基于梯度法和二分法的置信规则库参数训练方法

常瑞，王红卫，杨剑波

摘要：置信规则库是近年来发展起来的一种知识库系统，是传统规则库的推广。大型置信规则库系统的训练模型是一个带有线性约束的复杂非线性优化模型，传统优化方法求解该类模型有一定困难和局限性。本文结合梯度法和二分法提出一种新的优化算法实现了对置信规则库中参数的优化训练。采用该算法对一个已经建立的置信规则库参数进行了训练，训练结果令人满意。训练实例表明新的算法具有简单、速度快、收敛精度高等特点。

关键词：置信规则库；训练模型；非线性规划；梯度法；二分法

An Algorithm for Training Parameters in Belief Rule-Bases Based on the Gradient and Dichotomy Methods

Abstract: An optimization model for training a belief rule-base is a complex nonlinear optimization problem with linear constraints and the conventional optimization methods have limitations in solving such a training model. Based on the gradient and dichotomy methods, a new simple optimization algorithm is proposed in this paper to train parameters in a belief rule-base. The algorithm has been applied to train parameters in an existing belief rule-base and the training results are satisfactory. The results show that the new algorithm is simple, fast and effective.

Keywords: belief rule-base；training model；nonlinear optimization；gradient method；dichotomy method

0．引言

为了处理人类决策中遇到的不确定性信息，在D-S理论、决策理论和规则库的基础上Yang等提出了基于证据推理方法的置信规则库推理方法（RIMER）[1]。该方法首先利用基于置信结构的规则库建模，然后利用证据推理方法实现规则库系统的推理。这种新的建模方法已被应用于工程、管理和医疗领域中，并取得了令人满意的结果。由于RIMER方法中的规则库是在置信结构的基础上设计的，所以RIMER方法中的规则库被称作置信规则库。在规则库推理过程中用到的置信规则库的参数如规则权重、前提属性的权重，以及置信度等可以由专家根据经验人为给定。但是一般地，专家并不能总是客观、精确地给定这些参数，这就削弱了RIMER方法模拟实际系统的能力，因此有必要建立一种支持机制用来训练置信规则库。

为此Yang等提出了置信规则库的训练模型[2]。然而，大型置信规则库训练模型是一个带有线性约束的复杂非线性优化问题，传统的求解该类非线性规划问题的方法有近似线性方法、Zoutendijk 可行方向法、Wolfe 既约梯度法等[3]。但在实际应用中，这些传统的方法求解训练模型有一定的困难和局限性。比如，近似线性化法的收敛精度不高，要完成Zoutendijk 可行方向法中的矩阵分解或者Wolfe 简约梯度法中的基变量变换，也十分繁琐和困难。另外，Yang等在文[2]中利用MATLAB中的FMICON函数求解训练模型，给出了参数训练结果。但是算法训练结果的收敛精度不够理想，并且利用MATLAB语言对训练大型置信规则库编程比较繁琐，可移植性差。

本文结合梯度法[4]和二分法设计出了一种新的简单算法。该方法首先利用梯度法求解非线性规划问题的下降方向，接着根据非线性规划中的约束条件找到最大步长，然后通过二分

法对最大步长二分直到找到使目标函数值最小的步长。这种新的简单算法实现了对带有线性约束的复杂非线性规划问题的快速有效求解。

1. 置信规则库训练模型

建立置信规则库系统的出发点是依据专家个人的知识或依据领域专业知识通过数据挖掘来收集 IF--THEN 规则，然后根据收集到的规则和用户提供的观测信息设计知识库和推理机推理出结论。

为了建立一个规则库，首先必须确定每个前提属性的参考集合和将要用到的参考变量。一般地，传统规则库中的第 k 条规则形式如下：

$$R_k：\text{IF} \quad A_1^k \wedge A_2^k \wedge \ldots \wedge A_{T_k}^k \quad \text{THEN}\, D_k \tag{1}$$

