Métodos Numéricos
Métodos de Interpolación: Newton Recursivo y Lagrange
Tarea 9

29 de octubre de 2020

Erika Rivadeneira Pérez
erika.rivadeneira@cimat.mx
Matemáticas Aplicadas - CIMAT

1. Resumen

En este reporte se exponen dos métodos de interpolación: el método de Newton recursivo y el de Lagrange. Estos métodos son útiles para casos donde se requieran pocos puntos para interpolar, puesto que el número de puntos es proporcional al grado del polinomio. Ambos permiten la creación de un polinomio de grado n-1, donde n es el número de datos que se tienen. Se evaluará cada método en distintas funciones y se comparan los resultados obtenidos.

2. Introducción

Con frecuencia se tienen que estimar valores intermedios entre valores conocidos. El método más común empleado para este propósito es la interpolación polinomial.

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

La interpolación se ocupa del problema de construir un polinomio $P(x)$ de grado mínimo, que pasa por un conjunto de puntos dados, (x_i, y_i), $i = 0, 1, ..., n$.Este polinomio $P(x)$ se conoce como polinomio de interpolación y se puede utilizar para estimar el valor de la variable dependiente y para cualquier valor intermedio de la variable independiente x.
Muchas otras aplicaciones del análisis numérico involucran la aproximación polinómica de varias funciones. Por ejemplo, métodos para encontrar raíces de ecuaciones no lineales, soluciones de ecuaciones integrales y diferenciales y, lo que es más importante, aproximación numérica para integración y diferenciación. La siguiente sección muestra la forma del polinomio de Newton recursivo y la interpolación de Lagrange para encontrar un polinonio inteterpolador dado un conjunto de puntos iniciales.

3. Metodología

3.1. Interpolación de Newton Recursivo

El polinomio de Newton tiene la forma

$$P_n(x) = a_0 + a_1 (x - c_1) + a_2 (x - c_1)(x - c_2) + \cdots + a_n (x - c_1)(x - c_2) \cdots (x - c_n)$$

éste se tranforma en un polinomio de potencias desplazadas cuando $c_1 = c_2 = \ldots = c_n$ y en la forma de potencia cuando $c = 0$.
De manera simplificada el polinomio es

$$P_n(x) = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i \left[\prod_{j=1}^{i-1} (x - c_j) \right]$$

Luego, podemos escribir esta expresión en la **forma de Newton anidada** como

$$P_n(x) = a_0 + (x - c_1)\{a_1 + (x - c_2)\{a_2 + \cdots + (x - c_{n-1})\{a_{n-1} + a_n (x - c_n)\} \cdots\}\}$$

Si es necesario construir varios polinomios de interpolación $P_1(x), \ldots, P_n(x)$ los polinomios de Newton anidados resultan una buena opción ya que su calculo es mediante un esquema regresivo evitando un calculo excesivo de operaciones [1].
Ahora, para la construcción del algoritmo recursivo de la forma de Newton anidada se considera la forma de este polinomio y empezando por el término más interior y agregando un nuevo término a la expresión resultante

$$P_n(x) = \underbrace{a_0 + (x - c_1) \underbrace{\left\{ a_1 + (x - c_2) \underbrace{\left\{ a_2 + \cdots + (x - c_{n-1}) \underbrace{\left\{ a_{n-1} + \underbrace{a_n}_{a'_n} (x - c_n) \right\}}_{a'_{n-1}} \cdots \right\}}_{a'_2} \right\}}_{a'_1}}_{a'_0}$$

se obtiene un polinomio $P_n(x)$ usando el siguiente algoritmo recursivo

$$\begin{aligned} & a'_n = a_n \\ & a'_{n-1} = a_{n-1} + (x - c_n)\, a'_n \\ & a'_{n-2} = a_{n-2} + (x - c_{n-1})\, a'_{n-1} \\ & \vdots \\ & a'_i = a_i + (x - c_{i+1})\, a'_{i+1} \\ & \vdots \\ & a'_0 = a_0 + (x - c_1)\, a'_1 = P_n(x) \end{aligned} \tag{1}$$

