BME TMIT
2022

14/6b

Németh Gábor

Funkcionális programozás C++-ban

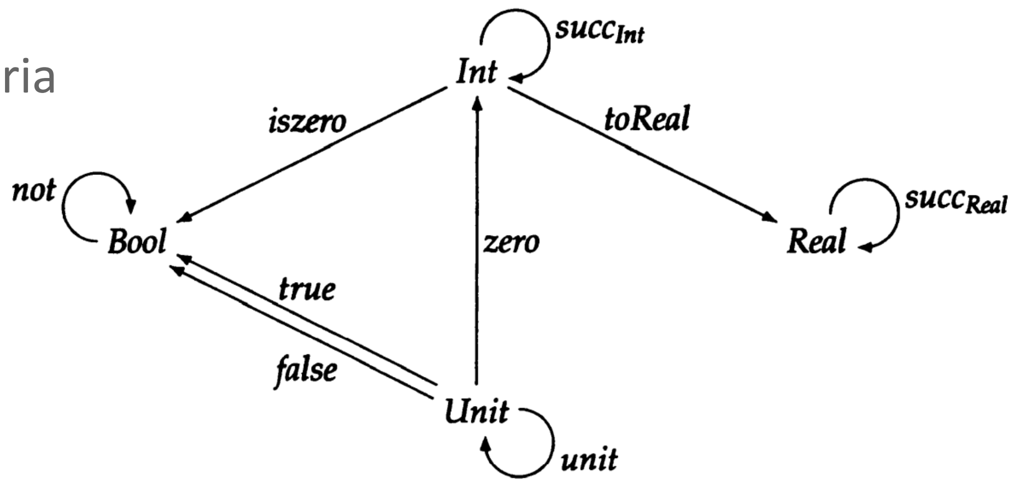
Kategóriaelmélet-
ismétlés

Az FPL kategória

Az FPL kategória

- Legyenek az egyszerű funkcionális nyelvünk elemei a következők:
  - típusok
    - *Int* (egész számok), *Real* (valós számok), *Bool* (igazságértékek), *Unit* (egy elemű típus)
  - beépített operátorok
    - $iszero: Int \to Bool$, $not: Bool \to Bool$, $succ_{Int}: Int \to Int$, $succ_{Real}: Real \to Real$, $toReal: Int \to Real$
  - konstansok
    - *zero: Int, true: Bool, false: Bool, unit: Unit*

- ekkor a nyelvhez tartozó FPL kategória az alábbi módon rajzolható fel:



Univerzális struktúrák

- Hom
- Kommutatív diagramok
- Szorzat
- Összeg
- ADT
- Exponenciális

Hom halmaz

- Egy $\boldsymbol{C}$ kategória morfizmusainak a halmazát $Hom_{\boldsymbol{C}}$ jelöli.

Kommutatív diagramok

- A $\boldsymbol{C}$ kategória diagramja pontokból és élekből áll, amely a kategória objektumainak, illetve a morfizmusok neveivel van felcímkézve.

- A diagram kommutatív, ha a diagram pontjaiból alkotott valamennyi (X, Y) párra a köztük lévő minden útvonal egyenlő.
  - megegyezés szerint csak több mint egy nyilat tartalmazó útvonalakra követeljük meg

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "g'"'] & Z \arrow[d, "g"] \\
W \arrow[r, "f"] & Y
\end{tikzcd}
$$

$$g \circ f' = f \circ g'$$

Szorzat univerzális struktúra I.

- Egy $\boldsymbol{C}$ kategóriában a A és B objektumok szorzatdiagramja a P objektumból és a p_1, p_2 nyilakból áll

$$A \xleftarrow{p_1} P \xrightarrow{p_2} B$$

- amelyre teljesül, hogy bármely másik

$$A \xleftarrow{x_1} X \xrightarrow{x_2} B$$

- diagram esetén létezik egy egyedi $u: X \to P$, amelyre az alábbi diagram kommutatív, azaz $x_1 = p_1 \circ u$ és $x_2 = p_2 \circ u$

$$\begin{tikzcd}
& X \arrow[dl, "x_1"'] \arrow[d, dashed, "u"'] \arrow[dr, "x_2"] & \\
A & P \arrow[l, "p_1"'] \arrow[r, "p_2"] & B
\end{tikzcd}$$

Szorzat univerzális struktúra II.