其中 A_i^k 是第 k 条规则的第 i 个前提属性的参考变量，T_k 是第 k 条规则中用到的前提属性的数目， D_k 是第 k 条规则的结果。

为了体现规则中各种可能结果的分布从而使规则包含更丰富的信息，在传统规则的基础上，Yang 等提出了一种更接近实际的表达机制即置信规则[1]。在置信规则中结果与置信度以分布式结构出现。置信规则形式如下：

$$R_k：\text{IF} \quad A_1^k \wedge A_2^k \wedge \ldots \wedge A_{T_k}^k \ \text{THEN}\{(D_1, \overline{\beta}_{1k})(D_2, \overline{\beta}_{2k}), \ldots, (D_N, \overline{\beta}_{Nk})\}, (\sum_{i=1}^{N} \overline{\beta}_{ik} \le 1)，规则$$

$$权重为\, \theta_k ，属性权重为\, \delta_{k1}, \delta_{k2}, \ldots, \delta_{kT_k} 。\ k \in \{1, \ldots, L\} \tag{2}$$

其中 $\overline{\beta}_{ik}\,(i \in \{1, \ldots, N\})$ 是 D_i 的置信度。L 是规则库中规则的数目。

根据上述建立的置信规则库以及输入信息和置信规则前提的匹配程度，通过证据推理运算方法[5]就可以得到结果 $D_1, \ldots, D_N$ 最终的置信度，即 $Y = \{(D_j, \beta_j)$ 。

在上述推理过程中，置信规则库的参数如置信度、规则权重、属性权重等对结果的置信度有直接影响。然而，这些参数如完全主观缺点，往往不能够准确反映实际情况。因此有必要建立一种方法，利用输入输出信息实现对置信规则库参数的优化训练。

Yang 等提出了置信规则库的训练模型[2]。图 2 表示训练置信规则库的过程。其中 $\hat{x}_m$ 是给定的输入，$\hat{y}_m$ 是相应的观测到的输出，可以通过仪器观测或专家估计来得到。y_m 是置信规则库系统产生的模拟输出，$\xi(p)$ 是 $\hat{y}_m$ 和 y_m 之间的误差。

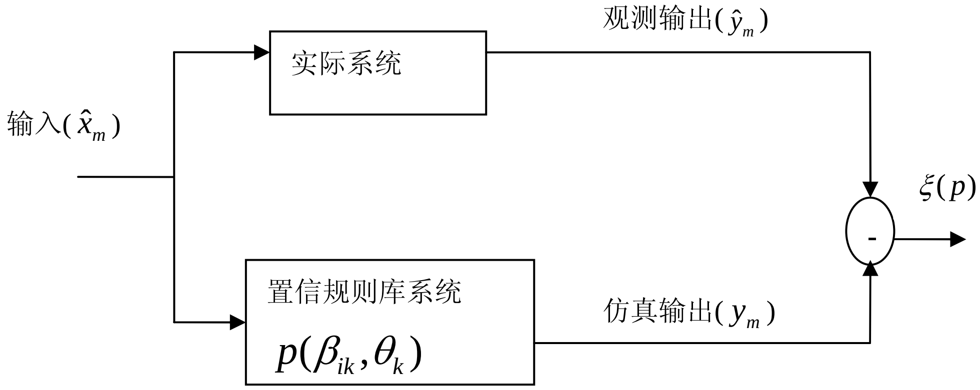

图 1 置信规则库训练过程的图解

假设观测到的训练数据由 M 个输入－输出对 $(\hat{x}_m,\hat{y}_m)$（ $m=1,\ldots,M$ ）的形式提供。为了应用 RIMER 方法进行推理，需要将上图中的观测输出 $\hat{y}_m$ 转换为置信结构的形式，根据文[5]中的转换方法，我们可以得到：

