

Métodos Numéricos

Splines Cúbicos y Gradiente de una Imagen

Tarea 11

14 de noviembre de 2020

Erika Rivadeneira Pérez
erika.rivadeneira@cimat.mx
Matemáticas Aplicadas - CIMAT

1. Resumen

En el presente reporte se expone el método de interpolación por splines cúbicos en tres funciones con diferentes puntos de entrenamiento y el método del gradiente en una imagen en escala de grises con diferencias de Newton hacia adelante y hacia atrás, por filas y columnas.

2. Introducción

En el subcampo matemático del análisis numérico, un spline es una curva diferenciable definida en porciones mediante polinomios. En los problemas de interpolación se utiliza a menudo la interpolación mediante splines porque da lugar a resultados similares requiriendo solamente el uso de polinomios de bajo grado, evitando así las oscilaciones, indeseables en la mayoría de las aplicaciones, encontradas al interpolar mediante polinomios de grado elevado. Para el ajuste de curvas, los splines se utilizan para aproximar formas complicadas. La simplicidad de la representación y la facilidad de cómputo de los splines los hacen populares para la representación de curvas en informática, particularmente en el terreno de los gráficos por ordenador.

Por otro lado, el gradiente de una imagen mide cómo ésta cambia en términos de color o intensidad. La magnitud del gradiente nos indica la rapidez con la que la imagen está cambiando, mientras que la dirección del gradiente nos indica la dirección en la que la imagen está cambiando más rápidamente. Matemáticamente, el gradiente se define por las derivadas parciales de una función dada (intensidad en el caso imágenes) a lo largo de las direcciones X e Y . Los puntos donde la derivada es máxima (o mayor que cierto umbral) corresponden a cambios de intensidad grandes, normalmente asociados a los bordes de los objetos en la imagen. Por lo tanto, este operador resulta particularmente útil para encontrar los bordes de las formas dentro de una imagen.

3. Metodología

3.1. Splines Cúbicos

El spline cúbico ($k = 3$) es el spline más empleado, debido a que proporciona un excelente ajuste a los puntos tabulados y su cálculo no es excesivamente complejo. Sobre cada intervalo $[t_0, t_1], [t_1, t_2], \dots, [t_{n-1}, t_n]$, está definido por un polinomio cúbico diferente. Sea S_i el polinomio cúbico que representa a S en el intervalo $[t_i, t_{i+1}]$, por tanto:

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) & x \in [t_0, t_1) \\ S_1(x) & x \in [t_1, t_2) \\ \vdots & \vdots \\ S_{n-1}(x) & x \in [t_{n-1}, t_n) \end{cases}$$

Los polinomios S_{i-1} y S_i interpolan el mismo valor en el punto t_i , es decir, se cumple:

$$S_{i-1}(t_i) = y_i = S_i(t_i) \quad (1 \leq i \leq n-1)$$

por lo que se garantiza que S es continuo en todo el intervalo. Además, se supone que S' y S'' son continuas, condición que se emplea en la deducción de una expresión para la función del spline cúbico. Aplicando las condiciones de continuidad del spline S y de las derivadas primera S' y segunda S'' , es posible encontrar la expresión analítica del spline. La expresión resultante es

$$S_i(x) = \frac{z_i}{6h_i} (t_{i+1} - x)^3 + \frac{z_{i+1}}{6h_i} (x - t_i)^3 + \left(\frac{y_{i+1}}{h_i} + \frac{z_{i+1}h_i}{6} \right) (x - t_i) + \left(\frac{y_i}{h_i} - \frac{z_i h_i}{6} \right) (t_{i+1} - x)$$

En la expresión anterior, $h_i = t_{i+1} - t_i$ y z_0, z_1, \dots, z_n son incógnitas. Para determinar sus valores, utilizamos las condiciones de continuidad que deben cumplir estas funciones. El resultado es

$$h_{i-1}z_{i-1} + 2(h_i + h_{i-1})z_i + h_i z_{i+1} = \frac{6}{h_{i-1}}(y_{i+1} - y_i) - \frac{6}{h_{i-1}}(y_i - y_{i-1})$$

