad (235)$$

$$\frac{\partial^2 I_l^2(\mathbf{e}, \mathbf{f})}{(\partial f_i)^2} = 2b_{ij}^{sh} (b_{ij}^{sh} + 2b_{ij}) + 2(g_{ij}^2 + b_{ij}^2) \quad (236)$$

$$\frac{\partial^2 I_l^2(\mathbf{e}, \mathbf{f})}{\partial f_i \partial f_j} = -2b_{ij}^{sh} b_{ij} - 2(g_{ij}^2 + b_{ij}^2) \quad (237)$$

$$\frac{\partial^2 I_l^2(\mathbf{e}, \mathbf{f})}{\partial f_j \partial e_i} = -2b_{ij}^{sh} g_{ij} \quad (238)$$

$$\frac{\partial^2 I_l^2(\mathbf{e}, \mathbf{f})}{\partial f_j \partial e_j} = 0 \quad (239)$$

$$\frac{\partial^2 I_l^2(\mathbf{e}, \mathbf{f})}{\partial f_j \partial f_i} = -2b_{ij}^{sh} b_{ij} + 2(g_{ij}^2 + b_{ij}^2) \quad (240)$$

$$\frac{\partial^2 I_l^2(\mathbf{e}, \mathbf{f})}{\partial f_j \partial f_j} = -2(g_{ij}^2 + b_{ij}^2) \quad (241)$$

Todas as restantes derivadas de segunda ordem são nulas. Note-se que, uma vez que  $I_l^2(\mathbf{e}, \mathbf{f})$  é uma função quadrática das variáveis de decisão, as segundas derivadas são funções constantes. Reescrevendo as derivadas de primeira e segunda ordem no formato matricial tem-se as equações apresentadas na seção 4.3. A inclusão de limites de transmissão no Problema de Minimização de Corte de Carga resulta na formulação apresentada em (132).

## APÊNDICE B – MÉTODO DE PONTOS INTERIORES E SUAS VARIANTES

Neste apêndice, apresenta-se o método de pontos de interiores e variantes, tendo por base a referência (SOUZA SALGADO, 2017).

### B.1 MÉTODO PRIMAL-DUAL DE PONTOS INTERIORES

Considere-se o problema de otimização com restrições escrito na sua forma compacta como se mostra em seguida:

$$\begin{aligned}
 &\text{minimizar} && f(\mathbf{x}) \\
 &\text{sujeito a} && \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \\
 &&& \mathbf{h}(\mathbf{x}) - \mathbf{h}^{\min} \geq \mathbf{0} \\
 &&& \mathbf{h}(\mathbf{x}) - \mathbf{h}^{\max} \leq \mathbf{0}
 \end{aligned} \tag{242}$$

onde  $\mathbf{x}$  é o vetor das variáveis de decisão,  $f(\mathbf{x})$  é a função objetivo do problema de otimização,  $\mathbf{g}(\mathbf{x})$  e  $\mathbf{h}(\mathbf{x})$  os vetores de funções escalares que representam, respectivamente, as restrições de igualdade e desigualdade do problema de otimização e  $\mathbf{h}^{\min}, \mathbf{h}^{\max}$  os vetores cujos elementos são os limites inferiores e superiores das variáveis e das restrições de desigualdade. Considera-se ainda que  $f(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{g}(\mathbf{x})$  e  $\mathbf{h}(\mathbf{x})$  são funções suaves.

Reescrevendo o problema apresentado em (242), transformando a desigualdade apresentada numa igualdade introduzindo vetores  $s_l$  e  $s_u$  de variáveis de folga associados a tal que  $s_l, s_u \geq 0$ , tem-se

$$\begin{aligned}
 &\text{minimizar} && f(\mathbf{x}) \\
 &\text{sujeito a} && \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \\
 &&& \mathbf{h}(\mathbf{x}) - s_l - \mathbf{h}^{\min} = \mathbf{0} \\
 &&& \mathbf{h}(\mathbf{x}) + s_u - \mathbf{h}^{\max} = \mathbf{0} \\
 &&& s_l, s_u \geq \mathbf{0}
 \end{aligned} \tag{243}$$

Associando ao problema não linear apresentado em (243) o método de barreira, afim de garantir a não negatividade das variáveis de folga, o problema não linear pode ser reescrito na forma

$$\begin{aligned}
 &\text{minimizar} && f(\mathbf{x}) - \mu \sum_i (\ln s_{l_i} + \ln s_{u_i}) \\
 &\text{sujeito a} && \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \\
 &&& \mathbf{h}(\mathbf{x}) - s_l - \mathbf{h}^{\min} = \mathbf{0} \\
 &&& \mathbf{h}(\mathbf{x}) + s_u - \mathbf{h}^{\max} = \mathbf{0}
 \end{aligned} \tag{244}$$

O parâmetro  $\mu$ , usualmente denominado de parâmetro de barreira, é um escalar positivo pequeno tal que, conforme o seu valor converge para zero, as soluções

iterativas do problema (244) convergem para a solução ótima<sup>1</sup>.

A função Lagrangeana  $\mathcal{L}(\cdot) := \mathcal{L}(\mathbf{x}, \mu, \mathbf{s}_l, \mathbf{s}_u, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\pi}_l, \boldsymbol{\pi}_u)$  do problema apresentado na equação (244) é

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\cdot) = f(\mathbf{x}) - \mu \sum_i (\ln s_{l_i} + \ln s_{u_i}) \\ - \boldsymbol{\lambda}^t \mathbf{g}(\mathbf{x}) - \boldsymbol{\pi}_l^t [\mathbf{h}(\mathbf{x}) - \mathbf{s}_l - \mathbf{h}^{min}] - \boldsymbol{\pi}_u^t [\mathbf{h}(\mathbf{x}) + \mathbf{s}_u - \mathbf{h}^{max}] \end{aligned} \quad (245)$$

onde  $\boldsymbol{\lambda}$ ,  $\boldsymbol{\pi}_l$  e  $\boldsymbol{\pi}_u$  são vetores contendo os multiplicadores de Lagrange associados às restrições de igualdade e desigualdade, respectivamente.