$$\hat{y}_m=\{(D_j,\hat{\beta}_j(m)),j=1,\ldots,N\} \tag{3}$$

其中 D_j 是规则结果中的参考变量，$\hat{\beta}_j(m)$ 是 D_j 的置信度。

而上图中的仿真输出 y_m 则可以通过 RIMER 方法对置信规则库的推理产生，并以分布式的形式表示如下，其中参考变量和观测输出的参考变量相同。

$$y_m=\{(D_j,\beta_j(m)),j=1,\ldots,N\} \tag{4}$$

对于第 m 对观测数据，为了更好的模拟实际系统，y_m 和 $\hat{y}_m$ 间的误差越小越好。由于观测结果和仿真结果都是以与置信度相连的形式出现，减小 y_m 和 $\hat{y}_m$ 间的误差就等价于减小对应于同一个参考变量的两个输出的置信度即 $\hat{\beta}_j(m)$ 和 $\beta_j(m)$ 间的误差，并且所有的观测数据都要满足这个要求。

因此，训练模型的目标函数定义如下：

$$\min_p \xi_j(p) \quad j=1,\ldots,N \tag{5}$$

其中 $\xi_j(p)=\dfrac{1}{M}\sum_{m=1}^{M}(\beta_j(m)-\hat{\beta}_j(m))^2, j=1,\ldots,N$

其中 $p=p(\beta_{ik},\theta_k)$ 是训练参数向量，$\hat{\beta}_j(m)$ 是观测数据 $\hat{y}_m$ 被评估到 D_j 的置信度，β_j 是在给定输入信息基础上通过 RIMER 方法产生的置信度。N 表示结果的评价等级。

其中训练模型的约束条件如下：

（a）置信度不得大于 1 或小于 0。

$0 \le \beta_{jk} \le 1, j=1,...,N; k=1,...,L$，其中 L 表示置信规则库中的规则数目 （5a）

(b)如果第 k 条规则是完全的，那么结果中所有置信度的和等于 1。

$$\sum_{j=1}^{N} \beta_{jk} = 1，\ k=1,...,L \tag{5b}$$

（c）规则权重标准化之后应在 0 和 1 之间。

$$0 \le \theta_k \le 1, k=1,...,L \tag{5c}$$

因此置信规则库训练模型是一个多目标非线性优化问题。该非线性规划问题有 $(N \times L + L)$ 个训练参数， $(N \times L + 2L)$ 个约束条件，由式（5a）—（5c）给出。

2 优化训练算法的提出

基于梯度法和二分法的置信规则库参数训练方法利用置信规则库训练模型中的等式约束来降低问题的维数，求出低维空间的可行下降方向。用梯度法选定了搜索方向之后，根据训练模型中的不等式约束求出低维空间优化参数各自的最大步长，然后通过不断对步长二分找到使目标函数值最小的迭代点。

该算法的计算步骤如下：

步骤 1 给定初始点 p^0，置 $t=0$。利用线性加权和法把训练模型的多目标函数转化为单目标函数。

$\xi(p) = \sum_{j=1}^{N} \omega_j \xi_j(p)$ 其中 $\omega = (\omega_1,...,\omega_N)$ 为权重向量，例如可以设权重相等即 $\omega_j = \dfrac{1}{N}, j=1,...,N$。

步骤 2 根据等式约束条件（5b）对非线性规划问题降维。令 $\beta_{Nk} = 1 - \sum_{n=1}^{N-1} \beta_{nk} (k=1,...,L)$。经过降维之后训练参数和优化条件分别减少了 L 个和 $2L$ 个。

