Representação Dinâmica no Espaço de Estados

Eric Souza, Marko Ackermann

February 8, 2012

1 Introdução

Definição 1.1 (Graus de liberdade)**.** Número de variáveis necessárias para se determinar completamente a posição ou orientação de um sistema.

2 Representação no Espaço de Estados

Idéia: Passagem de uma representação de segunda ordem (ou ordem n) para uma representação de ordem 1. Por quê?

Observação 2.1. A maneira de implementar um sistema dinâmico em um ambiente computacional é através de um sistema de primeira ordem. Os métodos numéricos disponíveis são para a integração e, portanto, solução das equações diferenciais que modelam um sistema dinâmico de primeira ordem. No MATLAB, integração numérica é feita pelas funções *ode* e *trapz*.

2.1 Exemplo: Sistema Massa-Mola-Amortecedor Forçado

Considere o sistema massa-mola-amortecedor cujo modelo é apresentado abaixo:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t)$$

onde $F(t)$ representa uma força arbitrária. Note que esta é uma equação diferencial de 2^a ordem pois a coordenada dimensional de posição x está presente com derivadas de até a segunda ordem.

Vamos reescrever esta equação em duas equações diferencias de primeira ordem. Para isto, será necessário definir duas novas variáveis: x_1 e x_2.

Faz-se, primeiramente, a seguinte atribuição:

$$\begin{aligned} x_1 &= x \qquad \text{(derivando)} \quad \rightarrow \quad \dot{x}_1 = x_2 \\ x_2 &= \dot{x} \end{aligned}$$

Substituindo as variáveis: x_1 e x_2 na equação de movimento, tem-se

$$m\dot{x}_2 + cx_2 + kx_1 = F(t)$$

onde $\dot{x}_2 = \ddot{x}$. Resolvendo para $\dot{x}_2$, segue que

$$\dot{x}_2 = -\frac{c}{m}x_2 - \frac{k}{m}x_1 + \frac{F(t)}{m}$$

Logo, as duas equações de primeira ordem procuradas são:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{c}{m}x_2 - \frac{k}{m}x_1 + \frac{F(t)}{m} \end{aligned}$$

Estas duas equações são utilizadas na integração numérica no MATLAB, obtendo-se, assim, a solução da equação de movimento original do sistema mass-mola-amortecedor.

2.2 Definições

Estado é o conjunto de grandezas físicas que, se especificadas, caracterizam completamente a evolução do sistema.

Definição 2.1 (Variáveis de Estado)**.** Variáveis utilizadas para caracterizar o estado.

Para sistemas mecânicos em geral, o número de variáveis de estado é duas vezes o número de graus de liberdade do mesmo.

2.3 Generalização para sistemas de ordem n

Considere o sistema linear de ordem 4 a seguir:

$$\frac{d^4x(t)}{dt^4} + a_3\frac{d^3x(t)}{dt^3} + a_2\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \cdots a_1\frac{dx(t)}{dt} + a_0x(t) = bu(t)$$

$$x^{(4)}(t) + a_3x^{(3)}(t) + a_2x^{(2)}(t) + \cdots a_1x^{(1)}(t) + a_0x(t) = bu(t)$$

onde $u(t)$ é uma variável dita *entrada*, pois representa um estímulo exterior à dinâmica definida pela equação (como se fosse a força F do exemplo anterior). Deseja-se reescrevê-lo como um conjunto de 4 equações diferenciais (lineares) de primeira ordem. Define-se o vetor de estados como:

$$\begin{aligned} x_1 &= x \\ x_2 &= x^{(1)} = \dot{x}_1 \\ x_3 &= x^{(2)} = \dot{x}_2 \\ x_4 &= x^{(3)} = \dot{x}_3 \end{aligned}$$

Logo, a equação original acima pode ser reescrita como

$$\dot{x}_4(t)+a_3x_4(t)+a_2x_3(t)+a_1x_2(t)+a_0x_1(t) = bu(t)$$

e, portanto

$$\dot{x}_4(t) = -a_3x_4(t)-a_2x_3(t)-a_1x_2(t)-a_0x_1(t)+bu(t)$$

Finalmente, o sistema dinâmico original é dado por um conjunto de quatro equações diferenciais de primeira ordem

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= x_3(t) \\ \dot{x}_3(t) &= x_4(t) \\ \dot{x}_4(t) &= -a_3x_4(t) - a_2x_3(t) - a_1x_2(t) - a_0x_1(t) + bu(t) \end{aligned}$$

Estas são as equações diferenciais de 1^a ordem que são utilizadas para integrar (ou resolver) a equação diferencial de 4^a ordem original.

Pode-se definir um vetor $\mathbf{x}$, denominado *vetor de estados*, contendo as variáveis de estado x_i, $(4 \geq i \geq 1)$:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}, \qquad (\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4)$$

O mesmo poderia ser feito para definir um vetor de entradas $\mathbf{u}$ caso houvesse mais variáveis de entrada. Pode-se escrever, portanto, a equação de movimento de um sistema em geral, incluindo dinâmicas não-lineares, pela seguinte expressão:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = f(\mathbf{x}, \mathbf{u}),$$

onde f é um vetor de funções do estado $\mathbf{x}$ e da entrada $\mathbf{u}$.

Utiliza-se o mesmo raciocínio para um sistema de ordem n. Neste caso, será necessário criar n variáveis de estado. Logo, um sistema de ordem n pode ser reescrito como n equações de primeira ordem.