Métodos Numéricos

Métodos de Interpolación: Diferencias Divididas de Newton, Interpolador de Hermite y Método de Gregory Newton

Tarea 10

6 de noviembre de 2020

Erika Rivadeneira Pérez
erika.rivadeneira@cimat.mx
Matemáticas Aplicadas - CIMAT

1. Resumen

En este reporte se exponen tres métodos de interpolación: el método de diferencias divididas de Newton, interpolación de Hermite y el método de Gregory-Newton. Estos métodos son útiles para casos donde se requieran pocos puntos para interpolar, puesto que el número de puntos es proporcional al grado del polinomio. Los métodos de diferencias divididas de Newton y de Gregory-Newton permiten la creación de un polinomio de grado $n-1$, donde n es el número de datos que se tienen. Por otro lado, el método de Hermite permite la creación de un polinomio de grado $2n+1$ de donde se requiere $2n+2$ datos para su construcción. Se evaluará cada método en distintas funciones y se comparan los resultados obtenidos.

2. Introducción

La interpolación polinómica es un método usado para conocer, de un modo aproximado, los valores que toma cierta función de la cual sólo se conoce su imagen en un número finito de abscisas. A menudo, ni siquiera se conocerá la expresión de la función y sólo se dispondrá de los valores que toma para dichas abscisas.

El objetivo será hallar un polinomio que cumpla lo antes mencionado y que permita hallar aproximaciones de otros valores desconocidos para la función con una precisión deseable fijada. Por ello, para cada polinomio interpolador se dispondrá de una fórmula del error de interpolación que permitirá ajustar la precisión del polinomio.

Además, en determinadas aplicaciones se precisan métodos de interpolación que trabajen con datos prescritos de la función y sus derivadas en una serie de puntos, con el objeto de aumentar la aproximación en las proximidades de dichos puntos. Dentro de esta clase de métodos está la interpolación de Hermite.

3. Metodología

3.1. Diferencias Divididas de Newton

Partiendo de n puntos (x, y), podemos obtener un polinomio de grado $n-1$. El método que se utilizará es el de las diferencias divididas para obtener los coeficientes, el cual facilita la tarea de resolver un sistema de ecuaciones usando el cociente de sumas y restas [1].

Dada una colección de n puntos de x y sus imágenes $f(x)$, se pueden calcular los coeficientes del polinomio interpolante utilizando las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}
f[x_k] &= f(x_k) && k \in [0,n] \\
f[x_k,x_{k+1}] &= \frac{f[x_{k+1}]-f[x_k]}{x_{k+1}-x_k} && k \in [0,n-1] \\
f[x_k,x_{k+1},x_{k+2}] &= \frac{f[x_{k+1},x_{k+2}]-f[x_k,x_{k+1}]}{x_{k+2}-x_k} && k \in [0,n-2] \\
&\dots \\
f[x_k,x_{k+1},\dots,x_{k+i}] &= \frac{f[x_{k+1},x_{k+2},\dots,x_{k+i}]-f[x_k,x_{k+1},\dots,x_{k+i-1}]}{x_{k+i}-x_k} && k \in [0,n-i]
\end{aligned}$$

Finalmente, a partir de los valores obtenidos, se pueden obtener dos formas de representar el polinomio:

- Progresivo (desde 0 hasta $n-1$):

$$\begin{aligned}
P_{n-1}(x) = f[x_0] + f[x_0,x_1]\cdot(x-x_0) + f[x_0,x_1,x_2]\cdot(x-x_0)\cdot(x-x_1)+ \\
+\dots+f[x_0,x_1,\dots,x_n]\cdot(x-x_0)\cdot(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})
\end{aligned}$$

- Regresivo (desde n hasta 1):

$$\begin{aligned}
P_{n-1}(x) = f[x_n] + f[x_n,x_{n-1}]\cdot(x-x_n) + f[x_n,x_{n-1},x_{n-2}]\cdot(x-x_n)\cdot(x-x_{n-1})+ \\
+\dots+f[x_n,x_{n-1},\dots,x_1]\cdot(x-x_n)\cdot(x-x_{n-1})\dots(x-x_1)
\end{aligned}$$

3.2. Interpolación de Hermite

Sean $\mathrm{x}_0,\dots,\mathrm{x}_n$ puntos distintos. Conocidos los valores de la función $f$ysu derivada f' en $\mathrm{x}_0,\dots,\mathrm{x}_n$, se trata de encontrar un polinomio de grado el menor posible que coincida con fy con su derivada en los puntos señalados.

