Métodos Numéricos - Factorización de Doolittle

Erika Rivadeneira Pérez
erika.rivadeneira@cimat.mx

August 2020

1 Introduction

Este método es utilizado para la obtención de las matrices $\tilde{L}$ and $\tilde{U}$ derivadas de la factorización $\tilde{A} = \tilde{L}\tilde{U}$, de donde la diagonal de $\tilde{L}$ es unitaria. Consideremos las siguientes matrices $\tilde{L}\tilde{U} = \tilde{A}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & ... & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{32} & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & ... & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & ... & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & ... & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & ... & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & ... & u_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & ... & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & ... & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & ... & a_{nn} \end{bmatrix}$$

De aquí, operando en las submatrices del sistema obtenemos:

- 1^{er} submatriz:

$$u_{11} = a_{11}$$

- 2^{da} submatriz:

$$\begin{aligned} &u_{12} = a_{12} \\ &l_{21}u_{11} = a_{21} \Rightarrow l_{21} = \frac{a_{21}}{u_{11}} \\ &l_{21}u_{12} + u_{22} = a_{22} \Rightarrow u_{22} = a_{22} - l_{21}u_{12} \end{aligned}$$

- 3^{ra} submatriz:

$$\begin{aligned} &u_{13} = a_{13} \\ &l_{31}u_{11} = a_{31} \Rightarrow l_{31} = \frac{a_{31}}{u_{11}} \\ &l_{21}u_{13} + u_{23} = a_{23} \Rightarrow u_{23} = a_{23} - l_{21}u_{13} \\ &l_{31}u_{12} + l_{32}u_{22} = a_{32} \Rightarrow l_{32} = \frac{a_{32} - l_{31}u_{12}}{u_{22}} \\ &l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} + u_{33} = a_{33} \Rightarrow u_{33} = a_{33} - l_{31}u_{13} - l_{32}u_{23} \end{aligned}$$

Siguiendo este mismo procedimiento encontramos que el algoritmo para la factorización de Doolittle es el siguiente:

$$u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} u_{kj}$$

$$l_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-2} l_{ik} u_{kj}}{u_{jj}}$$

$$u_{ii} = a_{ii} - sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{ki}$$