



Introdução à Álgebra Linear para Inteligência Artificial

COMANDANTE MARCOS DOS SANTOS, PROF. DR.

BACKGROUND

- Oficial Superior, com 28 anos de serviço na Marinha do Brasil;
- Colégio Naval;
- Escola Naval;
- Viagem de instrução de Guarda Marinha (VIGM) em 2001;
- 10 anos embarcado em navios de guerra;
- 10 anos no CASNAV: Pesquisador e Gerente de Projetos na Divisão de Pesquisa Operacional;
- Professor de PO do CAAML, EsAO, CIASC e ECEME;
- Especialização em Instrumentação Matemática (UFF);
- Aperfeiçoamento em Matemática (IMPA);
- Governança em TI (FGV-RJ);
- Mestrado em Engenharia de Produção - Pesquisa Operacional (COPPE/UFRJ);
- Doutorado e pós-doutorado em Sistemas, apoio à decisão e logística (UFF);
- Pós-doutorado em Ciências e Tecnologias Espaciais (ITA);
- Diretoria da Sociedade Brasileira de Pesquisa Operacional (SOBRAPO);
- Professor do MBA em Data Science e Analytics (USP);
- Professor do Programa de Pós-graduação em Sistemas e Computação (IME).



@casa_da_pesquisa_operacional



www.linkedin.com/in/prof-dr-marcos-santos-45909763/

SUMÁRIO



Introdução

Matriz Simétrica

Representação de uma matriz

Matriz Anti-Simétrica

Matrizes Especiais

Multiplicação de Matrizes

Exercícios

Exercícios

Adição e subtração de matrizes

Matriz Identidade

Exercícios

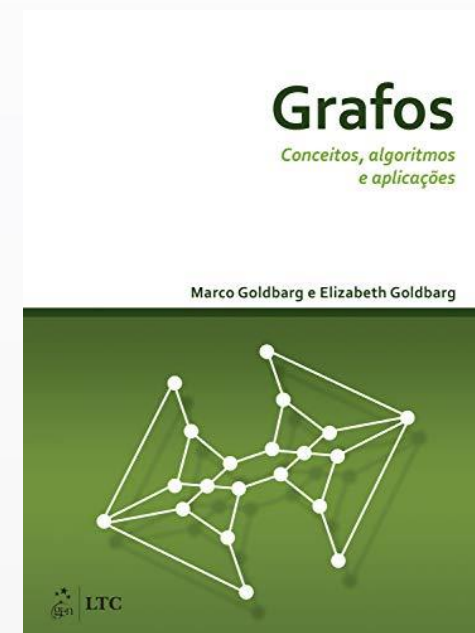
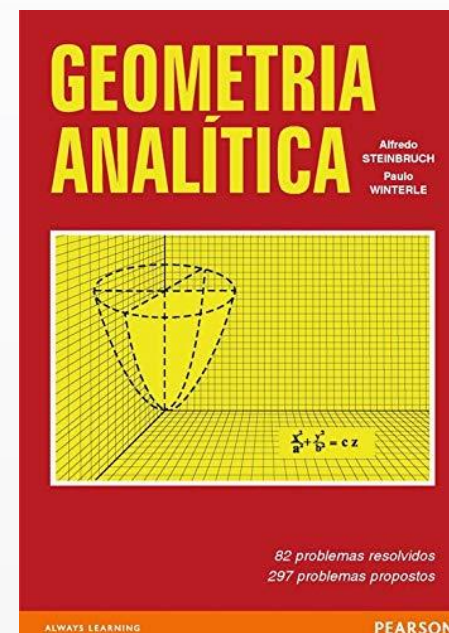
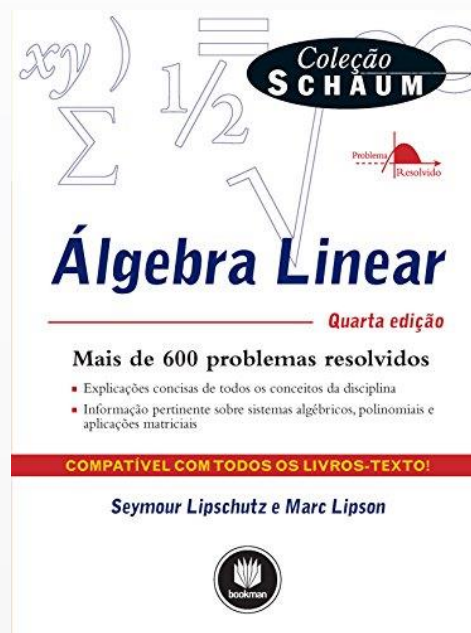
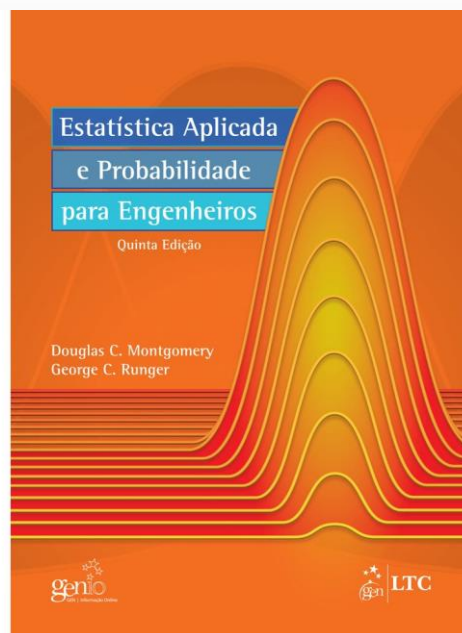
Matriz Inversa

