Aulas 07 e 08: Análise de Sinais no Domínio da Frequência

1. Introdução

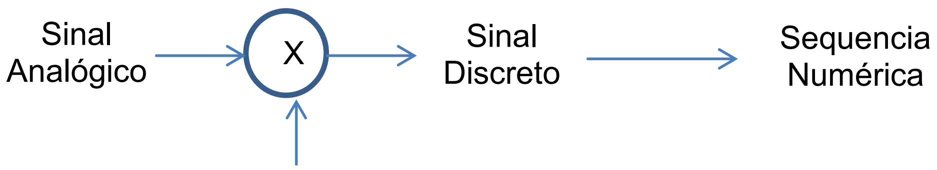
Além do domínio do tempo, a análise no domínio da frequência é de suma importância para que projetos, implementações e a operações entre sinais e sistemas sejam bem sucedidas.

A importância desta análise, entretanto, é ainda maior quando os sinais e sistemas são amostrados, pois é através dela que características como o alaising, por exemplo, podem ser melhor observadas.

Uma das formas de realizar a análise no domínio da frequência é através da transformada de Fourier.

2. Amostragem no domínio da frequência

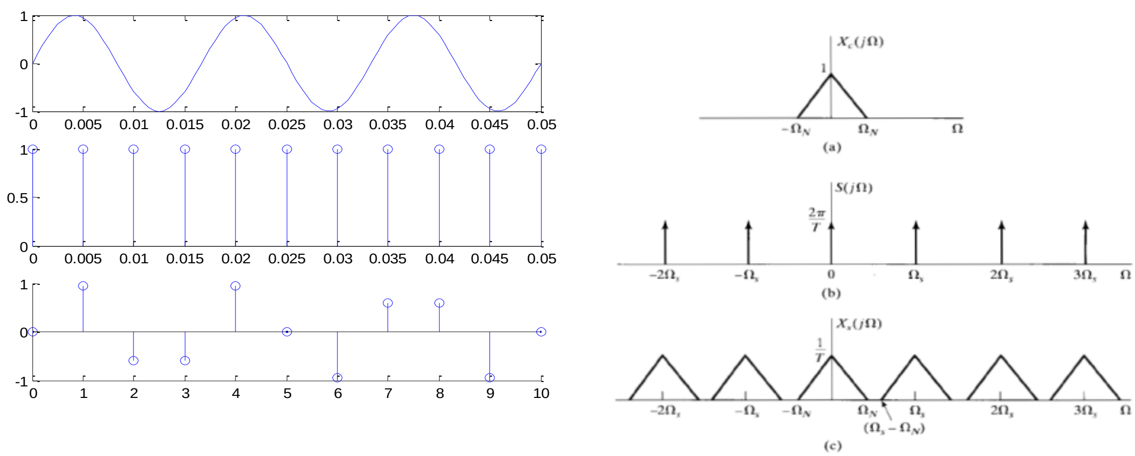
A amostragem de um sinal analógico pode ser entendida como a multiplicação do mesmo por um trem de impulsos com espaçamento de T_s. Matematicamente, este processo é representado por



Trem de Impulsos $s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s))$

No domínio da frequência, entretanto, este processo ocorre através da convolução da transformada de Fourier do sinal analógico com a transformada de Fourier do trem de impulsos, de modo a resultar em diversas cópias do espectro do sinal analógico espaçados de Ω_s.

A figura exemplifica este processo no domínio do tempo e da frequência.



3. Atividades

I. ***SIMULINK:*** O arquivo $\boldsymbol{Aula07\_ex01.mdl}$ fornece o diagrama de um circuito utilizado para amostrar e analisar o processo de amostragem.

1.1. Rode o arquivo, analise os gráficos do osciloscópio e do espectro e responda:

a) Qual é a frequência do sinal original?
b) Qual é a frequência de amostragem utilizada?
c) Identifique estas duas frequências no espectro do sinal amostrado e verifique o efeito da amostragem neste espectro.
d) Compare o espectro do sinal amostrado com o espectro do sinal quantizado e verifique que eles são muito semelhantes. Qual é o motivo desta semelhança?
e) Compare o espectro do sinal original com o espectro do sinal recuperado e verifique que mesmo apresentando sinais diferentes no domínio do tempo, eles são muito semelhantes no domínio da frequência. Qual é o motivo desta semelhança?

