Escola Livre de Inteligência Artificial

Inteligência Artificial ao alcance de todos

Aula 11/05/2021: Inferência Estatística

Professor: Eng. Rodolfo Magliari de Paiva

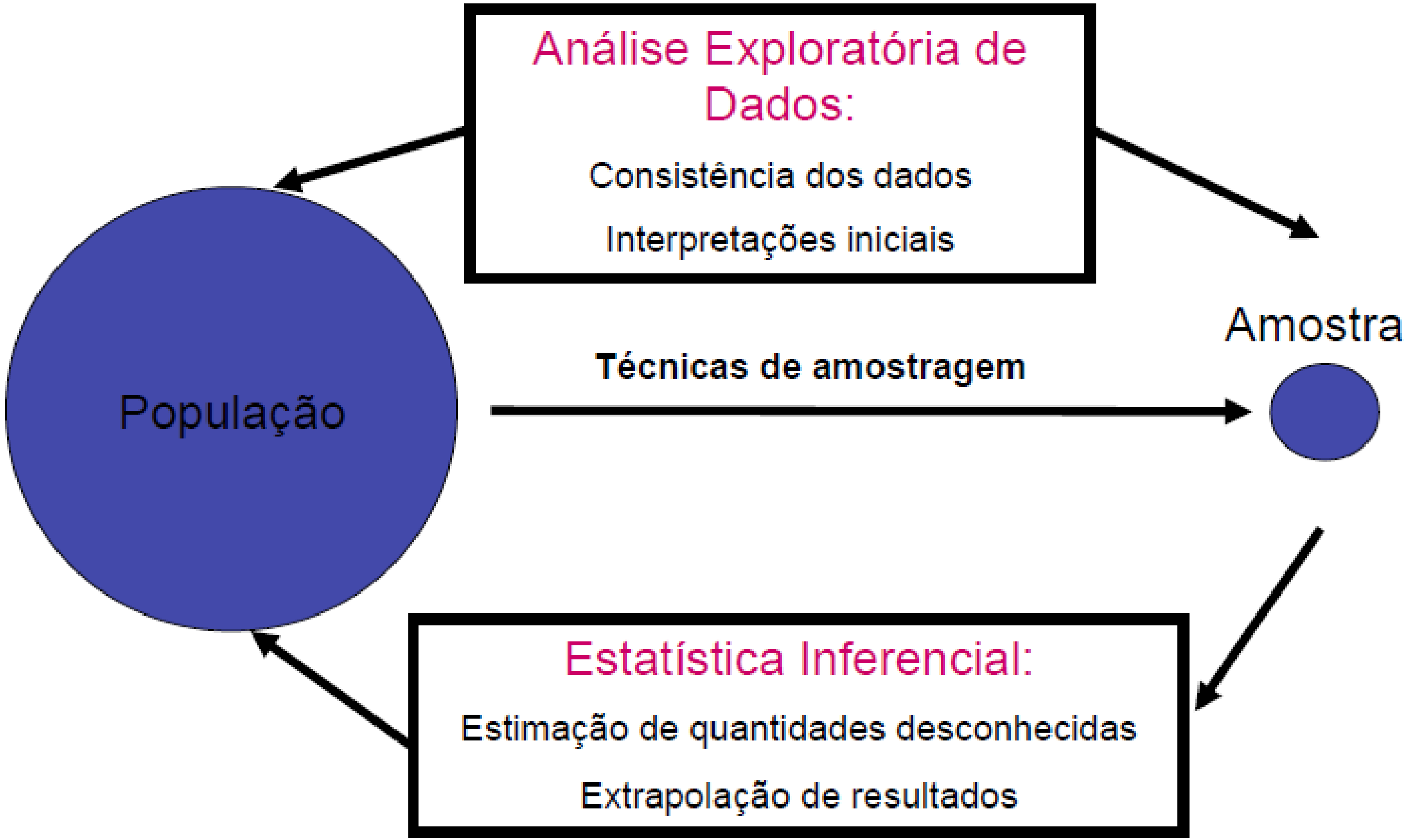
Objetivos da Aula

- Entender o que é Inferência Estatística;
- Entender o que é um Teste de Hipótese;
- Conhecer as Metodologias para realizar um Teste de Hipótese;
- Saber como efetuar um Teste de Hipótese;
- Conhecer a Distribuição Normal e aplicar a Tabela Normal Padrão

Inferência Estatística

Parte da Estatística que busca fazer afirmações sobre características de uma população (que possui parâmetros), com base nas amostras desta população (que possui estimadores).

