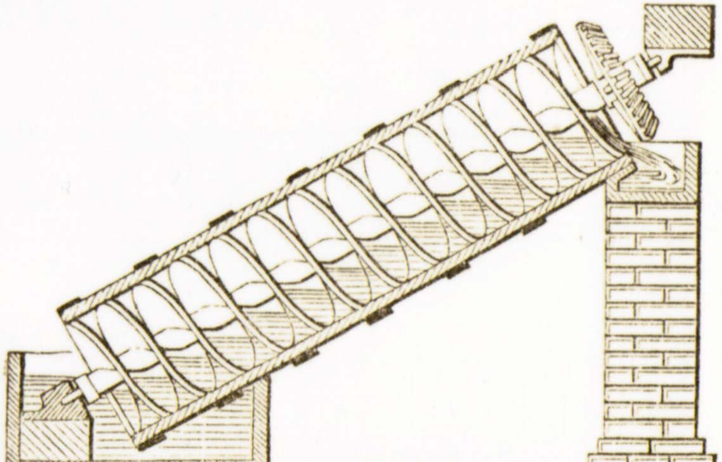
Archimede

Un grande scienziato antico

Lucio Russo



Carocci editore Frecce

Ci sono giunte diverse opere di Archimede, ma solo pochi specialisti le leggono. Alcuni suoi risultati, come il calcolo del volume della sfera o il famoso principio di idrostatica, sono insegnati a scuola, ma senza accennare al modo in cui Archimede li aveva ottenuti. Il pensiero del principale esponente della scienza ellenistica continua così a essere ignorato anche da classicisti e scienziati, mentre la sua fama presso il pubblico è affidata solo al ricordo di alcuni aneddoti leggendari.
L'analisi critica degli episodi trasmessi dalla tradizione è qui accompagnata dall'esposizione di una parte consistente dei risultati di Archimede, sufficiente per vedere all'opera il suo metodo scientifico, mostrandone la potenza e l'eleganza.
La sua scienza era profondamente unitaria: non conosceva l'attuale distinzione tra matematica e fisica, univa strettamente il rigore dei ragionamenti all'intuizione visiva e permetteva a un singolo scienziato di controllarne tutti gli aspetti, dalla scelta dei postulati alle applicazioni tecnologiche.
Il suo studio ha un grande interesse epistemologico e didattico e può dare un significativo contributo alla ricostruzione dell'unità della cultura.

Lucio Russo,
fisico, filologo e storico della scienza, ha insegnato nelle Università di Napoli, Modena e Roma (Tor Vergata), occupandosi di fisica matematica, probabilità e storia della scienza. Tra i suoi libri: *La rivoluzione dimenticata. Il pensiero scientifico greco e la scienza moderna* (Feltrinelli, 1996), *Flussi e riflussi. Indagine sull'origine di una teoria scientifica* (Feltrinelli, 2003), *Ingegni minuti. Una storia della scienza in Italia* (con E. Santoni; Feltrinelli, 2010), *L'America dimenticata. I rapporti tra le civiltà e un errore di Tolomeo* (Mondadori, 2013), *Stelle, atomi e velieri. Percorsi di storia della scienza* (Mondadori, 2015), *Perché la cultura classica. La risposta di un non classicista* (Mondadori, 2018) e, per Carocci editore, *Euclide: il I libro degli Elementi. Una nuova lettura* (con G. Pirro ed E. Salciccia; 2017).

Progetto grafico: Falcinelli & Co.
In copertina: *Vite di Archimede*, XIX secolo, collezione privata.

Frecce · 284

Lucio Russo

Archimede

Un grande scienziato antico

Carocci editore Frecce

1ª ristampa, marzo 2020
1ª edizione, novembre 2019

Realizzazione editoriale: Fregi e Majuscole, Torino

Finito di stampare nel marzo 2020
da Grafiche VD srl, Città di Castello (PG)

ISBN 978-88-430-9826-2

Siamo su:
www.carocci.it
www.facebook.com/carroccieditore
www.twitter.com/carroccieditore

Indice

Introduzione 11

1. L'ambiente e la vita 13

Il secolo di Archimede 13
Alessandria 18
Siracusa 20
La vita di Archimede 21

2. La figura di Archimede tra leggenda e realtà 25

La difesa di Siracusa e la morte 25
Il presunto disinteresse per la vita reale 33
La vera personalità di Archimede 35
Le opere di Archimede e la loro trasmissione 36

3. Idrostatica elementare 41

Il racconto di Vitruvio 41
Il vero principio di Archimede 43
La forma degli oceani (e della Terra) 45
Galleggiamento 48
Una parentesi metodologica 50
L'episodio della corona: una fonte più attendibile 52

4. Meccanica 55

La teoria dei baricentri 55
La legge della leva 59
Le macchine per sollevare pesi tra leggenda e realtà 61
Statica o dinamica? 64

5. Qualche altra realizzazione tecnologica 67

Ingegneria navale 67
La coclea 69
L'orologio ad acqua 71

6. Alcune nozioni prearchimedee 75

La proprietà caratteristica della parabola 75
Tangente a una parabola in un punto 77
Costanza della sottonormale 79

7. Ottica e astronomia 81

Alcuni risultati di ottica 81
La teoria degli specchi ustori 84
La misura del diametro apparente del Sole 87
La testimonianza di Archimede sull'eliocentrismo 89
Il planetario 92

8. Metodi infinitesimali 97

Un segmento di parabola e la somma di una serie 97
Il compagno immaginario di Gauss 103
L'area racchiusa dal primo giro della spirale 106
Il metodo di Archimede e la teoria dell'integrazione 109

Un confronto tra infinitesimi 113
Volume e baricentro di un segmento di paraboloide 116
Superficie e volume della sfera 118
Il *Metodo* 124

9. Altre nozioni prearchimedee 129

Parabole in coordinate oblique 129
La proprietà caratteristica dell'ellisse 133
Una proprietà dell'ellisse e della parabola 134

10. Geometria e idrostatica 137

Il lemma della *Quadratura della parabola* 137
Stabilità dell'equilibrio: un risultato preliminare 138
Area dell'ellisse 140
Segmenti obliqui di paraboloidi 142
Stabilità dell'equilibrio di un paraboloide galleggiante 147

11. Qualche altro risultato 151

La misura del cerchio 151
La formula detta "di Erone" 156
Grandi numeri 160
Il problema dei buoi 161
Lo *Stomachion* 163

12. Uno sguardo complessivo 165

Qualche osservazione sul metodo di Archimede 165
La fortuna di Archimede 170
Archimede nella didattica 175

Consigli di lettura 177

Indice dei nomi 181

Introduzione

Summis ingeniis dux et magister fuit.

J. L. Heiberg, *Archimedis Opera Omnia*, *Prolegomena* xcv

«Archimede ne ha fatte di così curiose, ha fatto dir tanto di sé, che, per saperne qualche cosa, non c'è bisogno di un'erudizione molto vasta»[1]. Così Manzoni spiega perché Archimede (a differenza del povero Carneade) fosse familiare perfino a don Abbondio. In effetti Archimede è uno dei personaggi più famosi della storia ed è presente nell'immaginario collettivo come archetipo dello scienziato allo stesso tempo geniale e strambo. Il "qualche cosa" di Archimede noto a don Abbondio, allo stesso Manzoni e alla quasi totalità delle "persone colte" dei nostri giorni ha però ben poco a che vedere con i risultati scientifici ottenuti dal grande siracusano. Le idee oggi diffuse sullo scienziato non sono infatti tratte dalla lettura delle sue opere, che pure ci sono rimaste in numero considerevole, ma sono desunte, più o meno direttamente, dagli scritti di autori come Vitruvio, Plutarco e vari dotti bizantini. Vissuti secoli dopo la morte di Archimede, quando la scienza era da tempo entrata in crisi, questi autori non erano più in grado di comprenderne i risultati e hanno trasmesso un'immagine dello scienziato deformata dalla leggenda, che nei loro racconti ha assunto forme via via meno credibili.

I due canali che hanno trasmesso il ricordo di Archimede – le sue opere e i resoconti fantasiosi di epoca romana e bizantina – sono rimasti ben distinti, raggiungendo pubblici molto diversi. Mentre il primo è riservato a pochissimi specialisti, sul secondo continua a basarsi il personaggio leggendario familiare al grande pubblico.

L'ambizione di questo libro è quella di seguire una terza via, analizzando criticamente l'aneddotica coagulata attorno alla figura di Archimede e trasmettendo anche a un pubblico di non specialisti (ma scientificamente alfabetizzati e disponibili a impegnarsi) qualcosa del vero pensiero di uno

1. A. Manzoni, *I promessi sposi*, cap. VIII.

dei massimi esponenti della cultura ellenistica. A questo scopo ho rinunciato non solo a ogni pretesa di completezza nell'esposizione dei risultati dello scienziato, ma anche all'esattezza filologica, cercando un ragionevole equilibrio tra l'esigenza di non alterare la sostanza delle argomentazioni di Archimede e quella di usare un linguaggio comprensibile al lettore moderno.

I
L'ambiente e la vita

Il secolo di Archimede

Archimede non è un genio isolato, come spesso lasciano credere i resoconti leggendari che ne hanno tramandato la memoria, ma uno dei massimi rappresentanti di uno straordinario sviluppo culturale.

Il III secolo a.C., nel quale si svolge la vita dello scienziato, è l'epoca dell'apice della cultura ellenistica. In seguito all'impresa di Alessandro Magno, che aveva conquistato l'immenso impero persiano, il mondo greco si era esteso fino ai confini con l'India. Dopo la sua morte, nel 323 a.C., vi era stato un periodo di guerre tra gli aspiranti alla successione, ma alla fine del IV secolo la situazione si era stabilizzata, con il riconoscimento reciproco dei vari Stati di fatto sorti nelle regioni controllate da alcuni generali di Alessandro che avevano cercato di succedergli. Il più vasto era il regno di Seleuco (e poi dei Seleucidi), che comprendeva la Siria, gran parte dell'Asia Minore, la Mesopotamia e la Persia, estendendosi sino all'attuale Afghanistan. Lo Stato di Tolomeo (e poi dei Tolomei), con capitale nella città di Alessandria, comprendeva l'Egitto, la Cirenaica, Cipro, la Fenicia e la Palestina. Un terzo Stato, retto da Antigono Monoftalmo, fondatore della dinastia degli Antigonidi, includeva la Macedonia e parte della Grecia. Del mondo dominato dai Greci facevano parte anche altri Stati minori nati dalla frammentazione dell'impero di Alessandro, come Pergamo, il Ponto, la Bitinia e Rodi, e città greche autonome che erano rimaste esterne all'impero, come Massalia (l'odierna Marsiglia) e Siracusa.

Il mondo greco o ellenizzato fu sede, nel corso del secolo, di una esplosione culturale con poche analogie nella storia. Alcune cause di questo fenomeno possono essere facilmente individuate. L'enorme espansione del mondo noto ai Greci (alla stessa epoca delle conquiste di Alessandro si era svolta la missione esplorativa dell'Atlantico settentrionale guidata da Pitea di Massalia) stimolò nuove conoscenze: il bisogno di descrivere una porzione del globo terrestre per il quale la sfericità della Terra non poteva essere ignorata e che includeva regioni climatiche differenti stimolò lo sviluppo della geografia matematica; la conoscenza di nuove specie vegetali e animali e l'osservazione di fenomeni inusitati, come le maree degli oceani Atlantico e Indiano, aprirono nuovi settori di ricerca. Ancora più importante fu lo stretto contatto dei Greci con paesi di antichissima civiltà come la Mesopotamia, l'Egitto e la Fenicia. La cultura greca, che aveva già sviluppato preziosi metodi razionali di indagine, dovette confrontarsi con tecnologie superiori, quali erano all'epoca quelle egizia e mesopotamica, e con problemi nuovi, come la regolazione delle piene del Nilo. Allo stesso tempo l'ellenizzazione di intellettuali di diversa origine arricchì di elementi nuovi il dibattito culturale: ad esempio gli studi linguistici si giovarono certamente dei contributi di studiosi per i quali il greco era una seconda lingua (in particolare alcuni dei massimi esponenti della Stoa, come lo stesso fondatore della scuola, Zenone di Cizio, erano di origine fenicia). Bisogna aggiungere che l'interesse per la cultura, che Alessandro aveva assorbito dal suo maestro Aristotele, fu ereditato dai sovrani ellenistici, che finanziarono largamente le ricerche degli studiosi e fondarono importanti istituzioni culturali, come il Museo e la Biblioteca di Alessandria.

Si può discutere sull'importanza relativa dei fattori accennati e di altri. Ciò che è certo è il sorgere in tempi brevi di una serie di nuovi strumenti intellettuali. Tra questi credo sia di particolare importanza il convenzionalismo linguistico. Gli uomini avevano sempre creato termini nuovi, provocando una continua evoluzione delle lingue, ma lo avevano fatto inconsapevolmente. Ancora Platone aveva una concezione statica della lingua: credeva infatti che le parole fossero state inventate una volta per tutte da "legislatori originari" in base al criterio (di difficile interpretazione) della somiglianza tra la parola e l'oggetto designato[1]. Altri, come Democrito, avevano invece sostenuto che l'associazione tra il suono di una parola e il suo significato fosse una convenzione liberamente modificabile, ma nessuno aveva usato sistematicamente questa possibilità prima del III secolo a.C., quando furono create intere nuove terminologie convenzionali. Nel periodo ellenistico per la prima volta ci si rende conto di poter scegliere liberamente come accoppiare i termini ai loro significati, purché l'accoppiamento sia esplicito e reso pubblico. Si tratta di una rivoluzione

1. Platone, *Cratilo*.

concettuale che sarebbe stata impossibile prima della diffusione del libro, avvenuta nel primo ellenismo. Non si può, infatti, dare improvvisamente nuovi significati alle parole parlando tra amici, poiché vi sono ben poche speranze che un termine inventato durante una conversazione si affermi[2]. Parole nuove (o nuovi significati di parole già in uso) possono invece essere introdotte all'interno di una terminologia specialistica relativa a una disciplina sulla quale si sta scrivendo un trattato autorevole, che sarà a disposizione di tutti gli studiosi del ramo. Ne fornisce un buon esempio Erofilo di Calcedonia, il creatore dell'anatomia, attivo ad Alessandria d'Egitto. Sezionando per primo in modo sistematico corpi umani a scopo conoscitivo, Erofilo scopre una serie di strutture anatomiche per le quali inventa nuovi termini. Vedremo che Archimede, analogamente, assegna nomi convenzionali (spesso attribuendo significati nuovi a termini già esistenti) a concetti matematici da lui introdotti mediante definizioni esplicite.

Il convenzionalismo linguistico, grazie all'impiego consapevole di termini nuovi o all'attribuzione di nuovi significati a termini già in uso, permette l'introduzione sistematica di concetti nuovi, come non è possibile fare se si accetta una concezione statica della lingua. Questa nuova possibilità fu rapidamente applicata in molte direzioni diverse: tra l'altro agli stessi studi linguistici, con la creazione, nell'ambito della Stoa, della grammatica. La classificazione delle parole nelle diverse "parti del discorso", la descrizione delle declinazioni di sostantivi, aggettivi e pronomi e delle coniugazioni dei verbi fu infatti possibile solo grazie all'introduzione di nuovi termini per designare le varie parti del discorso, i *casi* di sostantivi, aggettivi e pronomi e i tempi e modi dei verbi.

Gli studi linguistici non si limitarono alla grammatica, ma si estesero, sempre nell'ambito della scuola stoica, alla semantica. Non ci è rimasta nessuna opera sull'argomento, ma le testimonianze (in particolare di Diogene Laerzio e Sesto Empirico) non lasciano dubbi sull'alto livello dei risultati ottenuti: è particolarmente interessante la raggiunta consapevolezza che il significato di un termine non può essere compiutamente descritto individuando l'oggetto al quale si riferisce, ma include in modo essenziale le intenzioni con cui il parlante usa quel particolare vocabolo: un'idea che sarà recuperata da Gottlob Frege nel XIX secolo.

2. La situazione odierna è resa ovviamente del tutto diversa dalla presenza dei media attuali.

L'antica *logica* (ossia, etimologicamente, [*l'arte*] *del discorso*) aveva uno stretto legame con gli studi linguistici e la retorica. Sin dal Medioevo abbiamo conosciuto la logica aristotelica, ma la logica proposizionale (cioè una teoria assiomatico-deduttiva, basata su pochi postulati, che usa variabili per indicare proposizioni) è stata recuperata solo nel XIX secolo, anch'essa da Frege, e solo da una decina d'anni ci si è resi conto che risaliva a Crisippo (III secolo a.C.)[3].

Il metodo dimostrativo, che Crisippo aveva esteso alla logica, aveva trovato la sua prima applicazione nell'ambito della scienza esatta, che è il principale frutto dell'esplosione culturale di cui ci stiamo occupando. Le dimostrazioni matematiche si erano già sviluppate in Grecia nel corso del IV secolo a.C., ma nel III secolo appare una novità essenziale. Invece di assumere come punto di partenza delle dimostrazioni qualsiasi verità considerata ovvia (ad esempio grazie all'evidenza di un disegno), si fissano una volta per tutte i *postulati* della teoria, ossia le sole proposizioni che debbono essere accettate senza dimostrazione: questo metodo appare per la prima volta negli *Elementi* di Euclide[4] e viene rapidamente esteso a una serie di scienze che all'epoca erano considerate parte della *matematica*: astronomia, meccanica, ottica, idrostatica, teoria musicale e altre.

Il nuovo metodo, che con un leggero abuso di linguaggio possiamo chiamare assiomatico-deduttivo, non solo è molto più efficace del precedente perché elimina molte cause di errore, ma soprattutto apre nuovi sviluppi, essendo alla base della creazione dei concetti *teorici* propri della scienza esatta. Chiariamo questo punto. I postulati di ciascuna teoria sono frasi del linguaggio ordinario con un chiaro riferimento concreto; ad esempio il primo postulato di Euclide potrebbe essere tradotto "si supponga di poter tracciare una riga dritta da ogni segno a ogni segno": una frase il cui riferimento all'attività concreta di un disegnatore è del tutto evidente[5].

3. Frege ne era venuto a conoscenza attraverso il suo amico filologo classico Rudolf Hirzel (G. Gabriel, K. Hülser, S. Schlotter, *Zur Miete bei Frege – Rudolf Hirzel und die stoischen Logik und Semantik in Jena*, in "History and Philosophy of Logic", 30, 4, 2009, pp. 369-88).

4. Mentre una volta si pensava che gli *Elementi* fossero stati scritti intorno al 300 a.C., oggi, per vari motivi, si tende a datarli qualche decennio più tardi (cfr. F. Acerbi, *Introduzione*, in Euclide, *Tutte le opere*, a cura di F. Acerbi, Bompiani, Milano 2007, pp. 177-212).

5. Questo punto differenzia i *postulati* della matematica ellenistica dai moderni *assiomi*, che usano termini il cui unico significato è quello introdotto implicitamente dagli assiomi stessi. Detto altrimenti, gli assiomi, a differenza degli antichi postulati, non hanno alcuna

Poiché però la teoria ammette solo proposizioni dedotte logicamente dai postulati, il significato dei termini usati viene automaticamente sfrondato da tutti gli aspetti che nei postulati non appaiono, come il colore e lo spessore delle *righe* o la forma e l'estensione dei *segni.* Si generano così i concetti, propri della teoria geometrica, che indichiamo con i termini "retta" e "punto".

Le teorie scientifiche ellenistiche forniscono *modelli teorici* della realtà, all'interno dei quali è possibile determinare con assoluta certezza quali affermazioni siano vere. Diviene in particolare possibile studiare teoricamente le proprietà e il comportamento di oggetti non ancora esistenti, prima di costruirli, realizzando solo quelli che, almeno in teoria, soddisfano i requisiti desiderati. Le teorie scientifiche rendono cioè possibile un nuovo tipo di tecnologia, enormemente più efficiente, basata sulla *progettazione scientifica*. Consiste in questo la vera superiorità, oggi raramente ricordata, del metodo dimostrativo. Non è infatti molto utile escogitare il modo di riuscire a dedurre l'affermazione *z* dalle premesse *a*, *b*, *c*..., se *z* può essere verificata direttamente; se invece le premesse riguardano una situazione virtuale, non esistente in natura, il metodo dimostrativo non ha alternative.

Nel III secolo a.C. si sviluppa, in effetti, una nuova tecnologia che ottiene realizzazioni senza precedenti. Appaiono una serie di elementi tecnologici nuovi, come ruote dentate e ingranaggi, viti con madreviti, valvole, stantuffi, eliche, alberi a camme e nastri trasportatori; si realizzano meccanismi automatici, pompe, macchine a elevato vantaggio meccanico e dispositivi capaci di autoregolazione; si costruiscono apparecchi capaci di sfruttare, oltre all'energia animale, l'energia idraulica, eolica, il vapore e l'energia solare. Questa tecnologia è nota soprattutto attraverso i sottoprodotti ludici che ne furono tratti in epoca imperiale (descritti in particolare nelle opere di Erone di Alessandria): circostanza che ha portato spesso a sottovalutarla gravemente. Conosciamo però anche alcune delle realizzazioni del III secolo a.C. che sono tutt'altro che ludiche. Ricordiamo, ad esempio, le macchine per sollevare grandi pesi con una piccola forza, gli acquedotti capaci di rifornire le cittadelle facendo risalire l'acqua dopo averla portata a valle in condotte forzate a grande pressione, gli strumenti per il rilevamento topografico e le osservazioni astronomiche (come la

relazione con il mondo reale, ma determinano solo le "regole del gioco" da usare nel dedurre nuove proposizioni.

diottra e l'astrolabio), il faro di Alessandria (cfr. *infra*, pp. 20, 87), i mulini idraulici[6], le nuove navi, di stazza e peso senza confronti nel passato.

Anche le arti hanno uno sviluppo straordinario, in parte connesso a quello scientifico. In primo luogo, infatti, la scienza è applicata alle arti: la pittura, ad esempio, si avvale della teoria della prospettiva, nata come applicazione dell'ottica, e dei nuovi colori frutto dello sviluppo della chimica empirica[7]. Tra i prodotti della scienza della pneumatica appare il primo strumento musicale a tastiera: l'organo idraulico; la teoria musicale, d'altra parte, viene elaborata in stretto collegamento con la matematica.

Le realizzazioni scientifiche e artistiche hanno inoltre una profonda base comune nella nuova consapevolezza che l'uomo è libero di creare i propri strumenti culturali: contemporaneamente al convenzionalismo linguistico e alla creazione di nuove scienze, appaiono nuovi generi letterari e stili pittorici, tra i quali autori e artisti scelgono liberamente il proprio.

Alessandria

Il principale centro culturale di quest'epoca straordinaria fu Alessandria d'Egitto (almeno appare tale dalle fonti a nostra disposizione, che sono molto più avare di informazioni, ad esempio, sulla capitale del regno dei Seleucidi, Antiochia).

La vita culturale della città, fondata da Alessandro nel 331 a.C., si sviluppò soprattutto grazie alla politica dei primi Tolomei: Tolomeo I Sotér (sovrano dal 305 al 282) e Tolomeo II Filadelfo (282-246). Tra le istituzioni da loro create spicca il Museo, cioè il primo istituto pubblico di ricerca di cui abbiamo notizia. Nel Museo lavoravano studiosi provenienti da tutto il mondo greco, che non avevano preoccupazioni economiche ed erano largamente riforniti di ciò che poteva essere utile al loro lavoro. Sappiamo, ad esempio, che Tolomeo II aveva istituito uno zoo[8] e che a Erofilo di Calcedonia, per i suoi studi di anatomia e fisiologia umana,

6. I primi mulini idraulici datati con certezza risalgono all'inizio del I secolo a.C., ma è stato sostenuto con convincenti argomenti indiretti che siano stati inventati nel III secolo a.C. (M. J. T. Lewis, *Millstone and Hammer: The Origin of Water-Power*, University of Hull, Hull 1997).

7. Plinio, *Naturalis historia*, XXXV, §§ 49-50; Vitruvio, *De architectura*, VII, xi-xiv.

8. Ateneo, *Deipnosophistae*, XIV, 654b-c.

erano consegnati anche condannati sui quali eseguire terribili esperimenti di vivisezione[9].

Annessa al Museo e a disposizione dei suoi studiosi era la celeberrima Biblioteca, che a metà del secolo conteneva circa mezzo milione di *libri* (ossia rotoli). I libri giungevano alla Biblioteca attraverso vari canali: erano acquistati su tutti i mercati, erano chiesti ai sovrani con cui i Tolomei avevano rapporti diplomatici ed erano acquisiti anche grazie a una particolare tassa istituita da Tolomeo II: tutti i libri a bordo di navi che arrivavano nel porto di Alessandria dovevano essere consegnati; i proprietari in cambio ne avrebbero ricevuto ottime copie realizzate nella Biblioteca. La Biblioteca era anche e soprattutto il principale centro di produzione editoriale del mondo: vi si pubblicavano testi originali, accurate edizioni di classici e traduzioni di libri scritti in altre lingue. Tra l'altro vi furono realizzate la traduzione dall'ebraico in greco dell'Antico Testamento detta "dei Settanta" e quella dal persiano dell'enorme corpus attribuito a Zoroastro (formato, secondo Plinio, da due milioni di versi)[10].

Il ruolo guida assunto dalla Biblioteca di Alessandria nella produzione editoriale consentì innovazioni culturali di capitale importanza, quali il convenzionalismo linguistico e la fissazione dei postulati in matematica. È infatti possibile introdurre termini nuovi o nuovi significati di termini già in uso, come fece sistematicamente Erofilo, oppure stabilire i punti di partenza che avrebbero dovuto essere usati dagli altri matematici, come fece Euclide negli *Elementi* enunciando i suoi postulati, solo scrivendo trattati che si ritiene possano restare testi di riferimento in tutto il mondo greco. Non è quindi un caso che Euclide ed Erofilo abbiano lavorato entrambi ad Alessandria nel III secolo a.C. A Erofilo dobbiamo anche la scoperta dei nervi e del diverso ruolo dei nervi sensori e motori: un risultato con importanti conseguenze sulla teoria della conoscenza. Tra gli altri scienziati attivi ad Alessandria nel primo periodo ellenistico ricordiamo Stratone di Lampsaco detto "il fisico" (fondatore, tra l'altro, della scienza della pneumatica), il suo allievo Aristarco di Samo (ideatore dell'eliocentrismo), Conone di Samo (che, secondo Archimede, era il massimo scienziato dell'epoca), Ctesibio (inventore, tra l'altro, dell'organo idraulico e della pompa) e Filone di Bisanzio (allievo di Ctesibio e massimo esponente della meccanica alessandrina).

9. Celso, *De medicina*, proemio, §§ 23-26.
10. Plinio, *Naturalis historia*, XXX, 4.

La direzione della Biblioteca era affidata a intellettuali del massimo livello, che i sovrani chiamavano ad Alessandria da tutto il mondo greco. All'epoca dell'attività scientifica di Archimede il prestigioso incarico fu ricoperto prima da uno dei massimi poeti del tempo, Apollonio Rodio, e poi da Eratostene: l'intellettuale che si occupò di ogni ramo dello scibile, al quale dobbiamo, tra l'altro, la misura delle dimensioni della Terra.

L'esigenza di curare le edizioni dei classici greci eliminando errori di copia e interpolazioni e restaurando nel modo più accurato possibile i testi originali dette avvio agli studi di filologia, iniziati già dal primo direttore della Biblioteca, Zenodoto di Efeso, e proseguiti a opera di Eratostene, al quale dobbiamo lo stesso termine "filologia".

Il progresso tecnologico, oltre che scientifico, assicurato dagli studiosi alessandrini è particolarmente evidente ad Alessandria. La città è sovrastata da una collina artificiale, il Paneum, innalzata per creare una passeggiata panoramica. L'isola di Faro è unita alla terraferma da un viadotto che, creando una penisola artificiale, delimita i due porti della città; sull'ex isola sorge la struttura che serve da guida alle navi in arrivo, con la sua luce avvistabile a circa 50 chilometri di distanza, grazie a un riflettore[11]. Una rete idrica distribuisce l'acqua del Nilo nelle case dopo averla purificata in vasche di decantazione. Le due strade principali sono dotate di illuminazione notturna.

Siracusa

La città greca di Siracusa, nata come colonia corinzia nell'VIII secolo a.C., nei secoli successivi era divenuta un centro di grande importanza politica e culturale. Fu la principale nemica di Cartagine durante le guerre greco-puniche e quando, nel 415 a.C., nell'ambito della guerra del Peloponneso, fu attaccata da Atene, sconfisse gli ateniesi. All'inizio del IV secolo la città,

11. L'esistenza del riflettore può essere considerata certa sulla base di tre elementi: l'esistenza, all'epoca della costruzione del faro, della teoria corrispondente; le testimonianze arabe che parlano di superfici metalliche riflettenti ancora visibili alla loro epoca; la distanza alla quale era visibile la luce del faro, non raggiungibile senza l'uso di un riflettore. La distanza riferita da Strabone, di circa 48 chilometri, è infatti credibile perché coincide, con buona approssimazione, con la distanza dell'orizzonte visibile dalla sommità del faro (la cui altezza, di circa 95 metri, era stata presumibilmente calcolata in modo da poter sfruttare tutta la potenza del riflettore).

retta da Dionisio I (sovrano dal 405 al 367), non solo dominava quasi tutta la Sicilia (con la sola eccezione dell'estremità occidentale, assoggettata dai cartaginesi), ma aveva esteso la sua influenza su regioni lontane, creando in particolare varie colonie in Adriatico (tra cui Ancona e Adria).

Tra gli intellettuali attivi a Siracusa prima dell'epoca che ci interessa bisogna ricordare almeno, nel V secolo a.C., Corace e Tisia, considerati i fondatori della retorica, e il commediografo, poeta e filosofo Epicarmo. L'interesse dei sovrani siracusani per la cultura è dimostrato anche dalle tragedie scritte da Dionisio I. Platone era stato più volte a Siracusa, dove aveva tentato di realizzare il suo Stato ideale. Il progetto era infine fallito, ma due suoi discepoli furono sovrani di Siracusa: Dione (che regnò dal 357 al 354) e Callippo (dal 354 al 353). Tra gli intellettuali attivi a Siracusa nel IV secolo vi fu l'astronomo pitagorico Iceta, che sembra essere stato il primo ad attribuire moti alla Terra; nel secolo successivo bisogna ricordare almeno l'inventore della poesia bucolica, Teocrito.

Siracusa era all'avanguardia anche sul piano tecnologico, come mostrano sia le opere ingegneristiche del periodo classico (tra le quali spicca l'enorme cinta fortificata, culminante nel castello Eurialo, fatta costruire da Dionisio I verso il 400 a.C.) sia opere ellenistiche, come il rifacimento del teatro, che realizzò un'acustica particolarmente efficiente, o la costruzione, su cui torneremo, della più grande nave dell'antichità.

L'attività di Archimede si svolse quasi interamente durante il lungo regno di Gerone II (sovrano dal 270 al 215). All'inizio della prima guerra punica Gerone si era alleato con Cartagine, ma successivamente era passato dalla parte dei Romani, dei quali fu alleato anche quando, nel 218, iniziò la seconda guerra punica.

Alla morte di Gerone, nel 215, salì al trono il nipote quindicenne Geronimo che, persuaso dai suoi consiglieri, fece la malaugurata scelta di rompere l'alleanza con Roma passando dalla parte di Annibale (che l'anno prima aveva annientato l'esercito romano a Canne). Provocò così l'attacco romano che avrebbe portato alla rovina di Siracusa.

La vita di Archimede

Nonostante la grande fama dello scienziato e i tanti autori che ne parlano, sulla vita di Archimede abbiamo ben poche notizie. Nel VI secolo Eutocio afferma che un certo Eraclide (forse lo stesso Eraclide che era stato incaricato da Archimede di recapitare alcuni suoi libri allo studioso alessandrino Dositeo?)[12] aveva scritto una biografia di Archimede[13], ma l'opera è perduta e gli autori che ci parlano dello scienziato, pur avendola probabilmente letta, hanno preferito trasmetterci più aneddoti arricchiti dalla loro fantasia che veri dati biografici.

Non vi è dubbio che Archimede fosse siracusano e che sia morto nel 212 a.C., durante il saccheggio romano di Siracusa, ma non conosciamo con sicurezza il suo anno di nascita. La data usualmente accettata, 287 a.C., è ricavata dalla data della morte e dall'informazione fornita dall'erudito bizantino Giovanni Tzetzes che avesse raggiunto l'età di 75 anni[14]. Non sappiamo però da quali fonti Tzetzes, che scrive nel XII secolo e spesso non è affidabile, avesse tratto questa informazione. Il numero 75 è compatibile con l'ipotesi che Tzetzes avesse cercato di quantificare con un'età tipica il dato, riportato da più autori, che lo scienziato fosse morto in tarda età.

La notizia che fosse figlio dell'astronomo Fidia, riportata in molti testi come certa, deriva da un passo di Archimede stesso[15], incomprensibile nei manoscritti, che il filologo Friedrich Blass nel 1883 ha emendato congetturando che contenesse le parole Φειδία δὲ τοῦ ἁμοῦ πατρὸς[16] ("mio padre Fidia"). Poiché il contesto riguarda una stima del rapporto tra le dimensioni del Sole e della Luna, se l'emendamento è corretto, il padre Fidia in almeno un'occasione doveva essersi occupato di astronomia, ma nessun'altra fonte nomina un astronomo con questo nome.

Archimede fu in ottimi rapporti con il sovrano di Siracusa Gerone II. Plutarco sostiene che ne era non solo amico, ma anche parente (συγγενὴς)[17]. Questa informazione è sembrata a qualcuno in contraddizione con il passo in cui Cicerone afferma di voler confrontare la vita di Dionisio I di Siracusa con quella di un «uomo umile» (*humilem homunculum*) proveniente dalla stessa città: Archimede[18]. Il passo non deve però, a mio parere, essere interpretato necessariamente come un riferimento a un'origine umile di

12. Archimede accenna a questa circostanza all'inizio del suo trattato *Sulle spirali*.
13. Eutocio, *Commentario a La misura del cerchio di Archimede*, 142, 21-143, 26 (ed. Mugler).
14. Giovanni Tzetzes, *Chiliadi*, II, 108.
15. Archimede, *Arenario*, 136-137 (ed. Mugler).
16. Si tratta di parte di un genitivo assoluto (il genitivo in α esiste nel dialetto dorico).
17. Plutarco, *Vita di Marcello*, 14, 7.
18. Cicerone, *Tusculanae disputationes*, V, 23.

Archimede: Cicerone potrebbe aver voluto solo sottolineare la distanza tra un sovrano e un privato cittadino.

Quasi certamente Archimede trascorse del tempo ad Alessandria d'Egitto. Diodoro Siculo, infatti, riferisce che Archimede aveva inventato la coclea quando era in Egitto[19] e, poiché dice che avrebbe trattato l'argomento più ampiamente in un libro successivo, purtroppo perduto, doveva avere certamente informazioni dettagliate in proposito. D'altra parte il modo in cui Archimede ne parla nelle sue opere suggerisce che avesse conosciuto di persona vari studiosi alessandrini. (Il caso di Conone di Samo, del quale Archimede rimpiange la morte con toni che non lasciano dubbi sul fatto che l'avesse conosciuto, non fornisce, tuttavia, un elemento utile, poiché è possibile che si fossero incontrati a Siracusa.)[20]

Mentre possiamo considerare pressoché certo almeno un soggiorno di Archimede ad Alessandria, non possiamo saperne né la durata né l'epoca. Spesso si è pensato che si fosse trattato di un periodo di studio giovanile, ma è solo una congettura. In questo caso non avrebbe incontrato di persona Eratostene (che si trasferì ad Alessandria intorno al 246, quando Archimede aveva circa quarant'anni). Il fatto che Archimede indirizzi a Eratostene il famoso *Metodo* non implica di per sé una conoscenza personale; la carica di Eratostene di direttore della Biblioteca era certamente un motivo sufficiente per inviargli scritti che desiderava fossero pubblicati da quella prestigiosa istituzione.

Certamente Archimede preferì trascorrere gran parte della sua vita a Siracusa, dove si ritiene abbia scritto tutte le opere che ci sono rimaste. Probabilmente non aveva apprezzato particolarmente l'ambiente alessandrino, sul quale in qualche occasione sembra ironizzare. Torneremo su questo punto.

Gli episodi della vita di Archimede sui quali le fonti insistono di più sono la sua partecipazione alla difesa di Siracusa assediata dai Romani, alla quale aveva contribuito con il perfezionamento di varie armi, e l'uccisione dello scienziato durante il saccheggio seguito alla presa della città. Torneremo su questi argomenti nel prossimo capitolo.

Due fonti riportano notizie delle quali non è facile giudicare l'atten-

19. Diodoro Siculo, *Bibliotheca historica*, V, XXXVII, 3. Diodoro accenna alla coclea a proposito del suo precoce uso per drenare le miniere spagnole.

20. Conone, infatti, prima di stabilirsi ad Alessandria, era stato in Sicilia, come sappiamo da Tolomeo (*Phaseis*, 67, 7-8, ed. Heiberg).

dibilità. Leonardo da Vinci riferisce di aver letto «nelle Storie delli Spagnioli» di un viaggio di Archimede in Spagna[21]. Non è stato possibile identificare l'opera citata da Leonardo; certamente non è più disponibile e non possiamo escludere che fosse una fonte attendibile. Viaggi di Archimede successivi al suo ritorno dall'Egitto sono menzionati anche da Giuseppe Torelli nella biografia dello scienziato premessa alla sua edizione delle opere di Archimede[22]. Anche in questo caso non sappiamo la fonte di tali notizie.

21. *Codice Ashburnham 2037 (ex codice B), 12 b*. La notizia, riferita da Diodoro Siculo, del precoce uso di viti di Archimede nelle miniere d'argento spagnole sfruttate dai cartaginesi (cfr. *supra*, nota 19) potrebbe fornire un indizio a favore dell'attendibilità della fonte di Leonardo. Leonardo riferisce anche altre informazioni su Archimede non altrimenti note: tra l'altro descrive e disegna un *cannone a vapore* (*architronito*), attribuendone l'invenzione ad Archimede, e mostra di conoscere particolari sulla sua sepoltura.
22. *Archimedis quae supersunt omnia*, edited by Josephus Torellius, Clarendon, Oxford 1792.

2
La figura di Archimede tra leggenda e realtà

In questo capitolo si mostra come la figura leggendaria di Archimede entrata nell'immaginario collettivo sia stata costruita coagulando intorno a un nucleo originario strati successivi di particolari via via più fantasiosi (a volte con chiare motivazioni ideologiche).

La difesa di Siracusa e la morte

La principale fonte sul contributo di Archimede alla difesa di Siracusa contro l'esercito romano che assediò la città per due anni, dal 214 al 212 a.C., è certamente Polibio, sia per la sua generale affidabilità sia per la sua relativa vicinanza agli avvenimenti: era nato infatti pochi anni dopo la presa di Siracusa e probabilmente aveva potuto parlare con testimoni oculari dei fatti che narra. Trattandosi dell'unica fonte attendibile sulla vita di Archimede, conviene riportarla quasi integralmente:

> [I Romani], preparate le testuggini, i proiettili e quant'altro era necessario per l'assedio, credettero di aver superato in cinque giorni, grazie al gran numero di uomini al lavoro, i preparativi dei nemici. Essi non avevano però considerato il valore di Archimede e non avevano previsto che in certi casi una sola mente può valere più di un gran numero di lavoratori: l'impararono però dai fatti. [...] Archimede fece tali preparativi, sia in città sia contro attacchi dal mare, che i difensori non avrebbero mai dovuto improvvisare, avendo già pronta la risposta a ogni possibile azione dei nemici.
>
> Appio [Claudio Pulcro, comandante romano delle forze di terra], munito di testuggini e scale, cominciò ad avvicinarle al muro presso Esapilo, a oriente. Intanto Marco [Claudio Marcello, che comandava la flotta romana] attaccava Acradina dal mare con sessanta quinqueremi piene di soldati armati di archi, fionde e giavellotti per respingere i difensori delle mura. Insieme a queste, aveva anche otto quinqueremi alle quali erano stati tolti i remi, ad alcune quelli di destra e ad

altre quelli di sinistra, e, unite due a due lungo le fiancate prive di remi, esse conducevano verso le mura, spinte dai remi esterni, le cosiddette sambuche[1]. Queste macchine erano costruite nel modo seguente. Preparata una scala della larghezza di quattro piedi, [di lunghezza] tale che dalla base potesse raggiungere la sommità del muro, la munivano di parapetti su ciascun lato e la coprivano con una tettoia; la ponevano poi orizzontale sulle fiancate congiunte di due navi unite, in modo che sporgesse molto oltre i rostri. In cima agli alberi erano attaccate carrucole con funi. Quando stavano per usarla, legate le funi alla sommità della scala, stando a poppa, la sollevavano con le carrucole; altri, stando a prua, rinforzavano la macchina con sostegni e ne rendevano sicuro il sollevamento. [...]

In questo modo, dunque, i Romani pensavano di attaccare le torri; ma Archimede, che aveva preparato armi per lanciare proiettili a ogni distanza, colpì da lontano gli attaccanti con le catapulte più grandi e potenti, mettendoli in difficoltà e scoraggiandoli; quando poi il tiro diventava troppo lungo, si serviva di altre più piccole che colpissero alla giusta distanza, così da impedire loro completamente lo sbarco e l'attacco, finché Marco, posto in difficoltà, fu costretto ad avanzare di nascosto di notte.

Quanto agli attaccanti troppo vicini per essere colpiti dalle catapulte, Archimede escogitò un altro sistema contro i soldati imbarcati sulle navi: disseminò il muro di feritoie dell'altezza di un uomo e larghe un palmo dalla parte esterna; presso queste dispose arcieri e scorpioncini [piccole armi da getto] e tirando da lì rendeva inoffensivi i soldati navali. In questo modo non solo neutralizzava i nemici sia lontani sia vicini, ma ne uccideva anche gran parte.

Per [i Romani] che si preparavano a sollevare le sambuche, aveva predisposto macchine lungo tutto il muro che, nascoste il resto del tempo, al momento opportuno si alzavano dall'interno al di sopra del muro con bracci che sporgevano di molto dai bastioni: alcune potevano sollevare pietre pesanti non meno di dieci talenti, altre blocchi di piombo. Quando le sambuche si avvicinavano, allora i bracci, girati con una corda nella giusta direzione, con un meccanismo di sgancio lasciavano cadere la pietra: ne seguiva che veniva spezzata non soltanto la sambuca, ma anche la nave e i suoi marinai erano in grave pericolo.

Alcune delle macchine erano poi destinate agli assalitori che avanzavano coperti da tettoie che li proteggevano dai proiettili lanciati dalle mura: alcune scagliavano pietre grandi abbastanza per allontanare i combattenti dalla prua; calavano allora una mano di ferro legata a una catena per mezzo della quale l'uomo addetto alla manovra del braccio, afferrata la prua, lasciava cadere l'estremità della macchina che era all'interno del muro. Quando poi, alzata la prua, metteva ritta la nave sulla poppa, fissava l'estremità dell'ordigno e staccava la mano e la catena con un meccanismo di sgancio. Alcune navi ricadevano allora sul fianco, altre si

1. La sambuca era uno strumento musicale simile all'arpa. Alla macchina bellica descritta da Polibio era stato dato lo stesso nome per la sua vaga somiglianza con lo strumento.

rovesciavano; la maggioranza, quando le prue cadevano dall'alto, si immergevano, riempendosi d'acqua e di confusione.

Marco, messo in difficoltà dalle difese approntate da Archimede e vedendo che i siracusani si liberavano dai suoi attacchi con danno e beffa, mal sopportava tutto ciò; eppure, scherzando sulle sue vicende, diceva che Archimede usava le sue navi come coppe per attingere acqua dal mare e che le sambuche erano schiaffeggiate e scacciate con disonore come intruse. Questo fu il risultato dell'assedio per mare.

Anche i soldati di Appio, imbattendosi nelle stesse difficoltà, rinunciarono all'attacco. Infatti erano uccisi, colpiti da vari tipi di catapulte, quando ancora erano lontani, poiché le armi da getto erano stupefacenti per modello, quantità e potenza: Gerone le aveva finanziate e Archimede le aveva progettate e ne aveva seguito la costruzione.

Quando poi si avvicinarono alla città, parte dei soldati, colpiti, come ho detto prima, dagli arcieri sulle mura, erano continuamente respinti; quelli poi che procedevano difesi da tettoie erano uccisi dai sassi e dalle travi lanciati dall'alto. Molto danno facevano inoltre le mani di ferro delle macchine già ricordate, con le quali gli assediati sollevavano gli uomini con tutte le armi e li lasciavano cadere.

Infine Appio si ritirò nel suo accampamento e convocati i tribuni militari decise con il loro accordo di tentare qualunque altro mezzo ma di rinunciare a espugnare Siracusa con la forza. Così fecero realmente: rimasero otto mesi accampati intorno alla città senza trascurare alcuno stratagemma, ma non osarono mai neppure provare a espugnarla.

L'intelligenza di un solo uomo, convenientemente rivolta a determinati fini, mostra così di essere qualcosa di grande e meraviglioso. I Romani, che disponevano di tante forze per terra e per mare, pensavano che si sarebbero impadroniti subito della città se qualcuno avesse tolto di mezzo un solo vecchio siracusano; presente lui, non osavano attaccarla con sistemi dai quali Archimede potesse difenderla[2].

Polibio non lascia dubbi sul fatto che Archimede avesse dato un importante contributo alla difesa della città progettando armi da getto e macchine capaci di agganciare e rovesciare le navi nemiche. Nelle parti rimaste della sua opera (che comprendono un resoconto della conquista di Siracusa) non vi è però traccia degli episodi relativi all'assedio che più hanno alimentato la leggenda di Archimede: gli specchi ustori e le circostanze della morte dello scienziato. Probabilmente a Polibio l'uccisione del «solo vecchio siracusano» che, secondo i Romani, si sarebbe dovuto «togliere di mezzo» per conquistare Siracusa era sembrata un'ovvia conseguenza della presa della città.

2. Polibio, *Storie*, VIII, iii-vii. Le traduzioni dal greco e dal latino, quando non è indicato l'autore, sono mie.

I resoconti successivi si arricchiscono di particolari via via sempre più precisi e meno attendibili. Il primo autore che riferisce le circostanze della morte di Archimede è, un secolo dopo Polibio, Cicerone, secondo il quale Archimede sarebbe stato ucciso mentre, assorto nel disegno di figure geometriche, non si era neppure accorto che Siracusa era stata conquistata[3]. Cicerone ritiene di conoscere anche i sentimenti provati dal comandante dei Romani quando seppe che Archimede era stato ucciso dai suoi soldati: riferisce infatti che Marcello se ne sarebbe rammaricato[4]. La scarsa attendibilità di questo resoconto è confermata quando Cicerone si vanta di avere scoperto lui stesso la tomba del grande siracusano, che sarebbe stata ignorata dai suoi concittadini. Avrebbe compiuto questa impresa quando era questore in Sicilia, riconoscendo la tomba dal disegno inciso su di essa: una sfera inscritta in un cilindro. Erano stati i siracusani a descrivergli l'incisione che la contrassegnava, permettendogli così di "scoprirla" rapidamente nel cimitero di Siracusa, ma gli stessi siracusani non ne avrebbero conosciuto l'ubicazione. Dai racconti di Cicerone possiamo dedurre che alla sua epoca le élite romane cominciavano a provare qualche rispetto per la scienza e ritenevano opportuno retrodatare questo atteggiamento, attribuendolo anche ai conquistatori di Siracusa.

