Aula 05*: Sistemas LTI

1. Introdução

Dado um sistema linear e invariante no tempo (LIT) podemos calcular sua resposta a uma entrada qualquer usando o processo de convolução.

Assim, seja o sistema LIT, de resposta impulsiva $h[n]$, sujeito a uma entrada $x[n]$, sua saída será:

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k].x[n-k]$$

As saídas nos instantes $n = 0,1,2\ldots..$ podem ser calculadas, interativamente, fazendo:

$$y[0] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k].x[-k]$$

$$y[1] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k].x[1-k]$$

$$y[2] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k].x[2-k]$$

....

o que significa que para calcular $y[n_0]$, multiplicamos $h[k]$ por $x[n_0 - x]$ e somamos todas as amostras do sinal resultante.

2. Convolução usando o MatLab

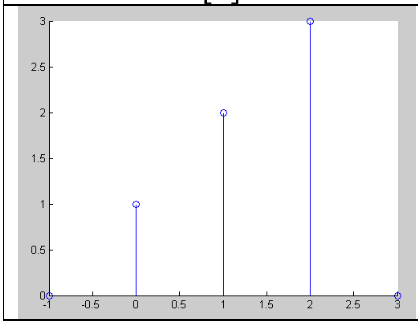
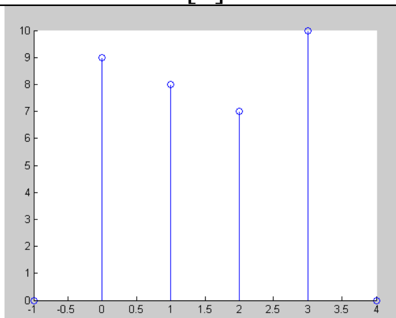
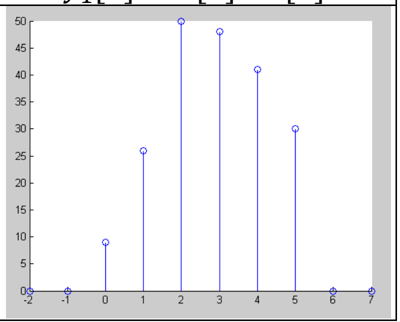
No matlab, o comando $y = \boldsymbol{conv}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{h})$ executa a convolução entre os vetores x e h, fornecendo as amplitudes do vetor y, automaticamente (utilize o **help** para mais informações). Entretanto, este comando não fornece o deslocamento deste vetor no tempo, não fornecendo a relação destas amplitudes com os valores de n.

Por exemplo, podemos realizar a convolução das sequências $a[n]$ e $b[n]$ utilizando o comando $\boldsymbol{conv}$, através dos comandos:

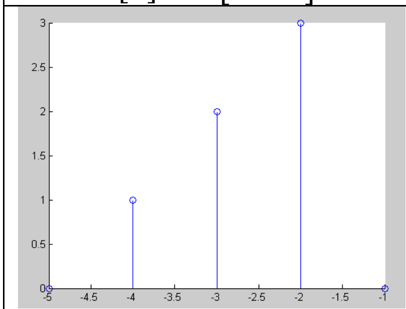
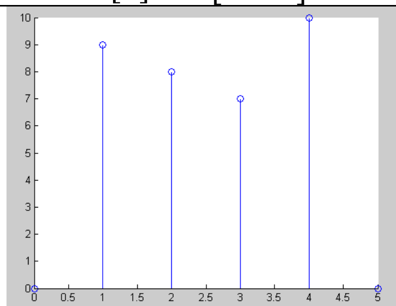
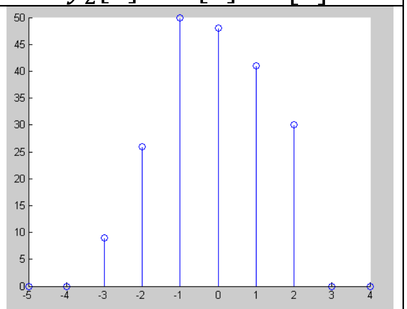
```
a=[1 2 3];
na=0:length(a);
b=[9 8 7 10];
nb= 0:length(b)
y=conv(a,b);
ny=0:length(y)
subplot(1,3,1); stem(na,a)
subplot(1,3,2); stem(nb,b)
subplot(1,3,3); stem(ny,y)
```

