

Б.Баяржаргал, Э.Азжаргал, Д.Анхтуяа, М.Бат-Эрдэнэ,  
Д.Даваасүрэн, А.Наранхүү, П.Ренчинбал,  
Д.Түмэнбаяр, Б.Энхболд

# МАТЕМАТИК

## XII

Ерөнхий боловсролын 12 жилийн сургуулийн  
12 дугаар ангийн сурах бичиг

Боловсрол, Соёл, Шинжлэх Ухаан, Спортын  
Яамны зөвшөөрлөөр хэвлэв.

Хоёр дахь хэвлэл

СУРГУУЛИЙН НОМЫН САНД ОЛГОВ.  
БОРЛУУЛАХЫГ ХОРИГЛОНО.

Улаанбаатар хот  
2019 он

ННА 74.2  
ДАА 373  
М-294

Математик XII: Ерөнхий боловсролын 12 жилийн сургуулийн 12 дугаар ангийн сурах бичиг. /Баяржаргал.Б, ба бус; Ред. Пүрэвдорж.Д, Техн.ред. Дэнсмаа.Ж.-УБ.2018. -240x

Азийн Хөгжлийн Банкны “Эдийн засгийн хүндрэлийн үед боловсролын чанар, хүртээмжийг сайжруулах төсөл”-ийн хүрээнд хэвлүүлэв.

Энэхүү сурах бичиг нь “Монгол Улсын Зохиогчийн эрх болон түүнд хамаарах эрхийн тухай хуулиар хамгаалагдсан бөгөөд Боловсрол, Соёл, Шинжлэх Ухаан, Спортын Яамнаас бичгээр авсан зөвшөөрлөөс бусад тохиолдолд цахим болон хэвлэмэл хэлбэрээр, бүтнээр эсхүл хэсэгчлэн хувилах, хэвлэх аливаа хэлбэрээр мэдээллийн санд оруулахыг хориглоно.

Сурах бичгийн талаарх аливаа санал хүсэлтийг [textbook@mecs.gov.mn](mailto:textbook@mecs.gov.mn) хаягаар ирүүлнэ үү.

© Боловсрол, Соёл, Шинжлэх Ухаан, Спортын Яам

ISBN -978-99978-61-87-0

**I БҮЛЭГ. ТЭГШИТГЭЛ, ТЭНЦЭТГЭЛ БИШ**

1.1. Тооны модул.....	5
1.2. Модул агуулсан тэгшитгэл .....	6
1.3. Модул агуулсан тэнцэтгэл биш.....	9
Бүлгийн нэмэлт даалгавар.....	14

**II БҮЛЭГ. ОЛОН ГИШҮҮНТ**

2.1. Нэг ба олон гишуунт.....	17
2.2. Олон гишуунтийн хуваах үйлдэл .....	23
2.3. Безугийн теорем .....	25
2.4. Рационал илэрхийллийг олон гишуунт болон алгебрын хялбар бутархайн нийлбэр болгон задлах .....	30
Бүлгийн нэмэлт даалгавар.....	40

**III БҮЛЭГ. ФУНКЦ БА ГРАФИК**

3.1. Тооны логарифм .....	43
3.2. Логарифмын чанар.....	46
3.3. Хялбар илтгэгч тэгшитгэл, тэнцэтгэл биш.....	59
3.4. Логарифм функц.....	66
3.5. $y = e^x$ ба $y = \ln x$ функц.....	74
3.6. Рационал функц.....	77
3.7. Тоон аргументтай тригонометр функц.....	86
Бүлгийн нэмэлт даалгавар.....	92

**IV БҮЛЭГ. ФУНКЦИЙН УЛАМЖЛАЛ**

4.1. $y = e^x$ функцийн уламжлал .....	95
4.2. $y = \ln x$ функцийн уламжлал .....	98
4.3. $y = \sin x$ ба $y = \cos x$ функцийн уламжлал .....	101
4.4. Үржвэр функцийн уламжлал .....	107
4.5. Ногдвор функцийн уламжлал .....	111
4.6. $y = \operatorname{tg} x$ функцийн уламжлал .....	115
4.7. Давхар функцицийн уламжлал.....	118
Бүлгийн нэмэлт даалгавар.....	121

## **V БҮЛЭГ. ИНТЕГРАЛ**

5.1. Илтгэгч, тригонометр, рационал функцийн интеграл.....	125
5.2. Рационал функцийн интеграл.....	135
5.3. $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx$ хэлбэрийн интеграл бодох .....	139
5.4. $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln f(x)  + C$ томьёо ашиглан тодорхой интеграл бодох .....	144
5.5. Орлуулах аргаар тодорхой болон тодорхой бус интегралыг хялбар интегралд шилжүүлэн бодох .....	148
Бүлгийн нэмэлт даалгавар.....	157

## **VI БҮЛЭГ. МАГАДЛАЛ БА СТАТИСТИК**

6.1. Дискрет санамсаргүй хувьсагч .....	161
6.2. Математик дундаж.....	167
6.3. Дисперс .....	175
Бүлгийн нэмэлт даалгавар.....	179

## **VII БҮЛЭГ. КОМПЛЕКС ТОО**

7.1. Комплекс тоо, түүний бодит ба хуурмаг хэсэг .....	183
7.2. Комплекс тооны нэмэх үйлдэл .....	185
7.3. Комплекс тооны үржүүлэх үйлдэл .....	188
7.4. Хоёр комплекс тооны тэнцүүгийн тодорхойлолтыг хэрэглэх .....	190
7.5. Комплекс тооны хуваах үйлдэл .....	192
7.6. Комплекс тооны модул ба хосмог тоо .....	194
7.7. Бодит коэффициенттэй квадрат тэгшитгэлийн комплекс тоон язгуур .....	199
7.8. Комплекс тооны геометр дүрслэл .....	201
Бүлгийн нэмэлт даалгавар.....	207

**Энэ бүлэг сэдвийг судалснаар дараах мэдлэг, чадварыг эзэмшинэ.**

- *Бодит тооны модулын ухаадаahuунтай танилцааж, тооны модулыг олох.*
- *Модул агуулсан  $|ax + b| = c$ ,  $|ax + b| = cx + d$ ,  $|ax + b| = |cx + d|$  хэлбэрийн тэгшийтгэл бодох.*
- *Модул агуулсан  $|ax + b| > c$ ,  $|ax + b| > cx + d$ ,  $|ax + b| > |cx + d|$ , ( $\geq, <, \leq$ ) хэлбэрийн тэнцэтгэл биши бодох.*

## 1.1. ТООНЫ МОДУЛ

**Тодорхойлолт.**  $x$  бодит тоо, хэрэв  $x \geq 0$  бол  $x$  тоог, хэрэв  $x < 0$  бол  $-x$  тоог түүний модул буюу абсолют хэмжигдэхүүн гэдэг.  $x$  бодит тооны модулыг  $|x|$  гэж тэмдэглэдэг. Тодорхойлолт ёсоор аливаа бодит  $x$  тооны хувьд  $|x| \geq 0$  байна.

**Жишээ 1.** Тооны модулыг ол.

а)  $|5| = 5$ ,  $|-3.4| = -(-3.4) = 3.4$

б)  $\left| -\frac{3}{10} \right| = -\left( -\frac{3}{10} \right) = \frac{3}{10}$

в)  $|2.23| = 2.23$

г)  $|\sqrt{24} - 5| = 5 - \sqrt{24}$  ( $5 = \sqrt{25} > \sqrt{24}$ )

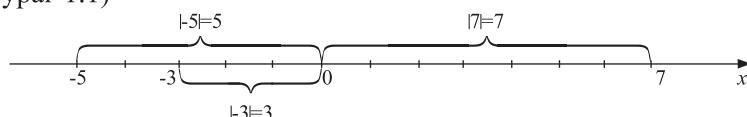
д)  $\left| \cos \frac{3\pi}{4} \right| = -\cos \frac{3\pi}{4}$  ( $\frac{3\pi}{4}$  нь II мөчийн өнцөг тул  $\cos \frac{3\pi}{4}$  тоо нь сөрөг утгатай)

е)  $|0| = 0$  байна.

### Модулын геометр утга

Тоон шулуун дээрх  $A(x)$  цэгээс тооллын эх  $O(0)$  цэг хүртэлх зайн  $x$  тооны модул гээд  $|x|$  гэж тэмдэглэдэг.

Жишээлбэл:  $-5$ ,  $-3$ ,  $7$  тооны модулын геометр утгыг тоон шулуун дээр дурслэн үзүүлье. (Зураг 1.1)



Зураг 1.1

## ДАСГАЛ

1. Тооны модулыг ол.

- |                          |                       |                                    |                        |                          |
|--------------------------|-----------------------|------------------------------------|------------------------|--------------------------|
| a) $  -15  $             | b) $  4.45  $         | v) $  -3\frac{1}{4}  $             | g) $  \sqrt{5} - 3  $  | d) $  \cos(-45^\circ)  $ |
| e) $  \sin 190^\circ  $  | ë) $  \sqrt{3} - 2  $ | ж) $  x^2 + 1  $                   | з) $  x^2 + 2x + 2  $  | и) $  \log_3 2  $        |
| й) $  \sqrt[3]{7} - 2  $ | к) $  -12^{-13}  $    | л) $  \sqrt[4]{3} - \sqrt[3]{4}  $ | м) $  5^{10} - 10^5  $ | н) $  \cos 2 - \sin 2  $ |

## 1.2. МОДУЛ АГУУЛСАН ТЭГШИТГЭЛ

$$|ax + b| = c \text{ хэлбэрийн тэгшитгэл}$$

Жишээ 1.  $|x + 5| = 3$  тэгшитгэл бод.

**Бодолт. I арга**

Хэрэв  $x \geq -5$  бол  $|x + 5| = x + 5$  байна.

Иймд өгсөн тэгшитгэл  $x \geq -5$  үед  $x + 5 = 3$  болох ба эндээс  $x = -2$  гэж гарна.

Энэ нь  $x \geq -5$  байх нөхцөлийг хангаж буй тул тэгшитгэлийн шийд болно.

Хэрэв  $x < -5$  бол  $|x + 5| = -(x + 5)$  байна.

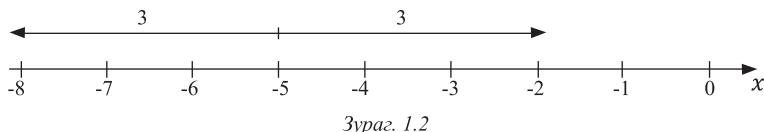
Иймд өгсөн тэгшитгэл  $x < -5$  үед  $-(x + 5) = 3$  болох ба эндээс  $x = -8$  гэж гарна.

Энэ нь  $x < -5$  нөхцөлийг хангаж буй тул тэгшитгэлийн шийд болно.

Тэгшитгэлийн шийдийн олонлог нь  $\{-8; -2\}$  байна.

**Бодолт. II арга** (Геометр арга)

Хэрэв тэгшитгэлээ  $|x + 5| = |x - (-5)| = 3$  гэж бичвэл тоон шулуун дээрх  $A(-5)$  цэгээс 3 нэгж зайд орших цэгийн координат тэгшитгэлийн шийд болно.



Иймд тэгшитгэлийн шийдийн олонлог  $\{-8; -2\}$  байна. (Зураг 1.2)

Жишээ 2.  $|2x - 5| = -7$  тэгшитгэл бод.

**Бодолт.** Тодорхойлолт ашиглан модулаас чөлөөлбөл

$$\begin{cases} 2x - 5 \geq 0 \\ 2x - 5 = -7 \end{cases} \text{ буюу } \begin{cases} 2x - 5 < 0 \\ -(2x - 5) = -7 \end{cases} \text{ байна. Эдгээрийг бодвол } \begin{cases} x \geq \frac{5}{2} \\ x = -1 \end{cases} \text{ буюу}$$

$\begin{cases} x < \frac{5}{2} \\ x = 6 \end{cases}$  болно. Эхний системээс  $x = -1$  тоо нь  $x \geq \frac{5}{2}$  нөхцөлийг хангахгүй тул

шийд болохгүй. Дараагийн системээс  $x = 6$  тоо нь  $x < \frac{5}{2}$  нөхцөлийг хангахгүй тул мөн шийд болохгүй. Иймд өгсөн тэгшитгэл шийдгүй.

Нэгтгээ талаас  $2x - 5$  тооны модул  $|2x - 5|$  нь ямагт сөрөг биш бодит тоо байх тул өгсөн тэгшитгэл шийдгүй гэдгийг шууд харж болно.

Өөрөөр хэлбэл  $|f(x)| = a$  хэлбэрийн тэгшитгэл  $a < 0$  үед шийдгүй байна.

### Дүгнэлт

$|f(x)| = a$  хэлбэрийн тэгшитгэл нь  $\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ f(x) = a \end{cases}$  буюу  $\begin{cases} f(x) < 0 \\ -f(x) = a \end{cases}$  гэсэн хоёр тэгшитгэлийн системийн нэгдэлтэй тэнцүү чанартай байна.

## ДАСГАЛ

2. Тэгшитгэл бод.

a)  $|x| = 8$

б)  $|6x - 12| + 7 = 19$

в)  $|x| - 5 = 8$

г)  $15 - |4x - 7| = 8$

д)  $5|x + 14| = 30$

е\*)  $|5 - |x|| = 4$

е\*)  $||2x - 3| - 4| = 6$

ж\*)  $||1 - 2x| - 5| = 7$

з)  $2|x - 1| + 3 = 9 - |x - 1|$

и)  $|3x - 1| = 2|3x - 1| - 2$

й)  $3|5x + 1| = 4|5x + 1| + 6$

к)  $-|4x + 3| = 2|4x + 3|$

### $|ax + b| = cx + d$ хэлбэрийн тэгшитгэл

Жишээ 1.  $|3x - 2| = 11 - x$  тэгшитгэл бод.

Бодолт.

Хэрэв  $x \geq \frac{2}{3}$  бол  $|3x - 2| = 3x - 2$  байна. Иймд өгсөн тэгшитгэл  $x \geq \frac{2}{3}$  үед

$3x - 2 = 11 - x$  болох ба эндээс  $x = \frac{13}{4}$  гэж гарна. Энэ нь  $x \geq \frac{2}{3}$  нөхцөлийг хангах тул шийд болно.

Хэрэв  $x < \frac{2}{3}$  бол  $|3x - 2| = -(3x - 2)$  байна. Иймд өгсөн тэгшитгэл  $x < \frac{2}{3}$  үед

$-(3x - 2) = 11 - x$  болох ба эндээс  $x = -\frac{9}{2}$  гарна. Энэ нь  $x < \frac{2}{3}$  нөхцөлийг хангах

тул шийд болно. Тэгшитгэлийн шийдийн олонлог  $\left\{-\frac{9}{2}; \frac{13}{4}\right\}$  байна.

Жишээ 2.  $|2 - 5x| = 6 - x$  тэгшитгэл бод.

Өгсөн тэгшитгэл  $\begin{cases} 2 - 5x \geq 0 \\ 2 - 5x = 6 - x \end{cases}$  буюу  $\begin{cases} 2 - 5x < 0 \\ -(2 - 5x) = 6 - x \end{cases}$  болно. Эдгээрийг бодвол

$\begin{cases} x \leq \frac{2}{5} \\ x = -1 \end{cases}$  буюу  $\begin{cases} x > \frac{2}{5} \\ x = \frac{4}{3} \end{cases}$  болж, тэгшитгэлийн шийдийн олонлог  $\left\{-1; \frac{4}{3}\right\}$  байна.

**Дүгнэлт**

$|f(x)| = g(x)$  хэлбэрийн тэгшитгэл нь  $\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases}$  буюу  $\begin{cases} f(x) < 0 \\ -f(x) = g(x) \end{cases}$  гэсэн тэгшитгэлийн системийн нэгдэлтэй тэнцүү чанартай байна.

**ДАСГАЛ****3. Тэгшитгэл бод.**

а)  $|7 + 5x| = 5x + 7$

б)  $|4x - 7| = 7 - 4x$

в)  $-2|x + 4| = 3 - 4x$

г)  $|2x - 3| = 4 - x$

д)  $|5x - 15| + |6x - 18| = 0$

е\*)  $\|4x + 6\| + 8 = |-10|$

ё)  $|x + 3| = 2x - 3$

ж)  $|5x + 4| = x - 1$

з)  $|-x - 2| = 3x - 5$

и)  $|10x - 20| + |14x - 56| = 0$

й)  $|1 - 5x| = 2 - x$

к)  $|-4x + 7| = -x$

л)  $x^2 - 6x + 8 + |x - 4| = 0$

м)  $3|x + 2| + x^2 + 6x + 2 = 0$

н)  $|6x + 5| = -x + 5$

**4. Тэгшитгэл бод.**

а\*)  $\|x + 3\| + x = 1$

б\*)  $\|x + 2\| + x = 1$

в\*)  $\|2x - 3\| + x = 3$

г\*)  $\|3 - 2x\| - x = 2$

д\*)  $\|5x + 3\| - 2x = 4$

е\*)  $\|7x - 6\| - 3x = 5$

**5. Тэгшитгэл бод.**

а)  $|x^2 - 8| = 17$

б)  $|x^2 - 12| = 4$

в)  $|x^2 - 2x - 1| - x + 1 = 0$

г)  $|x^2 - 2x - 4| = 3x - 2$

д)  $|x^2 - 3x| = 2x - 4$

е)  $|x^2 - 3x| + x = 2$

$|ax + b| = |cx + d|$  хэлбэрийн тэгшитгэл

**Жишээ 1.**  $|x - 12| = |3x + 1|$  тэгшитгэл бод.

**Бодолт.** Модулын тодорхойлолт ашиглан бодъё.

Хэрэв  $x \geq 12$  бол  $|x - 12| = x - 12$  байна.

Хэрэв  $x < 12$  бол  $|x - 12| = -(x - 12)$  байна.

Хэрэв  $x \geq -\frac{1}{3}$  бол  $|3x + 1| = 3x + 1$  байна.

Хэрэв  $x < -\frac{1}{3}$  бол  $|3x + 1| = -(3x + 1)$  байна.

Иймд тэгшитгэлээ дараах гурван тохиолдолд бодъё.

а) Хэрэв  $x < -\frac{1}{3}$  бол өгсөн тэгшитгэл  $-(x - 12) = -(3x + 1)$  болох ба эндээс  $x = -\frac{13}{2}$

гэж гарна. Энэ нь  $x < -\frac{1}{3}$  нөхцөлийг хангах тул шийд болно.

б) Хэрэв  $-\frac{1}{3} \leq x < 12$  бол өгсөн тэгшитгэл  $-(x - 12) = 3x + 1$  болох ба эндээс

$x = \frac{11}{4}$  гэж гарна. Энэ нь  $-\frac{1}{3} \leq x < 12$  нөхцөлийг хангах тул шийд болно.

в) Хэрэв  $x \geq 12$  бол өгсөн тэгшитгэл  $x - 12 = 3x + 1$  болох ба эндээс  $x = -\frac{13}{2}$  гэж гарна. Энэ нь  $x \geq 12$  нөхцөлийг хангахгүй тул шийд болохгүй.

Иймд өгсөн тэгшитгэлийн шийдийн олонлог  $\left\{-\frac{13}{2}; \frac{11}{4}\right\}$  байна.

### Дүгнэлт

$|f(x)| = |g(x)|$  хэлбэрийн тэгшитгэл нь  $f(x) = g(x)$  буюу  $f(x) = -g(x)$  гэсэн тэгшитгэлийн нэгдэлтэй тэнцүү чанартай байна.

**Жишээ 2.**  $|4x - 5| = |2 - x|$  тэгшитгэл бод.

$$\begin{cases} 4x - 5 = 2 - x \\ 4x - 5 = -(2 - x) \end{cases} \text{ эндээс } \begin{cases} x = \frac{7}{5} \\ x = 1 \end{cases} \text{ байна.}$$

### ДАСГАЛ

**6.** Тэгшитгэл бод.

- |   |                          |                           |
|---|--------------------------|---------------------------|
| a) $ 3x - 8  =  x + 1 $                       | b) $ 3x + 5  =  5 - x $  | c) $ x - 2  =  x - 4 $    |
| г) $2 2x - 5  = \left x - \frac{1}{2}\right $ | д) $ -x - 1  =  2x + 3 $ | е) $ 6x - 1  =  -5x + 6 $ |
| ё) $ 7x - 8  =  8x - 7 $                      | ж) $ 3x + 5  =  3 + 5x $ | з) $ -x  =  x - 1 $       |

**7.** Тэгшитгэл бод.

- |                                  |                                    |                                |
|----------------------------------|------------------------------------|--------------------------------|
| a) $ 3x^2 + 5x - 9  =  6x + 15 $ | b) $ x^2 - 13x + 35  =  35 - x^2 $ | c) $ x^2 + x - 3  =  5x - 4 $  |
| г) $2 x^2 + 2x - 5  =  x - 1 $   | д) $ x^2 + x - 1  =  2x - 1 $      | е) $ 2x^2 + 6x - 1  =  x + 6 $ |

## 1.3. МОДУЛ АГУУЛСАН ТЭНЦЭТГЭЛ БИШ

$|ax + b| > c, (<, \leq, \geq)$  хэлбэрийн тэнцэтгэл биши

**Жишээ 1.**  $|x| \leq 4$  тэнцэтгэл биши бод.

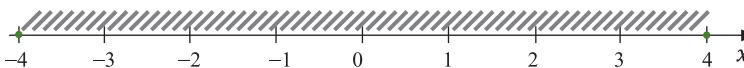
### Бодолт. I арга

Хэрэв  $x \geq 0$  бол өгсөн тэнцэтгэл биши  $x \leq 4$  болох ба эндээс  $x \in ]-\infty; 4]$  гэж гарна. Үүнийг  $x \geq 0$  буюу  $[0; +\infty[$  олонлогтой огтлолцуулбал  $[0; 4]$  нь өгсөн тэнцэтгэл бишийн шийдийн олонлог болно.

Хэрэв  $x < 0$  бол өгсөн тэнцэтгэл биши  $-x \leq 4$  буюу  $x \geq -4$  болох ба эндээс  $x \in [-4; +\infty[$  гэж гарна. Үүнийг  $x < 0$  буюу  $]-\infty; 0[$  олонлогтой огтлолцуулбал  $[-4; 0[$  нь өгсөн тэнцэтгэл бишийн шийдийн олонлог болно. Дээрх хоёр олонлогоо нэгтгэвэл өгсөн тэнцэтгэл бишийн шийдийн олонлог  $[-4; 4]$  байна.

### Бодолт. II арга (Геометр арга)

Хэрэв өгсөн тэнцэтгэл бишийг  $|x - 0| \leq 4$  гэж бичвэл тооллын эх  $O(0)$  цэгээс 4-өөс ихгүй зайд орших цэгийн координат өгсөн тэнцэтгэл бишийн шийд байна. Иймд  $[-4; 4]$  олонлог өгсөн тэнцэтгэл бишийн шийдийн олонлог болно.



Зураг. 1.3

**Жишээ 2.**  $|x - 5| > 8$  тэнцэтгэл биш болд.

**Бодолт.**

Хэрэв  $x \geq 5$  бол тэнцэтгэл биш  $x - 5 > 8$  болох ба эндээс  $x > 13$  буюу  $x \in ]13; +\infty[$  гэж гарна. Үүнийг  $x \geq 5$  буюу  $[5; +\infty[$  олонлогтой огтлолцуулбал  $]13; +\infty[$  нь тэнцэтгэл бишийн шийдийн олонлог болно.

Хэрэв  $x < 5$  бол өгсөн тэнцэтгэл биш  $-(x - 5) > 8$  болох ба эндээс  $x < -3$  буюу  $x \in ]-\infty; -3[$  гэж гарна. Үүнийг  $x < 5$  буюу  $]-\infty; 5[$  олонлогтой огтлолцуулбал  $]-\infty; -3[$  гэж гарах ба энэ нь өгсөн тэнцэтгэл бишийн шийдийн олонлог болно. Иймд дээрх хоёр шийдийг нэгтгэвэл өгсөн тэнцэтгэл бишийн шийдийн олонлог  $]-\infty; -3[ \cup ]13; +\infty[$  болно.

**Жишээ 3.**  $|x - 7| \leq 10$  тэнцэтгэл биш болд.

**Бодолт.**

Хэрэв  $x \geq 7$  бол өгсөн тэнцэтгэл биш  $x - 7 \leq 10$  болох ба эндээс  $x \leq 17$  буюу  $x \in ]-\infty; 17]$  гэж гарна. Үүнийг  $x \geq 7$  буюу  $[7; +\infty[$  олонлогтой огтлолцуулбал  $[7; 17]$  нь өгсөн тэнцэтгэл бишийн шийдийн олонлог болно.

Хэрэв  $x < 7$  бол өгсөн тэнцэтгэл биш  $-(x - 7) \leq 10$  болох ба эндээс  $x \geq -3$  буюу  $x \in [-3; +\infty[$  гэж гарна. Үүнийг  $x < 7$  буюу  $]-\infty; 7[$  олонлогтой огтлолцуулбал  $[-3; 7[$  нь өгсөн тэнцэтгэл бишийн шийдийн олонлог болно. Иймд дээрх хоёр шийдийг нэгтгэвэл өгсөн тэнцэтгэл бишийн шийдийн олонлог  $[-3; 17]$  болно.

### Дүгнэлт

$a \geq 0, |f(x)| > a, (<, \leq, \geq)$  хэлбэрийн тэнцэтгэл биш нь  $\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ f(x) > a \end{cases}$  буюу  $\begin{cases} f(x) < 0 \\ -f(x) > a \end{cases}$  гэсэн тэнцэтгэл бишийн системийн нэгдэлтэй тэнцүү чанартай байна.

## ДАСГАЛ

**8. Тэнцэтгэл биш болд.**

- |                        |                         |                         |
|------------------------|-------------------------|-------------------------|
| a) $ x  \geq 5$        | b) $2 y  < 8$           | v) $ 4 + 2x  < 5$       |
| g) $ 5 - 2x  \leq 7$   | d) $ x + 2  \geq 3$     | e) $ 5 - 3x  + 5 > 8$   |
| ö) $ 8 - 5x  + 9 < 13$ | j) $0 <  x - 1  \leq 4$ | z) $0 \leq  x + 5  < 5$ |

**9. Тэнцэтгэл биш болд.**

- |   |                              |   |
|---|------------------------------|---|
| a) $-1 <  2x  < 6$  | b) $2 \leq  3x + 5  \leq 14$ | v) $\begin{cases}  0.5 - x  < 3 \\  x - 3  < 1 \end{cases}$ |
| g) $\begin{cases}  2x - 5  < 3 \\  5 - 0.5x  < 1 \end{cases}$ | d*) $\ 2x - 3  - 4  < 6$     | e*) $\ 1 - 2x  - 3  > 5$                                    |

$|ax + b| > cx + d, (<, \leq, \geq)$  хэлбэрийн тэнцэтгэл бии

**Жишээ 1.**  $|x + 2| > 2x$  тэнцэтгэл биш болд.

**Бодолт.**

Хэрэв  $x \geq -2$  бол тэнцэтгэл биш  $x + 2 > 2x$  болох ба эндээс  $x < 2$  буюу  $x \in ]-\infty; 2[$

гэж гарна. Хэрэв  $x \geq -2$  олонлогийг буюу  $x < -\frac{2}{3}$  олонлогтой огтлолцуулбал  $x < -\frac{2}{3}$  нь өгсөн тэнцэтгэл бишийн шийдийн олонлог болно.

Хэрэв  $x < -2$  бол тэнцэтгэл биш  $-(x+2) > 2x$  болох ба эндээс  $x < -\frac{2}{3}$  буюу

$x \in ]-\infty; -\frac{2}{3}[$  гэж гарна. Хэрэв  $x < -\frac{2}{3}$  олонлогийг  $x < -2$  буюу  $]-\infty; -2[$

олонлогтой огтлолцуулбал  $]-\infty; -2[$  нь өгсөн тэнцэтгэл бишийн шийдийн олонлог болно. Иймд дээрх хоёр шийдийг нэгтгэвэл өгсөн тэнцэтгэл бишийн шийдийн олонлог  $]-\infty; 2[$  болно.

**Жишээ 2.**  $|2x+4| < 3+x$  тэнцэтгэл биш бод.

**Бодолт.**

Хэрэв  $x \geq -2$  бол өгсөн тэнцэтгэл биш  $2x+4 < 3+x$  болох ба эндээс  $x < -1$  буюу  $x \in ]-\infty; -1[$  гэж гарна. Хэрэв  $x < -1$  олонлогийг  $x \geq -2$  буюу  $]-\infty; +\infty[$  олонлогтой огтлолцуулбал  $]-\infty; -1[$  нь өгсөн тэнцэтгэл бишийн шийдийн олонлог болно.

Хэрэв  $x < -2$  бол өгсөн тэнцэтгэл биш  $-(2x+4) < 3+x$  болох ба эндээс  $x > -\frac{7}{3}$

бууюу  $x \in ]-\frac{7}{3}; +\infty[$  гэж гарна. Хэрэв  $x < -2$  буюу  $]-\infty; -2[$

олонлогтой огтлолцуулбал  $]-\frac{7}{3}; -2[$  нь өгсөн тэнцэтгэл бишийн шийдийн олонлог болно. Иймд дээрх хоёр шийдийг нэгтгэвэл  $]-\frac{7}{3}; -1[$  олонлог өгсөн тэнцэтгэл бишийн шийдийн олонлог болно.

### Дүгнэлт

$|f(x)| > g(x), (<, \leq, \geq)$  хэлбэрийн тэнцэтгэл биш нь

$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ f(x) > g(x) \end{cases}$  буюу  $\begin{cases} f(x) < 0 \\ -f(x) > g(x) \end{cases}$  гэсэн тэнцэтгэл бишийн системийн нэгдэлтэй

тэнцүү чанартай байна.

### ДАСГАЛ

**10.** Тэнцэтгэл биш бод.

a)  $|x-3| > 2x$

б)  $|3x+5| < 4x$

в)  $|x+2| \geq x+3$

г)  $|2-x| \leq 4x-3$

д)  $|7+5x| > 5x+7$

е)  $|4-5x| < 4-5x$

ё)  $|x+1| < 3x-2|x+1|$

ж)  $|x+2|-5x \geq 4|x+2|$

з)  $|5x-6| + 2x \geq 7$

**$|ax+b| > |cx+d|, (<, \leq, \geq)$  хэлбэрийн тэнцэтгэл биш**

**Жишээ 1.**  $|6x-5| > |7x-8|$  тэнцэтгэл биш бод.

**Бодолт.**  $|6x-5| > |7x-8|$  тэнцэтгэл биш нь  $(6x-5)^2 > (7x-8)^2$  гэсэн тэнцэтгэл

биштэй тэнцүү чанартай байна. Хэрэв  $(7x - 8)^2$ -ийг тэнцэтгэл бишийн тэмдгийн зүүн талд гаргаж үржигдэхүүн болгон задалбал

$$(6x - 5 - 7x + 8)(6x - 5 + 7x - 8) > 0 \text{ буюу } (-x + 3)(13x - 13) > 0$$

гэдгээс шийдийн олонлог нь  $]1; 3[$  гэж гарна.

### ДҮГНЭЛТ

$|f(x)| > |g(x)|, (<, \leq, \geq)$  хэлбэрийн тэнцэтгэл биш нь  $f^2(x) > g^2(x)$  буюу  $(f(x) - g(x))(f(x) + g(x)) > 0$  гэсэн тэнцэтгэл биштэй тэнцүү чанартай байна.

### ДАСГАЛ

11. Тэнцэтгэл биш болд.

- |                           |                            |                            |
|---------------------------|----------------------------|----------------------------|
| a) $ x  \geq  2x - 1 $    | б) $ x + 1  <  x - 1 $     | в) $ 3x  \leq  x + 2 $     |
| г) $ 3 + x  \leq  x + 2 $ | д) $ 2x + 1  \leq  x - 3 $ | е) $ 3 - x  \leq  5x + 3 $ |
| ё) $ x - 2  \leq  x + 4 $ | ж) $2 x + x  \leq  x + 2 $ | з) $ 3 + x  \leq 2 2 - x $ |

Хэрэв  $|a| = |b|$  бол  $a^2 = b^2$  чанар ашиглан бодох тэгшигтгэл, тэнцэтгэл биш

**Теорем.** Аливаа  $a, b$  ( $a, b \in R$ ) тооны хувьд хэрэв  $|a| = |b|$  бол  $a^2 = b^2$  тэнцэтгэл биелнэ.

### Баталгаа.

$|a| = |b|$  гэдгээс  $|a|^2 = |b|^2$  байна. Хэрэв  $a \geq 0$  бол  $|a| = a$  болох ба  $|a|^2 = a^2$  байна. Хэрэв  $a < 0$  бол  $|a| = -a$  болох ба  $|a|^2 = (-a)^2 = a^2$  байна. Иймд теорем үнэн байна.

**Жишээ 1.**  $|x - 4| = |2 - 3x|$  тэгшигтгэл бод.

### Бодолт.

$(x - 4)^2 = (2 - 3x)^2$  тул  $x^2 - 8x + 16 = 4 - 12x + 9x^2$  буюу  $8x^2 - 4x - 12 = 0$  болно.

Энэ тэгшигтгэлийг бодвол шийдийн олонлог  $\left\{-1; \frac{3}{2}\right\}$  байна.

### ДАСГАЛ

12. Тэгшигтгэл бод.

- |                          |                            |                              |
|--------------------------|----------------------------|------------------------------|
| а) $ x - 5  = 2 x + 3 $  | б) $ -x + 6  = 3 -x $      | в) $ 2x - 5  =  x $          |
| г) $2 7 - x  =  x - 2 $  | д) $ -x - 4  =  x + 3 $    | е) $ 6x  =  5x + 8 $         |
| ё) $ x  >  2x - 1 $      | ж) $3 x  \geq  x + 1 $     | з) $ 2x + 3  <  x - 3 $      |
| и) $ 9x - 4  >  4x - 9 $ | й) $ x + 5  \geq  -x - 5 $ | к) $ 5x + 4  \leq 3 2 - 3x $ |

$|x|^2 = x^2$  чанар ашиглан бодох тэгшигтгэл, тэнцэтгэл биш

**Теорем.** Аливаа  $x$  ( $x \in R$ ) тоо бүрийн хувьд  $|x|^2 = x^2$  тэнцэтгэл биелнэ.

### Баталгаа.

Хэрэв  $x \geq 0$  бол  $|x| = x$  тул тэнцэтгэл биелэх нь илэрхий.

Хэрэв  $x < 0$  бол  $|x| = -x$  ба  $(-x)^2 = x^2$  тул  $|x|^2 = x^2$  теорем үнэн байна.

**Жишээ 1.**  $x^2 - 5|x| + 6 \geq 0$  тэнцэтгэл биш бод.

**Бодолт.**  $|x|^2 = x^2$  тул бид тэнцэтгэл бишийг  $|x|^2 - 5|x| + 6 \geq 0$  гэж бичиж болно. Хэрэв  $|x| = y$  гэж орлуулбал өгсөн тэнцэтгэл биш  $y^2 - 5y + 6 \geq 0$  болно.

Үргиждэхүүн болгон задалж  $(y-2)(y-3) \geq 0$  интервалын арга хэрэглэвэл  $]-\infty; 2] \cup [3; +\infty[$  олонлог шийд болно. Хэрэв орлуулгаа буцаавал өгсөн тэнцэтгэл биш  $|x| \leq 2$ ,  $|x| \geq 3$  гэсэн хоёр тэнцэтгэл бишийн нэгдэл болно.

$|x| \leq 2$  тэнцэтгэл бишийн шийдийн олонлог  $[-2; 2]$  ба  $|x| \geq 3$  тэнцэтгэл бишийн шийдийн олонлог  $]-\infty; -3] \cup [3; +\infty[$  гэж гарах ба эдгээрийг нэгтгэвэл өгсөн тэнцэтгэл бишийн шийдийн олонлог  $]-\infty; -3] \cup [-2; 2] \cup [3; +\infty[$  болно.

### ДАСГАЛ

13. Тэгшитгэл, тэнцэтгэл биш бод.

- |                                  |                                    |                         |
|----------------------------------|------------------------------------|-------------------------|
| a) $x^2 - 6 x  + 8 = 0$          | b) $2x^2 + 3 x  - 14 = 0$          | v) $x^2 +  x  - 6 = 0$  |
| г) $x^2 -  x  - 2 \geq 0$        | д) $5 x  - x^2 - 5 > 0$            | e) $3x^2 -  x  \leq 70$ |
| ё) $x^2 + 2x - 3 x+1  + 3 = 0$   | ж) $x^2 + x -  2x+1  + 1 = 0$      |                         |
| з) $(x+3)^2 + 5 x+3  - 6 \leq 0$ | и) $(2x+1)^2 -  2x+1  - 12 \geq 0$ |                         |

$|x| = \sqrt{x^2}$  чанар ашиглан бодох тэгшитгэл, тэнцэтгэл бииш

**Теорем.** Аливаа  $x \in R$  тооны хувьд  $|x| = \sqrt{x^2}$  тэнцэтгэл биелнэ.

### Баталгаа.

Хэрэв  $x \geq 0$  бол  $|x| = x$  ба  $\sqrt{x^2} = x$  тул үнэн байна.

