Escola Livre de Inteligência Artificial

Inteligência Artificial ao alcance de todos

Aula 22/06/2021: Regressão Logística Binária

Professor: Eng. Rodolfo Magliari de Paiva

Objetivos da Aula

- Compreender o que é uma Análise de Regressão e seus tipos;
- Aprender a interpretar um Gráfico de Dispersão;
- Compreender o sentido e o objetivo de se efetuar uma Regressão Logística Binária;
- Efetuar uma Regressão Logística Binária.

Análise de Regressão

Parte da Estatística que estuda a relação entre duas ou mais variáveis (dependentes e independentes), de modo que seja possível identificar quais variáveis possuem maior ou menor impacto em um fenômeno de estudo, além de também permitir a explicação de um fenômeno e prever o futuro.

Para isso, utilizamos os chamados **Modelos de Regressão**.

Os Modelos de Regressão podem ser Lineares (ML) ou Não Lineares (MNL):

- **Modelos de Regressão Linear:**
  - Regressão Linear Simples;
  - Regressão Linear Múltipla.

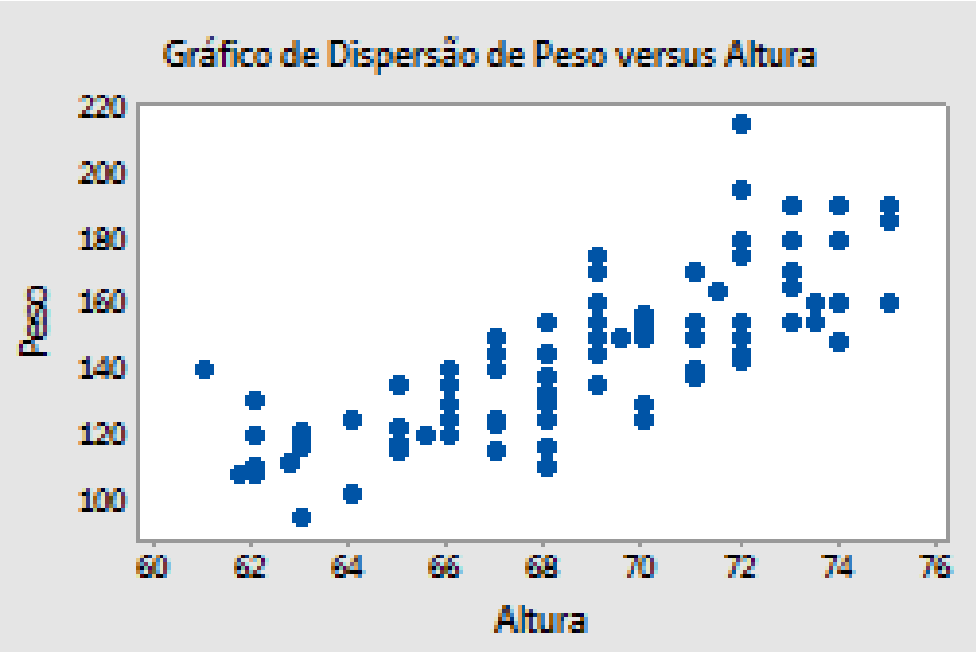
- **Modelos de Regressão Não Linear:**
  - Regressão Logística Binária;
  - Regressão Logística Multinomial;
  - Regressão Logística Ordinal;
  - Regressão Exponencial;
  - Regressão Poisson;

  ...