La ecuación anterior, con $i = 1, 2, \dots, n-1$ genera un sistema de n - ecuaciones lineales con $n+1$ incógnitas z_0, z_1, \dots, z_n . Podemos elegir z_0 y z_1 de forma arbitraria y resolver el sistema de ecuaciones resultante para obtener los valores de z_1, z_2, \dots, z_{n-1} . Una elección especialmente adecuada es hacer $z_0 = z_1 = 0$ [1]. La función spline resultante se denomina spline cúbico natural y el sistema de ecuaciones lineal expresado en forma matricial es:

$$\begin{pmatrix} u_1 & h_1 & & & & \\ h_1 & u_2 & h_2 & & & \\ & h_2 & u_3 & h_3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & h_{n-3} & u_{n-2} & h_{n-2} \\ & & & & h_{n-2} & u_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ \vdots \\ z_{n-2} \\ z_{n-3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \\ \vdots \\ \nu_{n-2} \\ \nu_{n-1} \end{pmatrix}$$

en donde:

$$\begin{aligned} h_i &= t_{i+1} - t_i \\ u_i &= 2(h_i + h_{i-1}) - \frac{h_{i-1}^2}{u_{i-1}} \\ b_i &= \frac{6}{h_i}(y_{i+1} - y_i) \\ \nu_i &= b_i - b_{i-1} - \frac{h_{i-1}\nu_{i-1}}{u_{i-1}} \end{aligned}$$

3.2. Gradiente de una imagen

El gradiente es un vector, en donde sus componentes miden la rapidez en que los valores de los pixels cambian en la distancia y en las direcciones x e y . dx y dy son las distancias en las direcciones x e y respectivamente, en términos de número de pixels entre dos puntos.

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \Delta_x = \frac{f(x+dx,y) - f(x,y)}{dx} \\ \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \Delta_y = \frac{f(x,d_y+y) - f(x,y)}{dy}$$

En orden de detectar la presencia de una discontinuidad en el gradiente, debemos calcular el cambio en el gradiente en el punto (i,j) [2]. Esto se puede hacer referenciando la medida aportada por la magnitud del gradiente y su dirección.

$$M = \sqrt{\Delta_x^2 + \Delta_y^2} \\ \theta = \tan^{-1} \left(\frac{\Delta_y}{\Delta_x} \right)$$

En imágenes discretas se puede considerar dx y dy en términos del número de pixels entre dos puntos. Así, cuando $dx = dy = 1$ y el punto donde vamos a medir el gradiente tiene coordenadas (i,j) tenemos que: En orden de detectar la presencia de una discontinuidad en el gradiente, debemos calcular el cambio en el gradiente en el punto (i,j) . Esto se puede hacer referenciando la medida aportada por la magnitud del gradiente y su dirección.

$$\Delta_x = f(i+1, j) - f(i, j) \\ \Delta_y = f(i, j+1) - f(i, j)$$

Para la implementación y computación del gradiente se utilizan máscaras o filtros que representan o equivalen a dichas ecuaciones. En este caso, computar el gradiente sobre toda una imagen con las condiciones de que $dx = dy = 1$ consiste en convolucionar la imagen con unas máscaras del tipo:

$$\Delta x = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Delta y = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

4. Implementación

A continuación se presentan los pseudo-códigos para obtener la interpolación por splines cúbicos y para obtener el gradiente de una imagen. Los datos de entrada del algoritmo (1) son el vector de puntos $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, el vector de imágenes de x , $f(x) = (f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n))$, los puntos de conjunto de prueba y la función real f .

Algoritmo 1 Splines cúbicos

Result: z_i /* Vector Z_i solución del sistema tridiagonal */
 $n = \text{len}(x_i)$
for i **in** $0:n-1$ **do**
 $h_i = t_{i+1} - t_i$
 $b_i = 6(y_{i+1} - y_i)/h_i$
end
 $u_1 = 2(h_0 + h_1)$
 $v_1 = b_1 - b_0$
for i **in** $2:n-1$ **do**
 $u_i = 2(h_i + h_{i-1}) - h_{i-1}^2/u_{i-1}$
 $v_i = b_i - b_{i-1} - h_{i-1}v_{i-1}/u_{i-1}$
end
 $z_n = 0$
for i **in** $n-1:1$ **do**
 $z_i = (v_i - h_i z_{i+1})/u_i$
end
 $z_0 = 0$

Los datos de entrada de (2) son el vector de puntos x_i y sus imágenes $f(x_i)$ respectivas. Este algoritmo se lo utiliza en una matriz de pixeles de una imagen en escala de grises. Se aplica este método por filas y por columnas.

