OPERASI MATRIKS

1. Transposisi Matriks (*Matrix Transpose*)

Diberikan matriks **A** berukuran $m \times n$ (yaitu m baris dan n kolom) berikut:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m-1,1} & a_{m-1,2} & \cdots & a_{m-1,n-1} & a_{m-1,n} \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n-1} & a_{m,n} \end{bmatrix}$$

Transposisi matriks $\boldsymbol{A}$, dinotasikan dengan $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$**,** adalah pertukaran posisi elemen-elemen matriks sedemikian rupa sehingga setiap elemen yang menempati baris ke-i kolom ke-j di $\boldsymbol{A}$ (yaitu $a_{i,j}$) menjadi menempati baris ke-j kolom ke-i di $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ (yaitu $a^{T}_{j,i} = a_{i,j}$). Dengan kata lain, setiap *baris* di $\boldsymbol{A}$ menjadi *kolom* di $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$. Jelaslah elemen-elemen matriks $a_{i,i}$ tidak bertransposisi sehingga susunan elemen-elemen matriks $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ adalah:

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} & \cdots & a_{m-1,1} & a_{m,1} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & \cdots & a_{m-1,2} & a_{m,2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{1,n-1} & a_{2,n-1} & \cdots & a_{m-1,n-1} & a_{m,n-1} \\ a_{1,n} & a_{2,n} & \cdots & a_{m-1,n} & a_{m,n} \end{bmatrix}$$

Contoh: Berikut ini adalah dua buah matriks $\boldsymbol{A}$ dan $\boldsymbol{B}$ dengan masing-masing transposisinya.

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

Algoritma transposisi matriks berikut dirancang untuk matriks bujur sangkar (*square matrix*) $n \times n$, yaitu matriks dengan jumlah baris sama dengan jumlah kolom.

1.1. Algoritma Sekuensial

Algoritma sekuensial transposisi matriks adalah sangat sederhana, yaitu:

procedure *seq_transpose* (*A*)
(1) for $i = 1$ **to** n **do**
(2) for $j = 1$ **to** $i - 1$ **do**
(3) $a_{i,j} \leftrightarrow a_{j,i}$
(4) end for
(5) end for

Dalam algoritma di atas, $a_{i,j} \leftrightarrow a_{j,i}$ adalah **procedure *swap*** berikut:

procedure *swap* (x, y)
(1) $temp \leftarrow x$
(2) $x \leftarrow y$
(3) $y \leftarrow temp$

Pada **procedure *seq_transpose***, banyaknya iterasi pada *loop* (2) bergantung pada nilai i yang diberikan pada *loop* (1); banyaknya iterasi akibat kedua *loop* tersebut adalah:

$$0 + 1 + 2 + 3 + ... + (n - 1) = (n - 1) \times n/2 = (n^2 - n)/2$$

Sementara itu *running time* **procedure *swap*** adalah konstan. Dengan demikian *running time* **procedure *seq_transpose*** adalah $O(n^2)$; nilai *running time* ini optimal.

1.2. Algoritma Paralel

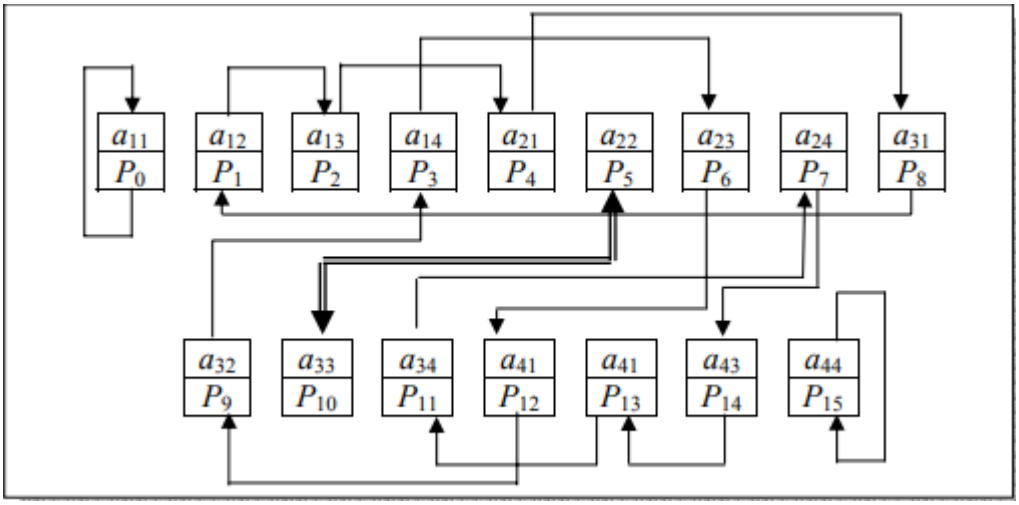
1.2.1. IN (Interconnection Network) Perfect Shuffle