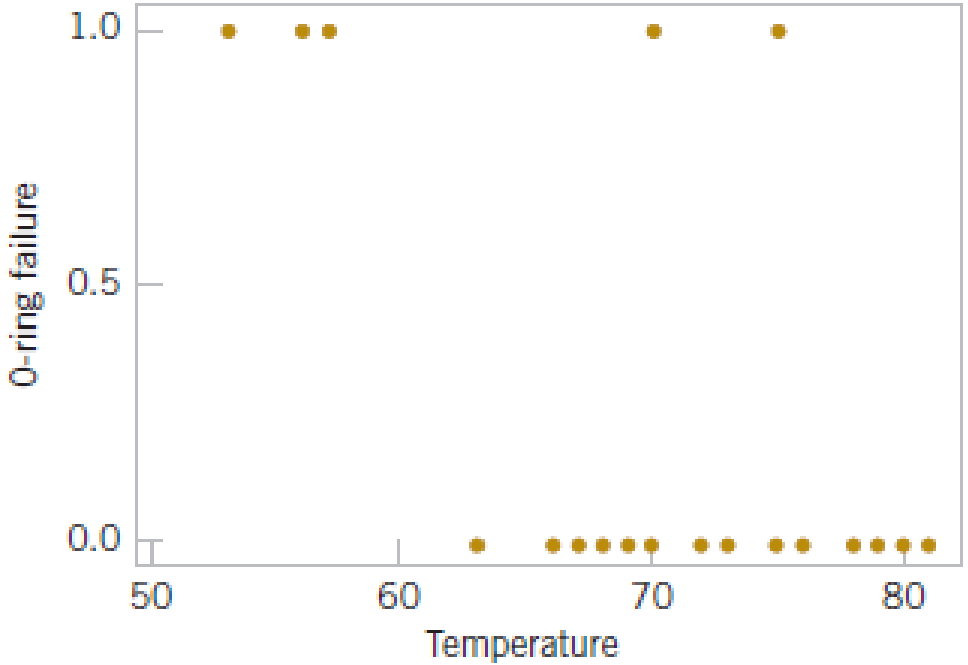
Gráfico de Dispersão

A utilização deste gráfico é muito importante para descobrir se duas variáveis podem estar **associadas**.

Além de auxiliar também a descobrir o comportamento do fenômeno que estamos buscando compreender.



E quando a nuvem de pontos formada resulta em um gráfico assim?



Regressão Logística

Binária

Multinomial

Ordinal

Regressão Logística Binária

Técnica que é considerada um modelo de Classificação, embora receba o nome de Regressão, e sua equação parte da Regressão Linear.

A variável dependente é dicotômica.

A variável resposta (variável dependente), é obrigatoriamente **qualitativa** (categórica).

Para aplicarmos o modelo de Regressão Logística Binária, é necessário cumprir alguns pré-requisitos:

- **Variável Dependente é Categórica e Dicotômica:** Apresenta apenas duas possibilidades de resposta (categorias), podendo assumir os valores 0 e 1 arbitrariamente, além de serem categorias mutuamente exclusivas;

- **Independência das Observações:** Não há medidas repetidas;

- **Ausência de Outliers:** Não podem haver valores discrepantes (pontos influentes ou pontos de alavancagem);

- **Ausência de Multicolinearidade:** As variáveis independentes não podem estar altamente correlacionadas, verificação por meio da Correlação Linear de Pearson ou por meio do VIF (Fatores de Inflação de Variância);

- **Teste de Box-Tidwell:** As variáveis independentes estão linearmente relacionadas ao log das probabilidades.

A equação do modelo de uma Regressão Logística (Função de Resposta Logit) é dada por:

$$E(Y) = \frac{e^{(\beta_0 + \beta_1 x)}}{1 + e^{(\beta_0 + \beta_1 x)}} + \varepsilon$$

ou

$$E(Y) = \frac{1}{1 + e^{-(\beta_0 + \beta_1 x)}} + \varepsilon$$

(ε = Erro, resultado de flutuações aleatórias)

P(y = 1 | x)

P(y = 0 | x)

Onde:

β_0 = Constante do modelo

β_1 = Coeficiente da variável independente

OBS: Podem ter mais β, irá depender do número de variáveis

e = Número de Euler = 2,718281828...