Se demuestra que dicho polinomio existe y es único. Además tiene grado $2n+1$ (recuérdese que disponemos de $2n+2$ datos para construirlo). A dicho polinomio se le llama polinomio de interpolación de Hermite de f en los puntos $\mathrm{x}_i, i=0,\dots,n$. Como datos numéricos se requiere de $f(\mathrm{x}), f'(\mathrm{x}_i), \quad i=0,\dots,n \quad (2n+2$ datos), en el espacio de funciones interpoladoras P_{2n+1}. Luego el problema de interpolación polinomial de Hermite es

$$\begin{aligned}
p \in P_{2n+1} : & p(\mathrm{x}_0) = f(\mathrm{x}_0),\dots,p(\mathrm{x}_n) = f(\mathrm{x}_n) \\
& p'(\mathrm{x}_0) = f'(\mathrm{x}_0),\dots,p'(\mathrm{x}_n) = f(\mathrm{x}_n)
\end{aligned}$$

El polinomio de interpolación de Hermite, $p(\mathrm{x})$, de la función f en los puntos distintos $\mathrm{x}_{0,\dots,\mathrm{x}_n}$ admite la expresión

$$p(\mathbf{x}) = \sum_{i=0}^{n} f(\mathbf{x}_i)\, L_i(\mathbf{x}) + \sum_{i=0}^{n} f'(\mathbf{x}_i)\, \tilde{L}_i(\mathbf{x}), \quad \text{(Fórmula de Lagrange)}$$

Las funciones $\left\{L_i(\mathrm{x}), \tilde{L}_i(\mathrm{x}), \quad i=0,\dots,n\right\}$ constituyen la base de Lagrange del problema de interpolación considerado [2]. Esto es, $L_i(\mathrm{x})$ y $\tilde{L}_i(\mathrm{x})$ son polinomios de grado $2n+1$ verificando

$$\begin{aligned}
& L_i(\mathrm{x}_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0, & i\neq j \end{cases} \\
& L_i'(\mathrm{x}_j) = 0, i,j=0,\dots,n \\
& \tilde{L}_i(\mathrm{x}_j) = 0, \quad \tilde{L}_i'(\mathrm{x}_j) = \delta_{ij} \quad , i,j=0,\dots,n
\end{aligned}$$

Luego, esta expresión es

$$L_i(\mathrm{x}) = (1-2(\mathrm{x}-\mathrm{x}_i)\, l_i'(\mathrm{x}))\, l_i^2(\mathrm{x})$$

$$\tilde{L}_i(\mathrm{x}) = (\mathrm{x}-\mathrm{x}_i)\, l_i^2(\mathrm{x})$$

$$\text{donde} \quad l_i(\mathrm{x}) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{(\mathrm{x}-\mathrm{x}_j)}{(\mathrm{x}_i-\mathrm{x}_j)}, \quad i=0,\dots,n$$

3.3. Interpolación de Gregory-Newton

Se dice que los datos estén uniformemente espaciados si $x_{i+1}-x_i=\Delta x$ es constante para $i=1,2,3,\ldots$ Para el caso particular de datos uniformemente espaciados, es posible encontrar una forma más sencilla del polinomio de Newton. Esta forma más sencilla se basa en diferencias que se definen de la siguiente manera: Diferencia de orden 0 :

$$\Delta^0 f_i = f_i$$

Diferencia de orden 1 :

$$\Delta^1 f_i = f_{i+1} - f_i$$

Diferencia de orden 2 :

$$\Delta^2 f_i = \Delta\left(\Delta f_i\right) = \Delta\left(f_{i+1}-f_i\right) = \Delta f_{i+1} - \Delta f_i = f_{i+2} - 2f_{i+1} + f_i$$