Хэрэв  $x < 0$  бол  $|x| = -x$  ба  $\sqrt{x^2} = -x$  тул үнэн байна.

Иймд аливаа  $x$ , ( $x \in R$ ) тоо бүрийн хувьд  $|x| = \sqrt{x^2}$  тэнцэтгэл үнэн байна.

**Жишиг 1.**  $\sqrt{x^2 - 2x + 1} < 2$  тэнцэтгэл биш бод.

**Бодолт.**  $\sqrt{x^2 - 2x + 1} = \sqrt{(x-1)^2} = |x-1|$  тул өгсөн тэнцэтгэл биш  $|x-1| < 2$  болно. Модулын тодорхойлолт ёсоор  $x \geq 1$  бол  $x-1 < 2$  тэнцэтгэл бишийн шийдийн олонлог  $]-\infty; 3[$  байна. Хэрэв  $]-\infty; 3[$  олонлогийг  $x \geq 1$  буюу  $[1; +\infty[$  олонлогтой огтлолцуулбал  $[1; 3[$  болох ба энэ нь өгсөн тэнцэтгэл бишийн шийдийн олонлог болно. Хэрэв  $x < 1$  бол  $-(x-1) < 2$  тэнцэтгэл бишийн шийд  $]-1; +\infty[$  байна. Хэрэв үүнийг  $x < 1$  буюу  $]-\infty; 1[$  олонлогтой огтлолцуулбал  $]-1; 1[$  болно. Энэ нь өгсөн тэнцэтгэл бишийн шийдийн олонлог болно. Иймд дээрх хоёр шийдийг нэгтгэвэл өгсөн тэнцэтгэл бишийн шийдийн олонлог  $]-1; 3[$  болно.

### ДАСГАЛ

14. Тэгшитгэл бод.

- |  |   |                                   |
|--|---|-----------------------------------|
| a) $\sqrt{y^2} = 9$                    | б) $\sqrt{(y-1)^2} = 10$                        | в) $\sqrt{(2x-1)^2} = 13$         |
| г) $\sqrt{x^2 + 2x + 1} = 2x$          | д) $\sqrt{4x^2 - 12x + 9} = 1+x$                | е) $\sqrt{4 + 4x + x^2} = 2x - 1$ |
| ё) $\sqrt{y^2} = \sqrt{4y^2 - 4y + 1}$ | ж) $\sqrt{x^2 + 2x + 1} = \sqrt{4x^2 - 4x + 1}$ | з) $\sqrt{(z+2)^2} = 2\sqrt{z^2}$ |

**15.** Тэнцэтгэл биш бод.

$$\begin{array}{lll} \text{а)} \sqrt{4x^2 - 4x + 1} > 2 & \text{б)} \sqrt{4x^2 - 12x + 9} < 1 & \text{в)} \sqrt{9x^2 - 6x + 1} \geq |x + 1| \\ \text{г)} \sqrt{4x^2 - 20x + 25} \geq |3x - 1| & \text{д)} \sqrt{x^2} > 3\sqrt{x^2 - 2x + 1} & \text{е)} \sqrt{x^2} \leq \sqrt{25x^2 - 40x + 16} \end{array}$$

## БҮЛГИЙН НЭМЭЛТ ДААЛГАВАР

**1.** Тэгшитгэл бод.

$$\begin{array}{lll} \text{а)} |x| = 5 & \text{б)} |3x| = 12 & \text{в)} 5|x| = 10 - |x| \\ \text{г)} |x + 5| = 9 & \text{д)} |3x - 4| = 5 & \text{е)} |2x - 3| = 11 \\ \text{ж)} |x + 3| = 10 - |x + 3| & \text{ж)} 2|x - 1| = 15 - 3|x - 1| & \text{з)} |2x + 1| = 20 - 3|2x + 1| \end{array}$$

**2.** Тэгшитгэл бод.

$$\begin{array}{lll} \text{а)} |5 - 4x| = 1 & \text{б)} |2 - 5x| = 16 & \text{в)} |5 - 3x| = 4 & \text{г)} |4x - 1| = 7 \\ \text{д)} |3x - 3| = 6 & \text{е)} |5x + 4| = 10 & \text{ж)} |10x - 2| = 4 & \text{ж)} |5 - 3x| = 2x + 1 \\ \text{з)} |2x - 3| = 3 - 2x & \text{и)} 3x = 2 - |3 - x| & \text{й)} |2x + 4| = 3x + 2 & \text{к)} |x| = x \\ \text{л)} |2 - x| = 5 - 4x & \text{м*)} |x| + 2 = 2 & \text{н*)} |x| - 2 = 2 & \text{o*)} |x - 1| + 3 = 3 \end{array}$$

**3.** Тэгшитгэл бод.

$$\begin{array}{ll} \text{а)} 2 - |x| = 4(|x| + 3) - |x| & \text{б)} 2(4 - |x + 3|) = -3(|x + 3| - 2) + 3 \\ \text{в*)} |||x + 3| - 1| + 2| - 3 = 0 & \text{р*)} |||x + 4| - 1| + 3| - 4 = 0 \end{array}$$

**4.** Тэгшитгэл бод.

$$\begin{array}{lll} \text{а)} |x - 1| = 2x - 1 & \text{б)} |x + 2| = 2(3 - x) & \text{в)} |3x - 2| + x = 11 \\ \text{г)} |14 - 2x| = 3 - 5x & \text{д)} |2x - 3| = x - 2 & \text{е)} |x + 3| - x = 3 \\ \text{ж)} |x - 2| + x = 2 & \text{ж)} |x| - 2 = 2x + 1 & \text{з)} |x - 1| = \frac{1}{2}x \\ \text{и)} |x + 1| = -\frac{1}{3}x & \text{й*)} |x| + 4 = 5 & \text{к*)} |x| - 1 = 3 \end{array}$$

**5.** Тэгшитгэл бод.

$$\begin{array}{lll} \text{а)} |x| = |2x - 5| & \text{б)} |2x| = |2 + x| & \text{в)} |2x - 1| = |x + 3| \\ \text{г)} |x - 4| - |x + 4| = 8 & \text{д)} |2x - 1| + 6x = |2x - 4| + 15 & \text{е)} |x + 1| = |2(x - 1)| \\ \text{ж)} |4(x - 6)| = |x + 9| & \text{ж)} |x + 5| = |x + 10| & \text{з)} |y - 2| = |1 + 3y| \end{array}$$

**6.** Тэгшитгэл бод.

$$\begin{array}{lll} \text{а)} |3 - 4x| = |5 - 6x| & \text{б)} |2x| = |3x - 1| & \text{в)} |x + 4| = |x + 6| \\ \text{г)} |x - 12| = |3x + 1| & \text{д)} |5x - 3| = |3x - 5| & \text{е)} |7x - 4| = |2x + 1| \\ \text{ж)} |2x - 1| = |3x + 2| & \text{ж)} |3 - 4x| = |2x + 1| & \text{з)} |x| = |5x - 2| \end{array}$$

**7.** Тэгшитгэл бод.

$$\text{а)} |x^2 - 5x + 4| = 0 \quad \text{б)} |x^2 + 4x - 3| = 2 \quad \text{в)} |x^2 - 4x| = 5$$

г)  $|x^2 - 6x + 4| = 4$

д)  $3x + |x^2 + x| = 5$

е)  $|x + 2| - |x^2 - 4| = 0$

8. Тэгшитгэл бод.

а)  $|2x - 12| = |2x^2 - 10x + 18|$  б)  $|x - 1| = |x^2 - 3x + 2|$

в)  $|x - 6| = |x^2 - 5x + 9|$  г)  $|6x + 15| = |3x^2 + 5x - 9|$  д)  $|x^2 - 6x + 7| = |3x - 11|$

9. Тэгшитгэл бод.

а)  $\sqrt{x^2} = 5$

б)  $\sqrt{x^2} = |-8|$

в)  $\sqrt{1 - 2x + x^2} = 5$

г)  $\sqrt{4 - 4x + x^2} = 3$

д)  $\sqrt{(x+1)^2} = 2x - 1$

е)  $\sqrt{(1-2x)^2} = 1 - 2x$

ж)  $\sqrt{(x-3)^2} = x - 3$

ж)  $\sqrt{4x^2} = x - 3$

з)  $\sqrt{9x^2} = 2x - 7$

10. Тэгшитгэл бод.

а)  $\sqrt{x^2 + 6x + 9} + \sqrt{x^2 - 4x + 4} = 5$

б)  $1 + \sqrt{x^2 + 2x + 1} = 3x - 2$

в)  $3\sqrt{x^2 + 6x + 9} + 2\sqrt{x^2} = 7$

г)  $\sqrt{x^2} - \sqrt{x^2 - 4x + 4} = 2$

11. Тэгшитгэл бод.

а)  $|35 - x^2| = |x^2 - 13x + 35|$  б)  $|x^2 + 6x + 3| = |x^2 + 4x + 5|$  в)  $|2x - 3| = 3 - 2x$

г)  $x^2 - 5|x| - 24 = 0$  д)  $(x - 7)^2 - |x - 7| = 30$  е)  $(x+1)^2 + |x+1| - 2 = 0$

ж)  $x^2 - 4|x - 3| - 7x + 11 = 0$  ж)  $|x^2 - 5x + 6| = -x^2 + 5x - 6$  з\*)  $|3 - x| - 2x + 1| = 4x - 10$

и)  $|2x + 1| = 2x^2 + 1$  й)  $x^2 - |3x - 3| = 2x + 3$  к)  $x|2x + 5| + 2x|x - 3| = 22$

12. Тэгшитгэл бод.

а)  $x^2 + 2|x| - 35 = 0$

б)  $x^2 + |x| - 6 = 0$

в)  $x^2 - 7|x| - 18 = 0$

г)  $x^2 - 7|x| + 12 = 0$

д)  $x^2 - 3|x| = 28$

е)  $x^2 + 3|x| = 130$

ж)  $5x^2 - 8|x| + 3 = 0$

ж)  $3x^2 - 2|x| - 8 = 0$

з)  $4x^2 + |x| - 3 = 0$

13. Тэнцэтгэл биш бод.

а)  $|x| \geq 6$

б)  $|x| > 10$

в)  $|x| \leq 8$

г)  $|x| < 9$

д)  $|x - 1| < 3$

е)  $|x + 5| \leq 2$

ж)  $|3x - 1| > 14$

ж)  $|-x + 1| \geq 8$

з)  $2|x - 1| < 3 - |x - 1|$

и)  $6|2x + 1| > 5 + |2x + 1|$

й)  $2|x - 1| \leq 15 - 3|x - 1|$

14. Тэнцэтгэл биш бод.

а)  $|x + 3| > 1$

б)  $|x - 2| < 2$

в)  $|2x - 5| - |x - 4| < 0$

г)  $|x - 2| - |3x - 2| < 0$

д)  $|x| > 5 + 2x$

е)  $|x| \leq 3 - 2x$

ж)  $3 \leq |2x - 1| < 5$

ж)  $3 \leq |4 - 3x| < 6$

15. Тэнцэтгэл биш бод.

а)  $\begin{cases} |x| \geq 1 \\ |x - 1| < 3 \end{cases}$

б)  $\begin{cases} |x^2 - 4x| < 5 \\ |x + 1| < 3 \end{cases}$

в)  $\begin{cases} |x^2 + 5x| < 6 \\ |x + 1| \leq 1 \end{cases}$

г)  $\begin{cases} |x^2 + 5x| < 6 \\ |x + 1| < 2 \end{cases}$

16. Тэнцэтгэл биш болд.

а)  $|4x - 5| > |3x + 7|$   
г)  $|7x + 1| \geq 2|2x + 3|$

б)  $|2x + 7| \leq |x - 8|$   
д)  $|4x - 3| \geq |x + 6|$

в)  $5|x - 7| < |6x + 5|$   
е)  $|1 - 3x| \leq |1 - x|$

17. Тэнцэтгэл биш болд.

а)  $|x^2 - 4x| < 5$   
г)  $x^2 - 7x + 12 < |x - 4|$   
ё)  $x^2 - 5x + 9 < |x - 6|$

б)  $|x^2 - x - 6| > 4$   
д)  $x^2 > |5x + 8|$   
ж)  $|x^2 + 3x| \geq 2 - x^2$

в)  $|x^2 - 2x - 3| < 3x - 3$   
е)  $7 - x^2 < 3|x - 1|$   
з)  $|x^2 - 6x + 8| \geq 5x - x^2$

18. Тэнцэтгэл биш болд.

а)  $|x - 1| > 2x$   
г)  $|x + 1| > 2 - x$   
ё)  $|x + 5| \geq 2x - 4$

б)  $|x + 2| < -2x$   
д)  $|x - 2| \geq x - 2$   
ж)  $|2(x - 3)| < 9x - 5$

в)  $|3x + 8| \geq x$   
е)  $|x - 3| \geq 2x + 1$   
з)  $|2(x + 1)| \geq 3x + 3$

19. Тэнцэтгэл биш болд.

а)  $2x^2 - |x| - 1 \geq 0$   
г)  $x^2 - 11|x| + 28 > 0$   
ё)  $x^2 + 9|x| \geq -14$

б)  $x^2 - 6|x| - 7 \leq 0$   
д)  $3x^2 - 5|x| + 2 > 0$   
ж)  $x^2 \leq 3|x| + 28$

в)  $x^2 - 2|x| - 8 \geq 0$   
е)  $x^2 + |x| < 6$   
з)  $x^2 < |x| + 42$

20. Тэнцэтгэл биш болд.

а)  $|3x^2 - 7x - 6| < |x^2 + x|$   
б)  $|x^2 + x - 2| < \left|1 + \frac{x}{5}\right|$   
д)  $|x^2 - 2x - 8| < |2x|$

б)  $|x - 1 - x^2| \leq |x^2 - 3x + 4|$   
г)  $|x - 6| > |x^2 - 5x + 9|$   
е)  $|x^2 - x - 12| < |x^2 - 1|$

21. Тэнцэтгэл биш болд.

а)  $|x^2 - 5x + 8| > 2$   
г)  $|x^2 + 8x + 10| \leq |x|$

б)  $|x^2 - 6x + 6| < 1$   
д)  $|2x^2 - 4x - 7| \leq |3x + 8|$

в)  $|x^2 - 21| \geq 4x$   
е)  $|3x^2 + 2| > |5x|$

22. Тэнцэтгэл биш болд.

а)  $|x| < 3$   
г)  $|2 - x| < 5$   
ё\*)  $\|2x + 1\| - 5 > 2$   
и)  $1 < |x - 3| < 5$

б)  $|x + 2| > -2$   
д)  $|3 + x| \geq 3$   
ж)  $|2x - |x + 3|| \leq 3$   
й)  $3 \leq |4 - x| < 7$

в)  $|x - 7| \leq 0$   
е)  $|x + 2| < 2$   
з)  $0 < |x - 4| \leq 1$   
к)  $2 \leq |5x - 1| \leq 4$

23. Тэнцэтгэл биш болд.

а)  $|3x - 4| > x + 1$   
г)  $4|2 - x| > 1 - x$

б)  $|x + 1| \leq 2x$   
д)  $2|x + 1| > x + 4$

в)  $|x - 3| < 2 - 4x$   
е)  $|2x - 1| \geq x - 1$

**Энэ бүлэг сэдвийг судалснаар дараах мэдлэг, чадварыг эзэмшинэ.**

- Дөрөв хүртэлх зэргийн олон гишүүнтэйг нэг гишүүнт болон хоёр зэргийн олон гишүүнтэд хуваах үйлдлийг ойлгох, ногдвор ба үлдэгдлийг олох /үлдэгдэл 0 байж болно/
- Безугийн теорем ашиглан олон гишүүнтэйг үргсигдэхүүн болгон задлах, 3 ба 4 зэргийн тэгшигтгэл бодох, үл мэдэгдэх коэффициентийг олох
- $Q(x)$  нь  $(ax+b)(cx+d)$ ,  $(ax+b)^2$  хэлбэрийн олон гишүүнт ба  $P(x)$  олон гишүүнтэйн зэрэг нь  $Q(x)$ -ийн зэргээс хэтрэхгүй байх тохиолдолд  $\frac{P(x)}{Q(x)}$  рационал илэрхийллийг тодорхой бус коэффициентийн аргаар алгебрын хялбар бутархайн нийлбэр болгон задлах
- $Q(x)$  нь  $(ax+b)(cx+d)(ex+f)$ ,  $(ax+b)(cx+d)^2$ ,  $(ax+b)(cx^2+d)$  хэлбэрийн олон гишүүнт ба  $P(x)$  олон гишүүнтэйн зэрэг нь  $Q(x)$ -ийн зэргээс хэтрэхгүй байх тохиолдолд  $\frac{P(x)}{Q(x)}$  рационал илэрхийллийг тодорхой бус коэффициентийн аргаар алгебрын хялбар бутархайн нийлбэр болгон задлах
- Рационал илэрхийллийг тодорхой бус коэффициентийн аргаар олон гишүүнт болон алгебрын хялбар бутархайн нийлбэр болгон задлах

**2.1. НЭГ БА ОЛОН ГИШҮҮНТ**

Олон гишүүнтэйг судлахын өмнө нэг гишүүнтэйн тухай мэдлэгээ сэргээн саная.  $2, -5x, 3x^2, 4x^3y, 8x^4y^3z$  гэх мэт зөвхөн үржүүлэх болон зэрэгт дэвшүүлэх үйлдлээр холбогдсон илэрхийллийг нэг гишүүнт гэх ба хувьсагчуудын илтгэгчүүдийнх нь нийлбэрийг түүний зэрэг гэнэ.

Тухайлбал 2-ын зэрэг 0,  $-5x$ -ийн зэрэг 1,  $3x^3y$ -ийн зэрэг 4,  $7x^4y^3z$ -ийн зэрэг 8 байна. Зөвхөн коэффициентээрээ ялгаатай байх  $3x^2y, -2x^2y, x^2y$  гэх мэт нэг гишүүнчүүдийг **төсөөтэй гишүүд** гэж нэрлэдэг. Төсөөтэй гишүүд дээр нэмэх, хасах үйлдэл хийхийг **төсөөтэй гишүүдийг эмхэтгэх** гэнэ.

**Тодорхойлолт.**  $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$  хэлбэрийн функцийг олон гишүүнт гэнэ. Энд  $n$  нь сөрөг биш бүхэл тоо,  $x$  нь хувьсагч,  $a_1, a_2, \dots, a_n$  нь бодит тоо байна.

$a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$  тоог коэффициент ( $a_i$  нь  $x^i$ -ийн коэффициент) гэнэ.

Хэрэв  $a_n \neq 0$  бол  $a_n x^n$ -ийг ахлах гишүүн гэх ба  $a_n$ -ийг ахлах гишүүний коэффициент,  $n$ -ийг зэрэг,  $a_0$ -ийг сул гишүүн гэдэг.  $P(x)$ -ийг  **$n$  зэргийн олон гишүүнт** гэнэ.

Олон гишүүнтийн ерөнхий хэлбэр	Жишээ	Ахлах гишүүн	Сул гишүүн	Зэрэг	Нэршил
$P(x) = ax + b$	$2x - 1$	$2x$	$-1$	$1$	Шугаман олон гишүүнт
$P(x) = ax^2 + bx + c$	$3x^2 - 4x + 5$	$3x^2$	$5$	$2$	Квадрат зэргийн олон гишүүнт
$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$	$x^3 - 2x^2 + 3x - 4$	$x^3$	$-4$	$3$	Куб зэргийн олон гишүүнт
$P(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$	$-2x^4 + 3x^3 + 4x^2 - 5x$	$-2x^4$	$0$	$4$	4 зэргийн олон гишүүнт

### Олон гишүүнтийн нэмэх, хасах үйлдэл

**Жишээ 1.**  $(3x^2 - 5x + 7) + (x^2 + 2x - 1)$  үйлдлийг гүйцэтгэ.

**Бодолт.** Хаалт задалж төсөөтэй гишүүдийг эмхэтгэхэд

$$3x^2 - 5x + 7 + x^2 + 2x - 1 = 4x^2 - 3x + 6 \text{ болно.}$$

**Жишээ 2.**  $(3x^3 + 5x^2 + 3x - 6) - (3x^2 - x + 5)$  үйлдлийг гүйцэтгэ.

**Бодолт.** Хаалт задалж төсөөтэй гишүүдийг эмхэтгэхэд

$$3x^3 + 5x^2 + 3x - 6 - 3x^2 + x - 5 = 3x^3 + 2x^2 + 4x - 11 \text{ болно.}$$

### ДАСГАЛ

1. Хаалт задалж төсөөтэй гишүүдийг эмхэтгэ.

- |  |  |
|--|--|
| a) $(4y + 8) + (7y - 6)$                 | b) $(-8x - 9) + (-5x + 6)$                             |
| v) $(-a + 11) - (4a - 8)$                | g) $(5z + 1) - (3z - 7)$                               |
| d) $(3x^2 - 4x + 5) + (-2x^2 - 2x - 6)$  | e) $(2x^2 - 12x + 4) - (-x^2 - 6x + 14)$               |
| ë) $(5x^2 - 2x - 51) + (-6x^2 + 8x - 8)$ | ж) $(x^3 + 3x^2 - 10x - 1) + (2 - 15x + 11x^2 - 3x^3)$ |

### Олон гишүүнтийн үргэлжлэх үйлдэл

**Жишээ 1.**  $(2x) \cdot (3x^2)$  үйлдлийг гүйцэтгэж, зэргийг тодорхойл.

**Бодолт.**  $(2x) \cdot (3x^2) = 2 \cdot 3 \cdot x \cdot x^2 = 6x^3$  нь куб зэргийн нэг гишүүнт.

**Жишээ 2.**  $(-4xy^2) \cdot (5x^2yz)$  үйлдлийг гүйцэтгэж, зэргийг тодорхойл.

**Бодолт.**  $(-4xy^2) \cdot (5x^2yz) = -4 \cdot 5 \cdot x \cdot x^2 \cdot y \cdot y^2 \cdot z = -20x^3y^3z$  болно.

Хувьсагчуудын илтгэгчийн нийлбэр нь  $3 + 3 + 1 = 7$  тул нэг гишүүнтийн зэрэг нь 7 болно.

## ДАСГАЛ

2. Үйлдлийг гүйцэтгэж нэг гишүүнтийн зэргийг тодорхойл.

- |  |  |  |
|--|--|--|
| a) $z \cdot z \cdot z^2$               | б) $x \cdot x \cdot x^3 \cdot 5 \cdot y^2 \cdot y^5$                           | в) $2 \cdot x \cdot x^3 \cdot 3 \cdot y \cdot y^2 \cdot z \cdot z^4$ |
| г) $7a \cdot 6ab \cdot 3b^2 \cdot a^2$ | д) $(2a^2)^3 \cdot 3a \cdot a^4$   | е) $5(pq)^2 \cdot p^3 \cdot (-2q)^3$                                 |
| ё) $3a^m \cdot 2a^{3m+1}$              | ж) $z^{2x+4} \cdot (zy^{3x})^2 \cdot y^{2x-5}$                                 | з) $(3x^n \cdot y^m)^2 \cdot (-2x^n \cdot y^m)^3$                    |
| и) $(-6a^3b^2c)^2 \cdot (-3ab^2c^3)$   | й) $\left(-2\frac{2}{3}x^3y^4z\right) \cdot \left(-1\frac{4}{5}xy^3z^2\right)$ |  |

Жишээ 3.  $2x \cdot (3x^2 + 5x + 4)$  үржүүлэх үйлдлийг гүйцэтгэ.

**Бодолт.** Нэг гишүүнтээр олон гишүүнтийг үржүүлэхдээ уг нэг гишүүнтээр олон гишүүнтийн гишүүн тус бүрийг үржүүлнэ.

$$2x(3x^2 + 2x - 4) = 2x \cdot x^2 + 2x \cdot 5x + 2x \cdot (-4) = 6x^3 + 10x^2 - 8x \text{ болно.}$$

Жишээ 4.  $(5x - 6) \cdot (3x^2 + 7)$  үржүүлэх үйлдлийг гүйцэтгэ. Хэдэн зэргийн олон гишүүнт болох вэ?

**Бодолт.** Олон гишүүнтэй олон гишүүнтээр үржүүлэхдээ эхний олон гишүүнтийн гишүүн бүрээр хоёр дахь олон гишүүнтийн гишүүн тус бүрийг үржүүлнэ.

$$(5x - 6) \cdot (3x^2 + 7) = 5x \cdot 3x^2 + 5x \cdot 7 - 6 \cdot 3x^2 - 6 \cdot 7 = 15x^3 - 18x^2 + 35x - 42 \text{ болно.}$$

Энэ олон гишүүнтийн ахлах гишүүн  $15x^3$  нь 3 зэргийн нэг гишүүнт тул олон гишүүнтийн зэрэг 3 болно.

## ДАСГАЛ

3. Үржүүлэх үйлдлийг гүйцэтгэж, төсөөтэй гишүүдийг эмхэтгэ.

- |                          |                            |
|--------------------------|----------------------------|
| a) $x^2(2x+1)$           | б) $-3x(-2x^2 + 3x - 1)$   |
| в) $(2x-1)(3x^2 - 4)$    | г) $(-x-1)(2x^2 - x + 1)$  |
| д) $(3x+1)(x+4)(x-5)$    | е) $(2x-3)(4-x)(4x-1)$     |
| ё) $(x^2+1)(x^2-2)(x-3)$ | ж) $(2y^2-1)(4y^2+3)(y-2)$ |

4. Дараах олон гишүүнтийн зэрэг, ахлах гишүүн, гишүүний тоог ол.

- |  |  |
|--|--|
| а) $P(x) = 3x^2 - 4x + 5$  | б) $P(x) = 7x^7 + 5x^5 + 3x^3 + x^2$       |
| в) $Q(y) = -y^8 + y^5 - 4y^2$  | г) $Q(y) = -5y^{10} + 8y^9 - 2y^2 - y + 1$ |
| 5. $P(x) = 3x^2 - 4x + 5$ , $Q(x) = -x^3 - 4x^2 + 2$ бол дараах олон гишүүнт тус бүрийг олж зэргийг бич. |  |

- |   |                  |               |
|---|------------------|---------------|
| а) $P(x) + Q(x)$  | б) $P(x) - Q(x)$ | в) $P(x)Q(x)$ |
| 6. а) Хэрэв $P(x) = 3x^4 - 5x^3 - 4x^2$ , $Q(x) = 2x^4 + 5x^3 - 3x$ бол $P(x) + Q(x)$ , |                  |               |
| $P(x) - Q(x)$ , $P(x) \cdot Q(x)$ олон гишүүнт тус бүрийг олж, зэргийг бич;             |                  |               |
| б) Хэрэв $M(x) = x^4 - 4x^3 + 3x^2$ , $N(x) = x^2 - 3x + 1$ бол $M(x) + N(x)$ ,         |                  |               |
| $M(x) - N(x)$ , $M(x) \cdot N(x)$ олон гишүүнт тус бүрийг олж, зэргийг бич.             |                  |               |

7. а) Хэрэв  $P(x) = x^2 + 3x - 1$  бол  $P(5)$ ,  $P(-4)$ ,  $P(3)$ ,  $P(y+1)$  утгыг ол.  
 б) Хэрэв  $Q(x) = x^3 - 5x - 2$  бол  $P(-2)$ ,  $P(0)$ ,  $P(1)$ ,  $P(z-2)$  утгыг ол.  
 в) Хэрэв  $P(x+1) = 2x^2 + 3x - 1$  бол  $P(x)$ ,  $P(3)$ ,  $P(0)$  утгыг ол.  
 г) Хэрэв  $P(x-1) = 3x^3 + 6x^2 - 6x - 1$  бол  $P(x)$ ,  $P(-1)$ ,  $P(1)$  утгыг ол.

### Адилтгал тэнцүү илэрхийлэл

**Тодорхойлолт.** Хэрэв хувьсагчийн утга бүрд хоёр илэрхийллийн харгалзах утга тэнцүү байвал тэдгээрийг адилтгал тэнцүү илэрхийлэл гэнэ.

Тухайлбал бодит  $a$ ,  $b$ ,  $x$  бүрийн хувьд

$$(a+b)^2 \text{ ба } a^2 + 2ab + b^2$$

$$a^3 - b^3 \text{ ба } (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$(4x^2 + 2x + 1)(2x - 1) \text{ ба } 8x^3 - 1$$

$$(2x + 3) + (x - 2) \text{ ба } 3x + 1 \text{ хоёр илэрхийлэл нь адилтгал тэнцүү байна.}$$

**Жишээ 1.** Хэрэв  $ax + b$  ба  $cx + d$  хоёр илэрхийлэл адилтгал тэнцүү бол  $a = c$ ,  $b = d$  болохыг батал.

**Баталгаа.**  $x$  хувьсагчийн утга бүрд хоёр илэрхийлэл тэнцүү утгатай байх тул  $x = 0$  үед  $a \cdot 0 + b = c \cdot 0 + d$  байна. Эндээс  $b = d$  байна.  $x = 1$  үед  $a \cdot 1 + b = c \cdot 1 + d$  ба  $b = d$  тул  $a = c$  болж батлагдав.

**Жишээ 2.**

Хэрэв  $ax^2 + bx + c$  ба  $dx^2 + ex + f$  хоёр илэрхийлэл адилтгал тэнцүү бол  $a = d$ ,  $b = e$ ,  $c = f$  болохыг батал.

**Баталгаа.**  $x$  хувьсагчийн утга бүрд хоёр илэрхийлэл тэнцүү утгатай байх тул  $x = 0$  үед  $a \cdot 0 + b \cdot 0 + c = d \cdot 0 + e \cdot 0 + f$  гэдгээс  $c = f$  болно. Мөн  $x = 1$ ,  $x = -1$  утгын хувьд  $a + b + c = d + e + f$  ба  $a - b + c = d - e + f$  болно. Эдгээрийг нэмбэл  $2a + 2c = 2d + 2f$  ба  $c = f$  тул  $a = d$  гэж гарна. Эндээс  $b = e$  болж батлагдав.

### Дүгнэлт

Хэрэв  $ax^n + bx^{n-1} + \dots + kx + m$  ба  $Ax^n + Bx^{n-1} + \dots + Kx + M$  хоёр илэрхийлэл адилтгал тэнцүү бол  $a = A$ ,  $b = B$ ,  $c = C, \dots, k = K$ ,  $m = M$  байна.

**Жишээ 3.** Хэрэв  $(Ax + B)(x - 2)$ ,  $-2x^2 + 10x - 12$  хоёр илэрхийлэл адилтгал тэнцүү бол  $A$ ,  $B$  бодит тоог ол.

**Бодолт.** Хэрэв үржүүлэх үйлдлийг гүйцэтгэвэл  $Ax^2 + (B - 2A)x - 2B$  болох тул адилтгал тэнцүү илэрхийллийн тодорхойлолт ёсоор

$$\begin{cases} A = -2 \\ B - 2A = 10 \\ -2B = -12 \end{cases}$$

нөхцөл биелнэ. Энэ тэгшитгэлийн системийг бодоход  $A = -2$ ,  $B = 6$  гэж гарна.

**Жишээ 4.** Хэрэв  $(Ax + B)(x^2 + 4x + 3) + C$ ,  $2x^3 + 3x^2 - 14x - 5$  хоёр илэрхийлэл адилтгал тэнцүү бол  $A, B, C$  бодит тоог ол.

**Бодолт.**

$$(Ax + B)(x^2 + 4x + 3) + C = Ax^3 + 4Ax^2 + 3Ax + Bx^2 + 4Bx + 3B + C = \\ = Ax^3 + (4A + B)x^2 + (3A + 4B)x + (3B + C)$$

гэдгээс  $\begin{cases} A = 2 \\ 4A + B = 3 \\ 3A + 4B = -14 \\ 3B + C = -5 \end{cases}$  тэгшитгэлийн систем зохионо.

Үүнийг бodoход  $A = 2, B = -5, C = 10$  гэж гарна.

### ДАСГАЛ

**8.** Хэрэв хоёр илэрхийлэл адилтгал тэнцүү бол  $A, B$  коэффициентийг ол.

- a)  $(Ax + B)(x - 3)$  ба  $4x - 11x - 3$       б)  $(Ax + B)(x + 5)$  ба  $2x^2 + 7x - 15$
- в)  $(Ax + B)(3x - 2)$  ба  $6x^2 - x - 2$       г)  $(Ax + B)(2x + 5)$  ба  $6x^2 + 11x - 10$
- д)  $(Ax + B)(x^2 - 1)$  ба  $x^3 + 2x^2 - x - 2$     е)  $(Ax + B)(x^2 + 4)$  ба  $2x^3 - 3x^2 + 8x - 12$
- ё)  $(Ax + B)(2x^2 - 3x + 4)$  ба  $4x^3 - x + 12$     ж)  $(Ax + B)(3x^2 - 2x - 1)$  ба  $6x^3 - 7x^2 + 1$

**9.** Хэрэв хоёр илэрхийлэл адилтгал тэнцүү бол  $A, B, R$  коэффициентийг ол.

- а)  $15x^2 - 14x - 8$  ба  $(5x + 2)(Ax + B) + R$
- б)  $6x^2 + x - 5$  ба  $(2x + 1)(Ax + B) + R$
- в)  $12x^2 - 5x + 2$  ба  $(3x - 2)(Ax + B) + R$
- г)  $21x^2 - 11x + 6$  ба  $(3x - 2)(Ax + B) + R$

**10.** Хэрэв хоёр илэрхийлэл адилтгал тэнцүү бол  $A, B, C, D, R$  коэффициентийг ол.

- а)  $x^3 - x^2 - x + 12$  ба  $(x + 2)(Ax^2 + Bx + C) + R$
- б)  $x^3 - 5x^2 + 10x + 10$  ба  $(x - 3)(Ax^2 + Bx + C) + R$
- в)  $2x^3 + x^2 - 3x + 4$  ба  $(2x - 1)(Ax^2 + Bx + C) + R$
- г)  $12x^3 + 11x^2 - 7x + 5$  ба  $(3x + 2)(Ax^2 + Bx + C) + R$
- д)  $4x^3 + 4x^2 - 37x + 5$  ба  $(2x - 5)(Ax^2 + Bx + C) + R$
- е)  $9x^3 + 12x^2 - 15x - 10$  ба  $(3x + 4)(Ax^2 + Bx + C) + R$

### Олон гишүүнтний язгуур

**Тодорхойлолт.** Хэрэв  $P(x)$  олон гишүүнтний хувьд  $P(t) = 0$  бол  $t$  тоог  $P(x)$  олон гишүүнтний язгуур гэнэ.

**Жишээ 1.**  $P(x) = x^2 - 5x + 6$  олон гишүүнтний язгуурыг ол.

**Бодолт.**  $x^2 - 5x + 6 = 0$  квадрат тэгшитгэлийн дискриминант нь

$D = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 1$  байна. Иймд  $x_{1,2} = \frac{-(-5) \pm 1}{2 \cdot 1}$  болох ба  $x_1 = 3, x_2 = 2$  тоо нь  $P(x)$  олон гишүүнтийн язгуур болно.

**Теорем.** Хэрэв  $P(x) = ax^2 + bx + c$  олон гишүүнтийн язгуур  $x_1, x_2$  бол  $ax^2 + bx + c$  ба  $a(x - x_1)(x - x_2)$  илэрхийллүүд адилтгал тэнцүү байна.

**Жишээ 2.**  $P(x) = 3x^2 + 2x - 33$  олон гишүүнтийг үржвэрт задал.

**Бодолт.** Хэрэв  $3x^2 + 2x - 33 = 0$  бодвол  $D = 2^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-33) = 400$  ба

$$x_1 = \frac{-2 + 20}{6} = 3, x_2 = \frac{-2 - 20}{6} = -\frac{11}{3}$$

гэж гарна. Иймд  $P(x) = 3(x - 3)\left(x + \frac{11}{3}\right)$  буюу  $P(x) = (x - 3)(3x + 11)$  гэж үржвэрт задарна.

**Теорем.** Хэрэв  $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  олон гишүүнтийн язгуур  $x_1, x_2, x_3$  бол  $ax^3 + bx^2 + cx + d, a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$  хоёр илэрхийлэл адилтгал тэнцүү байна.

**Жишээ 3.**  $P(x) = 6x^3 - 17x^2 - 4x + 3$  олон гишүүнтийг үржвэрт задал.

Бодолт. Эхлээд  $6x^3 - 17x^2 - 4x + 3 = 0$  тэгшигтгэлийн язгууруудыг ольё.

$$6x^3 - 17x^2 - 4x + 3 = 6x^3 - 18x^2 + x^2 - 3x - x + 3 = 6x^2(x - 3) + x(x - 3) - (x - 3)$$

$$(x - 3)(6x^2 + x - 1) = 0 \text{ буюу } \begin{cases} x = 3 \\ 6x^2 + x - 1 = 0 \end{cases} \text{ байна.}$$

Хэрэв  $6x^2 + x - 1 = 0$  тэгшигтгэлийг бодвол  $x_1 = -\frac{1}{2}, x_2 = \frac{1}{3}$  гэж гарна. Иймд  $P(x)$

олон гишүүнт  $P(x) = 6(x - 3)\left(x - \frac{1}{3}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right)$  буюу  $P(x) = (x - 3)(3x - 1)(2x + 1)$

гэж үржвэрт задарна.