Produto de um escalar por uma matriz

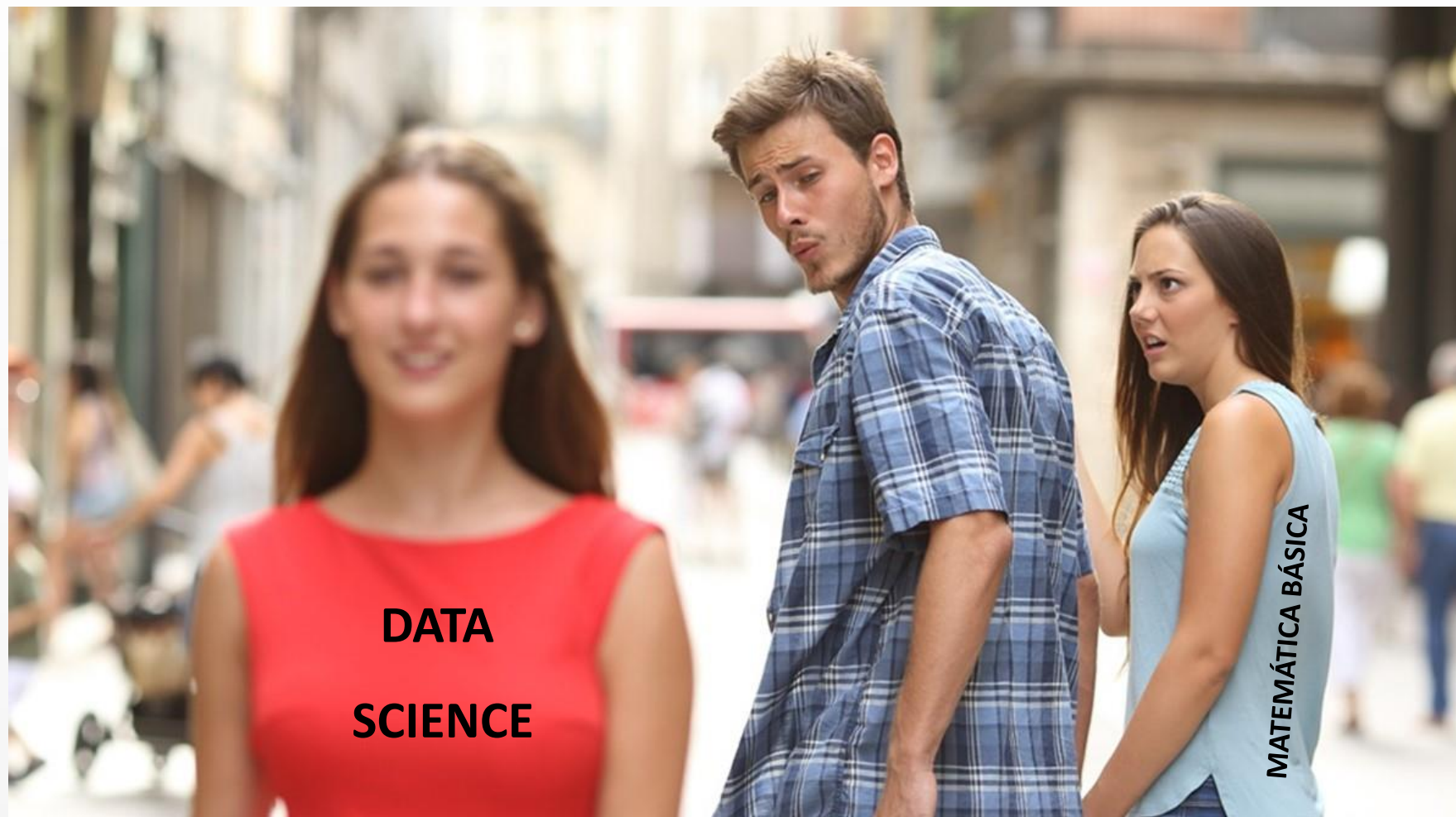
Exercícios

Matriz Transposta

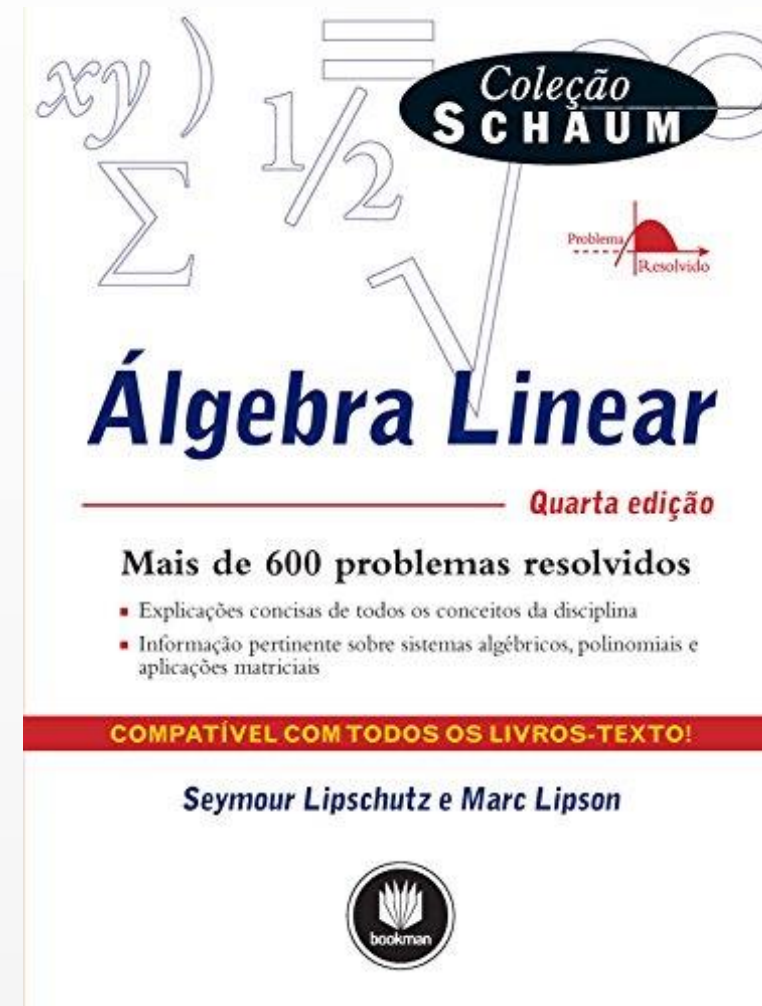
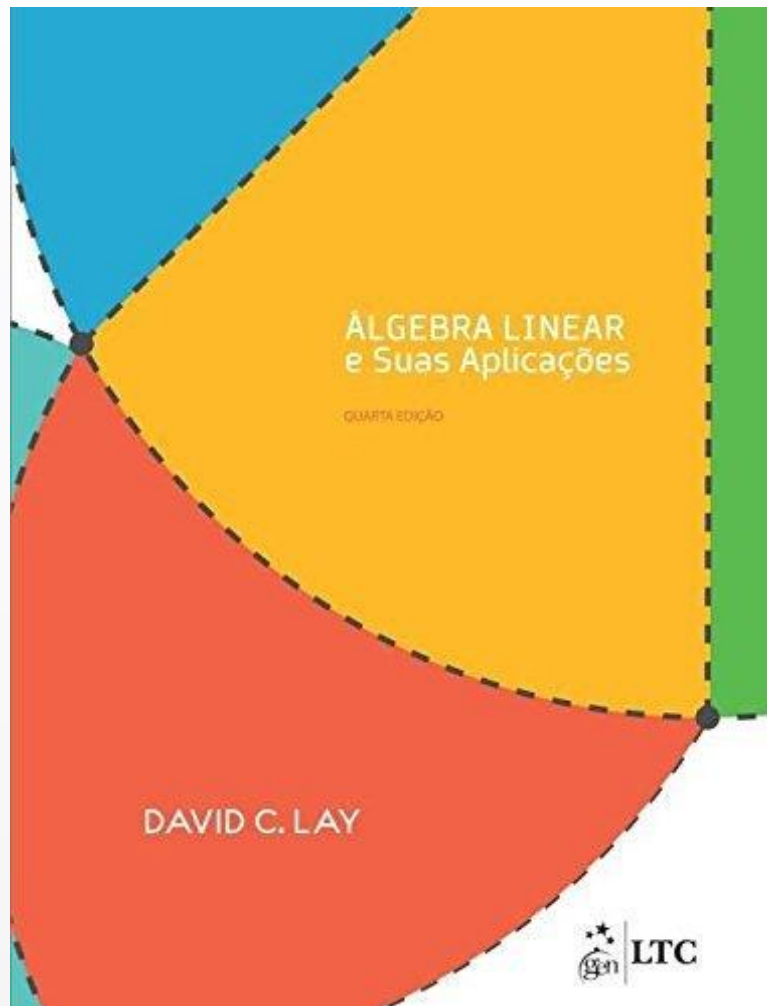
PRA VOCÊ QUE DESEJA SE TORNAR UM DATA SCIENTIST



PRA VOCÊ QUE DESEJA SE TORNAR UM DATA SCIENTIST



REFERÊNCIAS (da nossa aula especificamente)



INTRODUÇÃO - MATRIZES

	Time	Vitórias	Empates	Derrotas
1	São Paulo	28	8	7
2	Santos	19	5	14
3	Flamengo	17	10	11
4	Fluminense	16	13	9
5	Cruzeiro	18	6	14

Produção de grãos (em miT) no ano de 2005				
	soja	feijão	arroz	milho
Sudeste	1000	250	400	600
Centro-Oeste	3000	500	700	1200
Sul	500	200	200	600

Produção de grãos (em miT) no ano de 2006				
	soja	feijão	arroz	milho
Sudeste	900	200	500	700
Centro-Oeste	2700	450	600	1200
Sul	600	300	100	450

TABELA 1. Análise dos substratos utilizados no experimento. Chemical analyses of the substrates used in the experiment.