As condições de Karush-Kuhn-Tucker para o problema não linear apresentado em (244) podem ser escritas como

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{x}} \mathcal{L}(\cdot) &= \mathbf{0} = \nabla_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) - \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{g}(\mathbf{x})^t \boldsymbol{\lambda} - \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{h}(\mathbf{x})^t (\boldsymbol{\pi}_l + \boldsymbol{\pi}_u) \\ \nabla_{\mathbf{s}_l} \mathcal{L}(\cdot) &= \mathbf{0} = \mu \mathbf{u} - \mathbf{S}_l \boldsymbol{\pi}_l \\ \nabla_{\mathbf{s}_u} \mathcal{L}(\cdot) &= \mathbf{0} = \mu \mathbf{u} + \mathbf{S}_u \boldsymbol{\pi}_u \\ \nabla_{\boldsymbol{\lambda}} \mathcal{L}(\cdot) &= \mathbf{0} = -\mathbf{g}(\mathbf{x}) \\ \nabla_{\boldsymbol{\pi}_l} \mathcal{L}(\cdot) &= \mathbf{0} = -[\mathbf{h}(\mathbf{x}) - \mathbf{s}_l - \mathbf{h}^{min}] \\ \nabla_{\boldsymbol{\pi}_u} \mathcal{L}(\cdot) &= \mathbf{0} = -[\mathbf{h}(\mathbf{x}) + \mathbf{s}_u - \mathbf{h}^{max}] \\ \mathbf{s}_l, \mathbf{s}_u, \boldsymbol{\pi}_l &\geq \mathbf{0}, \boldsymbol{\pi}_u \leq \mathbf{0} \end{aligned} \quad (246)$$

onde  $\nabla_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x})$  representa a primeira derivada de  $f(\mathbf{x})$  em ordem a  $\mathbf{x}$ ,  $\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{g}(\mathbf{x})$  e  $\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{h}(\mathbf{x})$  são as matrizes Jacobianas das funções  $\mathbf{g}(\mathbf{x})$  e  $\mathbf{h}(\mathbf{x})$ , respectivamente,  $\mathbf{S}_l$  e  $\mathbf{S}_u$  são as matrizes que resultam da diagonalização dos vetores de variáveis de folga  $\mathbf{s}_l$  e  $\mathbf{s}_u$ ,  $\boldsymbol{\lambda}$  o vetor de multiplicadores de Lagrange associados às restrições de igualdade,  $\mathbf{u}$  é um vetor unitário com a mesma dimensão de  $\mathbf{s}_l$ ,  $\mathbf{s}_l, \mathbf{s}_u, \boldsymbol{\pi}_l \geq \mathbf{0}$  e  $\boldsymbol{\pi}_u \leq \mathbf{0}$  são as restrições de não negatividade e de sinal correspondentes às variáveis de folga e aos multiplicadores de Lagrange associados às restrições de desigualdade<sup>2</sup>.

A resolução do sistema de equações apresentado em (246) fornece um ponto estacionário para o problema de otimização não linear em estudo. Caso esse ponto estacionário não seja ainda o ponto ótimo de solução, aplica-se o Método de Newton-Raphson com o intuito de obter um passo de descida. O sistema de equações lineares

<sup>1</sup> Note-se que a sequência de parâmetros  $\{\mu_k\}_{k=0}^{\infty}$  gera uma sequência de subproblemas dados pela equação (244) tais que, sob determinadas condições de regularidade, se  $\mu \rightarrow 0$ , então as soluções da sequência  $\{\mathbf{x}(\mu_k)\}_{k=0}^{\infty}$  aproxima-se do mínimo local do problema apresentado na equação 243 (**Teorema de Fiacco & McCormick (FIACCO; MCCORMICK, 1968)**).

<sup>2</sup> Atendendo ao método de Fiacco e McCormick, pretende-se construir uma trajetória o mais central possível até ao ponto ótimo. Para tal, penaliza-se a vizinhança da trajetória através dos limites da região viável definida pelas restrições de desigualdade. Assim, pressupõe-se que o ponto inicial para o método iterativo pertença ao interior da região viável e portanto esse ponto é tal que  $\mathbf{s}_l, \mathbf{s}_u, \boldsymbol{\pi}_l \geq \mathbf{0}$  e  $\boldsymbol{\pi}_u \leq \mathbf{0}$ .