### ДАСГАЛ

11. Олон гишүүнтийн язгуурыг ол.

- |                             |                           |                               |
|-----------------------------|---------------------------|-------------------------------|
| a) $P(x) = 3x - 21$         | b) $P(x) = 5x + 25$       | c) $P(x) = 4(x - 2) + 1$      |
| г) $P(x) = 3(x - 5) - 24$   | д) $P(x) = x^2 + 3x - 10$ | е) $P(y) = y^2 + y - 20$      |
| ë) $P(x) = 5x^2 - 22x - 24$ | ж) $P(x) = x^2 - 3x - 70$ | з) $P(x) = x^3 - 12x^2 + 20x$ |

12. Олон гишүүнтийн язгуурыг ол.

- |                                |                                 |
|--------------------------------|---------------------------------|
| a) $P(x) = 3x^3 + 2x^2 - 33x$  | b) $P(x) = 3x^3 + x^2 - 8x + 4$ |
| в) $P(x) = 8x^3 - 20x + 9$     | г) $P(x) = 9x^3 - 13x - 6$      |
| д) $P(z) = z^4 + z^2 + 6z - 8$ | е) $P(a) = a^4 + 2a^3 - a - 2$  |

13. Олон гишүүнтийн язгуурыг олж, үржвэрт задал.

- |                    |                     |                      |                      |
|--------------------|---------------------|----------------------|----------------------|
| a) $2x^2 - 5x + 2$ | б) $4x^2 - 12x + 9$ | в) $6x^2 + 5x + 1$   | г) $8x^2 - 7x - 1$   |
| д) $x^2 - 8x - 9$  | е) $x^2 + 6x - 40$  | ё) $x^2 + 18x + 81$  | ж) $21x^2 - 8x - 4$  |
| з) $6x^2 + x - 12$ | и) $3x^2 - 5x - 2$  | й) $10x^2 - 7x - 12$ | к) $6x^2 - 29x + 35$ |

## 2.2. ОЛОН ГИШҮҮНТИЙН ХУВААХ ҮЙЛДЭЛ

**Тодорхойлолт.** Хэрэв  $P(x)$  олон гишүүнтийг тогтмол биш олон гишүүнт  $Q(x)$ -д хуваахад ногдвор нь  $K(x)$ , үлдэгдэл нь  $R(x)$  гарсан бол

$$P(x) = Q(x) \cdot K(x) + R(x)$$

адилтгал биелнэ. Энд үлдэгдэл  $R(x)$  олон гишүүнтийн зэрэг нь хуваагч  $Q(x)$  олон гишүүнтийн зэргээс бага байна. Ногдвор  $K(x)$  олон гишүүнтийн зэрэг нь хуваагдагч олон гишүүнт  $P(x)$ -ийн зэргээс хуваагч олон гишүүнт  $Q(x)$ -ийн зэргийг хассантай тэнцүү.

**Жишээлбэл.**

$$2x^4 + 3x^3 + 2x^2 - 5x + 3 = \underbrace{(x^2 + 3x - 1)}_{Хуваагдагч олон гишүүнт} \cdot \underbrace{(2x^2 - 3x + 13)}_{Хуваагч олон гишүүнт} + \underbrace{(-47x + 16)}_{Ногдвор олон гишүүнт}$$

Хуваагдагч олон гишүүнт

Хуваагч олон гишүүнт

Ногдвор олон гишүүнт

Үлдэгдэл олон гишүүнт

**Жишээ 1.**  $y^3 - 2y^2 - y + 5$  олон гишүүнтийг  $y^2 - 3y + 2$  олон гишүүнтэд хуваахад гарах ногдвор ба үлдэгдлийг ол.

**Бодолт.** Ногдвор ба хуваагч олон гишүүнтийн зэргийн нийлбэр хуваагдагч олон гишүүнтийн зэрэгтэй тэнцүү байх тул ногдвор олон гишүүнтийг  $Ay + B$  хэлбэртэй гэж үзэж болно.

$$y^3 - 2y^2 - y + 5 = (y^2 - 3y + 2)(Ay + B) + R$$

гэж бичиж болно. (Энд үлдэгдэл  $R$ -ийн зэрэг 1 эсвэл 0 байна.)

Хэрэв тэнцүүгийн баруун талын хаалт задлан гишүүнчлэн үржүүлбэл

$$Ay^3 + (-3A + B)y^2 + (2A - 3B)y + 2B + R$$

болно. Энэ олон гишүүнт нь хуваагдагч олон гишүүнтийн зэргийн нийлбэр тэнцүү учир  $A = 1$  байна. Мөн  $-2 = -3A + B$  гэдгээс  $B = 1$  гэж гарна.  $2B + R = 5$  тул  $R = 3$  байна.

Иймд  $Ay + B = y + 1$  нь ногдвор олон гишүүнт, үлдэгдэл нь 3 юм.

Одоо олон гишүүнтийг олон гишүүнтийн зэрэгтэй хуваах “өнцөглөн хуваах” аргатай танилцъя. Энэ арга нь тооны хуваах үйлдэлтэй төстэй.

**Жишээ 2.**  $3x^3 - 4x^2 - 5x + 2$  олон гишүүнтийг  $x - 2$  олон гишүүнтэд хуваа.

$$\begin{array}{r}
 3x^3 - 4x^2 - 5x + 2 \\
 - 3x^3 - 6x^2 \\
 \hline
 2x^2 - 5x \\
 - 2x^2 - 4x \\
 \hline
 -x + 2 \\
 -x + 2 \\
 \hline
 0
 \end{array} \quad \left| \begin{array}{c} x - 2 \\ \hline 3x^2 + 2x - 1 \end{array} \right.$$

Хувалдаач

Хувалдаач

Ногдвор 2 зэргийн олон гишүүнт

Үлдэгдэл

Ногдвор олон гишүүнт нь  $3x^2 + 2x - 1$ , үлдэгдэл олон гишүүнт нь 0 буюу үлдэгдэлгүй байна.

**Жишээ 3.**  $2x^4 + 3x^3 + 2x^2 - 5x + 3$  олон гишүүнтийг  $x^2 + 3x - 1$  олон гишүүнтэд хуваа.

$$\begin{array}{r}
 2x^4 + 3x^3 + 2x^2 - 5x + 3 \\
 - 2x^4 + 6x^3 - 2x^2 \\
 \hline
 -3x^3 + 4x^2 - 5x \\
 - 3x^3 - 9x^2 + 3x \\
 \hline
 13x^2 - 8x + 3 \\
 - 13x^2 + 39x - 13 \\
 \hline
 -47x + 16
 \end{array} \quad \left| \begin{array}{c} x^2 + 3x - 1 \\ \hline 2x^2 - 3x + 13 \end{array} \right.$$

Үлдэгдэл I зэргийн олон гишүүнт

Ногдвор 2 зэргийн олон гишүүнт

Ногдвор олон гишүүнт нь  $2x^2 - 3x + 13$ , үлдэгдэл олон гишүүнт нь  $-47x + 16$  байна.

### ДАСГАЛ

14.  $P(x)$  олон гишүүнтийг  $Q(x)$  олон гишүүнтэд хуваахад гарах ногдвор ба үлдэгдэл олон гишүүнтийг ол.

- a)  $P(x) = 4x^3 - 6x^2 + 4x - 9$ ,  $Q(x) = x - 2$     б)  $P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 3x$ ,  $Q(x) = x + 1$
  - в)  $P(x) = x^4 - x^3 - 6x^2 - 2$ ,  $Q(x) = x + 2$     г)  $P(x) = x^3 - 6x^2 + 5x$ ,  $Q(x) = x - 1$
  - д)  $P(x) = 3x^3 - 2x^2 - 7x + 6$ ,  $Q(x) = x + 1$     е)  $P(x) = 2x^3 - 5x - 7$ ,  $Q(x) = x - 2$
  - ë)  $P(x) = 2x^3 + 7x^2 - 6x - 8$ ,  $Q(x) = x + 4$     ж)  $P(x) = 5x^3 - 3x^2 - 6$ ,  $Q(x) = x - 1$
  - з)  $P(x) = 3x^3 - 5x^2 + 4x + 2$ ,  $Q(x) = 3x + 1$     ѹ)  $P(x) = x^3 + 5$ ,  $Q(x) = x + 2$
15.  $P(x)$  олон гишүүнтийг  $Q(x)$  олон гишүүнтэд хуваахад гарах ногдвор ба үлдэгдэл олон гишүүнтийг ол.
- a)  $P(x) = x^4 + 3x^3 - x^2 - x + 6$ ,  $Q(x) = x + 3$
  - б)  $P(x) = 2x^4 - 5x^3 + 2x^2 + 5x - 10$ ,  $Q(x) = x - 2$
  - в)  $P(x) = 7x^4 - 10x^3 + 3x^2 + 3x - 3$ ,  $Q(x) = x - 1$

- г)  $P(x) = 2x^4 + 8x^3 - 5x^2 - 4x + 2$ ,  $Q(x) = x^2 + 4x - 2$   
 д)  $P(x) = 3x^4 - x^3 + 8x^2 + 5x + 3$ ,  $Q(x) = x^2 - x + 3$   
 е)  $P(x) = 3x^4 + 9x^3 - 5x^2 - 6x + 2$ ,  $Q(x) = 3x^2 - 2$   
 ё)  $P(x) = x^3 - 2x^2 - 4$ ,  $Q(x) = x - 2$   
 ж)  $P(x) = x^3 - 4x^2 + 9$ ,  $Q(x) = x - 3$   
 з)  $P(x) = x^4 - 13x - 42$ ,  $Q(x) = x^2 - x - 6$

16. а)  $n^2 + 5n + 6$  тоо  $n+1$ -д бүхлээр хуваагдах байх  $n \in N$  тоог ол.  
 б)  $3n^2 + 4n + 15$  тоо  $n+2$ -д бүхлээр хуваагдах байх  $n \in N$  тоог ол.  
 в)  $3n^3 + 7n^2 + 3n + 10$  тоо  $n+2$ -д бүхлээр хуваагдах байх  $n \in N$  тоог ол.  
 г)  $10n^2 - 55$  тоо  $2n^2 + 3$ -д бүхлээр хуваагдах байх  $n \in N$  тоог ол.

### 2.3. БЕЗУГИЙН ТЕОРЕМ

**Теорем 1.**  $P(x)$  олон гишүүнтийг  $x-t$  хэлбэрийн олон гишүүнтэд хуваахад гарах үлдэгдэл нь  $P(t)$ -тай тэнцүү байна. **Үүнийг Безугийн теорем гэдэг.**

**Баталгаа.**  $P(x)$  олон гишүүнтийг  $x-t$  олон гишүүнтэд хуваахад  $q(x)$  ногдож  $R$  үлдэгдэл гарсан байг.

Тэгвэл  $P(x) = (x-t)q(x) + R$  адилтгал биелэнэ.  $x=t$  үед тэнцэтгэл биелэх тул  $P(t) = (t-t)q(t) + R = 0 \cdot q(t) + R = R$  болох ба эндээс  $P(t) = R$  байна.

**Жишээ 1.**  $P(x) = x^3 - 3x + 4$  олон гишүүнтийг  $x+3$ -д олон гишүүнтэд хуваахад гарах үлдэгдлийг ол.

**Бодолт.**  $x+3=0$ ,  $x=-3$  тул  $P(-3) = (-3)^3 - 3(-3) + 4 = -14$  байна.

**Жишээ 2.** Хэрэв  $P(x) = x^3 - 3x^2 + ax + b$  олон гишүүнтийг  $x-1$  олон гишүүнтэд хуваахад гарах үлдэгдэл  $-4$ ,  $x-2$  олон гишүүнтэд хуваахад гарах үлдэгдэл  $-4$  бол  $x-3$  олон гишүүнтэд хуваахад гарах үлдэгдлийг ол.

**Бодолт.** Безугийн теоремоор  $x-1=0$  буюу  $x=1$  тул  $P(1) = -4$  байна. Иймд  $P(1) = -4$  тул  $a+b = -2$  гэж гарна. Мөн  $x-2=0$  буюу  $x=2$  тул  $P(2) = -4$  байна. Иймд  $P(2) = 2^3 - 3 \cdot 2^2 + a \cdot 2 + b$ ,  $P(2) = -4$  тул  $2a+b = 0$  гэж гарна.

Иймд  $\begin{cases} a+b = -2 \\ 2a+b = 0 \end{cases}$  тэгшитгэлийн системээс  $a=2$ ,  $b=-4$  гэж гарах ба  $P(x)$  олон гишүүнт  $P(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 4$  болно.  $x-3=0$  буюу  $x=3$  тул  $P(3) = 3^3 - 3 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3 - 4 = 2$  байна.

**Теорем 2.** Безунийн өргөтгөсөн теорем.

$P(x)$  олон гишүүнтэйгээ  $sx - t$  олон гишүүнтэд хуваахад гарах үлдэгдэл нь  $P\left(\frac{t}{s}\right)$ -тай тэнцүү байна.

**Баталгаа.**  $P(x)$  олон гишүүнтэйгээ  $sx - t$  олон гишүүнтэд хуваахад  $q(x)$  ногдож  $R$  үлдэгдэл өгдөг байг. Тэгвэл  $P(x) = (sx - t)q(x) + R$  байна.  $x = \frac{t}{s}$  үед адилтгал биелэх тул  $P\left(\frac{t}{s}\right) = \left(s \cdot \frac{t}{s} - t\right)q\left(\frac{t}{s}\right) + R = 0 \cdot q\left(\frac{t}{s}\right) + R$  болох ба  $P\left(\frac{t}{s}\right) = R$  болж батлагддаг.

**Жишээ 3.**  $P(x) = x^3 - 3x + 4$  олон гишүүнтэйгээ  $2x + 3$  олон гишүүнтэд хуваахад гарах үлдэгдлийг ол.

**Бодолт.**  $2x + 3 = 0$  буюу  $x = -\frac{3}{2}$  тул  $P\left(-\frac{3}{2}\right) = \left(-\frac{3}{2}\right)^3 - 3 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) + 4 = -\frac{27}{8} + \frac{9}{2} + 4 = 5\frac{1}{8}$  байна.

### ДАСГАЛ.

17.  $P(x)$  олон гишүүнтэйгээ  $Q(x)$  олон гишүүнтэд хуваахад гарах үлдэгдэл ба ногворыг ол.

- |                           |                 |                                |                 |
|---------------------------|-----------------|--------------------------------|-----------------|
| a) $P(x) = x^2 - 5x + 2$  | $Q(x) = x - 3$  | b) $P(x) = x^2 + 2x - 6$       | $Q(x) = x + 1$  |
| в) $P(x) = 2x^2 + 3x - 1$ | $Q(x) = x - 2$  | г) $P(x) = 2x^2 + 3x + 1$      | $Q(x) = 2x - 1$ |
| д) $P(x) = 6x^2 - x - 2$  | $Q(x) = 3x + 1$ | е) $P(x) = x^4 - x^3 + 3x - 2$ | $Q(x) = 2x - 3$ |

18.  $P(x)$  олон гишүүнтэйгээ  $Q(x)$  олон гишүүнтэд хуваахад гарах ногвор ба үлдэгдлийг ол.

- |                                       |                 |                                  |                 |
|---------------------------------------|-----------------|----------------------------------|-----------------|
| a) $P(x) = x^3 - 5x^2 + 2x - 3$       | $Q(x) = x - 1$  | b) $P(x) = x^3 + x^2 - 6x + 5$   | $Q(x) = x + 2$  |
| в) $P(x) = 2x^3 - 3x + 5$             | $Q(x) = x - 3$  | г) $P(x) = 4x^3 - 5x^2 + 3x - 7$ | $Q(x) = x + 4$  |
| д) $P(x) = x^3 + 3x^2 - 2x + 1$       | $Q(x) = 2x - 1$ | е) $P(x) = 2x^3 + 5x^2 - 3x + 6$ | $Q(x) = 3x + 1$ |
| ё) $P(x) = x^4 - x^3 + 2x^2 - 7x - 2$ | $Q(x) = x - 2$  | ж) $P(x) = 3x^4 + x^2 - 7x + 6$  | $Q(x) = x + 3$  |

19. а) Хэрэв  $x^3 + 2x^2 - px + 1$  олон гишүүнтэйгээ  $(x - 1)$ -д хуваахад 5 үлддэг бол  $p$  тоог ол.

- б) Хэрэв  $2x^3 + x^2 - 3x + q$  олон гишүүнтэйгээ  $(x - 2)$ -т хуваахад 12 үлддэг бол  $q$  тоог ол.
- в) Хэрэв  $x^3 + 2x^2 + px - 3$  олон гишүүнтэйгээ  $(x + 1)$ -д хуваахад гарах үлдэгдэл нь  $(x - 2)$ -т хуваахад гарах үлдэгдэлтэй тэнцүү бол  $p$  тоог ол.
- г) Хэрэв  $x^3 + px^2 - x - 4$  олон гишүүнтэйгээ  $(x - 1)$ -д хуваахад гарах үлдэгдэл нь  $(x + 3)$ -д хуваахад гарах үлдэгдэлтэй тэнцүү бол  $p$  тоог ол.

- д) Хэрэв  $3x^3 - 2x^2 + ax + b$  олон гишүүнтэйгээ  $(x-1)$  ба  $(x+1)$ -д хуваахад харгалзан 3 ба  $-13$  үлддэг бол  $a$  ба  $b$  тоог ол.
- е) Хэрэв  $2x^3 + x^2 - px + 1$  олон гишүүнтэйгээ  $(x-1)$ -д хуваахад 5 үлддэг бол  $p$  тоог ол.
- ë) Хэрэв  $3x^3 + 2x^2 - px + 5$  олон гишүүнтэйгээ  $(x-2)$ -т хуваахад 7 үлддэг бол  $p$  тоог ол.
- ж) Хэрэв  $2x^3 + 3x^2 - px + 4$  олон гишүүнтэйгээ  $(x+2)$ -т хуваахад 8 үлддэг бол  $p$  тоог ол.

### Безугийн теоремийн мөрдлөгөө

#### Мөрдлөгөө 1.

- а) Хэрэв  $P(x)$  олон гишүүнт  $x-t$  олон гишүүнтэд хуваагддаг бол  $P(t)=0$  байна;
- б) Хэрэв  $P(t)=0$  бол  $P(x)$  олон гишүүнт  $x-t$  олон гишүүнтэд хуваагдана.

#### Баталгаа.

- а)  $P(t)=(x-t)q(x)$  ба  $x=t$  бол  $P(t)=(t-t)q(t)$  гэдгээс  $P(t)=0$  байна.
- б)  $P(x)=(x-t)q(x)+R$  байг.  $P(t)=(t-t)q(t)+R=0$  гэдгээс  $R=0$  болж  $P(x)$  нь  $x-t$  олон гишүүнтэд хуваагдана.

#### Мөрдлөгөө 2.

- а) Хэрэв  $P(x)$  олон гишүүнт  $sx-t$  олон гишүүнтэд хуваагддаг бол  $P\left(\frac{t}{s}\right)=0$  байна;
- б) Хэрэв  $P\left(\frac{t}{s}\right)=0$  бол  $P(x)$  олон гишүүнт  $sx-t$  олон гишүүнтэд хуваагдана.

#### Баталгаа.

- а)  $P(t)=(sx-t)q(x)$  ба  $x=\frac{t}{s}$  бол  $P\left(\frac{t}{s}\right)=\left(s \cdot \frac{t}{s} - t\right)q\left(\frac{t}{s}\right)$  гэдгээс  $P\left(\frac{t}{s}\right)=0$  байна;
- б)  $P\left(\frac{t}{s}\right)=(sx-t)q(x)+R$  байг.  $P\left(\frac{t}{s}\right)=\left(s \cdot \frac{t}{s} - t\right)q(x)+R=0$  гэдгээс  $R=0$  болж  $P(x)$  нь  $(sx-t)$ -д хуваагдана.

#### Мөрдлөгөө 3.

$P(x)=ax^n + bx^{n-1} + \dots + mx + k$  бүхэл коэффициенттэй олон гишүүнт нь  $(sx-t)$  гэсэн бүхэл коэффициенттэй олон гишүүнтэд хуваагддаг байг. Θөрөөр хэлбэл  $\frac{t}{s}$  ( $t \in Z, s \in N$ ) нь  $P(x)$ -ийн язгуур болдог үл хураагдах бутархай бол  $s$  ба  $t$  тоо нь харгалзан  $a$  ба  $k$  тооны хуваагч байна.

Энэ чанарыг ашиглан бүхэл коэффициенттэй олон гишүүнтийн рационал язгуурыг хайх хялбархан алгоритмыг гаргаж болно. Хэрэв  $P(x)$  олон гишүүнтийн ахлах гишүүний коэффициент 1-тэй тэнцүү ба  $P(x)$  олон гишүүнт рационал язгууртай бол тэр нь бүхэл тоо байна.

### Баталгаа.

$P(x) = ax^n + bx^{n-1} + \dots + mx + k$  олон гишүүнтийн язгуур  $\frac{t}{s}$  ( $t \in Z, s \in N$ ) байх үл хураагдах бутархай байг.

Тэгвэл  $a\left(\frac{t}{s}\right)^n + b\left(\frac{t}{s}\right)^{n-1} + \dots + m\frac{t}{s} + k = 0$  байна. Хэрэв тэнцэтгэлийн хоёр талыг  $s^n$ -ээр үржүүлбэл  $at^n + bt^{n-1}s + \dots + mts^{n-1} + ks^n = 0$  болно. Хэрэв  $at^n$  гишүүнээс бусад гишүүнийг тэнцэтгэлийн баруун талд гаргаж  $s$ -ийг хаалтын өмнө гаргавал  $at^n = s(-bt^{n-1} - \dots - mts^{n-2} + ks^{n-1})$  болно. Эндээс  $s$  нь  $t^n$ -ийг үл хуваах тул  $a$  тоо  $s$  тоонд хуваагдана. Үүнтэй адил аар хэрэв  $at^n + bt^{n-1}s + \dots + mts^{n-1} + ks^n = 0$  тэнцэтгэлийг  $ks^n = t(-at^{n-1} - bt^{n-2}s - \dots - ms^{n-1})$  гэж бичвэл  $s^n$  нь  $t$ -д үл хуваагдах тул  $k$  тоо  $t$  тоонд хуваагдана.

**Жишээ 1.**  $P(x) = 3x^3 + 4x^2 + 5x - 6$  олон гишүүнтийг үржвэрт задал.

**Бодолт.** Олон гишүүнтийн хуваагчийг  $sx - t$  хэлбэртэй хайя. Тэгвэл  $s$  тоо 3-ын хуваагчтут  $\pm 1, \pm 3$  байх боломжтой. Мөн  $t$  тоонь  $-6$ -ийн хуваагчтут  $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$  байх боломжтой юм. Гэвч  $sx - t$  тоо  $-sx + t$  тооноос хуваагчийн хувьд ялгаагүй. Мөн  $3x \pm 3, 3x \pm 6$  нь хуваагч биш байна. Учир нь хоёуланд нь 3 гэсэн хуваагч байгаа ба  $P(x)$  нь 3-д хуваагдахгүй байна. Иймд  $x \pm 1, x \pm 2, x \pm 3, x \pm 6, 3x \pm 1, 3x \pm 2$  боломжууд үлдэх ба  $x = \pm 1, x = \pm 2, x = \pm 3, x = \pm 6, x = \pm \frac{1}{3}, x = \pm \frac{2}{3}$  утгуудад шалгаж үзье.

$x = \frac{2}{3}$  үед  $P\left(\frac{2}{3}\right) = 3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 + 4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 + 5 \cdot \frac{2}{3} - 6 = 0$  тул  $P(x)$  нь  $3x - 2$  олон гишүүнтэд хуваагдана. Иймд  $P(x) = (3x - 2)(x^2 + 2x + 3)$  болно.

**Жишээ 2.**  $2x^3 - 7x^2 + 10x - 6 = 0$  тэгшитгэл бод.

**Бодолт.** Тэгшитгэлийн язгуурыг  $\frac{t}{s}$  хэлбэртэй хайя. Тэгвэл

$s = \pm 1, \pm 2$  ба  $t = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$  боломжууд байна.

Тэгшитгэлийн язгуур сөрөг тоо байж болохгүй. Учир нь сөрөг тоо байвал илэрхийллийн утга сөрөг тоо болох тул тэгээс бага болно. Иймд зерэг язгууртай. Мөн сондгой бүхэл шийдгүй байна. Учир нь сондгой язгууртай бол гурван тэгш нэг сондгой тооны нийлбэр 0 гарахад хүрч зөрчил болно. Эндээс тэгшитгэлийн

язгуур  $2, 6, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$  байх боломжтой. Эдгээрийг шалгаж үзвэл  $x = \frac{3}{2}$  гэсэн язгуур олдоно. Өөрөөр хэлбэл  $2x^3 - 7x^2 + 10x - 6$  олон гишүүнт  $(2x - 3)$ -д хуваагдах ба тэгшитгэлийг  $(2x - 3)(2x^2 - 4x + 4) = 0$  гэж хувиргаж болно гэсэн үг.  $2x^2 - 4x + 4 = 0$  тэгшитгэл шийдгүй тул  $x = \frac{3}{2}$  гэсэн нэг язгуур олдоно. Хариу  $x = \frac{3}{2}$

### ДАСГАЛ

**20.** Олон гишүүнтийг үржвэрт задал.

- |                           |                            |                           |
|---------------------------|----------------------------|---------------------------|
| a) $x^3 - 5x^2 - 2x + 24$ | b) $x^3 - 19x + 30$        | v) $2x^3 - 3x^2 + 4x + 9$ |
| г) $x^3 - 4x^2 - 4x - 5$  | д) $2x^3 - 3x^2 + 5x - 14$ | е) $3x^3 - x^2 + x + 2$   |
| ё) $x^3 - x^2 - 4x - 6$   | ж) $x^3 - 3x^2 + 2x + 6$   | з) $x^3 - 2x^2 - 6x + 7$  |

**21.** Олон гишүүнтийг үржвэрт задал.

- |                                    |                                   |
|------------------------------------|-----------------------------------|
| a) $x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 4x + 2$    | б) $z^4 + 6z^3 + 4z^2 - 15z - 6$  |
| в) $x^4 - 2x^3 - 14x^2 + 15x + 56$ | г) $2x^4 + 3x^3 - 16x^2 + 3x + 2$ |

**22.** Тэгшитгэл бод.

- |                         |                           |                           |
|-------------------------|---------------------------|---------------------------|
| a) $(x+1)^4 = 16$       | б) $(2x+1)^3 = 27$        | в) $(x-2)^6 = 64$         |
| г) $(3x-1)^5 = 32$      | д) $x^8 - 15x^4 - 16 = 0$ | е) $x^4 - 12x^2 + 27 = 0$ |
| ё) $x^6 - 7x^3 - 8 = 0$ | ж) $x^8 - 82x^4 + 81 = 0$ | з) $x^4 + 2x^2 - 15 = 0$  |

**23.** Тэгшитгэл бод.

- |                                  |                                 |
|----------------------------------|---------------------------------|
| a) $x^3 + 4x^2 + 6x + 3 = 0$     | б) $x^3 - 6x^2 + 5x + 12 = 0$   |
| в) $2x^3 - 5x^2 - 4x + 3 = 0$    | г) $6x^3 - 17x^2 - 26x - 8 = 0$ |
| д) $x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = 0$     | е) $2x^3 + 7x^2 + 2x - 3 = 0$   |
| ё) $6x^3 - x^2 - 4x - 1 = 0$     | ж) $x^3 - 19x + 30 = 0$         |
| з) $6x^3 - 43x^2 + 71x - 30 = 0$ | и) $x^3 + 9x^2 + 23x + 15 = 0$  |
| й) $6x^3 + 10x^2 + 27x + 18 = 0$ | к) $x^3 - 3x^2 - 9x - 5 = 0$    |

**24.** Тэгшитгэл бод.

- |                                      |  |
|--------------------------------------|--|
| a) $x^4 - 6x^3 + 7x^2 + 18 = 0$      | б) $48x^4 - 248x^3 + 27x^2 + 63x + 10 = 0$ |
| в) $x^4 - x^3 - 13x - 15 = 0$        | г) $x^4 - 3x^3 - 2x^2 + 2x + 12 = 0$       |
| д) $2x^4 + 3x^3 - x^2 + 3x + 2 = 0$  | е) $x^4 + 2x^3 + x^2 - 4 = 0$              |
| ё) $(x^2 + 6x - 5)^2 + x^3 - 5x = 0$ | ж) $x^4 + 6x^3 - 24x - 16 = 0$             |
| з) $x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x - 6 = 0$  |  |

## 2.4. РАЦИОНАЛ ИЛЭРХИЙЛЛИЙГ ОЛОН ГИШҮҮНТ БОЛОН АЛГЕБРЫН ХЯЛБАР БУТАРХАЙН НИЙЛБЭР БОЛГОН ЗАДЛАХ

Бид  $\frac{3}{x+2}$ ,  $\frac{5}{x-1}$  хоёр алгебрын хялбар бутархай өгсөн үед тэдгээрийн нийлбэрийг олж чадна.

$$\begin{aligned}\frac{3}{x+2} + \frac{5}{x-1} &= \frac{3(x-1)}{(x+2)(x-1)} + \frac{5(x+2)}{(x-1)(x+2)} \\ &= \frac{3x-3}{(x+2)(x-1)} + \frac{5x+10}{(x-1)(x+2)} = \frac{8x+7}{(x+2)(x-1)}\end{aligned}$$

Энэ үйлдлийг буцаан  $\frac{8x+7}{(x+2)(x-1)}$ -ыг алгебрын хялбар бутархайн нийлбэр болгон задлах тухай авч үзнэ.

Тодруулбал  $\frac{8x+7}{(x+2)(x-1)}$  өгсөн үед  $\frac{3}{x+2}$ ,  $\frac{5}{x-1}$  гэсэн алгебрын бутархайн нийлбэр болгон задлах тухай авч үзнэ.

**Тодорхойлолт.**  $\frac{A}{(ax+b)^k}$ ,  $\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$  (Энд  $b^2 - 4ac < 0$ ) хэлбэрийн рационал илэрхийллийг алгебрын хялбар бутархай гэе. Энд  $k$  нь натурал тоо,  $A, B, a, b, c$  нь бодит тоо,  $x$  нь хувьсагч юм.

$\frac{8x+7}{(x+2)(x-1)}$  нь алгебрын хялбар бутархай биш юм. Учир нь бутархайн хуваарь шугаман үржигдэхүүнд задарсан байна.

Эхлээд  $P(x)$  олон гишигийн зэрэг нь  $Q(x)$  олон гишигийн зэргээс бага үед  $\frac{P(x)}{Q(x)}$  илэрхийллийг алгебрын хялбар бутархайн нийлбэр болгон задалъя.

**Жишээ 1.**  $\frac{8x+7}{(x+2)(x-1)}$  илэрхийллийг алгебрын хялбар бутархайн нийлбэр болгон задал.

**Бодолт.**  $\frac{8x+7}{(x+2)(x-1)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-1}$  гэж задалсан гэе.  $A, B$ -г ольё.

$$\frac{8x+7}{(x+2)(x-1)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-1} = \frac{A(x-1) + B(x+2)}{(x+2)(x-1)}$$

Эндээс

$$8x + 7 = A(x - 1) + B(x + 2)$$

гэсэн адилтгал биелнэ. Төсөөтэй гишүүдийг эмхэтгэхэд

$$8x + 7 = (A + B)x + (-A + 2B)$$

болно. Хоёр олон гишүүнт тэнцүү тул  $A, B$  нь  $\begin{cases} A + B = 8 \\ -A + 2B = 7 \end{cases}$  тэгшигтгэлийн системийн шийд болно. Уг тэгшигтгэлийн системийг бодоход  $A = 3, B = 5$  гэж гарна. Иймд

$$\frac{8x + 7}{(x + 2)(x - 1)} = \frac{3}{x + 2} + \frac{5}{x - 1}$$

гэсэн алгебрын хялбар бутархайн нийлбэр болгон задаллаа.

Өмнөх жишээнд  $A, B$  коэффициентийг олоход хоёр олон гишүүнт тэнцүү болохыг ашигласан. Харин дараагийн жишээнд хялбар аргаар  $x$  хувьсагчид утга орлуулж тооцоолон  $A, B$  коэффициентийг олох болно.

**Жишээ 2.**  $\frac{15x + 2}{2x^2 + x - 6}$  илэрхийллийг алгебрын хялбар бутархайн нийлбэр болгон задал.

**Бодолт.** Хуваарийг үржигдэхүүн болгон задалъя.  $2x^2 + x - 6 = (x + 2)(2x - 3)$

$$\frac{15x + 2}{(x + 2)(2x - 3)} = \frac{A}{x + 2} + \frac{B}{2x - 3}$$

гэсэн алгебрын хялбар бутархайн нийлбэр болгон задалсан гэе.  $A, B$  коэффициентийг ольё.

$$\frac{15x + 2}{(x + 2)(2x - 3)} = \frac{A}{x + 2} + \frac{B}{2x - 3} = \frac{A(2x - 3) + B(x + 2)}{(x + 2)(2x - 3)}$$

болно. Эндээс

$$15x + 2 = A(2x - 3) + B(x + 2)$$

адилтгал биелнэ.

Хэрэв  $x = -2$  бол  $-30 + 2 = A(-4 - 3) + B(-2 + 2)$  болох тул  $A = 4$  гэж гарна. Хэрэв  $x = 1.5$  бол  $22.5 + 2 = A(3 - 3) + B(1.5 + 2)$  болох тул  $B = 7$  гэж гарна. Иймд

$$\frac{15x + 2}{(x + 2)(2x - 3)} = \frac{4}{x + 2} + \frac{7}{2x - 3}.$$

**Тайлбар.**  $\frac{15x + 2}{(x + 2)(2x - 3)} = \frac{A}{x + 2} + \frac{B}{2x - 3}$  бутархайн хувьд  $x \neq -2, x \neq 1.5$  хязгаарлалтыг хайхрахгүй  $15x + 2 = A(2x - 3) + B(x + 2)$  адилтгалаас олсон  $A = 4, B = 7$  утгын хувьд бутархайн  $x \neq -2, x \neq 1.5$  шаардлага хэвээр биелнэ.

$x = -2, x = 1.5$  гэж авснаар  $A, B$ -ийн утга өмнөх жишээний бодолттой харьцуулбал хялбар олдож байна.

**Жишээ 3.**  $P(x) = 2x^2 + 3x + 4, Q(x) = ax^2 + bx + c$  гэсэн хоёр зэргийн олон гишүүнт байг. Хэрэв  $x$  хувьсагчийн ялгаатай гурван утгад  $P(x) = Q(x)$  биелдэг бол түүний бүх утгад  $P(x) = Q(x)$  биелнэ.

**Бодолт.**  $x = -1, x = 0, x = 1$  гэсэн гурван утгад  $P(x) = Q(x)$  гэж үзье. Иймд

$$\begin{cases} Q(-1) = P(-1) = 3 \\ Q(0) = P(0) = 4 \\ Q(1) = P(1) = 9 \end{cases}$$

биелнэ. Эндээс  $P(x) - Q(x)$  олон гишүүнт  $x = -1, x = 0, x = 1$  гэсэн гурван язгууртай.  $P(x) - Q(x)$  нь хоёроос ихгүй зэргийн олон гишүүнт бөгөөд гурван ялгаатай язгууртай тул тэг олон гишүүнт байна. Θөрөөр хэлбэл  $P(x) = Q(x)$  буюу  $x$  хувьсагчийн утга бүрд  $P(x) = Q(x)$  байна.

Хэрэв рационал илэрхийллийн хуваарийг

$(px + q)(rx + s)$  эсвэл  $(px + q)(rx + s)(mx + n)$  гэж үржигдэхүүн болон задалсан бол:

(1)  $\frac{ax + b}{(px + q)(rx + s)}$  хэлбэрийн илэрхийллийг  $\frac{A}{px + q} + \frac{B}{rx + s}$  гэсэн нийлбэр болгон задална.

(2)  $\frac{ax^2 + bx + c}{(px + q)(rx + s)(mx + n)}$  хэлбэрийн илэрхийллийг  $\frac{A}{px + q} + \frac{B}{rx + s} + \frac{C}{mx + n}$  гэсэн нийлбэр болгон задална.

