CORRIGES DES TRAVAUX DIRIGES D'ALGEBRE

$1^{\text{ère}}$ année_Biosciences

Dr DIABATE Nabongo, Responsable du cours
Maître de Conférences

et

Dr SORO Kolo Fousséni
Assistant

Université Alassana Ouattara de Bouaké (Côte d'Ivoire)
UFR Sciences et Technologie
koloetienne180@gmail.com

6 novembre 2023

Niveau : $1^{\text{ère}}$ année de BIOSCIENCES
Année académique : $2023 - 2024$

TRAVAUX DIRIGES N°1

Exercice 1 : Désignons par A l'ensemble des élèves étudiant l'Allemand et E l'ensemble des élèves étudiant l'Espagnol. On a :

$$\begin{aligned} & card(A \cup E) = card(A) + card(E) - card(A \cap E) \\ \Longrightarrow\ & card(A \cap E) = card(A) + card(E) - card(A \cup E) \\ & \qquad = 18 + 19 - 30 = 7. \end{aligned}$$

Donc il y a 7 élèves qui étudient les deux langues.

Exercice 6 : Faire les tables de $\cap$ et $\cup$.

Exercice 7 : On définit sur $\mathbb{R}$ la loi $\otimes$ par :

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ x \otimes y = x + y - xy.$$

1) Montrons que $\otimes$ est une loi de composition interne sur $\mathbb{R}$.
   - Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, $x + y - xy \in \mathbb{R}$ car $(\mathbb{R}, +, \times)$ est un anneau. Donc $\otimes$ est une loi de composition interne sur $\mathbb{R}$.
   - Pour tous $x, y, z \in \mathbb{R}$, $\Big(x \otimes y\Big) \otimes z = x \otimes \Big(y \otimes z\Big) = x + y + z + -(xy + xz + yz) + xyz$ car $(\mathbb{R}, +, \times)$ est un anneau commutatif. Donc la loi $\otimes$ est associative.
2) Déterminons son élément neutre et les éléments symétrisables.

   Soit e l'élément neutre de la loi $\otimes$.

   $\forall x \in \mathbb{R}, x \otimes e = e \otimes x = x \implies e = 0.$

   x symétrisable $\iff \exists y \in \mathbb{R} : x \otimes y = y \otimes x = 0 \iff x = -\dfrac{y}{1-y}.$

   Donc l'ensemble des éléments symétrisables est $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Exercice 10 : $(G, *)$ est un groupe. Pour tout $a \in G$, $g_a : G \longrightarrow G$, $x \longmapsto a * x$.

1) **Montrons que g_a est bijective.**
   * Injectivité.

     Soient $x, y \in G$ tels que $g_a(x) = g_a(y)$. On a

     $$\begin{aligned} g_a(x) = g_a(y) &\implies a * x = a * y \implies a^{-1} * (a * x) = a^{-1} * (a * y) \\ &\implies (a^{-1} * a) * x = (a^{-1} * a) * y \implies e_G * x = e_G * y \implies x = y. \end{aligned}$$

     Donc g_a est injective.
   * Surjectivité.

     Soit $y \in G$. On a :

     $$\begin{aligned} g_a(x) = y &\implies a * x = y \implies a^{-1} * (a * x) = a^{-1} * y \implies (a^{-1} * a) * x = a^{-1} * y \\ &\implies e_G * x = a^{-1} * y \implies x = a^{-1} * y. \end{aligned}$$

     On a bien $g_a(a^{-1} * y) = y$ avec $a^{-1} * y \in G$. Donc g_a est surjective.

     Conclusion : g_a est à la fois injective et surjective, alors elle est bijective.

Déterminons g_a^{-1}.

D'après ce qui précède (étude de la surjectivité de g_a), on a $g_a^{-1} = g_{a^{-1}}$.