Diferencia de orden 3 :

$$\Delta^3 f_i = \Delta\left(\Delta^2 f_i\right) = \Delta^2 f_{i+1} - \Delta^2 f_i = f_{i+3} - 3f_{i+2} + 3f_{i+1} - f_i$$

Diferencia de orden k :

$$\Delta^k f_i = f_{i+k} - k f_{i+k-1} + \frac{k(k-1)}{2!} f_{i+k-2} - \frac{k(k-1)(k-2)}{3!} f_{i+k-3} + \cdots$$

El polinomio de Newton-Gregory de orden n tiene la siguiente forma general:

$$\begin{aligned}
P_n\left(x_{k+1}\right) &= f_1 + k\Delta f_1 + \frac{k(k-1)}{2!}\Delta^2 f_1 + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!}\Delta^3 f_1 + \cdots \\
&= \binom{k}{0}\Delta^0 f_1 + \binom{k}{1}\Delta^1 f_1 + \binom{k}{2}\Delta^2 f_1 + \binom{k}{3}\Delta^3 f_1 + \cdots \\
&= \sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\Delta^i f_1
\end{aligned}$$

para $k=1,2,\ldots,n$ Se puede demostrar que el polinomio de Newton-Gregory es el polinomio de interpolación evaluándolo para los valores x_i :

$$\begin{aligned}
P_n\left(x_1\right) &= f_1 \\
P_n\left(x_2\right) &= f_1 + \Delta f_1 = f_1 + f_2 - f_1 = f_2 \\
P_n\left(x_3\right) &= f_1 + \binom{2}{1}\Delta f_1 + \binom{2}{2}\Delta^2 f_1 \\
&= f_1 + 2\left(f_2 - f_1\right) + \left(f_3 - 2f_2 + f_1\right) = f_3 \\
&\vdots \\
P_n\left(x_{k+1}\right) &= f_{k+1}
\end{aligned}$$

Para para interpolar mediante el polinomio de Newton-Gregory se calcula un indice no entero s mediante la siguiente fórmula:

$$s = \frac{x - x_1}{\Delta x}$$

El valor de s se sustituye en el polinomio:

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n}\binom{s}{i}\Delta^i f_1$$

4. Implementación

A continuación se presentan los 3 algoritmos de los métodos de Interpolación mencionados en la sección anterior. Los datos de entrada de (1) son el vector de puntos x_i y sus imágenes $f(x_i)$ respectivas.

Algoritmo 1 Diferencias divididas de Newton

```
Result: P(x) /* Polinomio interpolador resultando de diferencias divididas de Newton */
n = len(xi)
 P(x) = fxi[0]
 for j in 1:n do
   factor = fxi
    termino = 1
    for j in 1:j do
      termino = termino*(x-xi[j])
   end
   P(x) = P(x) + termino*factor
end
P(x)simple = P(x).expand()
```

Además, el algoritmo de interpolación de Hermite (2) requiere como datos de entrada los vectores de elementos $x = (x_0, x_1, .., x_n)$, $f(x) = (f(x_0), f(x_1), ..., f(x_n))$ y $f'(x) = (f'(x_0), f'(x_1), ..., f'(x_n))$.

Algoritmo 2 Interpolación de Hermite

Result: $Q_{0,0}, Q_{1,1}, ..., Q_{2n+1,2n+1}$ /* Los números $Q_{2i+1,2i+1}$, $i = 0, ..., n$ del polinomio de Hermite */

n = len(xi)

for *i in 0:n* **do**

$z_{2i} = x_i$

$z_{2i+1} = x_i$

$Q_{2i,0} = f(x_i)$

$Q_{2i+1,0} = f(x_i)$

$Q_{2i+1,1} = f'(x_i)$

if $i \neq 0$ **then**

$Q_{2i,1} = \frac{Q_{2i,0} - Q_{2i-1,0}}{z_{2i} - z_{2i-1}}$

for *i in 2:2n+1* **do**

for *j in 2:i* **do**

$Q_{i,j} = \frac{Q_{I,J-1} - Q_{i-1,j-1}}{z_i - z_{i-j}}$

Por último, los datos de entrada de (3) son el vector de puntos x_i y sus imágenes $f(x_i)$ respectivas.