3.2. Interpolación de Lagrange

Como los polinonios de Taylor no son adecuados para la interpolación es necesario hacer uso de métodos alternos. En esta sección encontraremos polinomios de aproximación que se determinan con solo especificar determinados puntos en el plano por donde debcn pasar. El problema de encontrar un polinomio de primer grado que pasa por los puntos distintos (x_0, y_0) y (x_1, y_1) es el mismo que el de aproximar una función f, para la cual $f(x_0) = y_0$ y $f(x_1) = y_1$ por medio de un polinonio de primer grado que interpole los valores de f en los puntos dados o que coincida con ellos. Primero definiremos las funciones

$$L_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \quad y \quad L_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

y se define entonces

$$P(x) = I_0(x) f(x_0) + L_1(x) f(x_1)$$

Como

$$I_0(x_0) = 1, \quad I_0(x_1) = 0, \quad L_1(x_0) = 0 \quad y \quad L_1(x_1) = 1$$

tenemos

$$P\left(x_0\right)=1 \cdot f\left(x_0\right)+0 \cdot f\left(x_1\right)=f\left(x_0\right)=y_0$$

y

$$P\left(x_1\right)=0 \cdot f\left(x_0\right)+1 \cdot f\left(x_1\right)=f\left(x_1\right)=y_1$$

Asi p es la única función lineal que pasa por (x_0, y_0) y (x_1, y_1).
A fin de generalizar el concepto de interpolación lineal, consideremos la construcción de un polinomio de grado máximo n que pase por los $n+1$ puntos

$$\left(x_0, f\left(x_0\right)\right),\left(x_1, f\left(x_1\right)\right), \ldots,\left(x_n, f\left(x_n\right)\right)$$

En este caso para cada $k=0{,}1, \ldots, n$ construimos una función $L_{n,k}(x)$ con la propiedad de que $L_{n,k}(x)=0$, cuando $i \neq k$ y $L_{n,k}\left(x_1\right)=1$. Para satisfacer $L_{n,k}(x,)=0$ para cada $i \neq k$ se requiere que el numerador de $L_{n,k}(x)$ contenga el término

$$\left(x-x_0\right)\left(x-x_1\right) \cdots\left(x-x_{1-1}\right)\left(x-x_{k+1}\right) \cdots\left(x-x_n\right)$$

Para satisfacer $L_{n,k}\left(x_i\right)=1$, el denominador de $L_{n,k}(x)$ debe coincidir con este término cuando sc evalue en $x=x_k$ [2]. Es decir,

$$L_{n,k}(x)=\frac{\left(x-x_0\right) \cdots\left(x-x_{k-1}\right)\left(x-x_{k+1}\right) \cdots\left(x-x_n\right)}{\left(x_k-x_0\right) \cdots\left(x_k-x_{k-1}\right)\left(x_k-x_{k+1}\right) \cdots\left(x_k-x_n\right)}$$

El polinomio de interpolación se describe fácilmente ahora que conocemos la forma de $L_{n,k}$. Este polinomio, denominado n-ésimo polinomio interpolante de Lagrange y está definido como

$$P(x)=f\left(x_0\right) L_{n,0}(x)+\cdots+f\left(x_n\right) L_{nn}(x)=\sum_{k=0}^n f\left(x_k\right) L_{n,k}(x)$$

donde para cada $k=0{,}1, \ldots, n$

$$\begin{aligned} L_{n,k}(x) & =\frac{\left(x-x_0\right)\left(x-x_1\right) \cdots\left(x-x_{k-1}\right)\left(x-x_{k+1}\right) \cdots\left(x-x_n\right)}{\left(x_k-x_0\right)\left(x_k-x_1\right) \cdots\left(x_k-x_{k-1}\right)\left(x_k-x_{k+1}\right) \cdots\left(x_k-x_n\right)} \\ & =\prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n \frac{\left(x-x_i\right)}{\left(x_k-x_i\right)}\end{aligned}$$

4. Implementación

A continuación se presentan los pseudo-códigos del método de interpolación de Newton recursivo y del método de interpolación de Lagrange. Los datos de entrada para el algoritmo (1) son el vector "a"de coeficientes del polinomio, el vector "x_i"de los centros del polinomio de Newton y el centro 'c' en el cual el polinomio va a ser evaluado.