Faz necessário interpretar a **Odds Ratio (OR),** ou **Razão entre Chances**:

A Razão de Chances pode ser definida como a razão de um evento ocorrer em um grupo A em função de um grupo B, sua fórmula é dada por:

$$e^{(\beta_0 + \beta_1 x)} = \frac{E(Y)}{1 - E(Y)}$$

Onde:

Se OR > 1 ➡ Chance aumentou do evento de interesse acontecer;

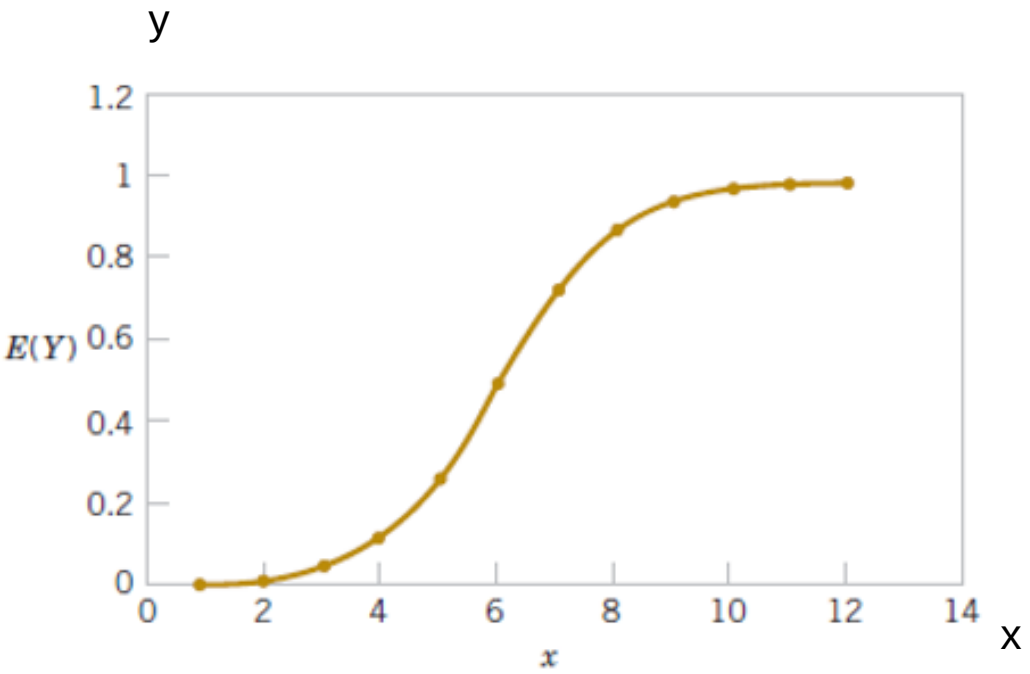
Se OR < 1 ➡ Chance diminuiu do evento de interesse acontecer;

Se OR = 1 ➡ Não impacta no evento de interesse.

OBS: Odds Ratio está no intervalo **$0 < OR < \infty$**

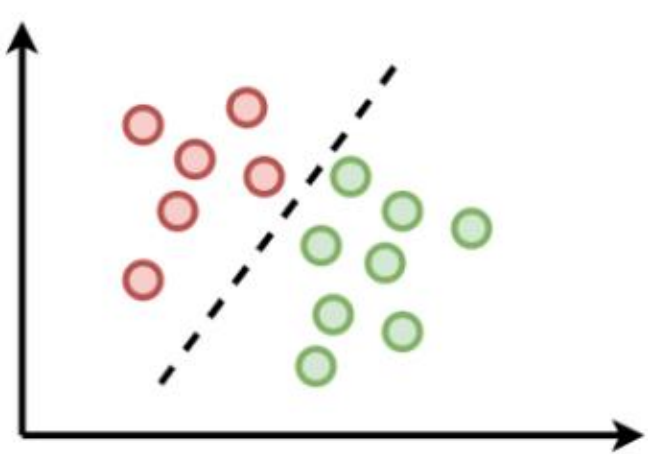
O gráfico da Regressão Logística é
um **sigmoide** (forma de S) no **Plano Cartesiano**:

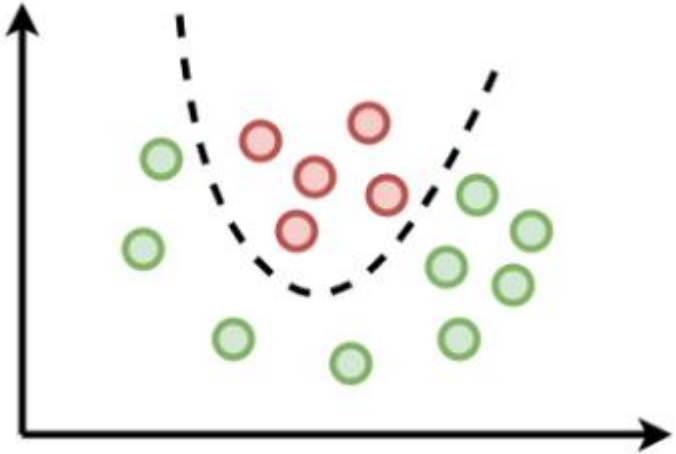
Vale lembrar:
Eixo y = Eixo das Ordenadas
Eixo x = Eixo das Abscissas



Um item que é interessante analisar, é o **Limite de Decisão**.

É uma curva (ou margem), que divide as classes, o próprio modelo realiza um ajuste próprio ao limite de decisão, afim de prever qual classe os próximos dados pertencerão.





Após aplicar o modelo é interessante analisar o **Pseudo R^2 (Coeficiente de Determinação)**.

Nos modelos de Regressão Logística, o R^2 é calculado de forma diferente do que o R^2 nos modelos de Regressão Linear, por isso é chamado de Pseudo R^2, cujo objetivo é medir o poder preditivo do modelo.

Existem diversas técnicas para a Regressão Logística, sendo a mais utilizada a técnica de McFadden.

Exemplo

Um estudo Estatístico foi realizado para avaliar a chance dos passageiros a bordo do Navio Titanic viverem ou morrerem. O modelo foi ajustado para uma Regressão Logística Binária, tendo como equação:

$$E(Y) = \frac{e^{-1,33 + 2,55.x1 + 1,27.x2 + 2,58.x3 - 0,04.x4}}{1 + e^{-1,33 + 2,55.x1 + 1,27.x2 + 2,58.x3 - 0,04.x4}}$$

Onde:

x1 = Se for do sexo feminino colocar 1, caso contrário 0
x2 = Se estiver na 2ª Classe colocar 1, caso contrário 0
x3 = Se estiver na 1ª Classe colocar 1, caso contrário 0
x4 = Idade da pessoa

Nessas condições, qual a chance que uma mulher com 42 anos da 1ª Classe tinha de sobreviver?

OBS: E(Y) = 1 ou próximo de 1 => grande chance de viver
E(Y) = 0 ou próximo de 0 => grande chance de morrer

Resolução:

$$E(Y) = \frac{e^{-1,33 + 2,55.x1 + 1,27.x2 + 2,58.x3 - 0,04.x4}}{1 + e^{-1,33 + 2,55.x1 + 1,27.x2 + 2,58.x3 - 0,04.x4}}$$

$$E(Y) = \frac{e^{-1,33 + 2,55.1 + 1,27.0 + 2,58.1 - 0,04.42}}{1 + e^{-1,33 + 2,55.1 + 1,27.0 + 2,58.1 - 0,04.42}}$$

$$E(Y) \approx 0,90$$

Conclusão

Com essas ferramentas da **Análise de Regressão** é possível entender a relação entre duas variáveis e tentar prever o comportamento de uma delas, basta **ter** ou **iniciar** a coleta de dados e na sequência:

APLICAR!

Exercícios

1) Em que tipo de situação devemos realizar uma Regressão Logística ao invés de uma Regressão Linear?