Con il passare del tempo, i particolari sulla morte di Archimede si precisano e le responsabilità dei Romani si stemperano. Tito Livio offre un breve resoconto, basato su quello di Polibio, del contributo di Archimede alla difesa di Siracusa[5]: sulle circostanze della morte ripete le affermazioni di Cicerone, aggiungendo che l'uccisore non si sarebbe reso conto di chi stava uccidendo e che Marcello si sarebbe preso cura della sepoltura dello scienziato e avrebbe offerto protezione ai suoi parenti[6]. Successivamente, in Valerio Massimo, appare per la prima volta la notizia che Marcello avrebbe dato l'esplicito ordine di risparmiare Archimede. Valerio Massimo descrive anche con dovizia di particolari l'uccisione, riportando perfino le parole che Archimede avrebbe rivolto al suo uccisore, pregandolo di non rovinare il suo disegno[7]. Anche Plinio ribadisce l'ordine di Marcello

3. Cicerone, *De finibus*, V, 50.
4. Cicerone, *In Verrem*, II, 4, 131.
5. Tito Livio, *Ab urbe condita libri*, XXIV, 34.
6. Tito Livio, *Ab urbe condita libri*, XXV, 31, 9-11.
7. Valerio Massimo, *Detti e fatti memorabili*, VIII, 7, ext. 7.

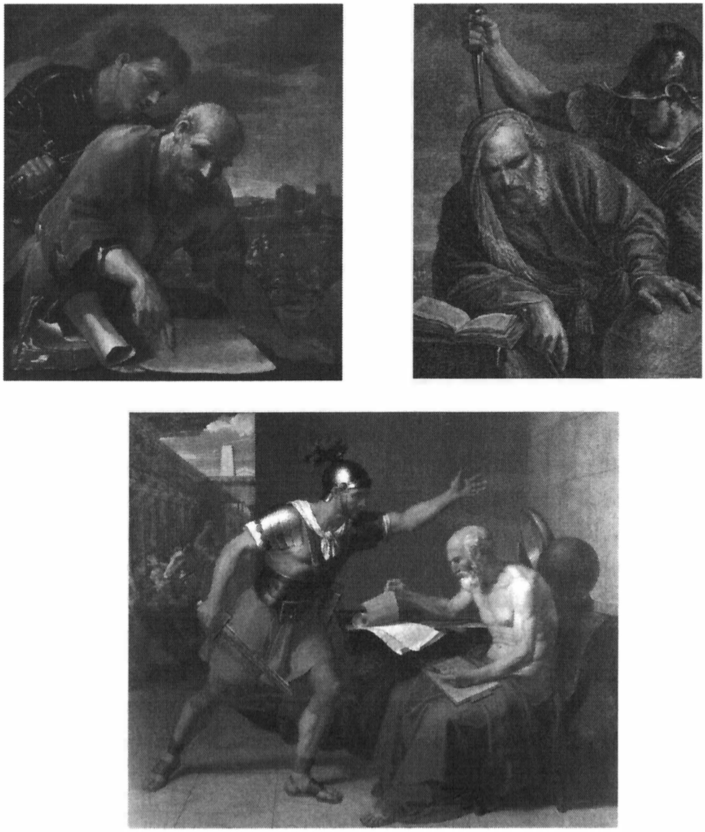


FIGURA 1 La morte di Archimede in due dipinti del Seicento, di Guillaume Courtois, detto il Borgognone (in alto a sinistra) e di Pier Francesco Mola (in alto a destra), e in quello di Domenico Udine Nani (1815).

di risparmiare lo scienziato, deprecandone la trasgressione da parte di un soldato sconsiderato[8]. Il comportamento di Archimede, assorto nei suoi problemi mentre stanno per ucciderlo, è riferito anche da Silio Italico[9] e, nonostante fosse un'evidente invenzione (nessuno avrebbe potuto riferire questo particolare, neppure lo stesso uccisore, se è vero che non aveva riconosciuto lo scienziato), divenne un *topos* che ha continuato a essere raccontato e dipinto per due millenni (FIG. 1).

8. Plinio, *Naturalis historia*, VII, 125.
9. Silio Italico, *Punica*, XIV, 676-678.

Plutarco, nella *Vita di Marcello*, offre un lungo resoconto dell'assedio di Siracusa, largamente basato su quello di Polibio. L'azione delle macchine di Archimede vi è però drammatizzata con maggiore cura letteraria, raggiungendo effetti più spettacolari:

> Spesso una nave era estratta dall'acqua, sospesa e fatta roteare di qua e di là (spettacolo tremendo da vedere), finché, vuotata dell'equipaggio che era scagliato via come da una fionda, era gettata contro le mura, o era lasciata cadere sganciando la presa[10].

> Marcello comunque si ritirò e scherzando con i suoi tecnici e ingegneri militari diceva: «Smettiamola di lottare con questo Briareo geometrico, che attinge acqua dal mare con le mie navi come se fossero coppe, caccia con disonore le sambuche schiaffeggiandole e supera i centimani della mitologia colpendoci con tanti proiettili allo stesso tempo». [...]
>
> Alla fine i Romani erano diventati così paurosi che, se vedevano spuntare dalle mura una cordicella o un bastoncino, si davano alla fuga gridando che, ecco, Archimede stava azionando un ordigno contro di loro. Vedendo ciò Marcello evitò ogni scontro e attacco, limitandosi per il resto del tempo a mantenere l'assedio[11].

La superiore tecnologia militare ellenistica aveva evidentemente sbalordito i soldati romani che, non avendo idea dei dislivelli tecnologici tra civiltà, l'avevano attribuita al genio di un uomo eccezionale: un atteggiamento tramandato e amplificato sia da Polibio sia, ancor più, da Plutarco. È certamente credibile che Archimede avesse contribuito a perfezionare alcune armi, ma tali perfezionamenti si inserivano nell'ambito di un livello tecnologico ben superiore a quello romano. Ciò è evidente nel caso delle catapulte, ma anche la macchina capace di agganciare le navi romane non era priva di precedenti. Sappiamo infatti da Vitruvio che una macchina di questo tipo era stata progettata nel 305 a.C., in occasione dell'assedio di Rodi da parte di Demetrio Poliorcete, da Callia, che proprio grazie a essa aveva ottenuto l'incarico di architetto pubblico di Rodi[12].

Sulle circostanze della morte di Archimede Plutarco mostra un certo scrupolo, riportandone tre versioni alternative. Riferisce però come un fatto certo, su cui tutti sono d'accordo, che Marcello volle onorare i parenti

10. Plutarco, *Vita di Marcello*, XV, 3.
11. Plutarco, *Vita di Marcello*, XVII, 1, 3.
12. Vitruvio, *De architectura*, X, XVI, 3.

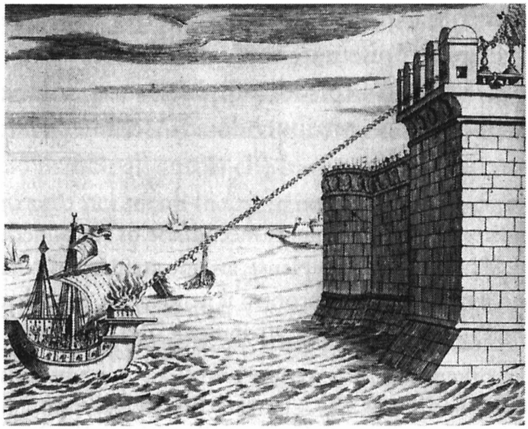


FIGURA 2 Navi romane incendiate dagli specchi ustori (illustrazione di un libro di Mario Bettini, 1582-1657).

dello scienziato e, quando gli fu presentato il soldato uccisore, distolse da lui lo sguardo[13].

La leggenda degli specchi ustori (FIG. 2) si forma tardi. Nel II secolo d.C. Luciano e Galeno scrivono per primi che Archimede sarebbe riuscito a incendiare a distanza le navi romane, ma non specificano la tecnica usata[14]. Galeno precisa che l'avrebbe fatto con dei πυρεῖα; molti avevano pensato che intendesse specchi ustori, ma il termine potrebbe anche indicare semplicemente sostanze incendiarie lanciate con armi da getto. Riferimenti espliciti all'uso bellico degli specchi ustori appaiono solo nella prima età bizantina. Nel VI secolo ne accenna brevemente Olimpiodoro[15] e più estesamente Antemio di Tralle, che ne parla come di un fatto largamente noto e accettato[16] e propone anche una ricostruzione congetturale della struttura degli specchi[17]. L'episodio è ricordato anche da autori bizantini posteriori. Nel XII secolo ne scrivono Giovanni Zonara[18] e Giovanni Tzetzes. La loro fonte sembra Antemio, ma quelle che Antemio aveva proposto come ricostruzioni congetturali (in particolare la forma esagonale dell'elemento

13. Plutarco, *Vita di Marcello*, xix, 4-6.
14. Luciano, *Ippia*, ii; Galeno, *De temperamentis*, 657, 17-658, 1 (ed. Helmreich).
15. Olimpiodoro, *In Platonis Gorgiam*, 38, 2, 8-11.
16. Antemio di Tralle, *Sui meravigliosi artifici*, II, 47-48.
17. Antemio di Tralle, *Sui meravigliosi artifici*, III, 49-50.
18. Giovanni Zonara, *Epitome historiarum*, vol. 2, 262, 25-263, 11 (ed. Dindorf).

centrale dello specchio e quella quadrangolare degli altri elementi) nell'opera di Tzetzes vengono presentate come dati di fatto[19].

Nello stesso XII secolo l'episodio diviene compiutamente mitico in Eustazio di Tessalonica, che, attribuendo ad Archimede anche la capacità di provocare terremoti, scrive:

> Le storie ci mostrano anche le folgori incendiarie di Archimede [ottenute] mediante specchi. Si racconta che il sapiente, avendo architettato una scossa della casa con un artificio e raggi folgoranti contro il nemico, sia stato da questo chiamato enosictono [ossia scuotitore di terra, attributo del dio Poseidone] e fulminatore[20].

Gli autori bizantini offrono nuovi particolari anche sull'uccisione dello scienziato e il comportamento di Marcello. Elia, alla fine del VI secolo, riporta le parole che Archimede avrebbe detto al suo uccisore, chiedendogli di colpirlo alla testa, risparmiando il suo disegno[21]. Zonara riporta ben due frasi pronunciate da Archimede in punto di morte[22]; Tzetzes non è da meno: riporta anche lui due frasi (completamente diverse da quelle riferite da Elia e da Zonara) e aggiunge che Marcello, quando seppe l'accaduto, avrebbe pianto; ritiene inoltre che abbia fatto giustiziare l'uccisore di Archimede (precisa: con la scure)[23].

L'invenzione di particolari sulla morte di Archimede è continuata fino a epoche recenti. Secondo molti libri (e innumerevoli siti Internet) Archimede avrebbe detto al soldato romano che stava per ucciderlo: *Noli turbare circulos meos*[24]. A volte la frase è riportata anche in greco, nella forma Μή μου τοὺς κύκλους τάραττε. Sembra chiaro, tuttavia, che l'espressione greca sia stata tradotta dalla latina e non viceversa. In ogni caso nessun autore greco, latino o bizantino la riporta, né in greco né in latino. Resta da scoprire chi abbia introdotto l'uso di citarla e se tra le sue intenzioni vi fosse l'allusione volgare con cui è spesso citata.

19. Giovanni Tzetzes, *Chiliadi*, II, 106-131.
20. Eustazio di Tessalonica, *Commentarii ad Homeri Odysseam*, I, 411, 14-18 (ed. Stallbaum).
21. Elia, *In Porphyrii isagogen et Aristotelis categorias*, I, X, 28-29 (ed. Busse).
22. Giovanni Zonara, *Epitome historiarum*, vol. 2, 264, 31-265, 2 (ed. Dindorf).
23. Giovanni Tzetzes, *Chiliadi*, II, 134-155.
24. La frase (naturalmente senza fonti) è riportata, ad esempio, in E. J. Dijksterhuis, *Archimede*, Ponte alle Grazie, Firenze 1989, p. 26 (ed. or. *Archimedes*, Meulenhoff, Amsterdam 1938), e in M. Geymonat, *Il grande Archimede*, Teti, Roma 2006², p. 22.

Il presunto disinteresse per la vita reale

Le fonti di epoca romana presentano Archimede come un genio perennemente assorto in ragionamenti astratti e disinteressato agli eventi della vita quotidiana. Tra i principali autori che hanno trasmesso questo stereotipo, che ha caratterizzato nei secoli lo scienziato tipico, vi è certamente Plutarco, che scrive:

> Non è possibile trovare in geometria principi più profondi e difficili esposti in modo più semplice e più puro. Alcuni attribuiscono ciò alle doti naturali dell'uomo, mentre altri credono che ogni risultato appaia ottenuto facilmente e senza sforzo grazie a un sovrappiù di lavoro. E in effetti nessuno troverebbe da solo le [sue] dimostrazioni, eppure studiandole ci si forma l'opinione che ci si sarebbe potuti arrivare da soli, tanto ha reso agevole e veloce il cammino che porta alla prova. Sono perciò credibili le storie su di lui che raccontano come, incantato da una sirena familiare e domestica, dimenticasse il cibo e trascurasse la cura del corpo; e spesso, trascinato con la forza a lavarsi e ungersi, tracciasse figure geometriche nelle ceneri e linee con il dito sul corpo unto, essendo preso da un grande piacere e veramente prigioniero delle Muse[25].

L'aneddoto di Archimede che, in mancanza di altri strumenti di scrittura, si traccia figure sul corpo è ripetuto da Plutarco almeno altre due volte[26].

Non possiamo sapere se vi sia un nocciolo di verità nel presunto disinteresse di Archimede per la vita reale, che appare anche nelle leggende relative alle circostanze della morte e nel famoso episodio della vasca, di cui parleremo nel prossimo capitolo. Certamente si tratta di un luogo comune usato da sempre da chi è incapace di pensiero astratto per canzonare chi è in grado di seguire ragionamenti complessi senza immediato interesse pratico. Si può ricordare, ad esempio, la storiella di Talete deriso dalla schiavetta trace perché, intento a guardare le stelle, stava per cadere in un pozzo[27].

In Plutarco il disinteresse di Archimede per il mondo reale non riguarda solo le banalità della vita quotidiana, ma si estende alle applicazioni che potevano essere tratte dalle sue scoperte:

25. Plutarco, *Vita di Marcello*, xvii, 8-12.

26. Plutarco, *An seni respublica gerenda sit*, 786C; *Non posse suaviter vivi secundum Epicurum*, 1094 B.

27. Platone, *Teeteto*, 174a; Diogene Laerzio, I, 34.

> Eppure Archimede aveva un tale spirito e profondità d'animo e una tale ricchezza di conoscenze, che non volle lasciare scritti sugli argomenti cui doveva un nome e la fama di un'intelligenza non umana, ma quasi divina. Convinto che l'arte di costruire macchine, come ogni altra tecnica con scopi utilitari, fosse volgare e di poco pregio, si dedicò con fervore soltanto agli studi nei quali bellezza e grandezza sono estranei alle necessità della vita. In questi studi, non confrontabili con gli altri, vi è una continua gara tra l'argomento e le dimostrazioni: il primo fornisce grandezza e bellezza e le seconde precisione e straordinaria potenza[28].

Lo stesso concetto, secondo Pappo (IV secolo), era stato espresso da Carpo di Antiochia, che aggiunge che Archimede avrebbe evitato di scrivere opere di meccanica (con la sola eccezione di quella sulla costruzione del planetario)[29].

Affermazioni dello stesso tipo sono state ripetute acriticamente dalla maggioranza degli autori moderni, nonostante siano in palese contraddizione con il documentato impegno di Archimede (sul quale torneremo) nello sviluppare molte applicazioni. La testimonianza di Carpo è inoltre smentita non solo dal trattato di meccanica *Sull'equilibrio delle figure piane*, che ci è rimasto, ma anche da altre opere perdute di meccanica attribuite ad Archimede da diversi autori (cfr. *infra*, pp. 38-9)[30]. Alcuni studiosi hanno tentato di conciliare con i fatti i concetti espressi da Plutarco e da Carpo sostenendo che Archimede aveva sì tratto molte applicazioni utili dai suoi studi, ma lo aveva fatto malvolentieri. Peter Fraser, ad esempio, afferma che Archimede provava un profondo disprezzo per la meccanica applicata[31]. Poiché i contributi di Archimede alla tecnologia sono ben documentati, mentre il suo intimo atteggiamento psicologico certamente non poteva esserlo, ci si può chiedere l'origine della convinzione, trasmessa agli studiosi moderni da autori come Plutarco e Carpo, che Archimede disprezzasse le applicazioni della scienza.

Plutarco scrive circa tre secoli dopo la morte di Archimede, in un clima culturale profondamente diverso da quello nel quale era vissuto lo scienziato siracusano (Carpo con ogni probabilità è ancora più tardo). La scienza esatta, della quale Archimede era stato uno dei massimi espo-

28. Plutarco, *Vita di Marcello*, xvii, 3-4.
29. La testimonianza di Pappo è riportata *infra*, p. 56.
30. Anche Vitruvio (*De architectura*, VII, proemio, 14) include Archimede tra gli autori che avevano scritto *de machinationibus*.
31. P. M. Fraser, *Ptolemaic Alexandria*, Clarendon, Oxford 1972 (repr. 1998, vol. I, p. 425).

nenti, era stata abbandonata (studiosi come Tolomeo avrebbero tentato di recuperarla, con risultati parziali, solo dopo la morte di Plutarco, nel II secolo d.C.) e la tecnologia scientifica non esisteva più[32]. L'ideologia dominante era quella neoplatonica, alla quale lo stesso Plutarco aderiva. È del tutto comprensibile, quindi, che egli considerasse degne di ammirazione solo le speculazioni astratte e che gli sembrasse naturale attribuire anche agli scienziati del passato lo stesso atteggiamento.

Spesso si ignora la profonda frattura culturale che separa il primo ellenismo dal periodo imperiale e la scienza esatta dalla filosofia neoplatonica, immaginando una "civiltà classica" omogenea. Non si può allora cogliere la profonda distanza (non solo cronologica, ma ancor più culturale) che separa Plutarco da Archimede. È accaduto così che molti abbiano assunto le affermazioni del neoplatonico Plutarco come testimonianze attendibili sui pensieri più riposti dello scienziato di tre secoli prima.

Vi è però un possibile germe di verità nell'affermazione di Plutarco che Archimede «non volle lasciare scritti sugli argomenti cui doveva un nome e la fama di un'intelligenza non umana, ma quasi divina». Le applicazioni di Archimede che avevano più colpito i Romani erano state certamente quelle belliche ed è più che probabile che lo scienziato non avesse lasciato scritti sull'argomento, non perché lo ritenesse disprezzabile, ma per ovvi motivi di riservatezza. Anche oggi è molto difficile trovare autori che diano informazioni su tecnologia militare competitiva e non certo perché l'argomento non susciti interesse.

La vera personalità di Archimede

Fortunatamente le notizie trasmesse dagli autori citati finora non costituiscono la nostra sola fonte di informazione su Archimede. L'altra, ben più attendibile e interessante, è costituita dalle opere dello scienziato giunte fino a noi. Per cercare di capire qualcosa della vera personalità di Archimede è preferibile limitarsi ai rari accenti personali che emergono dalle sue opere, ad esempio quando mostra rimpianto per la morte di Conone, del quale doveva essere stato amico.

32. Torneremo, alle pagine 172-3, sulla crisi culturale che colpì il mondo mediterraneo a metà del II secolo a.C.

La profonda onestà intellettuale e la generosità dello scienziato emergono dal *Metodo* (cfr. *infra*, pp, 124-8), opera in cui Archimede non si limita a dimostrare teoremi, ma spiega, a vantaggio dei colleghi e dei posteri, il procedimento mentale con cui riesce a individuare i propri risultati prima di poterli dimostrare formalmente.

Un altro aspetto della personalità dello scienziato che trapela dalle sue opere conservate è un sottile senso dell'umorismo e probabilmente una benevola satira nei confronti degli scienziati di Alessandria. Il "problema dei buoi" è in pratica irresolubile (cfr. *infra*, pp. 161-2), eppure viene proposto da Archimede come prova per giudicare il livello di preparazione matematica. L'umorismo è suggerito soprattutto dalla figura del corrispondente che Archimede intende sottoporre alla prova: il grande Eratostene, guida degli scienziati alessandrini in quanto capo della Biblioteca di Alessandria. In un altro caso Archimede è responsabile di una vera e propria beffa. Stanco di sentirsi dire che i risultati da lui annunciati erano stati ottenuti indipendentemente da altri matematici, Archimede comunica ai suoi corrispondenti alessandrini di avere risolto una serie di problemi e solo dopo qualche tempo (quando, presumibilmente, i suoi concorrenti avevano sostenuto di avere ottenuto anch'essi gli stessi risultati) rivela che alcune delle sue supposte "soluzioni" erano completamente sbagliate![33] Vorremmo proprio sapere chi rimase vittima della beffa e quali furono le sue reazioni.

Più avanti (pp. 163-4) vedremo che Archimede era anche molto interessato ai giochi.

Le opere di Archimede e la loro trasmissione

Le opere delle quali si è conservato l'intero testo o almeno una porzione significativa sono: *Sulla sfera e sul cilindro*, in due libri; *Misura del cerchio*; *Sui conoidi e gli sferoidi*; *Sulle spirali*; *Sull'equilibrio delle figure piane*, in due libri; *Arenario*; *Quadratura della parabola*; *Sui galleggianti*, in due libri; *Stomachion*; *Metodo*; *Il problema dei buoi* (un epigramma).

Va detto che queste opere si sono conservate fortunosamente, grazie a una tradizione molto esile, avvenuta attraverso tre soli codici, indicati dagli studiosi con le lettere A, B e C. Sembra che nel VI secolo un'edizione

33. Archimede, *Sulle spirali*, 8-10 (ed. Mugler).

di tutte le opere all'epoca accessibili sia stata curata da Isidoro di Mileto. Certamente nel IX secolo a Costantinopoli Leone il Matematico curò un'edizione di opere di Archimede, basandosi forse su quella precedente di Isidoro.

Il codice A proveniva certamente dall'edizione di Leone ed è probabile che anche B e C avessero la stessa origine. I codici A e B furono acquisiti dai re normanni di Sicilia, entrarono poi a far parte della biblioteca di Federico II e dopo la battaglia di Benevento (1266), quando il regno fu conquistato dagli Angioini, furono da questi donati al papa.

Il codice A si perse nel XVI secolo, dopo che ne erano state ricavate copie, alcune delle quali ancora esistenti. Il codice B invece andò perduto prima che il testo fosse copiato. Esso conteneva, tra le altre opere, il trattato *Sui galleggianti*, non presente nel codice A. Dal codice B era stata con ogni probabilità ricavata la traduzione latina del trattato, spesso scorretta, dovuta a Guglielmo di Moerbeke (XIII secolo).

Il codice C, proveniente anch'esso probabilmente dall'edizione di Leone il Matematico, contiene due opere assenti negli altri due codici: il *Metodo* e lo *Stomachion*, nonché il trattato *Sui galleggianti*, che altrimenti conosceremmo solo attraverso la traduzione di Guglielmo di Moerbeke. Nel XIII secolo il codice fu cancellato per trascrivere sulla pergamena così recuperata un testo liturgico. I manoscritti di pergamena il cui testo originario è stato cancellato e sostituito da un testo più recente sono detti "palinsesti". Quello che aveva contenuto le opere di Archimede finì (non dopo il XVI secolo) nella biblioteca del monastero del Santo Sepolcro a Gerusalemme.

Nel 1899 lo studioso greco Athanasios Papadopoulos-Kerameus, ispezionando il palinsesto, si accorse del testo sottostante di carattere matematico e riuscì a leggerne e trascriverne alcune righe. Questa testimonianza attirò l'attenzione di uno dei massimi esperti di matematica greca, Johan L. Heiberg, che si recò a Gerusalemme per esaminare il manoscritto e scoprì che si trattava di opere, in parte sconosciute, di Archimede. Heiberg riuscì a leggere gran parte del testo, che incluse nella sua seconda edizione del corpus archimedeo, pubblicata tra il 1910 e il 1915. Successivamente il palinsesto fu rubato e riapparve nel 1998, quando venne offerto in vendita a New York dalla famosa casa d'aste Christie's. Il governo greco tentò inutilmente di bloccare l'asta.

Il palinsesto, ora di proprietà di un ignoto collezionista americano, è depositato presso il Walter Art Museum di Baltimora. Nonostante le sue

FIGURA 3 Due pagine del palinsesto: il testo archimedeo, verticale e ortogonale alla scrittura successiva, è reso visibile dal trattamento moderno dell'immagine.

condizioni siano molto peggiori di quelle documentate dalle fotografie fatte da Heiberg all'inizio del XX secolo, le raffinate tecniche oggi disponibili hanno permesso di ricostruire porzioni del testo che precedentemente non era stato possibile leggere (FIG. 3).

Diversi lavori di Archimede sono stati trasmessi parzialmente attraverso rifacimenti di autori arabi, dei quali non è facile valutare la distanza dalla fonte greca: è questo il caso del *Libro dei lemmi*, delle opere *Su l'ettagono in un cerchio* e *Sui cerchi mutuamente tangenti*, della descrizione dell'orologio ad acqua, sulla quale torneremo (cfr. *infra*, pp. 72-3), e di diversi altri scritti.

Abbiamo infine molte testimonianze su opere perdute. Di una *Catottrica*, citata da vari autori, si è conservato un frammento (cfr. *infra*, pp. 81-2). Archimede stesso, nell'*Arenario*, cita un testo di aritmetica in cui aveva proposto un nuovo sistema di numerazione. Pappo riassume un trattato sui solidi regolari e i tredici semiregolari scoperti dallo stesso Archimede[34]; accenna inoltre a un'opera *Περὶ ἰσορροπιῶν* ("Sugli equilibri") e a un'altra *Περὶ ζυγῶν* (cioè "Sulle bilance" o "Sulle leve")[35]; un accenno

34. Pappo, *Collectio*, V, 350-360 e 411-470.
35. Pappo, *Collectio*, VIII, 1034,3 e 1068, 19-20.

di Simplicio a studi di Archimede sui baricentri (κεντροβαρικὰ)[36] ha fatto pensare a un trattato con questo titolo; alcuni di questi passi potrebbero però riferirsi alla stessa opera dalla quale è stato estratto *Sull'equilibrio delle figure piane* o a sue sezioni. Erone cita un'opera perduta *Sui plintidi e i cilindri*[37]. L'esistenza di opere di Archimede di astronomia è testimoniata da Ipparco[38] e un trattato sulla costruzione del planetario (*Sulla costruzione della sfera*) è citato da Pappo riportando un'affermazione di Carpo di Antiochia (cfr. *infra*, p. 56). Infine vari autori arabi citano numerose opere di geometria attribuendole ad Archimede.

36. Simplicio, *In Aristotelis de caelo commentaria*, vol. 7, 543, 31.
37. Erone di Alessandria, *Metrica*, 66, 13-19.
38. In un passo riportato da Tolomeo (*Almagesto*, III, 1).

3
Idrostatica elementare

L'idrostatica archimedea tocca tutti gli aspetti che ci interessano: la versione leggendaria del personaggio di Archimede, i suoi risultati scientifici, le loro conseguenze teoriche e le motivazioni tecnologiche. In questo capitolo ne esamineremo brevemente gli aspetti più elementari. Accenneremo alle applicazioni nel capitolo 5, mentre alcuni risultati più avanzati saranno esposti alle pagine 138-49.

Il racconto di Vitruvio

Riportiamo integralmente il racconto di Vitruvio che ha fornito una parte importante (probabilmente la più famosa) del materiale con cui si è costruita la leggenda di Archimede trasmessa nei millenni successivi:

> Archimede ha fatto molte meravigliose scoperte di vario tipo, ma tra tutte quella che sto per esporre sembra essere stata ottenuta con un'ingegnosità infinita. Gerone di Siracusa, avendo assunto il potere regale, aveva deciso di dedicare in un tempio, per i suoi successi, una corona d'oro promessa in voto agli dei immortali. Dette il lavoro in appalto e pesò all'artigiano che se lo aggiudicò l'esatta quantità d'oro. Questi, al tempo stabilito, ottenne l'approvazione del re per il suo lavoro eseguito a regola d'arte e mostrò di aver fornito una corona del giusto peso.
>
> Essendogli stato riferito che una certa quantità d'oro era stata sottratta e sostituita con argento all'interno della corona, Gerone, indignato per essere stato ingannato e non trovando in qual modo avrebbe potuto smascherare il furto, chiese ad Archimede di riflettere sul suo problema. Mentre questi pensava al compito affidatogli, gli capitò di prendere un bagno e scendendo nella vasca si rese conto che ne usciva una quantità d'acqua pari alla parte di corpo che immergeva. Poiché ciò gli mostrava il metodo di soluzione, senza indugiare, trasportato dall'entusiasmo, saltò fuori dalla vasca e andando a casa nudo fece sapere ad alta voce di aver trovato ciò che cercava. Infatti correndo gridava ripetutamente in greco «Èureka! Èureka! (Ho trovato! Ho trovato!)».

> Si dice che, proseguendo sulla strada indicata dalla sua scoperta, abbia preparato due blocchi di peso uguale a quello della corona, uno d'oro e l'altro d'argento. Ciò fatto, riempì un grande vaso di acqua fino all'orlo e vi immerse il blocco d'argento. Dal vaso traboccò una quantità d'acqua pari al volume immerso. Estratto poi il blocco, riversò, misurandola, tanta acqua quanta ne era traboccata, finché il livello raggiunse di nuovo il bordo. Trovò così quale quantità d'acqua corrispondeva a un dato peso d'argento.
>
> Dopo avere fatto questo esperimento, allo stesso modo immerse nel vaso pieno il blocco d'oro e dopo averlo estratto, aggiungendo acqua con lo stesso procedimento, trovò che non ne occorreva la stessa quantità, ma una quantità tanto minore quanto il volume dello stesso peso d'oro era minore di quello d'argento. Infine, dopo avere riempito il vaso e avere immerso nella stessa acqua la corona, trovò che ne traboccava più acqua che nel caso del blocco d'oro e così, da quanta acqua in più era defluita, determinò la proporzione dell'argento nell'oro e ottenne la prova del furto dell'aggiudicatario[1].

L'episodio è riferito brevemente anche da Plutarco, in termini che non contraddicono il racconto di Vitruvio[2], e se ne trova un breve cenno anche in Proclo[3]. Non sappiamo se Plutarco e Proclo si fossero basati sul racconto di Vitruvio oppure se avessero avuto accesso alla sua fonte (forse la biografia di Archimede scritta da Eraclide?).

L'immagine di Archimede nella vasca e quella dello scienziato che, dimentico di essere nudo, corre per le vie di Siracusa gridando "Èureka! Èureka!" hanno continuato a lungo a essere considerate un simbolo della ricerca scientifica e, allo stesso tempo, a formare lo stereotipo dello scienziato distratto fino a rasentare la follia (FIG. 4).

Anche prescindendo dai particolari folcloristici, il resoconto di Vitruvio è certamente inattendibile. Innanzitutto, la presunta "scoperta" di Archimede che immergendo un corpo in un recipiente pieno d'acqua ne trabocchi acqua dello stesso volume del corpo immerso, cioè che i volumi dei liquidi si conservano, era una nozione nota da tempo immemorabile (almeno da quando vino, birra e olio si sono venduti a volume) e non avrebbe mai potuto esaltare un grande scienziato. Inoltre il metodo descritto (che non ha alcuna relazione con le scoperte di idrostatica di Archimede), pur essendo in linea di principio corretto, è del tutto inef-

1. Vitruvio, *De architectura*, IX, proemio, 9-12.
2. Plutarco, *Non posse suaviter vivi secundum Epicurum*, 1094 B-C.
3. Proclo, *Commentario al primo libro degli Elementi di Euclide*, 63 (ed. Friedlein).

FIGURA 4 Alcuni libri moderni che hanno usato l'episodio della vasca come simbolo della ricerca scientifica.

ficiente, per la bassa precisione con cui possono essere misurati i volumi d'acqua. Vedremo più avanti che fortunatamente si è conservata un'altra testimonianza, molto più attendibile, sul metodo usato da Archimede per smascherare l'orafo disonesto. Ma conviene occuparci prima del suo trattato di idrostatica.

Il vero principio di Archimede

Nel caso dell'idrostatica l'abisso che separa i contributi scientifici di Archimede dai racconti degli autori di epoca romana è facilmente accertabile, poiché sull'argomento possiamo ancora leggere la sua opera *Sui galleggianti*.

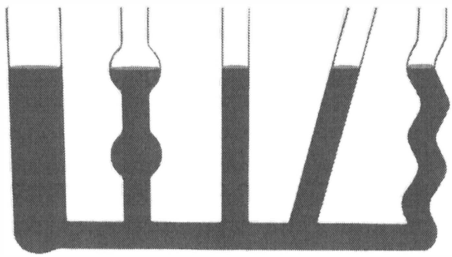
Archimede basa la sua scienza dell'idrostatica sul seguente postulato:

> Si assuma che [...], se due porzioni di liquido sono contigue e allo stesso livello, la meno compressa sia spinta via dalla più compressa e ciascuna porzione sia compressa dal peso del liquido che è sopra di sé in verticale[4], purché il liquido non sia rinchiuso in qualcosa e compresso da qualcos'altro[5].

La parte finale dell'enunciato («purché il liquido non sia rinchiuso in qualcosa e compresso da qualcos'altro») spesso non è stata compresa,

4. Vedremo che Archimede applica spesso una versione più generale di questo postulato; per valutare la pressione di una porzione di liquido prende infatti in considerazione anche la materia non liquida che la sovrasta in verticale.
5. Archimede, *Sui galleggianti*, 6, 2-8 (ed. Mugler).

anche perché Archimede nel suo trattato, dedicato a corpi galleggianti in un liquido a pelo libero, non ne ha mai bisogno. Per capirne il senso conviene usare l'enunciato di Archimede per dedurne il cosiddetto "principio dei vasi comunicanti"[6]: una deduzione che Archimede non include nella sua opera, ma probabilmente aveva in mente nel formulare la sua assunzione.



Per semplicità, supponiamo che le basi di diversi vasi in cui è del liquido comunichino, come in figura, attraverso un tubo orizzontale. Per il postulato, se vi è equilibrio (e quindi nessuna porzione di liquido scaccia via quella contigua), tutte le porzioni di liquido allo stesso livello contenute nel tubo debbono essere compresse allo stesso modo: quelle contigue in base all'enunciato di Archimede e le altre per proprietà transitiva. Nel caso delle porzioni di liquido sottostanti ai vasi (che non sono *rinchiuse* nel tubo e *compresse* dallo stesso tubo, ma solo dal liquido sovrastante) l'eguaglianza di pressione si traduce nell'eguaglianza delle altezze delle colonne sovrastanti. Abbiamo così ottenuto il cosiddetto "principio dei vasi comunicanti" come conseguenza del postulato.

Il postulato di Archimede, che fa dipendere la pressione dall'altezza del liquido sovrastante, ha varie applicazioni tecnologiche, tra l'altro agli acquedotti basati sul principio del sifone invertito (permettendo di stimare la pressione raggiunta a fondo valle) e, come vedremo, agli orologi ad acqua.

6. Il principio dei vasi comunicanti è in genere considerato una scoperta di Erone (che lo usa nella *Pneumatica* e nella *Dioptra*). La conoscenza del fenomeno era tuttavia certamente più antica di Archimede. Platone osserva che se si immergono gli estremi di un filo di lana in due coppe (che immagina evidentemente uguali e poste sullo stesso tavolo), l'acqua passa, lungo il filo, dalla coppa più piena a quella meno piena finché i livelli divengono uguali (Platone, *Simposio*, 175D, 6-7).

È importante osservare che l'enunciato di Archimede è molto intuitivo (ben più di quello del "principio di Archimede" dei nostri manuali), ma non è direttamente verificabile. Non è infatti possibile osservare (né, tanto meno, misurare) la compressione di porzioni interne a una massa di liquido. È invece possibile verificarne una serie di conseguenze: ad esempio, come abbiamo appena visto, l'eguaglianza dei livelli del liquido posto in vasi comunicanti.

È una caratteristica generale delle teorie scientifiche ellenistiche quella di basarsi su postulati (o principi) non verificabili direttamente, ma dai quali è possibile dedurre fenomeni osservabili. Ad esempio, l'immobilità del Sole e il moto della Terra e dei pianeti intorno al Sole, che Aristarco di Samo aveva assunto come principi della sua teoria astronomica, non sono immediatamente osservabili (a prima vista può sembrare, anzi, che contraddicano le osservazioni, perché ne contraddicono l'interpretazione usuale), ma permettono di dedurre i complessi moti dei pianeti osservati dalla Terra e in particolare le retrogradazioni planetarie. Il valore delle teorie scientifiche, come affermano vari autori, consisteva, oltre che nella loro coerenza interna, nella loro capacità di "salvare i fenomeni" (φαινόμενα σῴζειν).

La forma degli oceani (e della Terra)

La prima conseguenza che Archimede trae dal suo postulato è il teorema seguente:

> La superficie di tutto il liquido [ossia degli oceani] in condizioni di equilibrio ha la forma di una sfera con lo stesso centro della Terra[7].

Prima di dimostrare questo teorema, bisogna ricordare che per Archimede (che in questo segue la teoria di Aristotele) esiste un punto *K*, che possiamo chiamare centro dei pesi, che attrae tutti i corpi pesanti. Tale punto coincide di fatto con il centro della Terra (proprio perché è divenuto il centro della Terra circondandosi dei corpi pesanti che ha attratto). Nel postulato di Archimede l'espressione «allo stesso livello» va intesa nel senso di "alla stessa distanza dal centro dei pesi".

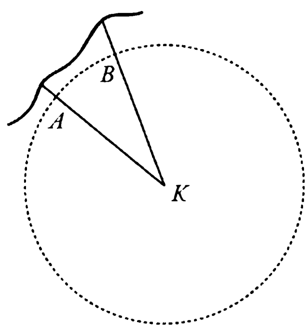
7. Archimede, *Sui galleggianti*, 7, 12-14 (ed. Mugler).

La dimostrazione è molto semplice ed è ottenuta per assurdo. Archimede premette un semplice lemma che gli consente di ricondurre il problema nel piano di un disegno:

> Se una superficie S non è una superficie sferica con centro K, allora una sua sezione con un piano passante per K non è una circonferenza di centro K[8].

La dimostrazione è immediata: se S non è una superficie sferica con centro K, allora due suoi punti debbono essere a distanza diversa da K. Tagliando la superficie con il piano che passa per K e tali due punti, la sezione ottenuta non è una circonferenza di centro K.

Supponiamo ora, per assurdo, che la sezione della superficie delle acque con un piano passante per K, indicata in figura con un tratto pieno, non sia una circonferenza di centro K.



Vi sarebbero allora all'interno delle acque due porzioni, A e B, poste alla stessa distanza da K ma sovrastate da colonne di acqua di diversa altezza. Queste porzioni sarebbero allora compresse in modo diverso e, per il postulato, non potrebbero essere in equilibrio. Fine della dimostrazione.

È tipica delle teorie scientifiche la possibilità di ricavarne risultati utili anche in campi molto lontani dai problemi che ne avevano costituito la motivazione iniziale. L'idrostatica di Archimede, che, come vedremo, era stata chiaramente motivata da problemi di ingegneria navale, aveva fornito immediatamente un teorema sulla forma degli oceani che, a sua volta, produsse risultati inaspettati in altre direzioni.

8. Archimede, *Sui galleggianti*, 6, 10-13 (ed. Mugler).

In primo luogo, il teorema di Archimede, che riguarda solo gli oceani, fu applicato a tutta la Terra, fornendo una spiegazione della sua forma sferica (che era nota, su base empirica, sin dall'epoca di Parmenide). Diodoro Siculo afferma, infatti, che la Terra assunse la sua forma in un lontano passato, prima di solidificarsi[9]. Si può pensare che fu proprio il teorema di Archimede, congiunto alla conoscenza che la Terra, nel suo insieme, ha proprio la forma sferica che avrebbe dovuto necessariamente avere se fosse stata fluida, a suggerire l'idea che in un tempo remoto la Terra fosse stata fluida. L'idrostatica fornì così indirettamente informazioni sul lontano passato della Terra.

Il teorema di Archimede ebbe anche importanti conseguenze in astronomia. A chi lo conosce, infatti, l'evidente forma sferica del Sole e della Luna suggerisce immediatamente che anche al centro di quegli astri vi sia un punto che attira i corpi pesanti. L'idea è testimoniata da Plutarco, che scrive: «Come infatti il Sole attira a sé le parti di cui consiste, così anche la Terra accoglie come appartenente a sé la pietra naturalmente tendente verso il basso»[10]. Poco dopo Plutarco riporta affermazioni analoghe riguardo alla Luna. In un altro luogo testimonia l'estensione della teoria a tutti gli astri: «Essendovi più mondi, in ciascuno è un proprio centro, con un moto proprio a ciascuno, con alcune cose che si muovono verso tale centro, altre che se ne allontanano e altre ancora che gli girano intorno»[11].

L'idrostatica di Archimede aveva verosimilmente contribuito in modo essenziale a far abbandonare la teoria aristotelica della gravità (dalla quale pure Archimede era partito), che ammetteva un unico centro che attira tutti i corpi pesanti e respinge quelli leggeri, intorno al quale girano i corpi celesti (che non sono né pesanti né leggeri).

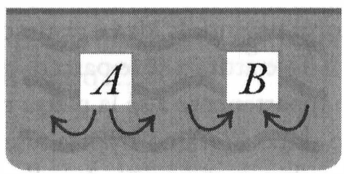
Anche la *teoria policentrica*, che aveva sostituito quella aristotelica immaginando che in ciascun astro vi fosse un centro con proprietà simili a quelle dell'unico centro di Aristotele, si rivelò però ben presto insostenibile, lasciando spazio, nell'ambito della scienza ellenistica, a ulteriori importanti sviluppi dell'idea di gravità[12]. La teoria policentrica fu tuttavia adottata, molti secoli dopo, da Copernico.

9. Diodoro Siculo, *Bibliotheca historica*, I, vii, §§ 1-2.
10. Plutarco, *De facie quae in orbe lunae apparet*, 924E.
11. Plutarco, *De defectu oraculorum*, 425A.
12. Per gli sviluppi delle idee sulla gravità nell'ambito del pensiero ellenistico rinvio a L. Russo, *Stelle, atomi e velieri. Percorsi di storia della scienza*, Mondadori Università, Milano 2015, pp. 79-85.

Galleggiamento

Subito dopo il teorema sulla forma degli oceani, il trattato di Archimede prosegue deducendo dal suo postulato una serie di semplici risultati sul galleggiamento dei corpi.

Supponiamo di immergere completamente un corpo in un liquido. Se il corpo pesa più di un uguale volume di liquido, le porzioni di acqua sottostanti saranno compresse più delle porzioni adiacenti che non sono sotto il corpo[13]. Pertanto, come è il caso del corpo *A* in figura, si sposteranno lateralmente cacciando via il liquido adiacente. Questo spostamento d'acqua farà spazio al corpo, lasciandolo scendere verso il basso.



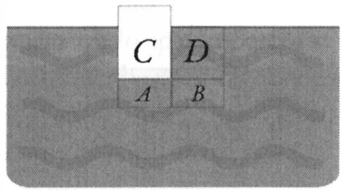
Se invece, come supponiamo accada per il corpo *B* nella stessa figura, il corpo è più leggero dello stesso volume di liquido, le porzioni di liquido sottostanti saranno meno compresse di quelle adiacenti, che si sposteranno sotto il corpo, spingendolo verso l'alto. Il postulato di Archimede implica quindi che i corpi più pesanti (a parità di volume) del liquido in cui sono immersi affondino, mentre quelli più leggeri galleggino. Si può anche determinare facilmente quanta parte dei corpi galleggianti emerge. Archimede dimostra infatti la proposizione seguente:

> Se un corpo è più leggero del liquido in cui è immerso, si immergerà parzialmente, in modo tale che il peso di un volume di liquido pari al volume della sua parte immersa sia uguale al peso del corpo[14].

Siano in figura: *C* il corpo galleggiante, *A* un volume di liquido immediatamente sottostante, *B* un uguale volume di liquido adiacente ad *A* e sovrastato solo dal liquido *D*. In condizioni di equilibrio *A* e *B* debbono essere compressi allo stesso modo e ciò implica che il liquido *D* sovrastante *B*

13. Cfr. *supra*, nota 4.
14. Archimede, *Sui galleggianti*, libro I, proposizione 5.

abbia lo stesso peso del corpo C. La dimostrazione è completata osservando che il volume di D è uguale al volume della parte immersa del corpo C.



Per comodità del lettore, d'ora in poi tradurremo le frasi di Archimede nel linguaggio simbolico moderno (usando, ad esempio, formule con segni di eguaglianza e parentesi), ma senza mai introdurre idee estranee alle sue argomentazioni.

Indichiamo rispettivamente con $p(X)$ e $v(X)$ il peso e il volume di un qualsiasi corpo X, con E e I le porzioni emersa e immersa del nostro corpo galleggiante e con E' e I' porzioni di liquido con lo stesso volume, rispettivamente, di E e I. La proposizione precedente si può allora scrivere:

$$p(I') = p(E) + p(I).$$

Detto d il rapporto tra il peso del corpo e quello di un uguale volume di liquido, si ha allora:

$$d = p(I)/p(I') = p(I)/(p(E) + p(I)) = v(I)/(v(E) + v(I)).$$

(L'ultima eguaglianza è ottenuta ricordando che per porzioni di un corpo omogeneo il rapporto tra i pesi è uguale al rapporto tra i volumi.)

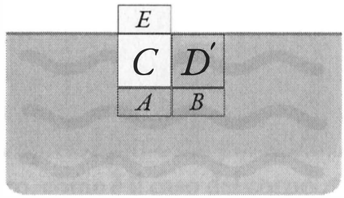
Abbiamo così dimostrato la seguente proposizione:

> Se un corpo [omogeneo] più leggero [a parità di volume] di un liquido è immerso nel liquido, il corpo si immergerà parzialmente in modo tale che [in condizioni di equilibrio] il rapporto tra il peso del corpo e quello di un uguale volume di liquido sia uguale al rapporto tra il volume della sua parte immersa e l'intero volume del corpo[15].

Dimostriamo ora, seguendo l'esposizione originale, il risultato oggi generalmente noto come "principio di Archimede". Supponiamo di porre so-

15. Archimede, *Sui galleggianti*, libro II, proposizione I.

pra il corpo galleggiante C un altro corpo E, di peso tale da costringere C a non emergere, ma a rimanere con la faccia superiore esattamente al livello della superficie del liquido.



In questo caso, in condizioni di equilibrio, le porzioni di liquido A e B in figura devono essere compresse allo stesso modo e ciò implica che il peso del liquido D', pari in volume al corpo C, deve essere uguale alla somma del peso del corpo C e di quello del corpo E:

$$p(D') = p(C) + p(E).$$

D'altra parte, il secondo membro dell'eguaglianza non è altro che la forza totale che spinge il corpo C verso il basso e, poiché il corpo è supposto in equilibrio, tale forza deve eguagliare la forza idrostatica che lo spinge verso l'alto. Quest'ultima deve quindi essere uguale al peso $p(D')$ del liquido spostato. Otteniamo così l'enunciato oggi detto "principio di Archimede"[16].

Archimede dimostra che la stessa spinta idrostatica agisce anche sui corpi più pesanti del liquido, alleggerendoli. Lasciamo la dimostrazione al lettore come esercizio (suggerimento: in questo caso bisogna congiungere il corpo C a un corpo più leggero del liquido).

Nella tradizione didattica moderna il teorema di Archimede è stato privato della dimostrazione; è divenuto così un "principio", da imparare a memoria senza poterne capire l'origine.