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[d, "f"'] & A \times A' \arrow[l, "p_1"'] \arrow[r, "p_2"] & A' \arrow[d, "f'"] \\
B & B \times B' \arrow[l, "q_1"] \arrow[r, "q_2"'] & B'
\end{tikzcd}
$$

$$f \times f' \colon A \times A' \to B \times B'$$

$$f \times f' = (f \circ p_1, f' \circ p_2)$$

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[d, "f"'] & A \times A' \arrow[l, "p_1"'] \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, dashed, "f \times f'"] & A' \arrow[d, "f'"] \\
B & B \times B' \arrow[l, "q_1"] \arrow[r, "q_2"'] & B'
\end{tikzcd}
$$

Összeg univerzális struktúra

- A C objektum a hozzá tartozó $i_1$és i_2 injekciókkal az A és a B objektumok koproduktuma (összege), ha bármely X objektumra és a hozzá tartozó j_1, j_2 injekciókra létezik egy egyedi m morfizmus, amely faktorizálja a j_1-et és j_2-t, azaz

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "i_1"] \arrow[dr, "j_1"'] & C \arrow[d, dashed, "m"] & B \arrow[l, "i_2"'] \arrow[dl, "j_2"] \\
& X &
\end{tikzcd}$$

$$\left.\begin{array}{l}
\exists \text{ egyedi } m \text{ morfizmus} \\
j_1 = m \circ i_1 \\
j_2 = m \circ i_2
\end{array}\right\} \quad C = A + B$$

ADT - Algebrai adattípusok

C++	Algebra	Haskell
`struct Void;`	0	`data Void`
`std::monostate`	1	`data Unit = Unit`
`bool`	1 + 1	`data Bool = True | False`
`std::variant<Nothing, a>`	1 + a	`data Maybe a = Nothing | Just a`
`std::variant<a, b>`	a + b	`data Either a b = Left a | Right b`
`std::pair<a, b>`	a * b	`(a, b)`
	b^a	`a → b`

Definíció nélkül!

Mutassa meg, hogy *Bool → a* nem *Either a a*-val, hanem *(a, a)*-val ekvivalens!

Körrizés

$$f(x,y): A \times B \to C$$
$$f(a,y): B \to C \longrightarrow f(a,y) \in C^B$$
$$\downarrow$$
$$\tilde{f}: A \to C^B \longrightarrow a \mapsto f(a,y)$$

$$\tilde{f}(a)(b) \equiv f(a,b)$$

$$f: A \times B \to C \xleftrightarrow{\text{bijekció}} \tilde{f}: A \to C^B$$

$$Hom(A \times B, C) \longleftrightarrow Hom(A, C^B)$$

ϵ vagy *eval*

$$\epsilon:\ C^B \times B \to C$$

$\tilde{f} \equiv$ körrizés

Exponenciális

- Tartalmazzon a **C** kategória bináris szorzatot. A B és C objektumok exponense a C^B objektumból és ϵ: $C^B \to C$ morfizmusból áll, mégpedig úgy, hogy valamennyi A objektumra és $f: A \times B \to C$ morfizmusra létezik olyan egyedi $\tilde{f}: A \to C^B$ morfizmus, amelyre $\epsilon \circ (\tilde{f} \times 1_B) = f$.

$$
\begin{tikzcd}
C^B \\
A \arrow[u, "\tilde{f}"]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
C^B \times B \arrow[r, "\epsilon\ \ (eval)"] & C \\
A \times B \arrow[u, "\tilde{f} \times 1_B"] \arrow[ur, "f"']
\end{tikzcd}
$$

exponenciális transzponált
körri

Köszönöm a figyelmet!

Folytatjuk…