a ser resolvido em cada iteração do algoritmo é:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{H}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\pi}_l, \boldsymbol{\pi}_u) \Delta \mathbf{x} - \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{g}(\mathbf{x})^t \Delta \boldsymbol{\lambda} - \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{h}(\mathbf{x})^t (\Delta \boldsymbol{\pi}_l + \Delta \boldsymbol{\pi}_u) &= -\mathbf{t} \\
 -\boldsymbol{\Pi}_l \Delta \mathbf{s}_l - \mathbf{S}_l \Delta \boldsymbol{\pi}_l &= -(\mu \mathbf{u} - \mathbf{S}_l \boldsymbol{\pi}_l) \\
 \boldsymbol{\Pi}_u \Delta \mathbf{s}_u + \mathbf{S}_u \Delta \boldsymbol{\pi}_u &= -(\mu \mathbf{u} + \mathbf{S}_u \boldsymbol{\pi}_u) \\
 -\mathbf{J}(\mathbf{x}) \Delta \mathbf{x} &= \mathbf{g}(\mathbf{x}) \\
 -\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{h}(\mathbf{x}) \Delta \mathbf{x} + \Delta \mathbf{s}_l &= \mathbf{h}(\mathbf{x}) - \mathbf{s}_l - \mathbf{h}^{min} \\
 -\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{h}(\mathbf{x}) \Delta \mathbf{x} - \Delta \mathbf{s}_u &= \mathbf{h}(\mathbf{x}) + \mathbf{s}_u - \mathbf{h}^{max}
 \end{aligned} \tag{247}$$

onde

$$\mathbf{H}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\pi}_l, \boldsymbol{\pi}_u) = \nabla_{\mathbf{x}}^2 f(\mathbf{x}) - \sum_i \lambda_i \nabla_{\mathbf{x}}^2 g_i(\mathbf{x}) - \sum_j (\pi_{l_j} + \pi_{u_j}) \nabla_{\mathbf{x}}^2 h_j(\mathbf{x}) \tag{248}$$

é a matriz de segundas derivadas da função Lagrangeana em relação às variáveis de otimização,  $\boldsymbol{\Pi}_l, \boldsymbol{\Pi}_u$  são as matrizes resultantes da diagonalização dos vetores  $\boldsymbol{\pi}_l$  e  $\boldsymbol{\pi}_u$ , respectivamente;

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}) = \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{g}(\mathbf{x}) \tag{249}$$

é o vetor gradiente de  $\mathbf{g}(\mathbf{x})$  derivado em ordem a  $\mathbf{x}$ ;  $\nabla_{\mathbf{x}}^2 f(\mathbf{x})$ ,  $\nabla_{\mathbf{x}}^2 \mathbf{g}(\mathbf{x})$  e  $\nabla_{\mathbf{x}}^2 \mathbf{h}(\mathbf{x})$  são as matrizes de segundas derivadas de  $f(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{g}(\mathbf{x})$  e  $\mathbf{h}(\mathbf{x})$ , respectivamente;

$$\mathbf{t} = \nabla_{\mathbf{x}} \mathcal{L}(\cdot) = \nabla_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) - \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{g}(\mathbf{x})^t \boldsymbol{\lambda} - \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{h}(\mathbf{x})^t (\boldsymbol{\pi}_l + \boldsymbol{\pi}_u) \tag{250}$$

O sistema de equações apresentado na equação (247) reescrito na forma matricial resulta em

$$\mathbf{W}(\mathbf{x}, \mu, \mathbf{s}_l, \mathbf{s}_u, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\pi}_l, \boldsymbol{\pi}_u) \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{x} \\ \Delta \mathbf{s}_l \\ \Delta \mathbf{s}_u \\ \Delta \boldsymbol{\lambda} \\ \Delta \boldsymbol{\pi}_l \\ \Delta \boldsymbol{\pi}_u \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ \mu \mathbf{u} - \mathbf{S}_l \boldsymbol{\pi}_l \\ \mu \mathbf{u} + \mathbf{S}_u \boldsymbol{\pi}_u \\ -\mathbf{g}(\mathbf{x}) \\ -(\mathbf{h}(\mathbf{x}) - \mathbf{s}_l - \mathbf{h}^{min}) \\ -(\mathbf{h}(\mathbf{x}) + \mathbf{s}_u - \mathbf{h}^{max}) \end{bmatrix} \tag{251}$$

onde a matriz  $\mathbf{W}(\mathbf{x}, \mu, \mathbf{s}_l, \mathbf{s}_u, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\pi}_l, \boldsymbol{\pi}_u)$  é tal que

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\pi}_l, \boldsymbol{\pi}_u) & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{g}(\mathbf{x})^t & -\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{h}(\mathbf{x})^t & -\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{h}(\mathbf{x})^t \\ \mathbf{0} & -\boldsymbol{\Pi}_l & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{S}_l & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{\Pi}_u & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{S}_u \\ -\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{g}(\mathbf{x}) & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{h}(\mathbf{x}) & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{h}(\mathbf{x}) & \mathbf{0} & -\mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \tag{252}$$

onde  $\mathbf{I}$  é a matriz identidade com as mesmas dimensões da matriz  $\mathbf{S}_l$ .

Depois de determinado o passo

$$\Delta p = (\Delta \mathbf{x}, \Delta \mathbf{s}_l, \Delta \mathbf{s}_u, \Delta \boldsymbol{\lambda}, \Delta \boldsymbol{\pi}_l, \Delta \boldsymbol{\pi}_u)$$

por meio da resolução do sistema de equações (251), a atualização das variáveis primais e duais é dada por