Para que isso ocorra, é necessário entender o que é um Teste de Hipótese, quais os tipos de Erros, compreender a interpretação do Nível Descritivo, do Nível de Significância, entre outros itens.


Análise Exploratória de Dados:
Consistência dos dados
Interpretações iniciais
Amostra
Técnicas de amostragem
População
Estatística Inferencial:
Estimação de quantidades desconhecidas
Extrapolação de resultados

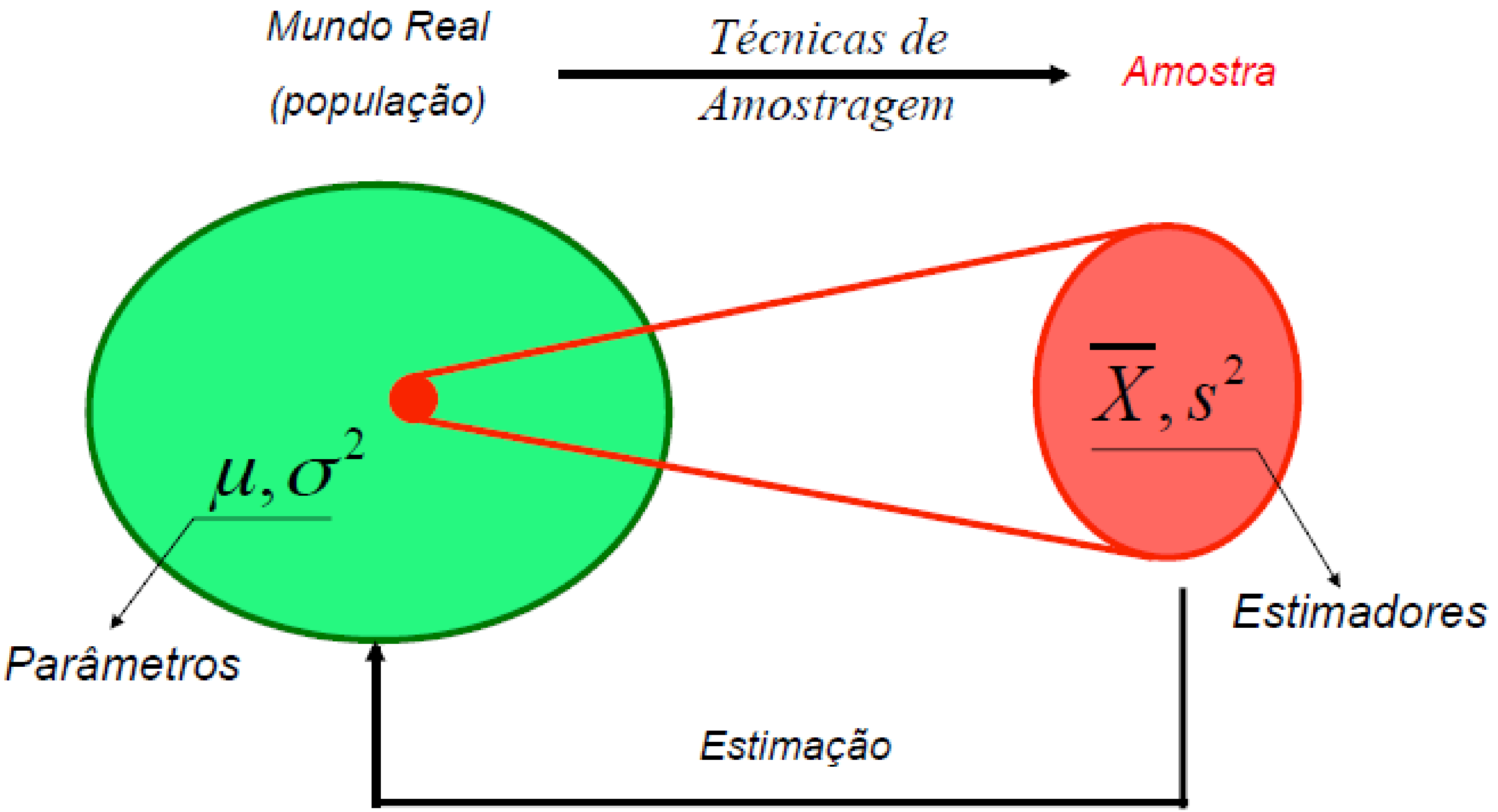
Conceitos pertinentes:

- População / Universo: é o conjunto total de elementos que tem alguma caraterística em comum.

- **Amostra:** é uma parte da população.

- **Parâmetros:** são valores que existem na população e que servem para caracterizá-la.