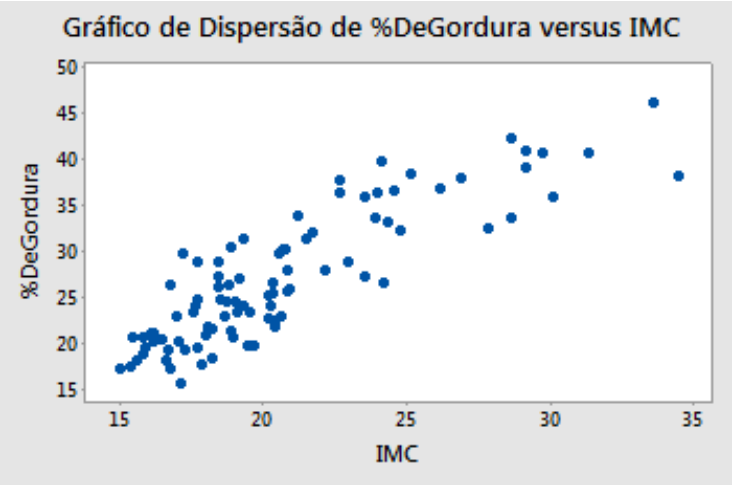
2) Para que seja possível realizar uma Regressão Linear Múltipla, quais pré-requisitos devemos cumprir?

3) Dê dois exemplos de situações onde nossa variável resposta é dicotômica. Escreve a pergunta e as possibilidades de respostas.

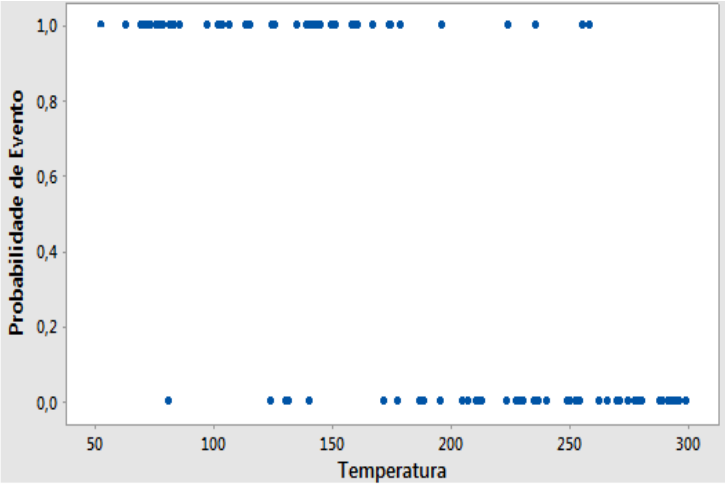
4) Qual a diferença entre uma variável categórica e uma variável numérica?

5) Observe os gráficos a seguir:

(I)



(II)



Qual deles pode ser aplicado um modelo de Regressão Logística e qual pode ser aplicado um modelo de Regressão Linear? Justifique sua resposta.

6) Um estudo Estatístico foi realizado para avaliar a chance dos passageiros a bordo do Navio Titanic viverem ou morrerem. O modelo foi ajustado para uma Regressão Logística Binária, tendo como equação:

$$E(Y) = \frac{e^{-1,33 + 2,55.x1 + 1,27.x2 + 2,58.x3 - 0,04.x4}}{1 + e^{-1,33 + 2,55.x1 + 1,27.x2 + 2,58.x3 - 0,04.x4}}$$

Onde:

x1 = Se for do sexo feminino colocar 1, caso contrário 0
x2 = Se estiver na 2ª Classe colocar 1, caso contrário 0
x3 = Se estiver na 1ª Classe colocar 1, caso contrário 0
x4 = Idade da pessoa

OBS: E(Y) = 1 ou próximo de 1 => grande chance de viver
E(Y) = 0 ou próximo de 0 => grande chance de morrer

Nessas condições:

a) Qual a chance que uma mulher com 42 anos de idade da 3ª Classe tinha de sobreviver?

b) Qual a chance que um homem com 30 anos de idade da 1ª Classe tinha de sobreviver?

c) Qual a chance que um homem com 30 anos de idade da 2ª Classe tinha de sobreviver?

7) Considerando ainda o exercício anterior, interprete os resultados das OR nas seguintes situações:

a) OR = 12,46 para a variável “Ser do Sexo Feminino”.

b) OR = 0,96 para a variável “Idade”.

Gabarito

1) A Regressão Logística é utilizada quando a variável resposta é categórica, ou seja, quando buscamos uma classificação, um grupo para a resposta.
Já a Regressão Linear, a variável resposta é numérica, ou seja, quando buscamos uma previsão de um valor.