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{k+1} &= \mathbf{x}^k + \alpha_s \Delta \mathbf{x} \\ \mathbf{s}_l^{k+1} &= \mathbf{s}_l^k + \alpha_s \Delta \mathbf{s}_l \\ \mathbf{s}_u^{k+1} &= \mathbf{s}_u^k + \alpha_s \Delta \mathbf{s}_u \\ \boldsymbol{\lambda}^{k+1} &= \boldsymbol{\lambda}^k + \alpha_\pi \Delta \boldsymbol{\lambda} \\ \boldsymbol{\pi}_l^{k+1} &= \boldsymbol{\pi}_l^k + \alpha_\pi \Delta \boldsymbol{\pi}_l \\ \boldsymbol{\pi}_u^{k+1} &= \boldsymbol{\pi}_u^k + \alpha_\pi \Delta \boldsymbol{\pi}_u \end{aligned} \quad (253)$$

onde  $\alpha_s$  e  $\alpha_\pi$  são os comprimentos dos passos das variáveis primais e duais, respectivamente, que buscam garantir a não negatividade das variáveis de folga e assegurar a redução na função objetivo do problema não linear apresentado inicialmente e que é representada pela função Lagrangeana  $\mathcal{L}(\cdot)$ . A determinação de  $\alpha_s$  e  $\alpha_\pi$  verifica as seguintes equações (BARBOZA, 2001):

$$\begin{aligned} \alpha_s &= \min \left( \min_{\Delta s_{l_j} < 0} \frac{s_{l_j}}{|\Delta s_{l_j}|} \sigma, \min_{\Delta s_{u_j} < 0} \frac{s_{u_j}}{|\Delta s_{u_j}|} \sigma, 1 \right) \\ \alpha_\pi &= \min \left( \min_{\Delta \pi_{l_j} < 0} \frac{\pi_{l_j}}{|\Delta \pi_{l_j}|} \sigma, \min_{\Delta \pi_{u_j} > 0} \frac{-\pi_{u_j}}{|\Delta \pi_{u_j}|} \sigma, 1 \right) \end{aligned} \quad (254)$$

onde  $\sigma = 0,99995$  é uma constante adicionada apenas para garantir que as variáveis  $s_l, s_u, \pi_l$  e  $\pi_u$  não se anulem (YAN; QUINTANA, 1997).

O parâmetro de barreira  $\mu$  é atualizado no final de cada iteração através da equação

$$\mu = \frac{\mathbf{s}_l^t \boldsymbol{\pi}_l - \mathbf{s}_u^t \boldsymbol{\pi}_u}{2l\beta} \quad (255)$$

onde  $\mathbf{s}_l^t \boldsymbol{\pi}_l - \mathbf{s}_u^t \boldsymbol{\pi}_u$  é o *gap* de complementaridade do problema de otimização,  $l$  é o número de variáveis ou funções que possuem limites (número de restrições de desigualdade do problema de otimização) e  $\beta$  é uma constante tal que  $10 \leq \beta \leq 20$  que controla o decréscimo de  $\mu$  (IRISARRI *et al.*, 1997; BARBOZA, 2001).

---

#### **Algoritmo 12** Método primal-dual de pontos interiores

---

Sejam  $\epsilon_{\mathcal{L}}, \epsilon_\mu$  as tolerâncias para as normas euclidianas do vetor gradiente da função Lagrangeana Aumentada  $\nabla \mathcal{L}(\cdot)$  e para o parâmetro de barreira  $\mu$ , respectivamente.

- 1: Inicialização das variáveis;
- 2: Cálculo do vetor gradiente da função Lagrangeana Aumentada (equação (245));

- 3: Teste de convergência: Se  $\|\nabla \mathcal{L}(\cdot)\|_2 < \epsilon_{\mathcal{L}}$  e  $\|\mu\|_2 < \epsilon_{\mu}$ , parar processo iterativo. Senão, segue para o Passo 4.
- 4: Cálculo e fatoração da matriz  $W$  (equação (252));
- 5: Resolução da equação (251);
- 6: Determinação dos fatores de passo nos espaços primal e dual (equação (254)) e determinação do novo valor do parâmetro de barreira  $\mu$  (equação (255));
- 7: Atualização das variáveis de otimização (equação (253)); Seguir para o Passo 2.

### B.1.1 Método preditor-corretor primal-dual de pontos interiores

No Método Primal-Dual de Pontos Interiores apenas os termos lineares de primeira ordem são modelados (WU; DEBS; MARSTEN, 1994). A atualização das variáveis de otimização a partir do uso do passo de Newton verifica as equações apresentadas na equação (253). Ao invés de aplicar o método de Newton-Raphson às condições de otimalidade de Karush-Kunt-Tucker para obter termos de correção para a estimativa atual, este novo ponto pode ser substituído diretamente na equação das condições de otimalidade (WU; DEBS; MARSTEN, 1994; TORRES; HUGO QUINTANA; LAMBERT-TORRES, 1996), obtendo-se

$$\begin{aligned}
 \nabla_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}) - \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{g}(\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x})^t (\boldsymbol{\lambda} + \Delta \boldsymbol{\lambda}) - \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{h}(\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x})^t [(\boldsymbol{\pi}_l + \Delta \boldsymbol{\pi}_l) + (\boldsymbol{\pi}_u + \Delta \boldsymbol{\pi}_u)] &= \mathbf{0} \\
 \mu \mathbf{u} - (\mathbf{S}_l + \Delta \mathbf{S}_l)(\boldsymbol{\pi}_l + \Delta \boldsymbol{\pi}_l) &= \mathbf{0} \\
 \mu \mathbf{u} + (\mathbf{S}_u + \Delta \mathbf{S}_u)(\boldsymbol{\pi}_u + \Delta \boldsymbol{\pi}_u) &= \mathbf{0} \\
 -\mathbf{g}(\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}) &= \mathbf{0} \\
 -[\mathbf{h}(\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}) - (\mathbf{s}_l + \Delta \mathbf{s}_l) - \mathbf{h}^{min}] &= \mathbf{0} \\
 -[\mathbf{h}(\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}) + (\mathbf{s}_u + \Delta \mathbf{s}_u) - \mathbf{h}^{max}] &= \mathbf{0} \\
 \mathbf{s}_l, \mathbf{s}_u, \boldsymbol{\pi}_l &\geq \mathbf{0}, \boldsymbol{\pi}_u \leq \mathbf{0}
 \end{aligned} \tag{256}$$