Una parentesi metodologica

Alcuni studiosi hanno sottolineato che ad Archimede mancava il concetto di peso specifico di un materiale (oggi definito come rapporto tra peso e volume di un campione del materiale considerato). Credo valga la pena

16. Archimede, *Sui galleggianti*, libro I, proposizione 6.

chiarire questo punto. Gli scienziati ellenistici non consideravano mai il rapporto tra grandezze non omogenee, da loro ritenuto privo di senso. A noi sembra naturale, ad esempio, definire la velocità media di un punto mobile come il rapporto tra lo spazio percorso in un certo tempo e il tempo stesso: $v = s/t$. Diciamo che un moto è uniforme se tale rapporto è costante, ossia se, considerando due qualsiasi intervalli di tempo t_1 e t_2, gli spazi s_1 e s_2 percorsi sono sempre tali che $s_1/t_1 = s_2/t_2$. Archimede (o qualsiasi altro scienziato della sua epoca) avrebbe invece espresso la stessa proprietà (come in effetti fa nel trattato *Sulle spirali*) dicendo che $s_1/s_2 = t_1/t_2$. La differenza non è certo drammatica. Allo stesso modo, Archimede non considera mai rapporti tra pesi e volumi (o masse e volumi), ossia pesi specifici o densità, ma solo rapporti tra pesi o tra volumi. Usa, in particolare, come abbiamo visto, il rapporto tra il peso di un corpo e quello di un uguale volume di liquido, ossia ciò che oggi è detto "peso specifico relativo". Riesce in questo modo a formulare e dimostrare, in maniera del tutto equivalente a quella che useremmo noi, proposizioni che oggi sono enunciate in termini di densità o pesi specifici.

Per chiarire la ragione di quella che ad alcuni appare una grave limitazione, ricordiamo che il rapporto tra due grandezze omogenee ha un significato chiaro perché è un numero che non dipende da scelte arbitrarie. Ciò che chiamiamo rapporto tra due grandezze non omogenee è invece in realtà il rapporto tra due misure, ossia un rapporto tra due rapporti tra grandezze omogenee: quelli tra ciascuna delle grandezze considerate e una grandezza omogenea scelta come unità di misura; il risultato dipende ovviamente dalla scelta arbitraria di tali unità e ha senso solo se tali scelte sono specificate. (Infatti per esprimere, ad esempio, una velocità non basta un numero, ma bisogna specificare se si tratta di m/s o km/h o che altro.) Si tratta di un concetto complesso, che richiede l'introduzione dell'analisi dimensionale e può sorgere solo in un secondo tempo. È utile, soprattutto se si usa il nostro linguaggio algebrico, ma non è insostituibile. Se però si pensa che pesi specifici e densità non siano strumenti concettuali introdotti da noi, ma entità presenti in natura, si può ritenere un limite degli antichi scienziati non averli "scoperti".

È interessante notare che, mentre all'inizio del primo libro del trattato *Sui galleggianti* Archimede aveva dimostrato la sfericità della superficie degli oceani, nel secondo libro assume sempre che la superficie dell'acqua sia piana, senza spendere una parola per spiegare l'apparente contraddizione. Evidentemente è ben consapevole di usare *modelli* della realtà che non la rispecchiano con fedeltà assoluta e non ha quindi problemi nell'usare per la superficie delle acque due diversi modelli, utili per fenomeni che avvengono su diverse scale di grandezza.

L'idea è molto più profonda di quanto possa apparire a chi vi è stato abituato in tenera età ed è inaccessibile a chi è estraneo al metodo scientifico. Ne dà una chiara prova Vitruvio che, spiegando il funzionamento di una livella ad acqua, assume ovviamente (come le sue fonti) che la superficie dell'acqua sia un piano orizzontale. Questa affermazione gli sembra però in contraddizione con il teorema di Archimede. Scrive infatti: «Forse chi ha letto le opere di Archimede dirà che un vero livellamento non può ottenersi con l'acqua, poiché egli afferma che la superficie dell'acqua non è livellata [*libratam*], ma è la superficie di una sfera il cui centro è il centro della Terra».

Ecco come, subito dopo, crede di risolvere la contraddizione: «È necessario che dove viene versata l'acqua si abbia una curvatura al centro, ma è anche necessario che gli estremi destro e sinistro siano allo stesso livello»[17].

Il secondo libro del trattato *Sui galleggianti* è dedicato al problema della stabilità dell'equilibrio di un corpo galleggiante. Si tratta di un problema essenziale dell'ingegneria navale. Nella progettazione di una nave non interessa infatti solo prevedere se la nave galleggerà e quanta parte dello scafo sarà immersa, ma è essenziale sapere anche se l'assetto verticale dello scafo sarà in equilibrio stabile o instabile, ossia se reagirà alle inevitabili inclinazioni provocate dalle onde raddrizzandosi o rovesciandosi. Poiché i risultati di Archimede su questo problema sono basati su conoscenze matematiche che esporremo nei prossimi capitoli, ritorneremo su questi aspetti della sua idrostatica nel capitolo 10.

L'episodio della corona: una fonte più attendibile

Torniamo ora sull'episodio della corona con cui avevamo cominciato il capitolo. Si è conservata una fonte che riporta la soluzione di Archimede del problema in modo molto più attendibile di Vitruvio: il *Carmen de ponderibus et mensuris*, scritto intorno al 400 d.C. e attribuito a Remmio Flavino.

17. Vitruvio, *De architectura*, VIII, V, 3.

Nel *Carmen de ponderibus et mensuris* si spiega che per scoprire quante libbre d'oro sono contenute in un oggetto composto in parte d'oro e in parte d'argento basta procedere nel modo seguente. Si pongono prima sui due piatti di una bilancia, in modo che si facciano equilibrio, una libbra d'oro e una d'argento. Immergendo poi il tutto in acqua si determina la differenza di peso che si viene a creare (per le diverse spinte idrostatiche). Supponiamo che tale differenza sia tre dracme[18] (è questo l'esempio fatto). Se ora sui due piatti della bilancia si pongono un oggetto d'oro e argento del quale si vuole scoprire la composizione e un uguale peso d'argento, essi si equilibreranno in aria, ma in acqua il peso differirà di tre dracme per ogni libbra d'oro contenuta nell'oggetto; dividendo quindi per tre la differenza di peso misurata in dracme si otterrà il numero di libbre d'oro presenti nell'oggetto.

Questo resoconto dell'episodio (sul quale evidentemente intorno al 400 d.C. esistevano ancora buone fonti) è molto più attendibile di quello di Vitruvio, sia perché è basato sull'idrostatica archimedea, sia perché, come Archimede certamente sapeva, le misure di peso potevano essere effettuate con una precisione di gran lunga maggiore delle misure di volume.

È interessante osservare che, nonostante la limpidezza di questa esposizione, l'episodio della corona è ancora riportato quasi sempre nell'assurda versione semplificata di Vitruvio (poiché Vitruvio con ogni probabilità aveva accesso alla fonte che secoli dopo sarà usata da Remmio Flavino, è ragionevole pensare che la semplificazione sia opera sua). Evidentemente continua a essere preferita un'esposizione inattendibile, ma che non infastidisca il lettore costringendolo a pensare. Per chi volesse controllare la parafrasi precedente sul testo originale riportiamo, in traduzione, la parte del *Carmen* che interessa:

> Se qualcuno mescola argento al biondo oro,
> quanto sia e in qual modo tu lo possa scoprire,
> lo svelò per prima l'alta mente del maestro di Siracusa.
> Si racconta infatti che il re di Siracusa avesse dedicato
> al re degli dei una corona d'oro che aveva promesso in voto.
> Informato poi del furto – l'artefice infatti,
> trattenuta una parte dell'oro, vi aveva aggiunto altrettanto argento –
> chiese aiuto all'ingegno del concittadino, che con mente sagace

18. La dracma, prima che una moneta, era un'unità di peso.

scoprì quanto argento si nascondeva nel biondo oro,
lasciandolo intatto com'era prima che fosse dedicato agli dei.
Ti spiegherò in breve il metodo: sta' attento.
Equilibrati i piatti di una bilancia precisa, ponivi
una libbra d'argento e una d'oro, purificati dal fuoco vorace,
in modo che nessuno dei due prevalga.
Immergili poi in acqua: appena il puro liquido li avrà ricevuti
subito si abbassa il piatto che sostiene l'oro,
perché è più denso e anche l'acqua lo è dell'aria.
Ma tu equilibra il giogo e annota la distanza
dal perno centrale, quanto si sarà allontanato da lì
e quante tacche dista il punto di sospensione dal peso[19].
Supponi che disti tre dracme. Sappiamo allora
la differenza tra argento e oro; una libbra [d'oro] supera
una libbra [d'argento] di tre dracme quando è immersa nell'acqua.
Prendi poi l'oro a cui è stata mescolata una parte d'argento
e un uguale peso d'argento puro e ancora sott'acqua,
postili sulla bilancia, osservali: l'oro nell'acqua
diverrà più pesante e ti rivelerà il furto.
Se infatti la differenza sarà sei volte tre dracme,
diremo che vi sono solo sei libbre d'oro,
e che il resto è argento, poiché non differisce in peso
l'argento dall'argento, quando è immerso nell'acqua[20].

19. Si usa qui la legge della leva di cui parleremo nel prossimo capitolo.
20. *Carmen de ponderibus et mensuris*, vv. 125-155. Il testo latino del *Carmen* può essere letto all'indirizzo https://www.hs-augsburg.de/~harsch/Chronologia/Lspost05/Remmius/rem_carm.html (ultimo accesso ottobre 2019).

4
Meccanica

In questo capitolo esamineremo i risultati ottenuti da Archimede nell'ambito della meccanica, quali si possono ricostruire combinando il solo suo scritto conservato sull'argomento con le testimonianze sulle applicazioni tecnologiche che lo stesso Archimede aveva tratto dalla teoria.

La teoria dei baricentri

Il termine "meccanica" deriva dall'aggettivo greco μεχανική, che significava "relativo alle macchine" e poteva riferirsi sia a ἐπιστήμη ("scienza") sia a τέχνη ("arte, tecnica"). Il brano seguente di Pappo descrive tutti i settori di questa scienza e testimonia che Archimede li aveva trattati tutti e ne era considerato il massimo esponente (anche se termina accennando alla tradizione, di cui ci siamo già occupati, che negava ogni interesse di Archimede per la meccanica):

> Di tutte [quelle appartenenti alla meccanica] le arti più necessarie ai bisogni della vita sono: quella del sollevamento dei pesi, i cui stessi esponenti secondo gli antichi si dicevano meccanici (giacché per mezzo di macchine sollevano grandi pesi muovendoli, contro natura, con forze più piccole)[1]; quella dei costruttori di strumenti necessari alla guerra, che si chiamano anch'essi meccanici (mandano infatti a grande distanza proiettili di pietra, di ferro e altri simili con armi da lancio fatte da loro); quella dei costruttori di macchine propriamente dette (che sollevano

1. Il termine greco per "macchina", μεχανή, ha anche il significato di "astuzia", "espediente", "raggiro" ed è collegato al verbo μεχανάω, che significa "escogito" e anche "tramo" (significati che si mantengono in italiano nei termini "macchinazione", "macchinare"). La macchina era cioè concepita come un artificio che riusciva a ingannare la natura, ad esempio sollevando un peso maggiore con uno più piccolo.

facilmente acqua da grandi profondità con strumenti appositi da essi stessi fabbricati).

Gli antichi chiamano meccanici anche i costruttori di meraviglie [...]. Chiamiamo meccanici anche gli esperti di costruzione di planetari, che realizzano modelli del cielo mediante il moto continuo e circolare di acqua.

Di tutti questi [settori della meccanica] dicono che le cause e le leggi le abbia determinate Archimede di Siracusa; solo questi infatti, fino alla nostra epoca, con mente versatile e inventiva, le praticò tutte, come dice anche Gemino il matematico nel suo scritto *Sulla classificazione delle scienze matematiche*.

Carpo di Antiochia dice in qualche luogo che Archimede di Siracusa scrisse un solo trattato di meccanica, quello sulla costruzione dei planetari, non ritenendo che gli altri rami della disciplina meritassero di essere trattati[2].

Purtroppo si è conservato un solo breve lavoro di Archimede sulla meccanica, *Sull'equilibrio delle figure piane*, estratto da un'opera più ampia. Questa circostanza è certamente una delle origini dei problemi interpretativi posti dall'opera.

Lo scritto (cui manca la parte iniziale) comincia bruscamente elencando una serie di sette postulati; dagli sviluppi successivi si capisce che i postulati si riferiscono a un'asta rigida girevole intorno a un punto fisso, che diremo "fulcro", alla quale sono applicati dei pesi.

I postulati sono i seguenti:

1. pesi uguali a uguali distanze sono in equilibrio e pesi uguali a distanze diseguali non sono in equilibrio, ma pendono verso il peso che è a distanza maggiore;
2. se, quando pesi a date distanze sono in equilibrio, qualcosa viene aggiunto a un solo peso, essi non sono più in equilibrio, ma pendono verso il peso a cui è stato aggiunto qualcosa;
3. similmente, se qualcosa viene tolto da uno solo dei due pesi, essi non sono più in equilibrio, ma pendono verso quel peso da cui non è stato tolto nulla;
4. quando figure equivalenti[3] e simili vengono fatte coincidere, anche i loro baricentri coincidono;
5. in figure che sono simili ma non equivalenti, i baricentri sono situati similmente. In figure simili diciamo situati similmente i punti tali che le rette che li

2. Pappo, *Collectio*, VIII, 1024, 12-1026, 19 (ed. Hultsch).

3. Traduco con "equivalente" il termine ἴσος, di solito tradotto con "uguale", poiché nella matematica ellenistica, se riferito a figure, ha il significato del nostro "equivalente". Nel caso delle grandezze considerate nel postulato 6, sono equivalenti due grandezze con lo stesso peso totale (se si considerano distribuzioni di peso omogenee su superfici piane, i due significati coincidono).

congiungono con i vertici di angoli uguali fanno angoli uguali con i lati omologhi;
6. se grandezze a date distanze sono in equilibrio, anche altre grandezze a esse equivalenti saranno in equilibrio alle stesse distanze;
7. in ogni figura il cui perimetro è sempre concavo nella stessa direzione il baricentro deve essere interno alla figura[4].

Il sesto postulato a lungo non è stato capito ed è sembrato a vari studiosi una tautologia. Il punto essenziale consiste nel capire che cosa sono le *distanze* tra grandezze di cui si parla. L'unico significato possibile (che forse era esplicitato in parti del trattato che non si sono conservate) è che le distanze (che sono ben definite tra punti) riguardino i baricentri. Ricordando il significato di "equivalente" (ἴσος nell'originale) il postulato afferma quindi che l'equilibrio non viene alterato se un insieme di pesi viene sostituito da un altro che abbia lo stesso peso totale e lo stesso baricentro[5].

Un altro problema è posto dal concetto di *baricentro* (nell'originale τὸ κέντρον τοῦ βάρεος, "il centro dei pesi"), che Archimede usa senza averlo definito. Alcuni studiosi (tra i quali Giovanni Vailati) hanno pensato che Archimede avesse inserito una definizione nella parte iniziale dell'opera che non si è conservata o semplicemente avesse considerato il concetto già noto perché definito in altre opere, sue o di altri. A favore di questa interpretazione vi è la circostanza che una definizione di baricentro è riportata da più autori. Simplicio, ad esempio, scrive:

> Questa teoria [dei baricentri], sulla quale Archimede e altri hanno scritto molti ed elegantissimi trattati, ha lo scopo di trovare il centro di un dato peso, cioè un punto nel corpo tale che, se viene sollevato attaccandovi una corda, il corpo resta [nella sua posizione] senza inclinarsi[6].

Una definizione sostanzialmente equivalente è riportata da Pappo[7].

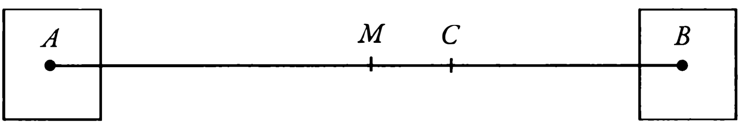
Altri studiosi, come Otto Toeplitz e Wolfgang Stein, hanno ritenuto che Archimede intendesse definire implicitamente il concetto di baricentro attraverso i suoi postulati. Torneremo sul procedimento degli scien-

4. Archimede, *Sull'equilibrio delle figure piane*, 80, 2-81, 2 (ed. Mugler).
5. Questa interpretazione risale a Toeplitz e Stein ed è stata accettata, tra gli altri, da Dijksterhuis.
6. Simplicio, *In Aristotelis quattuor libros de caelo commentaria* (ed. Heiberg), 543, 28-34.
7. Pappo, *Collectio*, III, 5, 1030 (ed. Hultsch).

ziati ellenistici di definire implicitamente concetti attraverso postulati. In questo caso per scegliere tra le due possibilità conviene esaminare come Archimede deduce dai suoi postulati la posizione del baricentro di diverse figure. Riportiamo qui una sola proposizione di questo tipo (la quarta, nella numerazione originale):

> Se due grandezze equivalenti non hanno lo stesso baricentro, il baricentro della grandezza composta dalle due sarà il punto medio del segmento che congiunge i baricentri delle due grandezze.

Archimede dimostra questa proposizione per assurdo nel modo seguente. Detti *A* e *B* i baricentri delle due grandezze, se il baricentro della grandezza totale fosse un punto *C* del segmento *AB* diverso dal punto medio *M*, allora il sistema sarebbe in equilibrio mantenendo fisso il punto *C*, ma ciò sarebbe in contrasto con il primo postulato.



Questa dimostrazione presenta due problemi. Innanzitutto Archimede assume una proprietà del baricentro (quella che un sistema con il baricentro fisso sia in equilibrio) che non è affermata in alcuno dei postulati e non sembra da loro deducibile. Si tratta della proprietà che costituiva la definizione di baricentro riferita da Pappo e da Simplicio. Evidentemente Archimede presupponeva una definizione di questo tipo. Dobbiamo quindi dar ragione a Giovanni Vailati.

Il secondo problema è dato dal fatto che si assume, senza averlo dimostrato, che il baricentro della grandezza totale debba appartenere al segmento *AB*. Probabilmente Archimede l'aveva dimostrato in una sezione dell'opera che non si è conservata[8]. Se si assume la definizio-

8. Il testo greco tradito contiene in effetti la frase ὅτι γὰρ ἔστιν ἐπὶ τῆς *AB* προδέδεικται ("si è già dimostrato che appartiene ad *AB*"), anche se Heiberg ha considerato queste parole un'interpolazione. D'altra parte tra le nozioni prerequisite elencate all'inizio del *Metodo* (alcune delle quali sono enunciati dimostrati in altre opere note di Archimede) vi è l'affermazione seguente: se i baricentri di un qualsiasi numero di grandezze sono sulla stessa retta, il baricentro della grandezza composta da tutte è anch'esso sulla stessa retta (Archimede, *Metodo*, 85, 13-15, ed. Mugler).

ne di baricentro già ricordata, una possibile dimostrazione per assurdo potrebbe ottenersi riflettendo le grandezze *A* e *B* rispetto alla retta *AB* (ricordiamo che in quest'opera Archimede considera grandezze contenute in un piano). Esaminando separatamente le due grandezze, ciascun baricentro, essendo sulla retta *AB*, non sarebbe alterato dalla riflessione (come segue dalla definizione ricordata di baricentro e dall'osservazione che la riflessione equivale a una rotazione nello spazio intorno al baricentro). Il baricentro della grandezza composta delle due, che per ipotesi è fuori della retta *AB*, dovrebbe invece spostarsi in seguito alla riflessione. D'altra parte le modifiche effettuate riflettendo *A* e *B* hanno lasciato inalterato il loro peso totale e il loro baricentro e, per il sesto postulato, non dovrebbero alterare l'equilibrio del sistema e quindi neppure il suo baricentro. Si perviene così a un assurdo. La possibilità che Archimede avesse pensato a un ragionamento di simmetria di questo tipo è suggerita dal modo analogo in cui, come vedremo, dimostra la legge di riflessione (cfr. *infra*, p. 83).

Archimede generalizza il risultato precedente, dimostrando che, se un sistema è formato da un insieme di grandezze equivalenti i cui baricentri sono posti su una stessa retta ed equidistanziati, il baricentro del sistema è il punto medio del segmento che congiunge tutti i baricentri delle grandezze.

Nel testo che abbiamo si individuano anche i baricentri di figure piane come parallelogrammi, triangoli e trapezi.

La legge della leva

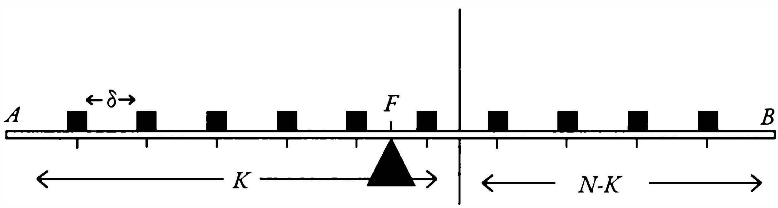
Tra i risultati del trattato *Sull'equilibrio delle figure piane*, il più importante e famoso è certamente quello contenuto nelle proposizioni 6 e 7, nelle quali si dimostra che due grandezze (pensate applicate a un'asta rigida girevole intorno a un fulcro) sono in equilibrio se le loro distanze dal fulcro sono inversamente proporzionali ai loro pesi; si dimostra cioè la legge della leva.

La dimostrazione di Archimede fu considerata insoddisfacente da Ernst Mach[9], che la ritenne tautologica, ma studi successivi hanno chia-

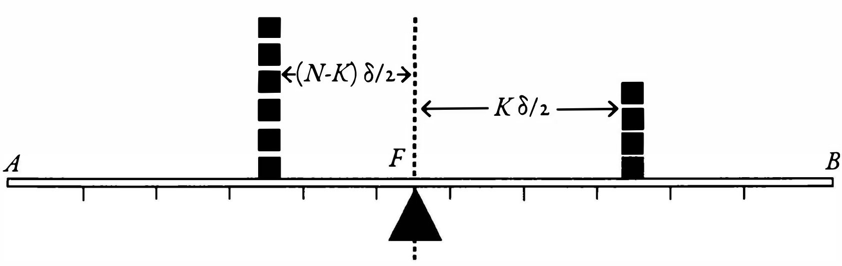
9. E. Mach, *La meccanica nel suo sviluppo storico-critico*, Boringhieri, Torino 1968, pp. 43-53 (ed. or. *Mechanik in ihrer Entwickelung historisch-kritisch dargestellt*, Brockhaus, Leipzig 1883).

rito che la critica di Mach era basata su un'interpretazione scorretta del sesto postulato[10].

Senza esporre nei dettagli la dimostrazione di Archimede, mostriamo come l'interpretazione già data del sesto postulato possa portare al risultato. Supponiamo che lungo la nostra asta *AB*, incernierata sul fulcro *F* posto nel suo punto medio, siano applicati, come in figura, *N* pesi uguali *p*, equidistanziati e posti simmetricamente rispetto a *F*. Sia δ la distanza tra i baricentri di due pesi successivi. Sappiamo che in questa situazione il sistema è in equilibrio.



Consideriamo ora i due sottosistemi formati dai primi *K* pesi e dai successivi *N-K*. In base al sesto postulato (nell'interpretazione che gli abbiamo dato) l'equilibrio non sarà alterato se sostituiamo a ciascuno dei due sottosistemi un unico peso, pari al peso totale del sottosistema, posto nel suo baricentro. Il baricentro del primo sottosistema sarà a distanza $(N\text{-}K)\delta/2$ da *F*, mentre la distanza dal fulcro del baricentro del secondo sottosistema sarà $K\delta/2$[11]. Si verifica immediatamente che i due pesi, Kp e $(N\text{-}K)p$, sono inversamente proporzionali alle due distanze.



10. Cfr. *supra*, nota 3.
11. L'inizio del primo sottosistema dista infatti dal fulcro $N\delta/2$ e il suo baricentro dista da tale inizio $K\delta/2$. Allo stesso modo si calcola la seconda distanza.

È evidente che, inversamente, se si considerano due pesi multipli dello stesso peso p posti a distanze dal fulcro inversamente proporzionali ai due pesi, è possibile suddividerli (senza alterare né i pesi complessivi né la posizione dei baricentri) ottenendo una successione di pesi p equidistanziati e posti simmetricamente rispetto a F. La situazione, sia prima che dopo la suddivisione, è quindi di equilibrio.

La dimostrazione di Archimede della proposizione 6 è basata sostanzialmente sulle idee appena esposte. Nella proposizione 7, che rinunciamo a esporre, la legge della leva è estesa al caso di due pesi incommensurabili. Il lettore moderno capisce facilmente che, poiché la legge vale per ogni rapporto razionale tra i pesi e il rapporto tra pesi incommensurabili può essere approssimato comunque bene con un rapporto razionale, la legge non può essere violata nel caso dell'incommensurabilità.

In una macchina che solleva pesi si dice "vantaggio meccanico" il rapporto tra il peso sollevato e la forza applicata alla macchina per sollevarlo. La legge della leva dimostrata da Archimede implica che per sollevare un peso P con una leva basta applicare un peso p appena superiore al rapporto tra le distanze dal fulcro dei due pesi. Poiché si può scegliere qualsiasi rapporto tra le distanze, ciò implica che una leva può costituire una macchina con un vantaggio meccanico comunque grande. Questa considerazione è però valida solo in teoria, cioè all'interno del modello in cui la leva è rappresentata da un'asta rigida. Tale modello descrive abbastanza bene le aste reali solo se non sono troppo lunghe e le forze applicate non sono troppo elevate; altrimenti le aste non rimangono rigide, ma si flettono o si spezzano. Archimede era ben consapevole di questa limitazione; sappiamo infatti da numerose testimonianze che progettò varie macchine per sollevare pesi diverse da una semplice leva.

Le macchine per sollevare pesi tra leggenda e realtà

Le macchine per sollevare pesi furono tra le realizzazioni tecnologiche di Archimede che più colpirono la fantasia dei contemporanei, contribuendo ad alimentare la leggenda su di lui.

Plutarco racconta:

> Archimede scrisse un giorno al re Gerone, di cui era parente e amico, che con qualsiasi forza data era possibile sollevare qualsiasi peso. Si dice che, preso d'entu-

siasmo per la potenza della dimostrazione, Archimede aggiunse che se fosse esistita un'altra Terra, egli avrebbe mosso questa trasferendosi in quella.

Gerone si meravigliò e chiese di porre in pratica l'affermazione, mostrando qualche grosso oggetto mosso da una piccola forza. Archimede prese un mercantile a tre alberi della flotta reale, tirato in secco con grande fatica e l'impiego di molte persone, v'imbarcò molti uomini e il suo carico abituale, poi si sedette lontano e senza sforzo, dolcemente, azionando con una mano l'estremità di un *polyspaston*, lo tirò a sé placidamente e senza sussulti, come se corresse sulla superficie del mare.

Il re fu colpito e intuendo le possibilità della scienza di Archimede lo convinse a preparare per lui delle macchine sia difensive che offensive per ogni genere di assedio[12].

Nel IV secolo Pappo riporta lo stesso concetto inserendolo in un contesto più scientifico:

Con la stessa teoria si può muovere un [qualsiasi] peso dato con una forza assegnata; questa è una scoperta meccanica di Archimede, che a questo proposito si dice abbia affermato: «Datemi dove appoggiarmi e sposterò la Terra». Erone alessandrino ha esposto molto chiaramente la sua costruzione nel libro detto "Barulco" [...].

Nel barulco il peso dato si muove con la forza assegnata mediante un sistema di ruote dentate[13].

Entrambi gli autori riferiscono che Archimede avrebbe affermato che con una qualsiasi forza (anche molto piccola) è possibile sollevare qualsiasi peso (anche molto grande): è cioè possibile progettare macchine con un vantaggio meccanico comunque grande. Le macchine citate per esemplificare l'idea sono però diverse: Plutarco parla di un *polyspaston*, ossia di una macchina (ancora usata) basata su un sistema composto da più carrucole, mentre Pappo si riferisce al barulco, uno strumento descritto da Erone che usa ruote dentate.

Testimonianze molto simili sono dovute a Olimpiodoro (che anche nomina il barulco)[14] e a Simplicio (che invece preferisce citare un'altra macchina: il *charistion*, non identificabile con certezza)[15].

12. Plutarco, *Vita di Marcello*, XIV, 7-9.
13. Pappo, *Collectio*, VIII, 1060, 1-12 (ed. Hultsch).
14. Olimpiodoro, *In Platonis Alcibiadem*, 191, 14-18.
15. Simplicio, *In Aristotelis Physicorum libros commentaria*, 1110, 2-5.

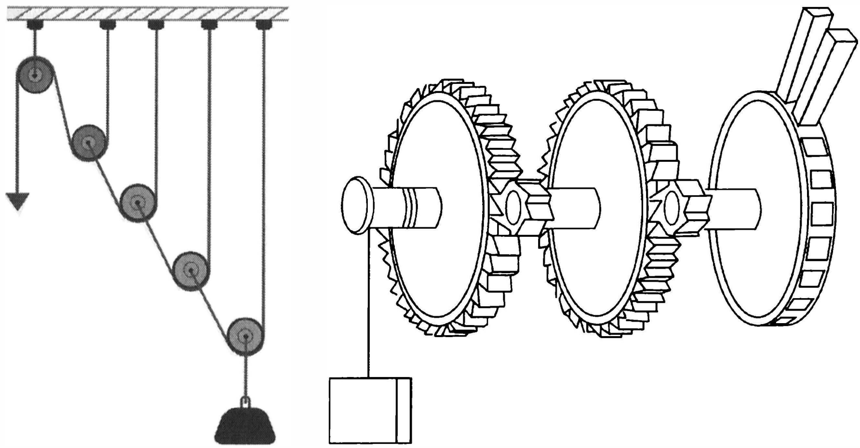


FIGURA 5 A sinistra un *polyspaston*; a destra uno schema del barulco descritto da Erone.

Non vi è motivo per dubitare della sostanza di queste concordi testimonianze, poiché non è difficile generalizzare la legge della leva in modo che sia applicabile a macchine che, come il barulco e il *polyspaston*, permettono di ottenere un vantaggio meccanico molto superiore a quello realizzabile praticamente con una leva (ad esempio nel caso del barulco il ruolo delle distanze dal fulcro viene svolto dai raggi delle ruote dentate). La legge della leva evidentemente interessava Archimede come fondamento di una teoria suscettibile di applicazioni molto più efficaci di una semplice leva (FIG. 5).

La tradizione (anche in epoca moderna, cfr. FIG. 6), più che sui risultati scientifici, insiste sulla frase che Archimede avrebbe pronunciato secondo Plutarco e (con leggere varianti) Pappo, Simplicio e Olimpiodoro[16]. Proclo racconta anche lui l'episodio della nave, ma, a differenza di Plutarco, non lo riferisce a un generico mercantile, ma al varo della gigantesca nave Siracusana, costruita con la supervisione di Archimede[17].

L'episodio del varo della nave acquista, al solito, particolari nuovi e inverosimili nelle fonti bizantine. Tzetzes precisa che Archimede mosse la nave usando solo la mano sinistra[18] e quando, in un altro luogo, cita la

16. Nei luoghi già citati.
17. Proclo, *Commentario al primo libro degli Elementi di Euclide*, 63 (ed. Friedlein). Sulla nave torneremo alle pagine 67-8.
18. Tzetzes, *Chiliadi*, II, 106-111.

FIGURA 6 Un'interpretazione moderna della famosa frase di Archimede: pittura murale eseguita nel 1600 da Giulio Parigi nello Stanzino delle Matematiche della Galleria degli Uffizi.

famosa frase di Archimede, vi aggiunge un tocco di realismo riportandola nel dialetto dorico parlato a Siracusa[19].

Statica o dinamica?

Usualmente, mentre si considera Archimede il fondatore della teoria scientifica della statica (ossia della parte della meccanica che studia l'equilibrio), si nega che nella scienza greca vi sia mai stato interesse per la dinamica.

Ci si può però chiedere se la meccanica di Archimede si limitasse veramente al solo studio dell'equilibrio. L'assenza, nell'opera di meccanica che ci è rimasta, del concetto di tempo (che pure in altri suoi trattati è usato per considerazioni quantitative di carattere cinematico) sembra autorizzare questa conclusione; le sue applicazioni tecnologiche testimoniano però l'interesse per macchine, come quelle per sollevare pesi, che non sono certo in equilibrio, ma si muovono compiendo lavoro.

I problemi affrontati da Archimede riguardano in realtà sistemi meccanici in *moto lento*, nei quali cioè le forze agenti sono *quasi in equilibrio*.

19. Tzetzes, *Chiliadi*, II, 132-133.

Utilizzando la terminologia moderna, tali sistemi possono essere definiti come quelli in cui le variazioni di energia cinetica sono trascurabili rispetto a quelle di energia potenziale. In questi casi, pur essendo essenziale il lavoro compiuto durante il moto, il tempo non svolge alcun ruolo esplicito nella teoria. La situazione è completamente analoga a quella della moderna teoria termodinamica delle trasformazioni *quasi statiche*, nella quale anche si studiano macchine (in questo caso termiche) che compiono lavoro costruendone modelli che subiscono trasformazioni infinitamente lente, durante le quali gli stati del sistema possono essere considerati sempre stati di equilibrio.

La *dinamica quasi statica* di Archimede ha un particolare interesse didattico in quanto costituisce ancora la teoria più adatta per introdurre concetti come quelli di lavoro e di vantaggio meccanico, esponendo la teoria delle macchine semplici in un ambito teorico che non richiede gli strumenti dell'analisi matematica indispensabili per la comprensione della dinamica newtoniana.

5
Qualche altra realizzazione tecnologica

In questo capitolo accenneremo a qualche altra applicazione tecnologica realizzata da Archimede, oltre le macchine per sollevare pesi (e le armi, sulle quali le informazioni disponibili sono state esaminate alle pp. 25-7 e 30).

Ingegneria navale

Una chiara indicazione dell'utilità dell'idrostatica archimedea per l'ingegneria navale è data dalla constatazione che all'epoca della nascita di questa scienza apparvero navi di dimensioni senza precedenti e, per difenderne gli scafi dalle teredini (molluschi voraci di legno), si cominciò a rivestirle di piombo: un'innovazione probabilmente introdotta da chi sapeva stimare la linea di galleggiamento teoricamente, prima del varo della nave.

Il contributo personale di Archimede alla tecnologia navale è documentato. Sappiamo infatti che la più grande di queste navi gigantesche, la Siracusana, fu costruita con la sua supervisione. Abbiamo una descrizione accurata della nave, dovuta a un certo Moschione (ritenuto contemporaneo di Archimede) e trascritta da Ateneo (III secolo d.C.?). Riportiamone qualche passo:

> Sulla nave costruita da Gerone di Siracusa, della quale fu supervisore il geometra Archimede, non credo sia giusto tacere, visto che un certo Moschione ha pubblicato un'opera che mi è capitato recentemente di leggere con attenzione. Scrive dunque Moschione:
>
> [...] [Gerone] per il legno si era procurato dall'Etna tronchi in quantità sufficiente a costruire sessanta quadriremi.
>
> [...] Convocò costruttori navali e altri artigiani e, avendo nominato a dirigere tutti l'architetto Archia di Corinto, gli chiese di occuparsi con sollecitudine

dell'opera, impegnandosi in quei giorni anche in prima persona. Metà dell'intera nave fu completata in sei mesi [...] le parti costruite venivano via via rivestite con tegole fatte di piombo, grazie a trecento artigiani che lavoravano il materiale, senza contare gli aiutanti.

Si ordinò di calare a mare questa parte di nave, così che il resto della costruzione potesse avvenire là. Ma sul modo di calarla in mare si discusse a lungo, finché Archimede, l'esperto di meccanica, da solo non la portò giù con pochi uomini: costruita una "vite" [macchina non facilmente identificabile], questa nave tanto grande fu in mare.

[...] Sul ponte più alto c'erano una palestra e dei passeggi costruiti in proporzione alla grandezza della nave; in questi erano giardini di varia specie, straordinariamente ricchi di piante.

[...] Accanto una sala di studio a cinque divani, pareti e porte di bosso, con una biblioteca al suo interno.

[...] Oltre a ciò, dieci scuderie su ogni fianco; in corrispondenza a queste vi erano le provviste per i cavalli e gli attrezzi dei cavalieri e dei servi.

[...] C'erano poi otto torri proporzionate alla mole della nave: due a poppa, altrettante a prua e le altre nel mezzo della nave. Ciascuna di queste era dotata di due antenne sulle quali erano costruite piattaforme dalle quali si potevano lanciare pietre sui nemici che avessero navigato al di sotto. Su ciascuna delle torri montavano quattro giovani armati e due arcieri. L'interno delle torri era pieno di pietre e proiettili. La nave era attraversata da una struttura poggiata su colonne e munita di parapetti e ponti. Su questa era un'arma da getto che lanciava pietre di tre talenti e proiettili di dodici cubiti. Questo ordigno l'aveva progettato Archimede. Ciascuno dei proiettili poteva arrivare alla distanza di uno stadio[1].

Lionel Casson stima che la portata della Siracusana si aggirasse sulle 2.000 tonnellate[2], un valore superato per la prima volta da navi europee nel XIX secolo. La lunghezza doveva essere circa 110 metri. Per confronto ricordiamo che l'ammiraglia di Cristoforo Colombo, la Santa Maria, era lunga 26 metri e la famosa Mayflower, con la quale i Padri Pellegrini giunsero in America nel 1620, misurava 33 metri. La Victory, ammiraglia inglese nella battaglia di Trafalgar del 1805, non raggiungeva i 70 metri.

1. Ateneo, *Deipnosophistae*, V, 206d-208c. Lo stadio era un'unità di lunghezza; la sua versione più usata corrispondeva a circa 185 metri.
2. L. Casson, *Ships and Seamanship in the Ancient World*, Princeton University Press, Princeton (NJ) 1971, p. 186 (repr. The Johns Hopkins University Press, Baltimore, MD-London 1995). Casson ricorda che autori precedenti avevano proposto valori ancora maggiori (fino a 4.200 tonnellate). Le stime differiscono per le diverse valutazioni delle unità di misura usate da Ateneo nel descrivere il carico della nave.

La coclea

La coclea, detta anche "vite di Archimede", è una macchina di una semplicità assolutamente geniale, costituita da un tubo cilindrico all'interno del quale è fissata una superficie elicoidale che, ruotando, crea un flusso continuo di acqua in salita (FIG. 7). Si può ottenerne una versione equivalente avvolgendo un tubo intorno a un asse cilindrico.

La vite di Archimede fu usata subito a vari scopi (per irrigare i campi, drenare le miniere e gettare fuoribordo l'acqua che si raccoglie nella sentina delle navi) ed è rimasta in uso fino ai nostri giorni.

L'attribuzione ad Archimede di questa macchina è basata su due testimonianze. Nella descrizione di Moschione della nave Siracusana, che abbiamo già letto in parte, è scritto: «L'acqua della sentina, che pure era di una profondità smisurata, veniva svuotata da un uomo solo con la coclea, invenzione di Archimede»[3].

L'altra testimonianza, di Diodoro Siculo (I secolo a.C.), è più circostanziata:

> [E] tra tutti gli accorgimenti [dei minatori spagnoli] il più sorprendente è il modo in cui drenano i flussi d'acqua con le coclee dette egiziane, che inventò Archimede di Siracusa quando andò in Egitto; usandole in successione continua fino all'ingresso prosciugano le gallerie e le preparano per la continuazione del lavoro. Il meccanismo è così straordinariamente ingegnoso che con un lavoro non eccessivo un fiume d'acqua si riversa facilmente dalle profondità alla superficie. Giustamente ci si meraviglia del genio dell'artefice, non solo per questa invenzione, ma per molte altre anche maggiori celebrate in tutto il mondo, delle quali tratteremo in dettaglio quando arriveremo all'epoca di Archimede[4].

Purtroppo i libri in cui Diodoro Siculo aveva descritto in dettaglio le invenzioni di Archimede appartengono alla parte perduta della sua opera, ma l'informazione che l'argomento fosse stato trattato in dettaglio non è priva di interesse, poiché indica che Diodoro avesse fonti specifiche su questo tema.

Queste precise testimonianze, congiunte al documentato uso in epoche immediatamente precedenti Archimede di sistemi di sollevamento dell'acqua molto più primitivi e all'assenza di qualsiasi riferimento prece-

3. Ateneo, *Deipnosophistae*, V, 208f.
4. Diodoro Siculo, *Bibliotheca historica*, V, 37, 3-4. Diodoro aveva attribuito la coclea ad Archimede anche in I, 34, 2.

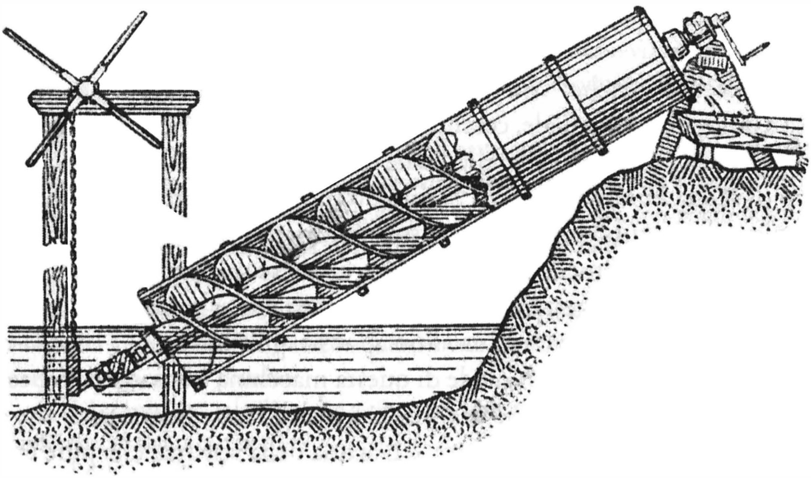


FIGURA 7 La vite di Archimede (illustrazione tratta dalla *Grande enciclopedia sovietica* del 1926).

dente non solo a coclee, ma neppure a viti[5] di altro tipo, sono sufficienti, a mio parere, ad attribuire la coclea ad Archimede. Si è invece diffusa l'abitudine di immaginarne origini antichissime: qualcuno ha perfino avanzato seriamente la congettura gratuita che fossero state usate coclee per irrigare i giardini pensili di Babilonia (che la maggioranza degli studiosi considera leggendari)[6].

L'estrema ingegnosità del meccanismo, che sfrutta il peso dell'acqua per farla salire (e costituisce un ulteriore argomento a favore dell'attribuzione ad Archimede), ha sempre colpito l'immaginazione. Ecco come Galileo introduce l'argomento:

> Non mi pare che in questo luogo sia da passar con silenzio l'invenzione di Archimede d'alzar l'acqua con la vite: la quale non solo è maravigliosa, ma è miracolosa; poiché troveremo, che l'acqua ascende nella vite discendendo continuamente[7].

5. Per viti intendo qui viti con filettatura a forma di elica cilindrica, che possono pertanto avvitarsi in madreviti. In epoche precedenti esistevano attrezzi simili agli attuali succhielli per legno.
6. S. Dalley, *The Mystery of the Hanging Garden of Babylon: An Elusive World Wonder Traced*, Oxford University Press, Oxford 2013.
7. G. Galilei, *Le mecaniche*, in Id., *Le opere di Galileo Galilei. Edizione nazionale sotto gli auspici di sua maestà il Re d'Italia*, Barbera, Firenze 1890-1907, vol. II (1891), p. 186.

L'orologio ad acqua

L'antenato dell'orologio ad acqua era la clessidra ad acqua dell'Egitto faraonico, che consisteva in un vaso con un foro sul fondo. Il tempo trascorso dal momento del riempimento del vaso poteva dedursi dal livello dell'acqua; a questo scopo all'interno del vaso era disegnata una scala.

Le clessidre egiziane non erano un vero strumento di misura, soprattutto perché la velocità di efflusso dell'acqua dipende dalla pressione e quindi diminuisce durante il funzionamento, al calare del livello dell'acqua nel vaso. Gli Egiziani avevano cercato di risolvere questo problema usando vasi non cilindrici bensì tronco-conici, ma si trattava di una correzione puramente qualitativa.

La Grecia classica non apportò miglioramenti essenziali alla clessidra ad acqua egiziana. Aristotele ricorda gli orologi ad acqua usati nei processi[8], che erano clessidre anche più semplici di quelle egizie. Poiché avevano solo la funzione di assegnare un uguale tempo ai discorsi delle diverse parti in causa, queste clessidre (come quelle usate oggi in molti giochi da tavola) non erano tarate con divisioni intermedie.

I primi veri orologi ad acqua sorgono ad Alessandria nella prima metà del III secolo a.C. grazie a Ctesibio, che trasformò l'antica clessidra in uno strumento di misura (FIG. 8*a*). Nell'orologio di Ctesibio, che conosciamo grazie alla descrizione che ne dà Vitruvio[9], il serbatoio dell'acqua era dotato di due fori, uno più piccolo sul fondo e uno maggiore sulla parete, ed era rifornito d'acqua con continuità con un flusso intermedio alla portata dei due fori. Il livello dell'acqua era così sempre pari all'altezza del foro maggiore e la pressione sul fondo era quindi costante. La quantità d'acqua che defluiva dal foro minore era raccolta in un secondo recipiente e misurata mediante un galleggiante che, salendo, spostava un indice che puntava a una scala graduata.

Ctesibio aveva evidentemente progettato il suo orologio usando l'idea (che Archimede aveva posto a base della sua idrostatica) che la pressione dipenda dall'altezza del liquido sovrastante. Non sappiamo se ciò significhi che conoscesse il trattato *Sui galleggianti* o se Archimede avesse ripreso una nozione già nota.

8. Aristotele, *Atheniensium respublica*, lxvii, §§ 2-3.
9. Vitruvio, *De architectura*, IX, viii, 2-14.

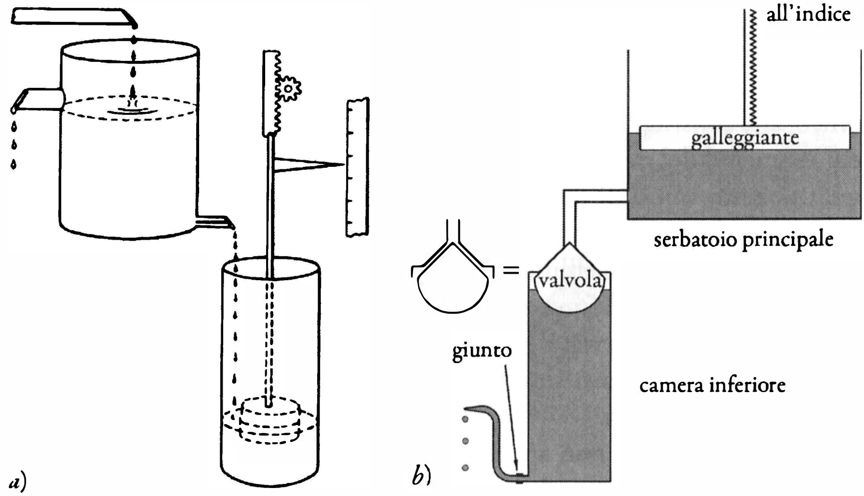


FIGURA 8 Schemi *a*) dell'orologio di Ctesibio e *b*) di quello di Archimede.