2) **Montrons que $F = \{g_a \in S(G)/a \in G\}$ est un sous groupe de $\Big(S(G), \circ\Big)$.**

i) $id_G = g_{e_G} \in F$.

ii) Soient $g_a, g_b \in F$ et $x \in G$. On a

$$\Big(g_a \circ g_b\Big)(x) = g_a\Big(g_b(x)\Big) = g_a\Big(b * x\Big) = a * (b * x) = (a * b) * x = g_{a*b}(x).$$

Donc $g_a \circ g_b = g_{a*b} \in F$.

iii) Soit $g_a \in F$. Alors $g_a^{-1} = g_{a^{-1}} \in F$.

Donc F est un sous groupe de $\Big(S(G), \circ\Big)$.

Exercice 11 : On définit sur l'ensemble $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ la loi $\otimes$ par :

$$\forall (a,b), \left(a', b'\right) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R},\ (a,b) \otimes \left(a', b'\right) = \left(aa', a'b + b'\right).$$

Montrons que $\left(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \otimes\right)$ est un groupe non commutatif.

Soit $\varphi : \begin{array}{l} \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ (a,b) \longmapsto ab \end{array}$. Alors φ est une application surjective.

Considérons $b \in \mathbb{R} = \mathbb{R}_+^* \cup \mathbb{R}_-$.

- Si $b \in \mathbb{R}_+^*$, alors $b = \varphi(b, 1)$;
- Si $b \in \mathbb{R}_-$, alors $b = \varphi(1, b)$.

Pour tous $(a,b), \left(a', b'\right) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, on a

$$(a,b) \otimes \left(a', b'\right) = \left(aa', \varphi(a', b) + b'\right).$$

Munissons $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ de la loi $\cdot_\varphi$ définie comme suit

$$(a,b) \cdot_\varphi \left(a', b'\right) = \left(aa', b + b'\right).$$

Alors

$$\forall (a,b), \left(a', b'\right) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R},\ (a,b) \otimes \left(a', b'\right) = \left(a, \varphi(a', b)\right) \cdot_\varphi \left(a', b'\right).$$

Comme $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ et $(\mathbb{R}, +)$ sont des groupes, alors $(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \cdot_\varphi)$ est un groupe d'élément neutre $(1, 0)$ et le symétrique d'un élément (a,b) est $\left(\dfrac{1}{a}, -\dfrac{b}{a}\right)$.

Par ailleurs, pour $(a,b), \left(a', b'\right) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, on a

$$(a,b) \otimes \left(a', b'\right) = \left(aa', a'b + b'\right) \neq (a'a, ab' + b) = (a', b') \otimes (a,b).$$

Donc $(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \otimes)$ est un groupe non commutatif.

<u>Autre méthode</u>

Montrer que ;

- la loi est interne, associative, non commutative.
- $(1, 0)$ est l'élément neutre.
- $\left(\dfrac{1}{a}, -\dfrac{b}{a}\right)$ est le symétrique de (a,b).

Exercice 13 : Soit $(A,+,\times)$ un corps commutatif. On sait que $(A\times A,+,\times)$ est un anneau commutatif.

1) **Démontrons que $(A\times A,+,\times)$ n'est pas un corps.**

Soient $a,b\in A\backslash\{0_A\}$. On a :

$$(a,0_A),(0_A,b)\in A^2\backslash\{(0_A,0_A)\} \text{ et } (a,0_A)\times(0_A,b)=(0_A,0_A).$$

Donc $(A^2,+,\times)$ n'est pas intègre et alors ce n'est pas un corps.

2) **Démontrons que $\triangle=\{(x,x)\in A\times A/x\in A\}$ est un corps.**

a) Montrons que $\triangle$ est un sous-groupe de $(A^2,+)$.

i) $(0_A,0_A)\in\triangle$ car $0_A\in A$.

ii) Soient $(a,a),(x,x)\in\triangle$. On a

$$(a,a)-(x,x)=(a,a)+(-x,-x)=(a-x,a-x)\in\triangle \text{ car } a-x\in A.$$

Donc $\triangle$ est un sous-groupe de $(A^2,+)$.

b) Stabilité pour le produit.

Soient $(a,a),(x,x)\in\triangle$. On a

$$(a,a)\times(x,x)=(ax,ax)\in\triangle \text{ car } ax\in A.$$

c) $(1_A,1_A)\in\triangle$ car $1_A\in A$.