Expandindo os termos não lineares da equação (256) em série de Taylor até ao termo de primeira ordem, em torno do ponto  $(\mathbf{x}, \mu, \mathbf{s}_l, \mathbf{s}_u, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\pi}_l, \boldsymbol{\pi}_u)$  e na direção  $(\Delta \mathbf{x}, \Delta \mathbf{s}_l, \Delta \mathbf{s}_u, \Delta \boldsymbol{\lambda}, \Delta \boldsymbol{\pi}_l, \Delta \boldsymbol{\pi}_u)$ , obtém-se

$$\begin{aligned}
 \nabla_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}) &= \nabla_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) + \nabla_{\mathbf{x}}^2 f(\mathbf{x}) \Delta \mathbf{x} \\
 \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{g}(\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}) &= \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{g}(\mathbf{x}) + \nabla_{\mathbf{x}}^2 \mathbf{g}(\mathbf{x}) \Delta \mathbf{x} \\
 \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{h}(\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}) &= \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{h}(\mathbf{x}) + \nabla_{\mathbf{x}}^2 \mathbf{h}(\mathbf{x}) \Delta \mathbf{x} \\
 \mathbf{g}(\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}) &= \mathbf{g}(\mathbf{x}) + \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{g}(\mathbf{x}) \Delta \mathbf{x} \\
 \mathbf{h}(\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}) &= \mathbf{h}(\mathbf{x}) + \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{h}(\mathbf{x}) \Delta \mathbf{x}
 \end{aligned} \tag{257}$$

Substituindo as equações (257) na primeira equação das condições de Karush-Kuhn-Tucker ((256)) tem-se

$$\begin{aligned}
 & \nabla_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) + \nabla_{\mathbf{x}}^2 f(\mathbf{x}) \Delta \mathbf{x} - (\nabla_{\mathbf{x}} g(\mathbf{x}) + \nabla_{\mathbf{x}}^2 g(\mathbf{x}) \Delta \mathbf{x})^t (\boldsymbol{\lambda} + \Delta \boldsymbol{\lambda}) - \\
 & \quad (\nabla_{\mathbf{x}} h(\mathbf{x}) + \nabla_{\mathbf{x}}^2 h(\mathbf{x}) \Delta \mathbf{x})^t [(\boldsymbol{\pi}_l + \Delta \boldsymbol{\pi}_l)(\boldsymbol{\pi}_u + \Delta \boldsymbol{\pi}_u)] = \mathbf{0} \\
 & \quad \Leftrightarrow \\
 & \nabla_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) + \nabla_{\mathbf{x}}^2 f(\mathbf{x}) \Delta \mathbf{x} - \nabla_{\mathbf{x}} g(\mathbf{x})^t \boldsymbol{\lambda} - \nabla_{\mathbf{x}} g(\mathbf{x})^t \Delta \boldsymbol{\lambda} - (\nabla_{\mathbf{x}}^2 g(\mathbf{x}) \Delta \mathbf{x})^t \boldsymbol{\lambda} - \\
 & \quad (\nabla_{\mathbf{x}}^2 g(\mathbf{x}) \Delta \mathbf{x})^t \Delta \boldsymbol{\lambda} - \nabla_{\mathbf{x}} h(\mathbf{x})^t [\boldsymbol{\pi}_l + \boldsymbol{\pi}_u] - \nabla_{\mathbf{x}} h(\mathbf{x})^t [\Delta \boldsymbol{\pi}_l + \Delta \boldsymbol{\pi}_u] \\
 & \quad - (\nabla_{\mathbf{x}}^2 h(\mathbf{x}) \Delta \mathbf{x})^t [\boldsymbol{\pi}_l + \boldsymbol{\pi}_u] - (\nabla_{\mathbf{x}}^2 h(\mathbf{x}) \Delta \mathbf{x})^t [\Delta \boldsymbol{\pi}_l + \Delta \boldsymbol{\pi}_u] = \mathbf{0} \quad (258)
 \end{aligned}$$

Os termos que envolvem segundas derivadas podem ser reescritos da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 & (\nabla_{\mathbf{x}}^2 g(\mathbf{x}) \Delta \mathbf{x})^t \boldsymbol{\lambda} = \sum_i [\lambda_i \nabla_{\mathbf{x}}^2 g_i(\mathbf{x})] \Delta \mathbf{x} \\
 & (\nabla_{\mathbf{x}}^2 g(\mathbf{x}) \Delta \mathbf{x})^t \Delta \boldsymbol{\lambda} = \sum_i [\Delta \lambda_i \nabla_{\mathbf{x}}^2 g_i(\mathbf{x})] \Delta \mathbf{x} \\
 & (\nabla_{\mathbf{x}}^2 h(\mathbf{x}) \Delta \mathbf{x})^t [\boldsymbol{\pi}_l + \boldsymbol{\pi}_u] = \sum_j [(\pi_{l_j} + \pi_{u_j}) \nabla_{\mathbf{x}}^2 h_j(\mathbf{x})] \Delta \mathbf{x} \\
 & (\nabla_{\mathbf{x}}^2 h(\mathbf{x}) \Delta \mathbf{x})^t [\Delta \boldsymbol{\pi}_l + \Delta \boldsymbol{\pi}_u] = \sum_j [(\Delta \pi_{l_j} + \Delta \pi_{u_j}) \nabla_{\mathbf{x}}^2 h_j(\mathbf{x})] \Delta \mathbf{x} \quad (259)
 \end{aligned}$$

