

Összefoglaló és ráadás

Logika, típusok,
algebra és kategóriák

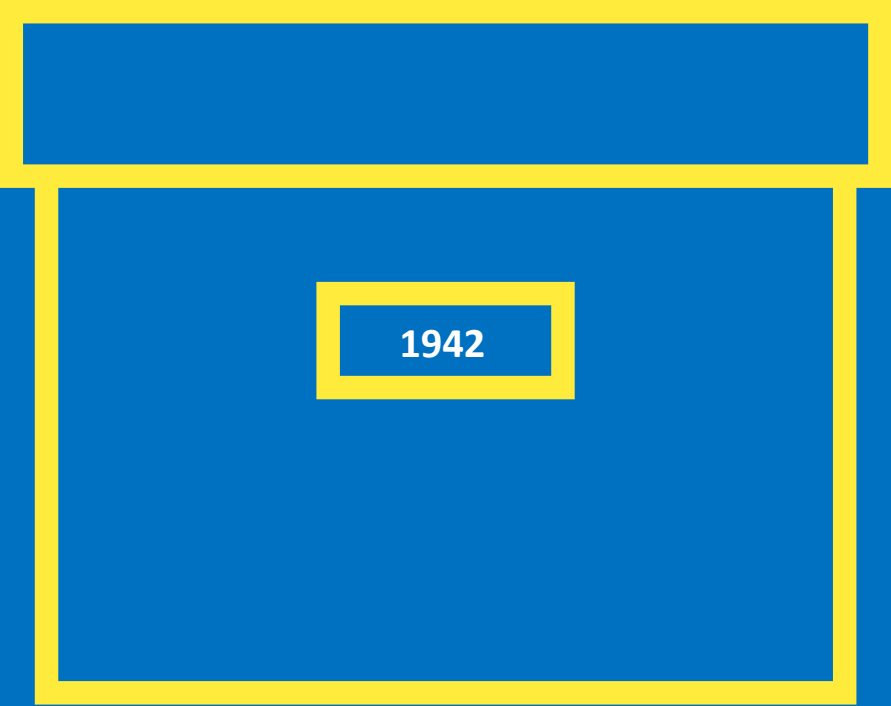
Logika, típusok, algebra és kategóriák

logika (bizonyításelmélet)	típuselmélet	algebra (részbenrendezés)	kategórielmélet
$A \text{ true} \vdash A \text{ true}$	$a : A \vdash a : A$	$A \leq A$	$id: A \rightarrow A$
$\frac{A \text{ true} \vdash B \text{ true} \quad B \text{ true} \vdash C \text{ true}}{A \text{ true} \vdash C \text{ true}}$	$\frac{a : A \vdash b : B \quad b : B \vdash c : C}{a : A \vdash c : C}$	$\frac{A \leq B \quad B \leq C}{A \leq C}$	$\frac{f: A \rightarrow B \quad g: B \rightarrow C}{g \circ f: A \rightarrow C}$
$\frac{\begin{array}{l} A \& B \text{ true} \vdash A \text{ true} \\ A \& B \text{ true} \vdash B \text{ true} \\ \\ C \text{ true} \vdash A \text{ true} \\ C \text{ true} \vdash B \text{ true} \end{array}}{C \text{ true} \vdash A \& B \text{ true}}$	$\frac{\begin{array}{l} x: A \times B \vdash fst\ x : A \\ x: A \times B \vdash snd\ x : B \\ \\ x: C \vdash a : A \\ x: C \vdash b : B \end{array}}{x: C \vdash (a, b) : A \times B}$	$\frac{\begin{array}{l} A \wedge B \leq A \\ A \wedge B \leq B \\ \\ C \leq A, C \leq B \end{array}}{C \leq A \wedge B}$	

“meet”, legnagyobb alsó korlát, infimum

Egy utolsó paradoxon

Curry paradoxon
Löb tétele



1942

Curry paradoxonja

Tegyük fel, hogy a doboz tartalma igaz.

Ha igaz, akkor elfogadjuk, amit állít: ha a doboz tartalma igaz, akkor a Mikulás létezik.

Ebből, és abból a feltevésből, hogy a doboz tartalma igaz, logikusan következik, hogy a Mikulás létezik.

Ha ennek a doboznak a tartalma igaz,

1942

**akkor létezik
Mikulás.**

Beláttuk, hogy abból a feltételből, hogy „a doboz tartalma igaz” következik, hogy „a Mikulás létezik”.

Ez viszont pontosan az, amit a doboz tartalma állít.

Tehát a doboz igazat állít!

Akkor viszont valóban létezik a Mikulás.