1.2. Mantenha a frequência de amostragem (f_s) igual a $8KHz$ e simule a amostragem de sinais com as seguintes frequências e verifique, observando o espectro e o osciloscópio, a frequência do sinal recuperado.

$f_{original}$	$f_{recuperado}$	$f_{original}$	$f_{recuperado}$
$f = 1KHz$		$f = 5KHz$	
$f = 2KHz$		$f = 6KHz$	

Verifique que para um dado sinal limitado em frequência, $x(t)$, a recuperação só é possível se, e somente se, a frequência de amostragem escolhida obedecer ao critério definido por $Nyquist$. Caso contrário, uma frequência diferente da original ($frequência\ de\ alias$) é recuperada. Qual é a máxima $frequência\ de\ alias$ que pode ser obtida através da amostragem por esta frequência?

Obs:
Para modificar a frequência de amostragem, o tempo de amostragem ($\mathrm{T_s} = 1/\mathrm{f_s}$) deve ser atualizado em dois campos:
3) Campo $Period$ do $gerador\ de\ impulsos$, pertencente ao bloco $amostrador$;
4) Campo $Sample\ time$ do $multiplicador$, pertencente ao bloco $sample\&hold$.

A *frequência do sinal analógico* pode ser modificada diretamente no bloco $gerador\ de\ sinais$, campo $Frequency$.

II. ***MATLAB:*** Agora, para verificar os efeitos da amostragem, crie uma função em Matlab, do tipo $\boldsymbol{Aula08\_ex01.m}$ que gere o gráfico da função $x(t) = cos(2\pi f t)$ bem como o gráfico de seu espectro.

Obs:
Para desenvolver este algoritmo, devem-se seguir os passos abaixo:

- Defina uma frequência f_0 para o sinal senoidal e uma frequência de amostragem f_s
- Defina um valor de T_{max} que seja função da quantidade de períodos do sinal discreto, fazendo $T_{max} = \frac{N_{periodos}}{f_0} - \frac{1}{f_s}$.
- Crie um vetor de tempo t que vá de 0 até T_{max}, espaçado de $T_s = 1/f_s$
- Obtenha o vetor com as amostras de $x(t)$
- Plote x em função de t (utilize $stem$)
- Obtenha o espectro do sinal através do comando $X = fft(x)$. $Help\ fft$.
- Obtenha N a quantidade de amostras do vetor x.
- Crie um vetor $k = 0{:}N-1$
- Crie um vetor $\omega = k.\frac{2\pi}{N}$.
- Crie um vetor $f = \omega.\frac{f_s}{2\pi}$.
- Utilizando o comando $subplot(3,1,p)$, plote em $p = 1$ o gráfico de $|X[k]|$, em $p = 2$ o gráfico de $|X(\omega)|$ e em $p = 3$ o gráfico de $|X(f)|$. (utilize $stem$)
- Sobre o gráfico de $X(f)$, plote em vermelho $\left|X\left(1{:}\left(\frac{N}{2}\right)+1\right)\right|$ por $f\left(1{:}\left(\frac{N}{2}\right)+1\right)$. Este é o espectro do sinal recuperado.

a. Mantenha a frequência do sinal senoidal (f_s) igual a $8000Hz$, $N_{período} = 3$ e simule a amostragem para diferentes frequências de sinal senoidal. Para cada caso, plote os sinais cossenoidais para as duas frequências apresentadas pelo espectro e verifique que devido ao aliasing, estas duas frequências resultam no mesmo sinal amostrado.

$f_{original}$	f_1	f_2	$f_{original}$	f_1	f_2
$f = 100Hz$			$f = 1KHz$		
$f = 500Hz$			$f = 2KHz$		

Verifique que o comando fft do matlab apresenta apenas um período do espectro do sinal amostrado, e que este período vai de $0 \le f < f_s$.

Note também que o espectro do sinal original (e recuperado) corresponde somente à primeira metade do vetor apresentado pela FFT e que é apresentado sempre para a faixa de frequência de $0 \le f < f_s/2$.

b. Mantenha a frequência do sinal senoidal (f) igual a $500Hz$, a frequência de amostragem (f_s) igual a $8KHz$ e simule a amostragem para diferentes valores de $N_{período}$.