D'où $(\triangle,+,\times)$ est un sous anneau commutatif de $(A\times A,+,\times)$.

d) Montrons que $(\triangle,+,\times)$ est intègre.

$$(a,a)\times(x,x)=(0_A,0_A) \implies (ax,ax)=(0_A,0_A) \implies ax=0_A.$$

Comme $(A,+,\times)$ un corps, alors il est intègre et donc

$$ax=0_A \implies a=0_A \text{ ou } x=0_A.$$

Par suite, on a

$$(a,a)\times(x,x)=(0_A,0_A) \implies (a,a)=(0_A,0_A) \text{ ou } (x,x)=(0_A,0_A).$$

$(\triangle,+,\times)$ est bien un anneau intègre, donc un corps.

e) Démontrons que $\triangle$ est isomorphe à A.

Soit $\varphi: A\longrightarrow\triangle$, $x\longmapsto(x,x)$. On a :

$$\varphi(x+y)=\varphi(x)+\varphi(y) \text{ et } \varphi(xy)=\varphi(x)\varphi(y).$$

Alors φ est un morphisme d'anneaux. En plus on a

$$\left.\begin{array}{r}\ker\varphi=\{0_A\} \implies \varphi \text{ est injective}\\ \varphi \text{ est surjective par construction}\end{array}\right\} \implies \varphi \text{ est bijective.}$$

Par conséquent,φ est un isomorphisme.

Exercice 14 :

1) **Montrons que $\mathbb{Z}\left[\sqrt{3}\right]$ est un sous-anneau de $(\mathbb{R},+,\times)$.**

a) **Montrons que $\mathbb{Z}\left[\sqrt{3}\right]$ est un sous-groupe commutatif de $(\mathbb{R},+)$.**

i) $0_{\mathbb{R}}=0_{\mathbb{R}}+0_{\mathbb{R}}\sqrt{3}\in\mathbb{Z}\left[\sqrt{3}\right]$. Donc $\mathbb{Z}\left[\sqrt{3}\right]\neq\emptyset$.

ii) Soient $x=a+b\sqrt{3}$ et $y=a'+b'\sqrt{3}$ des éléments de $\mathbb{Z}\left[\sqrt{3}\right]$. Alors

$$x+y=a+a'+(b+b')\sqrt{3}\in\mathbb{Z}\left[\sqrt{3}\right] \text{ car } (a+a',b+b')\in\mathbb{Z}^2.$$

iii) Soit $x=a+b\sqrt{3}\in\mathbb{Z}\left[\sqrt{3}\right]\subset\mathbb{R}$. Alors

$$-x=-a+(-b)\sqrt{3}\in\mathbb{Z}\left[\sqrt{3}\right] \text{ car } (-a,-b)\in\mathbb{Z}^2.$$

Donc $\mathbb{Z}\left[\sqrt{3}\right]$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R},+)$. Comme $(\mathbb{R},+)$ est commutatif, alors $\left(\mathbb{Z}\left[\sqrt{3}\right],+\right)$ l'est aussi.

b) **Montrons que $\mathbb{Z}\left[\sqrt{3}\right]$ contient 1 et est stable pour le produit.**

Soient $x = a + b\sqrt{3}$ et $y = a' + b'\sqrt{3}$ deux éléments de $\mathbb{Z}\left[\sqrt{3}\right]$. On a

$$xy = (aa' + 3bb') + (ab' + a'b)\sqrt{3} \in \mathbb{Z}\left[\sqrt{3}\right] \text{ car } (aa' + 3bb', ab' + a'b) \in \mathbb{Z}^2.$$

En particulier, $1 = 1 + 0\sqrt{3} \in \mathbb{Z}\left[\sqrt{3}\right]$.

Conclusion : $\mathbb{Z}\left[\sqrt{3}\right]$ est un sous-anneau commutatif, intègre et unitaire de $(\mathbb{R}, +, \times)$ car il hérite des propriétés de $(\mathbb{R}, +, \times)$.

