Aula 09: Filtros digitais

Para esta aula é necessário trazer fone de ouvido.

1. Introdução*

Filtro é um sistema utilizado para selecionar características específicas do sinal, bloqueando, ou filtrando suas características não desejadas.

Se o filtro for linear, ele é determinado completamente por sua resposta ao impulso $h[n]$ e sua saída pode ser determinada diretamente a partir da convolução de $h[n]$ com a entrada $x[n]$.

Um filtro ideal rejeita perfeitamente a faixa de frequências indesejadas e aceita com amplitude idêntica as frequências da banda passante. Esse tipo de filtro, no entanto, não é realizável, pois, além de apresentar uma resposta impulsiva não causal, sua descrição matemática inclui descontinuidades que não podem ser obtidas na prática.*

Assim, para a implementação de um filtro real, é admissível que a saída sofra defasagem a fim de tornar o filtro causal, que o ganho sofra flutuações e/ou que a transição entre a banda de passagem e rejeição seja "*alargada*", a fim de melhorar outras características do filtro.

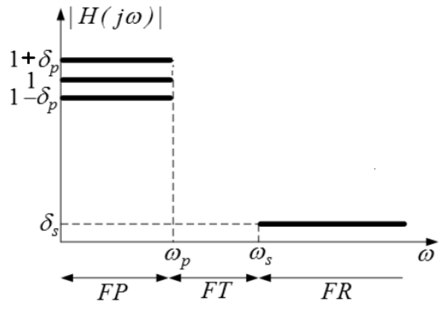
2. Passo-a-passo da realização de Filtros Digitais.

A realização de um filtro de tempo discreto exige três fases: especificação, projeto e implementação.

a. *Especificação:*

Consiste em determinar os parâmetros de desempenho do filtro no domínio da frequência, como frequência de corte (ω_c) e banda de transição ($\Delta\omega = \omega_s - \omega_p$), além da tolerância nas bandas de passagem (δ_p) e rejeição (δ_s).

Na aula de hoje, entretanto, faremos o projeto de filtros FIR, obtidos a partir do janelamento retangular, o que significa que δ_s sera sempre $-21dB$.



* Introdução ao processamento digital de sinais, Nalon, J.A.

b. ***Projeto:***

Consiste em encontrar uma sequência causal de tempo discreto, $h_{PB}[n]$, que atenda as necessidades da especificação do filtro e que se aproxime, o máximo possível, da resposta do filtro ideal.

A quantidade coeficientes desta resposta, que dever ser um número inteiro e ímpar, pode ser obtida por

$$N \geq \frac{0{,}91\pi}{2\pi.\Delta f/f_s}$$

e, então, a resposta impulsiva do filtro ideal é obtida por

$$h_i[n] = \frac{1}{\pi}.\frac{sen\left(n.2\pi.\frac{f_c}{f_s}\right)}{n}, \qquad para \qquad -\frac{N-1}{2} \leq n \leq \frac{N-1}{2}$$

de modo que a resposta do filtro passa-baixas real (causal) a ser implementado seja

$$h_{PB}[n] = h_i\left[n - \frac{N-1}{2}\right]$$

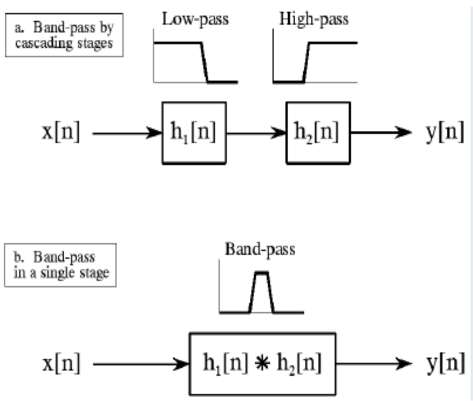
A partir desta resposta, pode-se, então, obter as respostas dos filtros passa-alta ($h_{PA}[n]$), passa-faixa ($h_{PF}[n]$) ou rejeita-faixa ($h_{RF}[n]$), conforme o projeto.

Estas respostas podem ser obtidas através do método da inversão espectral que faz com que a banda-passante se torne a banda de rejeição e a banda de rejeição se torne a banda passante.

Isso possibilita criar um filtro passa-alta a partir de um filtro passa-baixa (e vice-versa) ou um filtro rejeita-faixa a partir do passa-faixa (e vice-versa):

$$\begin{cases} h_{PA}[n] = \delta\left[n - \frac{N-1}{2}\right] - h_{PB}[n] \\ h_{RF}[n] = \delta\left[n - \frac{N-1}{2}\right] - h_{PF}[n] \end{cases}$$

A resposta do filtro passa-faixa, por sua vez, pode ser obtida a partir da multiplicação da resposta em frequência (ou convolução da resposta impulsiva) de dois filtros: um passa-alta e um passa-baixa, conforme ilustrado a seguir:



3. Atividades

I. Crie uma função do tipo $\boldsymbol{h = passa\_baixa(Deltaf, fc, fs)}$, que forneça os coeficientes de um filtro passa-baixa a partir da definição da banda de transição (Δf) , da frequência de corte e da frequência de amostragem do sistema.