Subst.	pH (CaCl ₂)	Ca	Mg	K	C	MO	P	Fe	Mn	Cu	Zn	B	S	V
**		Cmol _c dm ⁻³			g dm ⁻³				mg dm ⁻³					%
S1	5,30	2,52	0,70	0,12	7,82	13,45	10,95	9,06	51,85	0,06	2,32	0,91	4,20	54,9
S2	6,50	4,68	2,52	0,50	19,38	33,33	293,50	43,63	162,29	0,77	28,28	1,23	306,00	79,1
S3	6,70	6,14	4,22	0,94	32,98	56,73	499,80	86,29	174,36	1,39	31,17	1,60	528,00	85,7
S4	6,60	6,89	6,60	1,38	52,70	90,64	460,80	124,30	189,17	1,97	31,61	2,87	852,00	89,5
S5	6,90	7,29	5,63	1,06	51,17	88,01	544,80	89,20	165,46	1,82	31,46	2,61	726,00	90,5
S6	6,70	8,70	8,20	1,80	77,52	133,33	641,20	142,45	192,36	2,70	32,00	4,19	1.104,00	91,5
S7	6,70	13,20	10,67	3,52	92,51	159,12	642,40	127,79	171,67	3,56	26,08	11,44	1.416,00	93,5
S8	6,70	12,24	10,72	3,60	80,04	137,67	673,60	118,26	174,61	3,60	26,19	11,00	2.355,00	93,3
S9	6,50	15,73	11,82	3,92	128,76	221,47	681,60	122,03	161,52	3,69	26,18	12,32	3.030,00	92,7
S10	6,70	14,23	11,87	3,80	118,62	204,03	684,80	126,95	157,15	4,14	26,22	14,95	2.235,00	93,5
S11	6,70	14,87	11,91	3,92	139,78	240,42	704,80	118,72	147,87	4,02	26,19	15,87	3.090,00	93,7

* Fonte: Laboratório de análises: SOLANÁLISE. Extrator Melich : K - P - Fe - Mn - Cu e Zn; Extrator KCl: Ca - Mg - Al; Extrator HCl 0,05N: B; Extrator Fosfato de Cálcio: S. ** (S1) 100% de solo; (S2) 90% de solo e 10% de composto orgânico; (S3) 80% de solo e 20% de composto orgânico; (S4) 70% de solo e 30% de composto orgânico; (S5) 60% de solo e 40% de composto orgânico; (S6) 50% de solo e 50% de composto orgânico; (S7) 40% de solo e 60% de composto orgânico; (S8) 30% de solo e 70% de composto orgânico; (S9) 20% de solo e 80% de composto orgânico; (S10) 10% de solo e 90% de composto orgânico; (S11) 100% de composto orgânico.

INTRODUÇÃO - ARTIGO

HIERARQUIZAÇÃO DE SISTEMAS ERP PARA UMA EMPRESA VENDEDORA DE AUTOMÓVEIS UTILIZANDO O MÉTODO AHP

MARCOS DOS SANTOS (Instituto Militar de Engenharia
(IME))

marcosdossantos_doutorado_uff@yahoo.com.br

Cíntia Nunes Mourão (Centro Universitário Augusto Motta -
UNISUAM)

cintianunes125@gmail.com

Marcone Freitas dos Reis (SENAI CETIQT)

marconefreis11@gmail.com

Rubens Aguiar Walker (Universidade Federal Fluminense)

rubens_walker@hotmail.com

Ernesto Rademaker Martins (Instituto Militar de Engenharia -
IME)

radmart@yahoo.com.br



*Atualmente, os sistemas i
necessários em empresa.
finalidade controlar e dai*

Tabela 5 – Matriz de decisão do problema

	MATRIZ DE DECISÃO DO PROBLEMA			
	CUSTO (Aquisição)	MANUTENÇÃO	TEMPO IMPLANTAÇÃO	SUPORTE
AUTO WEB	499,00	499,00	1,50	12
AUTO CERTO	600,00	270,00	0,50	8
AUTOLINE	650,00	140,00	1,00	12
	1.749	909	3	32

Fonte: Autores (2019)

INTRODUÇÃO – ARTIGOS PUBLICADOS



Anais do XLVIII SBPO
Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional
Vitória, ES, 27 a 30 de setembro de 2016.