**Жишээ 4.**  $\frac{3x^2 + 19x - 32}{(x-1)(x-2)(x+4)}$ -ийг алгебрын хялбар бутархайн нийлбэр болгон задал.

**Бодолт.** Хуваарь нь  $(x-1)(x-2)(x+4)$  шугаман үржигдэхүүний үржвэр тул

$$\frac{3x^2 + 19x - 32}{(x-1)(x-2)(x+4)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+4}$$

гэж задалсан гэе.

$$\frac{3x^2 + 19x - 32}{(x-1)(x-2)(x+4)} = \frac{A(x-2)(x+4) + B(x-1)(x+4) + C(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)(x+4)}$$

болно.

Эндээс  $3x^2 + 19x - 32 = A(x-2)(x+4) + B(x-1)(x+4) + C(x-1)(x-2)$  буюу

$3x^2 + 19x - 32 = Ax^2 + 2Ax - 8A + Bx^2 + 3Bx - 4B + Cx^2 - 3Cx + 2C$  адитгал биелэх болно. Төсөөтэй гишүүдийг эмхэтгэхэд

$3x^2 + 19x - 32 = (A+B+C)x^2 + (2A+3B-3C)x + (-8A-4B+2C)$  болно. Эндээс хоёр аргаар  $A, B, C$ -т ольё.

**I арга.** Хоёр олон гишүүнт тэнцүү тул  $A, B, C$  нь

$$\begin{cases} A + B + C = 3 \\ 2A + 3B - 3C = 19 \\ -8A - 4B + 2C = -32 \end{cases}$$

тэгшитгэлийн системийн шийд болно. Энэ тэгшитгэлийн системийг бодоход  $A = 2, B = 3, C = -2$  гэж гарах тул

$$\frac{3x^2 + 19x - 32}{(x-1)(x-2)(x+4)} = \frac{2}{x-1} + \frac{3}{x-2} + \frac{-2}{x+4}$$

болно.

**II арга.**  $3x^2 + 19x - 32 = A(x-2)(x+4) + B(x-1)(x+4) + C(x-1)(x-2)$

биелнэ. Иймд хэрэв  $x = 1$  бол  $3 + 19 - 32 = A(1-2)(1+4)$ . Эндээс  $A = 2$  гэж гарна.

Хэрэв  $x = 2$  бол  $12 + 38 - 32 = B(2-1)(2+4)$ . Эндээс  $B = 3$  гэж гарна.

Хэрэв  $x = -4$  бол  $48 - 76 - 32 = C(-4-1)(-4-2)$ . Эндээс  $C = -2$  гэж гарна. Иймд

$$\frac{3x^2 + 19x - 32}{(x-1)(x-2)(x+4)} = \frac{2}{x-1} + \frac{3}{x-2} + \frac{-2}{x+4}$$

болно.

Хэрэв рационал илэрхийллийн хуваарийг  $(px+q)^2$  төвэлд  $(px+q)^3$  гэсэн үржигдэхүүн болгон задалсан бол

(3)  $\frac{ax+b}{(px+q)^2}$  хэлбэрийн илэрхийллийг  $\frac{A}{px+q} + \frac{B}{(px+q)^2}$  гэсэн нийлбэр болгон задална.

(4)  $\frac{ax^2+bx+c}{(px+q)^3}$  хэлбэрийн илэрхийллийг  $\frac{A}{px+q} + \frac{B}{(px+q)^2} + \frac{C}{(px+q)^3}$  гэсэн нийлбэр болгон задална.

**Жишээ 5.**  $\frac{9x+2}{(x+1)^2}$  илэрхийллийг алгебрын хялбар бутархайн нийлбэр болгон задал.

**Бодолт.** Хуваарь нь  $(x+1)^2$  тул

$$\frac{9x+2}{(x+1)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2}$$

гэсэн алгебрын хялбар бутархайн нийлбэр болгон задална.  $A, B$ -г ольё.

$$\frac{9x+2}{(x+1)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} = \frac{A(x+1) + B}{(x+1)^2}$$

болно. Эндээс

$$9x+2 = A(x+1) + B \text{ буюу } 9x+2 = Ax + A + B$$

адилтгал биелнэ. Хоёр олон гишүүнт тэнцүү тул  $\begin{cases} A=9 \\ A+B=2 \end{cases}$  тэгшитгэлийн систем үүсэх ба эндээс  $A=9, B=-7$  гэж гарна. Иймд

$$\frac{9x+2}{(x+1)^2} = \frac{9}{x+1} + \frac{-7}{(x+1)^2} = \frac{9}{x+1} - \frac{7}{(x+1)^2}$$

Хэрэв рационал илэрхийллийн хуваарийг  $(px+q)(rx+s)^2$  гэсэн үржигдэхүүн болон задалсан бол

(5)  $\frac{ax^2+bx+c}{(px+q)(rx+s)^2}$  хэлбэрийн илэрхийллийг  $\frac{A}{px+q} + \frac{B}{rx+s} + \frac{C}{(rx+s)^2}$  гэсэн нийлбэр болгон задална.

**Жишээ 6.**  $\frac{5x^2+11x+2}{x(x+1)^2}$  илэрхийллийг алгебрын хялбар бутархайн нийлбэр болгон задал.

**Бодолт.** Хуваарь нь  $x(x+1)^2$  тул

$$\frac{5x^2+11x+2}{x(x+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}$$

гэсэн алгебрын хялбар бутархайн нийлбэрт задарна.  $A, B, C$ -г ольё.

$$\frac{5x^2+11x+2}{x(x+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2} = \frac{A(x+1)^2 + Bx(x+1) + Cx}{x(x+1)^2}$$

болов ба эндээс

$$5x^2+11x+2 = A(x+1)^2 + Bx(x+1) + Cx$$

гэсэн адилтгал биелнэ.

Хэрэв  $x = -1$  үед  $5 - 11 + 2 = A(-1+1) + B \cdot (-1)(-1+1) + C(-1)$  болох тул  $C = 4$  гэж гарна.

Хэрэв  $x = 0$  үед  $5 \cdot 0^2 - 11 \cdot 0 + 2 = A(0+1) + B \cdot 0 \cdot (0+1) + C \cdot 0$  болох тул  $A = 2$  гэж гарна.

Хэрэв  $x = 1$  үед  $5 + 11 + 2 = A(1+1) + B(1+1) + C$  болох тул  $B = 3$  гэж гарна. Иймд

$$\frac{5x^2 + 11x + 2}{x(x+1)^2} = \frac{2}{x} + \frac{3}{x+1} + \frac{4}{(x+1)^2}$$

боловно.

Хэрэв рационал илэрхийллийн хуваарийг  $(px+q)(rx^2+s)$  гэсэн үржигдэхүүн болгон задалсан ба  $(rx^2+s)$  нь үржигдэхүүн болон задрахгүй бол

(6)  $\frac{ax^2 + bx + c}{(px+q)(rx^2+s)}$  хэлбэрийн илэрхийллийг  $\frac{A}{px+q} + \frac{Bx+C}{rx^2+s}$  гэсэн нийлбэр болгон задална.

**Жишээ 7.**  $\frac{4}{(2x-1)(x^2+4)}$  илэрхийллийг алгебрын хялбар бутархайн нийлбэр болгон задал.

**Бодолт.** Хуваарь нь  $(2x-1)(x^2+4)$  тул

$$\frac{4}{(2x-1)(x^2+4)} = \frac{A}{2x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+4}$$

гэсэн алгебрын хялбар бутархайн нийлбэр болгон задална.  $A, B, C$ -г ольё.

$$\frac{4}{(2x-1)(x^2+4)} = \frac{A(x^2+4) + (Bx+C)(2x-1)}{2x-1}$$

болов ба эндээс

$$4 = A(x^2+4) + (Bx+C)(2x-1)$$

буую

$$4 = Ax^2 + 4A + 2Bx^2 - Bx + 2Cx - C$$

адилтгал биелнэ. Төсөөтэй гишүүдийг эмхэтгэхэд

$$4 = (A+2B)x^2 + (-B+2C)x + (4A-C)$$

болов бөгөөд хоёр олон гишүүнт тэнцүү тул  $A, B, C$  нь

$$\begin{cases} A+2B=0 \\ -B+2C=0 \\ 4A-C=4 \end{cases}$$

тэгшитгэлийн системийн шийд болно.

Тэгшитгэлийн системийг бодоход  $A = \frac{16}{17}$ ,  $B = -\frac{8}{17}$ ,  $C = -\frac{4}{17}$  гэж гарах тул

$$\frac{4}{(2x-1)(x^2+4)} = \frac{\frac{16}{17}}{2x-1} + \frac{-\frac{8}{17}x - \frac{4}{17}}{(x^2+4)} = \frac{16}{17(2x-1)} - \frac{8x+4}{17(x^2+4)}$$

болно.

### ДАСГАЛ

**25.** Алгебрын хялбар бутархай мөн эсэхийг тогтоо.

a) $\frac{6}{3x+1}$	б) $\frac{5x}{2x+3}$	в) $\frac{x^2+2x+5}{3x+4}$	г) $\frac{11}{(x-1)^2}$
д) $\frac{2x^2+3x+1}{(x+6)^2}$	е) $\frac{27}{x^2-4x+4}$	ё) $\frac{11-3x}{(4x+2)^2}$	ж) $\frac{17}{4x^2+3}$
з) $\frac{x^4}{(x+1)^2}$	и) $\frac{2^4}{(4x-1)^2}$	й) $\frac{3x+1}{4x^2+3}$	к) $\frac{13}{4x^2-3}$

**26.** Илэрхийллийг хялбарчил.

a) $\frac{6x}{3x-1} - \frac{2x}{x+1}$	б) $\frac{5x}{x+1} + \frac{x+1}{2x+1}$	в) $\frac{5}{x-2} - \frac{3x}{x+1}$
г) $\frac{x+3}{(x-1)(x+4)} + \frac{1}{(x-1)}$	д) $\frac{x+5}{x+3} + \frac{2}{x^2+3x}$	е) $\frac{5}{x-2} - \frac{x+10}{x^2-4}$
ё) $\frac{11-3x}{x^2+2x-3} - \frac{2}{x-1}$	ж) $\frac{11x+27}{2x^2+8x-10} - \frac{2}{x-1}$	

**27.** Илэрхийллийг хялбарчил.

a) $\frac{4x+6}{x-1} \cdot \frac{2x}{2x+3}$	б) $\frac{x^2-9}{x^2-4x+4} \cdot \frac{x-2}{x+3}$
в) $\frac{x^2+5x-6}{x^2-5x+4} : \frac{x^2+9x+18}{x^2-x-12}$	г) $\frac{-2x^2+7x-6}{8x^2-10x+3} : \frac{x^2-x-30}{5-19x-4x^2}$

**28.** Хэрэв  $a = \frac{1}{x-2}$ ,  $b = \frac{x-1}{x-6}$  бол дараах илэрхийллийг хялбарчил.

а) $a+b$	б) $xa-2b$	в) $(x-3)a-2b$	г) $xa+7b$
----------	------------	----------------	------------

**29.** Илэрхийллийг хялбарчил.

а) $\frac{2}{x^3-3x^2+2x} + \frac{2}{x^3-6x^2+11x-6}$	б) $\frac{5}{3x-1} - \frac{4}{2x-1} + \frac{6x-1}{6x^2-5x+1}$
---	---

**30.** Дараах рационал илэрхийллийг тодорхой бус коэффициентийн аргаар алгебрын хялбар бутархайн нийлбэр болгон задал.

а)  $\frac{4}{(x+2)(x-2)}$

б)  $\frac{6}{(x-2)(x+1)}$

в)  $\frac{x}{(x-3)(2x+1)}$

г)  $\frac{8}{(2x-1)(x+2)}$

д)  $\frac{7x-23}{(x-2)(x-5)}$

е)  $\frac{29-3x}{(x-3)(x+2)}$

ё)  $\frac{4x+12}{x^2-3x}$

ж)  $\frac{4x+12}{4x^2-9}$

з)  $\frac{-x+13}{x^2-x-6}$

и)  $\frac{-2x+23}{x^2-3x-4}$

й)  $\frac{10x}{2x^2-3x+1}$

к)  $\frac{x+11}{2x^2-x-10}$

**31.** Дараах рационал илэрхийллийг тодорхой бус коэффициентийн аргаар алгебрын хялбар бутархайн нийлбэр болгон задал.

а)  $\frac{3x}{(x+4)^2}$

б)  $\frac{5x}{(x-2)^2}$

в)  $\frac{3x-4}{(x-5)^2}$

г)  $\frac{x+1}{3(x-2)^2}$

д)  $\frac{15x+16}{(3x+4)^2}$

е)  $\frac{x-1}{x^2+4x+4}$

ё)  $\frac{4x+1}{16x^2-8x+1}$

ж)  $\frac{4x+12}{4x^2+12x+9}$

**32.** Дараах рационал илэрхийллийг тодорхой бус коэффициентийн аргаар алгебрын хялбар бутархайн нийлбэр болгон задал.

а)  $\frac{1}{x(x+1)(x+2)}$

б)  $\frac{x+10}{(x-3)(x-2)(x+1)}$

в)  $\frac{9x^2-10x+1}{(x-3)(x-2)(x+1)}$

г)  $\frac{5x^2+2x+1}{x^3-4x}$

д)  $\frac{x^2+x-30}{x^3-x^2-9x+9}$

е)  $\frac{2x+1}{x^3-2x^2-5x+6}$

ё)  $\frac{2x}{6x^3+5x^2-2x-1}$

ж)  $\frac{4x+12}{x^3+x^2-30x}$

**33.** Дараах рационал илэрхийллийг тодорхой бус коэффициентийн аргаар алгебрын хялбар бутархайн нийлбэр болгон задал.

а)  $\frac{x^2+x+1}{x^2(x+1)}$

б)  $\frac{x-3}{(x+2)^2x}$

в)  $\frac{x-3}{(x+2)^2(x-1)}$

г)  $\frac{x^2+7x+12}{(x-3)^2(x+2)}$

д)  $\frac{5}{x^3+4x^2-3x-18}$

е)  $\frac{2x+1}{x^3-5x^2+8x-4}$

ё)  $\frac{12x^2+x+12}{-16x^3+40x^2-33x+9}$

ж)  $\frac{-4x^2+18x-7}{12x^3-32x^2+15x+9}$

**34.** Дараах илэрхийллийг алгебрын хялбар бутархайн нийлбэр болгон задал.

a)  $\frac{x+1}{x(x^2+1)}$

б)  $\frac{4x^2 - 4x - 3}{(x-2)(x^2+1)}$

в)  $\frac{14x^2 + 3x + 18}{(3x^2 + 4)(x-1)}$

г)  $\frac{-18x^2 - 8x - 7}{(5x^2 + 1)(3x + 2)}$

д)  $\frac{1}{4x^3 - 2x^2 + 2x - 1};$

е)  $\frac{x^2 - x + 1}{x^3 + x^2 + x + 1}$

ё)  $\frac{34x^2 + 3x - 25}{32x^3 - 112x^2 + 10x - 35}$

ж)  $\frac{2x^2 + 31x + 44}{18x^3 - 4x^2 + 45x - 10}$

Одоо  $P(x)$  олон гишүүнтийн зэрэг нь  $Q(x)$  олон гишүүнтийн зэргээс багагүй үед

$\frac{P(x)}{Q(x)}$  илэрхийллийг олон гишүүнт болон алгебрын хялбар бутархайн нийлбэр болгон задалъя.

**Жишээ 8.**  $\frac{2x^3 - x^2 + 8x + 8}{2x^2 + x - 6}$  илэрхийллийг олон гишүүнт болон алгебрын хялбар бутархайн нийлбэр болгон задал.

**Бодолт.** Өгсөн илэрхийллийн хүртвэр дэх олон гишүүнтийн зэрэг нь хуваарь дахь олон гишүүнтийн зэргээс их тул  $2x^3 - x^2 + 8x + 8$  олон гишүүнтийг  $(2x^2 + x - 6)$ -д хуваая. Тэгвэл  $x - 1$  ногдвор,  $15x + 2$  үлдэгдэл гарна. Эндээс

$$2x^3 - x^2 + 8x + 8 = (2x^2 + x - 6)(x + 1) + 15x + 2$$

гэж бичиж болох ба

$$\frac{2x^3 - x^2 + 8x + 8}{2x^2 + x - 6} = \frac{(2x^2 + x - 6)(x + 1) + 15x + 2}{2x^2 + x - 6} = (x + 1) + \frac{15x + 2}{2x^2 + x - 6}$$

болно. Иймд  $\frac{2x^3 - x^2 + 8x + 8}{2x^2 + x - 6}$  бутархайг  $x - 1$  олон гишүүнт болон  $\frac{15x + 2}{2x^2 + x - 6}$  рационал илэрхийллийн нийлбэр болгон задаллаа.

Жишээ 2-т  $\frac{15x + 2}{2x^2 + x - 6}$  рационал илэрхийллийг алгебрын хялбар бутархайн нийлбэр болгон  $\frac{15x + 2}{2x^2 + x - 6} = \frac{4}{x + 2} + \frac{7}{2x - 3}$  гэж задалсан тул

$$\frac{2x^3 - x^2 + 8x + 8}{2x^2 + x - 6} = (x + 1) + \frac{15x + 2}{2x^2 + x - 6} = (x + 1) + \frac{4}{x + 2} + \frac{7}{2x - 3}$$

болно.

## Дүгнэлт

$P(x)$ ,  $Q(x)$  нь олон гишүүнт ба  $P(x)$ -ийн зэрэг нь  $Q(x)$ -ийн зэргээс багагүй байг. Тэгвэл  $\frac{P(x)}{Q(x)}$  илэрхийллийг олон гишүүнт болон алгебрын хялбар бутархайн нийлбэр болгон задалж болно. Хэрэв  $P(x)$ -ийг  $Q(x)$ -д хуваахад  $S(x)$  ногдвор,  $R(x)$  үлдэгдэл гарсан бол

Олон гишүүнт

Рационал илэрхийлэл

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = S(x) + \frac{R(x)}{Q(x)} \text{ болно.}$$

## ДАСГАЛ

35.  $\frac{x^3 - 4}{x^2 - 4} = S(x) + \frac{4(x-1)}{x^2 - 4}$  байх  $S(x)$  олон гишүүнтийг хэрхэн олж болох вэ?
36.  $\frac{x^4 + x^2 + 1}{x^2 - x - 6} = x^2 + x + 8 + \frac{R(x)}{x^2 - x - 6}$  байх  $R(x)$  олон гишүүнтийг хэрхэн олж болох вэ?
37.  $\frac{x^4 - 5x^3 - 7x^2 + 48x - 53}{(x-2)(x-5)} = S(x) + \frac{ax + b}{(x-2)(x-5)}$  байх  $S(x)$  олон гишүүнт ба  $a, b$  тоог ол.
38.  $\frac{3x^4 + 4x^3 + 5x^2}{x^3 - 2x^2 - 5x + 6} = S(x) + \frac{ax^2 + bx + c}{x^3 - 2x^2 - 5x + 6}$  байх  $S(x)$  олон гишүүнт ба  $a, b, c$  тоог ол.
39. Дараах илэрхийллийг олон гишүүнт болон алгебрын хялбар бутархайн нийлбэр болгон задал.
- а)  $\frac{2x^3 + x^2 - 31x - 5}{x^2 - 3x - 4}$
- б)  $\frac{6x^4 - 5x^3 - 25x^2 + 9x - 9}{2x^2 - x - 10}$
- в)  $\frac{-x^4 + 6x^3 + 45x^2 - 186x - 210}{x^3 + x^2 - 30x}$
- г)  $\frac{2x^2 - 17x + 46}{(x-5)^2}$
- д)  $\frac{4x^3 + 8x^2 + x + 3}{4x^2 + 12x + 9}$
- е)  $\frac{2x^4 - 9x^3 + 25x^2 - 92x + 136}{2(x-3)(x-2)(x+1)}$
- ж)  $\frac{x^4 - 3x^3 + x^2 - 2x + 1}{x(x^2 + 1)}$
- ঃ)  $\frac{3x^3 - 10x^2 + 11x - 14}{2(x-3)^2(x+2)}$

3)  $\frac{7x^3 - 35x^2 + 66x - 23}{5(x^3 - 5x^2 + 8x - 4)}$

и)  $\frac{2x^4 - x^3 - 25x^2 + 12x + 102}{x^3 + 4x^2 - 3x - 18}$

й)  $\frac{45x^3 + 33x^2 + 20x + 6}{(5x^2 + 1)(3x + 2)}$

к)  $\frac{12x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x}{8x^3 - 4x^2 + 4x - 2}$

40.  $\frac{1}{x(x+1)}$  илэрхийллийг алгебрын хялбар бутархайн нийлбэр болгон задалж, түүнийг ашиглан  $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$  нийлбэрийг ол.

41.  $\frac{1}{x(x+2)}$  илэрхийллийг алгебрын хялбар бутархайн нийлбэр болгон задалж, түүнийг ашиглан дараах нийлбэрийг ол.

а)  $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$     б)  $\frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 8} + \dots + \frac{1}{2n(2n+2)}$

42.  $\frac{x^3 + x^2 + 1}{x(x+1)}$  илэрхийллийг олон гишүүнт болон алгебрын хялбар бутархайн нийлбэр болгон задалж, түүнийг ашиглан дараах нийлбэрийг ол.

$$\frac{1^3 + 1^2 + 1}{1 \cdot 2} + \frac{2^3 + 2^2 + 1}{2 \cdot 3} + \frac{3^3 + 3^2 + 1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{n^3 + n^2 + 1}{n(n+1)}$$

### БҮЛГИЙН НЭМЭЛТ ДААЛГАВАР

1.  $P(x)$  олон гишүүнтийг  $Q(x)$  олон гишүүнтэд хуваахад гарах үлдэгдлийг ол.

а)  $P(x) = x^2 + 5x + 7$     $Q(x) = x + 3$

б)  $P(x) = x^3 - 12x^2 - 42$     $Q(x) = x - 3$

в)  $P(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 1$     $Q(x) = x + 1$

г)  $P(x) = 24x^4 - 2x^2 + 3x - 1$     $Q(x) = x - 2$

д)  $P(x) = x^7 - 3x^5 + x^4 - 2x^3 + x + 4$     $Q(x) = x - 1$

е)  $P(x) = x^4 + x^3 + x + 1$     $Q(x) = x^3 + x + 1$

ё)  $P(x) = 2x^4 - 10x^3 + 23x^2 - 22x - 3$     $Q(x) = x^3 - 3x + 5$

ж)  $P(x) = x^7 - 3x^5 + x^4 - 2x^3 + x + 4$     $Q(x) = x - 1$

з)  $P(x) = x^5 - 6x^3 + 2x^2 - 4$     $Q(x) = x^2 - x + 1$

и)  $P(x) = x^5 - 6x^3 + 2x^2 - 4$     $Q(x) = x^2 - x + 1$

2. Үйлдлийг гүйцэтгэж ногдвор ба үлдэгдлийг ол.

а)  $A = (2a^2 - 3a - 2):(a - 2)$

б)  $A = (3a^2 + a - 2):(a + 1)$

в)  $A = (2a^2 - 3a + 3):(2a + 1)$

г)  $A = (3a^2 + a + 5):(3a - 2)$

д)  $A = (6a^3 - a^2 + 2a + 1):(3a + 1)$

е)  $A = (6a^2 + 7a - 5):(2a + 3)$

з)  $A = (6a^3 - 7a^2 + 3):(3a + 1)$

**3.** Үржигдэхүүн болгон задал.

а)  $2x^3 - 21x^2 + 37x + 24$

в)  $x^4 - x^3 - 7x^2 + 13x - 6$

д)  $x^3 - 3x^2 + 2x + 6$

е)  $x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 4x + 2$

з)  $x^4 - 15x^2 - 10x + 24$

**4.** Тэгшигтэл бод.

а)  $3x^3 - 12x = 0$

в)  $x^3 - 5x^2 - x + 5 = 0$

д)  $x^3 - 3x^2 - 6x + 8 = 0$

е)  $x^3 - 2x^2 - 9x + 18 = 0$

з)  $x^3 + 2x^2 - 36x - 72 = 0$

**5.** Тэгшигтгэл бод.

а)  $x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 106x - 120 = 0$

в)  $5x^4 - 3x^3 - 4x^2 - 3x + 5 = 0$

д)  $x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 3x + 1 = 0$

е)  $x^4 + 9x^3 + 15x^2 + 2x = 0$

з)  $6x^4 + 5x^3 - 38x^2 + 5x + 6 = 0$

и)  $x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 12 = 0$

е)  $A = (5a^3 - 2a^2 + 5a - 2):(5a - 2)$

ж)  $A = (10a^2 + a + 4):(2a + 1)$

и)  $A = (4a^3 - 5a^2 + 6a + 16):(4a + 3)$

б)  $5x^3 - 46x^2 + 79x - 14$

г)  $2x^3 - 3x^2 + 5x - 14$

е)  $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$

ж)  $x^4 + 3x^3 - 5x^2 - 6x - 8$

б)  $49x^3 + 14x^2 + x = 0$

г)  $x^3 - 7x + 6 = 0$

е)  $x^3 - x^2 - 8x + 12 = 0$

ж)  $x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0$

и)  $x^3 - 4x^2 + 3x + 2 = 0$

б)  $6x^4 + 7x^3 - 36x^2 - 7x + 6 = 0$

г)  $x^4 + 5x^3 + 5x^2 - 5x - 6 = 0$

е)  $5x^4 - 36x^3 + 62x^2 - 36x + 5 = 0$

ж)  $2x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 5x + 2 = 0$

и)  $x^4 - x^3 - 18x^2 + 16x + 32 = 0$

к)  $x^5 + 4x^4 - 3x^3 - 12x^2 - 4x - 16 = 0$

**6.** Хэрэв  $\frac{x^5 + x^4 + 5x^3 + 15x + 4}{(x^2 - 1)^2} = ax + b + \frac{R(x)}{(x^2 - 1)^2}$  ба  $R(x)$  нь гурваас ихгүй

зэргийн олон гишүүнт бол

а)  $a, b$  тоог ол;

б)  $R(x)$ -ийг ол;

в)  $\frac{R(x)}{(x^2 - 1)^2} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{(x - 1)^2} + \frac{C}{x + 1} + \frac{D}{(x + 1)^2}$  бол  $A, B, C, D$  тоог ол.

**7.** Хэрэв  $\frac{x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 4x + 5}{x^2 + x - 2} = ax^2 + bx + c + \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 2}$  бол  $a, b, c, A, B$  тоог ол.

**8.** Дараах рационал илэрхийллийг олон гишүүнт болон хялбар бутархайн нийлбэр болгон задал.

а)  $\frac{x^5 + 3}{x^2 - 1}$

б)  $\frac{x^4}{x^2 - 4x + 4}$

в)  $\frac{x^4 - x^2 + 5}{x^3 - 1}$

г)  $\frac{x^4 - 2x^3 - 4x^2 + x + 13}{x^2 - x - 6}$

9. Хэрэв  $\frac{2x^4+5}{Q(x)} = a + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2} + \frac{d}{(x-1)^3}$  бол  $a, b, c, d$  тоог ол.
10. Хэрэв  $Q(x)$  ба  $2x^4+5$  олон гишүүнт өрөнхий үржигдэхүүн агуулахгүй ба  $\frac{2x^4+5}{Q(x)} = c + \frac{ax+b}{x^2+x+1} + \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2}$  бол  $a, b, c, A, B$  тоог ол.
11. Хэрэв  $\frac{x-3x^2-26}{(x+1)(x^2+9)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+9}$  бол  $A, B, C$  тоог ол.
12. Дараах рационал илэрхийллийг алгебрын хялбар бутархайн нийлбэр болгон задал.
- а)  $\frac{8x-42}{x^2+3x-18}$     б)  $\frac{3x+11}{(x-3)(x+2)}$     в)  $\frac{9-9x}{2x^2+7x-4}$     г)  $\frac{4x^2}{(x-1)(x-2)^2}$   
 д)  $\frac{9x+25}{(x+3)^2}$     е)  $\frac{x^2+4}{3x^3+4x^2-4x}$     ё)  $\frac{8x^2-12}{x(x^2+2x-6)}$     ж)  $\frac{3x^2+7x-4}{(x^2+2)^2}$
13. Тэгш өндөгт хэлбэртэй теннисний ширээний талбайг  $5x^2+228x+756$  илэрхийллээр олно.
- а) Хэрэв ширээний өргөн  $x+42$  илэрхийлэл бол ширээний уртыг  $x$ -ээр илэрхийл.  
 б) Хэрэв уртыг өргөнд нь харьцуулсан харьцаа  $\frac{9}{5}$  бол  $x$ -ийн утгыг ол.  
 в) Ширээний урт болон өргөний хэмжээг ол.
14. Тэгш өндөгт хэлбэртэй биллиардын ширээний талбайг  $7x^2+172x+253$  илэрхийллээр олно.
- а) Хэрэв ширээний өргөн  $x+23$  илэрхийлэл бол ширээний уртыг  $x$ -ээр илэрхийл;  
 б) Хэрэв уртыг өргөнд нь харьцуулсан харьцаа 2:1 бол  $x$ -ийн утгыг ол;  
 в) Ширээний урт болон өргөний хэмжээг ол.
15.  $a, b$  нь тогтмол ба  $ax^3+2x^2+bx-1$  олон гишүүнтийг  $p(x)$  гэж тэмдэглээ. Хэрэв  $p(x)$  нь  $x-1$  шугаман үржигдэхүүн агуулдаг бөгөөд  $p(x)$ -ийг  $(2x+3)$ -д хуваахад гарах үлдэгдэл нь 5 бол  
 а)  $a, b$ -ийн утгыг ол;  
 б)  $p(x)$  олон гишүүнтийг үржигдэхүүн болгон задал.
16. Хэрэв  $p(x)$  олон гишүүнтийг  $(x-1)$ -д хуваахад гарах үлдэгдэл  $-2$ ,  $(x+2)$ -т хуваахад гарах үлдэгдэл  $-4$  бол  $p(x)$  олон гишүүнтийг  $(x^2+x-2)$ -д хуваахад гарах үлдэгдлийг ол.
17.  $a, b$  нь  $p(x)=x^2-5x+2$  олон гишүүнтийн язгуур байг. Хэрэв  $a+\frac{1}{b}, b+\frac{1}{a}$  нь  $x^2-kx+q=0$  тэгшитгэлийн шийд бол  $k, q$  тоог ол.

**Энэ бүлэг сэдвийг судалснаар сурагчид дараах мэдлэг чадварыг эзэмшинэ.**

- Тооны логарифмыг мэдэх, ойлгох
- Зэрэг ба логарифмын харилцан хамаарлыг ойлгох, логарифмын чанаруудыг мэдэх, хэрэглэх
- $a^x = b$ ,  $a^x \leq b$ ,  $a^x > b$  хэлбэрийн хялбар илтгэгч тэгшигэл, илтгэгч тэнцэтгэл бишийг логарифм ашиглан бодох
- Илтгэгч ба логарифм функцийн харилцан урвуу функцийн болохыг ойлгох, чанарыг мэдэх, хэрэглэх
- $e$  тоог мэдэх,  $y = e^x$  ба  $y = \ln x$  функцийн графикийг таних, тэдгээр нь харилцан урвуу функцийн болохыг мэдэх, чанарыг ойлгох, хэрэглэх
- Рационал функцийн графикийг таних, хялбар тохиолдолд графикийг нь байгуулах

### 3.1. ТООНЫ ЛОГАРИФМ

Бид бодит тооны рационал илтгэгчтэй зэрэг, түүний чанарыг ашиглан илэрхийллийг хэрхэн хялбарчлахыг мэднэ. Харин энэ хэсэгт бодит тооны логарифм, түүний чанар, бодит тооны зэрэг ба логарифм хоорондын хамаарлыг судлах ба логарифм агуулсан илэрхийллийг хялбарчилж сурна.

Тооны логарифмын тодорхойлолтыг үзэхийн өмнө дараах бодлого авч үзье.

**Бодлого 1.** Бактерийн өсгөвөрт анх 1000 бактери байсан ба минут тутамд бактерийн тоо 2 дахин өснө. Тэгвэл 1 мин, 2 мин, 3 мин гэх мэт  $t$  минутын дараа бактерийн тоо хэд болох вэ?

**Бодолт.** Бактерийн өсөлтийг хугацаанаас хамаарсан функцийн гэж үзэж болно. Өгсөн нөхцөл ёсоор  $t = 0$  үед  $y = 1000$  байна. Минут тутамд 2 дахин өсөх тул

$t = 1$  үед  $y = 1000 \cdot 2$ ,  $t = 2$  үед  $y = 1000 \cdot 2 \cdot 2$ ,  $t = 3$  үед  $y = 1000 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$  болно. Энэ мэтээр  $t$  минутын дараа бактерийн тоо нь

$$y = 1000 \cdot 2^t$$

Бодлого 1-ийн хувьд өөр нэг бодлого авч үзье. Ямар хугацааны дараа бактерийн тоо нь 60000 болох вэ? Өөрөөр хэлбэл  $1000 \cdot 2^t = 60000$  буюу  $2^t = 60$  байх  $t$ -ийн утгыг олно гэсэн үг юм. Энэ бодлого нь Жишээ 1 дэх бодлогын урвуу бодлого юм. Үүнийг бодохын тулд тооны логарифмыг мэдэх хэрэгтэй болно.

**Тодорхойлолт.** Хэрэв  $a \neq 1, a > 0, b > 0$  байх  $a, b$  тооны хувьд  $a^k = b$  бол  $k$  тоог  $b$  тооны  $a$  суурьтай логарифм гэх бөгөөд  $k = \log_a b$  гэж тэмдэглэдэг.  $b$  тоог логарифмын доорх тоо,  $a$  тоог логарифмын суурь гэж нэрлэдэг.  $\log_a b$  гэсэн бичлэгийг “логарифм  $a$  суурьтай  $b$ ” гэж уншдаг.

Өөрөөр хэлбэл,  $a \neq 1, a > 0, b > 0$  тооны хувьд

$$\text{Хэрэв } b = a^k \text{ бол } \log_a b = k \text{ ба}$$

$$\text{Хэрэв } \log_a b = k \text{ бол } b = a^k$$

байна. Эдгээр нөхцөлийг хамтатган

$$b = a^k \Leftrightarrow \log_a b = k$$

гэж бичдэг.

Бодлого 1-д  $2^t = 60$  байх  $t$ -ийн утгыг логарифмын тодорхойлолт ашиглан  $t = \log_2 60$  гэж олж болно.  $\log_2 60$ -ын утгыг тооны машин ашиглан ойролцоогоор олбол 5.91 буюу ойролцоогоор 6 минутын дараа бактерийн тоо 60000 болно.

**Жишээ 1.** а)  $2^5 = 32$ ; б)  $4^{-3} = \frac{1}{64}$  тэнцэтгэл тус бүрийг логарифм ашиглан бичиж, унш.

**Бодолт.** а)  $2^5 = 32$  тул тодорхойлолт ёсоор  $\log_2 32 = 5$  байна. Мөн  $\log_2 32 = 5$  тул  $2^5 = 32$  байна. Эдгээрийг хамтад нь бичвэл  $2^5 = 32 \Leftrightarrow \log_2 32 = 5$  байна.  $\log_2 32 = 5$  гэсэн бичлэгийг “32-ын 2 суурьтай логарифм нь 5-тай тэнцүү” эсвэл “логарифм 2 суурьтай 32 нь 5-тай тэнцүү” гэж уншдаг.

б)  $4^{-3} = \frac{1}{64} \Leftrightarrow \log_4 \frac{1}{64} = -3$  байна.  $\log_4 \frac{1}{64} = -3$  гэсэн бичлэгийг “ $\frac{1}{64}$ -ийн 4 суурьтай логарифм нь  $-3$ -тай тэнцүү” эсвэл “логарифм 4 суурьтай  $\frac{1}{64}$  нь  $-3$ -тай тэнцүү” гэж уншина.

**Жишээ 2.** а)  $\log_2 64 = 6$ ; б)  $\log_{\sqrt{2}} 8 = 6$ ; в)  $\log_4 \frac{1}{16} = -2$ ; г)  $\log_9 9 = 1$  тэнцэтгэлийг зэрэг ашиглан бич.

**Бодолт.** а)  $\log_2 64 = 6 \Leftrightarrow 2^6 = 64$ ; б)  $\log_{\sqrt{2}} 8 = 6 \Leftrightarrow (\sqrt{2})^6 = 8$ ;

в)  $\log_4 \frac{1}{16} = -2 \Leftrightarrow 4^{-2} = \frac{1}{16}$ ; г)  $\log_9 9 = 1 \Leftrightarrow 9^1 = 9$  байна.

**Жишээ 3.** Тодорхойлолт ашиглан а)  $\log_8 8$ ; б)  $\log_8 64$ ; в)  $\log_{\frac{1}{2}} 32$ ; г)  $\log_5 \frac{1}{125}$  логарифмын утгыг ол.

**Бодолт.** а)  $\log_8 8 = 1$ ; б)  $\log_8 64 = 2$ ; в)  $\log_{\frac{1}{2}} 32 = -5$ ; г)  $\log_5 \frac{1}{125} = -3$  байна.

**Жишээ 4.** а)  $\log_2 (\cos 60^\circ)$ ; б)  $\log_4 (\sin 30^\circ)$ ; в)  $\log_{\sqrt{2}} (\tan 45^\circ)$  логарифмын утгыг ол.