*Baseado no roteiro da apostila do Laboratório de Comunicações Digitais -março/2007 - Márcio Eisencraft e Marco Antônio Assis.

obtendo os gráficos:

$a[n]$	$b[n]$	$y_1[n] = a[n] * b[n]$
		

Entretanto, estes comandos não funcionam corretamente quando as sequencias encontram-se adiantadas ou atrasadas. Para verificar esta afirmação, podemos utilizar como exemplo a convolução entre os vetores $c[n] = a[n+4]$ e $d[n] = b[n-1]$, cujos gráficos são apresentados abaixo

$c[n] = a[n+4]$	$d[n] = b[n-1]$	$y_2[n] = c[n] * d[n]$
		

Neste caso, verificamos que os vetores $c[n]$ e $d[n]$ apresentam os mesmos valores de amplitude dos vetores $a[n]$ e $b[n]$, respectivamente, fazendo com que $y_1[n]$ e $y_2[n]$, também, apresentem os mesmos valores de amplitude.

O que faz destas sequências ($a[n]$ e $c[n]$, $b[n]$ e $d[n]$, $y_1[n]$ e $y_2[n]$) sequências distintas é a "*posição*" em que elas se encontram no eixo n.

Deste modo, como não existem informações sobre esta "*posição*" no comando $conv(x,y)$, é necessário que uma rotina adicional para a obtenção do vetor $\boldsymbol{n}$, seja implementada.

Para isso, é preciso notar que, de acordo com as convoluções dos exemplos, a composição dos vetores n obedece ao seguinte critério:

$$y_1[n] = a[n] * b[n] \begin{cases} a = [1\ 2\ 3] \rightarrow\ n_a(1) = 0\ e\ n_a(end) = 2 \\ b = [9\ 8\ 7\ 10] \rightarrow\ n_b(1) = 0\ e\ n_b(end) = 3 \\ y_1 = [9 \quad 26 \quad 50 \quad 48 \quad 41 \quad 30] \rightarrow n_{y_1}(1) = 0\ e\ n_{y_1}(end) = 5 \end{cases}$$

$$y_2[n] = c[n] * d[n] \begin{cases} c = [1\ 2\ 3] \rightarrow\ n_c(1) = -4\ e\ n_c(end) = -2 \\ d = [9\ 8\ 7\ 10] \rightarrow\ n_d(1) = 1\ e\ n_d(end) = 4 \\ y_2 = [9 \quad 26 \quad 50 \quad 48 \quad 41 \quad 30] \rightarrow n_{y_2}(1) = -3\ e\ n_{y_2}(end) = 2 \end{cases}$$

de onde se pode deduzir que:

$$\begin{cases} n_{y_1}(1) = n_a(1) + n_b(1) \\ n_{y_1}(end) = n_a(end) + n_b(end) \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} n_{y_2}(1) = n_c(1) + n_d(1) \\ n_{y_2}(end) = n_c(end) + n_d(end) \end{cases}$$

3. Atividades

I. Desenvolva o programa $[\boldsymbol{y}, \boldsymbol{ny}] = \boldsymbol{conv1}\,(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{nx}, \boldsymbol{h}, \boldsymbol{nh})$**,** que realize a convolução entre duas sequências representadas pelos vetores $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{h}$**,** descritos em função das sequências $\boldsymbol{nx}$ e $\boldsymbol{nh}$, respectivamente, e forneça como saída os vetores $\boldsymbol{y}$ (amplitude) e $\boldsymbol{ny}$ (índices das amostras).