UMA ABORDAGEM MULTICRITÉRIO PARA SELEÇÃO DE UM NAVIO DE GUERRA DE MÉDIO PORTE A SER CONSTRUÍDO NO BRASIL

Marcos dos Santos (Brazilian Navy & UFF)

marcosdossantos_doutorado_uff@yahoo.com.br

Carlos Francisco Simões Gomes (Universidade Federal Fluminense - UFF)

cfsg1@bol.com.br

Altina Silva Oliveira (Universidade Federal Fluminense - UFF)

altinaoliveira@id.uff.br

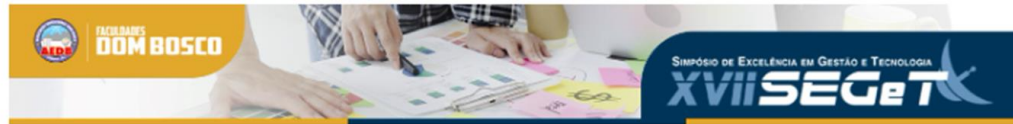
Helder Gomes Costa (Universidade Federal Fluminense – UFF)

hgc@latec.uff.br

Tabela 2: Matriz de Decisão

	Modelo 1	Modelo 2	Modelo 3
Raio de Ação	4000	9330	10660
Fuel Endurance	11	26	30
Autonomia	30	25	35
Canhão Principal	25	25	120
Canhão Secundário	1	2	2
Misseis AAW	0	1	1
Custo Inicial	R\$ 290.000.000	R\$ 310.000.000	R\$ 310.000.000
Custo Ciclo de Vida	R\$ 592.000.000	R\$ 633.000.000	R\$ 633.000.000
Tempo Construção	6 anos	8 anos	8 anos

Fonte: Autores (2016)



ESCOLHA DA FORMA DE IMPLANTAÇÃO DE UM HOSPITAL INFORMATION SYSTEM (HIS) NA MARINHA DO BRASIL UTILIZANDO O MÉTODO MULTICRITÉRIO THOR 2

Naia Augusto Barud
naiabarud@gmail.com
UFF

Tabela 1: Alternativas e Critérios

Alternativas	Custo	Prazo	Dependência Tecnológica
Compra Comercial	R\$ 6.280.131,22	12	100
<i>Software</i> Livre + MB (customizado)	R\$ 583.989,83	78	40
<i>Software</i> Livre + FEMAR (customizado)	R\$ 4.206.620,55	36	50
Desenvolvimento pela MB	R\$ 523.989,83	130	10
Desenvolvimento pela FEMAR	R\$ 12.702.048,10	60	20
Desenvolvimento por Fábrica de <i>Software</i> Terceirizada	R\$ 16.837.941,22	60	30

Fonte: Autores (2020)

ISAHP Article: A Style Guide for Individual Papers To Be Submitted to the International Symposium of the Analytic Hierarchy Process 2020, Web Conference.

APPLICATION OF THE AHP-TOPSIS-2N HYBRID METHOD FOR SELECTION OF AN ATTACK HELICOPTER TO BE ACQUIRED BY THE BRAZILIAN NAVY

ABSTRACT

This paper aims to apply the hybrid method AHP-TOPSIS-2N for the selection of an attack helicopter to be acquired by the Brazilian Navy. Six helicopter models, among the most used by the Armed Forces of developed countries, were compared. The selected helicopter would be employed in the fire support required by the Brazilian Marine Corps Amphibious Operations. The helicopters had seven criteria - maximum speed, payload, number of rockets, number of air-to-ground missiles, range, main cannon and amount of ammunition for the guns – evaluated by airship officers of the Brazilian Navy. The application of the method presented two lists of ordering and prioritization of the helicopters as result, providing a richer and more robust sensitivity analysis, which provides security, transparency and simplicity to the decision-making process. After the application of the method, the AH-64E APACHE and MI-35M helicopters were chosen as the most suitable to be acquired.

5. Data/Model Analysis

Based on the criteria and alternatives established above, the decision matrix is obtained (Table 1).