Substituindo as equações (259) na equação (258) e reescrevendo-a tem-se

$$\begin{aligned}
 & \left[ \nabla_{\mathbf{x}}^2 f(\mathbf{x}) - \sum_i [\lambda_i \nabla_{\mathbf{x}}^2 g_i(\mathbf{x})] - \sum_j [(\pi_{l_j} + \pi_{u_j}) \nabla_{\mathbf{x}}^2 h_j(\mathbf{x})] \right] \Delta \mathbf{x} \\
 & \quad - \nabla_{\mathbf{x}} g(\mathbf{x})^t \Delta \boldsymbol{\lambda} - \nabla_{\mathbf{x}} h(\mathbf{x})^t [\Delta \boldsymbol{\pi}_l + \Delta \boldsymbol{\pi}_u] = \\
 & \quad - [\nabla_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) - \nabla_{\mathbf{x}} g(\mathbf{x})^t \boldsymbol{\lambda} - \nabla_{\mathbf{x}} h(\mathbf{x})^t [\boldsymbol{\pi}_l + \boldsymbol{\pi}_u]] \\
 & \quad + \left[ \sum_i [\Delta \lambda_i \nabla_{\mathbf{x}}^2 g_i(\mathbf{x})] + \sum_j [(\Delta \pi_{l_j} + \Delta \pi_{u_j}) \nabla_{\mathbf{x}}^2 h_j(\mathbf{x})] \right] \Delta \mathbf{x} \quad (260)
 \end{aligned}$$

As outras equações das condições de Karush-Kuhn-Tucker são expressas como

$$\begin{aligned}
 & -\Pi_l \Delta \mathbf{s}_l - \mathbf{S}_l \Delta \boldsymbol{\pi}_l = -(\mu \mathbf{u} - \mathbf{S}_l \boldsymbol{\pi}_l) + \Delta \mathbf{S}_l \Delta \boldsymbol{\pi}_l \\
 & \Pi_u \Delta \mathbf{s}_u + \mathbf{S}_u \Delta \boldsymbol{\pi}_u = -(\mu \mathbf{u} + \mathbf{S}_u \boldsymbol{\pi}_u) - \Delta \mathbf{S}_u \Delta \boldsymbol{\pi}_u \\
 & -\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{g}(\mathbf{x}) \Delta \mathbf{x} = \mathbf{g}(\mathbf{x}) \\
 & -\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{h}(\mathbf{x}) \Delta \mathbf{x} + \Delta \mathbf{s}_l = \mathbf{h}(\mathbf{x}) - \mathbf{s}_l - \mathbf{h}^{min} \\
 & -\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{h}(\mathbf{x}) \Delta \mathbf{x} - \Delta \mathbf{s}_u = \mathbf{h}(\mathbf{x}) + \mathbf{s}_u - \mathbf{h}^{min} \quad (261)
 \end{aligned}$$



Escrevendo matricialmente as equações (260) e (261) obtém-se

$$\mathbf{W}(\mathbf{x}, \mu, \mathbf{s}_l, \mathbf{s}_u, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\pi}_l, \boldsymbol{\pi}_u) \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{x} \\ \Delta \mathbf{s}_l \\ \Delta \mathbf{s}_u \\ \Delta \boldsymbol{\lambda} \\ \Delta \boldsymbol{\pi}_l \\ \Delta \boldsymbol{\pi}_u \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{t} - \mathbf{z} \\ (\mu \mathbf{u} - \mathbf{S}_l \boldsymbol{\pi}_l) - \Delta \mathbf{S}_l \Delta \boldsymbol{\pi}_l \\ (\mu \mathbf{u} + \mathbf{S}_u \boldsymbol{\pi}_u) + \Delta \mathbf{S}_u \Delta \boldsymbol{\pi}_u \\ -\mathbf{g}(\mathbf{x}) \\ -[\mathbf{h}(\mathbf{x}) - \mathbf{s}_l - \mathbf{h}^{min}] \\ -[\mathbf{h}(\mathbf{x}) + \mathbf{s}_u - \mathbf{h}^{max}] \end{bmatrix} \quad (262)$$

onde  $\mathbf{W}(\mathbf{x}, \mu, \mathbf{s}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\pi})$  e  $\mathbf{t}$  são os mesmos termos apresentados nas equações (250) (252), respectivamente, e o vetor  $\mathbf{z}$  é tal que

$$\mathbf{z} = \left[ \sum_i [\Delta \lambda_i \nabla_{\mathbf{x}}^2 g_i(\mathbf{x})] + \sum_j [(\Delta \pi_{l_j} + \Delta \pi_{u_j}) \nabla_{\mathbf{x}}^2 h_j(\mathbf{x})] \right] \Delta \mathbf{x} \quad (263)$$

Observando atentamente as equações (251), (262), associadas aos métodos Primal-Dual e Preditor-Corretor Primal-Dual, respectivamente, é possível identificar que a diferença entre os sistemas a resolver se encontra no vetor do lado direito do sistema linear. A versão Preditor-Corretor apresenta um vetor com termos não lineares, associados aos vetores  $\mathbf{z}$ ,  $\Delta \mathbf{S}_l \Delta \boldsymbol{\pi}_l$  e  $\Delta \mathbf{S}_u \Delta \boldsymbol{\pi}_u$ . Devido a esta não linearidade, a determinação do lado direito da equação (262) só pode ser realizada de forma aproximada. Para tal, despreza-se o termo  $\mathbf{z}$  na avaliação do vetor do lado direito do sistema linear, sem a perda significativa das características de convergência do processo iterativo (WU; DEBS; MARSTEN, 1994; IRISARRI *et al.*, 1997).