Un modello particolarmente interessante di orologio è descritto e attribuito ad Archimede in un anonimo *Trattato sulla costruzione di orologi ad acqua* conservato in arabo[10] (FIG. 8*b*). Quest'orologio, a differenza di quello di Ctesibio, non ha bisogno di essere rifornito da un flusso di acqua continuo, ma è alimentato da un serbatoio principale, che può essere riempito periodicamente. Il serbatoio, svuotandosi, abbassa un galleggiante che, attraverso un ingranaggio, determina la posizione di un indice su una scala graduata. Il deflusso d'acqua è reso costante grazie a un meccanismo particolarmente ingegnoso. L'acqua scende dal serbatoio principale in uno secondario attraverso un tubo che in basso si allarga in un cono. Quando in questo secondo serbatoio il livello dell'acqua è massimo, un galleggiante conico occlude il tubo da cui affluisce l'acqua. Appena il livello dell'acqua inizia a scendere, il galleggiante, abbassandosi, permette l'afflusso di nuova acqua, ripristinando il livello massimo. Il serbatoio secondario, che

10. Il trattato è conservato da tre manoscritti arabi e un frammento ed è stato pubblicato in traduzione inglese (*On the Construction of Water-Clocks*, edited and translated by D. R. Hill, Turner & Devereux, London 1976). L'attribuzione ad Archimede dell'orologio, riportata nei manoscritti arabi, è considerata attendibile da Hill, poiché è avallata da diversi elementi: in particolare diverse caratteristiche grammaticali del testo arabo mostrano che la descrizione dell'orologio è tradotta da un testo greco e diversi autori arabi citano l'orologio come dovuto ad Archimede. È d'altra parte certo che il testo arabo contenga anche materiale di diversa origine.

è dotato anche di un tubo di uscita, è così mantenuto in pratica sempre pieno, assicurando che il deflusso avvenga a pressione costante e sia quindi anch'esso costante. La valvola galleggiante, se effettivamente è dovuta ad Archimede, potrebbe essere uno dei primi esempi di meccanismo di retroazione, ossia di un congegno capace di reagire a un'azione esterna che altera lo stato di un sistema ripristinando lo stato iniziale.

Diversi autori si sono occupati della trasformazione del concetto di tempo, sia nella vita quotidiana sia nella scienza, avvenuta tra la fine del Medioevo e l'età moderna a causa dell'introduzione degli orologi meccanici[11], ma non conosco nulla di analogo relativo all'epoca in cui sono stati inventati i primi orologi: quelli (ellenistici) ad acqua. Un esempio della modifica del senso del tempo indotta a quell'epoca in ambienti non scientifici dalla diffusione degli orologi è fornito dalla cortigiana Metica, che usava un orologio ad acqua per misurare il tempo dedicato ai suoi clienti[12].

Per quanto riguarda la trasformazione del concetto di tempo in fisica, Samuel Sambursky ha scritto:

> L'opera di Galileo era rivoluzionaria [...] perché considerava il tempo come una grandezza matematica che poteva venire usata nei calcoli proprio come la lunghezza o qualsiasi altra grandezza geometrica. [...] Le sue dimostrazioni sono accompagnate da grafici che rappresentano porzioni di tempo come segmenti di retta. Il passo compiuto da Galileo col rappresentare il tempo in forma geometrica ha un'importanza storica di prim'ordine[13].

In effetti l'idea di rappresentare intervalli di tempo come segmenti può venire solo se si sanno misurare i tempi con una precisione confrontabile con quella con cui si misurano le lunghezze, cioè dopo l'invenzione degli orologi. Non stupisce quindi che lo stesso Archimede impegnato nel perfezionamento degli orologi ad acqua rappresenti durate di tempo con segmenti. Lo fa nel trattato *Sulle spirali*[14], che Galileo aveva studiato con

11. Due testi classici su questo argomento sono: M. Bloch, *La società feudale*, Einaudi, Torino 1965[6], pp. 91-3 (ed. or. *La société féodale*, 2 voll., Michel, Paris 1939); A. Koyré, *Dal mondo del pressappoco all'universo della precisione*, Einaudi, Torino 1967 (ed. or. *Du monde de l'à peau près à l'univers de la précision*, in "Critique", IV, 28, 1948, pp. 806-23).
12. Ateneo, *Deipnosophistae*, XIII, 567c-d.
13. S. Sambursky, *Il mondo fisico dei Greci*, Feltrinelli, Milano 1959, pp. 247-8 (trad. parziale di *The Physical World of the Greeks*, Routledge, London 1956).
14. *Sulle spirali*, 13-6 (ed. Mugler).

cura[15], traendone, tra l'altro, l'idea che Sambursky gli attribuisce come rivoluzionaria. La svista illustra bene la diffusa, profonda ignoranza della scienza antica: Sambursky è stato infatti uno dei pochi studiosi che si sono occupati di fisica greca (il passo citato è tratto dal suo libro su questo argomento), ma evidentemente aveva pensato di poterlo fare senza leggere le opere di Archimede.

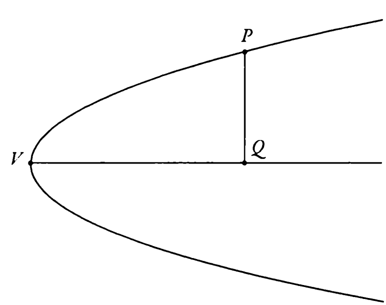
15. Nei *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze* (in Galilei, *Le opere di Galileo Galilei*, cit., vol. VIII, 1898, p. 181) Galileo cita e usa un lemma dell'opera di Archimede.

6
Alcune nozioni prearchimedee

Raccogliamo in questo breve capitolo alcuni risultati di teoria delle coniche, riguardanti in particolare la parabola, che Archimede usa senza dimostrarli, considerandoli noti al lettore. Poiché sull'argomento non ci sono rimaste opere precedenti Archimede, nelle dimostrazioni seguiremo spesso quelle contenute nel successivo trattato di Apollonio di Perga[1]. (Anche il nome "parabola", usato qui perché oggi familiare, è in realtà un anacronismo, poiché fu introdotto da Apollonio, mentre Archimede usava il termine *orthòtome*.)

La proprietà caratteristica della parabola

Indichiamo con V il vertice di una parabola, ossia l'intersezione della parabola con il suo asse di simmetria. Dato un generico punto P della parabola, sia Q la sua proiezione ortogonale sull'asse. Il segmento PQ è detto ordinata del punto P e il segmento VQ la sua ascissa.



1. Il trattato di Apollonio è diviso in otto libri, dei quali i primi quattro (conservati in greco) non contengono, a detta dello stesso Apollonio, risultati nuovi, ma solo un'esposizione della teoria ai suoi tempi già consolidata. È perciò verosimile che Archimede conoscesse i pochi risultati esposti in questo capitolo in una forma simile a quella trasmessa da Apollonio.

Poiché l'uso dei termini "ascissa" e "ordinata" può apparire un anacronismo a chi è abituato ad associarli alla geometria detta "cartesiana", è opportuna una breve parentesi terminologica.

Il termine latino *abscissa* (dal quale deriva la nostra ascissa) significa "tagliata" e fu introdotto in geometria per tradurre i termini greci, con lo stesso significato, ἡ ἀποτεμνομένη o ἡ ἀπολαμβανομένη, che Apollonio di Perga aveva usato nel significato attuale di ascissa, in genere specificando da che cosa era stato tagliato il segmento. Analogamente il termine "ordinata" fu introdotto per tradurre l'espressione τεταγμένως καταγομένη (ossia "tracciata ordinatamente"), che Apollonio aveva usato nel significato attuale di ordinata. Vi sono naturalmente importanti differenze tra l'antica terminologia e quella moderna: la terminologia antica non solo era meno rigida, ma soprattutto non poteva esprimere l'idea dei nostri *assi cartesiani* tracciati in un piano vuoto, privo di figure geometriche. Quando Apollonio usa i termini che traduciamo con "ascissa" e "ordinata" lo fa sempre in riferimento ad assi adattati alla particolare figura che sta studiando, come sarà chiaro dall'uso che faremo di questi termini nel caso della parabola.

La *proprietà caratteristica della parabola* (nota già prima di Archimede) può essere enunciata con la proposizione seguente:

> I quadrati costruiti sulle ordinate di due punti della parabola stanno nello stesso rapporto delle ascisse di quei punti.

Modernizzando leggermente il linguaggio, possiamo dire che il rapporto PQ^2/VQ è costante, non dipende cioè dalla scelta del punto P.

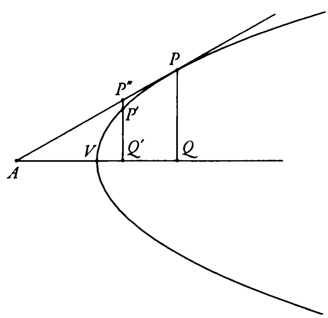
Spesso si pensa che nell'antichità, non esistendo la geometria analitica, non si conoscesse l'equazione di una parabola: $y = kx^2$. In realtà la proprietà caratteristica della parabola è del tutto equivalente all'equazione precedente. La differenza tra il linguaggio moderno e quello antico consiste essenzialmente nel rovesciamento dei rapporti tra l'aspetto geometrico e quello numerico. Mentre i moderni considerano essenziale il concetto di funzione e vedono la parabola come il grafico della funzione $y = kx^2$, per i matematici ellenistici era essenziale il concetto di curva e la relazione che noi esprimiamo con la formula $y = kx^2$ era considerata una proprietà caratteristica della curva detta parabola. La parabola non era però definita da tale relazione, ma come la curva ottenuta tagliando una superficie conica con un piano parallelo a una delle generatrici del cono[2]. La proprietà caratteristica andava quindi dimostrata (come fa in particolare Apollonio). Ometteremo tale dimostrazione, proprio perché oggi siamo abituati a definire la parabola attraverso la sua equazione, ovvero la sua proprietà caratteristica.

Tangente a una parabola in un punto

Né Archimede né Apollonio definiscono mai esplicitamente la tangente[3]. È però chiaro che per tangente a una parabola intendono una retta che ha un solo punto in comune con la parabola e che non la tagli (cioè tale che uno dei due semipiani in cui divide il piano contenga tutti gli altri punti della parabola). Allo stesso modo si possono intendere le tangenti a tutte le altre curve studiate da Archimede, purché nel caso dell'iperbole si consideri un solo ramo alla volta e in quello della spirale un solo giro alla volta.

Sia P un punto generico di una parabola e Q la sua proiezione ortogonale sull'asse della parabola. Archimede conosce e usa il seguente teorema:

> Se sull'asse, dalla parte opposta, rispetto al vertice V, a quella sulla quale è Q, si considera il punto A, tale che $AV = VQ$, allora la retta AP è tangente alla parabola.



2. In realtà all'epoca di Archimede si considerava solo un cono circolare retto (ossia la superficie generata dai lati di un angolo retto che ruota intorno alla sua bisettrice). Tagliando tale cono con un piano ortogonale a una generatrice si otteneva una parabola (*orthòtome* nel linguaggio di Archimede), mentre con piani inclinati diversamente si ottenevano le altre due coniche (ellissi e iperbole, nel linguaggio introdotto da Apollonio). Fu Apollonio a scoprire che tagliando coni di qualsiasi ampiezza si ottenevano le stesse curve.
3. Euclide aveva definito le tangenti a una circonferenza come le rette che hanno un solo punto in comune con la circonferenza. La stessa definizione può essere usata per le tangenti a un'ellisse, ma non per le altre coniche.

Per dimostrare il teorema, seguendo il procedimento usato da Apollonio, basta provare che se P' è un punto della parabola diverso da P, Q' la sua proiezione ortogonale sull'asse e P'' l'intersezione della retta $P'Q'$ con la retta AP, si ha:

$$P''Q' > P'Q', \text{ o equivalentemente: } P''Q'^2 > P'Q'^2.$$

È evidentemente: $P''Q' = AQ' \cdot PQ/AQ$ e, per la proprietà caratteristica della parabola:

$$P'Q'^2 = PQ^2 \cdot VQ'/VQ.$$

La diseguaglianza che dobbiamo dimostrare può quindi essere scritta:

$$AQ'^2 \cdot PQ^2/AQ^2 > PQ^2 \cdot VQ'/VQ,$$

ossia:

$$AQ'^2/AQ^2 > VQ'/VQ.$$

Ricordando che $AQ = 2VQ$, la diseguaglianza da dimostrare diviene:

$$(AQ'/2)^2 > AV \cdot VQ'.$$

L'ultima diseguaglianza è in effetti ben nota. Dividendo infatti un segmento AQ' in due parti con un generico punto V, il prodotto delle due parti è massimo quando il punto V divide il segmento in due parti uguali (in altri termini fra tutti i rettangoli con lo stesso perimetro quello con l'area massima è il quadrato). Nel linguaggio algebrico, oggi più familiare[4], lo si può verificare notando che, detta m la metà del segmento, il prodotto delle due parti diseguali vale $(m + a)(m - a)$, che essendo uguale a $m^2 - a^2$, è certamente minore di m^2.

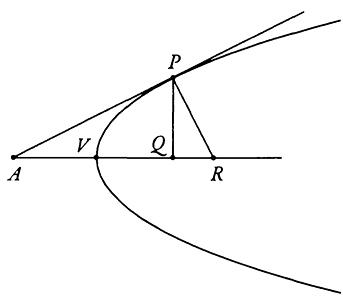
Apollonio dimostra anche la proposizione inversa: se P è un punto di una parabola di vertice V, A è un punto dell'asse della parabola e la retta AP è tangente alla parabola, allora $AV = VQ$, dove Q è la proiezione orto-

4. Una versione geometrica dell'identità $(m + a)(m - a) = m^2 - a^2$ è in Euclide, *Elementi*, II, 5.

gonale di P sull'asse. Ne segue immediatamente l'unicità della tangente a una parabola in un suo punto.

Costanza della sottonormale

Data una parabola, consideriamo, oltre ai punti V, P, Q e A già definiti, il punto R, intersezione dell'asse con l'ortogonale alla parabola (ossia alla sua tangente) nel punto P. Il segmento QR ha allora lunghezza costante (che diremo sottonormale della parabola): non dipende cioè dalla scelta del punto P.



La dimostrazione è un semplice corollario delle proposizioni precedenti.

Poiché il triangolo APR è rettangolo in P, PQ è medio proporzionale tra AQ e QR. È cioè:

$$PQ^2 = AQ \cdot QR, \quad QR = PQ^2/AQ = (1/2)\, PQ^2/VQ.$$

QR è quindi costante per la proprietà caratteristica della parabola. Indicheremo tale costante con la lettera p.

La proprietà caratteristica della parabola può allora essere scritta:

$$PQ^2/VQ = 2p \quad (1)$$

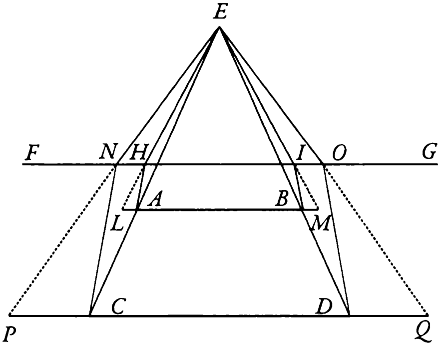
Se la parabola è introdotta come intersezione di una superficie conica con un piano parallelo a una delle generatrici, la grandezza p (detta anche "parametro" della parabola) assume il significato geometrico di distanza tra il vertice della parabola e quello del cono. Non dimostreremo questa proprietà.

7
Ottica e astronomia

Alcuni risultati di ottica

Archimede aveva scritto una *Catottrica* perduta. Nonostante il termine "catottrica" (κατοπτρικά) venga usualmente riferito al solo studio dei fenomeni di riflessione, ossia alla "scienza degli specchi", l'opera di Archimede si occupava anche dei fenomeni di rifrazione. Proprio alla rifrazione si riferisce, infatti, l'unico frammento dell'opera che si è conservato perché riferito da Teone di Alessandria (il padre di Ipazia) nel suo commento all'*Almagesto*. Vale la pena riportarlo per intero:

> come ha dimostrato anche Archimede nella *Catottrica*. [Archimede] dice: «... proprio come le cose poste nell'acqua appaiono più grandi e tanto più grandi quanto più sono a fondo. Siano infatti *AB* e *CD* due grandezze diverse viste in aria pura sotto lo stesso angolo *CED*, essendo naturalmente l'occhio in *E*. È allora chiaro che *AB* e *CD*, essendo viste sotto lo stesso angolo, appariranno uguali. Siano ora poste sott'acqua, e la superficie dell'acqua sia *FG*.



> Consideriamo ora i raggi [visuali] *EH* e *EI* che cadono sulla superficie dell'acqua e si spezzano proseguendo verso *A* e *B* lungo le spezzate *EHA* e *EIB*, come afferma

> Archimede nella *Catottrica* già citata. Poiché la visione avviene guardando lungo linee rette, i raggi *EH* e *EI* siano prolungati lungo linee rette fino a *L* e *M*; e sia prolungata anche *AB* da entrambi i lati fino a *L* e *M*.
>
> La grandezza *AB* produrrà un'immagine che sarà vista uguale a *LM*, essendo sotto l'angolo visuale *LEM*. È quindi evidente che la grandezza *AB* apparirà più grande quando è nell'acqua. Cadano [sulla superficie dell'acqua] altri raggi, *EN* e *EO*, che si spezzano proseguendo lungo *NC* e *OD*, racchiudendo così la grandezza *CD*. Siano ora prolungati *EN* e *EO* in linea retta tracciando *NP* e *OQ* e sia prolungata anche *CD* da entrambi i lati fino a *P* e *Q*. La grandezza *CD* sarà allora vista come *PQ*, apparendo più grande. Le grandezze *AB* e *CD*, dunque, essendo diverse e apparendo uguali in aria pura, appaiono diverse in acqua, e la seconda maggiore, poiché è vista sotto un angolo maggiore»[1].

L'interesse di Archimede per la rifrazione è ricordato anche da Olimpiodoro:

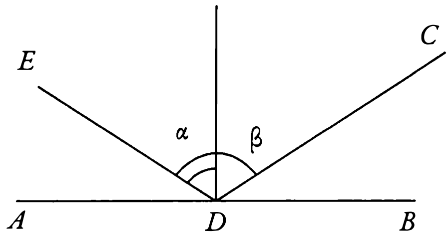
> D'altra parte anche Archimede dimostra la stessa cosa, cioè che il raggio visuale si spezza, ponendo un anello in un vaso. Se infatti poni l'anello nel vaso senza acqua non sarà visibile perché schermato dal corpo del vaso; ma se versi acqua l'anello apparirà, perché lo sguardo, cadendo sull'acqua come in uno specchio si volgerà verso l'anello per rifrazione. Si dimostra così che il raggio visuale si spezza. Occupiamoci ora della differenza tra riflessione e rifrazione[2].

Il breve brano di Archimede trasmesso da Teone (rigoroso ma qualitativo: dimostra solo che l'ingrandimento cresce con la profondità ma non indaga *di quanto* cresce) e la testimonianza di Olimpiodoro lasciano la curiosità di capire fino a che punto fosse proseguita l'indagine di Archimede sui fenomeni di rifrazione. Vorremmo sapere, in particolare, se avesse toccato l'argomento delle lenti (che ritrovamenti archeologici hanno dimostrato essere presenti in Grecia sin dalla lontana età del bronzo)[3].

Un risultato di ottica di carattere teorico è riferito da uno scolio anonimo alla *Catottrica* attribuita a Euclide; è ragionevole pensare che fosse contenuto anch'esso nella *Catottrica* di Archimede. Riportiamo lo scolio, che si riferisce alla figura, dove *AB* è uno specchio piano, *EDC* è un raggio di luce riflesso dallo specchio e l'occhio posto in *C* osserva un oggetto in *E*.

1. Teone di Alessandria, *Comm. in Ptolemaei Syntaxin mathematicam*, 348. 1-349, 18 (ed. Rome).
2. Olimpiodoro, *In Aristotelis Meteora Commentaria*, 211, 18-24.
3. Cfr. ad esempio G. Sines, Y. A. Sakellarakis, *Lenses in Antiquity*, in "American Journal of Archaeology", 91, 1987, pp. 191-6.

Archimede dice che l'angolo α è o uguale all'angolo β o minore o maggiore. Sia dapprima α maggiore di β; β è allora minore. Supponiamo ora inversamente che l'occhio sia in E e il raggio sia riflesso dall'occhio verso l'oggetto osservato in C. L'angolo β è allora maggiore di α. Ma era minore: abbiamo un assurdo [abbiamo così dimostrato che deve essere $\alpha = \beta$][4].



Lo scolio mostra che Archimede aveva dedotto la legge della riflessione dal principio di reversibilità del cammino ottico, ossia dal principio che, se la luce percorre un certo cammino, può percorrerlo anche in senso inverso. Ancor più della deduzione ci interessa il principio.

Quanto agli altri argomenti trattati nell'opera di Archimede, abbiamo una preziosa testimonianza di Apuleio:

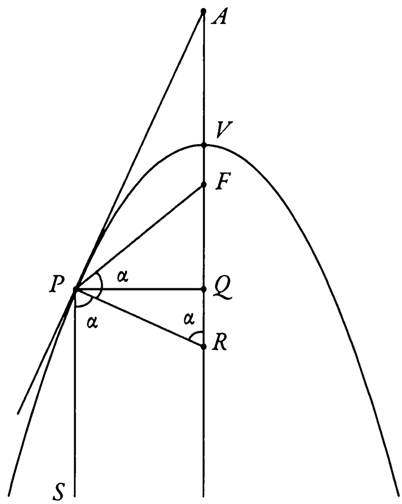
> Non pare a voi che la filosofia debba proporsi tutti questi problemi e investigarli e guardare tutti gli specchi, liquidi e solidi? E al filosofo, oltre le questioni di cui si è parlato, è necessario anche considerare perché appunto negli specchi piani appare quasi del tutto uguale l'immagine di chi si specchia, in quelli convessi e sferici tutto appare rimpicciolito e nei concavi invece ingrandito; e inoltre dove e perché si scambiano la sinistra con la destra, e quando l'immagine nello stesso specchio resta a volte nascosta all'interno, a volte si manifesta all'esterno; perché gli specchi concavi, se sono collocati di fronte al Sole, accendono gli oggetti infiammabili messi loro davanti; perché mai si vede un arco di diversi colori tra le nubi e due soli di apparenza simile; e vi sono moltissimi altri fenomeni dello stesso genere, che tratta in un grande volume Archimede siracusano: uomo certamente in ogni scienza geometrica sopra tutti meraviglioso per acutezza, ma per questo forse massimamente memorabile, per aver saputo indagare bene e molte volte nello specchio[5].

4. Scolio alla *Catottrica* attribuita a Euclide, in *Euclidis Opera Omnia*, ed. by J. L. Heiberg, vol. 7, 348, scolio 7.

5. Apuleio, *Apologia*, xvi.

La teoria degli specchi ustori

Secondo Apuleio, Archimede, nella sua *Catottrica*, si era quindi occupato, tra l'altro, del fenomeno dell'arcobaleno e di «specchi concavi» che, «collocati di fronte al Sole, accendono gli oggetti infiammabili messi loro davanti». La teoria degli specchi ustori (ossia, essenzialmente, la proprietà focale della parabola) è esposta in un'opera di Diocle, che ci è rimasta in traduzione araba[6]. Riportiamone il risultato principale.



La superficie descritta da una parabola ruotando intorno al suo asse è detta paraboloide di rotazione. Asse e vertice della parabola (che rimangono fissi durante la rotazione) sono detti anche asse e vertice del paraboloide. Consideriamo uno specchio concavo a forma di paraboloide di rotazione con vertice V e dimostriamo che tutti i raggi che arrivano allo specchio dalla direzione del suo asse vengono riflessi nello stesso punto. Supponiamo che il raggio SP, parallelo all'asse, colpisca il paraboloide nel punto P. Sia Q la proiezione ortogonale di P sull'asse e consideriamo la parabola intersezione del paraboloide con il piano VPQ. La tangente alla parabola nel punto P è la retta PA, dove A è il punto dell'asse, al di là di V, tale che $AV = VQ$ (cfr. *supra*, pp. 77-8).

6. In *Les catoptriciens grecs*, t. I: *Les miroirs ardents*, texte établi, traduit et commenté par R. Rashed, Les Belles Lettres, Paris 2002, pp. 98-141.

Sia *R* l'intersezione con l'asse della retta (giacente nel piano *VPQ*) passante per *P* e ortogonale a *PA*. Per le leggi della riflessione, il raggio *SP* sarà riflesso, nello stesso piano, nella direzione *PF*, tale che l'angolo *SPR* sia uguale all'angolo *RPF*. Diciamo α tale angolo. Anche l'angolo *PRF*, alterno interno a *SPR*, vale allora α e il triangolo *PFR* è pertanto isoscele. È quindi $PF = FR$. D'altra parte anche gli angoli *PAF* e *APF* sono uguali, poiché sono entrambi complementari di α. È quindi $AF = PF = FR$. *F* è quindi il punto medio di *AR*. Poiché *QR* non è altro che la sottonormale *p* della parabola (cfr. *supra*, p. 79), abbiamo:

$$AF = (1/2)AR = (1/2)(2AV+p) = AV + (1/2)p; \quad VF = (1/2)p.$$

La posizione di *F* non dipende quindi dal punto *P* in cui il raggio colpisce il paraboloide. Tutti i raggi paralleli all'asse saranno quindi riflessi in *F*. Se i raggi sono quelli del Sole, nel punto *F* si raggiungerà una temperatura così elevata da bruciare oggetti combustibili. Per questo motivo il punto *F* è detto "fuoco" della parabola e del paraboloide.

Ho riportato questa dimostrazione perché vari indizi mi fanno sospettare che fosse inclusa nella *Catottrica* di Archimede (ma è solo una mia congettura; Rashed pensa che Archimede non si sia mai occupato di specchi ustori)[7]. Innanzitutto possiamo considerare certa l'esistenza della *Catottrica* di Archimede, citata da Apuleio, da Teone e (implicitamente) da Olimpiodoro. Ricordiamo poi che all'inizio dell'opera di Diocle si afferma che specchi ustori erano stati costruiti da Dositeo, che era il corrispondente alessandrino di Archimede (dal passo di Diocle non è chiaro se ne avesse anche elaborato pienamente la teoria). Archimede era quindi certamente a conoscenza dell'argomento. Se combiniamo queste informazioni con il continuo interesse di Archimede per parabole e paraboloidi (non solo studia la parabola nella *Quadratura della parabola* e i paraboloidi nell'opera *Sui conoidi e gli sferoidi*, ma nel trattato *Sui galleggianti*, come vedremo, considera proprio un galleggiante a forma di paraboloide), appare del tutto plausibile che in un grande volume sugli specchi avesse trattato anche quelli di forma parabolica. Inoltre la lunga tradizione che attribuisce ad Archimede l'invenzione degli specchi ustori non può essere, a mio parere, totalmente ignorata. L'episodio delle navi romane bruciate

7. *Les miroirs ardents*, cit., pp. 317-20.

con tali specchi deve essere considerato leggendario, più che per la difficoltà di realizzare tali armi[8], per la tarda origine della tradizione (cfr. *supra*, pp. 31-2). Le leggende difficilmente nascono però dal nulla e, mentre vi sono ottimi motivi per non credere al loro uso bellico, la possibilità che Archimede avesse progettato specchi ustori come puro esercizio teorico oppure a scopi del tutto pacifici (come surrogato del fuoco, utile soprattutto in un paese come l'Egitto, ricco di sole e povero di combustibili), non può essere esclusa. Se la teoria degli specchi ustori fosse stata esposta nella *Catottrica*, l'origine della leggenda potrebbe essere spiegata in modo naturale come effetto della contaminazione di questa trattazione teorica con il ricordo del contributo di Archimede alla progettazione di armi da getto con cui lanciare sostanze incendiarie. Alla luce di queste considerazioni mi sembra che sia molto arduo respingere come inattendibile l'esplicita testimonianza di Apuleio.

La congettura che nella *Catottrica* di Archimede fosse esposta la teoria degli specchi ustori incontra un solo forte ostacolo: Diocle, esponendo tale teoria, cita Dositeo, ma non Archimede. Consideriamo però la natura dell'opera di Diocle (nota solo in una traduzione araba, ma già citata da Antemio di Tralle nel primo periodo bizantino). Vi si trattano sei diversi argomenti senza alcun legame tra loro, passando bruscamente da un tema all'altro (quello degli specchi ustori, che fornisce il titolo, è il primo) e cambiando anche la terminologia (le coniche, in particolare, sono indicate con i termini introdotti da Apollonio solo nella proposizione 8, mentre altrove si usa la terminologia precedente, usata anche da Archimede). Si tratta quindi, almeno nella versione che ci è giunta, di una miscellanea tratta da fonti diverse, che non sono mai indicate. Non mi sembra quindi che si possa escludere la possibilità che sul tema degli specchi ustori la fonte fosse proprio Archimede. Se poi quella sezione fosse semplicemente la trascrizione di un brano della sua *Catottrica*, l'assenza del nome di Archimede avrebbe un'ovvia spiegazione.

Un'applicazione del principio di reversibilità del cammino ottico (noto,

8. Molti hanno considerato impossibile la realizzazione di specchi parabolici così grandi da avere le navi nemiche nel proprio fuoco. Bonaventura Cavalieri nello *Specchio ustorio* (1632) propone una possibile soluzione del problema: si sarebbero potuti usare due specchi parabolici con fuochi coincidenti: uno, più grande, con la funzione di concentrare i raggi del Sole e il secondo come riflettore, per inviare verso le navi i raggi concentrati dal primo (il primo avrebbe dovuto essere forato per lasciare spazio al secondo).

come abbiamo visto, ad Archimede) mostra che uno specchio a forma di paraboloide di rotazione può essere usato sia come specchio ustorio, orientando il suo asse verso il Sole, sia come riflettore, ponendo una sorgente di luce nel suo fuoco. Poiché sappiamo che in epoca ellenistica era nota la teoria degli specchi ustori, è difficile dubitare che non fosse altrettanto nota la possibilità di costruire riflettori parabolici; la plausibilità del loro uso nel faro di Alessandria viene così rafforzata. Si può immaginare che proprio da questa applicazione fosse venuta l'idea generale del principio di reversibilità del cammino ottico.

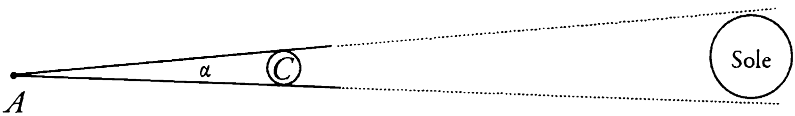
La misura del diametro apparente del Sole

Nell'*Arenario* Archimede descrive un metodo per stimare il diametro apparente del Sole (ossia l'angolo sotto cui è visto un diametro solare). Questa descrizione ha sempre destato grande interesse come una delle rare testimonianze di uso del metodo sperimentale nell'antichità.

Archimede inizia notando che gli strumenti disponibili non permettono di determinare un valore accurato di tale angolo. È però possibile, con il sistema da lui progettato, averne attendibili stime dal basso e dall'alto. Questo è un punto di grande importanza: perché le misure abbiano valore scientifico non è necessario che siano molto accurate, ma che si sappia stimarne l'errore, determinando in modo attendibile un intervallo in cui è contenuta la grandezza considerata. Questa idea, chiara in epoca ellenistica, fu recuperata dalla scienza moderna solo dopo secoli di sviluppo[9].

9. Ricordiamo, ad esempio, che Galileo trova un metodo molto ingegnoso per misurare la densità dell'aria (*Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze*, in Id., *Le opere di Galileo Galilei. Edizione nazionale sotto gli auspici di sua maestà il Re d'Italia*, Barbera, Firenze 1890-1907, vol. VIII, 1898, pp. 123-4) giungendo alla conclusione che il rapporto tra la densità dell'acqua e quella dell'aria sia "circa quattrocento". La scarsa accuratezza del valore ottenuto (che è poco più della metà di quello reale) è addebitabile alla tecnologia dell'epoca, che non permetteva di fare di meglio, ma va sottolineato che l'obiettivo di Galileo (come nelle altre misure da lui effettuate) era stato quello di determinare il valore di tale rapporto e non un intervallo in cui fosse contenuto con ragionevole certezza; un obiettivo che evidenzia un limite culturale (anch'esso non personale, ma dell'epoca di Galileo). Keplero fa molto peggio quando crede di sapere con esattezza, su basi aprioristiche, il volume dell'intero universo che, misurato in cubi del diametro solare, sarebbe 64.000.000.008.000.000.001 (*sic!*) (J. Keplero, *Epitome astronomiae copernica-*

Il semplice strumento usato da Archimede consiste in un regolo, fissato su un supporto verticale, sul quale può scorrere un cilindretto C. Al sorgere del Sole (quando è possibile osservarlo senza troppi danni) si punta il regolo verso il Sole e si fa scorrere il cilindretto finché copra del tutto il disco solare. L'angolo α sotto il quale il cilindretto in tale posizione è visto dall'estremità del regolo può essere misurato con cura ed è certamente maggiore del diametro apparente del Sole, che indichiamo con δ.

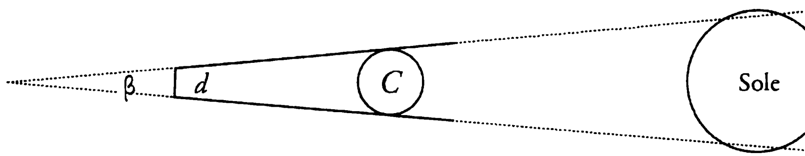


Archimede ottiene per α un valore che approssima per eccesso con 1/164 di un angolo retto, ossia, nelle nostre notazioni 32′ 56″.

Per ottenere una stima dal basso di δ può sembrare che basti ripetere l'operazione precedente spostando il cilindretto in una posizione tale che lasci trapelare da ambedue i lati parte della luce del Sole. Archimede si rende però conto che il procedimento non sarebbe corretto, perché la pupilla non è puntiforme, ma ha un diametro che non può essere trascurato. Possiamo infatti osservare la luce del Sole ai due lati del cilindretto anche se l'angolo sotto cui il cilindretto è visto dal centro della pupilla è maggiore del diametro apparente del Sole, proprio perché i raggi del Sole possono giungere attraverso le zone laterali della pupilla. (Questa considerazione aveva potuto essere trascurata nella stima per eccesso di δ, poiché non fa che rafforzare la diseguaglianza ottenuta.) Per avere quindi un'approssimazione per difetto di δ occorre preliminarmente una stima del diametro della pupilla. Archimede usa questo metodo: prende due cilindretti dello stesso spessore, uno bianco e l'altro colorato, e li accosta tra loro e all'occhio, in modo che il cilindro bianco sia dietro quello colorato, che è posto a contatto con l'occhio. Se in queste condizioni il cilindro bianco è in parte visibile, certamente lo spessore dei cilindri è inferiore al diametro della pupilla; se invece il cilindro bianco è del tutto invisibile, lo spessore dei cilindretti supera il diametro della pupilla. Provando con cilindretti di diverso spessore si può trovare un diametro d che approssimi dall'alto quello della pupilla.

nae, in Id., *Opera Omnia*, ed. Ch. Frisch, Heyder & Zimmer, Francofurti a. M.-Erlangae 1866, vol. VI, p. 334).

Dopo quest'operazione preliminare, si usa lo strumento precedente puntandolo verso il Sole e avvicinando il cilindretto all'occhio finché comincia ad apparire il Sole da entrambi i lati del cilindro. Fissato il cilindro in tale posizione, si pone un dischetto di diametro *d* dove era l'occhio. Le rette tangenti al dischetto e al cilindretto racchiudono un angolo β, che è certamente minore del diametro apparente del Sole.



Archimede trova per β la stima 1/200 di angolo retto, che nelle nostre notazioni corrisponde a un angolo di 27'. In definitiva il diametro apparente del Sole, δ, è stimato con le diseguaglianze

$$27' < \delta < 32' 56''$$

La stima di Archimede è corretta, in quanto il diametro apparente del Sole varia, nel corso dell'anno, da un minimo di circa 31' 28" a un massimo di circa 32' 32".

Archimede non accenna alle dilatazioni della pupilla e non sappiamo se avesse usato l'accorgimento di esporre l'occhio alla stessa luce nelle due fasi dell'esperimento.

La testimonianza di Archimede sull'eliocentrismo

Il massimo astronomo dell'antichità, Ipparco (attivo nel II secolo a.C.), in un passo trasmesso da Tolomeo, afferma che l'errore commesso da lui stesso e da Archimede nell'identificare il momento del solstizio poteva arrivare a un quarto di giorno[10]. Questa testimonianza prova che Archimede si era occupato di astronomia in opere che non si sono conservate. Tra quelle che possiamo leggere solo l'*Arenario* affronta argomenti astronomici. Oltre alla misura esposta nel paragrafo precedente, l'opera contiene una

10. Tolomeo, *Almagesto*, 195, 1-3 (ed. Heiberg).

delle principali testimonianze sull'eliocentrismo introdotto da Aristarco di Samo. Archimede, rivolgendosi al sovrano di Siracusa Gelone II[11], gli espone in linguaggio semplice le novità introdotte da Aristarco. Dopo avere ricordato le nozioni tradizionali sulle dimensioni del cosmo, scrive:

> Aristarco di Samo ha però pubblicato opere basate su assunzioni[12] dalle quali si desumono dimensioni del cosmo molto più grandi di quelle che abbiamo detto. Egli assume infatti che le stelle fisse e il Sole siano immobili, mentre la Terra ruota intorno al Sole percorrendo una circonferenza di cui il Sole occupa il centro; e che la sfera delle stelle fisse, anch'essa con il centro nel Sole, abbia una grandezza tale che la circonferenza lungo la quale la Terra è assunta ruotare sia, rispetto alla distanza dalle stelle fisse, nello stesso rapporto in cui il centro della sfera sta alla sua superficie[13].

Archimede, in questo brano, omette alcuni elementi essenziali del sistema di Aristarco: non accenna infatti né alla rotazione diurna della Terra né al moto di rivoluzione intorno al Sole degli altri pianeti. La rotazione diurna della Terra è però implicita nell'affermazione che le stelle fisse sono immobili. Quanto alle rivoluzioni dei pianeti, Aristarco le aveva evidentemente assunte, poiché il vantaggio del suo sistema consisteva proprio nello spiegare in modo semplice stazioni e retrogradazioni planetarie. Il complesso moto dei pianeti osservabile dalla Terra corrisponde, infatti, con buona approssimazione, a quello ottenuto combinando il moto circolare uniforme del pianeta intorno al Sole con quello, anch'esso circolare uniforme, della Terra da cui viene osservato[14].

Ad Aristarco era stato obiettato che se la Terra ruotasse intorno al Sole dovremmo osservare effetti di parallasse sulle stelle fisse: in altre parole le costellazioni dovrebbero apparire diverse quando nel corso dell'anno, a causa della rivoluzione della Terra, le osserviamo da diversi punti di vi-

11. Sappiamo poco di questo sovrano. Sembra che sia stato associato al trono dal padre Gerone II, che gli sopravvisse.

12. Traduco "assunzione" il termine greco ὑπόθεσις usato da Archimede, che è usualmente tradotto con la parola "ipotesi" che ne è stata derivata. Il nostro termine "ipotesi" ha infatti un significato molto diverso dall'originale termine greco, che significava "base, fondamento". In riferimento a teorie scientifiche il termine assumeva il significato di "principio, postulato, assunzione", sul quale era basata la teoria.

13. Archimede, *Arenario*, 135, 8-19 (ed. Mugler).

14. La natura *apparente* delle retrogradazioni planetarie in un sistema eliocentrico è riferita, tra gli altri, da Seneca (*Naturales quaestiones*, VII, XXV, 6-7).

sta. Aristarco aveva risposto ipotizzando un universo molto più grande di quelli concepiti fino ad allora: a suo parere è impossibile vedere alcun effetto di parallasse perché le distanze percorse dalla Terra nel suo moto annuo sono del tutto trascurabili rispetto alla distanza dalle stelle. Aristarco non si era però limitato ad affermare che una distanza fosse trascurabile in pratica rispetto all'altra, ma aveva assunto che il rapporto tra le due distanze fosse nullo, come quello tra un punto e una superficie. Egli si esprime del resto in termini analoghi nella sua unica opera conservata, *Sulle grandezze e distanze del Sole e della Luna*, dove assume che la Terra sia un punto rispetto alla distanza Terra-Luna[15]. Sembra, in altri termini, che Aristarco pensasse a un modello matematico nel quale due lunghezze non nulle non dovessero avere necessariamente un rapporto, potendo esistere lunghezze infinitamente maggiori di altre. Questa possibilità, che probabilmente non era stata esclusa da Euclide[16], è respinta esplicitamente da Archimede[17], che infatti prosegue criticando l'assunzione di Aristarco: «Ciò è evidentemente assurdo: poiché infatti il centro della sfera non ha alcuna grandezza, bisogna ammettere che non abbia alcun rapporto con la superficie della sfera».

È evidente che Archimede assume tacitamente che due distanze (quali quelle tra la Terra e il Sole e tra il Sole e le stelle) debbano avere sempre un rapporto. Nel seguito Archimede escogita un'interpretazione della frase di Aristarco che la renda compatibile con i propri postulati, salvando l'idea fondamentale che il rapporto tra la distanza del Sole e quella delle stelle sia così piccola da non essere in alcun modo misurabile: il che naturalmente basta a giustificare l'assenza di effetti di parallasse.

Archimede accetta quindi nella sostanza la tesi di Aristarco, sulla quale basa la sua stima delle dimensioni dell'universo.

15. Aristarco di Samo, *De magnitudinis et distantiis solis et lunae*, proposizione 11.

16. Euclide afferma infatti che due grandezze hanno rapporto solo se esiste un multiplo della minore che supera la maggiore (*Elementi*, libro V, definizione 4), ma non postula che due grandezze omogenee abbiano sempre rapporto. La possibilità di due grandezze omogenee (non nulle e non infinite) senza rapporto è da lui ammessa esplicitamente nel caso degli angoli. Euclide considera infatti tra gli angoli anche quello formato da un arco di circonferenza con una sua tangente, che (come dimostra nella proposizione 16 del libro III degli *Elementi*) non ha alcun rapporto con gli angoli *rettilinei* (ossia con gli angoli nel senso moderno del termine).

17. Nel caso delle superfici lo vedremo a pagina 98. Nel caso di linee o solidi Archimede esclude questa possibilità nel postulato V dell'opera *Sulla sfera e sul cilindro*.

Il planetario

Tra le realizzazioni di Archimede una delle più ammirate nell'antichità fu il suo planetario. Si trattava di una macchina, da lui descritta nell'opera perduta *Sulla costruzione della sfera*, capace di riprodurre i moti della Luna, del Sole e dei pianeti. Dopo il saccheggio di Siracusa del 212 a.C., il comandante dei Romani, Marco Claudio Marcello, lo portò a casa come bottino di guerra personale. Nel 166 a.C. il nipote omonimo di Marco Claudio Marcello, che aveva ereditato il meccanismo dal nonno, fu eletto console insieme al collega Caio Sulpicio Gallo, che fu uno dei primi romani interessati all'astronomia. Qualche anno dopo Marcello mostrò il planetario, ancora funzionante, a Gallo, che ne fu molto colpito e ne lasciò una descrizione in parte riferita da Cicerone, che è la nostra migliore fonte sull'argomento. Cicerone scrive:

> E Filo: [...] mi ritorna alla mente C. Sulpicio Gallo, uomo fra i più dotti, come ben sapete. [...] Trovandosi egli per caso presso M. Marcello ch'era stato console con lui, ordinò che si portasse la sfera che il nonno di M. Marcello aveva tratto, dopo la presa di Siracusa, da quella città ricchissima e bellissima, sola preda ch'egli avesse voluto portare in patria.
>
> Di questa sfera di cui avevo tanto sentito parlare, data la gloria di Archimede, non rimasi a prima vista particolarmente ammirato; [...] ma non appena Gallo ebbe cominciato a spiegarci con la più profonda dottrina il funzionamento dell'opera, mi parve che in quel siciliano fosse un ingegno ben più alto d'ogni altro ingegno umano.
>
> [...] E in ciò per l'appunto era l'aspetto mirabile dell'invenzione di Archimede: egli aveva trovato il modo di riprodurre con un'unica rotazione i diversissimi moti degli astri e le loro varie orbite [*quod excogitasset quem ad modum in dissimillimis motibus inaequabiles et varios cursus servaret una conversio*]. Mentre Gallo faceva muovere questa sfera, si vedeva la Luna succedere al Sole a ogni giro come si vede in cielo e si verificava la stessa scomparsa del Sole dal cielo e lo stesso collocarsi della Luna nell'ombra della Terra non appena il Sole fosse dal lato opposto[18].

Cicerone loda lo straordinario ingegno di Archimede, che era riuscito a ricavare i moti tra loro diversi dei pianeti da un'unica rotazione. Questa osservazione suggerisce che il planetario di Archimede fosse basato sulla teoria eliocentrica di Aristarco. Infatti chi conosce tale teoria sa che i

18. Cicerone, *De re publica*, I, 21-22.

moti complessi e tra loro diversissimi dei pianeti rispetto alla Terra (che comprendono stazioni e retrogradazioni) possono essere ottenuti combinando i semplici moti dei pianeti rispetto al Sole con un solo altro moto, altrettanto semplice: quello del Sole rispetto alla Terra, ossia grazie a una sola *conversio*, come dice Cicerone.

Archimede nel suo planetario aveva usato questo sistema per riprodurre i moti dei pianeti? Una risposta positiva non solo è in accordo con la testimonianza di Cicerone, ma è anche avvalorata da altre considerazioni:

– è molto difficile riprodurre con un meccanismo i complessi moti dei pianeti rispetto alla Terra senza usare l'idea eliocentrica;
– come abbiamo visto nel paragrafo precedente, Archimede conosceva la teoria eliocentrica di Aristarco di Samo e l'aveva anche usata per dedurne una stima delle dimensioni dell'universo;
– il fatto che nella macchina di Anticitera tutte le ruote che riproducevano il moto dei vari pianeti fossero mosse da quella corrispondente al Sole[19] sembra conservare in parte quest'idea[20].

Oltre a risolvere il problema di riprodurre i moti dei cinque pianeti, del Sole e della Luna, Archimede progettò probabilmente anche il motore capace di muovere il meccanismo. Secondo la testimonianza di Sesto Empirico (intorno al 200 d.C.), infatti, il planetario si sarebbe mosso automaticamente:

> Gli apparecchi che si muovono automaticamente destano più meraviglia degli altri. Quando per esempio osserviamo una sfera archimedea, nella quale si muovono il Sole e la Luna e gli altri astri, siamo tanto sbalorditi non, per Giove, per gli oggetti né per il loro moto, ma per l'artefice e le cause del moto[21].

Un passo di Pappo (che abbiamo già citato a p. 56) dà un'indicazione su un tipo di motore usato dai costruttori di planetari: «Chiamiamo meccanici anche gli esperti di costruzione di planetari, che realizzano modelli

19. C. C. Carman, A. Thorndike, J. Evans, *On the Pin-and-Slot Device of the Antikythera Mechanism, with a New Application to the Superior Planets*, in "Journal for the History of Astronomy", XLIII, 2012, pp. 93-116.
20. La macchina di Anticitera, non essendo un planetario, ma un calcolatore che mostra solo la posizione angolare dei pianeti e non le loro orbite, non può però riprodurre il meccanismo che stiamo ipotizzando fosse presente nel planetario di Archimede.
21. Sesto Empirico, *Adversus mathematicos*, IX, 115.

del cielo mediante il moto continuo e circolare di acqua»[22]. Secondo Pappo, i planetari erano quindi mossi da un meccanismo idraulico.