Dalam algoritma ini, $n = 2^q$ dengan $q \in \{1, 2, 3, ...\}$. IN *Perfect Shuffle* yang akan digunakan terdiri dari n^2 prosesor, yaitu: P_0, P_1, P_2, ..., $P_{2^{2q}-1}$ (ingat, karena ada n^2 prosesor, $n = 2^q$, indeks prosesor pertama adalah 0, yaitu P_0, maka indeks prosesor terakhir, atau ke-n^2, adalah n^2 -1 atau 2^{2q} - 1, yaitu $P_{2^{2q}-1}$), yaitu sebanyak elemen matriks yang akan dicari transpose-nya, dengan $n = 2^q$, $q \in \{1, 2, 3, ...\}$. Elemen $a_{i,j}$ dari matriks **A** dipegang oleh prosesor P_k, dengan $k = 2^q(i - 1) + (j - 1)$.

Contoh: Untuk $q = 2$, maka $n = 2^2 = 4$, dengan demikian matriks **A** berukuran 4×4, dan prosesor IN *Perfect Shuffle* adalah P_0, P_1, P_2, ..., P_{15}. Elemen matriks a_{23} dipegang oleh prosesor P_k dengan $k = 2^2(2 - 1) + (3 - 1) = 6$ yaitu P_6, elemen matriks a_{32} dipegang oleh prosesor P_k dengan $k = 2^2(3 - 1) + (2 - 1) = 9$ yaitu P_9, elemen a_{44} dipegang oleh prosesor P_k dengan $k = 2^2(4 - 1) + (4 - 1) = 15$ yaitu P_{15}.

Untuk melihat koneksi antar prosesor, indeks-indeks prosesor dinyatakan dalam biner. Untuk $q = 2$ kita mempunya prosesor-prosesor beserta indeknya sebagai berikut: P_{0000},

P_{0001}, P_{0010}, P_{0011}, ..., P_{1111}. Prosesor P_k terhubung ke prosesor P_m, dengan k dan m adalah representasi biner, jika m diperoleh dengan **menggeser** satu posisi ke kiri secara **siklus** (*cyclic left shifting*). Dengan aturan ini $P_{0000} = P_0$ terhubung ke dirinya sendiri, $P_{0001} = P_1$ terhubung ke $P_{0010} = P_2$, $P_{0010} = P_2$ terhubung ke $P_{0100} = P_4$, $P_{0100} = P_4$ terhubung ke $P_{1000} = P_8$, dan $P_{1000} = P_4$ terhubung ke $P_{0001} = P_8$. Lihat Gambar 1.



Gambar 1. Perfect Shuffle 16 Prosesor

Dengan $n = 2^q$, setelah q **pergeseran siklus** bit-bit indeks prosesor, elemen a_{ij} dari matriks ***A*** yang semula dipegang prosesor P_k, dengan $k = 2^q(i - 1) + (j - 1)$, sekarang dipegang oleh P_r, dengan $r = 2^q(j - 1) + (i - 1)$, yaitu prosesor yang semula memegang elemen a_{ji} dari matriks ***A***.

Contoh: Kembali, misalkan $q = 2$; IN *Perfect Shuffle* terkait seperti gambar di atas. Pada gambar tersebut mula-mula $P_1 = P_{0001}$ memegang elemen a_{12}. Pada pergeseran pertama elemen a_{12} ini berpindah ke $P_2 = P_{0010}$. Pada pergeseran kedua elemen a_{12} ini akhirnya berpindah ke $P_4 = P_{0100}$, yaitu prosesor yang semula memegang a_{21}. Di lain pihak, pada pergeseran pertama elemen a_{21} yang mula-mula dipegang oleh prosesor $P_4 = P_{0100}$ berpindah ke $P_8 = P_{1000}$, dan pada pergeseran kedua elemen a_{21} ini akhirnya berpindah ke $P_1 = P_{0001}$ yang mula-mula memegang a_{12}. Perhatikan bahwa setelah 2 pergeseran ini P_0 dan P_{15} sama sekali tidak memindahkan elemen matriks yang dipegangnya sedangkan elemen yang dipegang P_5 dan P_{10} kembali kepada keadaan semula setelah dua pergeseran ini, seperti terlihat pada Gambar 6.1.

