Métodos de Integração Numérica

Fernando Orsatti, Eric Souza

February 15, 2012

1 Introdução

Considere uma equação diferencial na seguinte forma:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t)$$

onde $\mathbf{x}$ é o vetor de estados, $\mathbf{u}$ o vetor de entradas e $\mathbf{f}$ é um vetor de funções. Note que esta representação utiliza o tempo t contínuo, isto é, t pode assumir qualquer valor real. Portanto, o estado $\mathbf{x}$ e a entrada $\mathbf{u}$ evoluem continuamente com o tempo t.

Considere agora uma equação de diferenças na seguinte forma:

$$\mathbf{x}[n+1] = \mathbf{f}(\mathbf{x}[n], \ldots, \mathbf{x}[n-1], \mathbf{u}[n], \ldots \\ \mathbf{u}[n-1], \ldots, t)$$

onde t representa a evolução do tempo em instantes discretos, não mais contínuo. Por exemplo, t pode assumir valores tais que $t = nh$, onde n é um número natural ($n \in \mathbb{N}$) e h é uma constante real, denominada *passo* pois t evolui como múltiplos de h. Neste caso o estado $\mathbf{x}[n]$ e a entrada $\mathbf{u}[n]$ são também discretos.

Por uma questão de brevidade, será desconsiderado a entrada $\mathbf{u}$ na discussão a seguir, sem perda de generalidade.

Definição 1.1. Um Método de Integração Numérica é uma sequência de operações elementares realizadas com a função $\mathbf{f}(\mathbf{x}[n], t)$ que resulta em uma função discreta $\mathbf{x}[n]$ que pode aproximar a solução analítica $\mathbf{x}(t)$ da equação diferencial $\mathbf{f}(\mathbf{x}(t), t)$ em determinados instantes de tempo discreto n.

O objetivo principal destes métodos é determinar procedimentos para obter a função $\mathbf{x}(t)$ de forma aproximada através de $\mathbf{x}[n]$.

Quando a função discreta $\mathbf{x}[n]$ aproxima bem[1] a função analítica $\mathbf{x}(t)$ então diz-se que $\mathbf{x}[n]$ é a solução numérica da equação diferencial $\mathbf{f}(\mathbf{x}(t), t)$.

Note que um método é empregado, em geral, sem distinção da dinâmica presente em $\mathbf{f}(\mathbf{x}(t), t)$, sendo esta linear ou não.

2 Método de Euler

Considere a definição da operação derivada para uma função **escalar** $x(t)$:[2]

$$\frac{dx(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}$$

Considerando $h = \Delta t$ um número pequeno, vê-se que aproximação para o valor de $dx(t)/dt$ é

$$\frac{dx(t)}{dt} \approx \frac{x(t+h) - x(t)}{h}$$

Substituindo

$$\frac{x(t+h) - x(t)}{h} \approx f(x(t), t)$$

o que leva a uma expressão aproximada do valor de $x(t+h)$ dada por

$$x(t+h) \approx x(t) + h \cdot f(x(t), t)$$

[1]Aproximação menor que a tolerância, ou erro, especificada.

[2]Utilizando uma discretização *forward differences*.

Assim, para avaliar a função $\mathbf{x}(t)$ no intervalo $[0, T]$, basta saber o valor de $x(0)$. Os valores de $x(t)$ são obtidos para $t = nh$ ($t \leq T$), ou simplesmente para o inteiro n, onde

$$n \leq \frac{T}{h} = N$$

e $n = 1, \ldots, N$, através do seguinte algoritmo

$x[1] = x(0)$
for $n = 1 \rightarrow N - 1$ **do**
$\quad x[n+1] = x[n] + h \cdot f(x[n], n \cdot h)$
end for

Este método, conhecido como **Método de Euler**, está baseado na aproximação da derivada de uma função com um termo[3] e por isso é chamada de método de 1^a ordem, O parâmetro h do método é chamado de *passo de integração* e a aproximação da solução será tanto melhor quanto menor for o valor de h.