- **Estimativa:** é um valor aproximado do parâmetro e é calculado com o uso da amostra.


Mundo Real
(população)
Técnicas de
Amostragem
Amostra
μ, σ^2
$\overline{X}, s^2$
Parâmetros
Estimadores
Estimação

Teste de Hipótese

Uma hipótese estatística é uma afirmação sobre os parâmetros de uma ou mais populações.

Por exemplo:

- A droga 1 é tão eficiente no tratamento da hipertensão quanto a droga 2;

- A altura média da população brasileira é de 1,65m;

- A proporção de paulistas com certa doença é de 62%;

- Homens e mulheres realizam certa tarefa num mesmo intervalo de tempo;

...

Um Teste de Hipótese pode ser entendido como uma regra de decisão que consiste em aceitar ou rejeitar H_0, baseado nos dados amostrais.

As hipóteses estatísticas são:

H_0 = Hipótese Nula : representa a afirmação, igualdade

H_1 ou **H_a** = Hipótese Alternativa : representa o complemento de **H_0**

Os Testes de Hipótese podem ser realizados utilizando duas metodologias:

- p-valor: Caminho normalmente mais rápido, onde deve-se calcular a estatística do teste, calcular o p-valor e compará-lo ao nível de significância pré-estabelecido.

OU

- **Região Crítica:** Caminho normalmente mais longo, onde deve-se formular as hipóteses, estabelecer a estimativa do teste, retirar amostra da população, determinar a estimativa, estabelecer nível de significância e construir a região crítica.

Ambas as metodologias são equivalentes!

Metodologia do p-valor

Para compreender esta técnica, vamos entender primeiro o que significa Nível Descritivo e Nível de Significância.

- **Nível Descritivo (p-value)**

Também chamado de valor-p e p-valor corresponde à probabilidade de se observar valores tão ou mais extremos (contra H_0) que o valor obtido na amostra, caso a hipótese nula H_0 seja verdadeira.

Logo:

valor-*p* = P(valores tão ou mais extremos contra $H_0 | H_0$ é verdadeiro)

Assim:

valor-p “pequeno” = rejeitamos H_0 (aceitamos H_1)

valor-p “grande” = não rejeitamos H_0 (rejeitamos H_1)

- **Nível de Significância (α)**

O Nível de Significância (α) normalmente é pré-fixado e varia de 1% até 10%, sendo mais usual utilizar 5%. Comparando α com o p-valor, temos que:

valor-p ≤ α = rejeita-se H_0

Diz-se que a amostra forneceu evidência suficiente para rejeitar a hipótese nula H_0

valor-p > α = não se rejeita H_0

Dizemos que a evidência amostral não é forte o suficiente para rejeitar a hipótese nula H_0

Vale destacar que o complementar do **Nível de Significância** chamamos de **Nível de Confiança**!

Desta forma se:

Nível de Significância = 5%
Nível de Confiança = 95%

Nível de Significância = 10%
Nível de Confiança = 90%

Metodologia da Região Crítica

Existem diversos tipos de Teste de Hipótese, nesta aula aprenderemos um deles:

Teste de Hipótese para a Média Populacional com Variância Conhecida.

No Teste de Hipótese para a Média Populacional com Variância Conhecida as hipóteses podem ser:

$$\begin{cases} \mathcal{H}_0: & \mu = \mu_0 \\ \text{(a) } \mathcal{H}_1: & \mu \neq \mu_0 \text{ (bilateral)} \\ \text{(b) } \mathcal{H}_1: & \mu > \mu_0 \text{ (unilateral à direita)} \\ \text{(c) } \mathcal{H}_1: & \mu < \mu_0 \text{ (unilateral à esquerda)} \end{cases}$$