步骤 3 求取低维空间的梯度向量，利用低维空间的不等式约束条件求优化变量对应的最大步长。每一个低维空间优化变量在初始点处 p^t 的导数记为 $\nabla \xi(p^t)$，其中 $\nabla \xi(p) = (\dfrac{\partial \xi}{\partial \beta_{11}},...,\dfrac{\partial \xi}{\partial \beta_{(N-1)1}},\dfrac{\partial \xi}{\partial \beta_{21}},...,\dfrac{\partial \xi}{\partial \beta_{(N-1)1}},...,\dfrac{\partial \xi}{\partial \beta_{1L}},....,\dfrac{\partial \xi}{\partial \beta_{(N-1)L}},\dfrac{\partial \xi}{\partial \theta_1},...\dfrac{\partial \xi}{\partial \theta_L})$。设步长向量为 $\lambda = (\lambda_{11},...,\lambda_{(N-1)1},\lambda_{12},...,\lambda_{(N-1)2},...,\lambda_{1L},...,\lambda_{(N-1)L},\lambda_1,...,\lambda_L)$， $\varepsilon = 1 \times 10^{-6}$。

（1） 若 $\nabla \xi(p_i^t) > 0$，根据梯度法有 $p_i^{t+1} = p_i^t - \lambda_i \nabla \xi(p_i^t)$。因为模型要求

$p_i^{t+1} = p_i^t - \lambda_i \nabla \xi(p_i^t) \ge 0$，则 $\lambda_i^{\max} = \dfrac{p_i^t}{\nabla \xi(p_i^t)}$；

（2） 若$\nabla\xi(p_i^t)=0$，该点的优化计算便会停滞不前得不到优化点，为了避免这种情况的发生，为导数加一个小的摄动，设此$\nabla\xi(p_i^t)=\varepsilon$，那么$\lambda_i^{\max}=\dfrac{p_i^t}{\nabla\xi(p_i^t)}$；

（3） 若 $\nabla\xi(p_i^t)<0$ ， 根据梯度法 $p_i^{t+1}=p_i^t-\lambda_i\nabla\xi(p_i^t)$ ， 而 $p_i^{t+1}=p_i^t-\lambda_i\nabla\xi(p_i^t)\le 1$，所以$\lambda_i^{\max}=\dfrac{p_i^t-1}{\nabla\xi(p_i^t)}$。

步骤 4 通过对步骤 3 中求出的低维空间变量的最大步长不断二分，来满足被降维变量的不等式约束要求。步骤 2 中被降维掉的变量β_{Nk}（$k=1,\ldots,L$）可以由以下公式求取$\beta_{Nk}=1-\sum_{n=1}^{N-1}\beta_{nk}(k=1,\ldots,L)$。由约束条件知$0\le\beta_{Nk}^{t+1}\le 1$，则要求$0\le\sum_{n=1}^{N-1}\beta_{nk}^{t+1}\le 1$成立。假设对最大步长经过 n 次二分之后产生的新的迭代点可以满足$0\le\sum_{n=1}^{N-1}\beta_{nk}^{t+1}\le 1$，则有$0\le(\sum_{n=1}^{N-1}\beta_{nk}^t-\frac{1}{2^n}\sum_{n=1}^{N-1}\nabla\xi(\beta_{nk}^t)*\lambda_{nk}^{\max})\le 1$。

（1）若$\sum_{n=1}^{N-1}\nabla\xi(\beta_{nk}^t)*\lambda_{nk}^{\max}\ge 0$且$\sum_{n=1}^{N-1}\beta_{nk}^t\ne 0$，则 n=[$\log_2(\dfrac{\sum_{n=1}^{N-1}\nabla\xi(\beta_{nk}^t)*\lambda_{nk}^{\max}}{\sum_{n=1}^{N-1}\beta_{nk}^t})$]+1，

即至少要经过 n 次二分实现$0\le\beta_{Nk}^{t+1}\le 1$。

（2）若$\sum_{n=1}^{N-1}\nabla\xi(\beta_{nk}^t)*\lambda_{nk}^{\max}\ge 0$且$\sum_{n=1}^{N-1}\beta_{nk}^t=0$，令$\lambda_{nk}^{\max}=0(n=1,\ldots,(N-1),k=1,\ldots L)$。