Mehrotra no artigo (MEHROTRA, 1992) sugere que a estimação dos termos não lineares  $\Delta \mathbf{S}_l \Delta \boldsymbol{\pi}_l$  e  $\Delta \mathbf{S}_u \Delta \boldsymbol{\pi}_u$  seja realizada em duas etapas. A primeira etapa, denominada *predição*, resolve-se o problema original, ou seja, despreza-se a influência da barreira logarítmica e resolve-se o sistema linear

$$\mathbf{W}(\mathbf{x}, \mu, \mathbf{s}_l, \mathbf{s}_u, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\pi}_l, \boldsymbol{\pi}_u) \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{x} \\ \Delta \mathbf{s}_l \\ \Delta \mathbf{s}_u \\ \Delta \boldsymbol{\lambda} \\ \Delta \boldsymbol{\pi}_l \\ \Delta \boldsymbol{\pi}_u \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ -\mathbf{S}_l \boldsymbol{\pi}_l \\ \mathbf{S}_u \boldsymbol{\pi}_u \\ -\mathbf{g}(\mathbf{x}) \\ -[\mathbf{h}(\mathbf{x}) - \mathbf{s}_l - \mathbf{h}^{min}] \\ -[\mathbf{h}(\mathbf{x}) + \mathbf{s}_u - \mathbf{h}^{max}] \end{bmatrix} \quad (264)$$

Após obter a solução do sistema, o parâmetro de barreira  $\mu$  e os termos não lineares  $\Delta \mathbf{S}_l \Delta \boldsymbol{\pi}_l$  e  $\Delta \mathbf{S}_u \Delta \boldsymbol{\pi}_u$  devem ser estimados, afim de recalculer o lado direito da equação (262) (desprezando  $\mathbf{z}$ ). O parâmetro de barreira  $\mu$  pode ser estimado usando a expressão seguinte (IRISARRI *et al.*, 1997; BARBOZA, 2001; WU; DEBS; MARSTEN, 1994)

$$\mu = \left( \frac{g \tilde{a} p}{g a p} \right)^2 \left( \frac{g \tilde{a} p}{2m} \right)^2 \quad (265)$$

onde

$$g\tilde{a}p = (s_l + \gamma \Delta s_l)^t (\pi_l + \gamma \Delta \pi_l) - (s_u + \gamma \Delta s_u)^t (\pi_u + \gamma \Delta \pi_u) \quad (266)$$

$$gap = s_l^t \pi_l - s_u^t \pi_u \quad (267)$$

são os gap complementares considerando as variáveis atualizadas ou não, respectivamente,  $m$  é o número de restrições de desigualdade somado do número de restrições de caixa e

$$\gamma = \min \left\{ \min_{\Delta s_{l_j} < 0} \frac{s_{l_j}}{|\Delta s_{l_j}|}, \min_{\Delta s_{u_j} < 0} \frac{s_{u_j}}{|\Delta s_{u_j}|}, \min_{\Delta \pi_{l_j} < 0} \frac{\pi_{l_j}}{|\Delta \pi_{l_j}|}, \min_{\Delta \pi_{u_j} > 0} \frac{-\pi_{u_j}}{|\Delta \pi_{u_j}|} \right\} \quad (268)$$

Uma vez os termos não lineares e  $\mu$  estimados, re-estima-se o termo do lado direito da equação (262) e resolve-se o sistema de equações, afim de determinar a direção de busca da iteração. Esta etapa é denominada de etapa de *correção*. Após a obtenção dos incrementos das variáveis de otimização, atualizam-se as variáveis (equação (253)), considerando os fatores de passo também atualizados (equação (254)). Em (MEHROTRA, 1992), sugere-se ainda que se utilize, na etapa de correção, a mesma matriz fatorada na etapa da predição. Adotando esta sugestão, a fatoração da matriz de coeficientes do sistema linear é apenas realizada na etapa da predição.

No que se segue é apresentado o algoritmo para a resolução de um problema de otimização utilizando o Método Preditor-Corretor Primal-Dual de Pontos Interiores.

---

**Algoritmo 13** Método preditor-corretor primal-dual de pontos interiores

---

Sejam  $\epsilon_{\mathcal{L}}, \epsilon_{\mu}$  as tolerâncias para as normas euclidianas do vetor gradiente da função Lagrangeana Aumentada  $\nabla \mathcal{L}(\mathbf{x}, \mu, \mathbf{s}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\pi})$  e para o parâmetro de barreira  $\mu$ , respectivamente.

- 1: Inicialização das variáveis;
  - 2: Cálculo do vetor gradiente da função Lagrangeana Aumentada (equação (246));
  - 3: Teste de convergência: Se  $\|\nabla \mathcal{L}(\mathbf{x}, \mu, \mathbf{s}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\pi})\|_2 < \epsilon_{\mathcal{L}}$  e  $\|\mu\|_2 < \epsilon_{\mu}$ , parar processo iterativo. Senão, segue para o Passo 4.
  - 4: Cálculo e fatoração da matriz  $W$  (equação (252));
  - 5: *Etapa de Predição*: Resolução da equação (264) e estimação dos termos não-lineares e  $\mu$  (265);
  - 6: *Etapa de Correção*: Resolução da equação (262);
  - 7: Determinação dos fatores de passo nos espaços primal e dual (equação (254)) e determinação do novo valor do parâmetro de barreira  $\mu$  (equação (255));
  - 8: Atualização das variáveis de otimização (equação (253)); Seguir para o Passo 2.
-