Főszereplők



Peano



Gödel



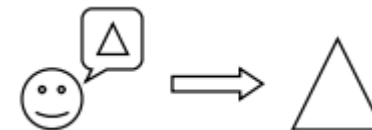
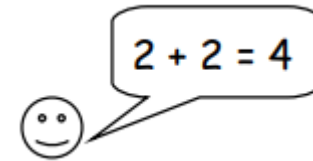
Curry



Löb

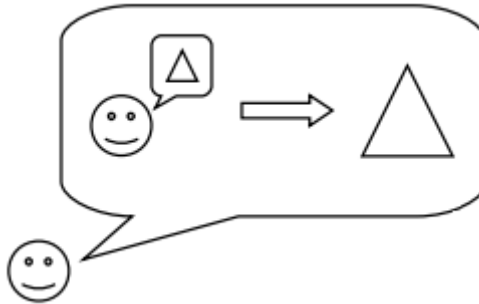
Peano aritmetika

- ▶ Peano aritmetika (PA)
 - ▶ állításokat mond számokról
 - ▶ ha PA mond valamit, azt bizonyításnak mondjuk
- ▶ tapasztalataink szerint PA helyes
 - ▶ ha mond valamit, arról mindig kiderül, hogy igaz

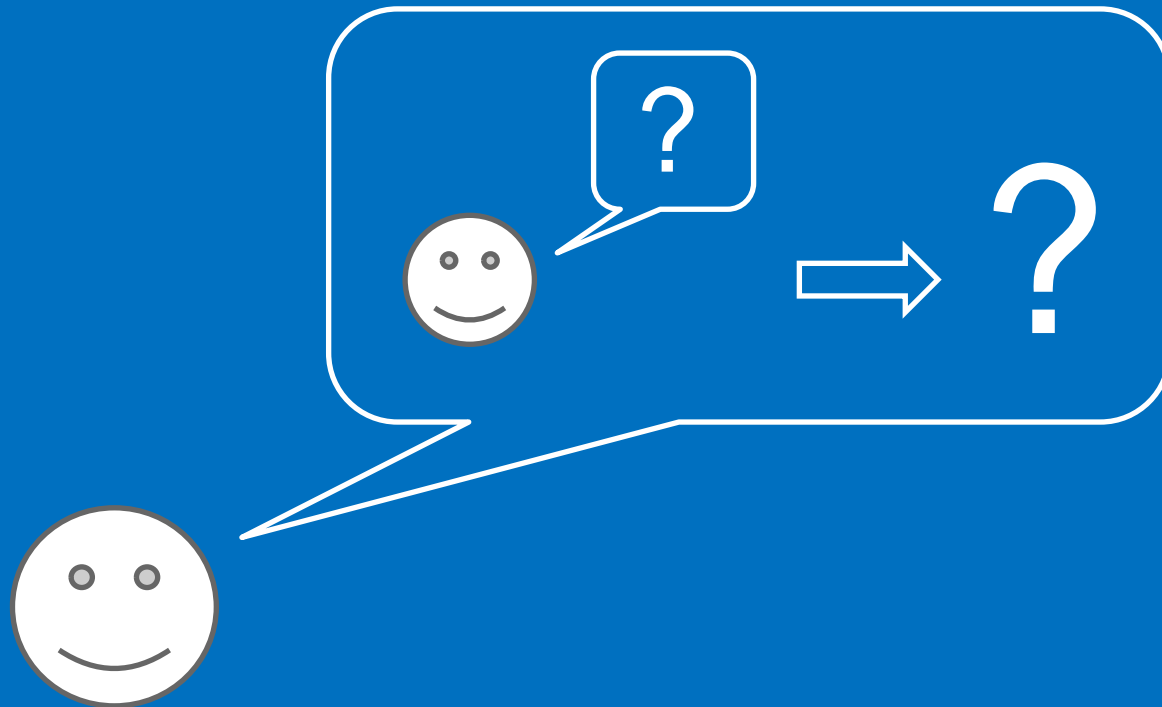


Gödel

- ▶ Gödel rájött, hogyan lehet PA-nak kérdéseket feltenni saját magáról
 - ▶ megmutatta, hogy PA helyessége inkonzisztenciáját vonná maga után