（3）若$\sum_{n=1}^{N-1}\nabla\xi(\beta_{nk}^t)*\lambda_{nk}^{\max}<0$并且$\sum_{n=1}^{N-1}\beta_{nk}^t\ne 1$，则 n=[$\log_2(\dfrac{\sum_{n=1}^{N-1}\nabla\xi(\beta_{nk}^t)*\lambda_{nk}^{\max}}{\sum_{n=1}^{N-1}\beta_{nk}^t-1})$]+1

即至少要经过 n 次二分实现$0\le\beta_{Nk}^{t+1}\le 1$。

（4）若$\sum_{n=1}^{N-1}\nabla\xi(\beta_{nk}^t)*\lambda_{nk}^{\max}<0$且$\sum_{n=1}^{N-1}\beta_{nk}^t=1$，令$\lambda_{nk}^{\max}=0(n=1,\ldots,(N-1),k=1,\ldots L)$。

步骤 5 判断步骤 4 中产生的迭代点能否使目标函数下降。设步骤 4 产生的新的迭代点为p_4^t，如果$\xi(p_4^t)\le\xi(p^t)$，直接转步骤 6；如果$\xi(p_4^t)>\xi(p^t)$，在原来的基础上对步

长二分直到生成新的迭代点 p_5^t 满足 $\xi(p_5^t) \le \xi(p^t)$ 为止。

步骤 6 对步长再一次二分，设生成新的迭代点为 p_6^t。若 $\xi(p_5^t) \ge \xi(p_6^t)$，则 $p^{t+1} = p_6^t$，否则 $p^{t+1} = p_5^t$。

步骤 7 判断计算中止条件。如果 $|\xi(p^{t+1}) - \xi(p^t)| \le \varepsilon$，并且 $|\xi(\frac{p^{t+1}+p^t}{2}) - \xi(p^t)| \le \varepsilon$，结束循环，得到最优点为 p^{t+1}；否则置：$t = t+1$ 返回步骤 3。

3 应用举例

Yang 等在文[1]中以 Hodges 提出的一个专家系统为背景建立了置信规则库，根据专家经验设置了置信规则库参数。在文[2]中给出了 12 组采样数据，并且利用 MATLAB 中 FMINCON 函数对置信规则库的参数进行了训练。本文应用上面的算法对同样的置信规则库参数进行了训练。表 1 给出了实际观测结果和置信规则库参数经过本文提出的新算法训练后利用 RIMER 方法所产生的推理输出结果间的比较。表 2 给出了实际观测结果和置信规则库参数经过 MATLAB 中 FMINCON 函数训练后利用 RIMER 方法所产生的推理输出结果间的比较。

表 1 用新的算法对置信规则库训练后 RIMER 的仿真输出和观测输出间的对比

测试数目		1	2	3	4	5	6
训练后推理结果	H	0.989051	0.795401	0.187452	0.012895	0.014893	0.037234
	M	0.010949	0.202465	0.794203	0.597135	0.776011	0.381160
	L	0.000000	0.002134	0.018345	0.389970	0.209097	0.581607
实际观测结果	H	1	0.8	0.2	0	0	0
	M	0	0.2	0.8	0.6	0.8	0.4
	L	0	0	0	0.4	0.2	0.6
测试数目		7	8	9	10	11	12
训练后推理结果	H	0.004823	0.047907	0.004560	0.08960	0.011970	0.054082
	M	0.006143	0.594143	0.236726	0.397262	0.382994	0.746462
	L	0.989034	0.357949	0.758713	0.593779	0.605036	0.199456
实际观测结果	H	0	0	0	0	0	0
	M	0	0.6	0.2	0.4	0.4	0.8
	L	1	0.4	0.8	0.6	0.6	0.2