**Бодолт.**  $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ ,  $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ ,  $\tan 45^\circ = 1$  тул а)  $\log_2(\cos 60^\circ) = \log_2 \frac{1}{2} = -1$ ;

б)  $\log_4(\sin 30^\circ) = \log_4 \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$ ; в)  $\log_{\sqrt{2}}(\tan 45^\circ) = \log_{\sqrt{2}} 1 = 0$  гэж гарна.

**Санамж** Хэрэв логарифмын суурь нь 10-тай тэнцүү бол  $\lg$  гэсэн бичлэгийг ашигладаг. Тухайлбал,  $\lg 100 = 2$  юм.

Тодорхойлолт дээр тулгуурлан дараах дүгнэлтүүдийг хийж болно.

1. Хэрэв  $a \neq 1, a > 0$  бол  $a^0 = 1 \Leftrightarrow \log_a 1 = 0$  байна.
2. Хэрэв  $a \neq 1, a > 0$  бол  $a^1 = a \Leftrightarrow \log_a a = 1$  байна.
3. Хэрэв  $a, b, c$  нь эерэг тоо ба  $a \neq 1$  бол  $\log_a b = \log_a c \Leftrightarrow b = c$  байна.

**Санамж** Хэрэв  $a, b, c$  нь эерэг тоо ба  $a \neq 1$  бол  $b = c$  тэнцэтгэлийг  $\log_a b = \log_a c$  гэж бичиж болно. Үүнийг  $b = c$  тэнцэтгэлийг  $a$  сууриар логарифмчлах гэж ярьдаг. Ижил сууриар логарифмчлах нь зарим бодлогыг бodoход чухал ач холбогдолтой. Энэ тухай дараа авч үзнэ.

**Жишээ 5.** Дараах логарифм утгатай байх  $x$  бодит тоог ол.

$$\text{а)} \log_3(2-5x) \quad \text{б)} \log_{\frac{1}{2}}(3x+1)^2 \quad \text{в)} \log_{x-1}(x+5)$$

**Бодолт.** а)  $2-5x > 0$  үед  $\log_3(2-5x)$  утгатай байна.  $2-5x > 0$  тэнцэтгэл бишийг бodoход  $x < \frac{2}{5}$  болно. Иймд  $x \in \left] -\infty, \frac{2}{5} \right[$  үед  $\log_3(2-5x)$  нь утгатай.

б) Бүх бодит  $x$ -ийн хувьд  $(3x+1)^2 \geq 0$  байна. Логарифмын дор тэгээс эрс их тоо байх ёстой тул  $(3x+1)^2 \neq 0$  байна. Эндээс  $x \neq \frac{1}{3}$  байх бүх бодит тооны олонлог байна. Өөрөөр хэлбэл  $x \in \left] -\infty, \frac{1}{3} \right[ \cup \left] \frac{1}{3}, \infty \right[$  үед утгатай байна.

в)  $\log_{x-1}(x+5)$  илэрхийлэл нь

$$\begin{cases} x+5 > 0 \\ x-1 > 0 \\ x-1 \neq 1 \end{cases}$$

үед утгатай. Энэ системийг бodoход

$$\begin{cases} x > -5 \\ x > 1 \\ x \neq 2 \end{cases}$$

системд шилжих тул  $\log_{x-1}(x+5)$  нь  $x \in [1, 2) \cup ]2, \infty[$  үед утгатай.

## ДАСГАЛ

1. Дараах тэнцэтгэлийг зэрэг хэлбэртэй болгон бич.

a)  $\log_{\sqrt{5}} 125 = 6$

б)  $\log_4 \frac{1}{8} = -\frac{3}{2}$

в)  $\log_7 \sqrt{7} = \frac{1}{2}$

2. Дараах тэнцэтгэлийг логарифм ашиглан бич.

а)  $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 8$

б)  $256^{\frac{1}{4}} = 4$

в)  $11^0 = 1$

3. Дараах логарифмын утга тодорхойлогдох  $x$ -ийн утгыг ол.

а)  $\log_x (x^2 - 3x - 10)$

б)  $\log_{x-3} (-x^2 + 5x - 4)$

в)  $\log_{\frac{1}{3}} \left( \frac{x+5}{x} \right)$

4. Дараах нөхцөлийг хангах  $x$ -ийн утгыг ол.

а)  $\log_8 0.25 = x$

б)  $\log_{\frac{1}{\sqrt{3}}} x = -4$

в)  $\log_x 16 = \frac{4}{3}$

г)  $\log_{\frac{1}{2}} x = 5$

д)  $-\log_3 x = \frac{1}{3}$

е)  $\log_x 1024 = \frac{1}{5}$

5. Дараах илэрхийллийн утгыг ол.

а)  $\log_6 216 - \log_5 25$

б)  $2(\log_{\sqrt{3}} 3 + \log_3 1)$

в)  $-\frac{1}{3} \log_{\frac{1}{5}} 25 + \log_9 \sqrt{3}$

г)  $\log_{\frac{1}{3}} 81 + 3 \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{8}$

д)  $\frac{1}{2} \log_4 64 - 3 \log_5 \sqrt{5}$

е)  $-\sqrt{5} \log_{\sqrt{5}} 5 + 2\sqrt{5} \log_9 9$

## 3.2. ЛОГАРИФМЫН ЧАНАР

Логарифм агуулсан илэрхийлэл хялбарчлах, логарифм ашиглан тооцоо хийх гэх мэт олон зорилгыг хэрэгжүүлэхийн тулд логарифмын чанарыг мэдэх шаардлагатай. Энэ хэсэгт бид логарифмын чанарууд, тэдгээрийн баталгаа, чанаруудыг дангаар нь болон хамтад нь ашиглах, логарифмыг хэрэглэн асуудал шийдвэрлэх бодлогуудыг авч үзнэ.

**Чанар 1.** Үржвэрийн логарифмын чанар

Хэрэв  $a, b, c$  эерэг тоо ба  $a \neq 1$  бол

$$\log_a bc = \log_a b + \log_a c$$

$$(\log_a b + \log_a c = \log_a bc)$$

байна.

**Баталгаа.**  $\log_a b = x$ ,  $\log_a c = y$  гэе. Тодорхойлолт ёсоор

$$b = a^x, c = a^y$$

тул

$$b \cdot c = a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$

болно. Эндээс

$$b \cdot c = a^{x+y}$$

учир логарифмын тодорхойлолтоор

$$\log_a bc = x + y$$

болов бөгөөд  $x, y$ -ийг буцаан орлуулбал

$$\log_a bc = \log_a b + \log_a c$$

болж баталлаа.

**Жишээ 1.**  $\log_8 2 + \log_8 32$  илэрхийллийг хялбарчил.

**Бодолт.** Хэрэв үржвэрийн логарифмын чанар ашиглавал

$$\log_8 2 + \log_8 32 = \log_8 (2 \cdot 32) = \log_8 64 = 2 \text{ гэж гарна.}$$

**Жишээ 2.**  $\log_2 10 - \log_2 5$  илэрхийллийг хялбарчил.

**Бодолт.** Үржвэрийн логарифмын чанар ашиглан

$$\log_2 10 = \log_2 (2 \cdot 5) = \log_2 2 + \log_2 5$$

гэж бичиж болох тул

$$\log_2 10 - \log_2 5 = \log_2 2 + \log_2 5 - \log_2 5 = \log_2 2 = 1$$

гэж гарна.

**Чанар 2.** Ногдворын логарифмын чанар

Хэрэв  $a, b, c$  зерэг тоо ба  $a \neq 1$  бол

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$$

$$\log_a b - \log_a c = \log_a \frac{b}{c}$$

байна.

**Баталгаа.**  $\log_a b = x, \log_a c = y$  гэе. Тодорхойлолт ёсоор

$$b = a^x, c = a^y$$

тул

$$\frac{b}{c} = \frac{a^x}{a^y}$$

болно. Энд зэргийн чанар ашиглавал

$$\frac{b}{c} = a^{x-y}$$

болов ба логарифмын тодорхойлолтоор

$$\log_a \frac{b}{c} = x - y$$

байна. Энд  $x, y$ -ийг буцаан орлуулбал

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$$

болж баталлаа.

**Жишээ 3.**  $\log_3 2 - \log_3 18$  илэрхийллийг хялбарчил.

**Бодолт.** Ногдворын логарифмын чанарыг ашиглавал

$$\log_3 2 - \log_3 18 = \log_3 \frac{2}{18} = \log_3 \frac{1}{9} = -2 \text{ гэж гарна.}$$

**Жишээ 4.**  $\log_5 9 + \log_5 \frac{25}{9}$  илэрхийллийг хялбарчил.

**Бодолт.** Хэрэв ногдворын логарифмын чанарыг ашиглавал

$$\log_5 \frac{25}{9} = \log_5 25 - \log_5 9$$

болов тул

$$\log_5 9 + \log_5 \frac{25}{9} = \log_5 9 + (\log_5 25 - \log_5 9) = \log_5 25 = 2$$

гэж гарна.

### Чанар 3. Зэргийн логарифм

Хэрэв  $a, b$  эерэг тоо ба  $a \neq 1, k \in \mathbb{R}$  бол

$$\log_a b^k = k \log_a b$$

$$(k \log_a b = \log_a b^k)$$

байна.

**Баталгаа.** Хэрэв

$$\log_a b = x, \log_a b^k = y$$

гэвэл

$$a^x = b \text{ ба } a^y = b^k$$

болно. Мөн

$$y = \log_a b^k = \log_a (a^x)^k = \log_a a^{xk}$$

буую

$$y = \log_a a^{xk}$$

болно. Иймд логарифмын тодорхойлолт ёсоор

$$a^y = a^{xk}$$

байна. Эндээс

$$y = xk$$

гарна. Энд  $x, y$ -ийг буцаан орлуулбал

$$\log_a b^k = k \log_a b$$

олж баталлаа.

**Санамж** Хэрэв  $a$  нь  $a \neq 1$  эерэг тоо ба  $k \in \mathbb{R}$  бол  $\log_a a^k = k$  байна гэдэг нь Чанар 4-өөс мөрдөн гарна.

**Жишээ 5.**  $\log_3 6^3 - \log_3 8$  илэрхийллийг хялбарчил.

**Бодолт.** Хэрэв зэргийн логарифмын чанар ашиглавал

$$\log_3 6^3 - \log_3 8 = 3\log_3 6 - 3\log_3 2$$

болно. Үржвэрийн логарифмын чанар болон логарифмын тодорхойлолт ёсоор

$$\log_3 6 = \log_3 (2 \cdot 3) = \log_3 2 + \log_3 3 = \log_3 2 + 1$$

болов тул

$$3\log_3 6 - 3\log_3 2 = 3(\log_3 2 + 1) - 3\log_3 2 = 3\log_3 2 + 3 - 3\log_3 2 = 3$$

гэж гарна.

**Жишээ 6.**  $2\log_6 \sqrt{5} - \log_6 125$  илэрхийллийг хялбарчил.

**Бодолт.** Хэрэв зэргийн логарифмын чанар ашиглавал

$$2\log_6 \sqrt{5} = \log_6 (\sqrt{5})^2 = \log_6 5 \text{ ба } \log_6 125 = \log_6 5^3 = 3\log_6 5$$

болов тул

$$2\log_6 \sqrt{5} - \log_6 125 = \log_6 5 - 3\log_6 5 = -2\log_6 5 = \log_6 \frac{1}{25}$$

гэж гарна.

**Жишээ 7.** Дараах илэрхийллийг хялбарчил.

$$\text{а)} 1 - \log_5 2 + \log_5 10 \quad \text{б)} 2\lg 3 + \frac{1}{2}\lg 64 - 3\lg \sqrt[3]{6}$$

**Бодолт.**

$$\text{а)} 1 - \log_5 2 + \log_5 10 = \log_5 5 - \log_5 2 + \log_5 10 = \log_5 \left( \frac{5}{2} \cdot 10 \right) = \log_5 25 = 2 \text{ гарна.}$$

$$\text{б)} 2\lg 3 + \frac{1}{2}\lg 64 - 3\lg \sqrt[3]{6} = \lg 3^2 + \lg 64^{\frac{1}{2}} - \lg (\sqrt[3]{6})^3 = \lg 9 + \lg 8 - \lg 6 = \lg \frac{9 \cdot 8}{6} = \lg 12$$

гэж гарна.

**Жишээ 8.**  $6\log_2 \sqrt{3} \log_2 3 - 3(\log_2 3)^2$  илэрхийллийг хялбарчил.

**Бодолт.** Зэргийн логарифмын чанар ашиглавал  $6\log_2 \sqrt{3} = 3\log_2 3$  болох тул

$$6\log_2 \sqrt{3} \log_2 3 - 3(\log_2 3)^2 = 3(\log_2 3)^2 - 3(\log_2 3)^2 = 0 \text{ гэж гарна.}$$

**Санамж**  $(\log_2 3)^2 = \log_2 3 \log_2 3$  ба  $\log_2 3^2 = \log_2 (3 \cdot 3)$  тул эдгээр нь ялгаатай.

Иймд  $(\log_a b)^k$  ба  $\log_a b^k$  гэсэн бичлэгүүдийг ялгаж ойлгох хэрэгтэй.

$(\log_a b)^k$ -ийг бас  $\log_a^k b$  гэж бичдэг.

Хэрэв  $a, b$  эерэг тоонууд ба  $a \neq 1$  бол логарифмын тодорхойлолт ёсоор

$$a^{\log_a b} = b$$

гэж бичиж болно. Үүнийг **логарифмын үндсэн адилтгал** гэдэг.

**Жишээ 9.**  $4^{\log_4 5} - 9^{\log_9 4}$  илэрхийллийг хялбарчил.

**Бодолт.** Үндсэн адилтгал ёсоор  $4^{\log_4 5} - 9^{\log_9 4} = 5 - 4 = 1$  гэж гарна.

**Жишээ 10.** 3-ыг 8 суурьтай зэрэг хэлбэртэй болгон бич.

**Бодолт.** Үндсэн адилтгал ёсоор  $3 = 8^{\log_8 3}$  гэж бичиж болно.

**Жишээ 11.**  $3^{2\log_3 4 + \log_3 5 - 3 \log_3 2}$  илэрхийллийг хялбарчил.

**Бодолт.** Зэргийн илтгэгч болох  $2\log_3 4 + \log_3 5 - 3 \log_3 2$  илэрхийллийг логарифмын чанар ашиглан хялбарчилъя.

$$2\log_3 4 + \log_3 5 - 3 \log_3 2 = \log_3 16 + \log_3 5 - \log_3 8 = \log_3 \frac{16 \cdot 5}{8} = \log_3 10$$

болов тул

$$3^{2\log_3 4 + \log_3 5 - 3 \log_3 2} = 3^{\log_3 10} = 10$$

гэж гарна.

**Чанар 4.** Хэрэв  $a, b, c$  нь нэгээс ялгаатай эерэг тоо бол

$$a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$$

байна.

**Баталгаа.**  $a = b^{\log_b a}$  тул

$$a^{\log_b c} = (b^{\log_b a})^{\log_b c} = (b^{\log_b c})^{\log_b a} = c^{\log_b a}$$

байна.

**Чанар 5.** Логарифмын суурь солих чанар

Хэрэв  $a, b, c$  нь эерэг тоо ба  $a \neq 1, c \neq 1$  бол

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

байна.

**Баталгаа.** Хэрэв  $\log_a b = x$  гэвэл тодорхойлолт ёсоор

$$a^x = b$$

болно. Үүний хоёр талаас нь  $c$  сууриар логарифмчилбал

$$\log_c a^x = \log_c b$$

болно. Чанар 3-аар

$$x \log_c a = \log_c b$$

байна.

$$a^x = b \text{ тул } x = \log_a b$$

болов ба үүнийг орлуулбал

$$\log_a b \cdot \log_c a = \log_c b$$

гэж гарна. Эндээс

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

болж батлагдлаа.

**Санамж** Хэрэв  $a, b$  нь эерэг тоо ба  $a \neq 1, b \neq 1$  бол  $\log_a b = \frac{\log_b b}{\log_b a} = \frac{1}{\log_b a}$  байна. Эндээс  $\log_a b \cdot \log_b a = 1$  гэж гарна.

**Жишээ 12.**  $\log_3 5$  илэрхийллийг 2 суурьтай логарифм ашиглан бич.

**Бодолт.** Логарифмын суурь солих чанар ёсооп  $\log_3 5 = \frac{\log_2 5}{\log_2 3}$  болно.

**Жишээ 13.**  $\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5$  илэрхийллийг хялбарчил.

## **Бодолт. Суурь солих чанар ёсоор**

$$\log_3 4 = \frac{\log_2 4}{\log_2 3} \text{ 6a } \log_4 5 = \frac{\log_2 5}{\log_2 4}$$

бально. Иймд

$$\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 = \log_2 3 \cdot \frac{\log_2 4}{\log_2 3} \cdot \frac{\log_2 5}{\log_2 4} = \log_2 5$$

гэж гарна.

**Жишээ 14.** Хэрэв  $\lg 2 = a$ ,  $\lg 3 = b$  бол дараах логарифмыг  $a$ ,  $b$ -ээр илрхийл.

a)  $\lg 1.08$       б)  $\lg \sqrt{30}$

Бодолт.

$$\begin{aligned} \text{a) } \lg 1.08 &= \lg \frac{108}{100} = \lg 108 - \lg 100 = \lg(2^2 \cdot 3^3) - \lg 10^2 = \lg 2^2 + \lg 3^3 - \lg 10^2 = \\ &= 2\lg 2 + 3\lg 3 - 2 = 2a + 3b - 2 \end{aligned}$$

ГЭЖ ГАРНА.

$$6) \lg\sqrt{30} = \lg(\sqrt{3} \cdot 10) = \lg\sqrt{3} + \lg 10 = \frac{1}{2}\lg 3 + 1 = \frac{1}{2}b + 1 \text{ гэж гарна.}$$

**Жишээ 15.** Хэрэв  $\log_2 3 = a$ ,  $\log_2 7 = b$  бол  $\log_{42} 56$  логарифмыг  $a, b$ -ээр илэрхийл.

$$\text{Бодолт. } \log_{42} 56 = \frac{\log_2 56}{\log_2 42} = \frac{\log_2 (2^3 \cdot 7)}{\log_2 (2 \cdot 3 \cdot 7)} = \frac{\log_2 2^3 + \log_2 7}{\log_2 2 + \log_2 3 + \log_2 7} = \frac{3+b}{1+a+b}$$

бально.

**Жишээ 16.** Хэрэв  $10^x = a$ ,  $10^y = b$ ,  $10^z = c$  бол  $\log_{ab} c^2$  илэрхийллийг  $x$ ,  $y$ ,  $z$ -ээр илэрхийлжүүлнэ.

**Бодолт.**  $10^x = a$ ,  $10^y = b$ ,  $10^z = c$  тэнцэтгэл тус бүрийг логарифмын тодорхойлолт ашиглан  $\lg a = x$ ,  $\lg b = y$ ,  $\lg c = z$  гэж бичиж болно. Иймд

$$\log_{ab} c^2 = \frac{\lg c^2}{\lg ab} = \frac{2\lg c}{\lg a + \lg b} = \frac{2z}{x+y}$$

гэж гарна.

**Жишээ 17.** Хэрэв  $25^x = 16^y = 20$  нөхцөл биелдэг бол  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$  илэрхийллийн утгыг ол.

**Бодолт.** Өгсөн нөхцөлөөс  $25^x = 20$  ба  $16^y = 20$  болно. Эдгээрийг логарифмын тодорхойлолт ашиглан  $x = \log_{25} 20$  ба  $y = \log_{16} 20$  гэж бичиж болно. Логарифмын

суурь солих чанараар  $\log_a b \cdot \log_b a = 1$  байхыг санавал  $\log_{25} 20 \cdot \log_{20} 25 = 1$  буюу  $x \cdot \log_{20} 25 = 1$  тул  $\frac{1}{x} = \log_{20} 25$  байна.

Үүнтэй адиллаар  $\frac{1}{y} = \log_{20} 16$  болох тул

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \log_{20} 25 + \log_{20} 16 = \log_{20} 400 = 2$$

гэж гарна.

**Чанар 6.** Хэрэв  $a, b$  нь эерэг тоо ба  $a \neq 1, m \neq 0$  бодит тоо бол

$$\log_{a^m} b = \frac{1}{m} \log_a b$$

байна.

**Баталгаа.** Хэрэв  $\log_{a^m} b$ -ийг  $a$  суурьтай логарифмаар илэрхийлбэл

$$\log_{a^m} b = \frac{\log_a b}{\log_a a^m}$$

болох ба эндээс

$$\log_{a^m} b = \frac{\log_a b}{m \log_a a^m} = \frac{1}{m} \log_a b$$

болж баталлаа.

**Жишээ 18.**  $\log_{2^3} 7^5$  илэрхийллийг хялбарчил.

**Бодолт.** Чанар 3 ба Чанар 6 ёсоор  $\log_{2^3} 7^5 = \frac{5}{3} \log_2 7$  болно.

**Жишээ 19.** Хэрэв  $x, y, z$  эерэг тооны хувьд  $\log_2 x + 2 \log_4 y + 3 \log_8 z = 1$  нөхцөл биелдэг бол  $2^{xyz}$  илэрхийллийн утгыг ол.

**Бодолт.** Чанар 6 ёсоор

$$2 \log_4 y = 2 \log_{2^2} y = 2 \cdot \frac{1}{2} \log_2 y = \log_2 y, 3 \log_8 z = 3 \cdot \frac{1}{3} \log_2 z = \log_2 z$$

болно. Иймд

$$\log_2 x + 2 \log_4 y + 3 \log_8 z = \log_2 x + \log_2 y + \log_2 z = \log_2(xyz)$$

булох тул өгсөн нөхцөлийг  $\log_2(xyz) = 1$  гэж бичиж болно.

Эндээс  $xyz = 2$  гэж гарах тул  $2^{xyz} = 2^2 = 4$  гэж гарна.

Үзэгдэл, үйл явцыг загварчлахад 10 суурьтай логарифмыг түгээмэл ашигладаг. Иймд тооны 10 суурьтай логарифмыг олох нь чухал бөгөөд үүнийг олоход хэрэгтэй нэгэн өгүүлбэрийг авч үзье.

$M$  гэсэн эерэг тооны 10 суурьтай логарифм  $\lg M$ -ийн утгыг

$$\lg M = k + \lg a \quad (k\text{-бүхэл тоо, } 1 \leq a < 10)$$

хэлбэрээр илэрхийлж болно.

**Санамж**  $895 = 8.95 \cdot 10^2$ ,  $0.00247 = 2.47 \cdot 10^{-3}$  гэж бичиж болох тухай дунд анgid судалсан. Өөрөөр хэлбэл, эерэг  $M$  гэсэн тоог

$$M = a \cdot 10^k \quad (k\text{-бүхэл тоо, } 1 \leq a < 10)$$

хэлбэртэй бичиж болох тул

$$\lg M = \lg(a \cdot 10^k) = \lg a + \lg 10^k = k + \lg a$$

болно. Энд  $1 \leq a < 10$  тул  $0 \leq \lg a < 1$  байна.

Ийм хэлбэрээр бичих нь ямар ч эерэг тооны 10 суурьтай логарифмыг олоход хэрэгтэй.  $1 \leq a < 10$  тооны хувьд таблиц, тооны машин зэргийг ашиглан хялбар олж болох ба үүнийг 237 дугаар хуудас дахь хавсралтаас хараарай.

**Жишээ 20.**  $\lg 5.73 = 0.7582$  гэж үзээд  $\lg 57.3$ ,  $\lg 573$ ,  $\lg 5730$ ,  $\lg 0.573$ ,  $\lg 0.0573$  логарифмуудын утгыг ол.

**Бодолт.**  $\lg 57.3 = \lg(10 \cdot 5.73) = 1 + \lg 5.73 = 1 + 0.7582 = 1.7582$

$$\lg 573 = \lg(10^2 \cdot 5.73) = 2 + \lg 5.73 = 2 + 0.7582 = 2.7582$$

$$\lg 5730 = \lg(10^3 \cdot 5.73) = 3 + \lg 5.73 = 3 + 0.7582 = 3.7582$$

$$\lg 0.573 = \lg(10^{-1} \cdot 5.73) = -1 + \lg 5.73 = -1 + 0.7582 = -0.2418$$

$$\lg 0.0573 = \lg(10^{-2} \cdot 5.73) = -2 + \lg 5.73 = -2 + 0.7582 = -1.2418$$

гэж гарна.

**Санамж**  $\lg M = k + \lg a$  ба  $0 \leq \lg a < 1$  тул

Хэрэв  $M \geq 10$  тоо бол  $k \leq \lg M < k+1$  буюу  $10^k \leq M < 10^{k+1}$

Хэрэв  $0 < M < 10$  бол  $-k \leq \lg M < -k+1$  буюу  $10^{-k} \leq M < 10^{-k+1}$  байна.

**Жишээ 21.**  $\lg 2 = 0.3010$  ба  $\lg 3 = 0.4771$  гэж үзээд  $6^{52}$  нь хэдэн оронтой тоо болохыг тогтоо.

**Бодолт.**  $\lg 6^{52} = 52(\lg 2 + \lg 3) = 52(0.3010 + 0.4771) = 40.4612 = 40 + 0.4612$  болно.

Иймд  $40 \leq \lg 6^{52} < 41$  байх тул  $6^{52}$  нь 41 оронтой байна.

**Жишээ 22.**  $\lg 2 = 0.3010$  гэж үзээд  $\left(\frac{1}{5}\right)^{100}$  тооны хувьд цэгээс хойш хамгийн анхны 0-ээс ялгаатай цифр нь хэд дэх орон байхыг ол.

**Бодолт.**  $\lg\left(\frac{1}{5}\right)^{100} = 100(\lg 2 - \lg 10) = 100(0.3010 - 1) = -69.90 = -69 - 0.90 = (-69 - 1) + (1 - 0.90) = -70 + 0.10$

тул цэгээс хойш 70 дахь орон нь тэгээс ялгаатай байна.

**Жишээ 23.** Шингэнний анхны температур  $T_1$  байсан ба  $T_0$  температуртай тасалгаанд  $t$  минут байлгасны дараах температур нь  $T$  бол дараах хамааралтай өөрчлөгддөг болохыг ажиглажээ (температурын нэгж нь  $^{\circ}\text{C}$ ).

$$T = T_0 + (T_1 - T_0)10^{-0.02t}$$

$120^{\circ}\text{C}$  анхны температуртай шингэннийг  $20^{\circ}\text{C}$  температуртай тасалгаанд хэдэн минут байлгахад шингэнний температур  $25^{\circ}\text{C}$  болох вэ? Тасалгааны температурыг тогтмол гэж үзэх ба  $\lg 2 = 0.3$  гэж ав.

**Бодолт.**  $T_1 = 120^{\circ}\text{C}$ ,  $T_0 = 20^{\circ}\text{C}$ ,  $T = 25^{\circ}\text{C}$  тул эдгээрийг  $T = T_0 + (T_1 - T_0)10^{-0.02t}$  тэгшигэлд орлуулахад

$$25 = 20 + (120 - 20)10^{-0.02t} \text{ буюу } 10^{-0.02t} = \frac{1}{20}$$

тэгшигэл гарна. Үүнийг логарифмын тодорхойлолт ашиглан  $-0.02t = \lg \frac{1}{20}$  гэж бичиж болно.

$$\lg \frac{1}{20} = -\lg 20 = -\lg(2 \cdot 10) = -(\lg 2 + \lg 10) = -(0.3 + 1) = -1.3$$

гэж олдох тул  $-0.02t = -1.3$  тэгшигэлээс  $t = 65$  гэж олдоно. Өөрөөр хэлбэл 65 минутын дараа шингэнний температур  $25^{\circ}\text{C}$  болно.

**Жишээ 24.** Нэгэн үйлдвэрийн агааржуулагч нь тасалгааны тоосжилтын хэмжээ  $1\text{m}^3$  тутамд  $200 \mu\text{g}$  ( $1\mu\text{g}=10^{-6}\text{ g}$ ) хүрэхэд автоматаар ажилладаг. Энэ агааржуулагч автоматаар ажиллаж эхэлснээс  $t$  секундийн дараа  $1\text{m}^3$  тутамд тоосжилтын хэмжээ  $x(t)$  нь

$$x(t) = 20 + 180 \cdot 3^{-\frac{t}{256}} (\mu\text{g}/\text{m}^3)$$

хуулиар өөрчлөгддөг. Тоосжилтын хэмжээ  $50 \mu\text{g}/\text{m}^3$  болоход агааржуулагч автоматаар амарна. Ямар хугацааны дараа тасалгааны тоосжилтын хэмжээ нь  $50 \mu\text{g}/\text{m}^3$  болох вэ?  $\lg 2 = 0.30$ ,  $\lg 3 = 0.48$  гэж ав.

**Бодолт.**  $x(t) = 50 \mu\text{g}/\text{m}^3$  тул

$$50 = 20 + 180 \cdot 3^{-\frac{t}{256}} \text{ буюу } 3^{-\frac{t}{256}} = \frac{1}{6}$$

тэгшигэл гарна. Энэ нь логарифмын тодорхойлолтоор  $-\frac{t}{256} = \log_3 \frac{1}{6}$  байна.

$$\log_3 \frac{1}{6} = -\log_3 6 = -(\log_3 3 + \log_3 2) = -\left(1 + \frac{\lg 2}{\lg 3}\right) = -(1 + 0.625) = -1.625$$

тул  $-\frac{t}{256} = -1.625$  тэгшитгэлээс  $t = 416$  гэж гарна. Өөрөөр хэлбэл 416 секундийн дараа тасалгааны тоосжилтын хэмжээ  $50 \mu\text{g}/\text{m}^3$  болно.

### ДАСГАЛ

6. Дараах илэрхийллийг хялбарчил.

a) $\log_3 72 + 3\log_3 \frac{3}{2}$	б) $\frac{1}{3}\log_2 125 + \log_2 \frac{1}{5}$	в) $\log_3 8\log_2 3$
г) $\log_7 9\log_9 11\log_{11} 7$	д) $\log_{\frac{1}{10}} \sqrt{1000} + 3$	е) $4^{\log_{16} 3}$
ж) $\log_2 4\sqrt{3} + \log_2 6 - \frac{3}{2}\log_2 3$		

7. Дараах илэрхийллийг хялбарчил.

- а)  $(\log_3 5 + \log_{27} 25)(\log_5 3 + \log_{25} 27)$   
 б)  $9^{2\log_3 5 - 3\log_{\frac{1}{3}} 4 - 2\log_3 20}$   
 в)  $(3^{\log_3 4 + \log_3 2})^2 + (2^{\log_3 4 + \log_3 2})^{\log_2 3}$   
 г)  $\log_5 (\log_3 2) + \log_5 (\log_4 3) + \log_5 (\log_5 4) + \dots + \log_5 (\log_{32} 31)$
8.  $\lg 2.54 = 0.4048$  гэж үзээд дараах логарифмын утгыг ол.
- |                |                 |                  |
|----------------|-----------------|------------------|
| а) $\lg 25.4$  | б) $\lg 254$    | в) $\lg 25400$   |
| г) $\lg 0.254$ | д) $\lg 0.0254$ | е) $\lg 0.00254$ |

9. Хэрэв  $\lg 2 = a$ ,  $\lg 3 = b$  бол дараах логарифм тус бүрийг  $a$ ,  $b$ -ээр илэрхийл.

- |              |                         |              |             |                             |
|--------------|-------------------------|--------------|-------------|-----------------------------|
| а) $\lg 144$ | б) $\lg \frac{64}{243}$ | в) $\lg 600$ | г) $\lg 25$ | д) $\log_{0.1} (2\sqrt{6})$ |
|--------------|-------------------------|--------------|-------------|-----------------------------|

10. Хэрэв  $\log_5 2 = a$ ,  $\log_5 3 = b$  бол дараах логарифм тус бүрийг  $a$ ,  $b$ -ээр илэрхийл.

- |               |                   |                |               |
|---------------|-------------------|----------------|---------------|
| а) $\log_9 4$ | б) $\log_{12} 24$ | в) $\log_4 30$ | г) $\log_2 3$ |
|---------------|-------------------|----------------|---------------|

11. Хэрэв  $\log_a 3 = 2$  ба  $\log_3 5 = b$  бол  $a^b$  илэрхийллийн утгыг ол.

12. Хэрэв  $a = \log_3 6$  бол  $81^a$  илэрхийллийн утгыг ол.

13. Хэрэв  $\log_2 15 = a$ ,  $\log_2 \frac{9}{5} = b$  бол  $\log_2 75$ -ыг  $a$ ,  $b$ -ээр илэрхийл.

14. Хэрэв  $\log_2 3 = a$ ,  $\log_3 5 = b$ ,  $\log_5 7 = c$  бол  $\log_{14} 105$ -ийг  $a$ ,  $b$ ,  $c$ -ээр илэрхийл.

15. Хэрэв  $3^a = x$ ,  $3^b = y$ ,  $3^c = z$  бол  $\log_{xy} y^2 z^3$ -ийг  $a$ ,  $b$ ,  $c$ -ээр илэрхийл ( $abc \neq 0$ )

16. Хэрэв  $4^x = a$ ,  $4^y = b$ ,  $4^z = c$  үед  $\log_2 \frac{a^2 b^4}{\sqrt{c}} = px + qy + rz$  байдаг бол  $p$ ,  $q$ ,  $r$  бодит тоонуудын үржвэрийг ол.
17. Хэрэв  $32^x = 243^y = 216$  бол  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$  илэрхийллийн утгыг ол.
18. Хэрэв  $a, b$  эерэг бодит тооны хувьд  $\log_6(3a^2 + b^2) - \log_6(a + b) = \log_6(a + 3b)$  нөхцөл биелдэг бол  $\frac{a}{b}$ -г ол.
19. Хэрэв  $10^a = 125$ ,  $2^b = 625$  бол  $\frac{3}{a} - \frac{4}{b}$  илэрхийллийн утгыг ол.
20.  $\frac{\log_2 18}{\log_{36} 2} - \frac{\log_2 9}{\log_{72} 2}$  илэрхийллийн утгыг ол.
21.  $3^{\frac{1}{\log_7 3}} - \log_{\sqrt{5}} \frac{1}{25}$  илэрхийллийн утгыг ол.
22. Хэрэв  $\log_2(\log_3(\log_4 k)) = 0$  бол  $k$  тоог ол.
23. Хэрэв  $x = \log_5 \sqrt{5 + 2\sqrt{6}}$  бол  $5^x - 5^{-x}$  илэрхийллийн утгыг ол.
24.  $\sqrt{\log_2^2 10 - \log_2 625}$  илэрхийллийн утгыг ол.
25. Хэрэв  $x, y$  эерэг бодит тооны хувьд  $\log_9 x = \frac{1}{\log_{125} 5}$ ,  $\log_{\sqrt{3}} y = \frac{1}{\log_{64} 2}$  бол  $\log_x y$  илэрхийллийн утгыг ол. ( $x \neq 1$ )
26. Хэрэв  $a, b$  эерэг бодит тооны хувьд  $a \log_2 5 = 2$ ,  $\log_2 b = \log_2(\log_5 2) + 1$  нөхцөл биелдэг ба  $a + b = \log_5 k$  бол  $k$  эерэг тоог ол.
27. Хэрэв  $a, b$  эерэг бодит тооны хувьд  $a^2 b^3 = 1$  бол  $\log_a a^5 b^3$  илэрхийллийн утгыг ол ( $a \neq 1$ ).
28. Хэрэв  $x, y$  эерэг бодит тооны хувьд  $\log_2 x + \log_4 y^2 = 2$  нөхцөл биелдэг бол  $4^{\log_2 x} \cdot 2^{\log_2 y}$  илэрхийллийн утгыг ол.
29. Хэрэв тэгээс их  $a, b$  бодит тооны хувьд  $a^3 b^2 = 1$  бол  $\log_a a^3 b^2$  илэрхийллийн утгыг ол ( $a \neq 1$ ).
30. Хэрэв 1-ээс их  $a, b, c$  бодит тооны хувьд  $\log_a b : \log_c b = 1 : 3$  бол  $\log_a c + \log_c a$  илэрхийллийн утгыг ол.
31. Хэрэв эерэг бодит  $a, b, c$  тооны хувьд  $\log_2 a + \log_2 c = \log_{\sqrt{2}} b$  бол  $\log_2(a+b) + \log_2(b-c) - \log_2(a-b) - \log_2(b+c)$  илэрхийллийн утгыг ол ( $a > b > c$ ).
32. Хэрэв 1-ээс ялгаатай, эерэг бодит  $x$  тооны хувьд

$$\frac{1}{\log_2 x} + \frac{1}{\log_3 x} + \frac{1}{\log_6 x} = \frac{2}{\log_a x} \text{ нөхцөл биелдэг бол } a \text{ эерэг тоог ол } (a \neq 1).$$

46. Гар утас үйлдвэрлэдэг нэгэн компанийн жилийн орлого нь 2004 онд 10 сая доллар байсан ба үүнээс хойш жилийн орлого нь тогтмол хувиар өсөж, 2012 онд 100 сая доллар болсон байв. Энэ компанийн орлого нь жил бүр хэдэн хувиар өссөн бэ?
47. Газар хөдлөлтийн хүчийг магнитуд, энерги, балл гэсэн хэмжигдэхүүнүүдээр тодорхойлдог. Магнитуд нь газар хөдлөлтийн хүчийг газар хөдлөлт бүртгэх багажид бичигдсэн хөрсний шилжилтийн утгаар тодорхойлдог хэмжигдэхүүн юм. Энэхүү тооцооны аргыг боловсруулан анхны томъёоллыг 1935 онд АНУ эрдэмтэн Рихтер гаргасан ба үүнийг Рихтерийн магнитуд гэж нэрлэдэг байна. Газар хөдлөлтийн энерги  $E$  болон магнитуд  $M$  нь

$$\lg E = 11.8 + 1.5M$$

гэсэн хамааралтай байдаг. Тэгвэл 5 магнитуд газар хөдлөлтийн энерги нь 4 магнитуд газар хөдлөлтийн энергээс хэд дахин их байх вэ?

