

Optimización

Segmentación de Imágenes

Tarea 8

21 de abril de 2021

Erika Rivadeneira Pérez
erika.rivadeneira@cimat.mx
Matemáticas Aplicadas - CIMAT

1. Resumen

En el presente reporte se muestra la solución al problema de ajustar una mezcla de gaussianas a un histograma 3D. Se resolvió el problema utilizando el método del gradiente por descenso alternadamente en los parámetros de la función objetivo hasta obtener la convergencia deseada.

2. Introducción

Se presenta el problema de ajustar una mezcla de gaussianas a un histograma 3D. La función objetivo de este problema viene dada por:

$$\min_{\alpha^j, \mu^j} g(\alpha^j, \mu^j) = \sum_{c \in \Omega} \left[h^j(c) - \sum_{i=1}^n \alpha_i^j \exp \left(-\frac{\|c - \mu_i^j\|_2^2}{2\sigma^2} \right) \right]^2,$$

Donde:

- $j \in \{1, 2\}$, corresponden a fondo y objeto.
- $c = [r, g, b]^\top$, con $r \in B_1 = \{1, \dots, b_1\}$, $g \in B_2 = \{1, \dots, b_2\}$, $b \in B_3 = \{1, \dots, b_3\}$ y b_1, b_2, b_3 son el número de bins en cada canal RGB (pueden elegir otro espacio de colores).
- $\Omega = B_1 \times B_2 \times B_3$, donde $X \times Y := \{(x, y) : x \in X, y \in Y\}$ representa el producto cartesiano. $h^j(r, g, b)$ es el histograma 3D de la clase j . n es el número de elementos de la base radial.
- $\alpha^j = [\alpha_1^j, \alpha_2^j, \dots, \alpha_n^j]$ son los pesos de la combinación lineal de la base radial.
- $\mu^j = [\mu_1^j, \mu_2^j, \dots, \mu_n^j]$ son las medias o posiciones de los elementos de la base radial.
- σ es un parámetro conocido.

3. Metodología

Para la solución de este problema se consideró el método del descenso por gradiente, como hemos visto en reportes pasados podemos utilizar para resolver problemas numéricos en la solución de sistemas de ecuaciones o para resolver problemas de optimización sin restricciones. Una de las mayores ventajas

de este algoritmo es que converge a lo sumo en n iteraciones, siendo n la dimensión del problema a trabajar.

El algoritmo de descenso por gradiente hace uso de una estrategia por búsqueda lineal, donde elige una dirección d_k y busca a lo largo de esta dirección desde la iteración actual x_k para una nueva iteración con un valor de función más bajo. Así hasta localizar los mínimos de la función.

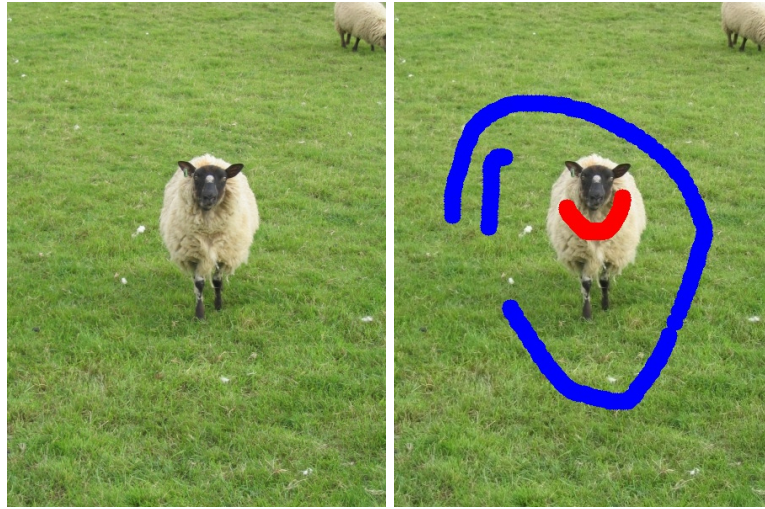
Se consideraron como entradas de la función de gradiente a la función objetivo $g(\alpha^j, \mu^j)$, μ_0 (inicial), α_0 (inicial), $\frac{\partial g}{\partial \alpha_k}$, $\frac{\partial g}{\partial \mu_{k,\ell}}$ y bins. Donde