Algoritmo 3 Diferencias divididas de Newton

```
Result: P(x) /* Polinomio interpolador resultante de la interpolación de Gregory Newton */
n = len(xi)
 y = np.zeros((n,n))
 for i in 1:n do
   y[i,0]=fi[i]
end
for i in 1:n do
   for j in 1:n-i do
     y[j,i] = y[j + 1,i - 1] - y[j,i - 1]
   end
end
polinomio = y[0,0]
 u = (value - xi[0]) / (xi[1] - xi[0])
 for i in 1:n do
   polinomio = polinomio + (ucal(u, i) * y[0,i]) / i!
end
```

5. Resultados

se consideraron las siguientes funciones

- $f(x) = \sin(x)$ en el dominio $[-\pi, \pi]$

- $f(x) = x^2(5x - 3) - 2x^4 + 4x - 5$ en el dominio $[-2, 4]$
- $f(x) = x^2 - 5$ en el dominio $[-10, 10]$

5.1. Resultados para: $f(x) = \sin(x)$ en el dominio $[-\pi, \pi]$

En el caso de la función $f(x) = \sin(x)$ con $x \in [-\pi, \pi]$ se consideraron tres muestras distintas de datos, de 4, 5 y 7 elementos en cada muestra respectivamente. En la tabla (1) se pueden observar las muestras utilizadas para proceder con la interpolación de diferencias divididas.

	1^{era} ***Muestra***		2^{da} ***Muestra***		3^{era} ***Muestra***	
Muestra	x	$f(x)$	x	$f(x)$	x	$f(x)$
1	-3.14159265	-1.22464680e-16	-3.14159265	-1.22464680e-16	-3.14159265	-1.22464680e-16
2	0	0	-2	-0.90929743	-2	-0.90929743
3	1	0.84147098	0	0	-1	-0.84147098
4	3.14159265	0.00159265	2	0.9092974	1	0.84147098
5	-	-	3.14159265	0.00159265	2	0.9092974
6	-	-	-	-	3.14159265	1.22464680e-16

Tabla 1: Muestras para la interpolación de la función $f(x) = sin(x)$

5.1.1. Método de diferencias divididas de Newton

Utilizando las muestras mencionadas se obtuvieron polinomios interpoladores del método de diferencias divididas de Newton en su forma simplificada y su error respectivo como se mencionan a continuación:

- 1^{era} *Muestra:*

  Polinomio: $P(x) = -0{,}0949x^3 + 0{,}93639x$
  Error: 0,20411740578396032

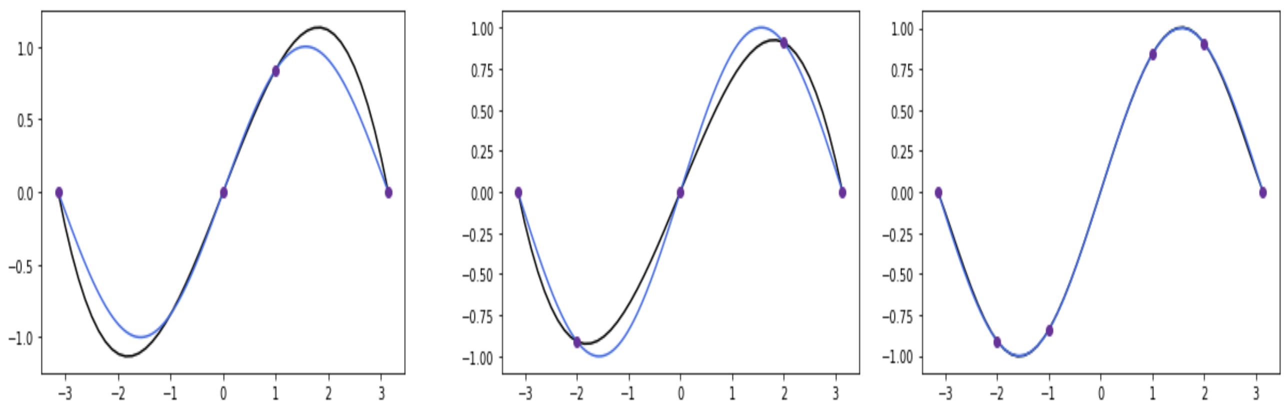
- 2^{da} *Muestra:*

  Polinomio: $P(x) = -0{,}0775x^3 + 5{,}55118e - 17x^2 + 0{,}764664x$
  Error: 0,15431075229397373