L'ammirazione per il planetario di Archimede (testimoniata, tra i poeti, anche da Ovidio)[23] fu tale da suggerire a molti autori il paragone tra la riproduzione dei moti celesti effettuata dallo scienziato e l'opera divina che aveva creato i moti originali. Il confronto appare probabilmente per la prima volta in un passo di Cicerone:

> In realtà, quando Archimede racchiuse in una sfera i movimenti della Luna, del Sole e dei cinque pianeti, fece lo stesso di colui che nel *Timeo* edificò l'universo, il dio di Platone, cioè fece sì che da un'unica rotazione dipendessero movimenti molto diversi per lentezza e velocità. E se questo non può avvenire nel nostro universo senza la divinità, neanche nella sfera Archimede avrebbe potuto imitare i medesimi movimenti senza un'intelligenza divina[24].

L'argomento è ripreso nella tarda antichità, in tono scherzoso, in una gustosa poesia di Claudiano:

> Giove, scorgendo in un piccolo vetro il cielo, / sorrise e con tali parole si rivolse agli dei: / «Fino a questo punto è giunta la capacità dell'ingegno umano? / Ormai la mia fatica è schernita da una fragile sfera? / Le leggi del cielo, il patto della natura, le leggi degli dei, / ecco che un vecchio di Siracusa con la sua abilità li ha riprodotti. / Uno spirito all'interno è al servizio dei vari astri / e incalza un congegno che diventa vivo con movimenti determinati»[25].

Lo *spiritus* (termine latino usato per tradurre il greco *pneuma* in tutti i suoi significati) che, dall'interno del meccanismo, incalza il congegno, alla luce dei meccanismi mossi dal vapore descritti nella *Pneumatica* di Erone, può fare forse sospettare che in questo caso il motore, più che idraulico, fosse a vapore, ma naturalmente questa è solo una congettura.

Il confronto tra l'ingegno usato da Archimede nel costruire il planeta-

22. Pappo, *Collectio*, VIII, 1026, 3-4 (ed. Hultsch).
23. Ovidio, *Fasti*, VI, 277-280.
24. Cicerone, *Tusculanae disputationes*, I, XXV, 63.
25. *Iuppiter in parvo cum cerneret aethera vitro, / risit et ad superos talia dicta dedit: / «Hucine mortalis progressa potentia curae? / Iam meus in fragili luditur orbe labor? / Iura poli rerumque fidem legesque deorum / ecce Syracosius transtulit arte senex. / Inclusus variis famulatur spiritus astris / et vivum certis motibus urget opus»* (Claudiano, *Carmina minora*, 51, 1-8; la traduzione italiana è di M. L. Ricci).

rio e la sapienza divina era stato ripreso, con tutt'altro tono, in un contesto teologico cristiano, da Lattanzio (III-IV secolo), che ne aveva tratto una famosa prova dell'esistenza di un progetto razionale alla base della creazione: se ammiriamo tanto Archimede per l'ingegno con cui ha costruito il planetario, quanto più dobbiamo ammirare la divina sapienza che ha creato il vero sistema planetario?[26] L'argomento divenne un *topos*: appare, ad esempio, anche nella famosa opera di Marziano Capella (IV-V secolo), che costituì uno dei principali testi di studio nel Medioevo[27]. Quando dai planetari furono derivati gli orologi meccanici, lo stesso argomento continuò a essere ripetuto, sostituendo appunto gli orologi al planetario di Archimede e paragonando Dio a un orologiaio[28].

26. Lattanzio, *Divinae institutiones*, II, 5.

27. Marziano Capella, *De nuptiis Mercurii et Philologiae*, VI, 583-585.

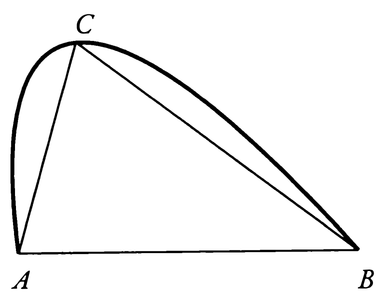
28. Una lunga lista di autori moderni che riprendono questo luogo comune (fino a Richard Dawkins, che lo ricorda per confutarlo nel suo libro *L'orologiaio cieco*, Mondadori, Milano 2003; ed. or. *The Blind Watchmaker*, Norton, New York 1986) è in https://it.wikipedia.org/wiki/Analogia_dell%27orologiaio (ultimo accesso ottobre 2019).

8
Metodi infinitesimali

Tra i risultati scientifici più rilevanti di Archimede vi sono quelli in cui impiega i metodi infinitesimali dal cui studio nacque l'analisi matematica moderna. In questo capitolo ci limiteremo a darne qualche esempio.

Un segmento di parabola e la somma di una serie

Il primo esempio è tratto dall'opera di Archimede *Quadratura della parabola*, nella quale viene considerato un "segmento di parabola", ossia la figura piana limitata da un arco di parabola (nella figura quello compreso tra i punti A e B) e dal segmento, detto "base" del segmento di parabola, che unisce i due estremi dell'arco (nella figura il segmento AB).



Il problema di Archimede è quello di calcolare l'area di questa figura e viene risolto confrontando il segmento di parabola con il triangolo ABC, dove C è il punto dell'arco di parabola, detto "vertice" del segmento di parabola (da non confondere con il vertice della parabola), che ha la massima distanza dalla base AB (ABC è evidentemente il massimo triangolo inscrivibile nel segmento di parabola).

Archimede dimostra che il rapporto tra le due figure[1] è 4/3:

> *Teorema*[2]. Se S è un segmento di parabola e A_1 è il massimo triangolo in esso inscritto, è:
> $S = (4/3)A_1$.

L'opera inizia enunciando il seguente postulato fondamentale (che Archimede stranamente chiama "lemma", λῆμμα):

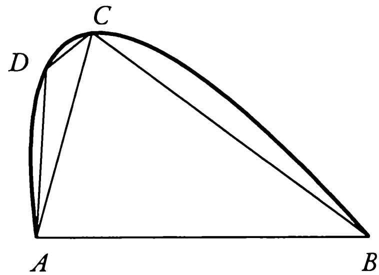
> *Postulato.* Se due superfici hanno diversa estensione, l'eccesso della maggiore sulla minore, se duplicato un numero sufficiente di volte, diviene maggiore di qualsiasi superficie prefissata[3].

Notiamo che il postulato implica che una superficie piana non possa essere infinitamente maggiore di un'altra. Archimede non considera superfici illimitate con area infinita, né pensa che l'estensione di una figura piana possa essere alterata aggiungendo o sottraendo punti o linee.

Il procedimento usato da Archimede per dimostrare il teorema è forse in qualche modo reminiscente del metodo di triangolazione che all'epoca si andava affermando in topografia e consiste nel ricoprire il segmento di parabola con infiniti triangoli.

Tracciando il massimo triangolo inscritto, ABC, il segmento di parabola viene diviso in tre parti: il triangolo stesso e due nuovi segmenti di parabola, in ciascuno dei quali si potrà inscrivere il triangolo massimo (ad esempio il triangolo ADC in figura); il procedimento può naturalmente essere iterato.

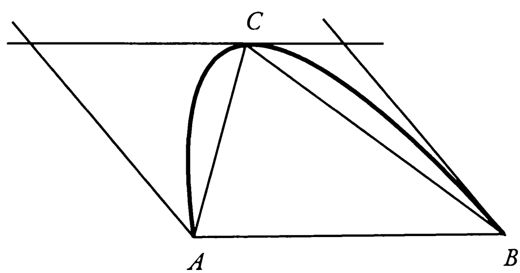
1. I matematici ellenistici consideravano sistematicamente rapporti tra figure. Oggi non siamo più abituati a questa terminologia e si preferisce in genere parlare di rapporti tra le aree delle figure. Si dimentica così che l'area di una figura non è altro che il rapporto tra tale figura e la figura assunta come unità di misura (nel caso piano, in genere un quadrato di lato unitario). Quest'uso moderno è un caso particolare di un fenomeno più generale: gli studenti di matematica vengono abituati a tradurre ogni problema in termini numerici, ignorando l'origine dei numeri considerati (che in genere è un conteggio nel caso di numeri naturali e una misura negli altri casi). Vengono così recisi i rapporti tra matematica e mondo reale.
2. Archimede, *Quadratura della parabola*, 165, 2-5; 193, 6-8 (ed. Mugler).
3. Archimede, *Quadratura della parabola*, 165, 6-9 (ed. Mugler). L'espressione greca che ho tradotto "duplicato" è *αὐτὰν ἑαυτᾷ συντιθεμέναν* (letteralmente "aggiunta a sé stessa"). Il postulato è equivalente all'affermazione secondo cui, se due superfici hanno diversa estensione, l'eccesso della maggiore sulla minore ha un rapporto con qualsiasi superficie prefissata (cfr. *supra*, p. 91, nota 16).



Un elemento essenziale della dimostrazione è fornito dalla proposizione seguente:

> *Proposizione 1.* Il massimo triangolo inscritto in un segmento di parabola è maggiore della metà del segmento di parabola[4].

Per dimostrare questa proposizione Archimede traccia la retta parallela alla base AB passante per il vertice C del segmento di parabola (tale retta è tangente alla parabola)[5] e le rette parallele all'asse della parabola passanti per A e per B.



Sia la tangente in C sia le rette parallele all'asse non hanno più di un punto in comune con la parabola: la tangente per definizione e le rette parallele all'asse per la proprietà caratteristica della parabola[6]. Ne segue che il

4. Archimede, *Quadratura della parabola*, 188, 12-15 (ed. Mugler).
5. Per la definizione di vertice di un segmento di parabola, nessun punto dell'arco di parabola può essere al di là della retta. Ciò implica che la retta è tangente (nel senso già specificato) alla parabola, se si assume (come fa implicitamente Archimede) che il segmento di retta che congiunge due punti, P e Q, di un arco di parabola sia interno al corrispondente segmento di parabola.
6. Se una retta parallela all'asse intersecasse una parabola in due punti distinti, P e Q, questi dovrebbero avere la stessa ascissa e due ordinate diverse, mentre la proprietà carat-

segmento di parabola è incluso in un parallelogramma che ha la stessa base e la stessa altezza del triangolo ABC. Il triangolo, pertanto, essendo metà del parallelogramma, è maggiore della metà del segmento di parabola.

La proposizione 1 implica che la parte del segmento di parabola non coperta da triangoli a ogni passo del processo iterativo diminuisce più che dimezzandosi. Usando il postulato[7], si ottiene allora il seguente corollario della proposizione precedente:

> *Corollario.* Data una qualsiasi superficie prefissata E, la parte del segmento di parabola non coperta da triangoli dopo un sufficiente numero di iterazioni diviene minore di E[8].

Un ingrediente tecnico essenziale è fornito dalla proposizione seguente:

> *Proposizione 2.* A ogni passo del procedimento iterativo i triangoli inscritti sono 1/8 dei triangoli inscritti nel passo precedente[9].

Ad esempio, il triangolo ADC in figura è 1/8 del triangolo ABC. Rimandiamo la dimostrazione di questa proposizione alle pagine 137-8, perché richiede conoscenze che non abbiamo ancora introdotto e nulla hanno a che vedere con l'argomento di questo capitolo.

Per arrivare al suo risultato principale Archimede deve dimostrare che la superficie totale degli infiniti triangoli tracciati con il suo procedimento è uguale a quella del segmento di parabola. Poiché a ogni passo del procedimento iterativo il numero dei triangoli aggiunti raddoppia, mentre la loro superficie è 1/8 di quella dei triangoli del passo precedente, la successione delle superfici totali dei triangoli aggiunti nei successivi passi, che indichiamo con A_1, A_2, A_3..., è formata da grandezze ciascuna quadrupla della successiva. Per tale successione vale quindi la proposizione seguente.

teristica della parabola implica che le ascisse dei suoi punti determinino univocamente le loro ordinate.

7. Ovviamente ogni superficie può essere pensata come differenza di due superfici di diversa estensione. Il postulato implica quindi che ogni superficie (ovviamente di area non nulla: Archimede non lo precisa, perché in caso contrario non la considererebbe una *superficie*), se duplicata un numero sufficiente di volte, supera ogni superficie data.

8. Archimede, *Quadratura della parabola*, 189, 7-10 (ed. Mugler).

9. Archimede, *Quadratura della parabola*, 189, 15-22 (ed. Mugler).

Proposizione 3. Se $A_1, A_2 \dots A_n$ sono una successione di grandezze ciascuna quadrupla della successiva, allora si ha:

$$A_1 + A_2 + \dots + A_n + (1/3)A_n = (4/3)A_1 \text{[10]}. \quad (*)$$

È interessante riportare la dimostrazione originale (solo modernizzata nelle notazioni)[11], che è molto semplice.

Poiché

$$A_2 + (1/3)A_2 = (4/3)A_2 = (1/3)A_1, A_3 + (1/3)A_3 = (4/3)A_3 = (1/3)A_2, \dots$$

si ha

$$A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_n + (1/3)A_2 + (1/3)\,A_3 + \dots + (1/3)A_n =$$
$$= A_1 + (1/3)A_1 + (1/3)A_2 + \dots + (1/3)A_{n-1},$$

da cui si ha subito la (*).

Abbiamo adesso tutti gli elementi necessari per dimostrare il teorema.

La (*) suggerisce chiaramente l'uguaglianza $S = (4/3)A_1$; se n è enorme, infatti, S differirà molto poco dalla somma $A_1 + A_2 + \dots A_n$ e questa somma, per la (*), poiché $(1/3)A_n$ è molto piccolo, non differirà sensibilmente da $(4/3)A_1$. Archimede si guarda bene, però, dall'usare argomenti così poco rigorosi e, senza preoccuparsi di spiegare come sia pervenuto al risultato, dimostra il teorema per assurdo.

Se non valesse l'uguaglianza, dovrebbe essere $S > (4/3)A_1$ oppure $S < (4/3)A_1$.

Supponiamo che sia $S > (4/3)A_1$. Diciamo allora E una superficie pari all'eccesso di S su $(4/3)A_1$. Poiché, per il corollario, dopo un sufficiente numero n di iterazioni, la parte del segmento di parabola non coperta da triangoli sarà minore di E, anche la superficie totale dei triangoli costruiti nelle prime n iterazioni dovrà superare $(4/3)A_1$, ma ciò è assurdo poiché l'eguaglianza (*) implica che la somma delle aree di tali triangoli è sempre minore di $(4/3)A_1$. Non può quindi essere $S > (4/3)A_1$.

10. Archimede, *Quadratura della parabola*, 192, 6-9 (ed. Mugler).

11. Qui e in casi analoghi, per comodità del lettore, ho leggermente aggiornato la notazione: all'epoca di Archimede non si usavano né gli indici sottoscritti né i puntini sospensivi. Archimede, dopo avere enunciato la proposizione in completa generalità (senza scrivere formule), nella dimostrazione considera esplicitamente il caso $A + B + C + D + (1/3)D$ e dimostra che è uguale a $(4/3)A$.

Supponiamo ora che sia $S < (4/3)A_1$. Allora, detto E l'eccesso di $(4/3)A_1$ su S, per n sufficientemente grande è $(1/3)A_n < E$. Allora dalla (*) si ha che è anche:

$$S < A_1 + A_2 + \dots A_n.$$

L'ultima diseguaglianza è però assurda, perché la superficie totale dei triangoli costruiti nelle prime n iterazioni, essendo strettamente contenuta nel segmento di parabola, non può superarlo; ciò completa la dimostrazione del teorema.

Chiunque sappia cos'è la somma di una serie capisce che Archimede, per risolvere il suo problema di geometria, ha trovato, in modo del tutto rigoroso, la somma della serie geometrica di ragione 1/4. Non si tratta certo del primo uso del concetto di infinito in matematica (ricordiamo, come esempio, che Euclide aveva dimostrato l'infinità dei numeri primi), ma, tra le opere che ci sono rimaste, la *Quadratura della parabola* è la prima in cui si somma una serie infinita.

Per secoli gli storici della matematica hanno negato che i Greci avessero usato in matematica il concetto di infinito. Ad esempio, nell'ancora popolare *Storia della matematica* di Carl Boyer il procedimento di Archimede che abbiamo appena visto è così commentato: «Archimede non parla di somma della serie infinita, perché ai suoi tempi i processi non finiti venivano disapprovati»[12]. Morris Kline, parlando più in generale, esprime lo stesso concetto con un certo lirismo: «Nella scienza greca il concetto di infinità è poco capito e apertamente evitato. [...] Il concetto di un processo senza fine li atterriva ed essi [i Greci] si ritraevano dinanzi "al silenzio degli spazi infiniti"»[13].

Vale la pena confrontare esplicitamente il procedimento di Archimede con quelli della matematica moderna e indagare l'origine della strana opinione largamente condivisa per secoli, di cui abbiamo appena visto due esempi.

Secondo Boyer, Archimede «non parla di somma della serie infinita». Effettivamente Archimede non usa l'esatto equivalente in greco di que-

12. C. B. Boyer, *Storia della matematica*, ISEDI, Milano 1976, p. 153 (ed. or. *A History of Mathematics*, Wiley, New York 1968).
13. M. Kline, *La matematica nella cultura occidentale*, Feltrinelli, Milano 1976, p. 63 (ed. or. *Mathematics in Western Culture*, Oxford University Press, New York 1953).

ste parole, ma se siamo interessati ai concetti e non alle parole dobbiamo confrontare i concetti usati da Archimede con ciò che si intende oggi per "somma di una serie infinita". Un qualsiasi libro di analisi spiega che per somma della serie infinita $A_1 + A_2 + \dots A_n + \dots$ si intende il limite, se esiste, delle somme parziali $A_1 + A_2 + \dots A_n$. Ricordando cosa si intende con la parola "limite", possiamo essere più espliciti e dire che per somma della serie infinita $A_1 + A_2 + \dots A_n + \dots$ si intende quel numero, se esiste, con la proprietà che la sua differenza con la somma $A_1 + A_2 + \dots A_n$ diviene più piccola di qualsiasi quantità prefissata se n è abbastanza grande. È chiaro quindi che la moderna definizione di somma di una serie infinita non fa altro che dare un nome al procedimento usato da Archimede.

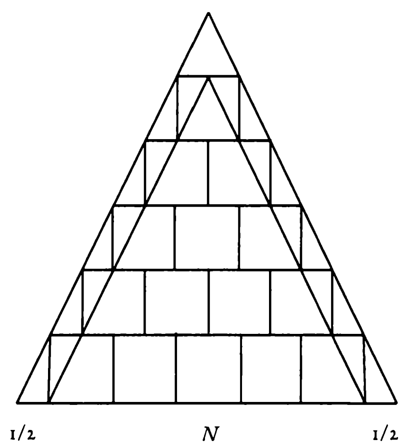
Per capire l'origine dell'opinione di Boyer, Kline e tanti altri, dobbiamo ricordare che il concetto di somma di una serie infinita che abbiamo appena ricordato si è affermato solo nella seconda metà dell'Ottocento. Prima di allora i matematici credevano di poter sommare infiniti numeri direttamente, senza passare per le somme parziali, senza possedere il concetto di limite e senza preoccuparsi di problemi di convergenza. I *Paradossi dell'infinito*, scritti da Bernard Bolzano nel 1847-48, illustrano bene questo punto, fornendo una moltitudine di esempi di questo modo ingenuo di trattare il concetto di infinito. Bolzano ritiene, ad esempio, che la somma di tutti i numeri naturali sia una determinata quantità infinita, minore della quantità infinita che esprime la somma di tutti i numeri quadrati (nonostante sia stata ottenuta sommando un numero maggiore di termini).

Per molti secoli i matematici hanno quindi letto Archimede senza poter capire il suo bisogno di determinare somme infinite indirettamente, considerandone le somme parziali, e hanno attribuito la sua scelta a un "orrore per l'infinito". Questa convinzione ha continuato a essere trasmessa, da libro a libro, nei manuali di storia della matematica anche oltre un secolo dopo che i matematici, recuperando il metodo di Archimede, avevano imparato a sommare serie infinite in modo rigoroso.

Il compagno immaginario di Gauss

In questo paragrafo troveremo in modo semplice un risultato che ci servirà tra poco. Lo faremo arricchendo con un po' di fantasia un famoso aneddoto.

Si racconta che, quando Carl Gauss frequentava la scuola elementare, il maestro, pensando di tenere impegnati i suoi scolari per un bel po', assegnò loro il compito di sommare tutti i numeri da 1 a 100. Dopo pochi minuti, mentre i compagni erano ancora impegnati con le prime somme, Gauss portò al maestro la sua lavagnetta sulla quale aveva scritto direttamente il risultato: 5.050. Il futuro matematico aveva capito che, invece di sommare i numeri nel loro ordine naturale, conveniva sommare prima 1 a 100 (ottenendo 101), poi 2 a 99 (ottenendo di nuovo 101) e così via, ottenendo 50 volte lo stesso risultato. La somma complessiva era quindi 50 volte 101, ossia 5.050. Questa è la storia che viene sempre raccontata. Si omette però di ricordare l'idea del compagno Franz, che pur non essendo un genio matematico come Carl aveva cercato anche lui di risolvere il problema in modo intelligente, evitando di eseguire 99 addizioni. Franz aveva pensato di raffigurare i numeri da 1 a 100 disegnando tante file crescenti di quadrati unitari. Una fila era costituita da un solo quadretto; poi, subito sotto, aveva disegnato una fila di due quadretti, poi una di tre e così via.



L'area totale dei quadratini era evidentemente la somma richiesta. L'insieme dei quadratini, d'altra parte, assomigliava molto a un triangolo di base 100 e altezza 100. Applicando la formula per calcolare l'area di un triangolo, per un momento gli sembrò che il risultato dovesse essere $100 \cdot 100/2 = 5.000$. Franz si rese però rapidamente conto che il triangolo con base e altezza uguali a 100 era un po' più piccolo della superficie formata dai quadratini (come si vede nella figura, dove per semplicità si sono disegnate solo 5 file di quadratini).

D'altra parte, Franz notò che, come si vede in figura, il poligono scalettato la cui area costituiva la somma che doveva calcolare era contenuto in un triangolo con base e altezza uguali a 101. Ne concluse che valgono le diseguaglianze:

$$5.000 = (100)^2/2 < 1 + 2 + 3 + \dots 100 < (101)^2/2 = 5.100{,}5.$$

Nel caso generale della somma dei primi n numeri naturali il ragionamento di Franz non forniva la risposta esatta, ma permetteva di dedurre le diseguaglianze:

$$n^2/2 < 1 + 2 + 3 + \dots n < (n + 1)^2/2.$$

Quando il maestro spiegò alla classe l'idea che aveva avuto Carl, Franz ci restò molto male, perché, a differenza del compagno, non era riuscito a calcolare il valore esatto della somma. Pochi giorni dopo, ebbe però una parziale rivincita. Il maestro, che era un po' sadico, chiese infatti ai ragazzi di sommare tutti i quadrati dei numeri da 1 a 100: 1 + 4 + 9 + … + 10.000. Pare che quel giorno Carl Gauss fosse a letto con l'influenza. Tutti i compagni cercarono di fare bella figura generalizzando l'idea di Carl, ma nessuno ci riuscì. Franz invece capì subito che il proprio sistema funzionava esattamente come nel caso precedente. Immaginò infatti una piramide quadrata a gradini, fatta di 100 strati: il primo strato, con base quadrata di lato 100, era formato da 10.000 cubetti unitari, il secondo aveva la base di lato 99, e così via. Anche in questo caso, la sua idea non gli permetteva di calcolare esattamente la somma, ma, proprio come nel caso precedente, la sua piramide a gradini era compresa tra due vere piramidi, con altezza e lato della base uguali per una a 100 e per l'altra a 101 (la figura precedente è ancora valida, purché la si interpreti come un'opportuna sezione delle piramidi). Poiché sapeva che il volume di una piramide è un terzo del prodotto dell'area di base per l'altezza, Franz ne dedusse che:

$$n^3/3 < 1 + 4 + 9 + \dots + n^2 < (n + 1)^3/3.$$

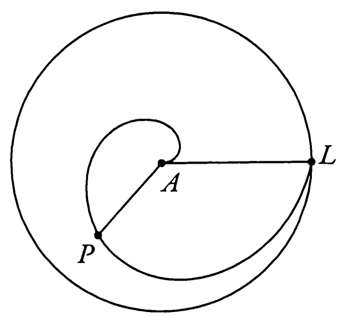
Anche in questo caso non aveva ottenuto una formula esatta per la somma, ma le diseguaglianze di Franz sono proprio quelle che ci serviranno nel prossimo paragrafo. (Archimede le aveva ottenute calcolando prima il valore esatto della somma dei primi n quadrati: un calcolo complesso che eviteremo.)

L'area racchiusa dal primo giro della spirale

Tra le opere di Archimede la più profonda dal punto di vista matematico (nel nostro significato ristretto del termine; cfr. *infra*, pp. 165-6) è probabilmente il trattato *Sulle spirali*.

Archimede vi studia la curva piana che chiama "spirale" (ἕλιξ) e noi diciamo "spirale di Archimede". La curva è definita in modo cinematico, come la traiettoria di un punto P che comincia a muoversi di moto uniforme su una semiretta, partendo dall'origine, nello stesso istante in cui la semiretta, mantenendo l'origine fissa, comincia a ruotare uniformemente nel piano. L'origine A della semiretta è detta anche "origine della spirale" e la posizione iniziale della semiretta è detta "linea iniziale".

Archimede affronta e risolve due problemi: trovare la tangente alla spirale in ogni suo punto e le superfici descritte dal raggio vettore AP nei successivi giri della semiretta. Tralasceremo quasi completamente la complessa soluzione del primo problema (risolvendo il quale, Archimede dà inizio a quella che diventerà la geometria differenziale), concentrandoci sul secondo, o meglio su una sua parte.



Diciamo "primo giro della spirale" l'arco di spirale descritto durante il primo giro della semiretta, "primo segmento" il segmento AL che ha per estremi l'origine A della spirale e la posizione L occupata dal punto P quando la semiretta termina il primo giro. Diciamo inoltre "primo cerchio" il cerchio con centro A e raggio AL. Archimede dimostra il teorema seguente:

> *Teorema*[14]. La superficie compresa tra il primo giro della spirale e il primo segmento è un terzo del primo cerchio.

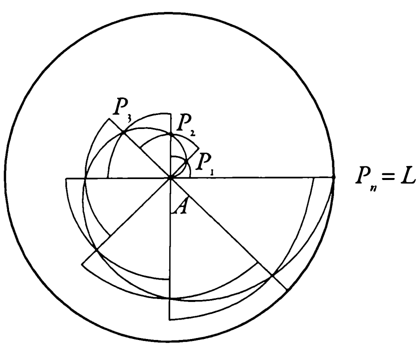
14. Archimede, *Sulle spirali*, proposizione 24 (54, 25-55, 2, ed. Mugler).

Il procedimento seguito per dimostrare questo risultato anticipa i metodi di integrazione. O meglio: il concetto di integrale è nato generalizzando il procedimento usato da Archimede per dimostrare questo teorema.

Indicando con S la superficie compresa tra il primo giro della spirale e il primo segmento, Archimede dimostra innanzitutto la seguente proposizione:

> È possibile inscrivere in S una figura piana e circoscrivere a S un'altra in modo che entrambe le figure siano composte da settori circolari simili e che l'eccesso della figura circoscritta su quella inscritta sia minore di qualsiasi superficie prefissata[15].

Detta E la superficie prefissata[16], consideriamo due diametri ortogonali del primo cerchio. Per il postulato enunciato a pagina 98, con una serie di bisezioni di uno dei quadranti in cui i due diametri dividono il primo cerchio, otteniamo un settore circolare F minore di E[17].



Dividiamo ora il primo cerchio in settori circolari uguali a F, il primo e l'ultimo dei quali hanno il primo segmento come lato, e diciamo α la loro ampiezza e N il loro numero. Diciamo poi $P_1, P_2 \dots P_n = L$ i punti in cui il primo giro della spirale interseca i lati dei settori circolari.

È chiaro che la figura S sarà contenuta in un'unione di settori circolari

15. Archimede, *Sulle spirali*, proposizione 23 (53, 10-17, ed. Mugler).
16. Ovviamente anche in questo caso per "superficie" si intende una parte di piano di area non nulla.
17. Se per ottenere una superficie maggiore del quadrante occorre duplicare n volte E, basta bisecare n volte il quadrante per ottenere un settore minore di E. Archimede divide un quadrante e non l'angolo giro, come avremmo fatto noi, perché alla sua epoca erano considerati angoli solo quelli minori di un piatto (nella terminologia dell'epoca: minori di due retti).

di ampiezza α e raggi AP_1, AP_2 ... AP_n, che indichiamo con C_n, e conterrà un'unione di settori circolari di ampiezza α e raggi AP_1, AP_2 ... AP_{n-1}, che indichiamo con I_n. La differenza tra C_n e I_n è formata da archi di corona circolare di ampiezza α, i cui raggi interni sono 0, AP_1, AP_2 ... AP_{n-1} e gli esterni AP_1, AP_2 ... AP_n; montandoli uno sull'altro si ottiene un settore circolare uguale a F. Poiché F è minore di E, ciò completa la dimostrazione.

Possiamo ora dimostrare il teorema. Detto K il primo cerchio, dobbiamo dimostrare l'eguaglianza:

$$S = (1/3)K.$$

Come è solito fare, Archimede usa un procedimento per assurdo; dimostra cioè che non può essere né $S < (1/3)K$, né $S > (1/3)K$.

Supponiamo prima che sia $S < (1/3)K$. Per n sufficientemente grande, sarà allora anche $C_n < (1/3)K$. C_n, d'altra parte, è formato da n settori circolari S_1, S_2 ... S_n, tutti simili tra loro (perché di uguale ampiezza). Poiché le aree di settori circolari simili sono proporzionali ai quadrati dei loro raggi[18] e il raggio del settore S_i, AP_i, è proporzionale a i, indicando con β un'opportuna costante, sarà:

$$S_i = \beta i^2; \quad C_n = S_1 + S_2 + \ldots + S_n = \beta(1 + 4 + 9 + \ldots + n^2).$$

È facile calcolare il valore di β. Dall'eguaglianza $\beta n^2 = S_n = F = K/n$, si ottiene $\beta = K/n^3$.

È quindi: $C_n = K(1 + 4 + 9 + \ldots + n^2)/n^3$, e usando una delle due diseguaglianze ottenute a pagina 105, si ha:

$$C_n > (1/3)K,$$

contro l'ipotesi.

Supponiamo ora che sia $S > (1/3)K$. Per n sufficientemente grande, sarà allora anche $I_n > (1/3)K$. D'altra parte è:

$$I_n = S_1 + S_2 + \ldots + S_{n-1} = K(1 + 4 + 9 + \ldots + (n-1)^2)/n^3,$$

18. L'area di un settore circolare di ampiezza α è infatti $\gamma\pi R^2$, dove R è il raggio del settore e γ è il rapporto tra α e un angolo giro.

e usando la seconda diseguaglianza ottenuta a pagina 105, otteniamo la diseguaglianza $I_n < (1/3)K$, di nuovo contro l'ipotesi. La dimostrazione del teorema è così completa.

Il metodo di Archimede e la teoria dell'integrazione

Calcoliamo l'area del primo giro della spirale con metodi moderni. Conviene scrivere l'equazione della spirale di Archimede in coordinate polari[19]:

$$\rho = C\phi.$$

Poiché l'area della parte del primo giro della spirale contenuta nell'intervallo $(\phi, \phi + d\phi)$ della coordinata angolare è $(1/2)\rho^2 d\phi$, l'area dell'intero primo giro è:

$$S = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\rho^2 \, d\phi = \frac{1}{2} C^2 \int_0^{2\pi} \phi^2 \, d\phi = \frac{4}{3}\pi^3 C^2$$

Poiché l'area del primo cerchio è $\pi R^2 = \pi(2\pi C)^2 = 4\pi^3 C^2$, si ritrova il risultato di Archimede $S = (1/3)K$.

Se l'integrale non si calcola usando il teorema fondamentale del calcolo, come oggi siamo abituati a fare (cioè considerando una primitiva della funzione ϕ^2), ma, in base alla sua definizione, come limite dell'area dei plurirettangoli contenenti l'area sottostante al grafico della funzione ϕ^2 (o in essa contenuti), l'ultima eguaglianza non può essere ottenuta se non ripetendo passo passo il procedimento seguito da Archimede.

La quasi identità tra il procedimento di Archimede e quello basato sul moderno concetto di integrale non significa, naturalmente, che Archimede avesse formulato una teoria dell'integrazione. Il suo procedimento era stato ideato per il caso particolare della spirale e non ne era stata dedotta (né da Archimede né da alcun altro matematico dell'antichità) una teoria generale. Si può però dire che la teoria moderna è nata generalizzando il

19. Dato un qualsiasi punto P del piano in cui si trova la spirale di origine O, le sue coordinate polari sono (ρ,ϕ), dove ρ è la distanza di P da O e ϕ è l'angolo che la semiretta OP forma con la linea iniziale. È chiaro allora, per la definizione di spirale, che lungo la curva ρ è proporzionale a ϕ.

metodo che Archimede aveva escogitato per risolvere un problema particolare: si è trattato di un lavoro tutt'altro che semplice, durato diversi secoli.

Per un confronto tra i metodi archimedei e quelli della prima età moderna conviene ricordare il modo in cui Newton (che con Leibniz è considerato uno dei due fondatori dell'analisi matematica moderna e in particolare della teoria dell'integrazione) introduce il concetto che prenderà il nome di integrale. A questo scopo basterà riportare i primi due lemmi della prima sezione del primo libro dei *Philosophiae naturalis Principia mathematica*: la sezione in cui Newton introduce il suo "metodo delle ultime ragioni", ossia il suo embrione di analisi infinitesimale. Dobbiamo innanzitutto spiegare la terminologia di Newton. Per "ragione" (nell'originale latino *ratio*) Newton ovviamente intende "rapporto". I rapporti che lo interessano sono variabili e a volte, anacronisticamente, si pensa che Newton con "ultima ragione" intendesse il limite di un rapporto. In realtà, come è chiaro dal primo lemma che stiamo per trascrivere, Newton non pensa a rapporti che variano in dipendenza da una variabile, ma a rapporti che variano nel tempo reale e per "ultima ragione" intende il valore assunto dal rapporto nell'istante finale dell'intervallo di tempo considerato.

Ecco i due lemmi con le loro pseudodimostrazioni[20]:

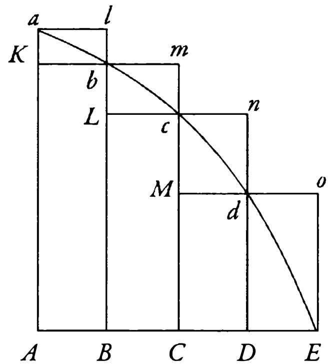
> *Lemma 1*
> Le quantità, come anche i rapporti fra quantità, che costantemente tendono all'eguaglianza in un qualsiasi tempo finito, e prima della fine di quel tempo si accostano l'una all'altra più di una qualsiasi differenza data, divengono infine uguali.
>
> Se si nega questo, da ultimo saranno disuguali, e *D* sarà la loro differenza ultima. Di conseguenza non potranno accostarsi all'uguaglianza più della differenza data *D*. Ciò che è contro l'ipotesi.

Naturalmente l'ipotesi che le quantità considerate, *prima della fine di quel tempo*, si accostino l'una all'altra più di una qualsiasi differenza data non implica affatto che debbano farlo anche *alla fine di quel tempo*, non implica cioè affatto la tesi. Quella che Newton considerava una dimostrazione non esprime altro che la sua ripugnanza a prendere in considerazione ciò che noi chiamiamo una discontinuità.

20. È stata qui usata la traduzione italiana di Alberto Pala.

Lemma II

Se in una figura qualsiasi, *AacE*, delimitata dalle rette *Aa*, *AE* e dalla curva *acE*, vengono inscritti un qualsiasi numero di parallelogrammi *Ab*, *Bc*, *Cd* ecc. con le basi *AB*, *BC*, *CD* ecc., uguali, e con i lati *Bb*, *Cc*, *Dd* ecc. paralleli al lato *Aa* della figura, e si completano i parallelogrammi *aKbl*, *bLcm*, *cMdn* ecc., allora, se la larghezza di questi parallelogrammi diminuirà e il loro numero aumenterà all'infinito, dico che le ultime ragioni che hanno fra di loro la figura inscritta *AKbLcMdD*, quella circoscritta *AalbmcndoE*, e quella curvilinea *AabcdE*, sono ragioni di uguaglianza.



Infatti la differenza tra la figura inscritta e quella circoscritta è data dalla somma dei parallelogrammi *Kl*, *Lm*, *Mn*, *Do*, ossia (per l'uguaglianza delle loro basi) dal rettangolo costituito da una sola base *Kb* e dalla somma delle altezze *Aa*, cioè il rettangolo *ABla*. Ma questo rettangolo, in quanto la sua larghezza *AB* viene diminuita all'infinito, diventa minore di qualunque rettangolo dato. Di conseguenza (per il lemma I) la figura inscritta, quella circoscritta e, a maggior ragione, la figura curvilinea intermedia, diventeranno, da ultimo, uguali. CVD

Newton, che conosceva il trattato di Archimede *Sulle spirali*, riproduce esattamente lo stesso argomento di Archimede per dimostrare che la differenza tra la figura circoscritta e quella inscritta è uguale al più alto dei rettangoli (corrispondente al maggiore tra i settori circolari di Archimede). Mentre però l'argomento di Archimede è corretto, quello di Newton è in generale falso; vale infatti solo se, come accade nel caso in figura, la curva considerata è il grafico di una funzione monotona (cioè sempre crescente o sempre decrescente).

La differenza essenziale tra i due autori è che Archimede tratta con rigore un caso particolare, mentre Newton espone una teoria generalissima priva di rigore. I suoi risultati sono molto utili perché di fatto sono validi per una vasta categoria di funzioni, ma poiché tale categoria non è individuata, quelle che chiama "dimostrazioni" non possono esserlo realmente. Newton vorrebbe dimostrare qualcosa per qualsiasi *curva*, ma non dispone di una definizione di *curva*; presuppone implicitamente che la curva considerata sia il grafico di una funzione continua, ma non dispone di una definizione di continuità (concetto che alla sua epoca non era stato ancora elaborato).

Questo dualismo tra i metodi antichi, rigorosi ma elaborati solo per casi particolari, e i metodi moderni, che volevano essere generali ma mancavano di rigore, continuò per un paio di secoli.

Alla fine dell'Ottocento i matematici cominciarono a lavorare solo con enti chiaramente definiti, ma le loro definizioni, non essendo (a differenza di quelle antiche) costruttive, continuarono a creare problemi. I matematici moderni, essendo interessati a vaste classi di concetti (anche per l'enorme estensione delle applicazioni della matematica), preferivano usare definizioni molto generali. Il risultato fu che si venne a formare una vasta categoria di enti imprevisti che, pur rientrando nelle definizioni, erano del tutto estranei al tipo di enti matematici immaginati da chi aveva formulato la definizione. In questa zona si trovavano, in particolare, le cosiddette "patologie": una notevole parte dell'ingegno dei matematici moderni è stato usato o per trattare i casi patologici involontariamente introdotti, oppure per riuscire a dimostrare che in qualche caso particolare le patologie non si verificavano. Ad esempio alla fine dell'Ottocento si disponeva di una definizione rigorosa di "curva piana" (come immagine di un'applicazione continua di un intervallo di reali in un piano)[21], ma nessuno sospettava che "curve" così definite potessero riempire un quadrato, come dimostrò Peano. In casi come quello della strana "curva di Peano" si ottennero enti costruibili, che allargarono utilmente la fenomenologia matematica a disposizione degli studiosi, ma in altri casi (come, ad esempio, quello delle funzioni non misurabili) gli enti imprevisti, non essendo in alcun modo costruibili, erano solo una spia dell'eccessiva generalità della definizione usata. Naturalmente la

21. In realtà i matematici definiscono una curva piana non come immagine di un'applicazione continua di un intervallo di reali in un piano, ma come l'applicazione stessa. La definizione data nel testo corrisponde però al concetto di curva che credo sia familiare alla maggioranza dei lettori, cioè quello insegnato nelle scuole secondarie e usato da fisici, ingegneri e dagli stessi matematici quando si riferiscono a curve specifiche, come circonferenze o parabole.

maggioranza dei matematici, avendo un orientamento filosofico implicitamente o esplicitamente neoplatonico, era convinta che l'esistenza delle cosiddette patologie rivelasse in ogni caso proprietà profonde della *vera* realtà matematica.

Bisogna anche dire che in molti casi i matematici sono riusciti a dimostrare che definizioni generalissime erano in realtà inutili, in quanto non estendevano realmente gli enti definiti al di là dei casi già noti[22].

All'origine della profonda differenza tra i metodi antichi e moderni vi era una diversa concezione filosofica degli enti matematici. Per un matematico ellenistico un ente matematico poteva essere studiato solo se prima lo si era costruito. I metodi di costruzione potevano essere diversi: Euclide, negli *Elementi*, studia solo figure geometriche costruibili con riga e compasso; Archimede considera vari altri metodi, ad esempio quello cinematico che usa nel caso della spirale. Non era però considerato accettabile studiare enti di cui si conoscesse solo una definizione, perché non si poteva sapere se esistessero realmente. In altri termini, se un ente matematico è definito attraverso una serie di proprietà, è possibile che le proprietà richieste non siano mai soddisfatte contemporaneamente.

Anche quando, alla fine dell'Ottocento, si riuscì a coniugare la generalità con il rigore (risultato ottenuto anche recuperando e generalizzando metodi antichi, come abbiamo visto nel caso delle somme delle serie), rimase insoluto il problema filosofico dell'esistenza degli oggetti matematici: problema sul quale anche oggi coesistono posizioni radicalmente diverse.

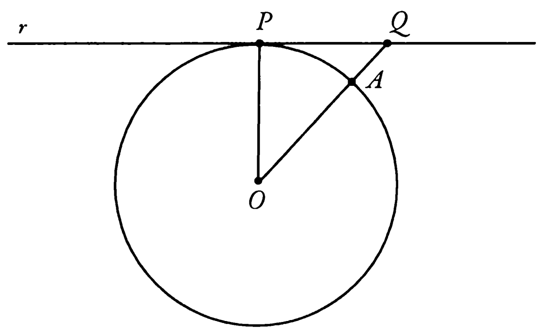
Un confronto tra infinitesimi

Il risultato più ammirevole del trattato *Sulle spirali* è il calcolo della direzione della tangente in ogni punto della curva. Rinunciando a seguire la lunga catena di lemmi (di estrema complessità, difficili da sintetizzare) con cui Archimede riesce imprevedibilmente a raggiungere il suo scopo, limitiamoci a riportare uno dei suoi lemmi più semplici.

Consideriamo una circonferenza di centro O, una retta r tangente alla

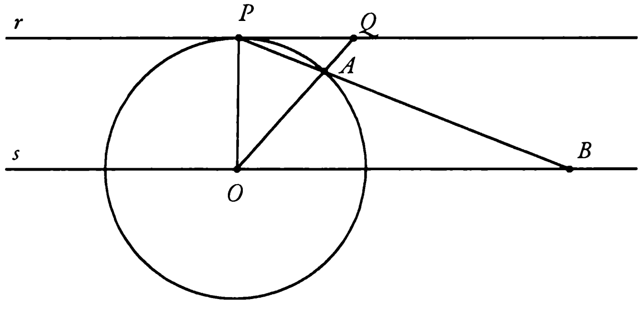
22. Diversi esempi sono nell'articolo di V. I. Arnold, *On Teaching Mathematics* (disponibile all'indirizzo http://www.maia.ub.es/~vieiro/fitxers/teaching-math-arnold.pdf, ultimo accesso ottobre 2019).

circonferenza in un suo punto P e un punto arbitrario Q di r. Congiungiamo O con Q e diciamo A il punto in cui il segmento OQ interseca la circonferenza. Se ora spostiamo il punto Q lungo r, facendolo tendere a P, le lunghezze dei segmenti AQ e PQ tenderanno entrambe a zero. È abbastanza evidente, però, che tenderanno a zero in modo diverso. AQ diventerà infatti sempre più piccolo non solo in assoluto, ma anche rispetto a PQ. In termini più rigorosi, Archimede dimostra che, fissata una qualsiasi quantità positiva ε, il rapporto AQ/PQ diviene minore di ε quando Q è abbastanza vicino a P. Nel linguaggio moderno si dice che AQ è un infinitesimo di ordine superiore rispetto a PQ. Si tratta in effetti del primo caso noto in cui sono stati individuati infinitesimi di ordine diverso.



La dimostrazione di Archimede è un gioiello di semplicità. Il lettore che non la conosce è invitato a dimostrare l'affermazione usando metodi moderni; dopo che l'avrà fatto, potrà apprezzare molto meglio la semplicità dell'antica dimostrazione.

Archimede traccia la retta s parallela a r passante per O; congiunge poi P con A e prolunga il segmento PA fino a incontrare s nel punto B.



I triangoli PAQ e BAO sono simili (hanno infatti gli angoli uguali, o perché alterni interni o perché opposti al vertice). Il rapporto AQ/PQ è quindi uguale al rapporto AO/OB. D'altra parte si vede subito che il rapporto AO/AB può essere reso minore della quantità prefissata ε. Il numeratore è infatti costante (è sempre uguale al raggio del cerchio), mentre il denominatore OB può essere scelto arbitrariamente grande (si può scegliere un qualsiasi punto B sulla retta s e ricavarne la posizione di A e di Q).

Ad Archimede è bastato tracciare un paio di rette per esaminare la figura attraverso un "microscopio virtuale", trasformando la quantità infinitesima PQ in una arbitrariamente grande e quella infinitesima di ordine superiore, AQ, in una costante.

Il lemma, a parte la sua funzione nella complessa dimostrazione di Archimede che abbiamo omesso di riportare, ha un notevole interesse in sé, non solo come primo esempio di confronto tra infinitesimi di diverso ordine, ma anche in relazione alla cinematica.

Nella *Meccanica* pseudoaristotelica è scritto che gli spostamenti di un punto che si muove di moto circolare uniforme si ottengono componendo (con la regola che noi diciamo "del parallelogramma") un moto "secondo natura" (κατὰ φύσιν) lungo la tangente con un moto "contro natura" (παρὰ φύσιν) verso il centro[23]. Riferendoci alla figura precedente, possiamo dire che un piccolissimo spostamento PA lungo la circonferenza può essere pensato come composizione dello spostamento PQ lungo la tangente con lo spostamento QA verso il centro. L'autore poco prima aveva specificato che tra i due spostamenti non vi è rapporto[24], ossia che lo spostamento verso il centro è infinitamente più piccolo di quello lungo la tangente[25].

Archimede trasforma questa affermazione non rigorosa (basata sull'uso ingenuo di quantità infinitamente piccole) nel suo teorema, in cui considera quantità variabili che possono diventare minori di qualsiasi quantità

23. Pseudo-Aristotele, *Mechanica*, 849a, 14-17.

24. Pseudo-Aristotele, *Mechanica*, 849a, 5-6.

25. Abbiamo già ricordato che per Euclide tra due grandezze non vi è rapporto se non esiste alcun multiplo della minore che supera la maggiore (Euclide, *Elementi*, V, definizione 4). L'uso implicito di questa definizione di rapporto è, a mio parere, una delle tante ragioni che impediscono di attribuire questo testo ad Aristotele. Alcuni traduttori, cercando di dare un senso comprensibile a una frase a loro oscura, traducono la frase dello Pseudo-Aristotele scrivendo che tra i due spostamenti non vi è un rapporto *costante*, ma l'aggettivo "costante" non ha alcun corrispondente nel testo greco.

assegnata, ossia quelli che sono detti "infinitesimi" nell'analisi matematica moderna[26].