> *Obs:*
> Para desenvolver este algoritmo, siga os passos descritos no item ***b. Projeto*** deste roteiro.
> $\boldsymbol{Dica01}$: Através da função $\boldsymbol{help}$, verifique como que os comandos $\boldsymbol{ceil}$ e $\boldsymbol{rem}$ podem auxiliar na determinação do número de coeficientes $\boldsymbol{N}$.
> $\boldsymbol{Dica02}$: Para evitar que $h[0] = \infty$, crie o vetor n normalmente, fazendo $n = -\frac{N-1}{2} : \frac{N-1}{2}$ e depois utilize o comando $n(n == 0) = 1e - 10$ para simular o limite de $n \rightarrow 0$

II. Desenvolva um programa $\boldsymbol{Aula09\_ex01.m}$ que obtenha a resposta em frequência de um filtro passa-baixa que opere com uma frequência de amostragem $f_s = 8KHz$, frequência de corte $f_c = 1KHz$ e banda de transição $\Delta f = 400Hz$.

> *Obs:*
> Para desenvolver este algoritmo, siga os seguintes passos:
>
> - Especifique os valores da banda de transição, frequência de amostragem e frequência de corte.
> - Chame a função criada no exercício anterior para obter o vetor de coeficientes do filtro.
> - Inicie uma variável para o contador, fazendo $cont = 1;$
> - Crie um $loop\ for$, que varie uma frequência f de 0 a $7950Hz$ com passos de $10Hz$. Dentro deste loop, para cada um dos valores de f:
>   a) Obtenha um sinal senoidal $x = \sin\left(\frac{2\pi f}{f_s} . n\right)$, com 1000 amostras
>   b) Obtenha a resposta do filtro a x, através da convolução com h e armazene no vetor y.
>   c) Armazene o valor máximo desta convolução no vetor H, fazendo:
> $$H(cont) = 20.* log10(\max(abs(y))).$$
>   d) Incremente o contador, fazendo $cont = cont + 1$.
>   e) Toque o sinal y, através do comando $sound(y, fs)$ e
>   f) Pause o programa por $0{,}13$ segundos para dar tempo de terminar de tocar o tom y
> - Plote $H(dB)$ em função de $f(Hz)$, utilize $plot$.

III. Na área de trabalho, utilize o comando $\boldsymbol{H = 20.* log10(fft(h))}$ para obter o módulo da resposta em frequência do filtro projetado, através da transformada de Fourier. Plote-a em função de $f(Hz)$ e compare com a resposta obtida no exercício anterior.
$\boldsymbol{Dica}$: Lembre-se que o vetor f deve ter o mesmo comprimento de H. Para isso, utilize o comando $f = 0:\frac{fs}{length(H)}:fs - \frac{fs}{length(H)}$

IV. Crie uma função do tipo $\boldsymbol{h = passa\_alta(Deltaf, fc, fs)}$, que forneça os coeficientes de um filtro passa-alta a partir da definição da largura da banda de transição (Δf) , da frequência de corte e da frequência de amostragem do sistema.

Obs:
Conforme apresentado no início desta aula, os coeficientes de um filtro passa-alta pode ser obtido a partir dos coeficientes de um filtro passa-baixa. Assim:

- Chame a função $\boldsymbol{hpb = passa\_baixa(Deltaf, fc, fs)}$ criada no primeiro exercício para obter os coeficientes do filtro passa-baixa.
- Chame a função $imp = impulso\left(0, length(h) - 1, \frac{length(h)-1}{2}\right)$ criada na Aula 04
- Obtenha os coeficientes fazendo $hpa = imp - hpb$.

.

V. Repita os exercício de II e III para este novo caso.

Exercícios de fixação

1. Crie uma função do tipo $\boldsymbol{h = passa\_faixa(Deltaf, fc1, fc2, fs)}$, que chame as funções
$$\boldsymbol{hpb = passa\_baixa(Deltaf, fc2, fs)}$$
e
$$\boldsymbol{hpa = passa\_alta(Deltaf, fc1, fs)},$$
criadas em sala de aula e forneça os coeficientes de um filtro passa-faixa a partir da definição da largura da banda de transição (Δf) , da frequência de corte e da frequência de amostragem do sistema.

   Através do comando $\boldsymbol{fft}$, plote a resposta em frequência de um filtro que opere com uma frequência de amostragem $f_s = 8KHz$, frequências de corte $f_{c1} = 1KHz$ e $f_{c2} = 3KHz$ e banda de transição $\Delta f = 400Hz$.

2. Crie uma função do tipo $\boldsymbol{h = rejeita\_faixa(Deltaf, fc1, fc2, fs)}$, que chame a funções
$$\boldsymbol{h = passa\_faixa(Deltaf, fc1, fc2, fs)}$$
do exercício anterior e forneça os coeficientes de um filtro rejeita-faixa a partir da definição da largura da banda de transição (Δf) , da frequência de corte e da frequência de amostragem do sistema.

   Através do comando $\boldsymbol{fft}$, plot a resposta em frequência de um filtro que opere com uma frequência de amostragem $f_s = 8KHz$, frequências de corte $f_{c1} = 1KHz$ e $f_{c2} = 3KHz$ e banda de transição $\Delta f = 400Hz$.