Algoritmo 2 Diferencias divididas de Newton

Result: $P(x)$ /* Polinomio interpolador resultando de diferencias divididas de Newton */
 $n = \text{len}(xi)$
 $P(x) = \text{fxi}[0]$
for j **in** $1:n$ **do**
 $\text{factor} = \text{fxi}$
 $\text{termino} = 1$
 for j **in** $1:j$ **do**
 $\text{termino} = \text{termino} * (x - xi[j])$
 end
 $P(x) = P(x) + \text{termino} * \text{factor}$
end
 $P(x)\text{simple} = P(x).\text{expand}()$

5. Resultados

5.1. Interpolación por splines cúbicos

Para la interpolación por splines cúbicos se consideraron las siguientes funciones

- $f(x) = \sin(x)$ en el dominio $[-\pi, \pi]$
- $f(x) = x^2(5x - 3) - 2x^4 + 4x - 5$ en el dominio $[-2, 4]$
- $f(x) = e^{-x^2}$ en el dominio $[-1, 1]$

Se generaron 15 puntos de entrenamiento de estas funciones, luego se utilizaron 150 puntos como conjunto de prueba. A continuación, en las figuras (1), (2) y (3) se muestran las gráficas de la función real, representado por el color verde claro, el spline ajustado de color verde oscuro y los puntos de soporte.

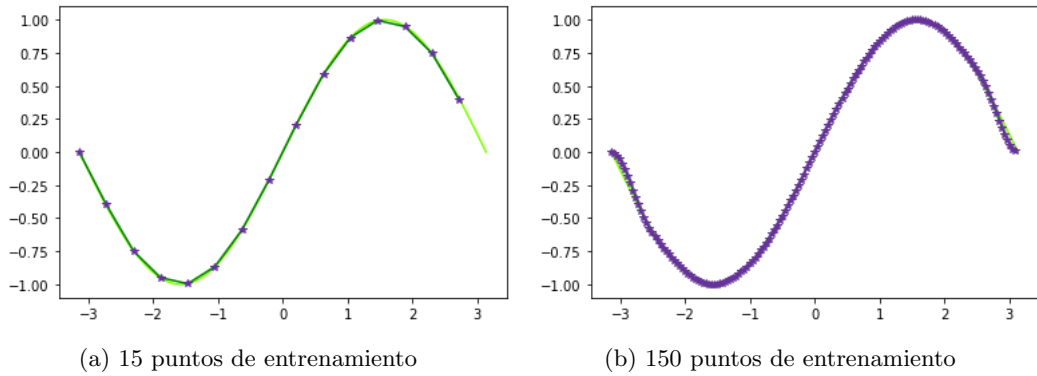


Figura 1: Interpolación por splines de la función $f(x) = \sin(x)$

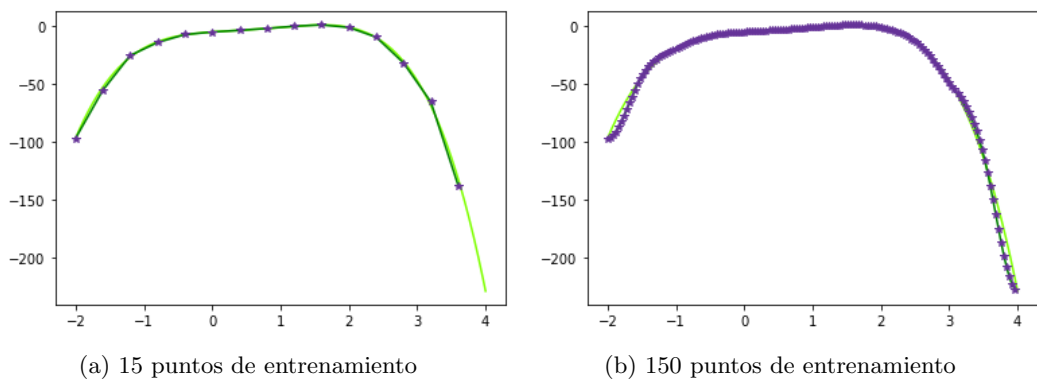


Figura 2: Interpolación por splines de la función $f(x) = x^2(5x - 3) - 2x^4 + 4x - 5$