Alla luce del profondo interesse di Archimede per la meccanica, mi sembra possibile che una delle ragioni che lo spinsero a studiare le spirali fosse proprio il desiderio di falsificare le affermazioni che conosciamo dal testo pseudoaristotelico. La continua composizione di un moto lungo la tangente con un moto verso il centro, poiché per Archimede uno spostamento non può essere infinitamente più piccolo dell'altro, genera un moto non circolare, ma lungo una spirale. La critica di Archimede all'affermazione di Aristarco che la distanza tra Terra e Sole è infinitamente più piccola della distanza dalle stelle[27] andava esattamente nella stessa direzione; entrambe sono implicate dal rifiuto di considerare grandezze non nulle infinitamente più piccole (o più grandi) di altre grandezze della stessa specie, ossia dall'introduzione del postulato enunciato a pagina 98 (cfr. anche la nota 7 a p. 100).

Volume e baricentro di un segmento di paraboloide

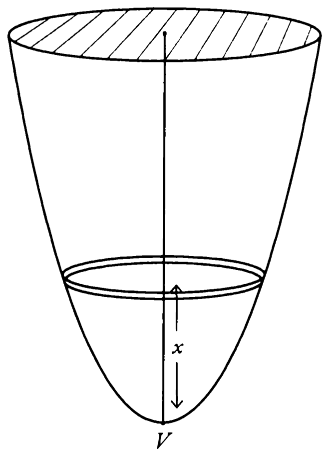
Si dice "segmento retto di paraboloide di rotazione" il solido contenuto tra un paraboloide di rotazione (cfr. *supra*, p. 84) e un piano ortogonale al suo asse di simmetria. Diremo "base" del segmento di paraboloide la parte di tale piano interna al paraboloide (che è evidentemente un cerchio) e suo "vertice" il vertice del paraboloide.

Archimede dimostra (*Sui conoidi e gli sferoidi*, proposizione 21) che il volume di tale solido è la metà di quello del cilindro circoscritto (ossia, nel nostro linguaggio, è la metà del prodotto della base per l'altezza)[28].

Evitando la complessa dimostrazione rigorosa di Archimede, notiamo che possiamo pensare di dividere il segmento di paraboloide in fettine sottilissime parallele alla base, ciascuna delle quali può essere approssimata con un cilindro.

26. Sostituisce cioè "infinitesimi potenziali" a "infinitesimi attuali" (per questa terminologia cfr. *infra*, p. 126).
27. Archimede, *Arenario*, 135, 11-22 (ed. Mugler) (cfr. *supra*, pp. 90-1).
28. In realtà Archimede preferisce dire che il volume vale una volta e mezzo quella del cono inscritto: affermazione evidentemente equivalente alla nostra, che oggi appare più semplice.

La fettina a distanza x dal vertice V del paraboloide ha un raggio che, per la proprietà caratteristica della parabola, è proporzionale alla radice quadrata di x. L'area delle basi delle fettine è quindi proporzionale a x. Il volume totale del paraboloide si otterrà moltiplicando l'altezza per l'area media delle basi delle fettine. Tale area media, poiché le aree crescono linearmente da 0 all'area della base, vale evidentemente la metà della base. Il volume sarà perciò la metà di quello del cilindro circoscritto.



Il lettore attento non avrà difficoltà a trasformare il precedente argomento intuitivo nella dimostrazione rigorosa di Archimede, seguendo il modello delle dimostrazioni analoghe che abbiamo analizzato in dettaglio (mostrando come il volume del segmento di paraboloide possa essere approssimato dal basso e dall'alto, con un errore arbitrariamente piccolo, con somme di cilindri inscritti e circoscritti e ottenendo il risultato con una dimostrazione per assurdo).

Un ragionamento analogo al precedente permette di determinare anche la posizione del baricentro del segmento retto di paraboloide.

Il baricentro di ogni fettina è evidentemente nel suo centro. Poiché la massa di ogni fettina, come il suo volume, cresce proporzionalmente alla sua distanza dal vertice, la posizione del baricentro del solido può essere determinata allo stesso modo di quella di un triangolo (che anche può essere diviso in strisce sottili parallele a un suo lato, che crescono proporzionalmente alla distanza dal vertice opposto). Come nel caso del triangolo, il baricentro sarà quindi sull'asse del paraboloide nel punto che dista dalla base un terzo della lunghezza dell'asse.

Superficie e volume della sfera

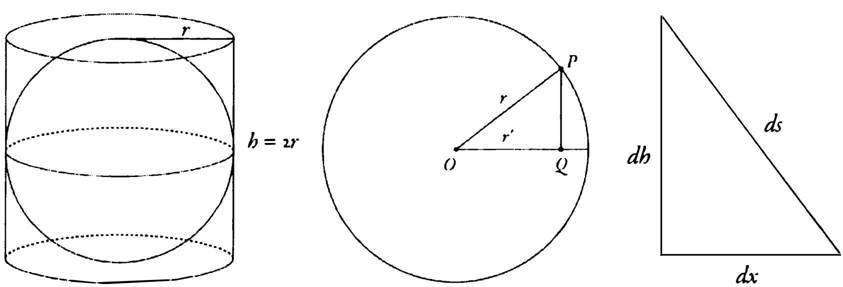
Nell'opera *Sulla sfera e sul cilindro* Archimede calcola la superficie e il volume di una sfera. Secondo la tradizione sono questi i risultati di cui Archimede era più orgoglioso, che aveva chiesto fossero ricordati sulla sua tomba.

Le dimostrazioni sono molto complesse e si sviluppano nel corso di 35 proposizioni. Qui cercheremo di mettere a fuoco solo i punti centrali del percorso seguito da Archimede. Il risultato fondamentale, del quale il calcolo del volume può essere considerato un corollario, è il teorema seguente:

Teorema. La superficie di una sfera è il quadruplo del suo cerchio massimo[29].

Cominciamo con il richiamare una dimostrazione moderna di questo risultato. Se r è il raggio della sfera, il quadruplo del suo cerchio massimo, $4\pi r^2$, coincide con la superficie laterale del cilindro circoscritto (che è infatti il prodotto della circonferenza di base, $2\pi r$, per l'altezza $2r$). Il teorema afferma quindi l'equivalenza tra la superficie della sfera e quella laterale del cilindro circoscritto.

Consideriamo un piano passante per il centro O della sfera e ortogonale alle basi del cilindro e il cerchio massimo contenuto in tale piano. Sia P un punto di tale cerchio, Q la sua proiezione ortogonale sul diametro parallelo alle basi del cilindro; diciamo inoltre r' la distanza OQ, ds una porzione infinitesima della circonferenza passante per P, dh e dx le proiezioni ortogonali di ds sull'asse del cilindro e nella direzione ortogonale.



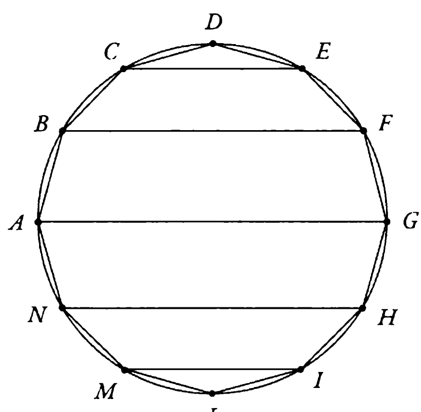
29. Archimede, *Sulla sfera e sul cilindro*, proposizione 33 (76, 1-2, ed. Mugler).

È facile vedere che il triangolo OPQ è simile a quello avente per lati ds, dh e dx (i lati di uno dei triangoli sono infatti ortogonali a quelli dell'altro). È quindi $ds/dh = r/r'$, ossia $r'ds = rdh$.

Se ora consideriamo lo strato infinitesimo compreso tra i piani paralleli alle basi del cilindro che passano per gli estremi di ds, la parte della superficie del cilindro compresa nello strato avrà area $2\pi rdh$, mentre la striscia di superficie sferica compresa nello stesso strato misurerà $2\pi r'ds$. Poiché $r'ds = rdh$, le due strisce sono equivalenti. Poiché l'equivalenza vale per tutte le strisce, ne segue il teorema.

Ho ricordato questa dimostrazione moderna (per i pochi lettori che non la conoscevano già) non solo per rendere intuitivamente chiaro il risultato, ma anche perché sospetto che Archimede avesse individuato il risultato con un procedimento molto simile. Sappiamo infatti, innanzitutto, che riteneva così importante la considerazione del cilindro circoscritto alla sfera che aveva voluto che la sua immagine fosse scolpita sulla sua tomba. Inoltre Archimede avrebbe potuto immaginare la dimostrazione precedente usando proprio quegli infinitesimi attuali che evitava nelle sue dimostrazioni rigorose, quali sono quelle esposte nell'opera *Sulla sfera e sul cilindro*, ma che apprezzava molto come strumento euristico, come sappiamo dal *Metodo*[30].

È certo che Archimede nella sua opera segue una strada diversa. Egli immagina di inscrivere in un cerchio massimo della sfera un poligono regolare con un numero di lati multiplo di 4.



30. Cfr. *infra*, pp. 124-8. Anche l'esposizione della dimostrazione appena riportata usava apparentemente infinitesimi attuali, ma con la consapevolezza che il ragionamento può essere reso rigoroso usando il formalismo dell'analisi matematica.

Ruotando intorno a un suo diametro, il cerchio descriverà la sfera; il poligono inscritto, ruotando intorno allo stesso diametro (che, come quello verticale in figura, supponiamo congiunga due vertici opposti del poligono), descriverà un solido di rotazione che può essere scomposto in due coni e un certo numero di tronchi di cono. In figura i triangoli *CDE* e *MLI* descriveranno i due coni, mentre i trapezi *BCEF*, *ABFG* ecc. descriveranno tronchi di cono. L'idea, naturalmente, è che, al crescere del numero dei lati del poligono inscritto, la superficie di tale solido di rotazione approssimi sempre meglio la superficie della sfera.

Archimede calcola la superficie laterale di un cono e di un tronco di cono: risultati alla sua epoca non nuovi, dei quali inserisce una dimostrazione per completezza. Qui ci limitiamo a ricordare, usando notazioni moderne, che l'area della superficie laterale di un cono (circolare retto, quali sono quelli che ci interessano) vale πra, dove r è il raggio del cerchio di base e a è l'apotema, ossia il lato obliquo del cono, e quella di un tronco di cono $\pi(r_1 + r_2)a$, dove r_1 e r_2 sono i raggi delle due basi del tronco di cono e a il suo lato obliquo[31].

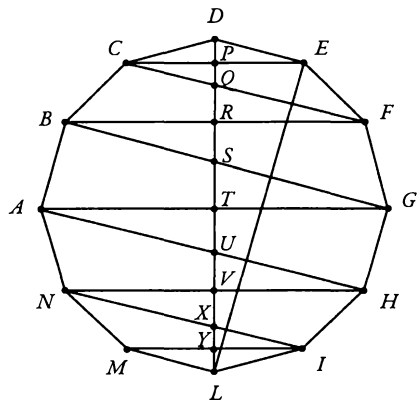
La superficie laterale del nostro solido di rotazione si otterrà sommando tutte le superfici laterali dei coni e dei tronchi di cono, il cui lato obliquo è sempre uguale al lato del poligono inscritto, che indichiamo con a. Facendo riferimento alla figura, la superficie laterale del cono generato dalla rotazione del triangolo *CDE* vale $\pi aCE/2$, quella del tronco di cono generato dalla rotazione del trapezio *BCEF* vale $\pi a(CE/2 + BF/2)$, e così via. La superficie totale sarà pertanto:

$$S = \pi a(CE + BF + \ldots + MI). \quad (1)$$

La somma che appare nella formula (1) può essere espressa in modo più utile. Facendo riferimento alla figura alla pagina seguente, osserviamo che i triangoli rettangoli *DPE*, *QPC*, *QRF*, *SRB*..., *LYM* sono tutti simili tra loro. Il rapporto tra il loro cateto minore e il loro cateto maggiore sarà quindi anche il rapporto tra la somma di tutti i cateti minori (cioè il diametro del cerchio) e la somma dei loro cateti maggiori (cioè la somma in

31. Naturalmente Archimede non usa formule ed esprime questi risultati in modo geometrico. Afferma, ad esempio, che la superficie laterale di un cono è equivalente a quella di un cerchio il cui raggio sia medio proporzionale tra il raggio del cerchio di base e il lato obliquo del cono.

parentesi nella formula 1). D'altra parte anche il triangolo DEL è simile ai triangoli precedentemente considerati. Si ha pertanto:



$$(CE + BF + \ldots + MI) : DL = EL : a.$$

Combinando questo risultato con la precedente formula (1) abbiamo che la superficie del solido di rotazione vale:

$$S = \pi EL \cdot LD = \pi EL \cdot d, \quad (2)$$

avendo indicato con d il diametro del cerchio. A questo punto si intravede già il risultato. Se infatti il numero dei lati del poligono inscritto è molto grande, EL differirà molto poco da d; la superficie del solido sarà quindi quasi uguale a πd^2 e poiché è intuitivo che per un numero molto grande di lati tale superficie è molto vicina a quella della sfera, anche quest'ultima sarà molto vicina a πd^2, ossia a $4\pi r^2$, che è il risultato voluto.

In ogni caso, poiché $EL < LD = d$ (EL è infatti un cateto del triangolo rettangolo ELD di cui LD è l'ipotenusa) la formula (2) implica che la superficie S del solido di rotazione inscritto è minore di πd^2.

Consideriamo ora il solido di rotazione descritto da un poligono regolare (con un numero di lati multiplo di 4) circoscritto a un cerchio massimo della sfera che ruota intorno al segmento che congiunge due suoi vertici opposti. Per la superficie di tale solido vale ancora la formula (2), con riferimento alla stessa figura, con la differenza che ora il diametro d del cerchio massimo coincide con il segmento che congiunge i punti medi di due lati opposti, come DE e ML in figura e quindi anche con EL. In questo caso è quindi: $EL = d, LD > d$. Abbiamo quindi che la superficie del solido di rotazione circoscritto vale $\pi LD \cdot d > \pi d^2$.

Per ottenere il teorema con il solito metodo di dimostrazione per assurdo usato da Archimede (che abbiamo visto in dettaglio alle pagine 97-102 e il lettore potrà ripetere senza difficoltà nel nostro caso) occorrono altri due risultati:

1. la superficie di una sfera è minore di quella del solido di rotazione circoscritto alla sfera ottenuto ruotando un poligono regolare (con un numero di lati multiplo di 4) circoscritto a un cerchio massimo intorno al segmento che ne congiunge due vertici opposti e maggiore di quello inscritto ottenuto facendo ruotare allo stesso modo un simile poligono inscritto;
2. la differenza tra la superficie dei due solidi di rotazione considerati al punto precedente è minore di qualsiasi superficie prefissata se il numero dei lati del poligono è sufficientemente grande.

Il primo risultato discende immediatamente dal quarto dei postulati assunti da Archimede all'inizio dell'opera *Sulla sfera e sul cilindro*. Riportiamo anche i tre precedenti, che ci serviranno in seguito:

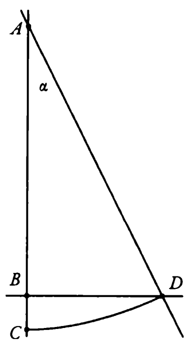
> Si assuma che:
>
> I. la minima tra tutte le linee con gli stessi estremi sia la linea retta;
>
> II. di tutte le altre linee che, giacendo su uno stesso piano, hanno gli stessi estremi, due siano disuguali se, essendo entrambe concave nella stessa direzione, o una di esse è interamente compresa dall'altra linea e dalla retta che congiunge gli estremi, oppure è in parte compresa e in parte coincidente con l'altra, e la linea inclusa sia la minore;
>
> III. similmente, la minima tra tutte le superfici con lo stesso contorno, se il bordo giace su un piano, sia la superficie piana;
>
> IV. delle altre superfici con lo stesso contorno, se quest'ultimo giace su un piano, siano disuguali due che, essendo entrambe concave nella stessa direzione, o una è interamente compresa tra l'altra e il piano che contiene il contorno, oppure in parte è compresa e in parte coincidente con l'altra e quella compresa sia minore[32].

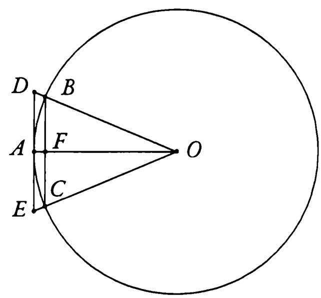
I primi due postulati permettono di affermare che una circonferenza è maggiore del perimetro di un poligono inscritto e minore del perimetro di un poligono circoscritto: un risultato che sarà utile alle pagine 151-6. Archimede include anche un quinto postulato, che ripete quello enun-

32. Archimede, *Sulla sfera e sul cilindro*, 10, 23-11, 15 (ed. Mugler).

ciato nella *Quadratura della parabola* che abbiamo riportato a pagina 98, estendendolo al caso di linee e solidi.

Per ottenere il risultato 2 Archimede dimostra innanzitutto che il rapporto tra un lato di un poligono regolare circoscritto al cerchio massimo della sfera e quello del poligono simile inscritto (uguale a quello tra i loro perimetri) può essere reso arbitrariamente vicino a 1 scegliendo il numero n di lati del poligono abbastanza grande: più precisamente dimostra che se AB e AC sono due qualsiasi segmenti con $AC > AB$, se il numero n di lati è abbastanza grande, detto L un lato del poligono circoscritto e l il lato di quello inscritto, è $L/l < AC/AB$.





Come è chiaro dalla figura a sinistra, dati due segmenti qualsiasi AB e AC con $AC > AB$, si può costruire un triangolo rettangolo ABD con un cateto lungo come AB e l'ipotenusa AD lunga come AC. Sia α l'angolo opposto al cateto BD in tale triangolo. È evidente che in un triangolo rettangolo con un angolo α' minore di α il rapporto tra l'ipotenusa e il cateto adiacente ad α' è minore di AC/AB. D'altra parte, come è chiaro dalla figura a destra, il rapporto tra il lato di un poligono regolare circoscritto con n lati, DE, e quello, BC, di un poligono simile inscritto nello stesso cerchio è uguale al rapporto $AD/FB = DO/BO = DO/AO$; è cioè uguale al rapporto tra ipotenusa e cateto maggiore di un triangolo rettangolo con un angolo pari a $1/2n$ di un angolo giro, angolo che per n abbastanza grande è certamente minore di α[33].

33. Osserviamo che il ragionamento fatto implica anche che la differenza AF tra il raggio del cerchio e l'apotema del poligono regolare inscritto è minore di qualsiasi lunghezza prefissata se il numero n dei lati è abbastanza grande. Ne segue che l'eccesso della super-

Per dimostrare che anche il rapporto tra le superfici dei solidi di rotazione inscritto e circoscritto alla sfera, aumentando il numero dei lati del poligono, può essere reso arbitrariamente vicino a 1, Archimede osserva che tale rapporto è il quadrato del rapporto tra i lati dei due poligoni che li generano ruotando. Infatti le superfici dei due solidi sono date dalla formula (1) e dalla formula analoga:

$$S' = \pi a'(C'E' + B'F' + \ldots + M'I'), \quad (1')$$

dove a' è il lato del poligono regolare circoscritto al cerchio massimo della sfera e i segmenti $C'E'$, $B'F'$... sono gli analoghi di CE, BF... relativi a tale poligono circoscritto. Poiché i due poligoni sono simili, i rapporti $C'E'/CE$, $B'F'/BF$, ..., sono tutti uguali ad a'/a. Le formule (1) e (1′) implicano quindi che $S'/S = (a'/a)^2$.

Si tratta naturalmente di un caso particolare del risultato generale che il rapporto tra due superfici simili è il quadrato del rapporto tra le loro dimensioni lineari.

Il *Metodo*

Il *Metodo*, trasmesso solo dal celebre palinsesto (cfr. *supra*, pp. 37-8), è particolarmente interessante per vari motivi. I problemi tecnici affrontati riguardano la determinazione dei baricentri di varie figure e dei volumi di alcuni solidi limitati da superfici curve (in particolare del solido oggi detto "doppia volta a padiglione", ossia l'intersezione di due cilindri retti a base circolare con lo stesso raggio i cui assi si intersecano ortogonalmente; cfr. FIG. 9).

Tali problemi sono di notevole interesse, ma il cuore dell'opera, come è chiaro dal titolo e dalla lettera prefatoria rivolta a Eratostene, non è nei risultati, ma nel metodo usato per ottenerli. In quasi tutte le altre sue opere Archimede predilige le dimostrazioni per assurdo[34]. Si tratta di dimostra-

ficie del poligono regolare circoscritto su quello inscritto (che è minore del prodotto di AF per il perimetro del poligono circoscritto) è anch'essa minore di qualsiasi superficie prefissata se n è abbastanza grande.

34. Una notevole eccezione è data dalla prima parte della *Quadratura della parabola*. Prima della dimostrazione che abbiamo esposto alle pagine 97-102, Archimede giunge infatti allo stesso risultato con il procedimento esposto nel *Metodo*.

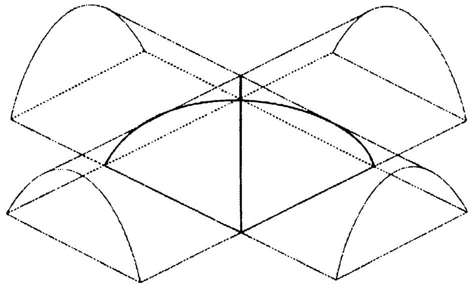


FIGURA 9 Una volta a padiglione: metà del solido di cui Archimede calcola il volume.

zioni rigorose ed eleganti (ne abbiamo visto qualche esempio), che hanno però un difetto: richiedono la conoscenza preliminare del risultato che si vuole dimostrare e il più delle volte non lasciano trapelare il procedimento mentale con cui Archimede era riuscito a individuarlo. Nel *Metodo* Archimede intende colmare questa lacuna spiegando, a vantaggio di colleghi e posteri, il *metodo meccanico* con cui riesce a ottenere i risultati prima di darne una dimostrazione rigorosa.

Si tratta di un metodo euristico che viene usato per trovare rapporti tra superfici e tra volumi. L'idea che dà il nome al metodo è quella di pensare due figure geometriche come dotate di un peso uniformemente distribuito e di immaginarle fissate nei loro baricentri agli estremi di una leva, ossia di un'asta girevole intorno a un fulcro. Se il sistema è in equilibrio, il rapporto tra le superfici o i volumi delle due figure (a seconda che si tratti di figure piane o di solidi), essendo uguale a quello dei loro pesi, sarà anche uguale, per la legge della leva (cfr. *supra*, pp. 59-61), al rapporto tra le lunghezze dei bracci. Il problema è così ricondotto a quello di determinare le lunghezze dei bracci che assicurano l'equilibrio.

A questo scopo viene usato il secondo ingrediente del metodo, che consiste nel considerare le figure come composte da un'infinità di figure con una dimensione in meno: i solidi da infinite figure piane parallele e le figure piane da infiniti segmenti paralleli. La posizione di equilibrio viene determinata come quella che permette di equilibrare ogni sezione di una figura con una corrispondente sezione dell'altra.

L'idea di ottenere solidi unendo superfici, superfici unendo linee e queste ultime giustapponendo punti era molto antica (risaliva alla scuola pitagorica ed era stata usata, tra gli altri, intorno al 400 a.C., da Democrito) e sarà ripresa in età moderna (in particolare nel "metodo degli indivisibili" dell'allievo di Galileo Bonaventura Cavalieri). Archimede sa bene che un calcolo rigoroso di superfici o volumi non può ottenersi in questo modo, ma ciononostante usa (e consiglia di usare) questo metodo a scopo euristico, per individuare i valori la cui correttezza dovrà poi essere dimostrata con metodi geometrici. Ad esempio nel suo trattato Archimede riprende il procedimento già esposto nella *Quadratura della parabola* mediante il quale si può trovare con il metodo meccanico che la superficie di un segmento di parabola sia i 4/3 di quella del massimo triangolo a esso inscritto (risultato che nella *Quadratura della parabola* è anche dimostrato con metodi geometrici rigorosi).

Per chiarire il rapporto tra il metodo esposto in questo trattato e quello usato da Archimede in tutte le altre sue opere, conviene riprendere un argomento al quale abbiamo già accennato un paio di volte.

Il termine "infinitesimo" è stato usato nel corso della storia della matematica in due significati profondamente diversi, per i quali si possono usare i termini (di origine aristotelica) "infinitesimo attuale" e "infinitesimo potenziale".

Con *infinitesimo attuale* si intende una grandezza, costante e determinata, infinitamente piccola: ad esempio possiamo pensare a un punto come a una parte infinitesima di un segmento; analogamente se tagliamo un cono con un piano parallelo alla base otteniamo un cerchio che può essere pensato come una fettina infinitesima del cono.

Gli infinitesimi incontrati oggi dagli studenti nei corsi di analisi sono qualcosa di profondamente diverso: vengono detti semplicemente infinitesimi, ma per sottolinearne la distanza con il concetto precedente li si può chiamare *infinitesimi potenziali*. Si tratta di quantità non costanti, ma variabili, che non assumono mai un valore infinitamente piccolo (nella matematica moderna non esistono numeri infinitamente piccoli, ma solo lo zero e numeri diversi da zero)[35], ma possono assumere valori *comunque piccoli*, possono cioè divenire più piccoli di qualsiasi quantità prefissata.

Il concetto di infinitesimo attuale è quello più antico, ma con la crisi della scuola pitagorica si scoprì che non era utile per fondare una teoria

35. Naturalmente mi riferisco alla matematica usualmente studiata e applicata. Una versione rigorosa dell'antica idea degli infinitesimi attuali è stata sviluppata da Abraham Robinson negli anni Sessanta del XX secolo e costituisce l'*analisi non standard* (una teoria rimasta confinata nell'ambito di pochi specialisti, che non ha avuto molte applicazioni significative).

rigorosa delle grandezze geometriche: le lunghezze non si ottengono contando punti né le superfici possono essere misurate dividendole in infiniti segmenti paralleli.

Archimede usa gli infinitesimi in entrambi i sensi appena ricordati. In quasi tutte le sue opere usa sistematicamente il concetto che abbiamo indicato con il termine "infinitesimo potenziale", fondandone la teoria che sarà recuperata dall'analisi matematica moderna. Nel solo *Metodo* rivela però di continuare a usare anche l'antico concetto che abbiamo detto *infinitesimo attuale* a scopo euristico, come guida per individuare risultati che poi dimostrerà con metodi geometrici. Anche oggi, del resto, fisici e ingegneri, quando fanno calcoli con differenziali, pur conoscendone la definizione rigorosa, in genere li pensano come quantità infinitamente piccole.

In seguito al ritrovamento del palinsesto è stato possibile leggere nuove porzioni del *Metodo* e in particolare la dimostrazione della proposizione 14, nella quale Archimede estende al caso infinito proprietà aritmetiche di successioni finite di numeri. Nel far questo generalizza al caso infinito anche la proprietà degli insiemi di essere "ugualmente numerosi" (πλήθει ἴσα), riservando tale espressione a insiemi infiniti che possono essere posti in corrispondenza biunivoca[36].

È un'idea di grande interesse, che non ha riscontri in altri testi della matematica greca e sarà ripresa solo alla fine dell'Ottocento, nell'ambito della teoria di Cantor dei cardinali transfiniti[37]. È quindi comprensibile l'entusiasmo suscitato da questa scoperta. Non è però corretto vedere in questo strumento euristico usato da Archimede un passo rilevante verso l'analisi matematica moderna[38]. Il concetto di cardinalità di insiemi infiniti, per quanto certamente importante, non ha svolto un ruolo centrale in analisi e in particolare non è di alcuna utilità allo scopo (che aveva Ar-

36. R. Netz, K. Saito, N. Tchernetska, *A New Reading of Archimedes' Use of Indivisibles: Preliminary Evidence from the Archimedes Palimpsest (Part 1)*, in "Sciamus", 2, 2001, pp. 9-29.

37. Galileo aveva già considerato corrispondenze biunivoche tra insiemi infiniti, ma non allo scopo di confrontare la numerosità di tali insiemi, bensì, al contrario, per mostrare l'impossibilità di tali confronti.

38. Affermazioni fuorvianti in questa direzione sono in R. Netz, W. Noel, *Il codice perduto di Archimede*, Rizzoli, Milano 2008, in particolare alle pp. 283-4, dove la moderna analisi infinitesimale sembra stranamente confusa con la teoria di Cantor dei cardinali transfiniti (ed. or. *The Archimedes Codex: Revealing the Secrets of the World's Greatest Palimpsest*, Weidenfeld & Nicolson, London 2007).

chimede) di calcolare aree o volumi; per convincersene basta ricordare che l'insieme dei punti di un segmento ha la stessa cardinalità dell'insieme di tutti i punti di uno spazio euclideo tridimensionale (tra i due insiemi esistono cioè corrispondenze biunivoche). Archimede aveva perfettamente ragione nel considerare il suo metodo puramente euristico e privo di rigore. L'analisi matematica moderna è nata, in larga misura, dallo studio del metodo rigoroso usato da Archimede in tutte le altre sue opere.

Ci si può chiedere se veramente, come di solito si ritiene, il *Metodo* fosse rimasto sconosciuto agli studiosi fino al ritrovamento del palinsesto all'inizio del XX secolo. Un indizio in senso opposto è fornito da Piero della Francesca. Nel suo *Libellus de quinque corporibus regularibus* (precisamente nel decimo caso del quarto trattato) Piero calcola il volume di un solido generalizzando al caso tridimensionale relazioni che riguardano sue sezioni: il metodo sembra proprio quello usato da Archimede nel *Metodo* e l'esposizione è così lacunosa da suggerire fortemente che Piero avesse usato una fonte. Il fatto che il procedimento sia introdotto proprio allo scopo di determinare il volume della stessa doppia volta a padiglione considerata da Archimede suggerisce che la fonte fosse stata proprio il *Metodo*; tanto più che sappiamo del profondo interesse di Piero per Archimede, delle cui opere (in traduzione latina) aveva copiato di propria mano molte pagine[39].

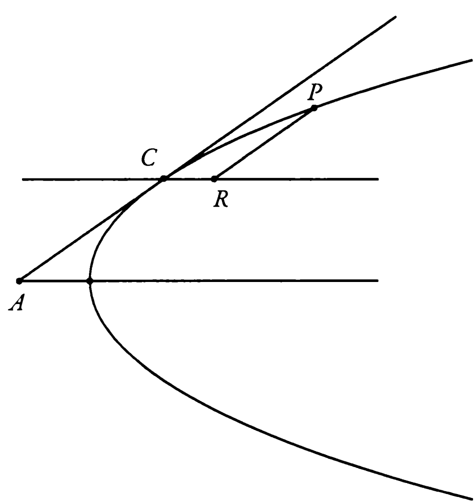
39. J. R. Baker, *A Manuscript of the Works of Archimedes in the Hand of Piero della Francesca*, in "The Burlington Magazine", 147, 2005, pp. 165-9.

9
Altre nozioni prearchimedee

Come nel capitolo 6, anche in questo capitolo raccogliamo una serie di risultati che saranno necessari nel seguito e che Archimede usa senza dimostrarli in quanto già noti.

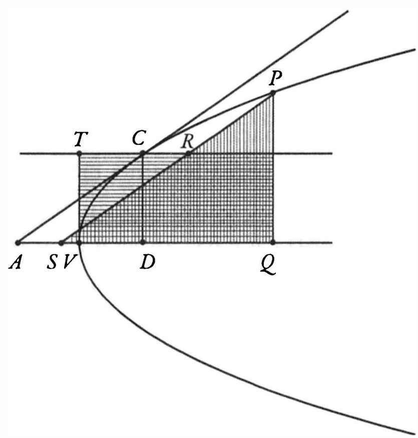
Parabole in coordinate oblique

La proprietà caratteristica della parabola, già prima di Archimede, era nota anche in coordinate oblique. Se consideriamo, cioè, un qualsiasi punto fisso C di una parabola e assumiamo come coordinate del generico punto P della stessa parabola i segmenti PR e RC, dove R è l'intersezione della retta parallela all'asse della parabola passante per C con la retta passante per P parallela alla tangente alla parabola in C, si ha che il rapporto PR^2/CR è costante al variare di P.



Non sappiamo come Archimede avrebbe dimostrato questa proprietà. Una plausibile ricostruzione[1] è basata su due lemmi.

Lemma 1. Consideriamo una parabola di vertice V e un suo punto fisso C. Diciamo D la proiezione ortogonale di C sull'asse della parabola e A l'intersezione di tale asse con la tangente alla parabola in C. Per un punto generico P della parabola diciamo Q la sua proiezione ortogonale sull'asse e S l'intersezione con l'asse della retta passante per P e parallela alla tangente alla parabola in C. Siano inoltre R l'intersezione della parallela all'asse passante per C con la retta PS e T l'intersezione della stessa parallela con la tangente alla parabola nel suo vertice. Allora il rettangolo TQ (individuiamo i rettangoli dandone due vertici opposti), tratteggiato orizzontalmente nella figura, è equivalente al triangolo SPQ (tratteggiato verticalmente).



Per dimostrarlo calcoliamo i rapporti di ciascuna delle due figure con il triangolo ACD. I triangoli SPQ e ACD sono simili. Il loro rapporto r_1 è quindi uguale al quadrato del rapporto tra una qualsiasi coppia di lati corrispondenti; in particolare è

$$r_1 = PQ^2/CD^2 = VQ/VD$$

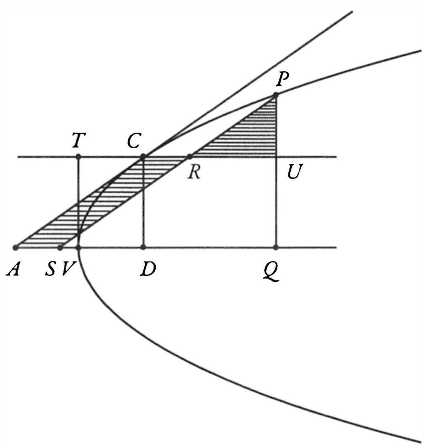
(avendo usato la proprietà caratteristica della parabola). Per calcolare il rapporto r_2 tra il rettangolo di vertici opposti T e Q e il triangolo ACD,

1. La ricostruzione segue quella proposta da Dijksterhuis nel volume *Archimede*, Ponte alle Grazie, Firenze 1989, pp. 57-59 (ed. or. *Archimedes*, Meulenhoff, Amsterdam 1938).

notiamo che il triangolo ACD è equivalente al rettangolo TD: le due figure hanno infatti la stessa altezza e la base del triangolo (per la proprietà della tangente che abbiamo ricordato alle pp. 77-8) è doppia di quella del rettangolo. Il rapporto r_2, essendo uguale al rapporto tra i rettangoli TQ e TD, è VQ/VD ed è quindi uguale a r_1. Il lemma è pertanto dimostrato.

Lemma 2. Il triangolo RPU e il parallelogramma $CRSA$, tratteggiati in figura, sono equivalenti.

Abbiamo già osservato che il triangolo ACD è equivalente al rettangolo TD. Aggiungendo a entrambe le figure il rettangolo CQ, otteniamo che il trapezio $ACUQ$ è equivalente al rettangolo TQ. Usando il lemma 1, ne deduciamo che il triangolo SPQ è equivalente al trapezio $ACUQ$. Sottraendo il trapezio $SRUQ$, otteniamo il lemma 2.



Usando il lemma 2 e la similitudine dei triangoli ACD e RPU, si ha:

$$CR/RU = PU/2CD = PR/2CA, \text{ ossia: } PR/CR = 2CA/RU.$$

D'altra parte, ancora per la similitudine dei triangoli ACD e RPU, si ha:

$$PR/CA = RU/AD.$$

Moltiplicando membro a membro le ultime due eguaglianze, si ha:

$$PR^2/CR = 2CA^2/AD.$$

Poiché il secondo membro non dipende dalla scelta del punto P, abbiamo dimostrato che il rapporto PR^2/CR è costante; abbiamo cioè ottenuto la proprietà caratteristica della parabola in coordinate oblique.

Per analogia con la formula (1) di pagina 79, possiamo scrivere:

$$2p' = PR^2/CR, \quad (1')$$

dove p' è una nuova lunghezza caratteristica. Non è difficile calcolare il rapporto tra p' e p. Considerando le coordinate ortogonali del punto C abbiamo:

$$2p = CD^2/VD.$$

D'altra parte, considerando le coordinate oblique del vertice V, e usando l'eguaglianza dei lati opposti del parallelogramma con tre vertici in C, A e V, si ha:

$$2p' = CA^2/AV = CA^2/VD.$$

Dividendo membro a membro le due eguaglianze, abbiamo:

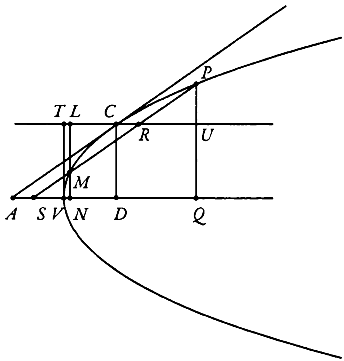
$$p'/p = CA^2/CD^2. \quad (*)$$

Dimostriamo ora il seguente teorema:

Teorema. Le corde della parabola parallele alla tangente alla parabola in un punto C sono bisecate dalla retta condotta per C parallela all'asse della parabola[2].

Nella figura, detta M l'intersezione della parabola con la retta PS, si ha cioè: $MR = RP$. Per il lemma 1, il triangolo SPQ è equivalente al rettangolo TQ; per lo stesso lemma il triangolo SMN è equivalente al rettangolo TN. Ne segue che il trapezio $NMPQ$ è equivalente al rettangolo LQ. Sottraendo da entrambe le figure il pentagono $NMRUQ$, risulta che i triangoli LRM e URP sono equivalenti; poiché sono evidentemente anche simili, essi sono uguali; in particolare è $MR = RP$, come volevamo dimostrare.

2. Anche questo teorema è citato da Archimede come già noto, senza dimostrarlo (*Quadratura della parabola*, 166, 2-7, ed. Mugler).



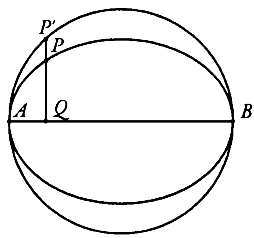
Osservazione. Notiamo che, inversamente, se la corda MP della parabola è parallela alla tangente alla parabola nel punto C (interno all'arco MP) e R è il punto medio del segmento MP, allora la retta CR è parallela all'asse della parabola (poiché, infatti, la retta passante per C e parallela all'asse della parabola deve intersecare il segmento MP in R, non può che coincidere con CR).

La proprietà caratteristica dell'ellisse

Archimede conosce e usa la proprietà seguente dell'ellisse:

> Data un'ellisse, della quale AB è uno degli assi, sia C la circonferenza di diametro AB. Per un punto generico P dell'ellisse, sia Q la sua proiezione ortogonale sull'asse AB e P' l'intersezione della semiretta QP con la circonferenza C. Il rapporto $PQ/P'Q$ non dipende dalla scelta del punto P, ma è costante (ed è evidentemente uguale al rapporto tra i due assi dell'ellisse).

Invece di dimostrare questa proprietà, la assumeremo come definizione dell'ellisse, in quanto corrisponde all'idea intuitiva che l'ellisse non sia altro che una circonferenza dilatata o contratta in una direzione secondo un rapporto costante.



Proprietà caratteristica dell'ellisse. Se P è un punto generico di un'ellisse e Q è la sua proiezione ortogonale sull'asse AB, il rapporto $PQ^2/(AQ \cdot QB)$ è costante[3].

Questa proprietà segue subito da quella assunta come definizione. Per la circonferenza è infatti $P'Q^2 = AQ \cdot QB$ (poiché il triangolo $AP'B$ è rettangolo in P' e in un triangolo rettangolo l'altezza relativa all'ipotenusa è media proporzionale tra le proiezioni ortogonali dei cateti sull'ipotenusa). Poiché, d'altra parte, il rapporto $PQ/P'Q$ è costante, è evidentemente:

$$PQ^2/(AQ \cdot QB) = PQ^2/P'Q^2 = (r_1/r_2)^2,$$

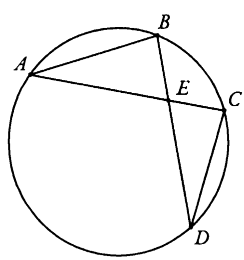
avendo indicato con r_1 e r_2 i due assi dell'ellisse.

Una proprietà dell'ellisse e della parabola

Cominciamo con il ricordare un noto teorema di geometria elementare[4].

Teorema. Se due corde, AC e BD, di una circonferenza si intersecano nel punto E, allora è:
$AE \cdot EC = BE \cdot ED.$

La dimostrazione è molto semplice. I triangoli ABE e DCE sono simili, poiché hanno tutti gli angoli uguali (l'angolo ABD è uguale all'angolo ACD perché sono angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco; per lo stesso motivo l'angolo BAC è uguale all'angolo BDC; gli angoli in E sono uguali perché opposti al vertice).



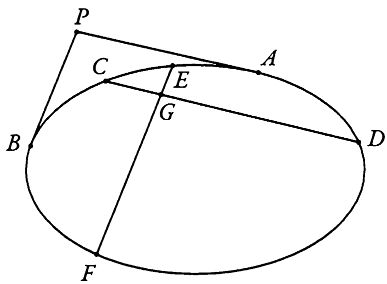
3. Archimede usa questa proprietà, senza dimostrarla, nella proposizione 4 dell'opera *Sui conoidi e gli sferoidi* (166-169, ed. Mugler).
4. Il teorema è in Euclide, *Elementi*, III, 35. La dimostrazione di Euclide è molto più complessa di quella data qui, perché nel III libro Euclide non ha ancora introdotto il concetto di similitudine.

È quindi:

$$BE : AE = EC : ED \quad AE \cdot EC = BE \cdot ED.$$

Il teorema seguente è una generalizzazione del precedente, valido per ellissi e parabole[5]:

Teorema. Da un punto P esterno a un'ellisse o una parabola si conducano le tangenti alla curva e A e B siano i punti di tangenza. Se CD e EF sono due corde della curva rispettivamente parallele a PA e PB che si intersecano in G, si ha:
$CG \cdot GD/(EG \cdot GF) = PA^2/PB^2$



La dimostrazione segue facilmente dal teorema precedente relativo alla circonferenza. Nel caso della circonferenza entrambi i membri dell'ultima eguaglianza valgono 1; nel caso dell'ellisse entrambi vanno modificati tenendo conto della contrazione (o dilatazione) che ha trasformato la circonferenza in ellisse. Poiché tutti i segmenti tra loro paralleli sono evidentemente dilatati o contratti allo stesso modo, l'eguaglianza continua evidentemente a valere.

Il caso della parabola si ottiene subito se si ricorda che un arco finito di parabola può essere approssimato comunque bene con un arco di ellisse (basta usare un'ellisse ottenuta tagliando il cono con un piano che formi un angolo sufficientemente piccolo con quello che aveva generato la parabola).

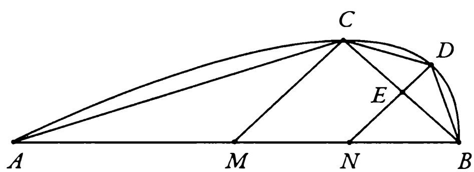
5. Vale anche per le iperboli, ma non consideriamo questo caso perché non ne avremo bisogno. Archimede cita il teorema (relativo a tutte e tre le sezioni coniche) rinviando per la sua dimostrazione a un'opera perduta, probabilmente di Euclide (Archimede, *Sui conoidi e gli sferoidi*, proposizione 3).

10
Geometria e idrostatica

Dopo avere usato i risultati del capitolo precedente per dimostrare il lemma che avevamo lasciato in sospeso a pagina 100, esporremo qui parte dei risultati più avanzati del trattato *Sui galleggianti*. Per dimostrarli dovremo usare alcuni teoremi ottenuti da Archimede nell'opera *Sui conoidi e gli sferoidi*.

Il lemma della *Quadratura della parabola*

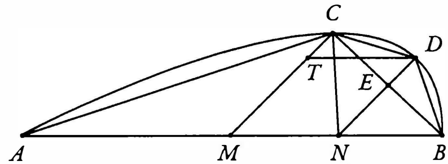
> Se C è il vertice del segmento di parabola di base AB e D è il vertice del segmento di parabola di base CB, il triangolo BDC è 1/8 del triangolo ABC[1].



Consideriamo le rette parallele all'asse della parabola passanti per C e per D. Per il teorema dimostrato alle pagine 132-3, queste rette intersecano i segmenti AB e BC nei loro punti medi, M ed E. Diciamo N l'intersezione del segmento AB con la retta ED. La similitudine dei triangoli MCB e NEB implica allora che N è il punto medio di MB. Sia T l'intersezione della retta parallela ad AB passante per D con il segmento CM. Per la proprietà caratteristica della parabola in coordinate oblique, si ha che:

$$CM/CT = MB^2/TD^2.$$

1. Archimede, *Quadratura della parabola*, proposizione 21. Per la terminologia usata, cfr. *supra*, p. 98, nota 1.



D'altra parte il segmento TD è uguale al segmento MN. Si ha quindi: $CM/CT = MB^2/MN^2 = 4$ e $DN = TM = (3/4)\ CM$. Poiché d'altra parte è $NE = 1/2\ CM$ (come segue dal confronto dei triangoli simili MCB e NEB) si ottiene $NE = 2\ DE$. Si ha quindi:

triangolo $CNE = 2$(triangolo CED); triangolo $NEB = 2$(triangolo BED);

e sommando le due relazioni:

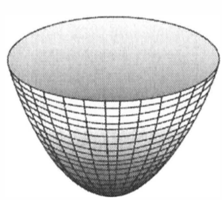
triangolo $CNB = 2$(triangolo CBD);
triangolo $CDB = (1/2)$ (triangolo CNB) $= (1/8)$ (triangolo ABC),

come si voleva dimostrare.

Stabilità dell'equilibrio: un risultato preliminare

Torniamo al trattato di Archimede *Sui galleggianti* per esporre una parte dei profondi risultati esposti nel secondo libro dell'opera. Archimede vi usa sistematicamente il concetto di baricentro, che neppure in questa opera è definito (cfr. *supra*, pp. 57-8). Si assume, come risultato ben noto, che il peso di un corpo possa essere pensato applicato al suo baricentro e, come postulato nuovo, enunciato esplicitamente, che la spinta idrostatica agente su un corpo galleggiante sia applicata al baricentro della sua parte immersa.

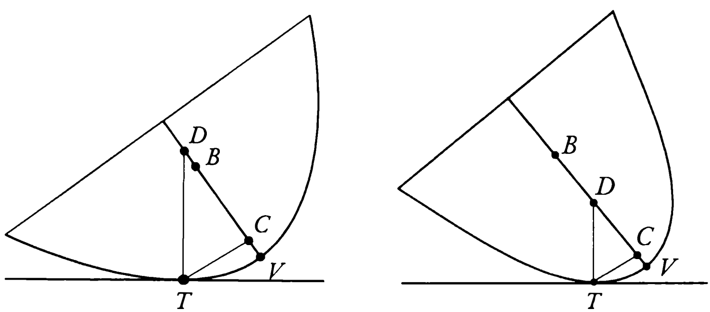
Archimede studia in particolare la stabilità dell'equilibrio di un corpo galleggiante omogeneo con la forma di un segmento retto di paraboloide di rotazione (cfr. *supra*, p. 116).



Se un tale solido è posto verticalmente nell'acqua sarà evidentemente in equilibrio per ragioni di simmetria; ma in quali condizioni tale equilibrio è stabile?

Per comodità del lettore, dividiamo in due parti la determinazione delle condizioni di stabilità, risolvendo prima, con lo stesso metodo usato da Archimede, un problema più semplice di quello da lui affrontato. Supponiamo che il corpo non sia immerso nell'acqua, ma appoggiato in posizione verticale su un piano orizzontale rigido. Per determinare se tale equilibrio è stabile, immaginiamo di inclinare il segmento di paraboloide verso la nostra sinistra e disegniamo la sezione del solido con il piano verticale che include l'asse inclinato. Diciamo V il vertice del paraboloide, B il suo baricentro e T il punto in cui il solido è tangente al piano.