**De talán speciális esetekben
belátható PA helyessége...**

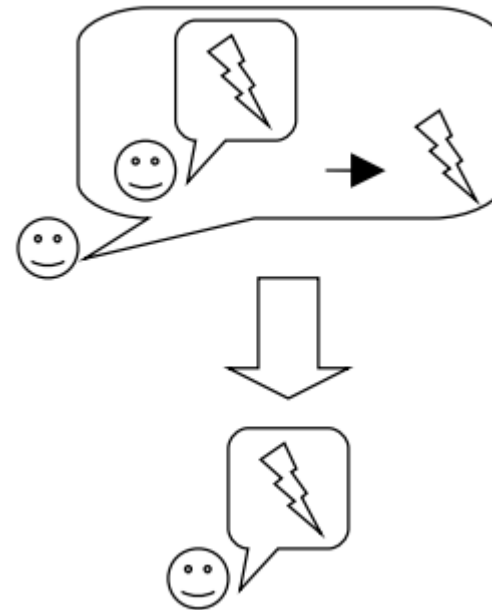


Löb tétel

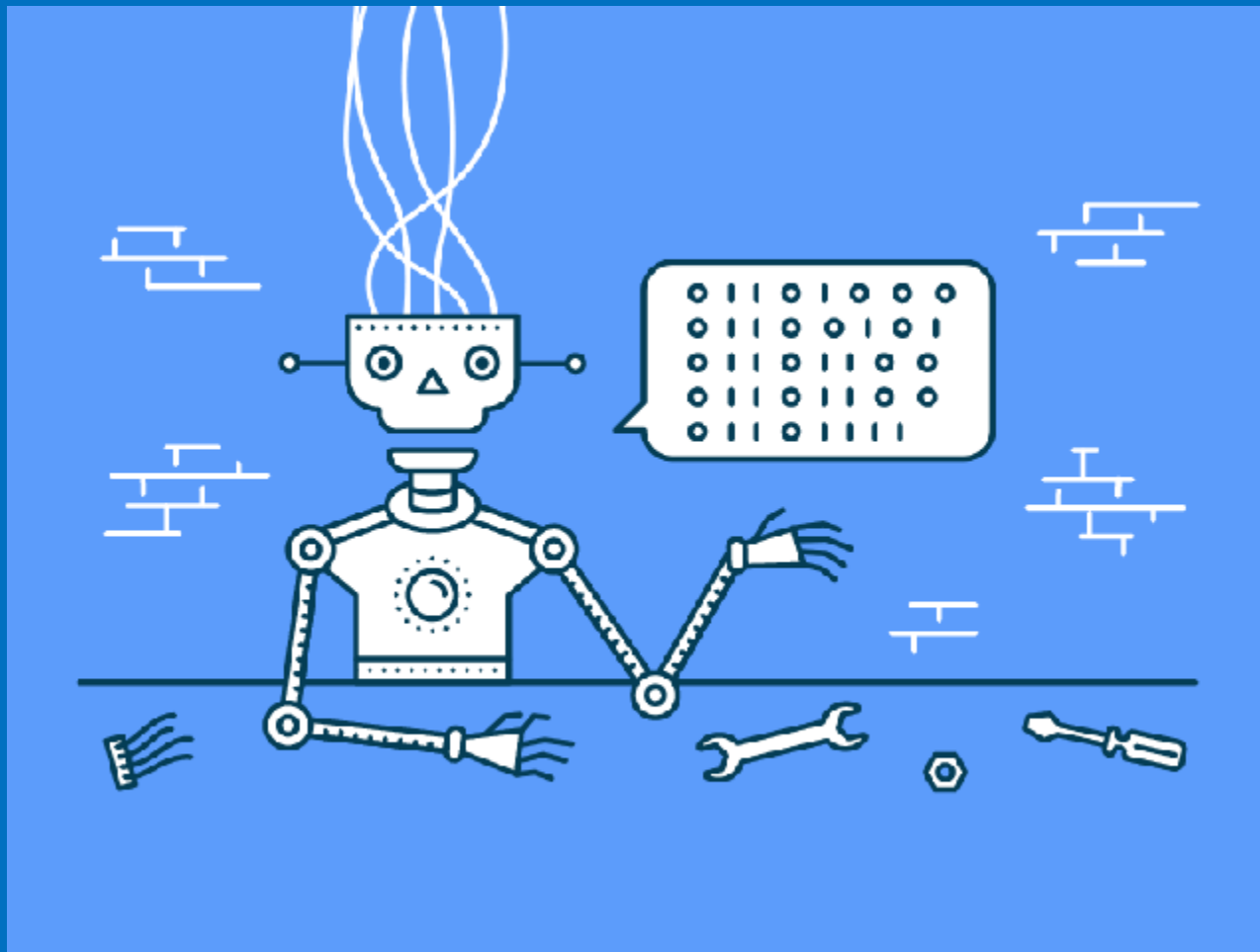
- ▶ Martin Hugo Löb belátta (1955), hogy

Ha PA bizonyítja, hogy „Ha PA
bizonyítja 'X', akkor X”, akkor PA
bizonyítja X-et.

$$\Box(\Box P \rightarrow P) \rightarrow \Box P$$



ex_0: Loeb



```
// Haskellban
// loeb :: Functor a => a (a x -> x) -> a x
// loeb fs = fmap (\f -> f (loeb fs)) fs
// vary
// loeb fs = [ f (loeb fs) | f <- fs ]
```

Köszönöm a figyelmet!



Vége.