### B.1.2 Métodos primal-dual e preditor-corretor primal-dual de pontos interiores reduzidos

No Método Primal-Dual de Pontos Interiores, o sistema representado na equação (251) pode ser significativamente reduzido de forma a que a sua dimensão não dependa do número de restrições de desigualdade do problema (GRANVILLE; MELLO; MELO, 1996; BARBOZA, 2001). Para tal, considere-se as seguintes equações

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_l &\equiv \mu \mathbf{u} - \mathbf{S}_l \boldsymbol{\pi}_l \\ \mathbf{v}_u &\equiv \mu \mathbf{u} + \mathbf{S}_u \boldsymbol{\pi}_u \\ \mathbf{y}_l &\equiv -[\mathbf{h}(\mathbf{x}) - \mathbf{s}_l - \mathbf{h}^{min}] \\ \mathbf{y}_u &\equiv -[\mathbf{h}(\mathbf{x}) + \mathbf{s}_u - \mathbf{h}^{max}] \end{aligned} \quad (269)$$

e reescreva-se as equações 247 do seguinte modo

$$\begin{aligned} -\boldsymbol{\Pi}_l \Delta \mathbf{s}_l - \mathbf{S}_l \Delta \boldsymbol{\pi}_l &= -\mathbf{v}_l \\ \boldsymbol{\Pi}_u \Delta \mathbf{s}_u + \mathbf{S}_u \Delta \boldsymbol{\pi}_u &= -\mathbf{v}_u \\ -\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{h}(\mathbf{x}) \Delta \mathbf{x} + \Delta \mathbf{s}_l &= -\mathbf{y}_l \\ -\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{h}(\mathbf{x}) \Delta \mathbf{x} - \Delta \mathbf{s}_u &= -\mathbf{y}_u \end{aligned} \quad (270)$$

A partir das duas últimas equações têm-se

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{s}_l &= \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{h}(\mathbf{x}) \Delta \mathbf{x} - \mathbf{y}_l \\ \Delta \mathbf{s}_u &= -\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{h}(\mathbf{x}) \Delta \mathbf{x} + \mathbf{y}_u \end{aligned} \quad (271)$$

e substituindo  $\Delta \mathbf{s}_l$  e  $\Delta \mathbf{s}_u$  por (271) nas primeiras equações de (270) obtém-se

$$\begin{aligned} \Delta \boldsymbol{\pi}_l &= \mathbf{S}_l^{-1} [\mathbf{v}_l - \boldsymbol{\Pi}_l (\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{h}(\mathbf{x}) \Delta \mathbf{x} - \mathbf{y}_l)] \\ \Delta \boldsymbol{\pi}_u &= \mathbf{S}_u^{-1} [-\mathbf{v}_u - \boldsymbol{\Pi}_u (-\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{h}(\mathbf{x}) \Delta \mathbf{x} + \mathbf{y}_u)] \end{aligned} \quad (272)$$

A substituição da equação (272) na primeira equação do conjunto de equações (247) resulta na seguinte equação

$$\begin{aligned} [\mathbf{H}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\pi}_l, \boldsymbol{\pi}_u) + \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{h}(\mathbf{x})^t [\mathbf{S}_l^{-1} \boldsymbol{\Pi}_l - \mathbf{S}_u^{-1} \boldsymbol{\Pi}_u] \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{h}(\mathbf{x})] \Delta \mathbf{x} - \mathbf{J}(\mathbf{x})^t \Delta \boldsymbol{\lambda} \\ = -\mathbf{t} + \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{h}(\mathbf{x})^t [\mathbf{S}_l^{-1} [\mathbf{v}_l + \boldsymbol{\Pi}_l \mathbf{y}_l] - \mathbf{S}_u^{-1} [\mathbf{v}_u + \boldsymbol{\Pi}_u \mathbf{y}_u]] \\ \Leftrightarrow \tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{x}, \mathbf{s}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\pi}) - \mathbf{J}(\mathbf{x})^t \Delta \boldsymbol{\lambda} = \tilde{\mathbf{t}} \end{aligned} \quad (273)$$

que em conjunto com a quarta equação de (247) forma o seguinte sistema linear reduzido

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{x}, \mathbf{s}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\pi}) & -\mathbf{J}(\mathbf{x})^t \\ -\mathbf{J}(\mathbf{x}) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{x} \\ \Delta \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{t}} \\ \mathbf{g}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \quad (274)$$

O sistema linear apresentado em (274) apresenta uma dimensão que é independente do número de restrições de desigualdade e que é igual à soma do número de variáveis de otimização com o número de restrições de igualdade.

Para o sistema de equações (262) do Método Preditor-Corretor Primal-Dual uma redução do sistema de forma similar podem ser estabelecidas (BARBOZA, 2001). Para tal, basta considerar as seguintes atribuições na etapa de predição:

$$\begin{aligned}
 v_l &\equiv -S_l \pi_l \\
 v_u &\equiv S_u \pi_u \\
 y_l &\equiv -[h(x) - s_l - h^{min}] \\
 y_u &\equiv -[h(x) + s_u - h^{max}]
 \end{aligned} \tag{275}$$

Na etapa de correção devem ser consideradas as seguintes equações

$$\begin{aligned}
 v_l &\equiv (\mu u - S_l \pi_l) - \Delta S_l \Delta \pi_l \\
 v_u &\equiv (\mu u + S_u \pi_u) + \Delta S_u \Delta \pi_u \\
 y_l &\equiv -[h(x) - s_l - h^{min}] \\
 y_u &\equiv -[h(x) + s_u - h^{max}].
 \end{aligned} \tag{276}$$

Após a realização das substituições apresentadas (275), no caso da predição, ou (276) no caso da correção, o equacionamento do problema reduzido a resolver coincide com o equacionamento apresentado nas equações (270)–(274).