2.a) **Montrons que pour tous** $x, y \in \mathbb{Z}\left[\sqrt{3}\right]$, **on a** $N(xy) = N(x)N(y)$.

On a :

$$N(xy) = xy.(\overline{xy}) = xy(\overline{x}\overline{y}) = x(y\overline{x})\overline{y} = x(\overline{x}y)\overline{y} = (x\overline{x})(y\overline{y}) = N(x)N(y).$$

Supposons que x est inversible. Alors il existe $y \in \mathbb{Z}\left[\sqrt{3}\right]$ tel que $xy = 1$. Par suite

$$N(xy) = N(1) = 1 \implies N(x)N(y) = 1 \implies N(x) = N(y) = 1 \text{ car } N(x), N(y) \in \mathbb{N}.$$

b) **Montrons que** $x = a + b\sqrt{3}$ **est inversible si et seulement si** $a^2 - 3b^2 = 1$.

Il suffit de remarquer que $N(x) = a^2 - 3b^2$. Donc

- Si x est inversible, alors $N(x) = a^2 - 3b^2 = 1$.
- Si $N(x) = a^2 - 3b^2 = 1$, alors $x\overline{x} = 1$ et donc x est inversible d'inverse $\overline{x}$.

c) **Vérifions que** $x = 1$ **et** $y = 2 + \sqrt{3}$ **sont inversibles.**

On a $N(1) = 1$ et $N(2 + \sqrt{3}) = 4 - 3 = 1$. Alors $x = 1$ et $y = 2 + \sqrt{3}$ sont inversibles.

Exercice 17 : On donne $P(X) = (X + 1)^7 - X^7 - 1$.

1) **Déterminons le dégré de** P.

On obtient : $P(X) = 7X^6 + 21X^5 + 35X^4 + 35X^3 + 21X^2 + 7X$ et alors $d^\circ(P) = 6$.

2) **Montrons que** P **admet au moins deux racines entiers relatifs et donnons leur ordre de multiplicité.**

$$\begin{aligned} P(X) &= 7X(X^5 + 3X^4 + 5X^3 + 5X^2 + 3X + 1) \\ &= 7X\left[(X^5 + 1) + 3X(X^3 + 1) + 5X^2(X + 1)\right]. \end{aligned}$$

Or $X^5 + 1 = (X + 1)(X^4 - X^3 + X^2 - X + 1)$ et $X^3 + 1 = (X + 1)(X^2 - X + 1)$. Alors

$$P(X) = 7X(X + 1)\left(X^4 + 2X^3 + 3X^2 + 2X + 1\right).$$

Par suite $P(0) = P(-1) = 0$. Déterminons leurs ordres de multiplicité.

Posons $Q(X) = X^4 + 2X^3 + 3X^2 + 2X + 1$. Alors on a $Q(0) = Q(-1) = 1 \neq 0$. D'où 0 et -1 sont deux racines entiers relatifs d'ordre de multiplicité 1 (on dit qu'ils sont des racines simples).

3) **Démontrons que** $P(X)$ **est divisible par** $X - j$ **où** $j = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

$$j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \implies j^2 = \overline{j} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ et } j^3 = 1.$$

Donc

$$Q(j) = j^4 + 2j^3 + 3j^2 + 2j + 1 = j + 2 + 3\overline{j} + 2j + 1 = 3j + 3\overline{j} + 3 = 3(j + \overline{j} + 1) = 0.$$

Par conséquent $P(j) = 0$ et alors $P(X)$ est divisible par $X - j$.

4) **Factorisons** $P(X)$ **dans** $\mathbb{C}[X]$.

On vérifie que $Q(j^2) = 0$. Donc, il existe un polynôme R tel que

$$Q(X) = (X - j)(X - j^2)R(X) = (X^2 + X + 1)R(X).$$

Par la méthode de la division euclidienne ou celle des coéfficients indéterminés, on obtient

$$R(X) = X^2 + X + 1 = (X - j)(X - j^2).$$

Par suite on a

$$P(X) = 7X(X + 1)(X - j)^2(X - j^2)^2.$$

Factorisons $P(X)$ dans $\mathbb{R}[X]$.

$$P(X) = 7X(X + 1)(X^2 + X + 1)^2.$$

En effet, le polynôme $R(X) = X^2 + X + 1$ est irréductible dans $\mathbb{R}$.