Table 1 - Decision Matrix.

	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7
T129 ATAK	281	2710	20	500	76	16	537
Mi-35M	310	2400	23	470	80	20	460
BELL AH-1Z VIPER	370	2615	20	650	76	16	485
Ka-52K Katran	300	3300	30	460	80	12	460
Tiger HAD	271	2030	30	450	68	8	740
AH-64E APACHE	279	2835	30	1200	76	16	476

After applying the AHP-TOPSIS-2N hybrid modeling, the following result was obtained (Table 2).

Table 2 - Final Result.

1st Normalization			2nd Normalization		
	Classification	Score		Classification	Score
AH-64E APACHE	First	0,7587	AH-64E APACHE	First	0,6852
Mi-35M	2nd	0,4791	Mi-35M	2nd	0,5684
BELL AH-1Z VIPER	Third	0,4421	Ka-52K Katran	Third	0,4965
T129 ATAK	4th	0,3778	BELL AH-1Z VIPER	4th	0,4785
Ka-52K Katran	5th	0,2809	T129 ATAK	5th	0,4333
Tiger HAD	6th	0,2037	Tiger HAD	6th	0,3204

REPRESENTAÇÃO DE UMA MATRIZ



Cada elemento da matriz tem um “endereço”.

Vejamos uma matriz com 4 linhas e 5 colunas.

REPRESENTAÇÃO DE UMA MATRIZ



A matriz pode vir com uma regra de formação.

Vamos escrever a matriz $A = (a_{ij})_{2 \times 3}$ em que
 $a_{ij} = i - j$.

1. Matriz Linha

2. Matriz Coluna

3. Matriz Nula

4. Matriz Quadrada

5. Diagonal Principal

6. Diagonal Secundária



Comandante Marcos Santos, Prof. Dr.

EXERCÍCIOS



Indique as matrizes $C = (c_{ij})_{4 \times 1}$, em que $c_{ij} = i^2 + j$, e $D = (d_{ij})_{1 \times 3}$, em que $d_{ij} = i - j$.
Que matrizes especiais são essas?

ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO DE MATRIZES

Adição de matrizes

Dadas duas matrizes, $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{ij})_{m \times n}$, a matriz soma $A + B$ é a matriz $C = (c_{ij})_{m \times n}$, em que $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ para todo i e todo j .

Exemplo:



Comandante Marcos Santos, Prof. Dr.

EXERCÍCIOS

Sejam as matrizes $A = (a_{ij})_{3 \times 2}$, em que $a_{ij} = i - j$,
e $B = (b_{ij})_{3 \times 2}$, em que $b_{ij} = i + j - 1$.

- Determine a matriz $C = A + B$.
- Determine a matriz $D = A - B$. Como você representaria, genericamente, um elemento d_{ij} de D ?

EXERCÍCIOS

Resolva as seguintes equações matriciais:

a) $X + \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 3 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$

b) $X - \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ -2 & 5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 11 \\ -3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

PRODUTO DE UM ESCALAR POR UMA MATRIZ





Comandante Marcos Santos, Prof. Dr.

EXERCÍCIOS



Sejam as matrizes $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 6 \\ 9 & 8 \end{pmatrix}$.

Determine as seguintes matrizes:

a) $3A + B$ b) $A - 3B$

MATRIZ TRANSPOSTA



MATRIZ SIMÉTRICA



MATRIZ ANTI-SIMÉTRICA





Comandante Marcos Santos, Prof. Dr.

EXERCÍCIOS



Determine X em $3X + 2A = B^t + 2X$, se

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & 1 & -1 \\ 1 & 5 & -2 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 6 \end{bmatrix}.$$

MULTIPLICAÇÃO DE MATRIZES



Exemplo:

MULTIPLICAÇÃO DE MATRIZES

observações

- ▶ A definição garante a existência do produto AB quando o número de colunas de A é igual ao número de linhas de B .
- ▶ A matriz produto $C = A \cdot B$ é uma matriz cujo número de linhas é igual ao número de linhas de A e o número de colunas é igual ao número de colunas de B . Observemos o esquema abaixo:

$$A_{(m \times n)} \cdot B_{(n \times p)} = C_{(m \times p)}$$

garante a existência
do produto

- ▶ Notemos que, se A é do tipo $m \times n$ e B é do tipo $n \times p$, com p diferente de m , então AB existe, mas BA não existe, pois:

$$B_{(n \times p)} \cdot A_{(m \times n)}$$

são diferentes!