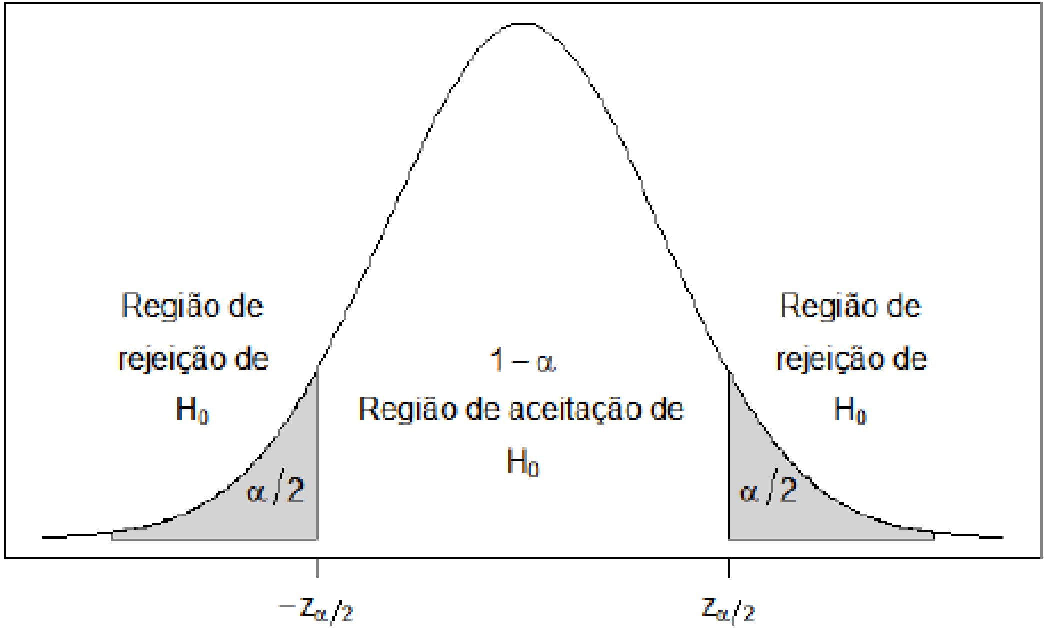


Figura 1: Região crítica para $\mathcal{H}_1$ (a), bilateral

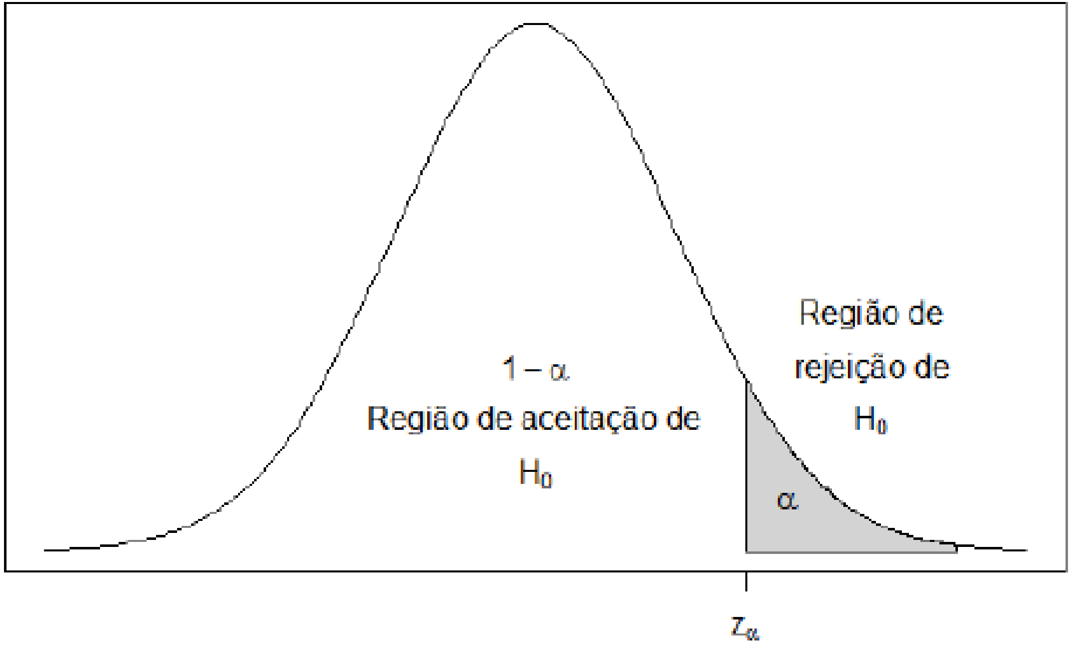


Figura 2: Região crítica para $\mathcal{H}_1$ (b), unilateral à direita

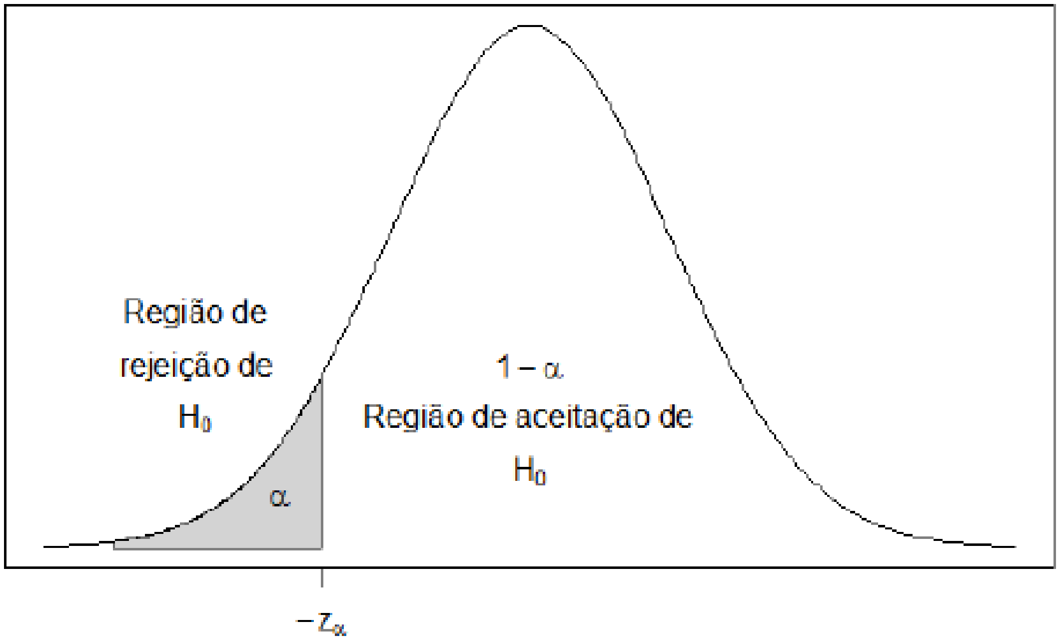


Figura 3: Região crítica para $\mathcal{H}_1$ (c), unilateral à esquerda

Logo:

Calcular a estatística do teste:

$$Z_c = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}.$$

Conclusão:

(a) aceitaremos $\mathcal{H}_0$ se $-Z_{\alpha/2} < Z_c < Z_{\alpha/2}$.

(b) aceitaremos $\mathcal{H}_0$ se $Z_c < Z_{\alpha/2}$.

(c) aceitaremos $\mathcal{H}_0$ se $-Z_{\alpha/2} < Z_c$.

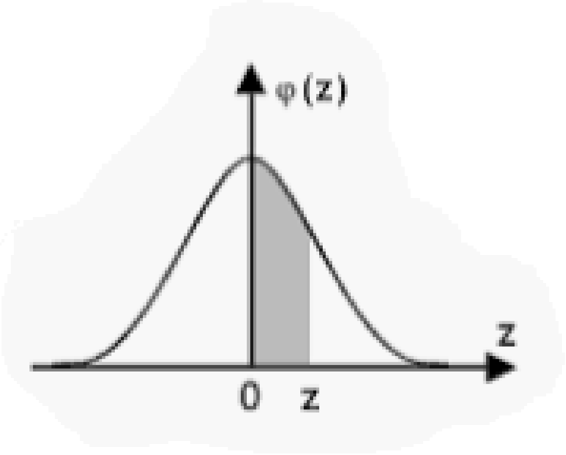
Os valor de Z_α são obtidos, consultando a **Tabela Normal Padrão**.

ATENÇÃO

Existem diversas tabelas que mostram o resultado, é necessário apenas tomar cuidado para entender o que cada tabela está nos mostrando de Probabilidade e Z.

Normalmente um esboço gráfico acompanhado da tabela é muito útil para essa identificação.

- **Tabela Normal Padrão**



Vale lembrar que a área total sob a Curva Normal vale 1, e que a curva é simétrica.

	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990

Tipos de Erro

Sempre que estudamos uma amostra para entender a característica de uma população e fazer uma inferência, é possível que ocorram erros, chamados de Erros Estatísticos, e podem ser:

- **Erro do tipo I (α):** Probabilidade de rejeitarmos H0 quando H0 é verdadeira.

- **Erro do tipo II (β):** Probabilidade de aceitarmos H0 quando H0 é falsa.

Esquematicamente temos as seguintes possibilidades:

	Decisão	
	Rejeitar $\mathcal{H}_0$	Aceitar $\mathcal{H}_0$
$\mathcal{H}_0$ verdade	Erro do tipo I	Decisão correta
$\mathcal{H}_0$ falsa	Decisão correta	Erro do tipo II

Pelo método da Região Crítica, devemos seguir os seguintes passos para realizar o Teste de Hipótese:

1) Enunciar as Hipóteses H_0 e H_1.

2) Fixar o Nível de Significância (α), e identificar a Distribuição de Probabilidade associada ao teste (Normal, t-Student, F, x^2, ...).