Exercice 19 :

1) **Détermination des parties entières de chacune des fractions rationnelles :**

$$\frac{X^2}{X+1} = X - 1 + \frac{1}{X+1}, \quad \frac{-3X^2 - X + 5}{X^2 + X - 2} = -3 + \frac{2X-1}{X^2+X-2} \text{ et } \frac{2X-1}{X^2+4} = 0 + \frac{2X-1}{X^2+4}.$$

2) **Décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ et dans $\mathbb{C}(X)$.**

- $f(X) = \dfrac{-3X^2 - X + 5}{X^2 + X - 2}$.

$$f(X) = -3 + \frac{2X-1}{X^2+X-2} = -3 + \frac{2X-1}{(X+2)(X-1)} = -3 + \frac{a}{X+2} + \frac{b}{X-1}$$

$$(X+2)f(X) = -3(X+2) + \frac{2X-1}{X-1} = -3(X+2) + a + \frac{b(X+2)}{X-1}.$$

En prenant la limite lorsque X tend vers -2, on obtient $a = \dfrac{5}{3}$.

$$(X-1)f(X) = -3(X-1) + \frac{2X-1}{X+2} = -3(X-1) + b + \frac{a(X-1)}{X+2}.$$

En prenant la limite lorsque X tend vers 1, on obtient $b = \dfrac{1}{3}$.
Par suite, on a :

$$f(X) = -3 + \frac{5}{3}.\frac{1}{X+2} + \frac{1}{3}.\frac{1}{X-1}.$$

- $g(X) = \dfrac{2X-1}{X^2+4}$.

$$g(X) = \frac{2X-1}{(X-2i)(X+2i)} = \frac{a}{X-2i} + \frac{b}{X+2i}$$

$$(X-2i)g(X) = \frac{2X-1}{X+2i} = a + \frac{b(X-2i)}{X+2i}.$$

En prenant $X = 2i$, on obtient $a = 1 + \dfrac{1}{4}i$.

$$(X+2i)g(X) = \frac{2X-1}{X-2i} = b + \frac{a(X+2i)}{X-2i}.$$

En prenant $X = -2i$, on obtient $b = 1 - \dfrac{1}{4}i$. Donc

$$g(X) = \frac{1 + \frac{1}{4}i}{X-2i} + \frac{1 - \frac{1}{4}i}{X+2i} = \frac{1}{4}.\frac{4+i}{X-2i} + \frac{1}{4}.\frac{4-i}{X+2i}.$$

- $h(X) = \dfrac{X+2}{X^3+X^2-5X+3}$.

$$\begin{aligned} h(X) &= \frac{X+2}{(X-1)^2(X+3)} = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{(X-1)^2} + \frac{c}{X+3} \\ (X-1)^2 h(X) &= \frac{X+2}{X+3} = a(X-1) + b + \frac{c(X-1)^2}{X+3}. \end{aligned}$$

En prenant la limite lorsque X tend vers 1, on obtient $b = \dfrac{3}{4}$.

$$(X+3)h(X) = \frac{X+2}{(X-1)^2} = \frac{a(X+3)}{X-1} + \frac{b(X+3)}{(X-1)^2} + c.$$

En prenant la limite lorsque X tend vers -3, on obtient $c = -\dfrac{1}{16}$.

$$(X-1)h(X) = \frac{X+2}{(X-1)(X+3)} = a + \frac{b}{X-1} + \frac{c(X-1)}{X+3}.$$

En prenant la limite lorsque X tend vers $+\infty$, on obtient

$$a + c = 0 \implies a = -c = \frac{1}{16}.$$

Par conséquent, on a :

$$h(X) = \frac{1}{16}.\frac{1}{X-1} + \frac{3}{4}.\frac{1}{(X-1)^2} - \frac{1}{16}.\frac{1}{X+3}$$