表 2 用 MATLAB 中 FMINCON 函数对置信规则库训练后 RIMER 的仿真输出和观测输出的对比

测试数目		1	2	3	4	5	6
训练后推理结果	H	0.9912	0.8249	0.3138	0.0275	0.0422	0.1264
	M	0.0064	0.1731	0.6765	0.5749	0.7329	0.2657
	L	0.0023	0.0020	0.0097	0.3976	0.2249	0.6078
实际观测	H	1	0.8	0.2	0	0	0
	M	0	0.2	0.8	0.6	0.8	0.4

结果	L	0	0	0	0.4	0.2	0.6
测试数目		7	8	9	10	11	12
训练后推理结果	H	0.0000	0.1596	0.0118	0.0171	0.0521	0.1606
	M	0.0000	0.4724	0.1981	0.3752	0.3266	0.5353
	L	1.0000	0.3680	0.7901	0.6077	0.6213	0.3041
实际观测结果	H	0	0	0	0	0	0
	M	0	0.6	0.2	0.4	0.4	0.8
	L	1	0.4	0.8	0.6	0.6	0.2

通过表 1 和表 2 中的数据对比可看出，与文[2]中训练后 RIMER 的推理结果相比，利用新的算法对置信规则库参数训练后 RIMER 的推理结果收敛精度更高，更逼近实际观测结果。这表明新算法更有效精度更高，并且采用新的算法对置信规则库参数经过训练后 RIMER 方法具有更好的模拟实际系统的能力。

同时新的算法还具有运算简单、速度快的优点。本文中提出的新算法只需要四分钟就能得到表 1 所给出的结果。而文[2]中利用 MATLAB 中的 FMINCON 函数完成训练过程需要长得多的时间（一般数十分钟）才能收敛到表 2 所给出的结果。另外，利用 MATLAB 语言编程比较复杂，而新算法用 C++语言编程简单，容易实现，程序也有很强的移植性。

4 结论

本文结合梯度法和二分法提出了训练置信规则库参数的新方法。结合置信规则库参数的训练示例指出，利用该算法训练置信规则库参数能得到令人满意的结果，并且该算法具有简单、收敛精度高、速度快，可移植性好等优点。同时该方法也可以被用于解决其他类似线性（等式和变量上下线）约束的非线性规划问题，尤其是大规模问题。

在置信规则库训练的研究方面本文还处于起步阶段。还有很多问题需要进一步深入研究，比如置信规则库中规则条数太少，会造成置信规则库的推理不精确，条数太多，会造成置信规则库推理效率低，因此规则条数的优化训练是下一步研究的方向。许多数值计算方面的问题需要进一步研究，比如优化训练大规模递阶置信规则库时可能出现的内存，速度和计算稳定性等问题。另外如何通过优化训练使规则库具备足够的一致性和逻辑性也是值得关注的一个问题。

本文提出的算法已经被设计成软件。软件开发完成后，对一些现存的专家系统置信规则库的数据进行了训练，达到了预期的设计目标。

参考文献

[1] J.B.Yang, J.Liu, J.Wang,H.S.Sii and H.W.Wang, An generic rule-base inference methodlogy using the evidential reasoning approach-RIMER[J]. IEEE Transactions on systems, Man, and Cybernetics-part A: Systems and Humans,2005,14(2):1-20

[2] J.B.Yang, J.Wang, G.P.Liu and H.W.Wang, Optimisation Models for Training Belief Rule Based Systems [J].IEEE Transactions on systems, Man, and Cybernetics-part A: Systems and Humans,2005,21(4):1-28.

[3] 胡毓达 非线性规划[M].北京：高等教育出版社，1990.
HU Yuda Nonlieaner programming[M].Beijing:Higher Education Press,1990.(in Chinese)

[4] 甘应爱等 运筹学[M].北京：清华大学出版社，1990.
GAN Yingai,etal Operation Research[M].Beijing:TsingHua University Press,1990.(in

Chinese)
[5] J.B. Yang, Rule and utility based evidential reasoning approach for multiple-attribute decision
analysis under uncertainty, European Journal of operational Research, 2002,32(3):289-304.