Para cada caso, verifique que o espectro é apresentado sempre para $0 \leq \omega(\frac{rad}{amostra}) < 2\pi$ e $0 \leq f(Hz) < f_s$, independente da quantidade de períodos analisados. Entretanto, verifique que a distâncias entre duas amostras consecutivas do espectro diminuem conforme aumenta o valor de N .Complete a tabela e verifique que $\Delta\omega = 2\pi/N$ e, consequentemente, $\Delta f = f_s/N$:

$\boldsymbol{Aten}$**ção**$\boldsymbol{o}$**:** N é o quantidade de amostras utilizada para a transformada de Fourier, ou seja, o comprimento do vetor $x[n]$. Cuidado para não confundir com $N_{periodo}$, que é a quantidade de períodos do sinal continuo utilizada para a transformada.

$N_{período}$	$\Delta\omega$	Δf	$N_{período}$	$\Delta\omega$	Δf
$N_{período} = 2$			$N_{período} = 8$		
$N_{período} = 4$			$N_{período} = 16$		

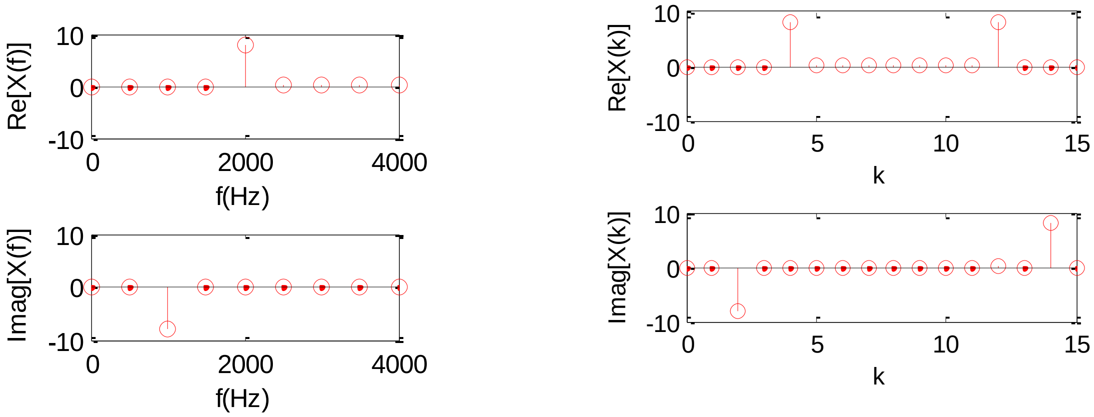
Exercícios de fixação

I. O comando $x = IFFT(X)$ do MatLab é utilizado para recuperar o sinal amostrado no tempo a partir de sua transformada de Fourier. Este comando utiliza como entrada a transformada definida para $0 \leq \omega \leq 2\pi.\frac{N-1}{N}$ e fornece o sinal $x[n]$ definido para $0 \leq n \leq (N-1)$.
Assim, crie um programa ($\boldsymbol{Aula08\_fix01.m}$) que, a partir dos vetores apresentados abaixo, plote o espectro em função de ω e obtenha o sinal $x[n]$.

a) $X[k] = [0\ 0\ 8\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 8\ 0]$

b) $X[k] = [0\ 0\ 0\ 0\ 0\ -10j\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 10j\ 0\ 0\ 0\ 0]$

II. Conforme foi visto nos exercícios feitos durante a aula, o espectro do sinal contínuo, quando apresentado em Hz, apresenta valores somente para $0 \leq f \leq f_s/2$, o que representa $0 \leq \omega \leq \pi$.
Isso significa que antes de realizar a $IFFT$, é necessário que a parte do espectro referente a $\pi < \omega \leq 2\pi.\frac{N-1}{N}$ seja recuperada, conforme mostra o exemplo:



Assim, desenvolva uma função do tipo $\boldsymbol{x = IFFT\_singleside(X)}$ que receba as amostras do espectro definido para $0 \leq f < f_s/2$ e apresente as amostras do sinal $x[n]$ no tempo.
$\boldsymbol{Dicas}$: Verifique que a segunda metade do espectro é simétrica e conjugada a primeira metade e que a amostra $X(end)$ = $X(2)$, e não à $X(1)$. Use os comando $fliplr(conj(X(2{:}end)))$ para recuperar a segunda metade do espectro e só então utilize o $ifft(X)$.