3) Determinar as regiões de aceitação e rejeição de H_0 , baseados em H_1 e no α *(Necessário ter as respectivas tabelas de Distribuição de Probabilidade).*

4) Calcular a estatística do teste.

5) Conclusão: aceitar ou rejeitar H0 com base em 3) e 4).

Exemplos

1) Um comprador de tijolos acha que a qualidade dos tijolos está diminuindo. De experiências anteriores, considera-se a resistência média ao desmoronamento de tais tijolos é igual a 200 kg, com um desvio padrão de 10 kg. Uma amostra de 100 tijolos, escolhidos ao acaso, forneceu uma média de 195 kg. Ao nível de significância de 5%, pode-se afirmar que a resistência média ao desmoronamento diminuiu?

Resolução:

Hipóteses:
$H_0 : \mu = 200Kg$
$H_1 : \mu < 200Kg$

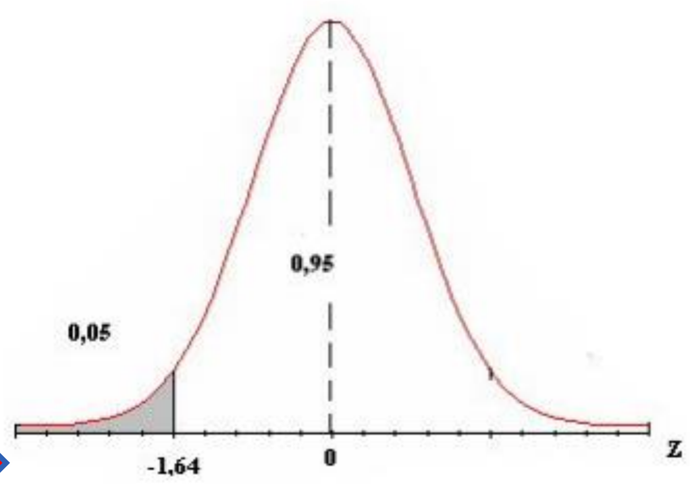
Nível de Significância:
$\alpha = 5\% = 0,05$

Distribuição:

$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

$$\bar{X} \sim N\left(200, \frac{10^2}{100}\right)$$

Esboço Gráfico:



Valor encontrado na Tabela Normal Padrão, com área de aproximadamente 0,45 (45%)

Calculando o Z:

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$$

$$z_{obs} = \frac{195 - 200}{10 / \sqrt{100}}$$

$$z_{obs} = -5 \in R_c$$

É possível concluir que rejeita-se H0 ao nível de significância de 5%

2) Um biólogo julga que o “peso” médio da *Equus grevyi* (subespécie de zebra), está mudando. Sabe-se pela experiência passada que a média do “peso” da *Equus grevyi* é de 400 Kg com desvio padrão de 20 Kg. Uma amostra de 100 animais do tipo *Equus grevyi* deu uma média de 395 Kg. Teste a hipótese de que o “peso” médio não se alterou contra a alternativa de que tenha mudado, ao nível de significância de 5%.

Resolução:

Hipóteses:

$H_0 : \mu = 400Kg$

$H_1 : \mu \neq 400Kg$

Nível de Significância:

$\alpha = 5\% = 0{,}05$

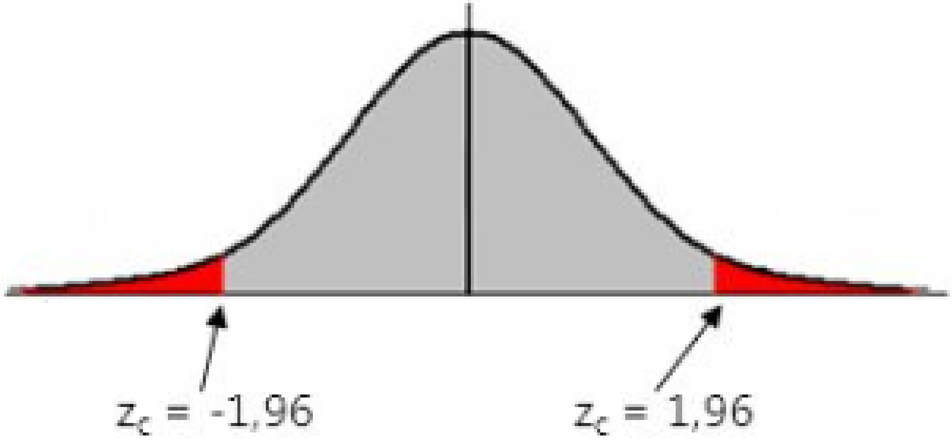
$\alpha/2 = 2{,}5\% = 0{,}025$

Distribuição:

$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

$$\bar{X} \sim N\left(400, \frac{20^2}{100}\right)$$

Esboço Gráfico:



Valor encontrado na Tabela Normal Padrão, com área de aproximadamente 0,475 (47,5%)

Calculando o Z:

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$$

$$z_{obs} = \frac{395 - 400}{20 / \sqrt{100}}$$

$$z_{obs} = -2,5 \in R_c$$

É possível concluir que rejeita-se H_0 ao nível de significância de 5%

Conclusão

Com essas ferramentas de análise da
Inferência Estatística é possível testar hipóteses de diversos fenômenos do dia a dia, basta **ter** ou **iniciar** a coleta de dados e na sequência:

APLICAR!

Exercícios

1) Explique o que é Inferência Estatística.

2) Fale sobre o funcionamento de um Teste de Hipótese estatístico.

3) Qual a relação entre o Nível de Confiança e o Nível Descritivo?

4) Se o Nível de Confiança em um estudo estatístico é de 90%, qual o Nível de Significância?

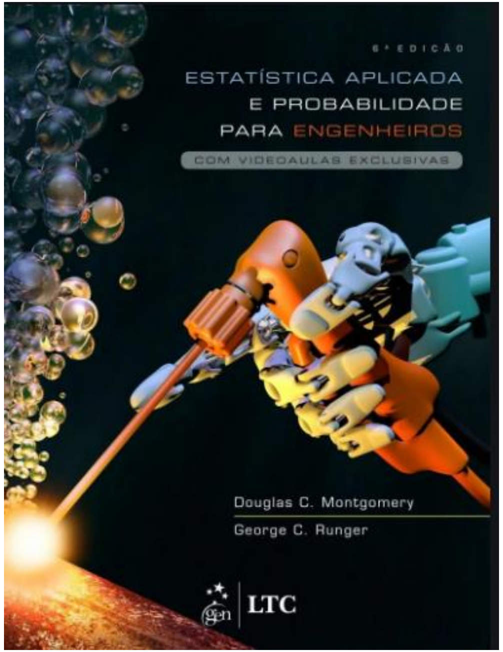
5) Funcionários de uma grande firma de contabilidade afirmam que a média de salários dos contadores é menor que a de seu concorrente, que é R$ 45.000,00. Uma amostra aleatória de 30 contadores da firma mostrou que a média dos salários é de R$ 43.500,00. Sabe-se, de estudos anteriores, que o desvio padrão dos salários é R$ 5.200,00. Teste a afirmação dos funcionários ao nível de 5% de significância.

6) Um pesquisador deseja estudar o efeito de certa substância no tempo de reação de seres vivos a um certo tipo de estímulo. Um experimento é desenvolvido com cobaias, que são inoculadas com a substância e submetidas a um estímulo elétrico, com seus tempos de reação (em segundos) anotados. Os seguintes valores foram obtidos: 9,1 ; 9,3 ; 7,2 ; 7,5 ; 13,3 ; 10,9 ; 7,2 ; 9,9 ; 8,0 e 8,6. Admite-se que o tempo de reação segue, em geral, o modelo Normal com média 8s e desvio padrão 2s. O pesquisador desconfia, entretanto, que o tempo médio sofre alteração por influência da substância. Teste essa hipótese ao nível de 6% de significância.

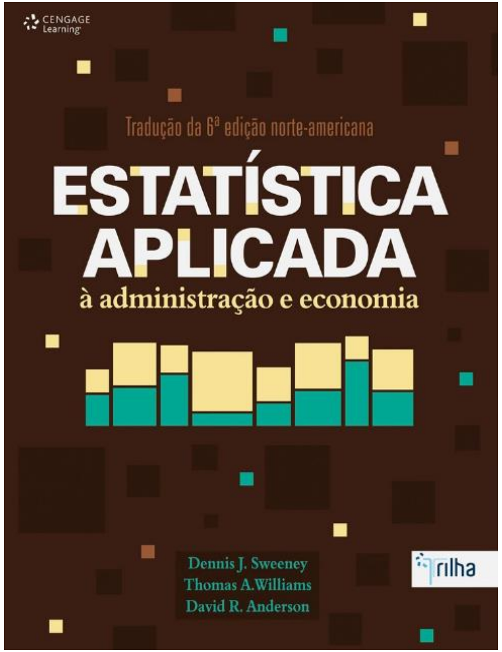
7) Um fabricante afirma que a linha de pesca tem carga média de ruptura de 8Kg com desvio padrão de 0,5Kg. Uma amostra aleatória de 30 linhas apresentou carga de ruptura de 7,8Kg.
Ao nível de significância de 5%, a carga média de ruptura é diferente de 8Kg?