- 3^{era} *Muestra:*

  Polinomio: $P(x) = 0{,}0058x^5 + 3{,}46945e - 18x^4 - 0{,}15797x^3 + 0{,}9936x + 4{,}163e - 16$
  Error: $3{,}1086244689504383e - 15$

A continuación en la figura (1) se muestran las gráficas de los polinomios de interpolación obtenidos para las tres muestras mencionadas representados por los segmentos de color negro, así como la función original representada por los segmentos de color celeste y los puntos usados para generar el polinomio de interpolación.



(a) Primera muestra (b) Segunda muestra (c) Tercera muestra

Figura 1: Diferencias Divididas de Newton en 3 muestras distintas con función original $f(x) = sin(x)$

5.1.2. Método de Gregory-Newton

En este caso se utilizaron 4,5 y 7 puntos equiespaciados y se obtuvieron los siguientes polinomios en su forma simple con su respectivo error

- 1^{era} *Muestra:*

  Polinomio: $P(x) = -0{,}09831x^3 - 0{,}014766x^2 + 0{,}9331x + 0{,}0289$
  Error: 0,20057322439232128

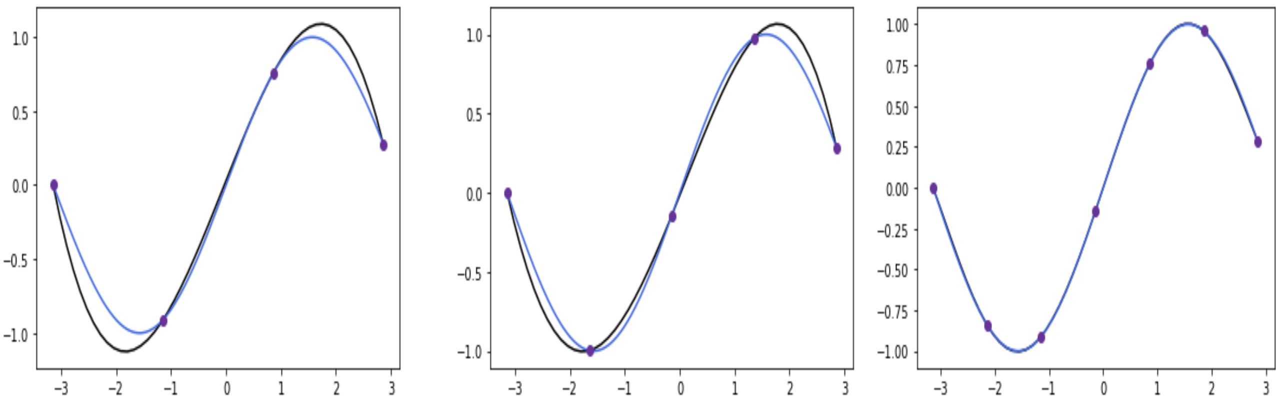
- 2^{da} *Muestra:*

  Polinomio: $P(x) = -0{,}004x^4 - 0{,}09291x^3 + 0{,}02833x^2 + 0{,}87583x - 0{,}01794$
  Error: 0,06492361232251365

- 3^{era} *Muestra:*

  Polinomio: $P(x) = 0{,}000152x^6 + 0{,}005997x^5 - 0{,}00153x^4 - 0{,}159052x^3 + 0{,}00324x^2 + 0{,}9946x - 0{,}0008$
  Error: 0,0009583784257867212

En la figura (2) se muestran las gráficas de los polinomios de interpolación obtenidos para las tres muestras equiespaciadas



(a) Primera muestra (b) Segunda muestra (c) Tercera muestra

Figura 2: Diferencias Divididas de Newton en 3 muestras distintas con función original $f(x) = sin(x)$

5.2. Resultados para: $f(x) = x^2(5x - 3) - 2x^4 + 4x - 5$ en el dominio $[-2, 4]$

En el caso de la función $f(x) = x^2(5x-3) - 2x^4 + 4x - 5$ con $x \in [-2, 4]$ se consideraron tres muestras distintas de datos, de 3, 4 y 5 pares de elementos en cada muestra respectivamente. En la tabla (2) se pueden observar las muestras utilizadas para proceder con la interpolación respectiva.