Exemplo:



Comandante Marcos Santos, Prof. Dr.

EXERCÍCIOS



Sejam as matrizes $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$
e $C = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$. Determine, se existir:

- a) $A \cdot B$
- b) $B \cdot A$
- c) $A \cdot C$
- d) $B^t \cdot C$
- e) $B \cdot A^t$

EXERCÍCIOS



Sejam as matrizes $A = (a_{ij})_{6 \times 3}$, em que $a_{ij} = i + j$, e $B = (b_{jk})_{3 \times 4}$, em que $b_{jk} = 2j - k$. Sendo $C = (c_{ik})_{6 \times 4}$ a matriz produto $A \cdot B$, determine o elemento c_{43} .

MATRIZ IDENTIDADE



Exemplos:

MATRIZ INVERSA

Definição

Seja A uma matriz quadrada de ordem n . A matriz A é dita inversível (ou invertível) se existir uma matriz B tal que:

$$A \cdot B = B \cdot A = I_n$$

Nesse caso, B é dita inversa de A e é indicada por A^{-1} .

Exemplo de matrizes inversas:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

MATRIZ INVERSA

Definição

Seja A uma matriz quadrada de ordem n . A matriz A é dita inversível (ou invertível) se existir uma matriz B tal que:

$$A \cdot B = B \cdot A = I_n$$

Nesse caso, B é dita inversa de A e é indicada por A^{-1} .

Cálculo de matrizes inversas:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

MATRIZ INVERSA (bizu)

Se $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, então

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}, \text{ se } ad - bc \neq 0$$

Cálculo de matrizes inversas de ordem 2:

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$$



Comandante Marcos Santos, Prof. Dr.

EXERCÍCIOS



1. Verifique se $\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ é a inversa de $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
2. Determine, se existir, a inversa da matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
3. Seja $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$. Determine A^{-1} .
4. Sejam as matrizes $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.
Determine:
 - a) $A^{-1} + B^{-1}$
 - b) $A^{-1} \cdot B^{-1}$
5. Determine, se existir, a matriz inversa de $\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

CASA DA PESQUISA OPERACIONAL



Você sabia que a Casa da Pesquisa Operacional tem um canal no Youtube?

Saiba mais em

<https://www.youtube.com/casada pesquisaoperacional>

Casa da Pesquisa Operacional

Acesse nossas redes sociais →

<https://youtube.com/c/CasadaPesquisaOperacional>

CASA DA PESQUISA OPERACIONAL

TELEGRAM DA CASA DA PESQUISA OPERACIONAL

O nosso grupo é um espaço colaborativo destinado a:

- Vagas de estágio;
- Debates sobre P.O.;
- Fórum de dúvidas;
- Recomendações de livros;
- Disponibilização de apostilas;
- Divulgação das Lives e dos cursos;
- Divulgação de novos métodos matemáticos;
- Oportunidades de emprego na área de P.O. e Data Science, entre outros.

**Acesse o link
Seja bem-vindo
ao nosso grupo**

Também temos o nosso grupo de estudos no Telegram. Nesse grupo discutimos problemas, divulgamos vagas de emprego e estágio, sugerimos livros, indicamos cursos etc.

<https://t.me/casadapesquisaoperacional>



[linkedin.com/in/marcos-santos-45909763](https://www.linkedin.com/in/marcos-santos-45909763)



researchgate.net/profile/Marcos_Dos_Santos6



marcosdossantos_doutorado_uff@yahoo.com.br

COMANDANTE MARCOS DOS SANTOS, PROF. DR.