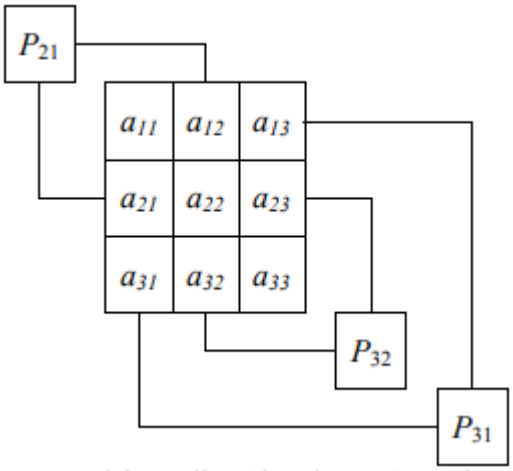
Dengan demikian, procedure transpose matriks ***A*** menggunakan IN *Perfect Shuffle* adalah sebagai berikut:

procedure *par_shuffle_transpose* (*A*)
(1) for $i = 1$ **to** q **do**
(2) **for** $k = 1$ **to** $2^{2q} - 2$ **do in parallel** {'-2' karena P_0 dan $P_{2^{2q}}$ tidak diikutsertakan}
(3.1) $r \leftarrow 2^{k \bmod (2^{2q}-1)}$
(3.2) P_k mengirimkan elemen yang dipegangnya ke P_r
(4) end for
(5) end for

Langkah (3.1) dan (3.2) memerlukan waktu konstan, sedangkan iterasi (1) terdiri dari q langkah atau log n langkah mengingat $n = 2^q$. Dengan demikian *running time* **procedure *par_shuffle_transpose*** di atas adalah $t(n) = O(\log n)$. Jumlah prosesor yang digunakan adalah $p(n) = n^2$ sehingga *cost* procedure ini adalah $c(n) = O(n^2 \log n)$ yang **tidak optimal** karena *running time* procedure sekuensial adalah **lebih kecil**, yaitu $O(n^2)$.

1.2.2. SIMD-EREW

Pada awalnya seluruh elemen matriks ***A*** berukuran $n \times n$ tersimpan di dalam *shared memory* bersama dengan informasi posisi baris dan kolomnya (indeks) (i, j). **Tugas** setiap prosesor SIMD-EREW adalah menukarkan elemen matriks berindeks (i, j) dengan elemen matriks berindeks (j, i). Selanjutnya adalah **fakta** bahwa dalam transposisi matriks ***A*** semua elemen matriks ***A*** berindeks (i, i) tidak mengalami transposisi. Dengan tugas dan fakta ini maka jumlah prosesor SIMD-EREW yang diperlukan adalah $p(n) = (n^2 - n)/2$. Untuk $n = 3$, proses transposisi ini diperlihatkan pada Gambar 2. Dalam gambar tersebut prosesor-prosesor P_{21}, P_{32}, dan P_{31} berturut-turut bertugas menukarkan elemen-elemen matriks a_{21} dengan a_{12}, a_{32} dengan a_{23}, dan a_{31} dengan a_{13}.



Gambar.2. Transposisi matriks ***A*** berukuran 3 × 3 dengan 3 prosesor.

Dengan demikian, procedure transpose matriks ***A*** menggunakan SIMD-EREW adalah sebagai berikut:

procedure *par_SIMD-EREW_transpose* (*A*)
(1) for $i = 2$ **to** n **do in parralel**
(2) for $j = 1$ **to** $i - 1$ **do in parallel**
(3) $a_{i,j} \leftrightarrow a_{j,i}$
(4) end for
(5) end for

Running time **procedure *swap*** (yaitu $a_{i,j} \leftrightarrow a_{j,i}$) adalah konstan sehingga *running time* **procedure *par_SIMD-EREW transpose*** adalah konstan, atau $t(n) = O(1)$, sehingga *cost* procedure ini adalah $c(n) = p(n) \times t(n) = O(n^2)$ yang berarti **procedure *par_SIMD-EREW transpose*** adalah *cost optimal*.