	1^{era} ***Muestra***		2^{da} ***Muestra***		3^{era} ***Muestra***	
Muestra	x	$f(x)$	x	$f(x)$	x	$f(x)$
1	-2	-97	-2	-97	-2	-97
2	2	-1	0	-5	-0.5	-8,5
3	4	-229	3	-45	1.5	1
4	-	-	4	-229	2.3	-6.8032
5	-	-	-	-	4	-229

Tabla 2: Muestras para la interpolación de la función $f(x) = x^2(5x-3) - 2x^4 + 4x - 5$

5.2.1. Método de diferencias divididas de Newton

Utilizando las muestras mencionadas se obtuvieron polinomios de interpolación por diferencias divididas de Newton en su forma simplificada y su error respectivo como se mencionan a continuación:

- 1^{era} *Muestra:*

Polinomio: $P(x) = -23x^2 + 24x + 43$
Error: 15

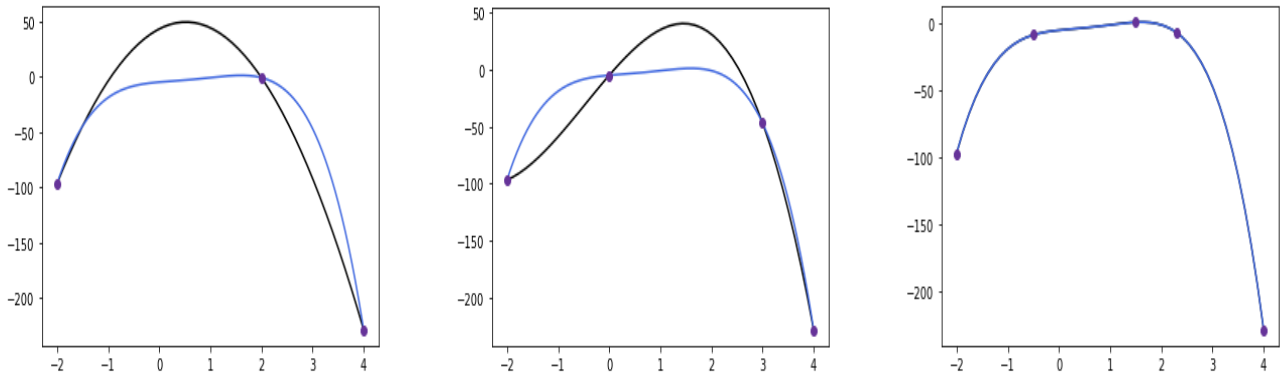
- 2^{da} *Muestra:*

  Polinomio: $P(x) = -5x^3 - 7x^2 + 52x - 5$
  Error: 40

- 3^{era} *Muestra:*

  Polinomio: $P(x) = -2x^4 + 5x^3 - 3x^2 + 4x - 5$
  Error: 0

A continuación en la figura (3) se muestran las gráficas de los polinomios de interpolación obtenidos para las tres muestras mencionadas representados por los segmentos de color negro, así como la función original representada por los segmentos de color celeste y los puntos usados para generar el polinomio de interpolación.