Algoritmo 1 Newton Recursivo

```
Result: P(x)=v /* Valor del polinomio evaluado en el centro c       */
n=len(a);/* extraemos la longitud del vector a                     */
v=0/* inicializamos los términos del polinomio                     */
v = a[n-1]
 for i in n-2:-1 do
 |  v = v*(c-xi[i])+a[i]
end
```

Por otro lado, el algoritmo (2) de datos de entrada requiere el conjunto o vector de puntos $x_i=(x_1, x_2, .., x_n)$, el vector de imágenes $y=(f(x_1), ..., f(x_n))$ y la función $f(x)$ original para el cálculo del error de interpolación.

Algoritmo 2 Interpolación de Lagrange

```
Result: polinomio, error    /* Polinomio de interpolación de Lagrange y el error de
    interpolación                                                                  */
n = len(xi);/* extraemos la longitud del vector de puntos x                        */
n = len(xi)
 x = sym.Symbol('x')
 polinomio = 0
 error=0 for i in 1:n do
    num = 1
     den = 1
     for j in 1:n do
        if i!=j then
            num = num * (x-xi[j])
             den = den * (xi[i]-xi[j])
        end
        lagrange = (num/den) * y[i]
    end
    polinomio += lagrange
     error = |f(x) − polinomio(x)|
end
```

5. Resultados

5.1. Método de interpolación de Newton recursivo

Para el uso del método de interpolación de Newton recursivo se evaluó el siguiente polinomio en $x = 4$

$$P_4(x) = x + 2x(x-1) + 3x(x-1)(x-2) + 4x(x-1)(x-2)(x-3)$$

Sabiendo que los datos son

$$a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 3, a_4 = 4$$
$$c_1 = 0, c_2 = 1, c_3 = 2, c_4 = 3$$

se obtuvo

$P_4(4) = 196$
Polinomio en forma de Newton anidada: $x((x-1)((x-2)(4x-9)+2)+1)$
Polinomio en forma simple: $4x^4 - 21x^3 + 37x^2 - 19x$

5.2. Interpolación de Lagrange

Para el método de interpolación de Lagrange se consideraron las siguientes funciones

- $f(x) = \sin(x)$ en el dominio $[-\pi, \pi]$
- $f(x) = x^2(5x-3) - 2x^4 + 4x - 5$ en el dominio $[-2, 4]$
- $f(x) = x^2 - 5$ en el dominio $[-10, 10]$

5.2.1. Resultado 1: $f(x) = \sin(x)$ en el dominio $[-\pi, \pi]$

En el caso de la función $f(x) = \sin(x)$ con $x \in [-\pi, \pi]$ se consideraron tres muestras distintas de datos, de 5, 7 y 13 elementos en cada muestra respectivamente. En la tabla (1) se pueden observar las dos primeras muestras utilizadas para proceder con la interpolación de Lagrange.

	1^{era} ***Muestra***		2^{da} ***Muestra***	
Muestra	x	$f(x)$	x	$f(x)$
1	-3.14159265	-1.22464680e-16	-3.14159265	-1.22464680e-16
2	-1.64159265	-9.97494987e-01	-2.14159265	-8.41470985e-01
3	-0.14159265	-1.41120008e-01	-1.14159265	-9.09297427e-01
4	1.35840735	9.77530118e-01	-0.14159265	-1.41120008e-01
5	2.85840735	2.79415498e-01	0.85840735	7.56802495e-01
6	-	-	1.85840735	9.58924275e-01
7	-	-	2.85840735	2.79415498e-01

Tabla 1: Muestras para la interpolación de la función $f(x) = sin(x)$

Utilizando las muestras mencionadas se obtuvieron polinomios interpoladores de Lagrange en su forma simplificada y su error respectivo como se mencionan a continuación:

- 1^{era} *Muestra:*

  Polinomio: $P(x) = -0{,}0040119x^4 - 0{,}09290522x^3 + 0{,}0283286x^2 + 0{,}87583x - 0{,}017939$
  Error: 0,06492361232252142