2) Variável Dependente é Categórica e Dicotômica, Independência das Observações, Ausência de Outliers, Ausência de Multicolinearidade e aplicar o Teste de Box-Tidwell.

3) Resposta pessoal. Sugestões:
O cliente vai comprar o iPhone? Resposta: Sim / Não
A pessoa vai viver ou morrer? Resposta: Viver / Morrer
Qual o status acadêmico do aluno no final do ano? Resposta: Aprovado / Reprovado

4) A variável categórica é um nome, podendo ser ordinal ou nominal.
A variável numérica é um número, podendo ser discreta ou contínua.

5) No Gráfico (I) poderíamos aplicar um modelo de Regressão Linear, pois é possível traçar uma linha reta na nuvem de pontos.
Já o Gráfico (II) poderíamos aplicar um modelo de Regressão Logística pois não é possível traçar uma linha reta na nuvem de pontos.

6)

a) $E(Y) \approx 041$

b) $E(Y) \approx 0{,}42$

c) $E(Y) \approx 0{,}16$

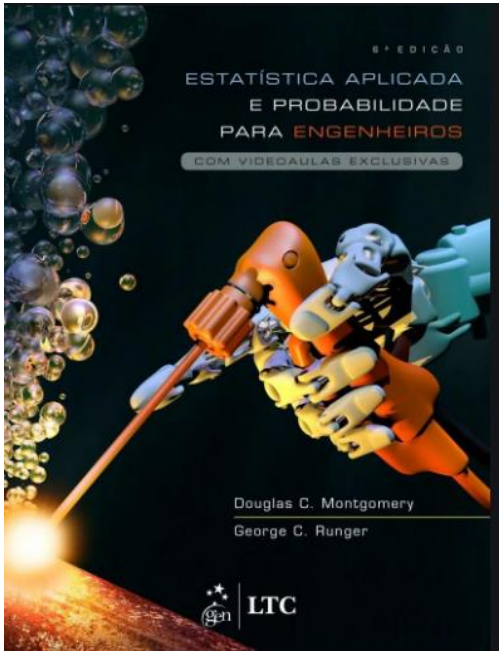
7)

a) Mulheres possuem 12,46x mais chance de sobreviverem do que Homens.

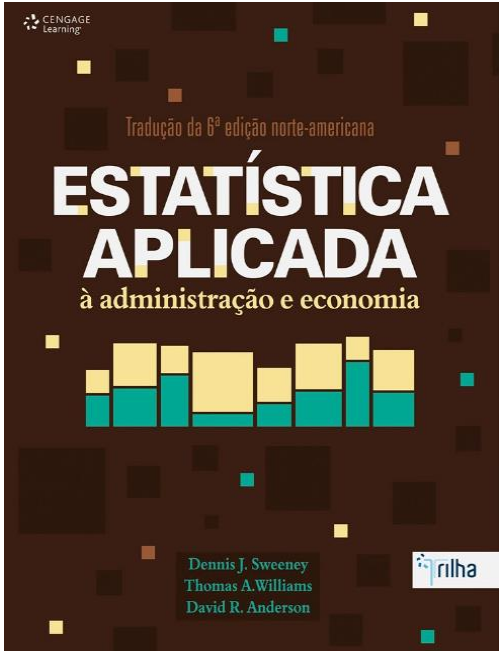
b) A cada incremento de uma unidade na idade, a chance de sobreviver diminui 0,96. Logo, quanto mais velha a pessoa for, menor é a chance de sobrevivência.

Bibliografia

MONTGOMERY, Douglas C. e RUNGER, George C. ***Estatística Aplicada e Probabilidade para Engenheiros***.
6ª Edição. Rio de Janeiro: Editora GEN|LTC, 2016



SWEENEY, Dennis J; WILLIAMS, Thomas A. e ANDERSON, David R. ***Estatística Aplicada à Administração e Economia.***
6ª Edição. São Paulo: Editora Cengage Learning, 2013.



Contatos

Prof. Eng. Rodolfo Magliari de Paiva

Cel.: (11) 9-6866-5501

E-mail: rodolfomagliari@gmail.com

LinkedIn: Rodolfo Magliari de Paiva

Obrigado!