È chiaro che il peso, essendo applicato in B, tenderà a raddrizzare il solido se la verticale passante per B è alla destra di quella passante per T (come accade nella figura a sinistra), mentre aumenterà l'inclinazione se (come nella figura a destra) si verifica il caso contrario.



Ora dobbiamo ricordare due risultati dimostrati alle pagine 79 e 117:

1. se conduciamo da un punto T di una parabola una retta ortogonale al suo asse e un'altra, nel piano della parabola, ortogonale alla tangente alla parabola in T, detti C e D i punti d'incontro di tali rette con l'asse, la distanza tra C e D non dipende dal punto T, ma è sempre uguale al parametro p della parabola;
2. il baricentro B di un segmento retto di paraboloide di rotazione si trova sull'asse e dista dal vertice (2/3) dell'asse (per asse del segmento retto di paraboloide si intende la parte dell'asse del paraboloide contenuta nel segmento).

Tornando al nostro problema, è chiaro che se la distanza VD supera VB la verticale passante per il baricentro sarà alla destra di quella passante per T e quindi il peso del solido tenderà a raddrizzarlo; l'equilibrio verticale sarà pertanto stabile. D'altra parte perché VD superi VB è certamente sufficiente che CD superi VB. Poiché CD è uguale al parametro p della parabola che ha generato il nostro paraboloide e VB vale $(2/3)h$ (dove h è l'altezza del solido, ossia la lunghezza del suo asse), una condizione sufficiente per la stabilità dell'equilibrio verticale è la diseguaglianza $p > (2/3)h$, ossia $h < (3/2)p$.

Se vale la diseguaglianza opposta, $CD < (2/3)h$, per inclinazioni sufficientemente piccole la distanza tra C e V sarà così piccola che anche VD sarà minore di VB e il peso tenderà ad aumentare l'inclinazione; l'equilibrio verticale sarà pertanto instabile per segmenti la cui altezza eccede $(3/2)p$.

La stabilità dell'equilibrio dipende quindi dal rapporto h/p, che è un parametro di forma del segmento di paraboloide. Se tale rapporto è inferiore alla soglia 3/2 l'equilibrio è stabile, mentre se è superiore è instabile.

Per studiare l'equilibrio di un galleggiante a forma di segmento retto di paraboloide di rotazione dovremo considerare la sua parte immersa, che è ancora un segmento di paraboloide, ma non retto. Abbiamo perciò bisogno di premettere altri risultati ottenuti da Archimede nell'opera *Sui conoidi e gli sferoidi*.

Area dell'ellisse

Archimede dimostra il teorema seguente:

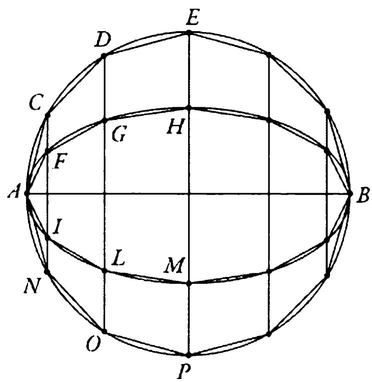
> *Teorema*. Il rapporto tra la superficie racchiusa da un'ellisse e il cerchio avente un diametro uguale all'asse maggiore dell'ellisse è uguale al rapporto tra l'asse minore e l'asse maggiore dell'ellisse[2].

L'enunciato equivale, nel nostro linguaggio, a esprimere l'area racchiusa dall'ellisse con la formula $S = \pi ab$, dove a e b sono i due suoi semiassi.

Archimede considera una circonferenza e un'ellisse il cui asse maggiore

2. Archimede, *Sui conoidi e gli sferoidi*, proposizione 4.

coincide con un diametro AB della circonferenza. Inscrive poi nella circonferenza un poligono regolare, con un numero pari di lati, che ha A e B come vertici opposti. Per ogni altro vertice traccia la retta ortogonale ad AB. Congiungendo le intersezioni di tali rette con l'ellisse si ottiene un poligono inscritto nell'ellisse. Le rette tracciate ortogonalmente al diametro AB dividono i due poligoni in due triangoli e diversi trapezi. La proprietà dell'ellisse che a pagina 133 abbiamo usato come sua definizione implica immediatamente che il rapporto tra ciascun elemento (trapezio o triangolo) in cui è stato suddiviso il poligono inscritto alla circonferenza e l'elemento corrispondente del poligono inscritto nell'ellisse è uguale al rapporto tra asse maggiore e asse minore dell'ellisse. Ad esempio i trapezi $CDON$ e $FGLI$ in figura hanno la stessa altezza mentre il rapporto tra le basi è uguale al rapporto tra i due assi dell'ellisse. Tale è quindi anche il rapporto tra i due poligoni.



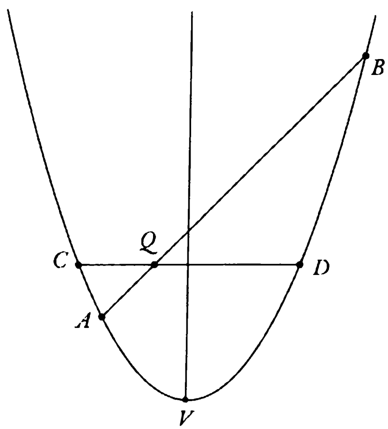
Poiché le aree del cerchio e dell'ellisse possono essere approssimate arbitrariamente bene con quelle dei poligoni inscritti[3], è chiaro che anche il rapporto tra cerchio e superficie racchiusa dall'ellisse deve essere uguale al rapporto tra i due assi dell'ellisse. Non riportiamo in dettaglio la dimostrazione di Archimede, effettuata come d'abitudine per assurdo, perché ogni lettore attento può facilmente ricostruirla sul modello delle dimostrazioni analoghe già viste.

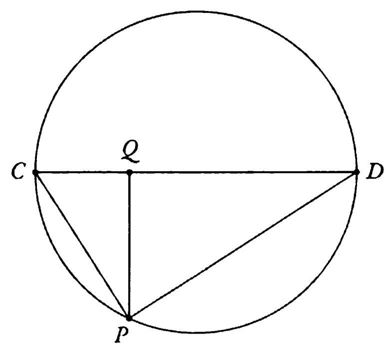
3. Nel caso del cerchio ciò segue subito dai risultati dimostrati alle pagine 122-3 (cfr. in particolare la nota 33); per l'estensione all'ellisse basta osservare che l'eccesso dell'ellisse rispetto al poligono inscritto è minore dell'eccesso analogo relativo al cerchio.

Segmenti obliqui di paraboloidi

Il solido limitato da un paraboloide di rotazione e un piano non ortogonale all'asse è detto "segmento obliquo di paraboloide" e la parte piana della sua superficie è detta "base" del segmento. Tale base ha forma ellittica. Più precisamente vale il teorema seguente:

> *Teorema.* Se un paraboloide di rotazione è tagliato da un piano che non contiene l'asse, non è parallelo all'asse e non è ortogonale all'asse, l'intersezione è un'ellisse, il cui asse maggiore è costituito dal segmento interno al paraboloide della retta intersezione del piano secante con il piano a esso ortogonale che comprende l'asse del paraboloide. L'asse minore è uguale alla distanza tra le rette passanti per gli estremi dell'asse maggiore e parallele all'asse del paraboloide[4].





Il piano della figura a sinistra è il piano π passante per l'asse e ortogonale al piano secante; AB è l'intersezione di π con il piano secante. Consideriamo un qualsiasi punto P appartenente all'intersezione del paraboloide con il piano secante (P non è rappresentato nella figura perché in genere è esterno a π) e sia Q la sua proiezione ortogonale su π. Il piano π' passante per Q e ortogonale all'asse è il piano della figura a destra; π' interseca il paraboloide in una circonferenza (come è evidente per simmetria) che taglia π nei punti C e D. Il triangolo CPD, essendo inscritto in una semicirconferenza, è rettangolo. È pertanto:

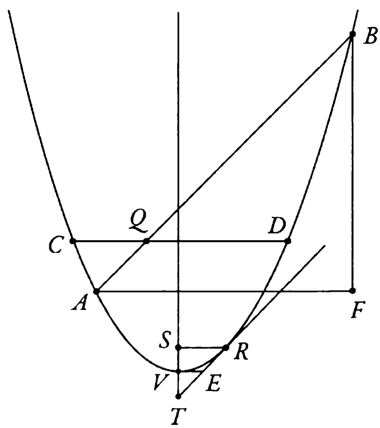
4. Archimede, *Sui conoidi e gli sferoidi*, proposizione 12.

$$PQ^2 = CQ \cdot QD \quad (1)$$

Consideriamo ora, nel piano π, la tangente alla parabola parallela ad AB e sia R il punto di tangenza (cfr. figura seguente). Sia inoltre E l'intersezione della tangente in R con la tangente alla parabola nel vertice V.

Per la versione relativa alla parabola del teorema dimostrato a pagina 135, abbiamo:

$$(CQ \cdot QD)/(AQ \cdot QB) = VE^2/ER^2 \quad (2)$$



Diciamo S la proiezione ortogonale di R sull'asse e T l'intersezione della tangente in R con l'asse. Per la proprietà della tangente alla parabola ricordata alle pagine 77-8, è $SV = VT$. Confrontando i triangoli SRT e VET, ne segue subito che è:

$$TE = ER.$$

La formula (2) può allora essere riscritta:

$$(CQ \cdot QD)/(AQ \cdot QB) = VE^2/TE^2. \quad (3)$$

Nel piano π consideriamo la retta passante per B e parallela all'asse e la retta passante per A e ortogonale all'asse e sia F la loro intersezione. I triangoli ABF e ETV sono evidentemente simili. Ne segue:

$$VE/TE = AF/AB.$$

Sostituendo l'ultima eguaglianza nella formula (3) abbiamo:

$$(CQ \cdot QD)/(AQ \cdot QB) = AF^2/AB^2$$

Ricordando la formula (1) si ha infine:

$$PQ^2/(AQ \cdot QB) = AF^2/AB^2.$$

Come abbiamo visto a pagina 134, l'ultima relazione è proprio la proprietà caratteristica di un'ellisse con assi AB e AF e ciò completa la dimostrazione del teorema.

Diremo "vertice" di un segmento obliquo di paraboloide il punto della sua superficie a distanza massima dalla base (in tale punto, da non confondere con il vertice del paraboloide, il piano tangente è parallelo alla base, come è intuitivamente evidente e non difficile da dimostrare)[5] e suo "asse" il segmento di retta parallelo all'asse del paraboloide che congiunge il vertice con la base. Come nel caso del segmento retto vale il seguente teorema:

> *Teorema.* Un segmento obliquo di paraboloide di rotazione è equivalente a metà del cilindro (anch'esso obliquo) circoscritto (ossia del cilindro che ha la stessa base e lo stesso asse del segmento di paraboloide)[6].

Anche in questo caso non riportiamo la complessa dimostrazione di Archimede, che il lettore attento può ricostruire da solo imitando le dimostrazioni analoghe già viste. Notiamo solo che è possibile ripetere gli stessi argomenti usati alle pagine 116-7 per il segmento retto. L'unica differenza è che in questo caso le "fettine" in cui viene diviso il solido hanno basi non circolari, ma ellittiche. Consideriamo l'ellisse ottenuta tagliando il segmento di paraboloide con un piano parallelo alla base che interseca l'asse del segmento in un punto a distanza x dal suo vertice. Usando la proprietà caratteristica della parabola in coordinate oblique (dimostrata alle pp. 129-32), si vede subito che entrambi gli assi di tale ellisse sono proporzionali alla radice quadrata di x. Ricordando il teorema dimostra-

5. La dimostrazione è identica a quella accennata nella nota 5 del capitolo 8 (p. 99) per il caso del segmento di parabola.
6. Archimede, *Sui conoidi e gli sferoidi*, proposizione 22.

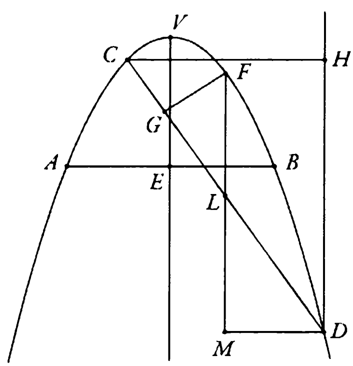
to alle pagine 140-1, ne segue che l'area dell'ellisse è proporzionale a x. Il teorema può quindi essere dimostrato calcolando il volume del segmento obliquo di paraboloide esattamente allo stesso modo del caso del segmento retto.

Allo stesso modo si può anche dimostrare (Archimede usa questo risultato, che probabilmente era contenuto in un'opera perduta) che il baricentro di un segmento obliquo di paraboloide di rotazione si trova sull'asse del segmento e dista dal vertice (2/3) dell'asse.

Il prossimo teorema sarà particolarmente importante per le applicazioni all'idrostatica che vedremo alle pagine 147-8.

Teorema. Due segmenti di uno stesso paraboloide di rotazione, uno retto e l'altro obliquo, sono equivalenti se hanno assi uguali[7].

Il piano della figura è quello ortogonale a entrambi i piani secanti. Le basi dei due segmenti intersecano il piano della figura in AB e CD. F è il vertice del segmento obliquo, cosicché il piano tangente al paraboloide in F è parallelo alla base CD di tale segmento. Gli assi dei due segmenti sono VE e FL e per ipotesi $VE = FL$.



La base del segmento retto è un cerchio di diametro AB, mentre la base di quello obliquo è racchiusa da un'ellisse. Alla luce del teorema di pagina 142, l'asse maggiore dell'ellisse è CD e l'asse minore è uguale a CH, essendo H l'intersezione, nel piano della figura, della retta passante per D

7. Archimede, *Sui conoidi e gli sferoidi*, proposizione 23.

e parallela all'asse del paraboloide con la retta passante per C ortogonale allo stesso asse.

Il rapporto tra le due basi è quindi:

$$AB^2 : CD \cdot CH.$$

Per il teorema dimostrato a pagina 132, $DL = CD/2$ e da questa uguaglianza (data la similitudine dei triangoli CHD e DML) segue che è anche $MD = CH/2$. Il rapporto tra le due basi può quindi anche essere scritto:

$$EB^2 : LD \cdot MD.$$

D'altra parte, per la proprietà caratteristica della parabola in coordinate oblique e la formula (*) di pagina 132, si ha:

$$(DL^2/FL)/(EB^2/VE) = DL^2/MD^2.$$

Semplificando l'ultima uguaglianza e ricordando che $VE = FL$, otteniamo:

$$EB = MD.$$

Il rapporto tra le basi può quindi essere scritto:

$$MD : LD.$$

D'altra parte, per la similitudine dei triangoli FGL e DML, si ha:

$$MD : LD = FG : FL = FG : VE.$$

Il rapporto tra le basi dei due segmenti è quindi inverso al rapporto tra le loro altezze. I risultati già esposti sui volumi dei segmenti (retti o obliqui) di paraboloide implicano allora l'equivalenza dei due segmenti. Il teorema è quindi dimostrato.

Ci interesserà anche il seguente corollario:

Corollario. Il rapporto tra i volumi di due segmenti di uno stesso paraboloide di rotazione è uguale al rapporto tra i quadrati dei loro assi[8].

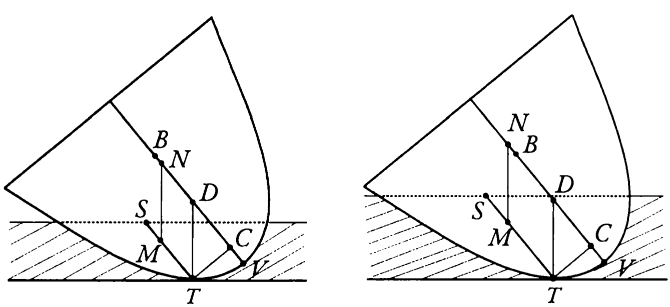
8. Archimede, *Sui conoidi e gli sferoidi*, proposizione 24 (213-215, ed. Mugler).

Grazie al teorema precedente, basta considerare due segmenti retti e in questo caso l'enunciato segue subito dall'espressione del loro volume, che è proporzionale al quadrato della loro altezza (i volumi sono infatti la metà di quelli dei cilindri circoscritti, pari al prodotto dell'area di base per l'altezza e il raggio del cerchio di base, per la proprietà caratteristica della parabola, è proporzionale alla radice quadrata dell'altezza).

Stabilità dell'equilibrio di un paraboloide galleggiante

Siamo ora pronti ad affrontare il problema della stabilità dell'equilibrio in acqua di un galleggiante con la forma di segmento retto di paraboloide. Se il solido si inclina, sarà soggetto a due forze: il peso, diretto verso il basso e applicato al baricentro B del solido, e la spinta idrostatica, diretta verso l'alto e applicata al baricentro M della sua parte immersa. Chiamando "sinistra" la direzione verso cui il solido è inclinato, è chiaro che se la verticale passante per M è a destra di quella passante per B (come avviene nella figura a sinistra) le due forze avranno l'effetto di aumentare l'inclinazione del galleggiante. Se invece (come avviene nella figura a destra) la verticale passante per M è a sinistra di quella passante per B, le due forze raddrizzeranno il galleggiante e l'equilibrio verticale sarà perciò stabile. Detta N l'intersezione dell'asse del paraboloide con la verticale passante per M, è per questo sufficiente che sia $CN > VB$, ossia:

$$CD + DN = p + TM > (2/3)h.$$



La diseguaglianza è certamente soddisfatta se $p > (2/3)h$, ma tale condizione non è più necessaria, come avveniva nel caso del solido appoggiato sul piano. L'immersione nel liquido rende possibile la stabilità anche nel caso $p < (2/3)h$, purché il galleggiante peschi abbastanza, in modo che la differenza $(2/3)h - p$ sia superata da TM.

La lunghezza di TM dipende ovviamente dal volume immerso e quindi dal valore d del rapporto (oggi detto "peso specifico relativo") tra il peso del corpo e il peso di un uguale volume di liquido. Sappiamo che d è uguale al rapporto tra il volume della parte immersa del solido e il suo volume totale (cfr. *supra*, p. 49). D'altra parte il rapporto tra i volumi di due segmenti di uno stesso paraboloide di rotazione è uguale al rapporto tra i quadrati dei loro assi (cfr. *supra*, p. 146). Abbiamo quindi che:

$$d = (ST/h)^2 = (TM/VB)^2.$$

La condizione per la stabilità dell'equilibrio verticale, $p + TM > (2/3)h$, può allora essere scritta:

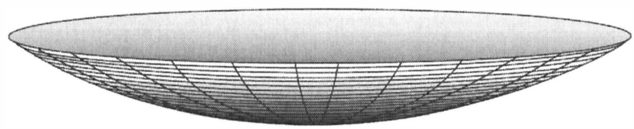
$$TM > (2/3)h - p; \quad (TM/VB)^2 > [(2/3)h - p)]^2/VB^2;$$

$$d > [(2/3)h - p)]^2/[(2/3)h]^2; \quad d > [1 - (3/2)p/h]^2.$$

Anche in questo caso Archimede ha trovato una soglia esatta. Si può vedere facilmente, infatti, che se vale la diseguaglianza opposta l'equilibrio verticale è instabile.

Archimede prosegue studiando il caso in cui, essendo superate entrambe le soglie, l'equilibrio verticale è instabile. Studia allora le posizioni di equilibrio con l'asse inclinato, determinandone l'angolo di inclinazione e la stabilità e trova in quali condizioni la base del segmento di paraboloide non tocca la superficie del liquido; la complessità delle sue argomentazioni sconsiglia però di riproporle qui.

Poiché un segmento retto di un paraboloide di rotazione assomiglia molto poco allo scafo di una nave, può sembrare che questi risultati di Archimede non abbiano utili applicazioni all'ingegneria navale. Se però dilatiamo il segmento di paraboloide in una direzione ortogonale all'asse, come in figura, trasformando il paraboloide di rotazione in un paraboloide ellittico, la sua forma può divenire molto più simile allo scafo di una nave e tutti i risultati di Archimede continuano a valere. Tutte le dimostrazioni relative a una sezione del solido ottenuta con un piano verticale ortogonale alla direzione della dilatazione rimangono infatti inalterate. (Naturalmente i risultati sulla stabilità riguarderanno in questo caso le inclinazioni sul fianco, ossia, nel caso della nave, il rollio; se il solido è stabile rispetto a tali inclinazioni a maggior ragione lo sarà nella direzione ortogonale, relativa al beccheggio.)



Archimede si era certamente reso conto di questa possibile generalizzazione dei suoi risultati, poiché si tratta di un procedimento da lui usato più volte (ad esempio, come abbiamo visto alle pagine 140-1, quando calcola l'area racchiusa da un'ellisse ottenendola contraendo o dilatando un cerchio in una direzione).

Naturalmente neppure la nuova forma riproduce fedelmente lo scafo di una nave, ma può costituire un utile termine di riferimento. Anche i fisici moderni hanno spesso usato problemi esattamente risolubili come utili approssimazioni di problemi reali. Abbiamo già visto alle pagine 67-8, del resto, come l'idrostatica archimedea fosse stata contemporanea a grandi progressi dell'ingegneria navale.

I teoremi esposti in questo paragrafo rimasero non solo insuperati, ma anche incompresi per due millenni. Il problema della stabilità dell'equilibrio dei corpi galleggianti fu affrontato di nuovo per la prima volta nel 1747 da Eulero, che nella sua *Scientia navalis* ottenne risultati che, rispetto a quelli di Archimede, erano più generali ma meno rigorosi.

11
Qualche altro risultato

La misura del cerchio

Lo scritto rimastoci con il titolo *Misura del cerchio* (con ogni probabilità un rifacimento di una parte di un'opera di Archimede)[1] è basato sull'idea di approssimare il cerchio con poligoni regolari inscritti e circoscritti e la circonferenza con i loro perimetri. Un cerchio è ovviamente maggiore di un poligono inscritto in esso contenuto e minore di un poligono circoscritto che lo contiene. La circonferenza è inoltre maggiore del perimetro di un poligono inscritto e minore del perimetro di un poligono circoscritto. Come abbiamo già notato a pagina 122, queste diseguaglianze seguono dai primi due postulati dell'opera *Sulla sfera e sul cilindro*, riportati nella stessa pagina. Il primo ci assicura infatti che ogni lato del poligono inscritto è minore dell'arco corrispondente della circonferenza, mentre il secondo implica che l'arco di circonferenza compreso tra due successivi punti di tangenza ai lati del poligono circoscritto è più breve del tratto del perimetro del poligono compreso tra gli stessi due punti.

La breve opera contiene due risultati principali[2]. Il primo è il teorema seguente:

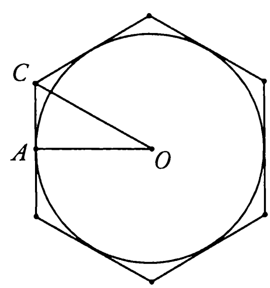
> Un cerchio è equivalente a un triangolo rettangolo con un cateto uguale al raggio e l'altro uguale alla circonferenza del cerchio[3].

1. Wilbur Knorr ha sostenuto che il rifacimento potrebbe essere dovuto a Ipazia (W. Knorr, *Textual Studies in Ancient and Medieval Geometry*, Birhhäuser, Boston, MA, 1989).
2. Vi è anche una terza proposizione che permette di approssimare il rapporto tra l'area del cerchio e il quadrato del diametro, ma si tratta di un elementare corollario della seconda.
3. Archimede, *Misura del cerchio*, proposizione 1 (138-139, ed. Mugler).

L'idea della dimostrazione è molto semplice. Innanzitutto si nota che ogni poligono regolare è equivalente a un triangolo rettangolo avente un cateto uguale al perimetro e l'altro uguale all'apotema. Poiché le differenze tra le superfici dei poligoni regolari circoscritti e inscritti e quella del cerchio, come quelle tra gli apotemi (e i lati) del poligono regolare inscritto e quello circoscritto con lo stesso numero di lati, possono essere rese comunque piccole scegliendo poligoni con un numero di lati sufficientemente grande[4], il risultato può essere rapidamente ottenuto per assurdo con il solito metodo usato da Archimede, che abbiamo visto all'opera più volte.

Il secondo risultato consiste nel celebre metodo di approssimazione di Archimede del valore (che noi indichiamo con π) del rapporto tra una circonferenza e il suo diametro. Il metodo, basato sull'idea di approssimare una circonferenza con i perimetri di poligoni regolari inscritti e circoscritti, mostra come Archimede non evitasse, quando necessario, calcoli numerici anche fastidiosi[5].

Per ottenere un'approssimazione per eccesso di π, Archimede comincia con il considerare un esagono regolare circoscritto a una circonferenza, calcolandone il perimetro.



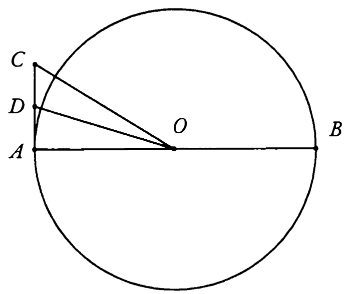
Metà del lato di un tale esagono è rappresentato in figura dal segmento AC e OC forma un angolo di 30° (un terzo di angolo retto, nel linguaggio di Archimede) con il raggio OA. Poiché il triangolo AOC è metà di un triangolo equilatero, $OC = 2AC$. Il teorema detto "di Pitagora"[6] permette quindi di calcolare il rapporto tra il raggio $r = AO$ e AC:

4. Cfr. *supra*, p. 123, nota 33.
5. Archimede (o l'autore del rifacimento giunto a noi) evita di esporre il dettaglio dei calcoli, che si trovano nel commento di Eutocio.
6. Euclide, *Elementi*, I, proposizione 47.

$$AO^2 = (2AC)^2 - AC^2 = 3AC^2; \quad AO = \sqrt{3}AC.$$

Un valore approssimato per eccesso del rapporto AC/AO può allora essere ottenuto usando un valore approssimato per difetto di $\sqrt{3}$. Archimede usa il valore 265/153 (che ha un errore relativo di circa 10^{-5})[7]. Sono state fatte varie ipotesi, alcune molto plausibili, sul procedimento usato da Archimede per arrivare a questa approssimazione, che tuttavia non può essere considerato noto con certezza. Si ottiene così una grossolana stima superiore del rapporto (oggi detto π) tra circonferenza e diametro:

$$\pi < 12\,AC/(2AO) < 6 \cdot 153/265 \approx 3{,}464.$$



Per ottenere una stima più accurata Archimede raddoppia il numero dei lati del poligono circoscritto, considerando un dodecagono regolare. Traccia per questo la bisettrice OD dell'angolo AOC. Il segmento AD è evidentemente la metà del lato del dodecagono regolare circoscritto. La bisettrice di un angolo di un triangolo divide il lato opposto in parti proporzionali agli altri due lati[8]; è quindi $CD/DA = OC/OA = 2AC/OA = 2/\sqrt{3}$. Usan-

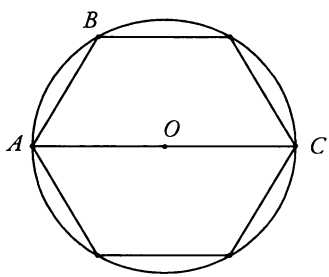
7. Oggi siamo abituati a esprimere numeri non interi quasi sempre dandone le cifre decimali. Usiamo cioè quasi sempre frazioni che hanno per denominatore potenze di 10. I matematici ellenistici usavano invece frazioni con qualsiasi denominatore. Il nostro sistema ha il vantaggio di mostrare immediatamente quale è il maggiore tra due numeri; l'altro ha il vantaggio, ottimizzando il denominatore, di ottenere spesso, a parità di cifre utilizzate, approssimazioni migliori di quantità irrazionali.

8. Euclide, *Elementi*, VI, proposizione 3. Ecco la dimostrazione. Dato un triangolo generico ABC, diciamo M il punto in cui la bisettrice dell'angolo in A interseca il lato BC. Dobbiamo dimostrare che $BM : MC = AB : AC$. Tracciamo la retta che passa per B ed è parallela alla bisettrice AM e sia D l'intersezione di tale retta con il prolungamento del lato AC. Per il teorema detto "di Talete", $BM : MC = DA : AC$. D'altra parte il triangolo

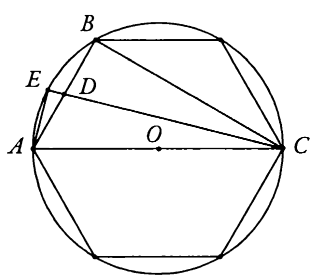
do questo risultato, è facile dedurre dalla stima precedente, relativa all'esagono, una stima dall'alto del rapporto *DA*/*AO* e quindi del rapporto tra il perimetro del dodecagono circoscritto e il diametro. Il procedimento può essere iterato raddoppiando ogni volta il numero di lati del poligono circoscritto. Risparmiando al lettore i calcoli successivi, ricordiamo che Archimede si ferma al caso del poligono regolare circoscritto con 96 lati, dimostrando che il rapporto tra il suo perimetro e il diametro è minore di 14.688 : 4.673,5, a sua volta minore di 22/7, ottenendo la stima:

$$\pi < 22/7.$$

Per ottenere una stima inferiore, Archimede considera poligoni inscritti, cominciando anche in questo caso dall'esagono regolare.



Poiché il lato dell'esagono regolare inscritto è uguale al raggio, una prima ovvia stima per difetto di π è 3. Per ottenere una stima più accurata, anche in questo caso si può raddoppiare il numero dei lati del poligono, considerando il dodecagono regolare.



DAB è isoscele (ha infatti gli angoli in *D* e in *B* entrambi uguali a metà dell'angolo *BAC*) ed è quindi *DA* = *AB*; sostituendo nell'eguaglianza precedente si ottiene la tesi.

Se consideriamo la bisettrice dell'angolo ACB e se D ed E sono le sue intersezioni con il lato AB e la circonferenza, il segmento AE è il lato del dodecagono regolare inscritto (infatti, se sono uguali gli angoli alla circonferenza BCE e ECA, lo sono anche i corrispondenti angoli al centro BOE e EOA).

Per calcolare la lunghezza di AE, osserviamo che i triangoli AEC e DBC sono simili. Sono infatti entrambi rettangoli e gli angoli ACE e DCB sono uguali. È quindi:

$$EC/AE = BC/BD.$$

D'altra parte, poiché EC è la bisettrice dell'angolo ACB, per il teorema dimostrato nella nota 8, è anche:

$$BD/DA = BC/AC, \quad \text{ossia} \quad BC/BD = AC/AD.$$

Abbiamo quindi:

$$EC/AE = BC/BD = AC/AD = (BC + AC)/(BD + AD) = (BC + AC)/AB.$$

Poiché $AB = r$, $AC = 2r$ e $BC = \sqrt{3}r$ (come si vede applicando il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo ABC), otteniamo:

$$EC/AE = 2 + \sqrt{3}.$$

Applicando il teorema di Pitagora al triangolo AEC otteniamo:

$$4r^2 = AC^2 = AE^2 + EC^2 = AE^2(1 + EC^2/AE^2) = AE^2(8 + 4\sqrt{3}).$$

L'ultima relazione permette di calcolare il rapporto tra il perimetro del dodecagono regolare inscritto e il diametro, ottenendo una stima dal basso di π. Occorre per questo usare un'approssimazione per eccesso di $\sqrt{3}$. Archimede usa il valore 1.351/780. La stima dal basso così ottenuta per π è molto rozza (circa 3,1), ma può essere migliorata raddoppiando il numero dei lati. Anche in questo caso Archimede itera il procedimento fino a considerare il poligono regolare inscritto di 96 lati. Si ottengono infine le eleganti diseguaglianze che noi scriviamo:

$$3 + 10/71 < \pi < 22/7.$$

Bisogna sottolineare due aspetti di questo risultato. Innanzitutto Archimede non fornisce semplicemente un valore approssimato del rapporto tra la circonferenza e il suo diametro, ma *dimostra* che tale rapporto è compreso in un determinato intervallo[9]. Inoltre il suo procedimento può essere iterato un qualsiasi numero di volte, portando ad approssimazioni, dall'alto e dal basso, comunque buone del rapporto che noi indichiamo con π.

Un'approssimazione più accurata di π ottenuta da Archimede è probabilmente testimoniata da Erone, che scrive che Archimede, nell'opera perduta *Sui plintidi e i cilindri*, aveva mostrato che il rapporto tra circonferenza e diametro è compreso tra 211.875/67.441 e 197.888/62.351[10].

La seconda frazione vale più di 3,17 ed è quindi una stima superiore incredibilmente rozza, non confrontabile con il semplice valore 22/7 ($\approx$ 3,1428) ottenuto da Archimede nello scritto rimastoci. La prima frazione vale in termini decimali:

$$211.875/67.441 = 3{,}14163\ldots$$

ed è quindi una buona approssimazione di $\pi = 3{,}14159\ldots$, anche se si tratta di un'approssimazione per eccesso e non per difetto, come afferma Erone. Data la piccolezza dell'errore, che risulta proprio della grandezza del reciproco del denominatore della frazione, è probabile che l'approssimazione 211.875/67.441 sia realmente archimedea e che le altre incongruenze siano dovute alla corruzione del testo.

La formula detta "di Erone"

La formula che fornisce l'area di un triangolo conoscendone le lunghezze dei lati è usualmente attribuita a Erone di Alessandria, che l'ha trasmessa[11]. Sappiamo però dallo scienziato persiano al-Biruni che si trattava di un risultato di Archimede[12].

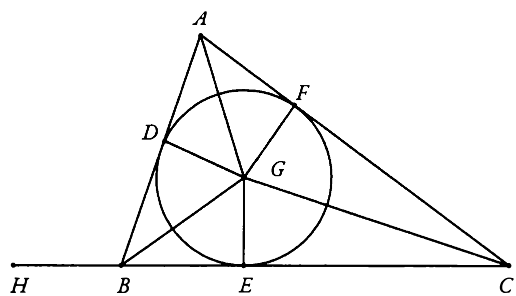
9. Su questo punto cfr. *supra*, p. 87 e in particolare la nota 9.
10. Erone di Alessandria, *Metrica*, 66, 13-19.
11. Erone di Alessandria, *Metrica*, I, 8.
12. *Das Buch der Auffindung der Sehenen im Kreise von Abu'l-Raihan Muhammad-al-Biruni*, übersetzt von H. Suter, in "Bibliotheca Mathematica", 3, 11, 1910, p. 39.

Riportiamo la dimostrazione, come è riferita da Erone, non solo per l'eccezionale abilità mostrata nell'ottenerla (che fornisce un elemento in più per credere alla testimonianza di al-Biruni), ma anche perché vedremo che contiene un particolare motivo di interesse.

Consideriamo un generico triangolo ABC, del quale indichiamo con a, b, c i lati ($a = BC$, $b = CA$, $c = AB$) e tracciamone il cerchio inscritto, indicando con D, E, F i punti di tangenza e con G il centro del cerchio.

Osservazione 1: i punti D, F, E dividono i lati del triangolo in sei segmenti uguali a coppie: $AD = AF = x, BD = BE = y, EC = FC = z$. Si ha ovviamente: $a = y + z$, $b = x + z$, $c = x + y$; e indicando con p il semiperimetro del triangolo: $p = x + y + z$, $x = p - a$, $y = p - b$, $z = p - c$.

Ne segue in particolare che se prolunghiamo il lato BC di un segmento $HB = AD = x$ otteniamo il segmento $HC = p$.



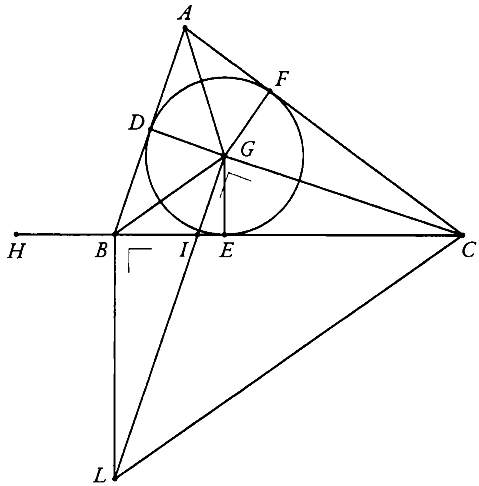
Osservazione 2: i segmenti GA, GF, GC, GE, GB, GD dividono l'angolo giro in sei angoli uguali a coppie. Ne segue in particolare che l'angolo DGA è supplementare all'angolo BGC.

Per calcolare l'area del triangolo notiamo innanzitutto che i segmenti GA, GB e GC dividono il triangolo in tre triangoli che hanno per basi i tre lati del triangolo ABC e per altezza il raggio r del cerchio inscritto. È quindi evidente che l'area S del triangolo ABC può essere scritta:

$$S = p \cdot r = HC \cdot r.$$

Volendo esprimere l'area del triangolo in termini dei lati, il problema è in questo modo ricondotto a quello di trovare una simile espressione per r.

Mentre finora abbiamo fatto solo osservazioni banali, a questo punto interviene la fantasia di Archimede, che decide di tracciare due rette: una passante per B e ortogonale a BC e l'altra passante per G e ortogonale a GC.



Diciamo L il loro punto d'incontro e indichiamo con I l'intersezione di BC con GL.

Un'altra idea particolarmente sorprendente è quella di elevare al quadrato entrambi i membri dell'ultima formula, ottenendo la relazione:

$$S^2 = HC^2 \cdot r^2.$$

Questo passaggio può apparire banale a un lettore moderno, abituato al linguaggio algebrico, ma dobbiamo ricordare che i matematici ellenistici operavano con grandezze geometriche. Moltiplicando tra loro due lunghezze ottenevano una superficie, moltiplicandone tre avevano un volume, ma quale significato potevano dare al prodotto di quattro lunghezze (o, equivalentemente, al quadrato di una superficie)? O Archimede, per primo, aveva considerato la possibilità di manipolazioni puramente "algebriche" di grandezze geometriche, oppure, ancora più sorprendentemente, aveva pensato a grandezze geometriche quadridimensionali.

Procediamo con la dimostrazione. Poiché r è l'altezza relativa all'ipotenusa del triangolo rettangolo GIC, per un noto teorema è medio proporzionale tra le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa. La formula precedente può quindi essere scritta:

$$S^2 = HC^2 \cdot IE \cdot EC.$$

Dei quattro segmenti il cui prodotto fornisce S^2, il solo non immediatamente esprimibile in termini dei lati del triangolo è *IE*. L'osservazione chiave per trovare tale espressione è quella che il triangolo *CBL* è simile al triangolo *ADG*. Per dimostrarlo, consideriamo i punti *B* e *G*; poiché i triangoli *LBC* e *CGL* sono entrambi rettangoli, essi appartengono entrambi alla circonferenza di diametro *LC*. Ne segue, in particolare, che il quadrilatero *LCGB* è inscrivibile in un cerchio e quindi, per un noto teorema, ha gli angoli opposti supplementari. In particolare l'angolo *BLC* è supplementare a *BGC*. Poiché, per l'osservazione 2, anche l'angolo *DGA* è supplementare a *BGC*, gli angoli *BLC* e *DGA* sono uguali. I triangoli *CBL* e *ADG*, essendo entrambi rettangoli e avendo un angolo acuto uguale sono pertanto simili.

Il resto della dimostrazione è semplice routine. Modernizzando leggermente la forma delle argomentazioni originali, abbiamo:

$$BE/IE = (BI + IE)/IE = BI/IE + 1 = BL/GE + 1$$

(avendo usato l'ovvia similitudine tra i triangoli *BLI* e *EGI*).

Poiché *GE* e *DG* sono entrambi raggi del cerchio inscritto, possiamo anche scrivere:

$$BE/IE = BL/DG + 1.$$

Usando la similitudine tra i triangoli *CBL* e *ADG*, otteniamo:

$$BE/IE = BC/AD + 1 = (AD + BC)/AD = HC/HB.$$

Abbiamo pertanto: $HC \cdot IE = HB \cdot BE$. Sostituendo l'ultima eguaglianza nell'espressione già trovata per S^2 e utilizzando l'osservazione 1, si ha infine:

$$S^2 = HC \cdot HB \cdot BE \cdot EC = pxyz = p(p-a)(p-b)(p-c).$$

La familiare formula di Erone si ottiene estraendo la radice quadrata di entrambi i membri dell'ultima eguaglianza:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Grandi numeri

I Greci non disponevano di un sistema numerico adatto a esprimere numeri molto grandi. Il più grande numero che aveva un nome nella lingua greca era la miriade, ossia diecimila. Si poteva naturalmente parlare di miriadi di miriadi, o di miriadi di miriadi di miriadi, ma non era comodo continuare a lungo su questa strada. Esisteva anche una notazione alfabetica, comoda per esprimere numeri piccoli, che con accorgimenti vari poteva essere estesa un po' (ad esempio un segno indicava che il numero scritto andava moltiplicato per mille e un altro che si trattava di miriadi), ma anche in questo caso non si poteva andare troppo lontano.

Il sistema posizionale babilonese a base 60 era molto più adatto a esprimere numeri grandi, ma non sembra fosse conosciuto dai Greci all'epoca di Archimede (usato sistematicamente da Tolomeo nel II secolo d.C., era stato probabilmente importato dagli astronomi greci nel II secolo a.C.).

Archimede, come abbiamo visto, sosteneva la tesi che due grandezze omogenee (implicitamente supposte non nulle né infinite) avessero sempre un rapporto (cfr. *supra*, nota 17 a p. 91 e p. 98). In alcuni casi il rapporto poteva però essere tanto grande da non essere esprimibile nel sistema greco di numerazione. Per difendere la sua tesi era quindi importante escogitare un metodo per esprimere qualsiasi rapporto tra grandezze omogenee che potesse essere considerato nelle scienze della natura. Nell'*Arenario* Archimede, dopo avere dato una stima delle dimensioni della sfera delle stelle fisse coerente con il sistema di Aristarco (quindi enormemente maggiore delle stime precedenti) si pone il problema di dare una stima per eccesso del numero di granelli di sabbia che potrebbero essere contenute in tale sfera e trova che i granelli non siano più del numero che noi scriviamo 10^{63}.

Il sistema di numerazione proposto nell'*Arenario* permette di esprimere non solo la stima 10^{63}, ma anche numeri enormemente più grandi. Archimede parte dal numero "una miriade di miriadi" (ossia 10^8), per considerare poi potenze di 10 sempre più grandi, raggruppate in "periodi". Il massimo numero esplicitamente individuato nell'opera è una potenza di 10 il cui esponente, nelle nostre notazioni, è $8 \cdot 10^{16}$. Sembra che Archimede avesse l'esigenza di esprimere numeri ben più grandi di quelli che rappresentano rapporti tra grandezze fisiche omogenee misurabili in natura, anche se nell'opera (divulgativa, perché indirizzata a un profano di scienza, quale era certamente il co-sovrano di Siracusa Gelone) non ne fa cenno.

Nel prossimo paragrafo vedremo un modo per individuare numeri ben più grandi del numero dei granelli di sabbia occorrenti per riempire l'universo.

Il problema dei buoi

Il problema è tramandato nella forma di un epigramma attribuito ad Archimede e rivolto a Eratostene. Si chiede di calcolare il numero di tori e vacche di quattro mandrie possedute dal dio Elio nell'isola di Trinacria (ossia in Sicilia). Ogni mandria è caratterizzata da un proprio colore: bianco, nero, fulvo e screziato. Indicando con B, N, F e S il numero di tori delle quattro mandrie e con b, n, f e s quello delle vacche, l'epigramma fornisce informazioni che, scritte in forma algebrica, si riducono alle equazioni seguenti:

$$B = (1/2 + 1/3)N + F; \quad N = (1/4 + 1/5)S + F; \quad S = (1/6 + 1/7)B + F;$$

$$b = (1/3 + 1/4)(N + n); \quad n = (1/4 + 1/5)(S + s); \quad s = (1/5 + 1/6)(F + f);$$

$$f = (1/6 + 1/7)(B + b).$$

Essendo sette equazioni lineari in otto incognite, il problema ammette infinite soluzioni. Ovviamente si richiede una soluzione con numeri interi, ma anche queste sono infinite. (I tori bianchi della più piccola soluzione intera sono 10.366.482.) Dopo avere fornito queste informazioni, l'epigramma continua:

> Amico, se puoi dirmi esattamente quanti erano i buoi di Elio, precisando il numero di tori robusti e delle vacche di ciascun colore, non sarai certo detto ignorante, ma non potrai nemmeno essere annoverato tra i sapienti[13].

Viene poi enunciata la parte difficile del quesito, quella che occorre risolvere per poter essere considerato sapiente. Si danno due ulteriori condizioni non lineari: il numero totale dei tori bianchi e neri deve essere un quadrato perfetto e il numero totale dei tori fulvi e screziati un numero triangolare – ossia un numero della forma $n(n + 1)/2$.

Un antico scolio fornisce una soluzione della parte facile del problema. Per risolverlo interamente si è dovuto aspettare il XIX secolo. Il problema

13. Archimede, *Problema dei buoi*, 171, 8-12 (ed. Mugler).

completo ammette infatti anch'esso infinite soluzioni intere, ma il numero totale di tori e vacche della soluzione minima è un numero con 206.545 cifre decimali. Notiamo che si tratta di un numero enormemente più grande della stima ottenuta nell'*Arenario* per il numero di granelli di sabbia contenuti nella sfera delle stelle fisse, ma enormemente più piccolo del più grande numero considerato da Archimede in quell'opera.

L'attribuzione dell'epigramma ad Archimede (affermata, tra gli altri, anche da Erone di Alessandria)[14] è stata contestata da diversi studiosi, ma mi sembra evidente che il problema debba essere attribuito a un matematico di grande valore. Non è infatti certo facile enunciare in termini semplici, nominando solo i primi sette numeri naturali, un problema che ammette soluzioni, ma con numeri così enormi da essere inesprimibili. Non conosciamo altri esempi di problemi di questo tipo risalenti all'antichità. La probabilità che queste caratteristiche del problema, che sono quelle che danno un senso alla "sfida" posta al grande Eratostene, siano state ottenute per caso, senza che l'autore ne fosse consapevole, mi sembra del tutto trascurabile. Non si vede quindi perché dovremmo respingere la concorde attribuzione del problema ad Archimede, tanto più che abbiamo visto nello scorso paragrafo quanto fosse interessato ai numeri troppo grandi per essere esprimibili con l'usuale sistema greco di numerazione e sappiamo dei suoi rapporti epistolari con Eratostene. Inoltre lo spirito di questo problema-beffa sembra del tutto coerente con la beffa di Archimede di cui abbiamo già parlato (cfr. *supra*, p. 36). Vorremmo sapere con quali ragionamenti Archimede era arrivato a convincersi che il problema ammetteva sì soluzioni, ma fuori dalla portata dei suoi corrispondenti alessandrini.