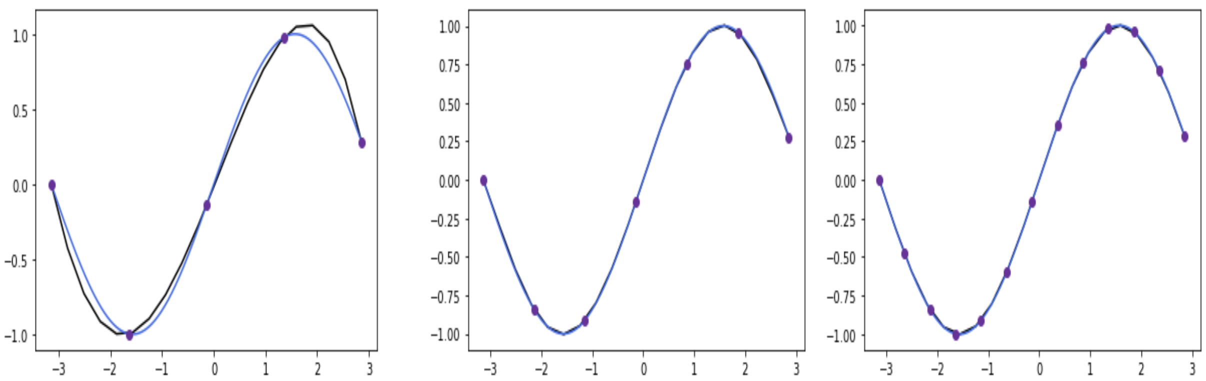
- 2^{da} *Muestra:*

  Polinomio: $P(x) = 0{,}0001523x^6 + 0{,}005997x^5 - 0{,}001532x^4 - 0{,}159052x^3 + 0{,}003244x^2 + 0{,}99463x - 0{,}000804$
  Error: 0,000958378425796047

- 3^{era} *Muestra:*

  Polinomio: $P(x) = -2{,}599e - 10x^{12} - 2{,}187e - 8x^{11} + 4{,}89e - 9x^{10} + 2{,}732e - 6x^9 - 3{,}238e - 8x^8 - 0{,}0002x^7 + 9{,}148e - 8x^6 + 0{,}008x^5 - 1{,}069e - 7x^4 - 0{,}167x^3 + 4{,}11e - 8x^2 + 0{,}999x - 2{,}263e - 9$
  Error: $3{,}4847634777790404e - 09$

A continuación en la figura (1) se muestran las gráficas de los polinomios de interpolación obtenidos para las tres muestras mencionadas representados por los segmentos de color negro, así como la función original representada por los segmentos de color celeste y los puntos usados para generar el polinomio de interpolación.



(a) Primera muestra (b) Segunda muestra (c) Tercera muestra

Figura 1: Interpolación polinomial de Lagrange en 3 muestras distintas con función original $f(x) = sin(x)$

5.2.2. Resultado 2: $f(x) = x^2(5x-3) - 2x^4 + 4x - 5$ en el dominio $[-2, 4]$

En el caso de la función $f(x) = x^2(5x-3) - 2x^4 + 4x - 5$ con $x \in [-2, 4]$ se consideraron dos muestras distintas de datos, de 4 y 5 pares de elementos en cada muestra respectivamente. En la tabla (2) se pueden observar las dos muestras utilizadas para proceder con la interpolación de Lagrange.

	1^{era} ***Muestra***		2^{da} ***Muestra***	
Muestra	x	$f(x)$	x	$f(x)$
1	-2	-97	-2	-97
2	0	-5	-0.5	-8.5
3	2	-1	1	-1
4	4	-229	2.5	-13.75
5	-	-	4	-229

Tabla 2: Muestras para la interpolación de la función $f(x) = x^2(5x-3) - 2x^4 + 4x - 5$

Utilizando las muestras mencionadas se obtuvieron polinomios de interpolación de Lagrange en su forma simplificada y su error respectivo como se mencionan a continuación:

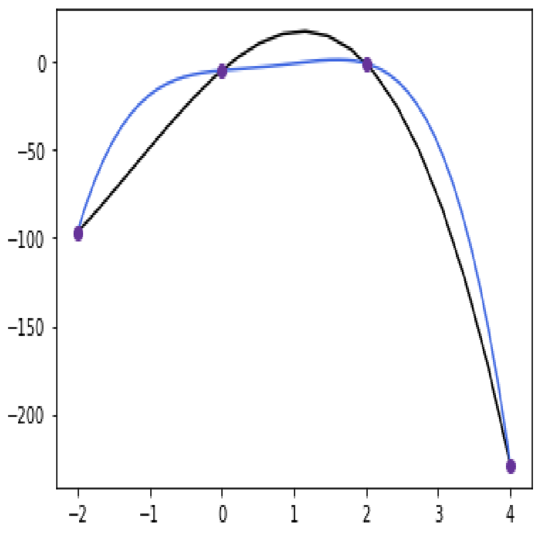
- 1^{era} *Muestra:*

  Polinomio: $P(x) = -3x^3 - 11x^2 + 36x - 5$
  Error: 29,999999999999943

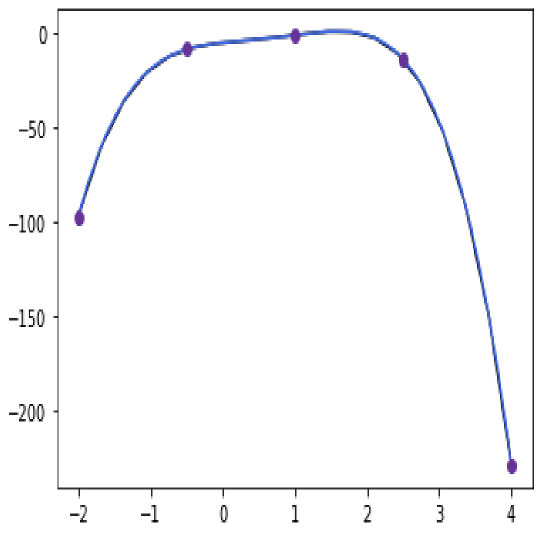
- 2^{da} *Muestra:*

  Polinomio: $P(x) = -2x^4 + 5x^3 - 3x^2 + 4x - 5$
  Error: $1{,}0658141036401503e - 14$

A continuación en la figura (2) se muestran las gráficas de los polinomios de interpolación obtenidos para las tres muestras mencionadas representados por los segmentos de color negro, así como la función original representada por los segmentos de color celeste y los puntos usados para generar el polinomio de interpolación.



(a) Primera muestra



(b) Segunda muestra

Figura 2: Interpolación polinomial de Lagrange en 2 muestras distintas con función original $f(x) = x^2(5x-3) - 2x^4 + 4x - 5$

5.2.3. Resultado 3: $f(x) = x^2 - 5$ en el dominio $[-10, 10]$

En el caso de la función $f(x) = x^2 - 5$ con $x \in [-10, 10]$ se consideraron dos muestras distintas de datos, de 3 y 5 pares de elementos en cada muestra respectivamente. En la tabla (3) se pueden observar las dos muestras utilizadas para proceder con la interpolación de Lagrange.

	1^{era} ***Muestra***		2^{da} ***Muestra***	
Muestra	x	$f(x)$	x	$f(x)$
1	-10	95	-10	95
2	0	-5	-5	20
3	10	95	0	-5
4	-	-	5	20
5	-	-	10	95

Tabla 3: Muestras para la interpolación de la función $f(x) = x^2 - 5$

Utilizando las muestras mencionadas se obtuvieron polinomios de interpolación de Lagrange y su error respectivo como se mencionan a continuación:

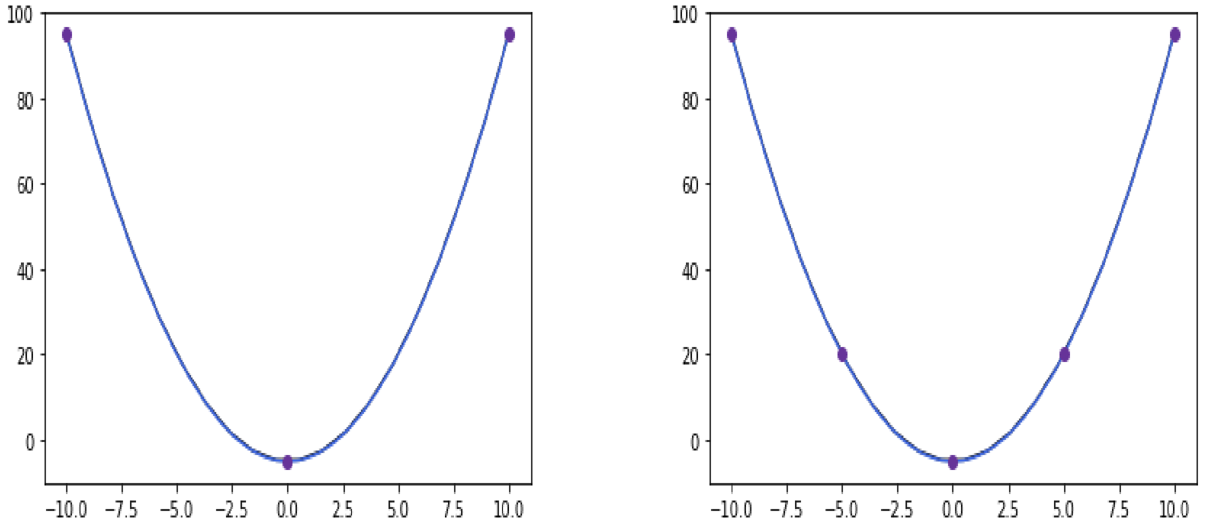
- 1^{era} *Muestra:*

  Polinomio: $P(x) = 0{,}475x(x - 10{,}0) + 0{,}475x(x + 10{,}0) + 0{,}05(x - 10{,}0)(x + 10{,}0) = x^2 - 5$
  Error: $0{,}0$

- 2^{da} *Muestra:*

  Polinomio: $P(x) = 0{,}0063x(x - 10{,}0) * (x - 5{,}0)(x + 5{,}0) - 0{,}0053x(x - 10{,}0)(x - 5{,}0)(x + 10{,}0) - 0{,}0053x(x - 10{,}0)(x + 5{,}0)(x + 10{,}0) + 0{,}0063x(x - 5{,}0)(x + 5{,}0)(x + 10{,}0) - 0{,}002(x - 10{,}0)(x - 5{,}0)(x + 5{,}0)(x + 10{,}0) = x^2 - 5$
  Error: $8{,}881784197001252e - 16$

A continuación en la figura (3) se muestran las gráficas de los polinomios de interpolación obtenidos para las tres muestras mencionadas representados por los segmentos de color negro, así como la función original representada por los segmentos de color celeste y los puntos usados para generar el polinomio de interpolación.



(a) Primera imagen.

(b) Segunda imagen.

Figura 3: Interpolación polinomial de Lagrange en 2 muestras distintas con función original $f(x) = x^2 - 5$

El error para cada caso fue calculado de la siguiente manera:

$$error = |f(x) - P(x)|$$

en donde $P(x)$ es el polinomio de interpolación de Lagrange.

6. Discusión

La forma de Newton anidada evita el uso de extra de operaciones como sumas y multiplicaciones por tanto resulta beneficioso computar polinomios en esta forma, esto gracias a que los polinomios son únicos. Además se ha podido observar que por los métodos de Newton y Lagrange se puede interpolar con pocos puntos ya que el número de puntos es proporcional al grado del polinomio.
Por otro lado, los polinomios de Lagrange son más fáciles de computar, pues elimina la necesidad de recurrir a métodos de recursión. Las gráficas (1), (2), (3) muestran que mientras más información o puntos se tenga el polinomio interpolador se ajusta más a la función $f(x)$ real. Solamente la función cuadrática obtuvo $P(x) = f(x)$ con tan solo 3 pares de puntos iniciales, esto debido a que se escogieron los puntos extremos y el punto fijo de la función $f(x)$.

7. Conclusiones

Resulta muy útil expresar un polinomio en la forma de Newton pero es más sencillo de computar los polinomios de Lagrange debido a que no requieren de recursividad. Gracias a que se conocen las funciones reales fue posible calcular el error al utilizar el método de interpolación de Lagrange a diferencia del ejemplo en el que se aplicó la interpolación de Newton.

Referencias

[1] Gupta., 2015. Numerical Methods: Fundamentals And Applications. 5th ed.

[2] R.L. Burden and J.D. Faires, Análisis Numérico, Grupo Editorial Iberoamérica, México 1985.