48. Оддыг гэрэлтэлтээс нь хамааруулан ангилах оролдлого НТӨ 2 дугаар зуунд эхэлсэн ба Грекийн эрдэмтэн Гиппарх (Hipparchus) 1000-аад одыг 6 ангид хуваасан байдаг. Одны гэрэлтэлтийн хэмжээг магнитуд гэсэн хэмжигдэхүүнээр тодорхойлдог. Одны магнитуд  $m$  ба одноос дэлхийд ирэх гэрлийн хүч  $I$  (Watt/m<sup>2</sup>) нь

$$m = -\frac{5}{2} \log I + C \quad (C\text{-нь тогтмол тоо})$$

хамааралтай болохыг 1856 (Норман Погсон) онд тогтоожээ. Тэгвэл 2 магнитудтай одноос дэлхийд ирэх гэрлийн хүч нь 5 магнитудтай одныхоос хэд дахин их болохыг ол.  $\sqrt{100} = \frac{5}{2}$  гэж ав.

49. Газрын тос боловсруулдаг үйлдвэр газрын тосныхоо нөөцийг жил бүр тогтмол хувиар ихэсгэсээр 20 дахь жилд нөөцлөх хэмжээ нь нөөцөлж эхэлсэн жилийнхээс 2 дахин их байлгах зорилго тавьсан. Тэгвэл газрын тосны нөөцийн хэмжээг жил бүр хэдэн хувиар ихэсгэх хэрэгтэй вэ?  $\lg 1.035 = 0.015$ ,  $\lg 2 = 0.3$  гэж ав.

50. Тогтмол температурт бактерийн бүлийг өсгөвөл 10 минут тутамд тоо нь 3 дахин нэмэгддэг. Бактерийн тоо нь анх 10 байсан ба 3 цагийн дараа бактерийн тоог ойролцоогоор  $10^k$  болно гэвэл  $k$  бүхэл тоог ол.  $\lg 3 = 0.5$  гэж тооц.

51. Нэгэн хотод шинээр төрсөн хүүхдийн хүйсийн харьцаа нь 2017 онд 1:1 байв. Хэрэв цаашид шинээр төрөх хүүхдийн тоо жил бүр 7%-аар, шинээр төрөх эрэгтэй хүүхдийн тоо жил бүр 10%-аар өsnө гэвэл 10 жилийн дараа шинээр төрсөн 100 хүүхдийн хэд нь эрэгтэй байх вэ?

( $\lg 1.07 = 0.0294$ ,  $\lg 1.1 = 0.0414$ ,  $\lg 1.32 = 0.12$  гэж ав.)

52.  $A$ ,  $B$  нь  $A = \{a, b, c, d\}$ ,  $B = \{\log_2 a, \log_2 b, \log_2 c, \log_2 d\}$  гэсэн натурал тоон олонлогийн дэд олонлогууд байв. Хэрэв  $A \cap B = \{a, b\}$  ба  $a + b = 12$  бол  $d - c$

ялгаврыг ол ( $a < b < c < d$ ).

53.  $\frac{1}{10} \leq N \leq 10^2$  байх  $N$  тооны 10 суурьтай логарифмыг  $\lg N = k + \lg a$  ( $k$  -бүхэл тоо,  $1 \leq a < 10$ ) хэлбэрт бичсэн гэе. Тэгвэл  $x, y$ -ээс хамаарсан  $\begin{pmatrix} a & k \\ 1 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -kx \\ y \end{pmatrix}$  тэгшитгэл  $x = y = 0$  гэсэн шийдээс гадна өөр шийдтэй байх бүх бодит  $N$  тооны нийлбэрийг ол.
54. С орой дахь өнцөг нь  $120^\circ$  байх  $ABC$  гурвалжны талууд  $a, b, c$  урттай ба эдгээр нь хоорондоо  $\log_2 a - \log_2 b = 1$  хамааралтай бол  $\log_2 a + \log_2 b - 2 \log_2 c$  илэрхийллийн утгыг ол.
55. Гурван зэргийн олон гишүүнт  $P(x)$ -ийн ахмад гишүүний коэффициент нь 1-тэй тэнцүү байв.  $P(x)$ -ийг  $(x - \lg 8)$ -д хуваахад гарах үлдэгдэл нь  $\lg 8$ ,  $(x + \lg 4)$ -д хуваахад гарах үлдэгдэл нь  $\lg \frac{1}{4}$ ,  $(x - \lg 2)$ -д хуваахад гарах үлдэгдэл нь  $\lg 2$ ,  $(x - \lg 16)$ -д хуваахад гарах үлдэгдэл нь  $a(\lg 2)^3 + b \lg 2$  бол  $a, b$  натуран тоог ол.
56. Хэрэв  $a, b$  эерэг тооны хувьд  $\frac{b}{a} = 9$  ба  $a^{\log_3 b} = \sqrt[3]{3}$  бол  $(\log_3 a)^3 - (\log_3 b)^3$  илэрхийллийн утгыг ол.
57.  $x$  нь  $a$  оронтой,  $y$  нь  $b$  оронтой натуран тоо ба  $x^3$  нь 15 оронтой,  $xy^2$  нь 20 оронтой тоо байв. Тэгвэл  $a+b$  нийлбэрийг ол.

### 3.3. ХЯЛБАР ИЛТГЭГЧ ТЭГШИТГЭЛ, ТЭНЦЭТГЭЛ БИШ

Өмнөх ангиудад бид хялбар илтгэгч тэгшитгэл, тэнцэтгэл бишийг зэргийн чанар ашиглахаас гадна графикийн аргаар бодож байсан.

Тухайлбал,  $5^x = \frac{1}{125}$  тэгшитгэлийн шийдийг графикийн аргаар болон зэргийн

chanar ашиглан  $x = -3$  гэж олж чадна. Гэвч  $5^x = 2$  гэсэн тэгшитгэлийн шийдийг зэргийн чанар ашиглан олж чадахгүй, гэхдээ графикийн арга ашиглан шийдийг ойролцоогоор  $x \approx 0.43$  гэж олж болох юм. Одоо логарифмын тодорхойлолт, чанар ашиглан  $5^x = 2$  тэгшитгэлийн шийдийг ойролцоогоор биш яг зөв олох болно.

$$a^x = b \quad (a > 0, a \neq 1) \text{ тэгшитгэл}$$

$a^x = b$  ( $a > 0, a \neq 1$ ) тэгшитгэлийг графикийн аргаар бodoх нь

$$y = a^x \text{ ба } y = b$$

гэсэн муруй ба шулууны огтлолцлын цэгийн абсциссыг олохтой адил гэдгийг бид мэднэ. Хэрэв логарифмын тодорхойлолт ашиглавал шийд нь

$$x = \log_a b$$

гэж гарна. Өөрөөр хэлбэл,

$$y = a^x \text{ ба } y = b$$

муруй ба шулууны огтлолцлын цэгийн абсцисс нь

$$x = \log_a b \text{ байна.}$$

Тухайлбал,  $5^x = 2$  тэгшитгэлийн шийд нь  $x = \log_5 2$  гэж гарах ба энэ нь  $y = 5^x$  муруй ба  $y = 2$  шулууны огтлолцлын цэгийн абсцисс юм.

**Санамж** Тооны машин ашиглан  $\log_5 2$  логарифмын утгыг ойролцоогоор олж болно.

Хэрэв  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ ,  $b > 0$  бодит тоо бол  $a^x = b$  тэгшитгэлийн шийд нь

$$x = \log_a b$$

байна.

Хэрэв  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ ,  $b \leq 0$  бодит тоо бол  $a^x = b$  тэгшитгэл шийдгүй.

**Жишээ 1.** а)  $2^x = 3$ ; б)  $2^x = 5$ ; в)  $2^x = 0.5$  тэгшитгэлийн шийдийг логарифм ашиглан ол.

**Бодолт.** а)  $x = \log_2 3$ ; б)  $x = \log_2 5$ ; в)  $x = \log_2 0.5 = -1$  гэж гарна.

**Жишээ 2.**  $y = 3^x$ ,  $y = -3$  хоёр функцийн график огтлолцох уу? Хэрэв огтлолцох бол огтлолцлын цэгийн абсциссыг ол.

**Бодолт.**  $y = 3^x$ ,  $y = -3$  хоёр функцийн графикийн огтлолцлын цэгийн абсциссыг олох нь  $3^x = -3$  тэгшитгэлийн шийдийг олохтой адил.  $3^x = -3$  нөхцөлийг хангах  $x$  тоо олдохгүй тул өгсөн хоёр функцийн график огтлолзохгүй.

**Жишээ 3.**  $6^{x-1} = 4$  тэгшитгэл бод.

**Бодолт.** Логарифмын тодорхойлолт ёсоор  $x-1 = \log_6 4$  болох ба эндээс  $x = \log_6 4 + 1$  гэж гарна. Логарифмын чанар ашиглавал  $\log_6 4 + 1 = \log_6 24$  гэж гарах тул  $x = \log_6 24$  болно.

**Жишээ 4.**  $9^x + 3^x - 6 = 0$  тэгшитгэл бод.

**Бодолт.** Хэрэв  $3^x = u$  ( $u > 0$ ) гэж орлуулбал  $9^x = u^2$  тул  $u^2 + u - 6 = 0$  тэгшитгэлд шилжинэ. Эндээс  $u = 2$  эсвэл  $u = -3$  гэж гарна.  $u = -3$  үед  $3^x = -3$  байх  $x$ -ийн утга байхгүй.  $u = 2$  үед  $3^x = 2$  гэдгээс  $x = \log_3 2$  гэж гарна.

**Жишээ 5.**  $5^x - \frac{4}{5^x} = 3$  тэгшитгэл бод.

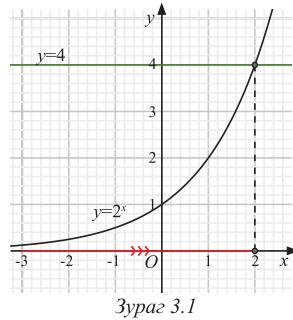
**Бодлт.** Хэрэв  $5^x = u$  ( $u > 0$ ) гэж орлуулбал  $u - \frac{4}{u} = 3$  буюу  $u^2 - 3u - 4 = 0$  тэгшитгэлд шилжинэ. Эндээс  $u = 4$  эсвэл  $u = -1$  гэж гарна. Иймд  $u = 4$  үед  $5^x = 4$  байна. Эндээс  $x = \log_5 4 = 2 \log_5 2$  гэж гарна.

$a^x < b$  ( $a > 0, a \neq 1$ ) тэнцэтгэл бий

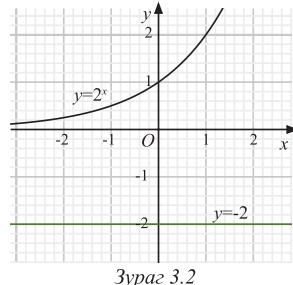
**Бодлого 1.** а)  $2^x < 4$ ; б)  $2^x \leq 4$ ; в)  $2^x < -2$ ; г)  $\left(\frac{1}{2}\right)^x < 2$  тэнцэтгэл бишийг график ашиглан бод.

Бодолт.

- a) Уг тэнцэтгэл бишийг бодох нь  $y = 2^x$  муруй дээрх цэгийн хувьд ординат нь 4-өөс бага байх цэгүүдийн абсциссыг олох бодлоготой адил гэдгийг бид мэнднэ. Θөрөөр хэлбэл,  $y = 4$  шулуунаас доош орших  $y = 2^x$  муруйн цэгүүдийн абсцисс олно гэсэн үг. Графикаас харахад муруй шулуун хоёрын огтлолцлын цэгийн абсцисс нь  $x=2$  байна (Зураг 3.1). Иймд  $2^x < 4$  тэнцэтгэл бишийн шийд нь  $x < 2$  биелэх  $] -\infty, 2[$  олонлог байна.

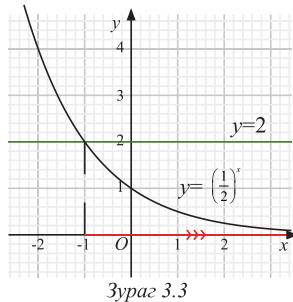


- б) Харин  $2^x \leq 4$  тэнцэтгэл бишийн шийдийн олонлог нь  $[-\infty, 2]$  байна.



- в) Графикаас харахад  $2^x < -2$  тэнцэтгэл биш нь шийдгүй байна (Зураг 3.2-ыг харна уу). Учир нь  $y = 2^x$  функцийн дүр нь эерэг бодит тоон олонлог байна.

- г) Графикаас харахад  $\left(\frac{1}{2}\right)^x < 2$  тэнцэтгэл бишийн шийд нь  $x > -1$  биелэх  $] -1, \infty [$  олонлог байна (Зураг 3.3-ыг харна уу).



Эндээс бид  $a^x < b$ ,  $a^x \leq b$  хэлбэрийн тэнцэтгэл бишийн шийдийг хэрхэн олох талаар төсөөлж болно. Эхний алхам нь  $a^x = b$  тэгшитгэлийн шийдийг  $x = \log_a b$  гэж олно. Дараагийн алхам нь зэргийн суурь нь 1-ээс их эсэхийг шалгана. Үүний дараа тэнцэтгэл бишийн шийдийн олонлогийг дараах дүрмээр олно.

Хэрэв  $a > 1, b > 0$  бодит тоо бол

$$a^x < b \quad (a^x \leq b)$$

тэнцэтгэл бишийн шийд нь

$$x < \log_a b \quad (x \leq \log_a b)$$

биелэх  $]-\infty, \log_a b[$   $(]-\infty, \log_a b])$  олонлог байна.

Хэрэв  $0 < a < 1$  ба  $b > 0$  бодит тоо бол

$$a^x < b \quad (a^x \leq b)$$

тэнцэтгэл бишийн шийд нь

$$x > \log_a b \quad (x \geq \log_a b)$$

биелэх  $]\log_a b, \infty[$   $([\log_a b, \infty[)$  олонлог байна.

Хэрэв  $a > 0, a \neq 1, b \leq 0$  бодит тоо бол  $a^x < b$  ( $a^x \leq b$ ) тэнцэтгэл биш шийдгүй.

**Жишээ 6.** а)  $6^x \leq 2$ ; б)  $\left(\frac{1}{5}\right)^x < 2$ ; в)  $\left(\frac{1}{3}\right)^x < -3$  тэнцэтгэл бишийг бод.

**Бодолт.**

а) Зэргийн суурь нь 1-ээс их ба  $6^x = 2$  тэгшитгэлийн шийд нь

$$x = \log_6 2 \text{ тул } 6^x \leq 2$$

тэнцэтгэл биш нь  $x \leq \log_6 2$  тэнцэтгэл бишид шилжих тул шийдийн олонлог нь  $]-\infty, \log_6 2]$  гарна.

б) Зэргийн суурь нь 1-ээс бага ба  $\left(\frac{1}{5}\right)^x = 2$  тэгшитгэлийн шийд нь

$$x = \log_{\frac{1}{5}} 2 = -\log_5 2 \text{ тул } \left(\frac{1}{5}\right)^x < 2$$

тэнцэтгэл бишийн шийд нь  $x > -\log_5 2$  биелэх  $]-\log_5 2, \infty[$  олонлог байна.

в)  $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$  функцийн дүр нь эерэг бодит тоон олонлог буюу бүх бодит  $x$ -ийн

хувьд  $\left(\frac{1}{3}\right)^x > 0$  тул  $\left(\frac{1}{3}\right)^x < -3$  тэнцэтгэл биш шийдгүй.

**Жишээ 7.**  $5^{3x+1} < 135$  тэнцэтгэл бишийг бод.

**Бодолт.** Зэргийн суурь нь 1-ээс их тул  $3x+1 < \log_5 135$  тэнцэтгэл биш биелнэ.

Эндээс  $3x < \log_5 135 - 1$  буюу  $x < \frac{1}{3}(\log_5 135 - 1)$  гэж гарна. Логарифмын чанар

ашиглан  $\frac{1}{3}(\log_5 135 - 1) = \frac{1}{3} \log_5 \frac{135}{5} = \frac{1}{3} \log_5 27 = \log_5 3$  гэж хялбарчилж болно.

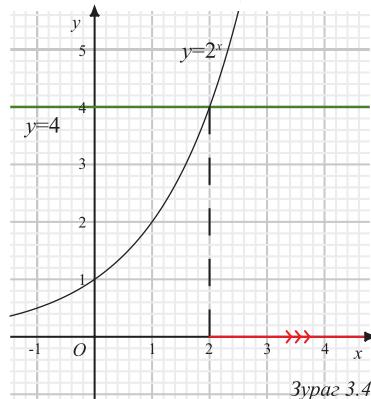
Иймд шийд нь  $x < \log_5 3$  биелэх  $]-\infty, \log_5 3]$  олонлог байна.

$a^x > b$  ( $a > 0$ ,  $a \neq 1$ ) тэнцэтгэл биши

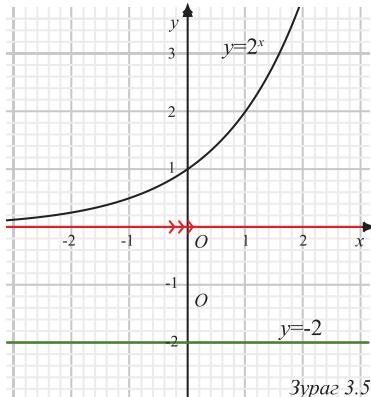
**Бодлого 2.** а)  $2^x > 4$ ; б)  $2^x \geq 4$ ; в)  $2^x > -2$ ; г)  $\left(\frac{1}{2}\right)^x < 2$  тэнцэтгэл бишийг график ашиглан бод.

**Бодолт.**

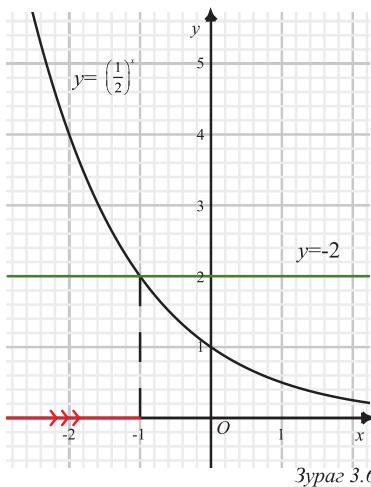
- а) Өгсөн тэнцэтгэл бишийг бодох нь  $y = 2^x$  муруй дээрх цэгүүдийн хувьд ординат нь 4-өөс их байх буюу  $y = 4$  шулуунаас дээш орших цэгүүдийн абсциссыг олно гэсэн үг. Муруй шулуун хоёрын огтлолцлын цэгийн абсцисс нь  $x = 2$  тул  $2^x > 4$  тэнцэтгэл бишийн шийд нь  $x > 2$  биелэх  $[2, \infty[$  олонлог байна (Зураг 3.4).
- б)  $2^x \geq 4$  тэнцэтгэл бишийн шийд нь  $x \geq 2$  биелэх  $[2, \infty[$  олонлог байна.



- в) Графикаас харахад  $2^x > -2$  тэнцэтгэл бишийн шийд нь  $]-\infty, \infty[$  олонлог байна (Зураг 3.5-ыг харна уу). Учир нь  $y = 2^x$  функцийн дүр нь ээрэг бодит тоон олонлог тул бүх бодит  $x$ -ийн хувьд  $2^x > 0$  юм.



- г) Зургаас харахад  $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ ,  $y = 2$  хоёр функцийн графикийн огтлолцлын цэгийн абсцисс нь  $x = -1$  байна. Иймд  $\left(\frac{1}{2}\right)^x > 2$  тэнцэтгэл бишийн шийд нь  $x < -1$  биелэх  $]-\infty, -1[$  олонлог байна (Зураг 3.6-г харна уу).



Эдгээр тэнцэтгэл биш бүрийн шийдийн олонлог болон шийдийн олонлогийн дүрслэлийг ажиглан  $a^x > b$  хэлбэрийн тэнцэтгэл бишийн шийдийг хэрхэн олох тухай дүгнэлт хийе.

$a^x > b$ ,  $a^x \geq b$  хэлбэрийн тэнцэтгэл бишийн шийдийн олонлогийг олохын тулд

- $a^x = b$  тэгшитгэлийн шийдийг олно.
- Зэргийн суурь  $a$  нь 1-ээс их эсэхийг шалгана. Θөрөөр хэлбэл  $y = a^x$  функц өсөх эсвэл буурахыг шалгана.

Үүний дараа тэнцэтгэл бишийн шийдийн олонлогийг дараах дүрмээр олно.

Хэрэв  $a > 1$  ба  $b > 0$  бодит тоо бол

$$a^x > b \quad (a^x \geq b)$$

тэнцэтгэл бишийн шийд нь

$$x > \log_a b \quad (x \geq \log_a b)$$

биелэх  $\log_a b, \infty$   $\left( [\log_a b, \infty] \right)$  олонлог байна.

Хэрэв  $0 < a < 1$  ба  $b > 0$  бодит тоо бол

$$a^x > b \quad (a^x \geq b)$$

тэнцэтгэл бишийн шийд нь

$$x < \log_a b \quad (x \leq \log_a b)$$

биелэх  $-\infty, \log_a b$   $\left( [-\infty, \log_a b] \right)$  олонлог байна.

$b \leq 0$  үед  $a^x > b$  тэнцэтгэл бишийн шийд нь  $[-\infty, \infty]$  олонлог байна.

**Жишээ 8.** а)  $8^x \geq 3$ ; б)  $\left(\frac{1}{3}\right)^x > 5$ ; в)  $\left(\frac{1}{7}\right)^x > -3$  тэнцэтгэл бишийг бод.

**Бодолт.**

а) Зэргийн суурь нь 1-ээс их ба  $8^x = 3$  тэгшитгэлийн шийд нь  $x = \log_8 3$  тул  $8^x \geq 3$  тэнцэтгэл бишийн шийд нь  $x \geq \log_8 3$  биелэх  $[\log_8 3, \infty]$  олонлог байна.

б) Зэргийн суурь нь 1-ээс багаба  $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 5$  тэгшитгэлийн шийд нь  $x = \log_{\frac{1}{3}} 5 = -\log_3 5$  тул  $\left(\frac{1}{3}\right)^x \geq 5$  тэнцэтгэл бишийн шийд нь  $x < -\log_3 5$  биелэх  $(-\infty, -\log_3 5]$  олонлог байна.

в)  $y = \left(\frac{1}{7}\right)^x$  функцийн дүр нь эерэг бодит тоон олонлог буюу бүх бодит  $x$ -ийн хувьд  $\left(\frac{1}{7}\right)^x > 0$  тул  $\left(\frac{1}{7}\right)^x > -3$  тэнцэтгэл бишийн шийд нь  $(-\infty, \infty]$  олонлог байна.

**Жишээ 9.**  $5^x > 2\lg 5 + \lg 4$  тэнцэтгэл бишийг бод.

**Бодолт.**  $2\lg 5 + \lg 4$  илэрхийллийг логарифмын чанар ашиглан хялбарчилбал

$$2\lg 5 + \lg 4 = \lg(5^2 \cdot 4) = \lg 100 = 2$$

гэж гарна. Иймд  $5^x > 2$  тэнцэтгэл бишийн шийд нь  $x > \log_5 2$  биелэх  $\log_5 2, \infty$ [ олонлог байна.

**Жишээ 10.**  $6^{|x|} > 5$  тэнцэтгэл бишийг бод.

**Бодолт.** Зэргийн суурь нь 1-ээс их тул  $|x| > \log_6 5$  байна.  $\log_6 5 > 0$  тул  $|x| > \log_6 5$  гэсэн модултай тэнцэтгэл бишийн шийд нь  $]-\infty, -\log_6 5[ \cup ]\log_6 5, \infty[$  олонлог гарна.

**Жишээ 11.**  $2^{|x+1|} > \frac{1}{3}$  тэнцэтгэл бишийг бод.

**Бодолт.** Зэргийн суурь нь 1-ээс их тул  $|x+1| > \log_2 \frac{1}{3}$  байна.  $\log_2 \frac{1}{3} < 0$  тул

$|x+1| > \log_2 \frac{1}{3}$  гэсэн модултай тэнцэтгэл бишийн шийд нь  $]-\infty, \infty[$  олонлог байна.

Мөн  $2^{|x+1|} > \frac{1}{3}$  тэнцэтгэл бишийг графикийн аргаар бодож болно.

## ДАСГАЛ

**58.** Дараах тэгшитгэлийг бод.

a)  $2^{x+1} \cdot 5^x = 400$

в)  $3^x 2^{2-x} = 6^x$

д)  $\sqrt{5^x} + 3\sqrt{5^{-x}} = 4$

ё)  $(2 + \sqrt{3})^x + (2 - \sqrt{3})^x = 4$

б)  $3^x = 3 \cdot 2^{3x}$

г)  $2 \cdot 3^{x+1} - 5 \cdot 9^x - 1 = 0$

е)  $\sqrt{3^x} + 2\sqrt{3^{-x}} = 3$

ж)  $6(4^x + 4^{-x}) - 35(2^x + 2^{-x}) + 62 = 0$

**59.** Дараах тэгшитгэлийн системийг бод.

а)  $\begin{cases} x + y = 3 \\ 3^x + 3^y = 12 \end{cases}$

б)  $\begin{cases} 2^{9-8x} = 8^{y-5} \\ 3^y = 9^{x-3} \end{cases}$

в)  $\begin{cases} 5^{2x} 4^{y+1} = 25 \\ 4^x 5^{2y} = 1 \end{cases}$

г)  $\begin{cases} 2^x 5^y = 1 \\ 5^{x+1} 2^y = 2 \end{cases}$

д)  $\begin{cases} xy = 10^5 \\ x^{\lg y} = 10^6 \end{cases}$

е)  $\begin{cases} y^2 \cdot 10^{1+\lg x} = 10^{2+\lg 5} \\ 2^{2x+y} = 8^{y-x} \end{cases}$

**60.** Дараах тэнцэтгэл бишийг бод.

а)  $\frac{1}{4} \leq \left(\frac{1}{8}\right)^x < 16$

б)  $2^x > 3$

в)  $\left(\frac{1}{3}\right)^{3x+1} > \left(\frac{1}{3}\right)^{x+5}$

г)  $5^{|2x+1|} < 25$

д)  $\left(\frac{1}{4}\right)^{|x+1|} > 4^{\log_{16} \frac{1}{64}}$

**61.**  $12^x 6^y = 288$  тэнцэтгэлийг хангах  $x, y$  бүхэл тоог ол.

**62.**  $(x^2 - x - 1)^{x+2} = 1$  тэнцэтгэлийг хангах  $x$  бүхэл тоог ол.

**63.** Хэрэв  $(4^x + 4^{-x}) - (2^x + 2^{-x}) - 4 = 0$  тэгшитгэлийн шийд нь  $\alpha, \beta$  бол  $2^\alpha + 2^\beta$ -ийн утгыг ол.

64.  $4^{\sin x} = 1 (0 \leq x \leq \pi)$  тэгшитгэл бод.
65.  $2^{2x} + 2^{x+1} \cdot a + 3 - 2a = 0$  тэгшитгэл ялгаатай хоёр шийдтэй байх бүх  $a$  тоог ол.
66. Хэрэв  $4^{x+a} - 2^{x+b} + 2^{2a+2} = 0$  тэгшитгэл ганц шийдтэй бол түүнийг ол. Энд  $a, b$  нь бодит тоо байна.
67.  $2^{|x+2|} - |2^{x+1} - 1| = 2^{x+1} + 1$  тэгшитгэлийг бод.
68. Хэрэв бүх ээрэг бодит  $x$  тооны хувьд  $x^{\log_2 x} \geq ax^2$  тэнцэтгэл биш үргэлж биелдэг бол бүх ээрэг  $a$  тоог ол.
69.  $a, b$  нь эерэг тогтмол тоо гэе. Хэрэв бүх бодит  $x$  тооны хувьд  $a^{x^2+1} \geq b^x$  тэнцэтгэл биш үргэлж биелдэг бол  $(a, b)$  цэгүүдийн олонлогийг зургаар харуул.

### 3.4. ЛОГАРИФМ ФУНКЦИЙН ГРАФИКИЙН ЧАНАРЫГ СУДАЛНА

10 дугаар ангид илтгэгч функц, 11 дүгээр ангид функцийн тодорхойлогдох муж, утгын муж, дүр, харилцан нэг утгатай функц, урвуу фунц, харилцан урвуу функцийн чанарыг судалсан. Эдгээр мэдлэг чадварт тулгуурлан логарифм функцийг тодорхойлох ба уг функцийн графикийн чанарыг судална.

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+, f(x) = a^x (a \neq 1; a > 0)$  илтгэгч функц нь харилцан нэг утгатай функци юм. Иймд илтгэгч функц урвуутай ба урвуу функцийг нь **логарифм функц** гэдэг. Урвуу функцийг олдог дүрмийг ашиглан илтгэгч функцийн урвуугийнх нь томъёог гаргая.  $y = a^x$  гэж бичээд логарифмын тодорхойлолт ашиглавал  $x = \log_a y$  болох ба энд  $x, y$ -ийн үргийг сольболов

$$y = \log_a x$$

гэж гарна. Урвуу функцийн тодорхойлолт ёсоор логарифм функцийн тодорхойлогдох муж нь эерэг бодит тоон олонлог, утгын муж нь бодит тоон олонлог байна.

**Тодорхойлолт.**  $a \neq 1, a > 0$  бодит тоо байг.

$$f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \log_a x$$

функцийг  **$a$  суурьтай логарифм функц** гэнэ.

Хэрэв  $f$  ба  $g$  нь харилцан урвуу функцийн грантад бол

$$f(g(x)) = x \text{ ба } g(f(x)) = x$$

нөхцөлүүд биелдэг тухай 11 дүгээр ангид судалсан.

Одоо  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+, f(x) = a^x (a \neq 1; a > 0)$  ба  $g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = \log_a x$  функцийн грантад болон логарифмын чанар ёсоор

$$x > 0 \text{ үед } f(g(x)) = a^{\log_a x} = x$$

ба

$$x \in \mathbb{R} \text{ үед } g(f(x)) = \log_a a^x = x$$

нөхцөлүүд биелнэ.

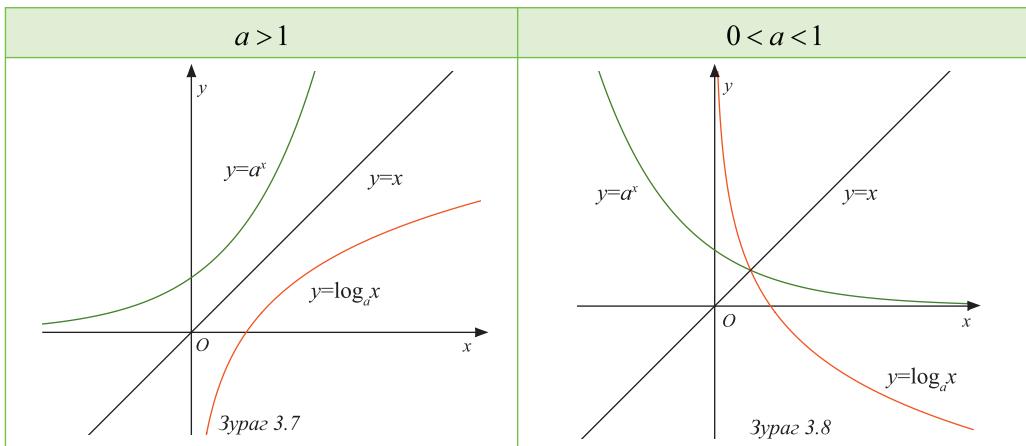
Харилцан урвуу функцийн график нь  $y = x$  шулууны хувьд тэгш хэмтэй тул

$$f(x) = a^x \quad (a > 0, a \neq 1)$$

илтгэгч функцийн графикийг тэгш хэмтэй хувиргах замаар

$$g(x) = \log_a x$$

функцийн графикийг гарган авч болно. Дараах зурагт  $f(x) = a^x$  ( $a > 0, a \neq 1$ ) ба  $g(x) = \log_a x$  функцийн график тоймлон зурж, Зураг 3.7, Зураг 3.8-д харууллаа.



Логарифмын суурь  $a > 1$  үед  $g(x) = \log_a x$  функцийн тодорхойлогдох муж дээрээ өсөх функций,  $0 < a < 1$  үед тодорхойлогдох муж дээрээ буурах функций байна.

Иймд дараах чанарууд биелнэ.

**Чанар 1.** Хэрэв  $b, c$  эерэг тоонууд ба  $a > 1$  үед

$$b < c \text{ бол } \log_a b < \log_a c \text{ буюу}$$

$$\log_a b < \log_a c \text{ бол } b < c$$

байна.

**Жишээ 1.**  $3, \log_2 7, \log_4 63$  тоонуудыг буурах эрэмбээр байрлуул.

**Бодолт.** Хэрэв өдгөэр тоонуудыг ижил суурьтай логарифмаар илэрхийлбэл жишигхэд хялбар байна. Эдгээрийг 2 суурьтай логарифмаар илэрхийлбэл  $\log_2 8, \log_2 7, \log_2 \sqrt{63}$  болох ба логарифмын суурь нь 1-ээс их тул  $\log_2 8 > \log_2 \sqrt{63} > \log_2 7$  байна. Иймд буурах эрэмбэ нь 3,  $\log_4 63, \log_2 7$  болно.

**Чанар 2.** Хэрэв  $b, c$  эерэг тоонууд ба  $0 < a < 1$  үед

$$b < c \text{ бол } \log_a b > \log_a c \text{ буюу}$$

$$\log_a b > \log_a c \text{ бол } b < c$$

байна.

**Жишээ 2.**  $\log_{\frac{1}{3}} 2, \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{2}, \log_{\frac{1}{3}} 3, \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{3}$  тоонуудыг өсөх эрэмбээр байрлуул.

**Бодолт.** Эдгээр нь ижил суурьтай ба  $0 < a < 1$  тул

$$\log_{\frac{1}{3}} 3 < \log_{\frac{1}{3}} 2 < \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{2} < \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{3}$$

байна.

**Жишээ 3.**  $a = \sqrt[7]{8}$ ,  $b = \sqrt[6]{5}$ ,  $c = \sqrt[5]{6}$  тоонуудыг өсөх эрэмбээр байрлуул.

$\lg 2 = 0.3010$ ,  $\lg 3 = 0.4771$  гэж ав.

**Бодолт.**  $\lg a = \lg 8^{\frac{1}{7}} = \frac{1}{7} \lg 8 = \frac{3}{7} \lg 2 = \frac{3}{7} \cdot 0.3010 = 0.1290$

$$\lg b = \lg 5^{\frac{1}{6}} = \frac{1}{6} \lg 5 = \frac{1}{6} (\lg 10 - \lg 2) = \frac{1}{6} \cdot (1 - 0.3010) = 0.1165$$

$$\lg c = \lg 6^{\frac{1}{5}} = \frac{1}{5} \lg 6 = \frac{1}{5} (\lg 3 + \lg 2) = \frac{1}{5} \cdot (0.4771 + 0.3010) = 0.15562$$

болно. Иймд

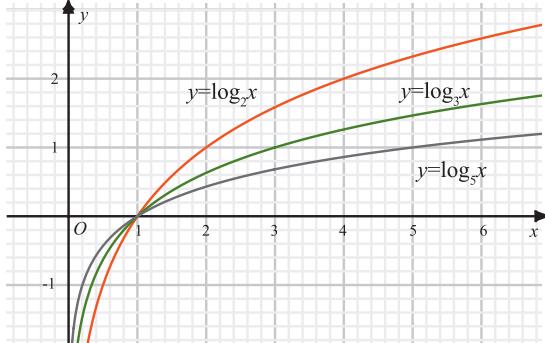
$$\lg b < \lg a < \lg c \text{ тул } b < a < c$$

гэж гарна.