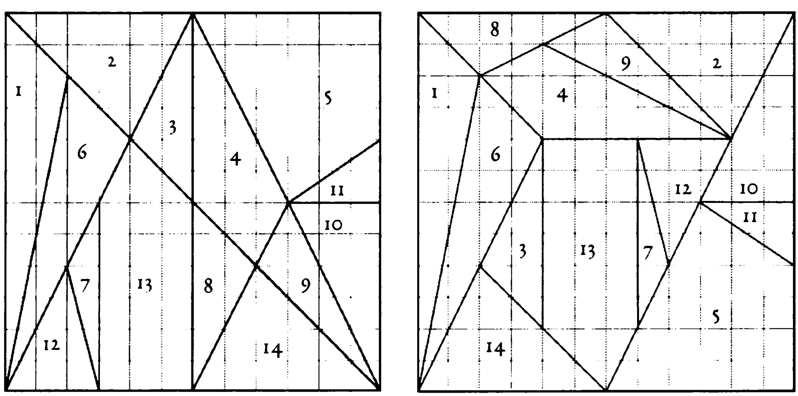
Quanto alla forma in cui il problema è esposto nell'epigramma, non mi sembra che si possa escludere che sia dovuta anch'essa ad Archimede. Sembrano coerenti con l'attribuzione dell'epigramma ad Archimede sia il riferimento esplicito alla Sicilia sia la forma bucolica del contesto. L'inventore del genere bucolico, Teocrito, era infatti un siracusano più anziano di una ventina d'anni del suo concittadino Archimede e lo aveva preceduto ad Alessandria; è verosimile che Archimede ne conoscesse bene l'opera poetica. L'epigramma sembra ispirato, in particolare, dall'idillio attribuito a Teocrito in cui si descrivono le enormi mandrie possedute da Augia, figlio di Elio: mandrie di tre diversi colori, che riempivano tutta la pianura[15].

14. Erone di Alessandria, *Definizioni*, IV, 98.
15. (Pseudo?)-Teocrito, *Epillio di Eracle*.

Lo *Stomachion*

Archimede aveva scritto un'opera su un gioco detto *stomachion* (o forse *ostomachion*, ossia "battaglia degli ossi"), sul quale ci informano anche diverse fonti latine[16]. Il gioco (come riferisce anche Cesio Basso, che lo chiama *loculus archimedius*) consisteva in 14 lamelle d'avorio che potevano comporre un quadrato e lo scopo del gioco, come nel cinese *tangram* ancora usato (che probabilmente ne è stato derivato), era quello di accostare le lamelle in modo da rappresentare oggetti di varia natura. L'opera di Archimede era contenuta nel codice C con il titolo *Stomachion*, ancora per lo più usato[17].

Conosciamo l'opera di Archimede anche da un frammento arabo, pubblicato da Heinrich Suter, che ha permesso di ricostruire la divisione del quadrato nei quattordici poligoni (mostrata nella parte sinistra della figura)[18], ma non ha fornito altre informazioni utili. Il palinsesto contiene solo due pagine della parte del codice C che comprendeva quest'opera, così malridotte che Heiberg aveva potuto leggervi solo una frase, non sufficiente per capire lo scopo del lavoro.



16. Cesio Basso, *Fragmentum de metris*; Ausonio, *Cento nuptialis*, I; Mario Vittorino, *Ars grammatica*, III, I; Ennodio, *De stomachio eburneo*.
17. Il nome *ostomachion* è riportato da Ausonio.
18. H. Suter, *Der loculus Archimedius oder das Syntemachion des Archimedes: zum ersten Mal nach zwei arabischen Manuskripten der Königlichen Bibliothek in Berlin*, in "Zeitschrift für Mathematik und Physik", 44, Suppl., 1899, pp. 491-500.

Solo gli studi successivi al ritrovamento del palinsesto hanno permesso di capire che lo scopo dell'opera di Archimede era calcolare il numero di modi diversi nei quali le 14 parti dello *stomachion* potevano comporre il quadrato iniziale (un esempio di ricombinazione dei pezzi nello stesso quadrato è mostrato nella parte destra della figura)[19]. Tale numero, determinato nel 2003, è 17.152.

L'opera di Archimede testimonia un interesse per difficili problemi di calcolo combinatorio che tradizionalmente erano stati considerati estranei agli interessi matematici dei Greci. Plutarco riferisce però un complesso problema combinatorio risolto da Ipparco[20], che prima del 1997 nessuno aveva tentato di ricostruire[21]. Ora sappiamo che Archimede e Ipparco avevano condiviso l'interesse per questa branca della matematica.

19. R. Netz, F. Acerbi, N. Wilson, *Towards a Reconstruction of Archimedes' Stomachion*, in "Sciamus", 5, 2004, pp. 67-99.
20. Plutarco, *Quaestionum convivalium libri III*, 732F; *De Stoicorum repugnantiis*, 1047C-E.
21. R. P. Stanley, *Hipparchus, Plutarch, Schröder, and Hough*, in "The American Mathematical Monthly", 104, 4, 1997, pp. 344-50; F. Acerbi, *On the Shoulders of Hipparchus: A Reappraisal of Ancient Greek Combinatorics*, in "Archive for History of Exact Sciences", 57, 6, 2003, pp. 465-502.

12
Uno sguardo complessivo

Qualche osservazione sul metodo di Archimede

Il suo metodo rendeva Archimede un esponente (in realtà il massimo esponente) di quella scienza molto vasta che i Greci indicavano con il termine τὰ μαθηματικὰ (che, traslitterato, è divenuto "matematica", ma assumendo in epoca moderna un significato profondamente diverso) e per la quale manca oggi un termine adeguato[1]. Particolarmente importante, perché lontana dalle nostre abitudini di pensiero e quindi difficile da capire, è l'assenza di una linea di demarcazione tra le discipline che oggi chiamiamo "matematica" e "fisica". Tutte le opere di Archimede contengono teoremi dimostrati con rigore, usando assunzioni esplicitamente individuate come postulati: si tratta, da questo punto di vista, di opere di matematica. Differiscono però profondamente dalla matematica cui siamo oggi abituati per gli argomenti affrontati. Ad esempio, come abbiamo visto, con il primo teorema dimostrato nel trattato *Sui galleggianti* Archimede dimostra la forma sferica della superficie degli oceani a riposo: un risultato che oggi difficilmente troveremmo in un manuale di matematica. La forma degli oceani è dedotta da un postulato di idrostatica, proprio come la legge della leva è dedotta da postulati di meccanica e i teoremi di geometria da postulati geometrici.

La scienza di Archimede condivide con la nostra fisica i fini di descrivere quantitativamente fenomeni naturali e progettare tecnologia e con la nostra matematica struttura logica e tecniche dimostrative. Se la sua geo-

1. Si potrebbe forse usare "fisica matematica", ma la moderna disciplina con questo nome occupa un piccolo spazio, stretta com'è tra altri settori della matematica e la fisica teorica, mentre la scienza di Archimede comprendeva al suo interno tutto ciò che oggi chiamiamo matematica o fisica.

metria ci appare più familiare della sua meccanica (o idrostatica), ciò accade perché la tradizione risalente all'ellenismo ha influenzato per millenni la didattica della geometria (soprattutto attraverso gli *Elementi* di Euclide) ben più di quella di altri settori della scienza. Anche in questo caso vi è però un'enorme differenza rispetto all'omonima disciplina sviluppata nel XX secolo e insegnata nelle nostre università. La geometria di Archimede, come quella di Euclide, non si compone infatti di proposizioni liberamente dedotte da postulati arbitrariamente scelti riguardanti enti astratti, ma consiste in un modello rigoroso di oggetti naturali e attività umane (in questo caso corpi rigidi e disegni con riga e compasso). Il doppio rapporto della geometria con la logica e le applicazioni concrete non differisce quindi in alcun modo da quello presente in altre discipline allora dette "matematiche", come la meccanica, l'ottica o l'idrostatica.

Questo punto è stato espresso con particolare chiarezza da Albert Einstein: «Se la geometria di Euclide è vista come la scienza delle possibili relazioni mutue di corpi praticamente rigidi nello spazio, cioè se la si tratta come una scienza fisica, evitando di astrarre dal suo originale contenuto empirico, l'omogeneità logica tra geometria e fisica teorica diviene completa»[2].

In Archimede manca anche la distinzione tra scienza pura e applicata, come è chiaro in molte delle sue opere, soprattutto se vengono lette alla luce delle testimonianze sui suoi ritrovati tecnologici. Nel trattato *Sull'equilibrio delle figure piane* si pongono le basi di una teoria che permette la progettazione di efficienti macchine per sollevare pesi; i risultati matematici più elevati del trattato *Sui galleggianti* sono quelli che determinano le condizioni per la stabilità dell'equilibrio di un corpo galleggiante: un problema la cui rilevanza applicativa è ovvia. I raffinati risultati geometrici su parabole e paraboloidi contenuti in opere come la *Quadratura della parabola* e *Sui conoidi e gli sferoidi* erano stati usati sia in idrostatica sia nella costruzione di specchi ustori, almeno secondo la testimonianza di Apuleio; l'idrostatica teorica, d'altra parte, oltre che alla tecnologia navale, era stata applicata alla progettazione di orologi ad acqua di nuovo tipo.

Tutte le informazioni a nostra disposizione convergono nel delineare

2. Tratto da una conferenza tenuta da Einstein a Oxford il 10 giugno 1933, pubblicata con il titolo *On the Method of Theoretical Physics*, in "Philosophy of Science", 1, 2, 1934, pp. 163-9.

in Archimede un pensiero scientifico unitario, che controlla tutte le fasi della scienza, dalla scelta dei postulati alle applicazioni tecnologiche.

Un aspetto importante del metodo usato da Archimede e dai suoi contemporanei è costituito dalla nuova concezione della lingua che, come abbiamo visto, si era affermata nel periodo ellenistico (cfr. *supra*, pp. 14-5).

In matematica il convenzionalismo linguistico genera e accompagna una nuova concezione delle definizioni, che non sono più viste come tentativi di cogliere l'intima natura di enti considerati preesistenti[3], ma come uno strumento per applicare una semplice "etichetta" (ossia il nuovo termine scelto) a un concetto individuato attraverso una lunga espressione. Varie definizioni di questo tipo (che si possono dire "nominalistiche") sono fornite nel trattato *Sui conoidi e gli sferoidi*. Ad esempio Archimede scrive: «Assumiamo che se un'ellisse ruota, con l'asse maggiore fermo, fino a tornare nella posizione iniziale, la figura racchiusa dall'ellisse sia detta sferoide allungato [παραμᾶκες σφαιροειδὲς]»[4].

I termini "sferoide" (σφαιροειδὲς) e "allungato" (παραμᾶκες) appartengono alla lingua greca ordinaria (il primo significava "simile a una sfera"), ma l'espressione "sferoide allungato" acquista un significato completamente nuovo attraverso la definizione di Archimede[5].

Il convenzionalismo linguistico (e le definizioni nominalistiche che gli sono associate) non solo è essenziale per creare nuove teorie, ma permette anche al matematico di acquisire consapevolezza della natura creativa del proprio lavoro: l'ampliamento consapevole della terminologia rende infatti evidente che gli oggetti studiati dai matematici non costituiscono un insieme statico di enti, ma un edificio in continua costruzione.

Poiché ogni definizione di un termine nuovo deve necessariamente usare termini già noti, non è possibile definire tutti gli enti matematici senza cadere in una regressione all'infinito. La soluzione moderna di questo problema consiste nel lasciare indefiniti alcuni termini, precisando le regole da seguire nel loro uso mediante i postulati in cui gli stessi termini

3. Questo genere di definizioni, che possono essere dette "essenzialiste", è tipico di Platone.

4. Archimede, *Sui conoidi e gli sferoidi*, 155, 4-13 (ed. Mugler). Il termine oggi usato è "ellissoide di rotazione", ma ho lasciato il termine greco "sferoide" perché la sua particolare forma ci interesserà in seguito.

5. L'importanza dell'apparire delle definizioni nominalistiche per la storia della scienza è stata sottolineata da Karl Popper nel libro *La società aperta e i suoi nemici*, Armando, Roma 1974, vol. II (ed. or. *The Open Society and its Enemies*, 2 voll., Routledge, London 1945).

appaiono. In questo caso si dice che i termini non definiti esplicitamente lo sono *implicitamente* attraverso i postulati che li riguardano.

Lo stesso sistema, secondo diversi studiosi, era stato già usato da Archimede. Abbiamo accennato alle pagine 57-8 al caso della supposta definizione implicita di baricentro, che ci è però sembrata inaccettabile. Un esempio meno discutibile è nei primi postulati del trattato *Sulla sfera e il cilindro* (che abbiamo riportato a p. 122). Questi postulati (il primo è: «la minima tra tutte le linee con gli stessi estremi è la linea retta») usano i concetti di linea retta e di lunghezza (implicito nell'uso del termine "minimo") senza che siano stati definiti né l'uno né l'altro. In realtà il postulato (insieme al successivo) permette non solo di usare coerentemente il concetto di retta, ma anche di dare significato al concetto di lunghezza di un'ampia classe di linee (più precisamente quelle che volgono la concavità sempre dalla stessa parte, come ad esempio gli archi di circonferenza o di spirale). È un caso chiaro, mi pare, di definizione implicita attraverso postulati. Va osservato che questo metodo non fu più capito nei secoli successivi, nei quali il postulato appena citato fu considerato una definizione di retta; ad esempio in uno scolio agli *Elementi* di Euclide è scritto: «Archimede definisce la linea retta così: la linea retta è la più breve tra le linee che hanno gli stessi estremi»[6].

Nel dibattito sull'esistenza o meno, in Archimede e in altri autori ellenistici, del metodo della definizione implicita di concetti attraverso postulati sono state sostenute due posizioni molto diverse. Alcuni hanno creduto di vedere negli scienziati ellenistici procedimenti molto simili a quelli moderni. Stein, in particolare, ha sostenuto che i concetti meccanici di Archimede (non solo baricentro, ma anche peso, equilibrio e altri) svolgessero il ruolo di incognite, che sarebbero univocamente individuate dai postulati, equivalenti a equazioni[7]. Queste visioni modernizzanti hanno finito per alimentare lo scetticismo degli altri studiosi, convinti che nella scienza greca non vi potesse essere nulla di simile.

Credo che definizioni implicite attraverso i postulati fossero in realtà presenti sistematicamente nelle opere degli scienziati ellenistici, ma non

6. Euclides, *Elementa*, post I. L. Heiberg edidit E. S. Stamatis, Teubner, Leipzig, vol. 5.1, p. 71, 3-5.
7. W. Stein, *Der Begriff des Schwerpunktes bei Archimedes*, in O. Neugebauer, J. Stenzel, O. Toeplitz, *Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik*, Springer, Berlin-Heidelberg 1930, pp. 221-4.

per una scelta esplicita, come pensava Stein. La creazione del linguaggio scientifico avvenne grazie a due processi diversi. Alcuni termini, come abbiamo visto, furono privati del loro significato comune grazie a una definizione esplicita. Altri, come "linea retta", "lunghezza" o "peso", che non sono mai definiti[8], non furono invece privati del loro significato ordinario, che venne però ristretto e precisato proprio attraverso la scelta, pienamente consapevole, di accettare solo le affermazioni deducibili dai postulati. Ogni postulato di autori come Euclide o Archimede, a differenza degli assiomi della matematica moderna, è costituito da una frase del linguaggio ordinario, con un suo significato immediatamente chiaro al lettore. Questo procedimento porta di fatto a una sorta di definizione implicita attraverso i postulati, ma senza spezzare il legame con la lingua d'ogni giorno e l'esperienza comune, assicurando l'immediata applicabilità della scienza.

Rispetto a quello di Euclide, il metodo di Archimede appare più vario e fluido. Mentre Euclide, negli *Elementi*, deduce da pochi postulati ben 465 teoremi, Archimede formula nuovi postulati in quasi ogni suo scritto. Nelle definizioni e nei procedimenti dimostrativi non si limita a costruzioni effettuate con riga e compasso, ma adotta metodi diversi, come quello cinematico usato per definire la spirale o la *neusis* (cioè l'inserzione di una linea di data lunghezza tra altre due linee in modo che passi per un punto dato): procedimenti che gli permettono di risolvere problemi non risolubili con riga e compasso. Questa molteplicità di strumenti è stata considerata un carattere "arcaico", nel senso che Archimede non condivide la standardizzazione operata da Euclide, che aveva abbandonato una serie di procedimenti presenti nella matematica preellenistica. L'uso del procedimento euristico, di antica origine, esposto nel *Metodo* lo conferma.

Archimede non parla mai esplicitamente di filosofia nelle opere che ci sono rimaste e nulla lascia presumere che lo avesse fatto altrove. Credo però che, se ci si chiede a quale scuola filosofica appartenesse, una risposta, almeno parziale, possa essere data con sicurezza: Archimede era un "matematico", nel senso che questo termine aveva ai suoi tempi.

8. Le definizioni di linea retta, punto e altri enti geometrici primitivi contenute nel testo degli *Elementi* di Euclide trasmesso dai manoscritti sono tipiche definizioni essenzialiste di stampo platonico. Ho sostenuto altrove che sono state interpolate nel testo degli *Elementi* in epoca imperiale (L. Russo, *The Definitions of Fundamental Geometric Entities Contained in Book I of Euclid's Elements*, in "Archive for History of Exact Sciences", 52, 3, 1998, pp. 195-219). In ogni caso, non essendo mai usate da Euclide, tali pseudodefinizioni non svolgono alcun ruolo negli *Elementi*.

Oggi i matematici sono considerati specialisti di una particolare disciplina, senza relazione con scelte filosofiche, ma non sempre è stato così.

Nel periodo ellenistico le discipline considerate *matematiche* si erano moltiplicate, includendo, oltre alle tradizionali geometria, aritmetica, astronomia e teoria musicale, anche meccanica, ottica, idrostatica e altre. Il termine "matematica" non indicava un singolo oggetto di studio, ma il metodo comune alle discipline precedenti, consistente nell'individuare poche affermazioni (costruite con il linguaggio ordinario e riguardanti il mondo concreto) da usare come postulati e nel derivarne logicamente una serie di conseguenze, costruendo una teoria come modello di un particolare aspetto della realtà.

La fiducia, da parte dei *matematici*, nell'efficacia di questo particolare metodo per generare conoscenze valide e progettare tecnologia efficiente definiva una precisa posizione nell'ambito della teoria della conoscenza (alternativa, ad esempio, a quelle dei platonici e degli scettici) e permetteva quindi di individuarli come esponenti di una particolare tendenza filosofica. Se questo punto sfugge si fatica a capire come mai Sesto Empirico abbia esposto la propria posizione filosofica scrivendo un'opera *Contro i matematici* (le acrobazie compiute per tradurre questo titolo ne sono una prova). Non si capisce neppure come Plutarco, in un dialogo come il *De facie quae in orbe lunae apparet*, faccia confrontare tra loro, dibattendo varie questioni, esponenti dell'Accademia e della Stoa con due partecipanti qualificati come "matematici" (per la precisione Menelao e Apollonide).

Naturalmente non bisogna spingere troppo oltre l'interpretazione che abbiamo dato del termine "matematico", in quanto essa coesisteva con altre; il termine venne usato anche nel significato di astronomo e in quello, che finì per prevalere, di studioso di uno specifico ambito disciplinare. Credo però che si possa dire con certezza che matematici come Archimede, Euclide, Apollonio o Ipparco condividessero una specifica teoria della conoscenza.

La fortuna di Archimede

Non sappiamo se Archimede avesse avuto allievi a Siracusa: probabilmente li ebbe[9], ma dopo il saccheggio romano della città non vi è traccia (com-

9. Era probabilmente un suo allievo quell'Eraclide al quale Archimede affida il compito di recapitare alcuni suoi libri allo studioso alessandrino Dositeo (cfr. *supra*, pp. 21-2).

prensibilmente) di una scuola che continui le sue ricerche. Non è facile valutare l'influenza di Archimede sugli scienziati a lui contemporanei o immediatamente successivi, perché non abbiamo le loro opere. Ad esempio Claudio Tolomeo ci informa che Ipparco aveva citato Archimede a proposito della precisione con cui aveva stimato si potesse valutare il momento del solstizio (cfr. *supra*, p. 89), ma non essendoci rimasta alcuna opera di Ipparco non possiamo sapere se avesse usato le sue opere anche a proposito di altri argomenti, come l'ottica e la meccanica[10].

Certamente nella tarda antichità e nel Medioevo, nonostante la fama di Archimede crescesse e il suo ricordo entrasse nella leggenda, la sua influenza scientifica fu nulla. Questo contrasto ha stupito molti studiosi; ad esempio Charles Mugler (autore di una delle principali edizioni delle opere di Archimede) scrive:

> Leggendo i trattati di Archimede, si è sorpresi nel constatare che, nonostante gli stimoli che promettono di fornire agli sviluppi delle scienze matematiche, grazie ai germi di calcolo integrale e ai fondamenti della statica che contengono, la nostra civiltà ha dovuto attendere il XVII e il XVIII secolo per vedere apparire lavori che continuassero il pensiero di Archimede. Citato da Tolomeo, Erone, Pappo, Teone d'Alessandria e Vitruvio, commentato da Eutocio, ammirato anche da autori puramente letterari come Apuleio e Lattanzio e da pensatori cristiani come Tertulliano e sant'Agostino, Archimede resta senza influenza sulle sorti delle scienze matematiche della tarda antichità. Il Medioevo non conosce alcun successore di Archimede degno di questo nome, nonostante la traduzione, nel XIII secolo, di gran parte della sua opera dovuta a Guglielmo di Moerbeke[11].

Dopo avere escluso varie possibili altre spiegazioni, Mugler conclude che la ragione di questa sorprendente assenza di influenza di Archimede sta nel fatto che lo scienziato, a suo parere, avrebbe *superato la sua epoca*.

L'opinione di Mugler è stata condivisa da molti studiosi. Dijksterhuis, ad esempio, parlando dei risultati ottenuti nel trattato *Sui galleggianti*, afferma che essi erano «decisamente al di là del confine della matematica classica»[12].

10. Ipparco aveva scritto opere di ottica (aveva perfezionato strumenti ottici e, secondo Aezio, si era occupato anche della visione binoculare) e un trattato sul moto dei gravi sul quale abbiamo qualche informazione da Simplicio.

11. C. Mugler, *Introduction*, in Id., *Archimède*, t. I, Les Belles Lettres, Paris 1970, p. XIX.

12. E. J. Dijksterhuis, *Archimede*, Ponte alle Grazie, Firenze 1989, p. 305 (ed. or. *Archimedes*, Meulenhoff, Amsterdam 1938).

Giudizi di questo tipo non hanno riguardato solo Archimede. La mancata affermazione dell'eliocentrismo di Aristarco di Samo nell'astronomia antica è stata spiegata da molti storici allo stesso modo, sostenendo cioè che Aristarco fosse in anticipo sui tempi. Ci si può anche chiedere come mai la logica proposizionale di Crisippo sia stata riscoperta solo nel secondo Novecento, mentre nella tarda antichità e nel Medioevo si riteneva che il livello più alto di questa disciplina fosse stato raggiunto da Aristotele. Se accettiamo i giudizi usualmente espressi su Archimede e Aristarco di Samo, dobbiamo evidentemente estenderli anche a Crisippo. Nel campo tecnologico ci si può chiedere perché uno strumento come la diottra descritta da Erone (ma già usata nel primo ellenismo) sia stata poi abbandonata (già Tolomeo non la conosce più). Non sorprende la risposta fornita dall'illustre storico della tecnologia Derek J. de Solla Price: «La diottra di Erone resta unica, senza passato e senza avvenire: un'invenzione pregevole ma prematura, la cui complessità oltrepassava le risorse tecniche dell'epoca»[13]. Price aveva considerato prematuri anche gli ingranaggi costruiti da Ctesibio nel III secolo a.C.[14].

Da questi giudizi (e i tanti analoghi) dovremmo trarre la conclusione che all'epoca di Archimede superare la propria epoca fosse un comportamento abituale: una conclusione certamente paradossale.

Non è difficile individuare l'origine di queste strane opinioni. Se si è convinti che l'umanità non possa che progredire verso livelli sempre più alti di conoscenza, per nascondere l'evidenza di un crollo culturale, gli esponenti della cultura che precede il crollo debbono necessariamente essere considerati estranei al proprio tempo. Questa operazione è stata grandemente agevolata dalla circostanza che le generazioni successive al crollo avevano provveduto a eliminare la quasi totalità delle opere precedenti (non per una perfida scelta, ma semplicemente perché, non essendo in grado di capirle, non erano interessate a conservarle).

Bisogna dire che non è un caso se abbiamo usato citazioni datate. Da qualche decennio è diventato meno comune considerare estranei alla pro-

13. D. J. de Solla Price, *Strumenti di precisione fino al 1500*, in C. Singer *et al.* (a cura di), *Storia della tecnologia*, Boringhieri, Torino 1966, vol. 3, p. 610 (ed. or. *A History of Technology*, 5 voll., Clarendon, Oxford 1954-58, vol. 3).

14. Id., *Gears from the Greeks: The Antikythera Mechanism – A Calendar Computer from ca. 80 BC*, in "Transactions of the American Philosophical Society", 64, 7, 1974, pp. 1-70 (repr. Science History Publications, New York 1975).

pria epoca gli scienziati e in genere gli intellettuali del primo ellenismo. Mi sembra però che vi siano ancora molte resistenze a prendere atto del crollo culturale che separa con una frattura netta l'esplosione culturale ellenistica dalle epoche successive. Si può datare con precisione questa frattura agli anni 146-145 a.C., nei quali Roma si impadronisce di tutto il Mediterraneo (nel 146 Roma, dopo aver raso al suolo Cartagine e Corinto, conquista la Grecia e istituisce la provincia d'Africa; nel 145, si impadronisce dell'Egitto il re Tolomeo VIII, che svolgerà il ruolo di re fantoccio per conto dei Romani, sterminando o costringendo alla fuga la classe dirigente greca; in quell'anno cessa ogni attività intellettuale ad Alessandria e la direzione della gloriosa Biblioteca viene affidata a un ufficiale dell'esercito). Il crollo culturale è evidente in tutti i settori. Ricordiamo, per fare qualche esempio, che la geografia matematica fu abbandonata, il sistema delle coordinate sferiche (latitudine e longitudine) cadde in disuso e i testi di geografia tornarono a essere puramente descrittivi; allo stesso tempo furono dimenticate l'idea della relatività del moto e l'eliocentrismo; venne abbandonato il convenzionalismo linguistico e si tornò a credere nell'esistenza di *nomi veri* delle cose[15].

L'interesse dei Romani per Archimede nacque probabilmente con Cicerone (cfr. *supra*, p. 28). Molti autori latini citano lo scienziato con ammirazione, ma nessuno di loro aveva la cultura necessaria per leggerne i trattati. Tra gli scienziati greci di epoca imperiale e della tarda antichità vi sono diversi autori che leggono Archimede e alcuni di loro, da Erone a Pappo, ne trasmettono alcuni risultati, ma certamente nessuno è in grado di continuarne l'opera.

Il pubblico dei lettori di Archimede si restrinse sempre più e non stupisce che le sue opere si siano conservate solo parzialmente e in gran parte grazie a uno o due esemplari. Come abbiamo già notato, la fama dello scienziato durò nel tempo grazie ad autori che hanno tramandato aneddoti e leggende, accennando in termini generici ai suoi risultati scientifici.

L'effettivo recupero del pensiero scientifico di Archimede, che avrebbe dato un importante contributo alla rinascita della scienza, cominciò nella seconda metà del Cinquecento, soprattutto grazie a Francesco Maurolico (1494-1575) e Federico Commandino (1509-1575). Maurolico, attivo a

15. Per una breve descrizione del crollo culturale che colpì il mondo Mediterraneo in quegli anni rimando a L. Russo, *L'America dimenticata*, Mondadori, Milano 2013, cap. 5.

Messina, non era interessato all'analisi accurata degli scritti di Archimede, ma alla ricostruzione dei suoi risultati (che spesso conosceva solo da fonti indirette) attraverso ricerche matematiche in parte originali. Commandino, fondatore dell'importante scuola matematica di Urbino, mise invece a disposizione degli studiosi accurate traduzioni latine di alcune delle opere di Archimede (e in qualche caso si preoccupò anche di ricostruire la dimostrazione di teoremi che vi erano presupposti come noti).

Alla fine del Cinquecento l'attento studio di Archimede da parte di scienziati come Stevino (1548-1620) e Galileo dette un contributo essenziale alla nascita della meccanica moderna. Il trattato *Sui galleggianti*, in particolare, interessò molto Galileo, che si limitò però in sostanza a studiarne il primo libro (nella *Bilancetta* descrisse una stadera idrostatica con la quale poteva verificare alcuni dei risultati di Archimede). Il problema della stabilità dell'equilibrio dei paraboloidi galleggianti attirò interesse solo nella prima metà del Settecento (quando si cominciò di nuovo a sentire l'esigenza di dare basi scientifiche all'ingegneria navale), ma rimase sostanzialmente incompreso prima della *Scientia navalis* di Eulero, del 1749, nella quale i risultati di Archimede furono generalizzati, ma senza raggiungere il suo livello di rigore.

Molti elementi del metodo di Archimede, e in particolare il suo trattamento delle quantità infinitesime, rimasero però ben al di là anche della scienza del XVIII secolo.

Nel XIX secolo le opere di Archimede, studiate direttamente o indirettamente, fornirono un punto di riferimento essenziale ai matematici impegnati nel dare rigore all'analisi matematica. Ad esempio la definizione di Bernhard Riemann (1826-1866) di integrale può essere considerata una generalizzazione del metodo usato da Archimede per calcolare l'area dei giri della spirale.

La frattura apertasi in epoca imperiale tra il personaggio leggendario di Archimede e il reale contenuto delle sue opere non si è però mai saldata e il ricordo dello scienziato accolto dalla cultura condivisa, come abbiamo già notato, è rimasto quello trasmesso da scrittori come Vitruvio o Tzetzes.

Inoltre, poiché l'unità della scienza ellenistica non è mai stata recuperata, si sono usati vari espedienti per ricondurre lo scienziato siracusano nell'ambito delle categorie moderne. Archimede è in genere presentato non come l'esponente di una scienza unitaria, ma come uno strano individuo che esercitava allo stesso tempo diverse professioni: matematico, fisico, ingegnere e inventore.

Archimede nella didattica

Lo spazio occupato da Archimede nella didattica è oggi minimo. Alcuni suoi risultati (ad esempio la formula del volume della sfera, la legge della leva e quello che è oggi chiamato il "principio di Archimede") sono per la verità insegnati in vari ordini di scuole, ma senza trasmettere assolutamente nulla delle argomentazioni originali. Sul volume della sfera si impara solo mnemonicamente una formula; negli altri due casi, quelli che in Archimede erano enunciati di teoremi sono presentati come una legge e un principio la cui validità è basata solo sulla verifica empirica. Diviene così più agevole inquadrare la meccanica e l'idrostatica nell'ambito della fisica, oggi spesso concepita come scienza sperimentale con pochi legami con la matematica. In molti altri casi vengono ignorati, insieme alle dimostrazioni, anche gli enunciati di Archimede. Gli studenti delle scuole secondarie raramente sanno, ad esempio, che la forma sferica della Terra può essere dedotta, sotto opportune ipotesi, da semplici proprietà della gravità (probabilmente perché si tratta di un argomento difficilmente inquadrabile nelle attuali divisioni disciplinari; cfr. *supra*, pp. 46-7).

L'unitarietà della scienza di Archimede, che è stata una delle principali cause dell'oblio in cui essa è caduta, costituisce in realtà, a mio parere, un particolare motivo di interesse, anche dal punto di vista didattico. Gli studenti sanno, nella migliore delle ipotesi, che il metodo dimostrativo può essere applicato in geometria, ma non sono abituati a dimostrare teoremi sulla forma degli oceani o il galleggiamento dei corpi. L'utilità delle dimostrazioni diverrebbe molto più chiara se fossero usate non solo in geometria, ma in una varietà di modelli che descrivono fenomeni reali.

Anche nell'ambito di quella che oggi è considerata matematica pura alcune antiche dimostrazioni archimedee possono essere didatticamente più efficaci dei loro equivalenti moderni. La matematica antica si basava infatti sempre su proprietà geometriche visualizzabili, mentre gran parte della matematica moderna si è sviluppata ricorrendo a metodi algebrici, che hanno il vantaggio di condurre più rapidamente ai risultati, ma il difetto (particolarmente rilevante nella didattica) di non essere visualizzabili e nascondere le idee.

Consigli di lettura

Naturalmente il primo consiglio che si può dare a chi voglia approfondire l'argomento di questo libro è quello di leggere direttamente le opere di Archimede. Se si hanno il tempo e le conoscenze sufficienti, il duro lavoro necessario sarà ampiamente ripagato.

L'edizione critica di riferimento (che accanto al testo greco include una traduzione a fronte in latino) è ancora quella di Johan L. Heiberg (*Archimedis Opera Omnia*, Teubner, Lipsia 1880-81; la seconda edizione, che include i testi letti sul palinsesto, è degli anni 1910-15; la Cambridge University Press nel 2013 ha stranamente ristampato l'edizione del 1880-81).

Purtroppo non esistono oggi in commercio edizioni delle opere di Archimede in lingua italiana: un dato che da solo giustifica un impietoso giudizio sul livello della nostra editoria. In biblioteca ci si può procurare l'edizione curata da Attilio Frajese per la UTET nel 1988: l'edizione non contiene però il testo greco (per ragioni imperscrutabili i classici UTET riportavano il testo originale solo delle opere greche letterarie, che erano incluse nella collana "Classici greci", ma non di quelle incluse nelle collane "Classici della scienza" e "Classici della filosofia") e la traduzione è molto discutibile (spesso, più che di traduzione, si tratta in realtà di una parafrasi).

Un'edizione affidabile delle opere di Archimede, che include il testo greco stabilito da Heiberg e una buona traduzione a fronte in francese, ancora in commercio, è quella curata da Charles Mugler (*Archimède*, Les Belles Lettres, Paris 1970-72, in quattro volumi, dei quali il quarto contiene frammenti e i commentari di Eutocio).

Non esiste una traduzione inglese. Reviel Netz l'ha iniziata, ma finora ne ha pubblicato solo un volume: *The Works of Archimedes: Translation and Commentary*, vol. 1: *The Two Books on the Sphere and the Cylinder*, Cambridge University Press, Cambridge 2004.

Lo studio diretto di Archimede è molto difficile per chi non conosca il linguaggio scientifico dell'epoca. Vanno perciò segnalati due libri nei quali il contenuto di tutte le opere di Archimede è esposto in un linguaggio accessibile al lettore moderno non specialista:

– T. L. Heath, *The Works of Archimedes, Edited in Modern Notation with Introductory Chapters*, Cambridge University Press, Cambridge 1897 (la ristampa di Dover ancora in commercio ha il titolo abbreviato *The Works of Archimedes*, che può ingannare suggerendo che si tratti di una traduzione);
– E. J. Dijksterhuis, *Archimedes*, Meulenhoff, Amsterdam 1938 (in olandese, poi tradotto in inglese e ristampato da Princeton University Press nel 1987; tradotto in italiano come *Archimede*, Ponte alle Grazie, Firenze 1989).

Heath si discosta spesso dal pensiero di Archimede, traducendo in forma algebrica ragionamenti prettamente geometrici. L'esposizione di Dijksterhuis, più aderente all'originale, è certamente migliore, ma la sua fobia verso le notazioni algebriche moderne mi appare francamente eccessiva. Ad esempio l'autore ritiene che indicare il prodotto delle due grandezze a e b scrivendo $a \cdot b$ tradirebbe lo spirito di Archimede. Non traduce però letteralmente le espressioni originali, ma indica il prodotto con la notazione $O(a,b)$, di sua invenzione: una notazione che, rispetto ad $a \cdot b$, è altrettanto lontana dall'originale ma più complessa e soprattutto incomprensibile a chi non abbia letto con cura le pagine iniziali in cui Dijksterhuis spiega le tante notazioni da lui inventate e usate sistematicamente.

Il libro di Dijksterhuis (e anche quello di Heath), anche se molto più accessibile delle opere originali, richiede un serio impegno di studio.

A chi ha sfogliato queste pagine perché incuriosito dal personaggio di Archimede, ma è stato respinto dalle dimostrazioni, si può consigliare un libro di facile lettura: M. Geymonat, *Il grande Archimede*, Teti, Roma 2006^2. I risultati di Archimede vi sono citati senza entrare mai nel merito del metodo che ha permesso di ottenerli, ma vi sono molte informazioni sul ricordo di Archimede trasmesso dalla letteratura latina.

Se si è interessati alle testimonianze greche e latine su Archimede, è molto utile la raccolta curata da Heinrich F. Fleck, disponibile in rete sul sito: https://www.academia.edu/38015991/References_to_Archimedes_in_classical_Latin-and_Greek-language_texts_-_Riferimenti_ad_Archimede_in_testi_classici_di_lingua_greca_e_latina (ultimo accesso ottobre 2019).

Diversi utili saggi sul pensiero di Archimede e soprattutto sulla sua influenza sulla scienza moderna sono negli atti del convegno tenuto a Siracusa e Catania dal 9 al 12 ottobre 1989: C. Dollo (a cura di), *Archimede. Mito, tradizione, scienza*, Olschki, Firenze 1992.

Tra le pubblicazioni dedicate alla decifrazione e interpretazione del palinsesto successive al suo ritrovamento vanno segnalate almeno le seguenti.

– R. Netz *et al.* (eds.), *The Archimedes Palimpsest*, Cambridge University Press, Cambridge 2011. L'opera è formata da due volumi: il primo contiene la storia del palinsesto e della sua decifrazione e un saggio di Netz sui nuovi contenuti portati alla luce; il secondo è formato dalle foto del palinsesto e dalla trascrizione del testo greco che si è riusciti a leggere, con le integrazioni proposte dagli editori (è riprodotto tutto il palinsesto, che oltre a opere di Archimede contiene anche due orazioni di Iperide e un commento alle *Categorie* di Aristotele). Non essendovi né una traduzione in una lingua moderna né alcuna nota, la pubblicazione è rivolta solo a specialisti.

– F. Acerbi, C. Fontanari, M. Guardini (a cura di), *Archimede, Metodo. Nel laboratorio del genio*, Bollati Boringhieri, Torino 2013. È un volume molto utile, perché contiene la traduzione italiana di ciò che è stato possibile leggere del *Metodo* di Archimede (purtroppo manca il testo greco) e un'accurata analisi del contenuto dell'opera; il resto del materiale (che include anche una dissertazione sui proemi nella letteratura greca) non è, a mio parere, altrettanto interessante.

– R. Netz, W. Noel, *The Archimedes Codex: Revealing the Secrets of the World's Greatest Palimpsest*, Weidenfeld & Nicolson, London 2007 (tradotto in italiano come *Il codice perduto di Archimede. La storia di un libro ritrovato e dei suoi segreti matematici*, Rizzoli, Milano 2007). Si tratta di un resoconto, spesso in stile giornalistico, del lavoro di decifrazione e interpretazione del palinsesto. Contiene molto materiale interessante, ma a volte, a mio parere, è fuorviante (cfr. *supra*, p. 127, nota 38).

Volendo inquadrare il contributo di Archimede nel più vasto ambito della matematica greca, è ancora molto utile: T. L. Heath, *A History of Greek Mathematics*, 2 voll., Clarendon, Oxford 1921; repr. Dover, New York 1981.

Un altro libro sulla matematica greca particolarmente interessante è: W. Knorr, *The Ancient Tradition of Geometric Problems*, Courier Corporation, North Chelsmford (MA) 1986.

Tra i libri sulla scienza ellenistica non posso non ricordare il mio *La rivoluzione dimenticata*, Feltrinelli, Milano 1996 (ultima edizione 2013), che è basato sulle stesse idee esposte in questo libro.

Poiché gli specialisti dell'antica scienza esatta hanno scritto in genere opere monografiche, evitando di produrre sintesi generali della scienza antica, gli altri libri su questo tema sono scritti in genere da studiosi specialisti delle antiche scienze della vita. È questo il caso, ad esempio, dei saggi di Geoffrey E. R. Lloyd (ricordiamo solo *Methods and Problems in Greek Science*, Cambridge University Press, Cambridge 1991, tradotto in italiano come *Metodi e problemi della scienza greca*, Laterza, Roma-Bari 1993). Sono libri interessanti ma, a mio parere, pesantemente condizionati dal particolare punto di vista degli autori, lontano da quella scienza esatta di cui ci siamo occupati finora e che costituì un aspetto essenziale della scienza ellenistica.

La bibliografia su Archimede è vasta (anche se molto meno di quanto sarebbe lecito aspettarsi); se ne può ottenere una larga porzione unendo le bibliografie contenute nei pochi libri qui citati. In particolare l'edizione italiana dell'opera di Dijksterhuis include un saggio bibliografico di Knorr aggiornato al 1989, mentre sul tema della decifrazione del palinsesto la bibliografia del citato *The Archimedes Palimpsest* può considerarsi completa.

Indice dei nomi*

Acerbi Fabio, 16n, 164n, 179
Alessandro Magno, 13-4, 18
Annibale, 21
Antemio di Tralle, 31 e n, 86
Antigono Monoftalmo, 13
Apollonio di Perga, 75-8, 86, 170
Apollonio Rodio, 20
Appio Claudio Pulcro, 25, 27
Apuleio, 83-6, 166, 171
Archia di Corinto, 67
Aristarco di Samo, 19, 45, 90-3, 116, 160, 172
Aristotele, 14, 45, 47, 71, 115n, 172, 179
Arnold Vladimir I., 113n
Ateneo di Naucrati, 18n, 67-9, 73n
Ausonio Decimo Magno, 163n

Baker James R., 128n
Blass Friedrich, 22
Bloch Marc, 73n
Bolzano Bernard, 103
Boyer Carl B., 102-3

Callia, 30
Callippo, tiranno di Siracusa, 21
Cantor Georg, 127
Carman Christiàn C., 93n
Carneade di Cirene, 11
Carpo di Antiochia, 34, 39, 56
Casson Lionel, 68
Cavalieri Bonaventura, 86n, 126
Celso Aulo Cornelio, 19n
Cesio Basso, 163
Cicerone Marco Tullio, 22-3, 28, 92-4, 173
Claudiano Claudio, 94
Colombo Cristoforo, 68
Commandino Federico, 173-4
Conone di Samo, 19, 23, 35
Corace di Siracusa, 21
Courtois Guillame, 29
Crisippo, 16, 172
Ctesibio di Alessandria, 19, 71-2, 172

Dalley Stephanie, 70n
Demetrio I di Macedonia, detto Poliorcete, 30
Democrito, 14, 125
Dijksterhuis Edward J., 32n, 57n, 130n, 171, 178, 180
Diocle, 84-6
Diodoro Siculo, 23-4, 47, 69
Diogene Laerzio, 15, 33n
Dione di Siracusa, 21
Dionisio I di Siracusa, 21-2
Dollo Corrado, 179
Dositeo, 22, 85-6, 170n

* Dato il numero elevato di occorrenze, nell'Indice non compare la voce *Archimede*.

Einstein Albert, 166
Elia, 32 e n
Ennodio Magno Felice, 163n
Epicarmo, 21
Eraclide, biografo di Archimede, 21, 42
Eraclide, conoscente di Archimede, 21, 170n
Eratostene di Cirene, 20, 23, 36, 124, 161-2
Erofilo di Calcedonia, 15, 18-9
Erone di Alessandria, 17, 39, 44n, 62-3, 94, 156-7, 159, 162, 171-3
Euclide, 16, 19, 42n, 63n, 77-8, 82-3, 91, 102, 113, 115n, 134-5, 152-3, 166, 168-70
Eulero (Leonhard Euler), 149, 174
Eustazio di Tessalonica, 32
Eutocio di Ascalona, 21-2, 152n, 171, 177
Evans James, 93n

Federico II, imperatore, 37
Fidia (padre di archimede), 22
Filone di Bisanzio, 19
Flavino Remmio, 52-3
Fleck Heinrich F., 178
Fontanari Claudio, 179
Frajese Attilio, 177
Fraser Peter M., 34 e n
Frege Gottlob, 15-6

Galeno di Pergamo, 31 e n
Galilei Galileo, 70, 73-4, 87n, 126-7, 174
Gallo Caio Sulpicio, 92
Gauss Carl Friedrich, 103-5
Gelone II di Siracusa, 90, 160
Gemino di Rodi, 56
Gerone II di Siracusa, 21-2, 27, 41, 61-2, 67, 90n
Geronimo di Siracusa, 21
Geymonat Mario, 32n, 178
Guardini Marialia, 179
Guglielmo di Moerbeke, 37, 171

Heath Thomas L., 178-9
Heiberg Johan Ludwig, 11, 23n, 37-8, 57-8, 83n, 89n, 163, 168n, 177
Hill Donald R., 72n

Iceta di Siracusa, 21
Ipazia, 81,
Ipparco, 39, 89, 164, 170-1
Isidoro di Mileto, 37

Keplero (Iohannes Kepler), 87n
Kline Morris, 102 e n, 103
Knorr Wilbur, 151n, 179-80
Koyré Alexandre, 73n

Lattanzio, 95
Leibniz Gottfried, 110
Leonardo da Vinci, 24
Leone il Matematico, 37
Lewis Michael J. T., 18n
Livio Tito, 28
Lloyd Geoffrey E. R., 180
Luciano di Samosata, 31

Mach Ernst, 59-60
Manzoni Alessandro, 11
Marcello Marco Claudio, conquistatore di Siracusa, 25, 28, 30-2, 92
Marcello Marco Claudio, console, nipote del precedente, 92
Marziano Capella, 95
Maurolico Francesco, 173
Metica, cortigiana, 73
Mola Pier Francesco, 29
Moschione, 67, 69
Mugler Charles, 171, 177, 22n, 36n, 43n, 45n, 46n, 57n, 58n, 73n, 90n, 98n,

99n, 100n, 101n, 106n, 107n, 116n, 118n, 122n, 132n, 134n, 146n, 151n, 161n, 167n, 171 e n, 177

Netz Reviel, 127n, 164n, 177, 179
Newton Isaac, 110-2
Noel William, 127n, 179

Olimpiodoro il Giovane, 31, 62-3, 82, 85
Ovidio Nasone Publio, 94

Papadopoulos-Kerameus Athanasios, 37
Pappo di Alessandria, 34, 39, 55-8, 62-3, 93-4, 171, 173
Piero della Francesca, 128
Pitea di Massalia, 13
Platone, 14, 21, 33n, 44n, 94, 167n
Plinio il Vecchio, 18-9, 28-9
Plutarco, 11, 22, 30-1, 33-5, 42, 47, 61-3, 164, 170
Polibio di Megalopoli, 25-8, 30
Popper Karl R., 167n
Price Derek J. de Solla, 172
Proclo Diadoco, 42, 63
Pseudo-Aristotele, 115n

Rashed Roshdi, 84-5
Riemann Bernhard, 174
Robinson Abraham, 126n
Russo Lucio, 47n, 169n, 173

Saito Ken, 127n
Sakellarakis Yannis A., 82n
Sambursky Samuel, 73-4
Seleuco I Nicatore, 13
Seneca Lucio Anneo, 90n
Sesto Empirico, 15, 93, 170
Silio Italico, 29
Simplicio, 39, 57-8, 62-3
Sines George, 82n
Stanley Richard P., 164n
Stein Wolfgang, 57 e n, 168-9
Stevino (Simon Stevin), 174
Stratone di Lampsaco, 19
Suter Heinrich, 156n, 163

Talete di Mileto, 33, 153n
Tchernetska Natalie, 127n
Teocrito, 21, 162
Teone di Alessandria, 81-2, 85, 171
Tertulliano Quinto Settimio Florente, 171
Thorndike Alan, 93n
Tisia, 21
Toeplitz Otto, 57 e n, 168n
Tolomeo I, 13, 18
Tolomeo II, 18-9
Tolomeo VIII, 173
Tolomeo Claudio, 23n, 35, 39n, 89, 160, 171-2
Torelli Giuseppe, 24
Tzetzes Giovanni, 22, 31-2, 63-4, 174

Vailati Giovanni, 57-8
Valerio Massimo, 28
Vitruvio Pollione Marco, 11, 18n, 30, 34n, 41-2, 52-3, 71, 171, 174
Vittorino Mario, 163n

Wilson Nigel, 164n

Zenodoto di Efeso, 20
Zenone di Cizio, 14
Zonara Giovanni, 31-2
Zoroastro, 19