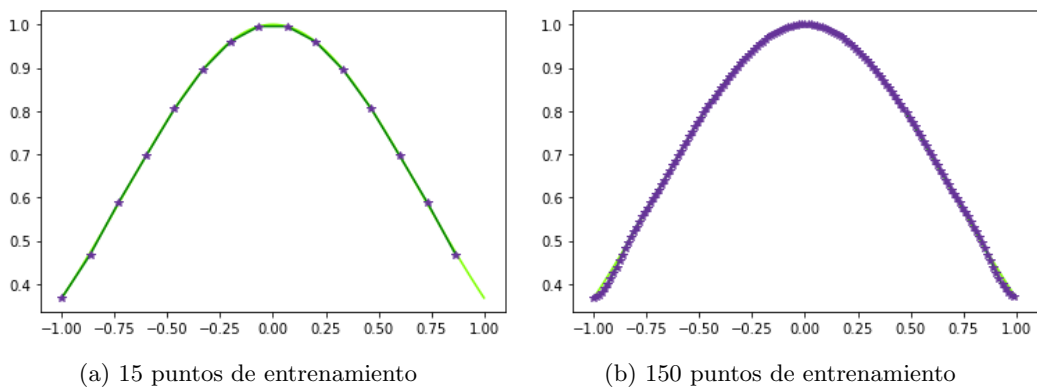


Figura 3: Interpolación por splines de la función $f(x) = e^{-x^2}$

5.2. Gradientes de una imagen



Figura 4: Imagen en escala de grises

Se calculó el gradiente de la imagen (4) en escala de grises usando Newton hacia adelante, y hacia atrás considerando 3, 5 y 7 puntos de interpolación. Para cada imagen se calculó el gradiente por filas y por columnas como se puede apreciar en las figuras (5)-(10).



(a) Por columnas



(b) Por filas



(c) Filas por columnas

Figura 5: Gradiente de una imagen en escala de grises usando Newton hacia adelante con 3 puntos de interpolación



(a) Por columnas



(b) Por filas



(c) Filas por columnas

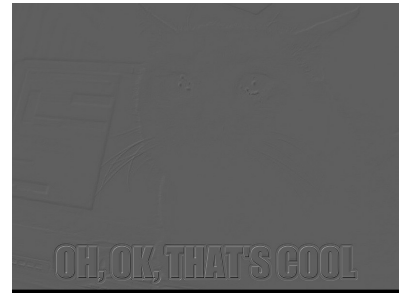
Figura 6: Gradiente de una imagen en escala de grises usando Newton hacia adelante con 5 puntos de interpolación



(a) Por columnas



(b) Por filas



(c) Filas por columnas

Figura 7: Gradiente de una imagen en escala de grises usando Newton hacia adelante con 7 puntos de interpolación



(a) Por columnas



(b) Por filas



(c) Filas por columnas

Figura 8: Gradiente de una imagen en escala de grises usando Newton hacia atrás con 3 puntos de interpolación



(a) Por columnas



(b) Por filas



(c) Filas por columnas

Figura 9: Gradiente de una imagen en escala de grises usando Newton hacia atrás con 5 puntos de interpolación



(a) Por columnas



(b) Por filas



(c) Filas por columnas

Figura 10: Gradiente de una imagen en escala de grises usando Newton hacia atrás con 7 puntos de interpolación

6. Discusión

El spline cúbico es uno de los mejores métodos de interpolación, debido a que proporciona un excelente ajuste a los puntos tabulados y su cálculo no es excesivamente complejo ya que se puede resolver el sistema tridiagonal de manera directa. Este método resulta muy ventajoso ya que proporciona polinomios suaves para puntos equiespaciados y para los que no lo son.

Por otro lado, al aplicar el gradiente en una imagen en escala de grises se pudo apreciar que se aumentó el contraste y mientras más puntos de interpolación se consideraron más ruido se eliminó, permitiendo así evidenciar la presencia de objetos delimitados que podrán luego ser oportunamente caracterizados.

7. Conclusiones

El método de interpolación por splines cúbicos provee una curva de interpolación más suave que otros métodos previamente vistos. Su implementación resultó sencilla debido a que se puede resolver el sistema tridiagonal de manera directa. Finalmente, el método del gradiente en una imagen permitió delimitar una imagen en escala de grises y mientras más puntos de interpolación se considere más se eliminará el ruido de la imagen.

Referencias

- [1] Gupta., 2015. Numerical Methods: Fundamentals And Applications. 5th ed.
- [2] R.L. Burden and J.D. Faires, Análisis Numérico, Grupo Editorial Iberoamérica, México 1985.