**Жишээ 4.**  $y = \log_2 x$ ,  $y = \log_3 x$ ,  $y = \log_5 x$  функцийн графикийг нэг координатын хавтгайд байгуулж хэрхэн өсөж буйг харьцуулан тайлбарлаа.

**Бодолт.** Функцийн графикийг байгуулахдаа утгын хүснэгт ашиглаж болно. Эдгээр логарифм функцийн суурь нь 1-ээс их тул бүгд өсөх функцийн байна. Графикаас харахад  $x > 1$  үед  $\log_2 x > \log_3 x > \log_5 x$  байна. Өөрөөр хэлбэл энэ үед  $y = \log_2 x$  функцийн илүү хурдан өснө гэсэн үг.

Харин  $x < 1$  үед  $\log_2 x < \log_3 x < \log_5 x$  байна. (Зураг 3.9)

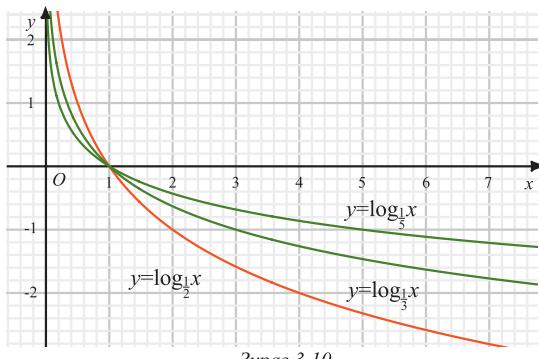


Зураг 3.9

**Жишээ 5.**  $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ ,  $y = \log_{\frac{1}{3}} x$ ,  $y = \log_{\frac{1}{5}} x$  функцийн графикийг нэг координатын хавтгайд байгуулж, хэрхэн буурч буйг харьцуулан тайлбарлаа.

**Бодолт.** Эдгээр логарифм функцийн суурь нь 1-ээс бага тул бүгд буурах функц байна. Графикаас харахад  $x < 1$  үед  $\log_{\frac{1}{2}} x > \log_{\frac{1}{3}} x > \log_{\frac{1}{5}} x$  байна. Θөрөөр хэлбэл энэ үед  $y = \log_{\frac{1}{5}} x$  функц нь илүү хурдан буурна гэсэн уг. Харин  $x > 1$  үед  $\log_{\frac{1}{2}} x < \log_{\frac{1}{3}} x < \log_{\frac{1}{5}} x$  байна.

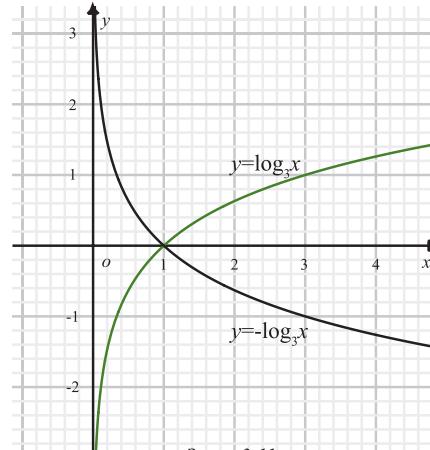
$y = \log_{\frac{1}{2}} x$  функц илүү хурдан буурна. (Зураг 3.10)



Зураг 3.10

**Жишээ 6.**  $y = \log_3 x$ ,  $y = -\log_3 x$  функцийн графикийг нэг координатын хавтгайд байгуул. Графикууд ямар хамааралтай байгааг тайлбарла.

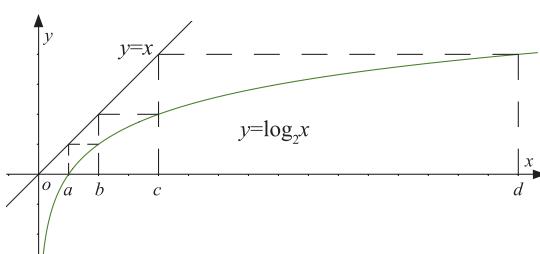
**Бодолт.**  $y = \log_3 x$  нь өсөх функц ба  $y = -\log_3 x$  нь буурах функц байна. Эдгээр функцийн график нь  $(1, 0)$  цэгийг дайрна.  $y = \log_3 x$  функцийн график дээр орших цэгийг  $M(x, y)$  ( $x > 0$ ) гэвэл  $M(x, -y)$  цэг нь  $y = -\log_3 x$  функцийн график дээр оршино. Иймд эдгээр функцийн график нь  $Ox$  тэнхлэгийн хувьд тэгш хэмтэй. (Зураг 3.11)



Зураг 3.11

**Жишээ 7.** Зураг 3.12-т  $y = \log_2 x$  ба  $y = x$  функцийн график өгсөн бол  $d - c$  ялгаврыг ол.

**Бодолт.**  $y = \log_2 x$  функцийн график нь  $(1, 0)$  цэгийг дайрах тул  $a = 1$  байна. Иймд  $\log_2 b = 1$  ба эндээс  $b = 2$  гэж гарна.  $\log_2 c = 2$  болох тул  $c = 2^2 = 4$ ,  $\log_2 c = 4$  гэдгээс  $d = 2^4 = 16$  гарна. Иймээс  $d - c = 12$  болно. (Зураг 3.12)



Зураг 3.12

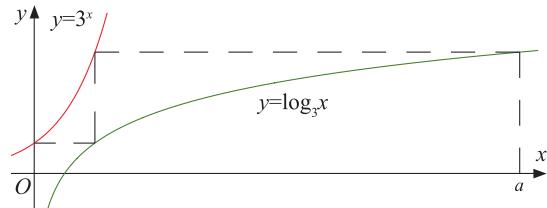
**Жишээ 8.** Зураг 3.13-д  $y = \log_3 x$  ба

$y = 3^x$  функцийн график өгсөн бол  $a$ -ийн утгыг ол.

**Бодолт.**  $y = 3^x$  функцийн график нь  $(0,1)$  цэгийг дайрна. Иймд  $1 = \log_3 x$  гэдгээс логарифмын тодорхойлолтоор

$x = 3$  байна.  $y = 3^3 = 27$  тул

$27 = \log_3 a$  гэдгээс  $a = 3^{27}$  гэж гарна.



Зураг 3.13

**Жишээ 9.**  $y = \log_3(2x^2 + 5x - 3)$  функцийн тодорхойлогдох мужийг ол.

**Бодолт.**  $2x^2 + 5x - 3 > 0$  үед өгсөн функц тодорхойлогдох ба энэ квадрат тэнцэтгэл бишийн шийд нь  $x < -3$  эсвэл  $x > \frac{1}{2}$  байна. Иймд уг функцийн тодорхойлогдох

муж нь  $x \in ]-\infty, -3[ \cup \left] \frac{1}{2}, \infty \right[$  гэж гарна.

**Жишээ 10.** Тодорхойлогдох муж нь  $2 \leq x \leq 9$  байх  $f(x) = \log_3 x$  функцийн дүрийг ол. Функцийн хамгийн их утга ба хамгийн бага утга нь хэд вэ?

**Бодолт.** Өгсөн логарифм функцийн суурь нь 1-ээс их тул  $x$ -ийн их утгад функцийн их утга,  $x$ -ийн бага утгад функцийн бага утга харгалзана. Иймд функцийн хамгийн их утга нь  $f(9) = \log_3 9 = 2$ , хамгийн бага утга нь  $f(2) = \log_3 2$  гэж гарах тул дүр нь  $I = [\log_3 2, 2]$  гэсэн олонлог байна.

**Жишээ 11.** Тодорхойлогдох муж нь  $1 \leq x \leq 7$  байх  $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x+1)$  функцийн дүрийг ол. Функцийн хамгийн их утга ба хамгийн бага утга нь хэд вэ?

**Бодолт.** Өгсөн логарифм функцийн суурь нь 1-ээс бага тул  $(x+1)$ -ийн их утгад функцийн бага утга,  $(x+1)$ -ийн бага утгад функцийн бага утга харгалзана. Иймд функцийн хамгийн их утга нь  $f(1) = \log_{\frac{1}{2}}(1+1) = \log_{\frac{1}{2}} 2 = -1$ , хамгийн бага утга нь

$f(7) = \log_{\frac{1}{2}}(7+1) = \log_{\frac{1}{2}} 8 = -3$  гэж гарах тул дүр нь  $I = [-3, -1]$  гэсэн олонлог байна.

**Жишээ 12.**  $y = \log_{\frac{1}{3}}(x^2 - 2x + 10)$  функцийн тодорхойлогдох мужийг ол. Мөн хамгийн их утгыг ол.

**Бодолт.** Өгсөн функцийн тодорхойлогдох муж нь  $x^2 - 2x + 10 > 0$  нөхцөлийг хангах  $x$  тооны олонлог байна. Иймд тодорхойлогдох муж нь  $]-\infty, \infty[$  олонлог байна.

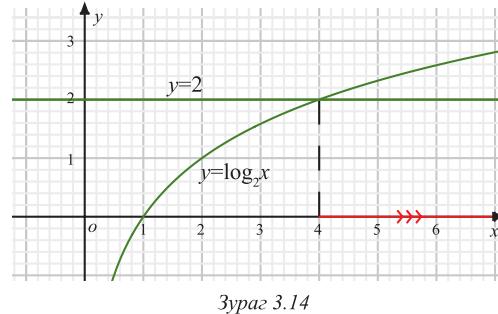
Өгсөн логарифм функцийн суурь нь 1-ээс бага тул  $(x^2 - 2x + 10)$ -ийн хамгийн бага утга авах үед функц хамгийн их утга авна. Бүтэн квадрат ялгавал

$$(x^2 - 2x + 10) = (x - 1)^2 + 9$$

болов ба  $(x - 1)^2 \geq 0$  тул  $x - 1 = 0$  буюу  $x = 1$  үед  $(x^2 - 2x + 10)$ -ийн хамгийн бага утга нь 9 гэж гарна. Иймд өгсөн функцийн хамгийн их утга нь  $y = \log_{\frac{1}{3}} 9 = -2$  гэж гарна.

**Жишээ 13.**  $\log_2 x > 2$  тэнцэтгэл бишийг график ашиглан бод.

**Бодолт.** Хялбар илтгэгч тэгшигтгэл, тэнцэтгэл бишийг графикийн аргаар хэрхэн боддог тухай эргэн санаарай. Үүнтэй төстэй бодно. Өөрөөр хэлбэл,  $y = \log_2 x$  функцийн график дээр орших ба ординат нь 2-оос их байдаг цэгүүдийн абсцисс нь өгсөн тэнцэтгэл бишийн шийд болно. Графикаас харахад өгсөн муруй ба шулууны огтлолцлын цэгийн абсцисс нь  $x = 4$  байна (Зураг 3.14). Иймд уг тэнцэтгэл бишийн шийд нь  $x > 4$  биелэх  $]4, \infty[$  олонлог байна.



**Жишээ 14.**  $\mathbb{R}$  нь бодит тоон олонлог ба  $E = [1, \infty[$  олонлог өгөв.

$$\mathbb{R} \rightarrow E, f(x) = 2^{x-1} + 1$$

**Бодолт.** Өгсөн функц харилцан нэг утгатай гэдгийг харуулаарай. Харилцан нэг утгатай функц цор ганц урвуутай тул урвуу функц олдог дүрмийг хэрэглэе.  $y - 1 = 2^{x-1}$  болох ба хоёр талаас нь 2 сууриар логарифмчилбал

$$\log_2(y - 1) = x - 1$$

болов ба эндээс

$$x = \log_2(y - 1) + 1$$

гэж гарна. Энд  $x, y$ -ийн үүргийг сольвол өгсөн функцийн урвуу нь

$$y = \log_2(x - 1) + 1$$

гэж гарна.

## ДАСГАЛ

**70.** Дараах функцийн тодорхойлогдох мужийг ол.

а)  $y = \log_2(2x - 9) + 5$       б)  $y = \log_5(-9x - 15) - 1$       в)  $y = -\log_{\frac{1}{3}}(2x + 3)^2$

г)  $y = -\log_{\frac{1}{4}}(2x^2 - 3x - 2) + 4$       д)  $y = -\log_{\frac{5}{3}}(3x^2 - x + 2)$

71. Дараах функцийн урвуу функцийг ол.

а)  $E = ]-3, \infty]$  ба  $\mathbb{R} \rightarrow E$ ,  $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 3$

б)  $E = ]-\infty, 1[$  ба  $\mathbb{R} \rightarrow E$ ,  $f(x) = -\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} + 1$

в)  $D = ]1, \infty[$  ба  $D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 3 \log_3(x-1) + 1$

г)  $D = ]-2, \infty[$  ба  $D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = -\log_{\frac{1}{3}}(x+2) - 2$

72. Дараах функцийн өсөх, буурахын аль нь болохыг тогтоо.

а)  $y = -\left(\frac{1}{2}\right)^x$

б)  $y = \log_{\sqrt{3}} x$

в)  $y = \left(\frac{4}{3}\right)^{-x}$

г)  $y = \log_{\frac{1}{4}} x$

73.  $y = \log_3 x^2$ ,  $y = 2 \log_3 x$  хоёр функцийн адилтгал тэнцүү юу? Хариултаа тайлбарла.

74. Дараах тоонуудыг өсөх эрэмбээр байрлуул.

а)  $\log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{5}$ ,  $\log_{\frac{1}{4}} \frac{3}{8}$ ,  $\log_{\frac{1}{4}} 2$

б)  $\log_3 \frac{1}{5}$ ,  $\log_3 \frac{3}{8}$ ,  $\log_3 2$

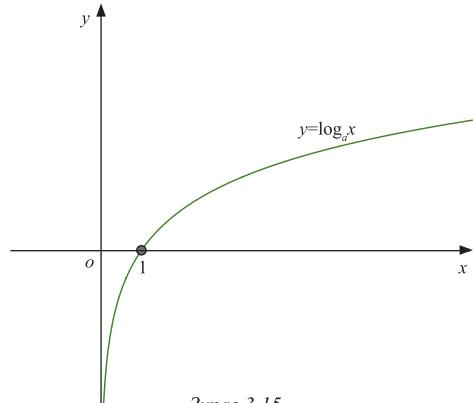
в)  $\log_2 18$ ,  $\log_4 20$ ,  $\log_8 2$

г)  $\frac{1}{3} \lg \frac{1}{5}$ ,  $\lg 3$ ,  $\frac{1}{2} \lg 5$

75. Зураг 3.15-д  $y = \log_a x$  функцийн графикийг дүрслэв. Үүнийг ашиглан дараах функцийн графикийг байгуул.

а)  $y = \log_a(-x)$

б)  $y = \log_a\left(\frac{1}{x}\right)$



Зураг 3.15

76. Урвуу функцийг ол.

а) Тодорхойлогдох муж нь  $\left\{ x \mid \frac{1}{100} \leq x \leq 100 \right\}$  байх  $y = \lg x$  функци.

б) Тодорхойлогдох муж нь  $\left\{ x \mid 11 \leq x \leq 126 \right\}$  байх  $y = -\log_5(x-1)$  функци.

в) Тодорхойлогдох муж нь  $\left\{ x \mid \frac{4}{3} \leq x \leq \frac{16}{3} \right\}$  байх  $y = \log_{\frac{1}{2}}(6x) + 1$  функци.

**77.** Дараах тэгшитгэл бод.

a)  $\log_2(2x-3)=3$       б)  $\log_{3x} 27=3$

в)  $\log_{\frac{1}{5}}\left(\frac{1}{x+1}\right)=-2$       г)  $\log_{x-2} 16=2$

**78.** Дараах тэнцэтгэл бишийг бод.

а)  $\log_{\frac{1}{2}}(x-2)\geq -2$       б)  $0 < \log_2 x < 2$

в)  $1 \leq \log_{\frac{1}{2}} x \leq 2$       г)  $\log_2(x+1) < 1$

**79.** Хэрэв  $f(x)=\left(\frac{1}{4}\right)^x$ ,  $g(x)=\log_2 x$  функц өгсөн бол  $g(f(-3))$ -ийн утгыг ол.

**80.** Хэрэв  $f(x)=\log_a(x+2)+1$  ( $a > 0$ ,  $a \neq 1$ ) функцийн хувьд  $f(2)=5$  бол  $f(14)$  утгыг ол.

**81.**  $f(x)=\log_2\left(1+\frac{1}{x^2-1}\right)$  функц өгөв. Тэгвэл  $a=f(2)+f(3)+f(4)+\dots+f(63)$  нь хэдээс хэтрэхгүй тоо байх вэ?

**82.** Хэрэв  $y=\log_4(x-2)+3$  функцийн урвуу нь  $y=a^{2x+b}+c$  бол  $abc$  үржвэрийг ол.

**83.** Хэрэв  $y=\log_6 x$  функцийн урвуу  $y=g(x)$  функцийн хувьд  $g(\alpha)=\frac{1}{4}$ ,  $g(\beta)=\frac{1}{3}$  бол  $g(\alpha+\beta)$ -ийг ол.

**84.** Хэрэв  $y=\log_3(x^3+1)$  функцийн урвуу нь  $y=g(x)$  бол  $g(g(g(2)))$ -ийн утгыг ол.

**85.** Хэрэв  $y=\log_5 x+2$  функцийн урвуу нь  $y=g(x)$  бол утга нь  $a$ -аас хамаарахгүй байх илэрхийлэл аль нь вэ? ( $a \neq 0$ )

а)  $g(a)+g(-a)$       б)  $g(a)-g(-a)$       в)  $g(a)+g\left(\frac{1}{a}\right)$

г)  $g(a)g\left(\frac{1}{a}\right)$       д)  $g(a)g(-a)$       е)  $g(a)-g\left(\frac{1}{a}\right)$

**86.** 1-ээс ялгаатай, эерэг  $a$ ,  $b$  тооны хувьд дараах өгүүлбэрүүд үнэн эсэхийг тогтоо.

а) Хэрэв  $a > b > 1$  бол  $\log_a b < \log_b a$  байна.

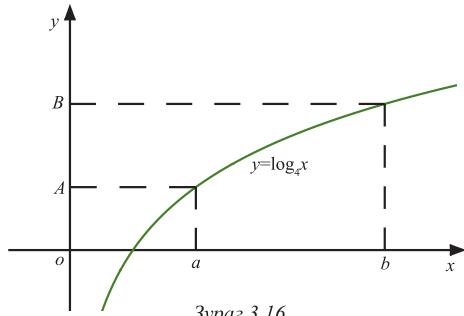
б) Хэрэв  $a > b > 1$  бол  $a^b < b^a$  байна.

в) Хэрэв  $2^a = 3^b$  бол  $a > b$  байна.

г) Хэрэв  $\log_2 a = \log_3 b$  бол  $a > b$  байна.

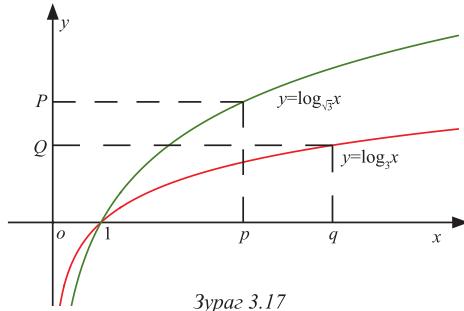
87. Хэрэв  $0 < a < b$ ,  $a \neq 1$  бол  $\log_a \frac{b}{a}$ ,  $\log_a b$ ,  $\log_b a$ ,  $\log_a \frac{a}{b}$  илэрхийлүүдээс хамгийн их болон хамгийн бага утгатай илэрхийллийг ол.
88. Хэрэв  $1 < x < 4$  бол  $A = \log_2 x^2$ ,  $B = (\log_2 x)^2$ ,  $C = \log_2 (\log_2 x)$  илэрхийлүүдийн утгыг өсөх дарааллаар эрэмбэл.

89. Зураг 3.16-д  $y = \log_4 x$  функцийн график өгчээ. Хэрэв  $AB$  хэрчмийн урт 3 бол  $\frac{b}{a}$ -ийн утгыг ол.



Зураг 3.16

90. Хэрэв  $y = 2$  шулуун нь  $y = \log_2 x$  ба  $y = \log_3 x$  функцүүдийн графиктай харгалзан  $A$ ,  $B$  цэгт огтлолцдог бол  $AB$  хэрчмийн уртыг ол.



Зураг 3.17

### 3.5. $y = e^x$ БА $y = \ln x$ ФУНКЦИИ

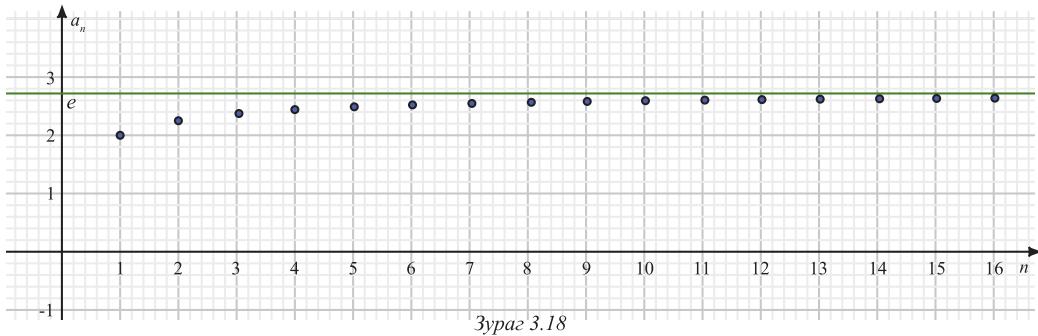
*e тоо*

$e = 2.7182818284590452353602874\dots$  гэсэн төгсгөлгүй, үегүй аравтын бутархайг Эйлерийн тоо буюу  $e$  тоо гэдэг.  $e$  нь математикч Эйлерийн (Euler)-ийн нэрийн эхний үсэг юм.

$e$  тооны талаар илүү сайн төсөөлөлтэй болохын тулд  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  дарааллын гишүүдийг ажиглая. Уг дарааллын эхний 2 гишүүн болон 5, 10, 100, 1000, 10000, 100000 дугаар гишүүнийг компьютер ашиглан цэгээс хойш 5 орны нарийвчлалтайгаар олж, дараах хүснэгтэд харууллаа.

$n$	1	2	5	10	100	1000	10000	100000
$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$	2.00000	2.25000	2.48832	2.59374	2.70481	2.71692	2.71815	2.71827

и нь ихсэх тусам энэ дарааллын гишүүд нь *e* тоо руу дөхөж буйг хүснэгтээс ажиглаж болно. Энэ дарааллын гишүүд нь *e* тооноос хэтрэхгүй гэдгийг дарааллын хязгаар сэдвийн хүрээнд дараагийн түвшинд судална. Зураг 3.18-д дарааллын эхний гишүүдийг дурсэлж харууллаа.



$y = e^x$  ճա  $y = \ln x$  ֆունկցիաները պատճենագիր են:

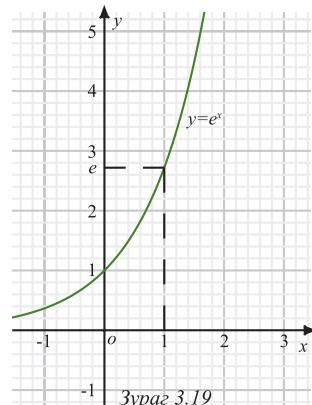
е тоо нь нэгээс ялгаатай эерэг тоо тул илтгэгч функцийн суурь болгон сонгож болно.

**Тодорхойлолт.**  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ ,  $f(x) = e^x$  функцийг илтгэгч функц гэнэ.

$e > 1$  тул  $y = e^x$  нь өсөх функц байна. Тооны машин ашиглаж  $y = e^x$  функцийн утгын хүснэгт зохиох замаар графикийг нь байгуулъя.

$x$	-3	-2	-1	0	1	2
$y$	$e^{-3}$	$e^{-2}$	$e^{-1}$	$e^0$	$e^1$	$e^2$
$\tilde{y}$	0.05	0.14	0.38	1	2.72	7.39

### Зураг 3.19-д харууллаа.



Хэрэв логарифм функцийн суурь нь  $e$  тоо байвал натурал логарифм функц гэх ба  $y = \ln x$  гэж бичдэг.

**Тодорхойлолт.**  $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \ln x$  функцийг натурагийн логарифм функц гэнэ.

Натурал логарифм функц нь өсөх функц байна. Учир нь суурь нь нэгээс их тоо юм.

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ ,  $f(x) = e^x$  ба  $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = \ln x$  функцийг авч үзье. Илтгэгч ба логарифм функцийн нэгэн адил

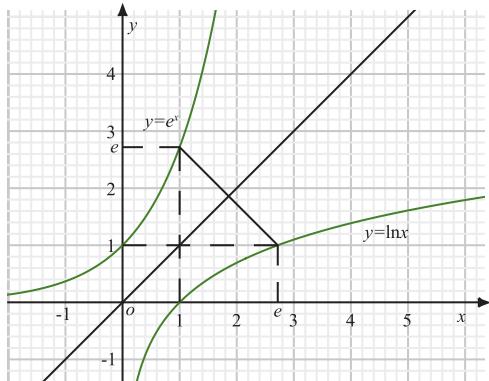
$$x > 0 \text{ ыед } f(g(x)) = e^{\ln x} = x$$

6а

$$x \in \mathbb{R} \text{ yed } \ln(e^x) = x$$

нөхцөлүүд биелнэ.

Харилцан урвуу функцийн чанар ашиглан  $y = e^x$ ,  $y = \ln x$  функцийн графикийг нь байгуулж, Зураг 3.20-д харуулав.



Зураг 3.20

## ДАСГАЛ

92. Дараах функцийн график байгуулж, тодорхойлогдох муж, дүрийг ол.
- $y = e^{-x}$
  - $y = -e^x$
  - $y = -\ln x$
  - $y = \ln(-x)$
  - $y = -\ln(-x)$
93. Дараах тэгшитгэлийг бод.
- $4e^{|x-1|} = \ln e^6 + 2$
  - $\ln(2x+1) = 2$
  - $\ln|x+2| = -1$
94. Дараах функцийн тодорхойлогдох мужийг ол.
- Дүр нь  $I = [e^{-2}, e^2]$  олонлог байх  $y = e^x$  функц
  - Дүр нь  $I = [1, 8]$  олонлог байх  $y = e^{-x}$  функц
  - Дүр нь  $I = [4, 16]$  олонлог байх  $y = e^{2x}$  функц
  - $y = \ln(2x-5)$
  - $y = \ln(e^x - e)$
95. Дараах функцийн дүрийг ол.
- Тодорхойлогдох муж нь  $D = [-5, 3]$  олонлог байх  $y = e^x$  функц
  - Тодорхойлогдох муж нь  $D = [e, e^5]$  олонлог байх  $y = \ln x$  функц
  - Тодорхойлогдох муж нь  $D = [3; 10]$  олонлог байх  $y = \ln x$  функц
  - Тодорхойлогдох муж нь  $D = [-e^5; -e^2]$  олонлог байх  $y = \ln(-x)$  функц
96. Урвуу функцийг ол.
- Хэрэв  $E = ]-2, \infty]$  бол  $\mathbb{R} \rightarrow E$ ,  $f(x) = e^x - 2$  функц.
  - Хэрэв  $E = ]-\infty, 3[$  бол  $\mathbb{R} \rightarrow E$ ,  $f(x) = -e^{x+1} + 3$  функц.
  - Хэрэв  $D = ]2, \infty[$  бол  $D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \ln(x-2) + 1$  функц.
  - Хэрэв  $D = ]-1, \infty[$  бол  $D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 3 \ln(x+1) + 1$  функц.
97. Хэрэв  $e^{2x} = 3$  бол дараах илэрхийлэл тус бүрийн утгыг ол.
- $\left(\frac{1}{e^3}\right)^{-4x}$
  - $\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$
  - $\frac{e^{3x} + e^{-3x}}{e^x + e^{-x}}$
  - $\frac{e^{3x} - e^{-3x}}{e^x - e^{-x}}$

98. Хэрэв  $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$  ба  $f(a) = \frac{1}{2}$ ,  $f(b) = \frac{1}{3}$  бол  $f(a+b)$ -ийн утгыг ол.
99. Хязгаарлагдмал орчинд байгаа тодорхой төрөл зүйлийн анхны тоо хэмжээ нь 100 бөгөөд орчны багтаамж нь 1000 бол түүний тоо хэмжээ нь

$$P(t) = \frac{100000}{100 + 900 \cdot e^{-t}}$$

байдаг. Энд  $t$  нь жилээр хэмжигдэнэ. Дараах асуултуудад хариул.

- a) Энэ функцийн графикийг зурж, тоо хэмжээ 900 хүрэхэд хэр хугацаа шаардлагатайг тооцоол.
- б)  $t$  хугацааны дараа үлдэх массыг ол.
- в) Урвуу функцийг олж, түүний утгыг тайлбарла.
- г) Урвуу функц ашиглан тоо хэмжээ 900 хүрэх хугацааг ол. а) хэсгийн үр дүнтэй харьцуул.

### 3.6. РАЦИОНАЛ ФУНКЦИИ

**Тодорхойлолт.**  $P(x)$ ,  $Q(x)$  нь харгалзан  $m$ ,  $n$  зэргийн олон гишүүнт байг ( $Q(x)$  нь тэг биш олон гишүүнт).

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

хэлбэрийн функцийг *бутархай рационал функц* гэнэ. Энэ функцийн тодорхойлогдох муж нь  $Q(x) \neq 0$  байх бүх  $x$  тооны олонлог байна.

Хэрэв хүртвэр дэх олон гишүүнтийн зэрэг нь хуваарь дахь олон гишүүнтийн зэргээс их бол ( $m > n$ ) зөв биш бутархай рационал функц, харин бага бол ( $m < n$ ) зөв бутархай рационал функц гэнэ.

**Жишээ 1.**  $y = \frac{x^3 - x + 1}{x^2 - 1}$  функцийн хувьд хүртвэр дэх олон гишүүнтийн зэрэг нь 3, хуваарь дахь олон гишүүнтийн зэрэг нь 2 тул зөв биш бутархай рационал функц юм. Тодорхойлогдох муж нь  $x \neq \pm 1$  байх бүх бодит  $x$  тооны олонлог буюу  $]-\infty, -1[ \cup ]-1, 1[ \cup ]1, \infty[$  байна. Харин  $y = \frac{x+1}{x^2+1}$  нь зөв бутархай рационал функц бөгөөд хуваарь нь тэгтэй тэнцэх  $x$  тоо олдохгүй тул тодорхойлогдох муж нь  $]-\infty, \infty[$  байна.

Олон гишүүнт ба Безугийн теорем сэдвийн хүрээнд рационал бутархайг хялбар рационал бутархайн нийлбэр болгон задлах тухай судалсан. Энэ мэдлэгт тулгуурлан рационал функцийг хялбар рационал функцүүдийн нийлбэр болгон задлах бодлого бодох нь рационал функцийн интегралчлах сэдвийг судлах үед хэрэг болно. Хялбар рационал бутархайгаар илэрхийлэгдсэн функцийг хялбар рационал функц гэж ойлгоно.

**Жишээ 2.**  $y = \frac{-5x^2 + 1}{6x^2 + x - 1}$  функцийг хялбар бутархай рационал функцийн нийлбэр болгон задал.

**Бодолт.** Хүртвэр дэх олон гишүүнтэйг хуваарь дахь олон гишүүнтэд хуваавал

$$\frac{-12x^2 + 1}{6x^2 + x - 1} = -2 + \frac{2x - 1}{6x^2 + x - 1}$$

болов ба хуваарь  $6x^2 + x - 1$  нь  $(2x + 1)(3x - 1)$  гэсэн үргиждэхүүн болгон задлах тул

$$\frac{2x - 1}{6x^2 + x - 1} = \frac{A}{2x + 1} + \frac{B}{3x - 1}$$

хэлбэрт бичиж тодорхойгүй коэффициентийн арга хэрэглэвэл  $A = \frac{4}{5}$ ,  $B = -\frac{1}{5}$  гэж гарна. Иймд

$$y = -2 + \frac{4}{5(2x + 1)} - \frac{1}{5(3x - 1)}$$

гэж задарна.

**Жишээ 3.**  $y = \frac{6x}{x^4 - 81}$  функцийг олон гишүүнт болон хялбар бутархай рационал функциүүдийн нийлбэрт задал.

**Бодолт.** Хуваарь олон гишүүнтэйг  $x^4 - 81 = (x - 3)(x + 3)(x^2 + 9)$  гэж задлах тул

$$\frac{6x}{x^4 - 81} = \frac{A}{x - 3} + \frac{B}{x + 3} + \frac{Cx + d}{x^2 + 9}$$

хэлбэрт бичиж тодорхойгүй коэффициентийн арга хэрэглэвэл  $A = \frac{1}{6}$ ,  $B = \frac{1}{6}$ ,

$C = -\frac{1}{3}$ ,  $D = 0$  гэж гарна. Иймд

$$y = \frac{1}{6(x - 3)} + \frac{1}{6(x + 3)} - \frac{1}{3(x^2 + 9)}$$

гэж задарна.

**Тодорхойлолт.**  $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$  функц байг. Хэрэв  $x = a$  нь  $Q(x)$  олон гишүүнтэйн язгуур ( $Q(a) = 0$ ) бол  $x = a$  шулууныг  $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$  функцийн графикийн **босоо асимптот** гэнэ.

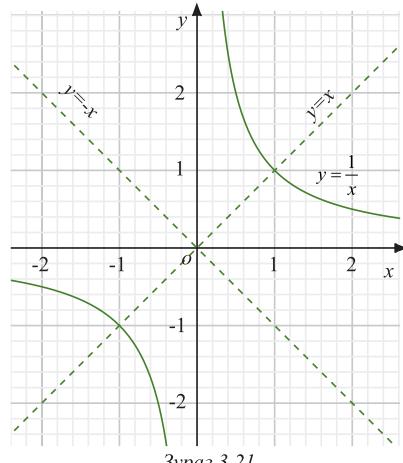
Хэрэв хүртвэр дэх олон гишүүнтэйн зэрэг нь хуваарийнхаас бага бол  $y = 0$  шулууныг  $f(x)$  функцийн графикийн хэвтээ асимптот гэнэ. Хэрэв хүртвэр ба хуваарь дахь олон гишүүнтэйн зэрэг нь тэнцүү ба ахмад гишүүний коэффициент нь харгалзан  $a_n, b_n$  бол  $y = \frac{a_n}{b_n}$  шулууныг  $f(x)$  функцийн графикийн **хэвтээ асимптот** гэнэ.

**Санамж** “Функцийн хязгаар” сэдвийн хүрээнд функцийн графикийн асимптот шулууны талаар нарийвчлан судалдаг. Уг сэдвийг бүрэн дунд боловсролын математикийн хөтөлбөрөөр судлахгүй. Энд функцийн графикийн асимптотын талаар төсөөлөлтэй болох ба хялбар рационал функцийн хэвтээ босоо асимптотыг олж сурна.

**Жишээ 4.**  $y = \frac{x^2 - x + 1}{x^3 - 1}$  функцийн графикийн босоо, хэвтээ асимптотыг ол.

**Бодолт.** Хүртвэр дэх олон гишүүнтний зэрэг нь хуваарь дахь олон гишүүнтний зэргээс бага тул  $y = 0$  гэсэн хэвтээ асимптоттой. Хуваарь дахь олон гишүүнтний язгуур нь  $x = 1$  тул  $x = 1$  гэсэн шулуун босоо асимптот болно.

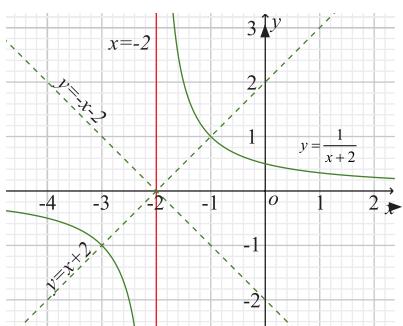
**Жишээ 5.** Бидний судалсан  $y = \frac{1}{x}$  функцийн графикийн хувьд  $x = 0$  шулуун буюу  $Oy$  тэнхлэг нь босоо асимптот, харин  $y = 0$  шулуун буюу  $Ox$  тэнхлэг хэвтээ асимптот болно.  $y = \frac{1}{x}$  функцийн график дээр орших аливаа цэгийн координатыг  $M(x, y)$  гэвэл  $M_1(-x, -y)$ ,  $M_2(y, x)$ ,  $M_3(-y, x)$  цэгүүд нь уг функцийн график дээр оршино. Иймд функцийн график  $O(0,0)$  цэгийн хувьд,  $y = x$ ,  $y = -x$  шулуунуудын хувьд тэгш хэмтэй. Зураг 3.21-ээс графикийг харна уу.



Зураг 3.21

**Жишээ 6.**  $y = \frac{1}{x+2}$  функцийн графикийн хэвтээ, босоо асимптотыг олж графикийг байгуул.

**Бодолт.**  $x + 2$  олон гишүүнтний язгуур нь  $x = -2$  тул уг шулуун нь өгсөн функцийн графикийн босоо асимптот болно. Харин хүртвэр дэх олон гишүүнтний зэрэг нь хуваарь дахь олон гишүүнтний зэргээс бага тул  $y = 0$  шулуун хэвтээ асимптот юм. Функцийн график нь  $(-2, 0)$  цэгийн хувьд тэгш хэмтэй. Зураг 3.22-оос графикийг харна уу.