(a) Primera muestra (b) Segunda muestra (c) Tercera muestra

Figura 3: Diferencias divididas de Newton en 3 muestras distintas con función original $f(x) = x^2(5x - 3) - 2x^4 + 4x - 5$

5.2.2. Método de Gregory-Newton

Los polinomios interpoladores del método de Gregory-Newton en su forma simplificada y su error respectivo obtenidos de 3 muestras distintas de 3, 4 y 5 puntos equiespaciados se mencionan a continuación:

- 1^{era} *Muestra:*

  Polinomio: $P(x) = -18x^2 + 14x + 3$
  Error: 9,999999999999964

- 2^{da} *Muestra:*

  Polinomio: $P(x) = -3x^3 - 11x^2 + 36x - 5$
  Error: 10

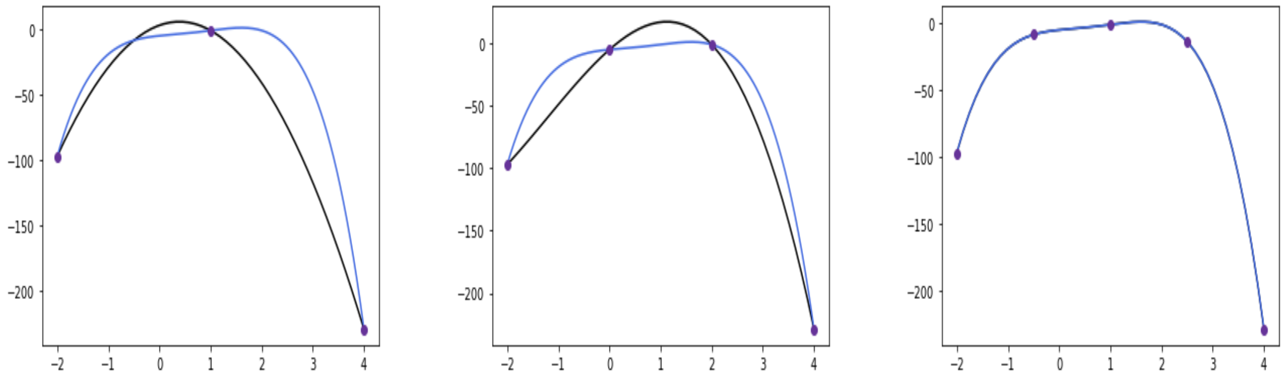
- 3^{era} *Muestra:*

  Polinomio: $P(x) = -2x^4 + 5x^3 - 3x^2 + 4x - 5$
  Error: $5{,}684341886080802e - 14$

A continuación en la figura (4) se muestran las gráficas de los polinomios de interpolación obtenidos.

5.3. Resultados para: $f(x) = x^2 - 5$ en el dominio $[-10, 10]$

En el caso de la función $f(x) = x^2 - 5$ con $x \in [-10, 10]$ se consideraron dos muestras distintas de datos, de 3 y 5 pares de elementos en cada muestra respectivamente. En la tabla (3) se pueden observar las dos muestras utilizadas para proceder con la interpolación de Lagrange.



(a) Primera muestra (b) Segunda muestra (c) Tercera muestra

Figura 4: Interpolación de Gregory-Newton en 3 muestras distintas con función original $f(x) = x^2(5x - 3) - 2x^4 + 4x - 5$

	1^{era} ***Muestra***		2^{da} ***Muestra***	
Muestra	x	$f(x)$	x	$f(x)$
1	-10	95	-10	95
2	-1	-4	-5	20
3	10	95	0	-5
4	-	-	5	20
5	-	-	10	95

Tabla 3: Muestras para la interpolación de la función $f(x) = x^2 - 5$

5.3.1. Método de diferencias divididas de Newton

Utilizando las muestras mencionadas se obtuvieron polinomios de interpolación por diferencias divididas de Newton y su error respectivo como se mencionan a continuación:

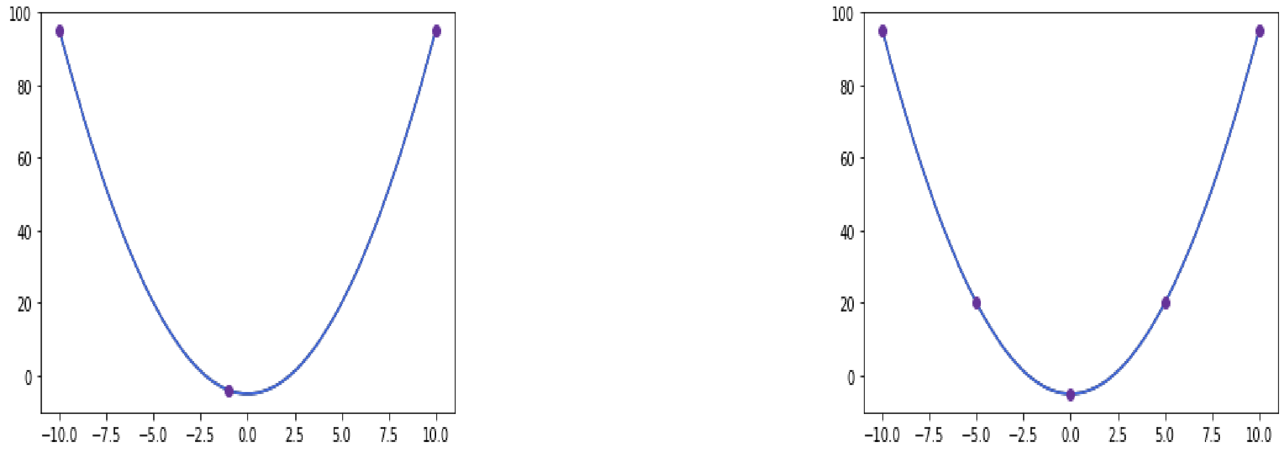
- 1^{era} *Muestra:*

  Polinomio: $P(x) = -11x + 1(x + 1)(x + 10) - 15 = x^2 - 5$
  Error: 0,0

- 2^{da} *Muestra:*

  Polinomio: $P(x) = -15x + 1(x + 5)(x + 10) - 55 = x^2 - 5$
  Error: 0,0

A continuación en la figura (5) se muestran las gráficas de los polinomios de interpolación obtenidos para las tres muestras mencionadas.



(a) Primera imagen. (b) Segunda imagen.

Figura 5: Diferencias divididas de Newton en 2 muestras distintas con función original $f(x) = x^2 - 5$

5.3.2. Método de Gregory-Newton

Se obtuvo un resultado similar que en la interpolación con diferencias divididas de Newton al utilizar éste método de Gregory-Newton con la función $f(x) = x^2 - 5$ ya que interpolando con 3 puntos equiespaciados se obtiene directamente la función real.

6. Discusión

El problema de interpolación de Hermite no se presentó en los resultados debido a que los polinomios obtenidos con este método no eran los correctos ya que la curva de interpolación se encontraron muy alejados a sus valores reales. Esto debido a que no se implementó bien el algoritmo. Otra observación de éste métedo es que se puede extender considerando valores de derivadas de la función de orden mayor que uno. Por otro lado, solamente se puede hacer un de el método de Gregory Newton cuando se tiene como datos puntos equiespaciados mientras que el método de diferencias divididas de Newton no tiene esta restricción. Los resultados obtenidos al utilizar ambos métodos en la función $f(x) = sin(x)$ fueron que a partir del sexto punto el polinomio está más próximo a la función real pero vale la pena recalcar que el error de interpolación del método de diferencias divididas es menor que el error en el método de Gregoru Newton. En el caso de la función $f(x) = x^2(5x - 3) - 2x^4 + 4x - 5$ se puede ver que en la figura (3) el polinomio interpolador de diferencias divididas se asemeja a la función real cuando se tienen como datos 5 puntos; con el método de Gregory-Newton se obtuvieron resultados similares, como se evidencia en la figuras (4) y (3). Por último, los resultados al utilizar diferenicas divididas en la funcion $f(x) = x^2 - 5$ muestran que con tan solo tres puntos el polinomio interpolador es igual a la función real pero con el método de Gregory-Newton se necesitaron 5 puntos, esto se evidencia en la figura (5).

7. Conclusiones

El método de interpolación que obtuvo una mejor aproximación a la función real es el de diferencias divididas de Newton. Todos los métodos se ajustan más a la función real cuando se tienen más puntos como datos de entrada. El interpolador de Hermite se lo utiliza cuando se tiene información sobre las derivadas de la función pero en este caso no se obtuvo los resultados deseados.

Referencias

[1] Gupta., 2015. Numerical Methods: Fundamentals And Applications. 5th ed.

[2] R.L. Burden and J.D. Faires, Análisis Numérico, Grupo Editorial Iberoamérica, México 1985.