Confira se seu programa está correto realizando as convoluções dos exemplos: $y_1[n] = a[n] * b[n]$ e $y_2[n] = c[n] * d[n]$. Para isso, crie um script chamado de $Aula05\_ex1.m$.

Obs:
Para desenvolver o algoritmo de teste ($Aula05\_ex1.m$) :

- Crie os vetores a, b, na e nb
- Utilizando o comando $subplot$ com 1 linha e 3 colunas plote $na \times a$ na primeira posição da figura e $nb \times b$ na segunda.
- Obtenha $y1$ e $ny1$ através da função $conv1$ criada. $[y1, ny1] = conv1\,(a, na, b, nb)$;
- Utilizando o comando $subplot$ com 1 linha e 3 colunas plote $ny1 \times y1$ na terceira posição da figura.
- Repita esta sequência de comandos para os vetores $c, d, nc, nd, y2$ e $ny2$.

Verifique que os gráficos obtidos devem ser exatamente iguais aos apresentados na página anterior.

II. Um sistema linear e invariante no tempo é descrito pela seguinte equação de diferenças

$$y[n] - 0{,}5y[n-1] + 0{,}8y[n-2] = x[n] + 5x[n-1] + x[n-3]$$

Sabendo que $y[n] = 0$ para $n < 0$, escreva uma sequência de comandos ($Aula05\_ex02$) que gere um gráfico da resposta deste sistema

a) ao impulso, $x[n] = \delta[n]$
b) ao degrau, $x[n] = u[n]$

Obs:
Para desenvolver o algoritmo de teste ($Aula05\_ex2.m$) :

- Crie o vetor n para $-3 \leq n \leq 100$
- Crie o vetor x
- Inicialize o vetor y a partir de uma sequência de zeros com a mesma quantidade de elementos do vetor n.
- Utilize o laço for para uma variável auxiliar $naux$ que varie da posição onde o vetor n é igual a zero ($find\ n == 0$) até a posição final do vetor n ($length(n)$).

Exercícios de fixação

I. A saída de um sistema atrasador $y[n] = x[n - n_0]$ pode ser obtida através da substituição de todos os n´s por $(n - n_0)$'s, assim como feito na aula anterior, ou então, através da convolução $y[n] = x[n] * \delta[n - n_0]$.

Assim, com base na função $\boldsymbol{y = atraso\_exp(A, \alpha, n_0)}$ da aula passada, crie uma nova função $\boldsymbol{y = atraso\_exp\_aula05\_fix01(A, \alpha, n_0)}$, que também seja capaz de atrasar um dado sinal exponencial do tipo $x[n] = A.\alpha^n$ em n_0 amostras, mas que, para isso, utilize a convolução entre x e $\delta[n - n_0]$.

Execute esta função para o sinal $x = 0{,}5^n$ e compare o resultado com os resultados obtidos no exercício de fixação III da aula 04.

II. A saída de um diferenciador digital, representado pela equação de diferenças $y[n] = x[n] - x[n-1]$, pode ser obtida através da convolução da sequência $x[n]$ por $h[n]$, sua resposta impulsiva. Assim, crie uma sequência de comandos ($\boldsymbol{Aula05\_fix02.m}$) que:

a) Obtenha a resposta impulsiva, $h[n]$, do diferenciador digital.
b) Obtenha $y[n]$ através da convolução das sequencias $x[n]$ (propostas no exercício de fixação I da aula 04) com $h[n]$ obtido no item anterior.

III. O sistema acumulador é definido pela equação

$$y[n] = \sum_{k=0}^{n} x[k]$$

Crie um programa ($\boldsymbol{Aula05\_fix03.m}$) que:

a) Obtenha $y_a[n]$ para $x[n] = \delta[n]$.
b) Obtenha $y_b[n]$ para $x[n] = u[n]$.
c) Obtenha $y_c[n]$ através da convolução entre $y_a[n]$ e $u[n]$ e compare $y_c[n]$ e $y_b[n]$