Bibliografia

MONTGOMERY, Douglas C. e RUNGER, George C. ***Estatística Aplicada e Probabilidade para Engenheiros***.
6ª Edição. Rio de Janeiro: Editora GEN|LTC, 2016



SWEENEY, Dennis J; WILLIAMS, Thomas A. e ANDERSON, David R. ***Estatística Aplicada à Administração e Economia.***
6ª Edição. São Paulo: Editora Cengage Learning, 2013.



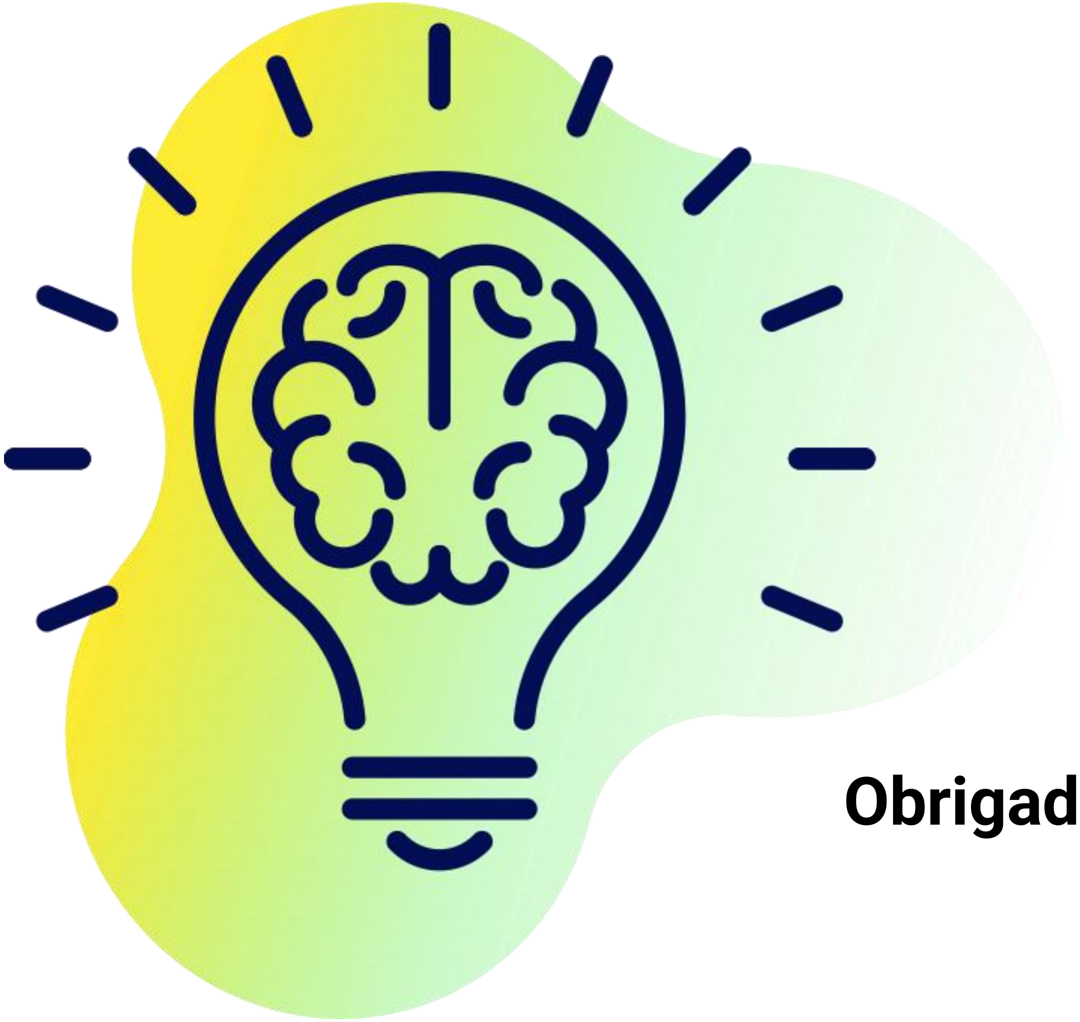
Contatos

Prof. Eng. Rodolfo Magliari de Paiva

Cel.: (11) 9-6866-5501

E-mail: rodolfomagliari@gmail.com

LinkedIn: Rodolfo Magliari de Paiva



Obrigado!