$$\frac{\partial g}{\partial \alpha_k} = \sum_{c \in \Omega} \left[h^j(c) \exp \left(-\frac{\|c - \mu_k^j\|^2}{2\sigma^2} \right) + 2 \left(\sum_{i=0}^n \alpha_i^j \exp \left(-\frac{\|c - \mu_i^j\|^2}{2\sigma^2} \right) \right) \right] \cdot \exp \left(-\frac{\|c - \mu_k^j\|^2}{2\sigma^2} \right)$$

$$\frac{\partial g}{\partial \mu_{k,\ell}} = -2 \sum_{c \in \Omega} \left[h^j(c) - \sum_{i=1}^n \alpha_i^j \exp \left(-\frac{\|c - \mu_i^j\|^2}{2\sigma^2} \right) \right] \alpha_k^j \exp \left(-\frac{\|c - \mu_k^j\|^2}{2\sigma^2} \right) \frac{c_\ell - \mu_{k,\ell}^j}{\sigma^2}$$

4. Resultados

Queremos segmentar la imagen que está a la derecha y la imagen a la izquierda se da al separar el objeto del fondo para generar los histogramas 3D



(a) Imagen original

(b) Objeto y fondo separados

Figura 1: Imagen a segmentar

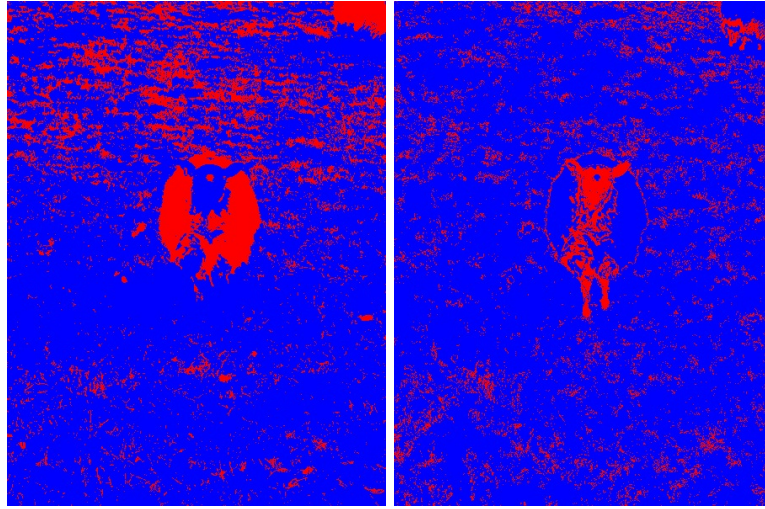
Luego, los resultados obtenidos son las siguientes figuras (ver Figura (2))

5. Conclusiones

Se tuvieron algunos inconvenientes durante la implementación debido a que los tamaños de paso para α^j y μ^j eran muy pequeños y el tiempo de ejecución era muy alto, por tal motivo se decidió escoger un tamaño de paso fijo de 0,001.

Una observación importante es que otro método de búsqueda de puntos óptimos sería más eficiente pero el cálculo de la matriz Hessiana sería a la vez más costosa, por esta razón se escogió el método de descenso por gradiente.

Por último, las imágenes resultantes de la segmentación por $F(c)$ y $H(c)$ resultaron muy similares.



(a) Segmentación con función $F(c; \alpha^j, \mu^j)$ (b) Segmentación con función $H(c)$

Figura 2: Imagen segmentada

Referencias

- [1] J. Nocedal and S. J. Wright. Numerical Optimization. Springer Series in Operation Research, 2000.