2.1 Exemplo:

Seja um corpo de massa m sujeito à ação de uma força de resistência do ar por $-kv^2$, o princípio fundamental da dinâmica leva a:

$$m\frac{dv(t)}{dt} = -kv(t)^2$$

vê-se que nesse caso $f(v, t) = -v(t)^2(k/m)$. Adotando $k/m = 4 \cdot 10^{-4} N/(mkg)$ e $v(0) = 30m/s$. A solução analítica da equação pode ser obtida por integração e o resultado obtido é

$$v(t) = \frac{v(0)}{1 + \frac{k}{m}v(0)t} = \frac{30}{1 + 1,2 \cdot 10^{-2} \cdot t}$$

A integração pelo método de Euler pode ser feita com passo de integração h para $t \leq T$, com número de pontos $N = T/h$, da seguinte forma:

$v[1] = 30$
for $n = 1 \rightarrow N - 1$ **do**
$\quad v[n+1] = v[n] - h \cdot 4 \cdot 10^{-4} \cdot v[n]^2$
end for

Utilizar este algoritmo para integração numérica até o tempo $T = 200s$ com passos de $h = 40s$ e $h = 20s$. Comparar resultados.

3 Método de Runge-Kutta de 2^a ordem

O método de Runge-Kutta de 2^a ordem considera o valor da derivada de $x(t)$ avaliado nos dois pontos extremos do intervalo $[t, t+h]$. Define-se K_1 como a inclinação da curva $x(t)$ no instante t e K_2 como inclinação da curva $x(t)$ no instante $t + h$. O método considera a inclinação média $(K_1 + K_2)/2$ da curva no intervalo em questão:

$$x(t+h) = x(t) + h\left(\frac{K_1 + K_2}{2}\right)$$

onde

$$K_1 = f(x(t), t)$$
$$K_2 = f(x(t) + h \cdot K_1, t + h)$$

Para implementação do método, pode-se proceder da seguinte forma:

$x[1] = x(0)$
for $n = 1 \rightarrow N - 1$ **do**
$\quad K_1 = f(x[n], n \cdot h)$
$\quad K_2 = f(x[n] + h \cdot K_1, (n+1) \cdot h)$
$\quad x[n+1] = x[n] + h \cdot (K_1 + K_2)/2$
end for

Para o exemplo anterior, tem-se

$v[1] = 30$
for $n = 1 \rightarrow N - 1$ **do**
$\quad K_1 = -4 \cdot 10^{-4} \cdot v[n]^2$
$\quad K_2 = -4 \cdot 10^{-4} \cdot (v[n] + hK_1)^2$
$\quad v[n+1] = v[n] + h \cdot (K_1 + K_2)/2$

[3] Truncamento da expansão da função $f(t)$ com a série de Taylor.

end for

Comparar o resultado com a solução pelo método de Euler e a solução analítica.

4 Método de Runge-Kutta de 4^a ordem

Neste método utiliza-se quatro pontos no intervalo de integração $[t, t+h]$ para avaliar a aproximação de $x(t+h)$. Logo, tem-se a seguinte expressão de iteração:

$$x(t+h) = x(t) + \frac{h}{6}\left(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4\right)$$

onde

$$\begin{aligned}
K_1 &= f(x(t), t) \\
K_2 &= f\left(x(t) + \frac{h}{2}K_1, t + \frac{h}{2}\right) \\
K_3 &= f\left(x(t) + \frac{h}{2}K_2, t + \frac{h}{2}\right) \\
K_4 &= f(x(t) + h \cdot K_3, t + h)
\end{aligned}$$

Para o exemplo anterior, tem-se

$v[1] = 30$
for $n = 1 \to N-1$ **do**
  $K_1 = -4 \cdot 10^{-4} \cdot v[n]^2$
  $K_2 = -4 \cdot 10^{-4} \cdot (v[n] + (h/2)K_1)^2$
  $K_3 = -4 \cdot 10^{-4} \cdot (v[n] + (h/2)K_2)^2$
  $K_4 = -4 \cdot 10^{-4} \cdot (v[n] + hK_3)^2$
  $v[n+1] = v[n] + (h/6) \cdot (K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K4)$
end for

Comparar o resultado com a solução pelo método de RK2 e a solução analítica.