Зураг 3.22

**Жишээ 7.**  $y = \frac{2x+1}{x}$  функцийн босоо ба хэвтээ асимптотыг олж, графикийг байгуул.

**Бодолт.** Функцийн графикийн босоо асимптот нь  $x = 0$  шулуун байна. Харин хүртвэр болон хуваарь дахь олон гишүүнтийн зэрэг нь ижил ба ахмад гишүүний коэффициент нь харгалzan 2, 1 байна. Иймд хүртвэр дэх олон гишүүнтийг хуваарь дахь олон гишүүнтэд хуваавал  $y = \frac{2x+1}{x} = 2 + \frac{1}{x}$  болох тул  $y = 2$  шулуун хэвтээ асимптот байна.

$y = \frac{2x+1}{x}$  функцийн график нь  $(0, 2)$  цэгийн хувьд тэгш хэмтэй байна. Графикийг тоймлон байгуулж, Зураг 3.23-д харууллаа.

**Жишээ 8.**  $y = \frac{2x+3}{x+1}$  функцийн графикийг тоймлон зур.

**Бодолт.** Босоо, хэвтээ асимптотыг ольё.

$y = \frac{2x+3}{x+1} = 2 + \frac{1}{x+1}$  функцийн графикийн хувьд  $x = -1$  шулуун нь босоо асимптот,  $y = 2$

шулуун нь хэвтээ асимптот болно. Функцийн график нь  $(-1, 2)$  цэгийн хувьд тэгш хэмтэй байна.

Функцийн график координатын тэнхлэгүүдтэй огтолцох цэгүүдийг ольё.  $y = 0$  тэгшигтгэл бодоход  $x = -1.5$  гарна.  $x = 0$  тэгшигтгэл бодоход  $y = 3$  гарна. Иймд  $Ox$  тэнхлэгийг огтлох цэг нь  $(-1.5, 0)$ ,  $Oy$  тэнхлэгийг огтлох

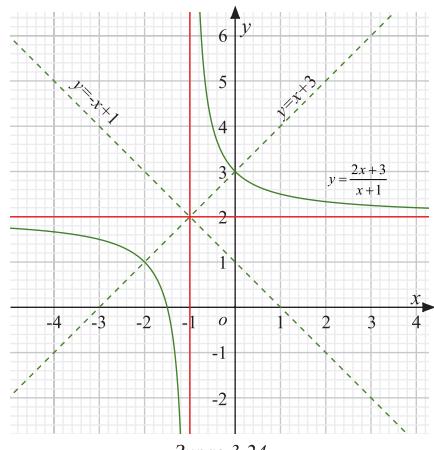
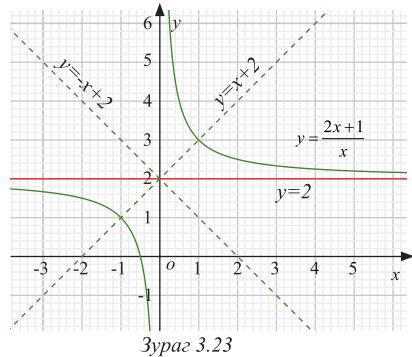
цэг нь  $(0, 3)$  байна. Эдгээрт тулгуурлан графикийг тойм байдлаар байгуулж, Зураг 3.24-д харууллаа.

Жишээ 5-аас жишээ 8-ыг ажиглавал  $y = \frac{cx+d}{ax+b}$  ( $a \neq 0, ad - bc \neq 0$ ) функцийн графикийн тухай дараах дүгнэлтүүдийг хийж болно.

Хүртвэр дэх олон гишүүнтийг хуваарь дахь олон гишүүнтэд хуваавал  $y = \frac{cx+d}{ax+b}$  функцийг

$$y = q + \frac{k}{x-p}$$

хэлбэрт шилжүүлж болно.



- a)  $y = q = \frac{c}{a}$  гэсэн хэвтээ асимптоттой байна.
- б)  $x = p = -\frac{b}{a}$  гэсэн босоо асимптоттой байна.
- в) Функцийн график нь  $\left(-\frac{b}{a}, \frac{c}{a}\right)$  цэгийн хувьд тэгш хэмтэй байна.

**Жишээ 9.** Хэрэв  $y = \frac{3x-3}{x-2}$  функцийн график нь  $y = x + p$  ба  $y = -x + q$  шулууны хувьд тэгш хэмтэй бол  $p, q$  тооны үржвэрийг ол.

**Бодолт.** Өгсөн функцийг  $y = q + \frac{k}{x-p}$  хэлбэрт шилжүүлье.

$$y = \frac{3x-3}{x-2} = \frac{3(x-2)+3}{x-2} = 3 + \frac{3}{x-2}$$

болов тул функцийн график нь  $x=2$ ,  $y=3$

шулуунуудын огтлолцлын  $(2, 3)$  цэгийг дайрсан, наалтууд нь  $\pm 1$  байх шулуунуудын хувьд тэгш хэмтэй байна. Иймд  $y = x + p$  ба  $y = -x + q$  шулуунууд нь  $(2, 3)$  цэгийг дайрах тул  $3 = 2 + p$   $3 = -2 + q$  тэгшигэл гарна. Эндээс  $p = 1$ ,  $q = 5$  болох тул  $pq = 5$  гэж гарна.

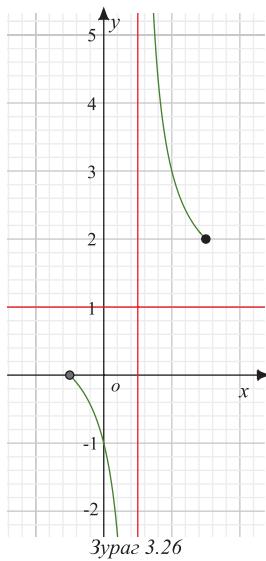
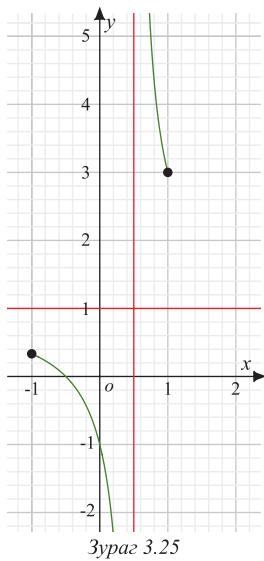
**Жишээ 10.** Хэрэв  $y = \frac{2x+1}{2x-1}$  функци өгсөн бол дараах асуултуудад хариул.

а) Хэрэв тодорхойлогдох муж нь  $D = \left\{ x \mid -1 \leq x < \frac{1}{2}, \frac{1}{2} < x \leq 1 \right\}$  бол дүрийг ол.

б) Хэрэв дүр нь  $I = \{y \mid y \leq 0, y \geq 2\}$  бол тодорхойлогдох мужийг ол.

**Бодолт.** Өгсөн функцийг  $y = \frac{2x+1}{2x-1} = 1 + \frac{2}{2x-1} = 1 + \frac{1}{x - \frac{1}{2}}$  гэсэн хэлбэрт шилжүүлж

болно. а) ба б) хэсэгт харгалзах графикийг Зураг 3.25, Зураг 3.26-д харууллаа.



$f(x) = \frac{cx+d}{ax+b}$  ( $a \neq 0$ ,  $ad - bc \neq 0$ ) функцийн урвуу функи

$D = \left\{ x \mid x \neq -\frac{b}{a}, x \in \mathbb{R} \right\}$ ,  $E = \left\{ y \mid y \neq \frac{c}{a}, y \in \mathbb{R} \right\}$  олонлогууд бол  $f: D \rightarrow E$ ,  $f(x) = \frac{cx+d}{ax+b}$

( $a \neq 0$ ,  $ad - bc \neq 0$ ) функи нь харилцан нэг утгатай функи тул урвуутай байна. Иймд урвуу функцийг олох алхмуудыг ашиглан урвуу функцийг нь олбол  $f^{-1}: E \rightarrow D$ ,  $f^{-1}(x) = \frac{-bx+d}{ax-c}$  гэж гарна.

**Жишээ 11.**  $f(x) = \frac{x-1}{2x+3}$  функцийн хэвтээ, босоо асимптот болон урвуу функцийг ол.

**Бодолт.** Уг функцийн график нь  $y = q = \frac{1}{2}$  хэвтээ асимптот,  $x = p = -\frac{3}{2}$  босоо

асимтоттой байна. Урвуу функи олох алхмуудын дагуу ольё.  $y = \frac{x-1}{2x+3}$  томъёонаас

$x$ -ийг  $y$ -ээр илэрхийлбэл  $x = \frac{-3y-1}{2y-1}$  гэж гарна. Энд  $x, y$ -ийн үүргийг сольвол

$y = \frac{-3x-1}{2x-1}$  болох тул урвуу функи нь  $f^{-1}(x) = \frac{-3x-1}{2x-1}$  гэж гарна.

**Жишээ 12.** Хэрэв  $f(x) = \frac{4x}{x+1}$ ,  $g(x) = \frac{2x+1}{x-1}$  функцийн урвуу нь харгалзан  $f^{-1}(x)$ ,  $g^{-1}(x)$  бол  $f^{-1}(g(a)) = 3$  байх  $a$  тоог ол.

**Бодолт.**  $f^{-1}(g(a)) = 3$  тул  $f(3) = g(a)$  байна. Иймд  $\frac{12}{4} = \frac{2a+1}{a-1}$  байх тул эндээс  $a = 4$  гэж гарна.

## ДАСГАЛ

**100.** Дараах функцийн тодорхойлогдох мужийг ол.

а)  $y = \frac{x+2}{x^2 - 4x + 3}$

б)  $y = \frac{(x-2)(x-1)}{x^3 + x^2 - x + 2}$

в)  $y = \frac{x^4 + 1}{x^4 - x^3 - 6x^2 - 2}$

г)  $y = \frac{x^5}{2x^3 - 3x^2 + 4x + 9}$

д)  $y = \frac{x^2 + 1}{x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 4x + 2}$

е)  $y = \frac{x}{x^8 - 82x^4 + 81}$

**101.** Дараах функцийн босоо, хэвтээ асимптотыг ол.

а)  $y = \frac{5x - 2}{2x^2 + 3x - 20}$

б)  $y = \frac{2x^2 + 2}{6x^2 + 5x + 1}$

в)  $y = \frac{-x^4 + 2}{x^4 - 4x^2 + 3}$

г)  $y = \frac{-\sqrt{5}x + 2}{2x^3 + 2}$

д)  $y = \frac{3x^3 + 2}{6x^3 - 17x^2 - 26x - 8}$

е)  $y = \frac{5x}{x^4 - x^3 - 13x - 15}$

**102.** Дараах функцийг олон гишүүнт болон хялбар рационал функцийн нийлбэр болгон задал.

а)  $y = \frac{2x + 3}{-3x^2 + 10x - 3}$

б)  $y = \frac{-3x^2 + 1}{2x^2 - 4x - 5}$

в)  $y = \frac{x + 2}{x(x^2 - 5x + 6)}$

г)  $y = \frac{x^5 - 1}{2x^3 - x^2}$

д)  $y = \frac{2x^4 - x^3}{x^3 + x^2 - x + 2}$

е)  $y = \frac{x + 2}{x^4 - 16}$

**103.** Дараах функцийн график байгуул.

а)  $y = \frac{1 - 3x}{x}$

б)  $y = \frac{-x + 2}{x + 1}$

в)  $y = \frac{4x}{3 - 2x}$

г)  $y = \frac{-2x + 1}{x + 3}$

д)  $y = \frac{-4x + 12}{2x - 3}$

е)  $y = \frac{-x + 2}{x + 1}$

**104.** а)-е)-д өгсөн функцийн графикийг зөв харгалзуул (Зураг 3.27-г харна уу).

Үүнд:

а)  $y = \frac{3x + 2}{x + 2}$

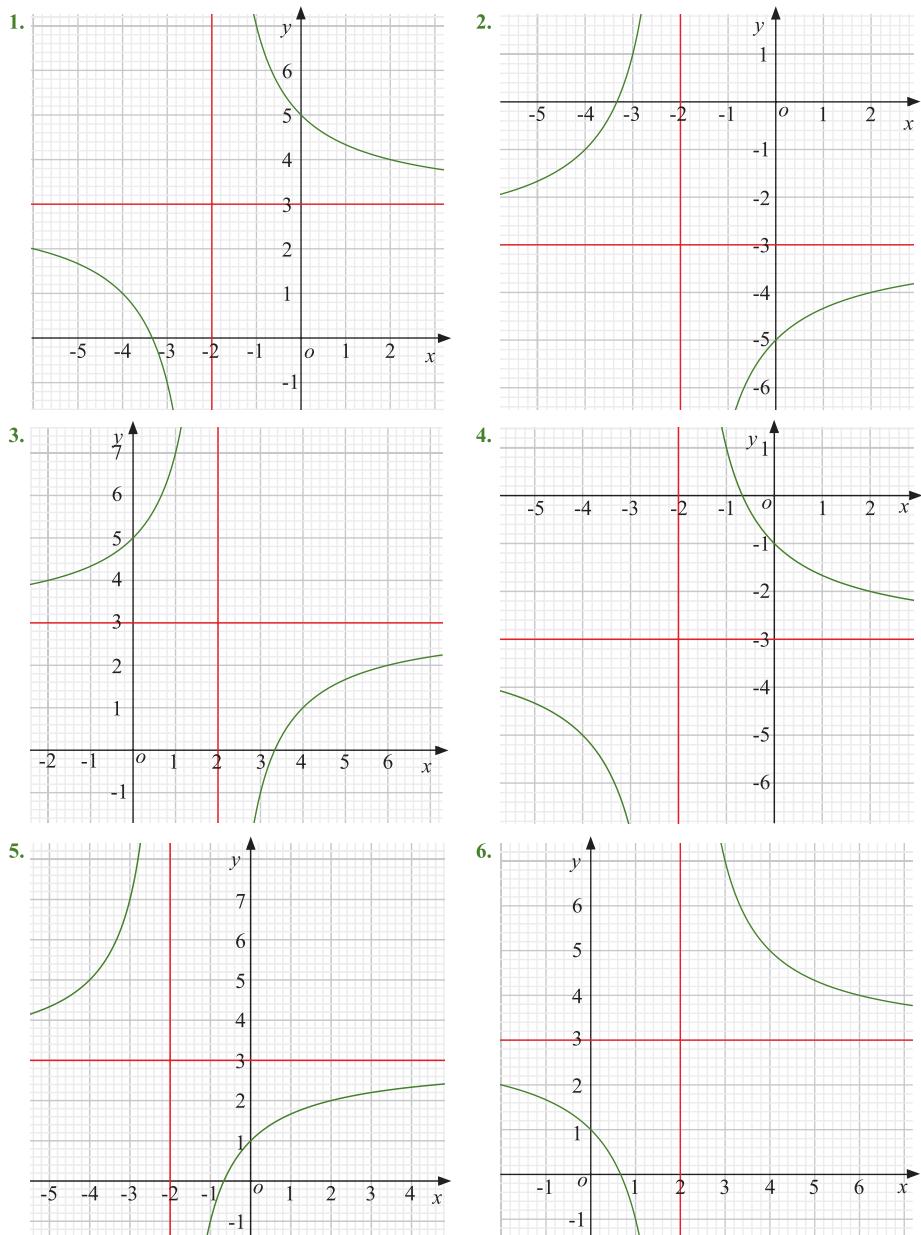
б)  $y = \frac{3x - 10}{x - 2}$

в)  $y = \frac{3x - 2}{x - 2}$

г)  $y = \frac{3x + 10}{x + 2}$

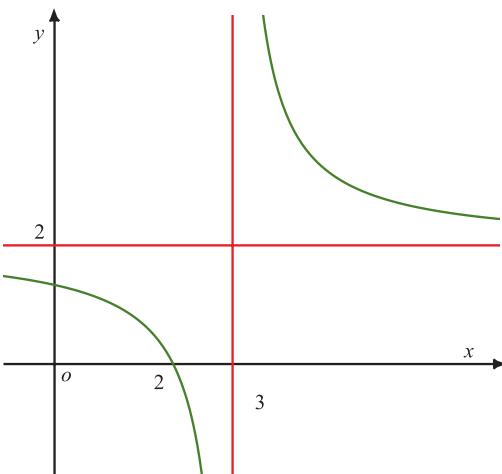
д)  $y = \frac{-3x - 2}{x + 2}$

е)  $y = \frac{-3x - 10}{x + 2}$

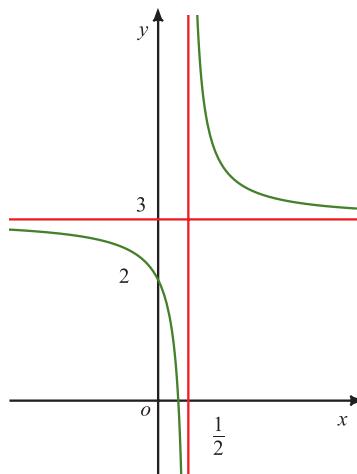


Зураг 3.27

105. Хэрэв  $y = \frac{k}{x+a} + b$  функцийн график нь Зураг 3.28-д өгсөн бол  $a$ ,  $b$ ,  $k$  тогтмол тоонуудын нийлбэрийг ол.
106. Хэрэв  $y = \frac{bx+c}{ax-1}$  функцийн график нь Зураг 3.29-д өгсөн бол  $a$ ,  $b$ ,  $c$  тогтмол тоонуудын нийлбэрийг ол.



Зураг 3.28



Зураг 3.29

**107.** Хэрэв  $y = \frac{bx + c}{x + a}$  функцийн график нь  $(3, 1)$  цэгийг дайрдаг, асимптот нь  $x = -2, y = 4$  шулуунууд бол  $a, b, c$  тогтмол тоонуудын нийлбэрийг ол.

**108.** Хэрэв  $y = \frac{ax + 5}{bx + c}$  функцийн график нь  $(1, 1)$  цэгийг дайрдаг, асимптот нь  $x = \frac{1}{2}, y = -\frac{1}{3}$  шулуунууд бол  $a, b, c$  тогтмол тоонуудын нийлбэрийг ол.

**109.** Хэрэв  $f(x) = \frac{2x + 3}{x + 2}$  функцийн дүр нь  $I = \left\{ y | y \leq \frac{3}{2}, y \geq 3 \right\}$  бол функцийн тодорхойлогдох мужийг ол.

**110.** Тодорхойлогдох муж нь  $|x| > 3$  байх  $y = \frac{x}{x - 1}$  функцийн хамгийн их ба хамгийн бага утгын нийлбэрийг ол.

**111.** Хэрэв  $f(x) = \frac{ax + b}{2x + c}$  функцийн урвуу функц нь  $f^{-1}(x) = \frac{-x + 3}{2x - 1}$  бол  $a, b, c$  тогтмол тоонуудыг ол.

**112.**  $f(x) = \frac{-x - 3}{2x + 1}$  функц өгсөн бол  $g(f(x)) = x$  байх  $g(x)$  функцийн хувьд  $g(3)$ -ыг ол.

**113.** Хэрэв  $f(x) = \frac{2x + 5}{x + 2}$  функцийн урвуу функц нь  $f^{-1}(x)$  бол  $f^{-1}(f(f^{-1}(3)))$ -ыг ол.

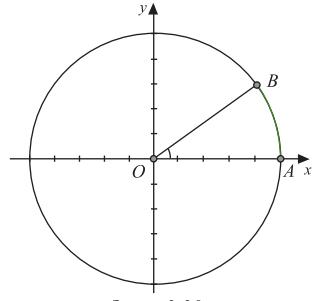
**114.** Хэрэв  $f(x) = \frac{ax + b}{x + 1}$  функцийн график нь  $(1, 1)$  цэгийг дайрдаг ба  $f^{-1}(x) = f(x)$  бол  $b - a$  ялгаврыг ол.

115.  $D = \{x | x > -1\}$  олонлог дээр тодорхойлогдсон  $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$  функцийн хувьд  $f\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = \frac{1}{x}$  нөхцөлийг хангах  $x$ -ийн утгыг ол.
116.  $y = \frac{k}{x-2} + 2$  функцийн график ба  $y = -x + 10$  шулууны огтлолцлын цэгийг  $P, Q$  гэе. Хэрэв  $PQ$  хэрчмийн урт нь  $4\sqrt{2}$  бол  $k$  эерэг бодит тоог ол.
117. Координатын хавтгайд  $P(-2, -1)$  цэг өгөв.  $Q$  нь  $f(x) = \frac{1-x}{2+x}$  функцийн график дээр орших аливаа цэг гэе. Хэрэв  $PQ$  хэрчмийн уртын хамгийн бага утгыг  $m$  гэвэл  $m^2$ -ыг ол.

### 3.7. ТООН АРГУМЕНТТАЙ ТРИГОНОМЕТР ФУНКЦИИЙН ГРАФИК

Бид өмнөх ангид тригонометрийн функцийн аргумент болох өнцгийг нь градус байхад функцийн утгыг олж сурсан. Математикт тригонометрийн функцийн өнцгийг радиан гэж нэрлэдэг тоогоор илэрхийлж ашигладаг.

Тэгш өнцөгт координатын системд координатын эх дээр төвтэй нэгж радиустай тойрог авъя. Зураг 3.30-д үзүүлсэн тойрог дээр өгсөн  $A$  цэгээс  $B$  цэг хүртэлх нумын урт  $x$  байг. Тэгвэл  $\angle BOA$  өнцөгт  $x$  тоог харгалзуулж болно. Мөн буцаагаад  $x$  тоо бүрд уг тоотой тэнцүү урттай тойргийн нумын төв өнцгийг харгалзуулж болно. Тухайлбал, уг тойргийн нийт урт буюу  $2\pi$  тоонд  $360^\circ$  градус харгалзана. Тэгвэл уг тойргийн 1 урттай нумд  $\frac{360^\circ}{2\pi} \approx 57^\circ$  харгалзана.



Zuраг 3.30

Тойргийн радиустай тэнцүү нумд тулсан төв өнцөг тойргийн радиусаас хамаарахгүй өөр хоорондоо тэнцүү  $\frac{360^\circ}{2\pi}$  байдаг. Эндээс дараах тодорхойлолтыг өгч болно.

**Тодорхойлолт.** Тойргийн радиусын урттай тэнцүү нумд тулсан төв өнцгийг **нэг радиан өнцөг** гэдэг.

Жишээлбэл,  $360^\circ = 2\pi$  радиан,  $\pi$  радиан  $= 180^\circ$ ,  $\frac{\pi}{2}$  радиан  $= 90^\circ$ ,

$\frac{\pi}{3}$  радиан  $= 60^\circ$  байна. Хэрэв  $\alpha$  градусын өнцөгт харгалзах радиан өнцгийн

хэмжээг  $a$  гэвэл

$$a = \frac{\pi \alpha^\circ}{180^\circ} \text{ (рад)} \text{ буюу } \alpha^\circ = \frac{180^\circ a}{\pi}$$

гэсэн томьёо биелнэ. Цаашид радиан гэдэг нэгжийг бичихгүйгээр өнцгийн радиан болон градусын хэмжээг тэнцүүлж бичих болно. Жишээ нь:  $\frac{\pi}{2} = 90^\circ$ ,  $\frac{\pi}{6} = 30^\circ$ ,  $\frac{3\pi}{2} = 270^\circ$ .

**Жишээ 1.** Дараах өнцгийг радианаар илэрхийл. а)  $75^\circ$  б)  $225^\circ$  в)  $405^\circ$

$$\text{Бодолт. а)} 75^\circ = \frac{\pi \cdot 75^\circ}{180^\circ} = \frac{5\pi}{12}, \text{ б)} 225^\circ = \frac{\pi \cdot 225^\circ}{180^\circ} = \frac{5\pi}{4}, \text{ в)} 405^\circ = \frac{\pi \cdot 405^\circ}{180^\circ} = 2.25\pi.$$

**Жишээ 2.** Дараах радиан өнцгийг градусаар илэрхийл. а)  $\frac{3}{4}\pi$  б)  $\frac{4}{3}\pi$  в)  $\frac{5}{2}\pi$

$$\text{Бодолт. а)} \frac{3}{4}\pi = \frac{180^\circ \cdot \frac{3\pi}{4}}{\pi} = 135^\circ, \text{ б)} \frac{4}{3}\pi = \frac{180^\circ \cdot \frac{4\pi}{3}}{\pi} = 240^\circ, \text{ в)} \frac{5}{2}\pi = \frac{180^\circ \cdot \frac{5\pi}{2}}{\pi} = 450^\circ.$$

**Жишээ 3.** а радиан төв өнцөг бүхий секторын талбайг ол.

**Бодолт.**  $2\pi$  радианд  $S_1 = \pi r^2$  талбай харгалзана. Иймд нэг радианд

$$S_2 = \frac{S_1}{2\pi} = \frac{\pi r^2}{2\pi} = \frac{r^2}{2} \text{ талбай харгалзана. Тэгвэл } a \text{ радиан төв өнцөгт харгалзах}$$

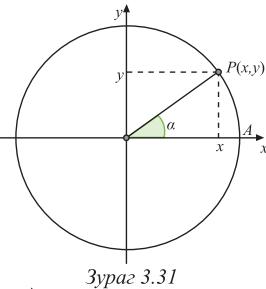
$$\text{талбай } S = \frac{ar^2}{2} \text{ байна.}$$

Өнцгийг радианаар хэмжиж чаддаг болсноор тригонометрийн тоон утгатай функцийг тодорхойлж болно. Тухайлбал,  $\sin \frac{\pi}{6} = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ ,  $\cos \frac{\pi}{3} = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$  болно.

Координатын эх дээр төвтэй нэгж радиустай тойргийн  $Ox$  тэнхлэг дээр орших цэгийг  $A$  гэе. Дурын  $\alpha$  ( $-\infty < \alpha < \infty$ ) радиан өнцөг авья. Хэрэв  $\alpha \geq 0$  бол  $OA$  радиусыг координатын эхийг тойруулан цагийн зүүний эсрэг  $\alpha$  өнцгөөр, хэрэв  $\alpha < 0$  бол  $OA$  радиусыг координатын эхийг тойруулан цагийн зүүний дагуу  $|\alpha|$  өнцгөөр эргүүлэхэд үүсэх радиусын тойрог дээрх төгсгөлийн цэгийн координатыг  $P(x, y)$  гэж тэмдэглээ. Тэгвэл  $\alpha$  өнцгийн тригонометрийн харьцааг  $P(x, y)$  цэгийн координатаар

$$\sin \alpha = y, \cos \alpha = x, \operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x}$$

гэж тодорхойлно.  $\alpha$  өнцгийн өөр өөр утгад  $y = \sin \alpha$  нь өөр өөр утга авна. Өөрөөр хэлбэл  $y = \sin \alpha$  нь  $\alpha$  өнцгөөс хамаарсан функц байна. Үүнтэй адилгаар  $\cos \alpha, \operatorname{tg} \alpha$  нь бас  $\alpha$  өнцгөөс хамаарсан функц байна.



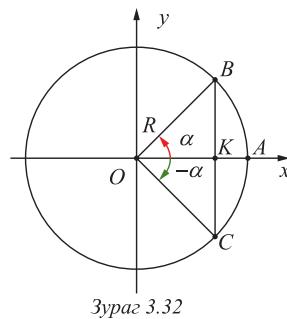
Зураг 3.31

**Тодорхойлолт.** Өнцгөөс хамаарсан синус, косинус, тангенс функциүүдийг тригонометр функцийн дээрээс гэдэг.

## Тригонометр функцийн тэгш ба сондгой чанар

$OA$  радиусыг  $\alpha$  өнцгөөр эргүүлж  $OB$  радиуст,  $-\alpha$  өнцгөөр эргүүлж  $OC$  радиуст шилжүүлье. Тэгвэл  $B, C$  цэгүүдээс  $Ox$  тэнхлэгт буулгасан перпендикулярын сууриудыг харгалзан  $K, K_1$  гэвэл  $OBK, OCK_1$  гурвалжнууд тэнцүү байна. Иймд  $K, K_1$  цэгүүд давхцах бөгөөд  $BK = CK$  гэдгээс  $B$  цэгийн координатыг  $(x, y)$  гэвэл  $C$ -ийн координат  $(x, -y)$  болно. Эндээс  $\sin(-\alpha) = \frac{-y}{R} = -\frac{y}{R} = -\sin \alpha$ ,  $\cos(-\alpha) = \frac{x}{R} = \cos \alpha$  болно.

Мөн  $\operatorname{tg}(-\alpha) = \frac{-y}{x} = -\frac{y}{x} = -\operatorname{tg} \alpha$  болно. Иймд синус, тангенс функциүүд сондгой, косинус функц тэгш байна. (Зураг 3.32)



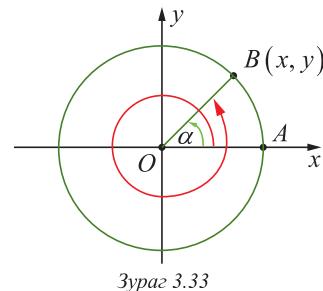
Зураг 3.32

## Тригонометр функцийн уелэх чанар

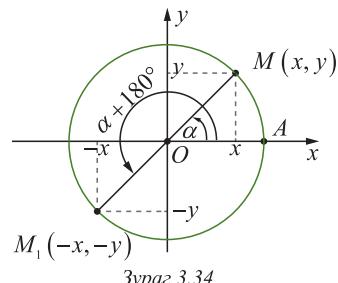
$OA$  радиусыг  $OB$  радиуст шилжүүлэх  $\alpha$  өнцгийг  $360^\circ \cdot n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$  градустай тэнцүү өнцгөөр өөрчлөхөд  $B$  цэгийн байрлал хэвээрээ байна. Иймээс уг өнцгийн синус, косинус, тангенсын утгууд өөрчлөгдөхгүй. Иймд синус, косинус, тангенс функцийг үet функц гэдэг. Өөрөөр хэлбэл  $\sin(\alpha + 360^\circ \cdot n) = \sin \alpha$ ,  $\cos(\alpha + 360^\circ \cdot n) = \cos \alpha$  тэнцэтгэлүүд биелнэ.  $360^\circ \cdot n$  буюу  $2\pi n$  нь синус, косинус функцийн үe болно. (Зураг 3.33)

Харин I мөчид орших  $\alpha$ , III мөчид орших  $\alpha + 180^\circ$  өнцгүүдийн хувьд  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x}$ ,  $\operatorname{tg}(\alpha + 180^\circ) = \frac{-y}{-x} = \frac{y}{x} = \operatorname{tg} \alpha$  учраас  $\operatorname{tg}(\alpha + 180^\circ \cdot n) = \operatorname{tg} \alpha$  байна. Иймд  $180^\circ \cdot n$  буюу  $\pi n$  нь тангенс функцийн үe болно. (Зураг 3.34)

Эдгээрээс хамгийн бага зэрэг тоо  $2\pi$  буюу  $360^\circ$ -ыг синус, косинус функцийн үндсэн үe,  $\pi$  буюу  $180^\circ$ -ыг тангенс функцийн үндсэн үe гэнэ.



Зураг 3.33



Зураг 3.34

## Тригонометр функцийн эмхтгэлийн томьёо

Тэгш өнцөгт координатын системд өгсөн координатын эх дээр төвтэй нэгж радиустай тойрог дээр тэмдэглэсэн  $-\alpha$ ,  $\alpha$  ( $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ) өнцөгт харгалзах радиусыг цагийн зүүний эсрэг  $\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$  өнцгүүдээр эргүүлэхэд  $\frac{\pi}{2} \pm \alpha, \pi \pm \alpha, \frac{3\pi}{2} \pm \alpha, 2\pi \pm \alpha$

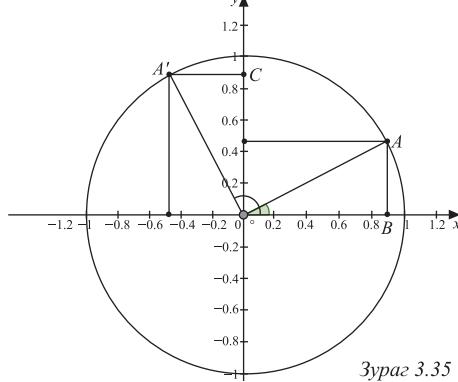
өнцгүүд үүснэ. Эдгээр өнцгийн тригонометр функцийн утга  $\alpha$  өнцөг дэх утгаар илэрхийллэгддэг. Эдгээрийг эмхэтгэлийн томьёо гэнэ. Эмхэтгэлийн томьёог дараах хүснэгтээр өгч болно.

$\beta$	$\frac{\pi}{2} - \alpha$	$\frac{\pi}{2} + \alpha$	$\pi - \alpha$	$\pi + \alpha$	$\frac{3\pi}{2} - \alpha$	$\frac{3\pi}{2} + \alpha$	$2\pi - \alpha$	$2\pi + \alpha$
$\sin \beta$	$\cos \alpha$	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\sin \alpha$	$\sin \alpha$
$\cos \beta$	$\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\sin \alpha$	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\cos \alpha$
$\operatorname{tg} \beta$	$\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$	$-\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$	$-\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$

**Жишээ 4.**  $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha$  болохыг зураг ашиглан харуульяа.  $\angle BOA = \alpha$  байх

$A$  цэг,  $\angle BOA' = \frac{\pi}{2} + \alpha$  байх  $A'$  цэгийг

тойрог дээрээ аваад  $A$  цэгээс  $Ox$  тэнхлэгт  
перпендикуляр буулгаж суурийг нь  $B$ ,  $A'$  цэгээс  $Oy$  тэнхлэгт перпендикуляр буулгаж  
суурийг нь  $C$  гэвэл  $\Delta AOB$  нь,  $\Delta A'OC$  гурвалжинтай тэнцүү. Иймд  $OB = OC$  байна. (Зураг 3.35)



Зураг 3.35

Тодорхойлолт ёсоор  $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = OC$ ,  $\cos \alpha = OB$  учраас  $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha$  гэж гарна.

### Синус функцийн график

$y = \sin x$  функцийн графикийг дараах чанаруудыг ашиглан байгуульяа.

1. Синус функцийн тоон шулуун дээр буюу  $]-\infty, +\infty[$  мужид тодорхойлогдоно.
2.  $[-1, 1]$  мужаас утгаа авна.
3. Координатын I, II мөчид эерэг, III, IV мөчид сөрөг утгатай.
4. Сондгой функцийн.  $\Theta$ өрөөр хэлбэл, функцийн график  $O(0, 0)$  цэгийн хувьд тэгш хэмтэй.
5.  $2\pi$  үндсэн үетэй учраас функцийн графикийг  $[0, 2\pi]$  хэрчим дээр байгуулахад хангалттай.

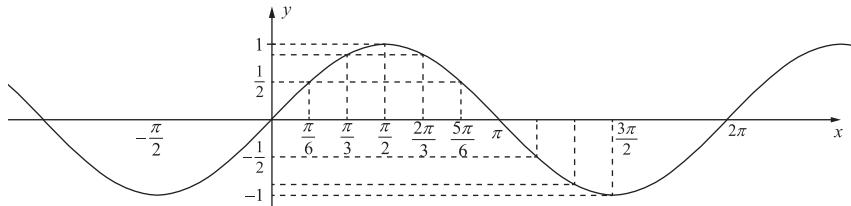
Үүний тулд  $[0, 2\pi]$  хэрчим дээр дараах утгуудыг авч хүснэгт зохиоёо.

$x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\pi$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	$2\pi$
$y = \sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0

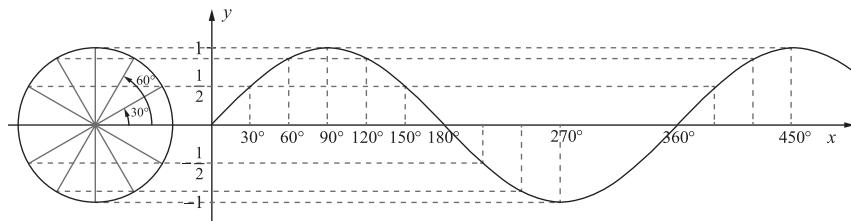
$$(0,0), \left(\frac{\pi}{6}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \left(\frac{\pi}{2}, 1\right), \left(\frac{2\pi}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \left(\frac{5\pi}{6}, \frac{1}{2}\right), (\pi, 0), \left(\frac{7\pi}{6}, -\frac{1}{2}\right), \left(\frac{4\pi}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$

$\left(\frac{3\pi}{2}, -1\right)$  цэгүүдийг дэс дараалан холбож,  $y = \sin x$  функцийн графикийн  $[0, 2\pi]$

хэрчимд харгалзах хэсгийг зурна. Энэ хэсгийг  $Ox$  тэнхлэгийн  $2\pi$  урттай хэрчим бүрд зурах замаар  $y = \sin x$  функцийн графикийг байгуулна. Зураг 3.36, 3.37-д харууллаа.



Зураг 3.36



Зураг 3.37

### Косинус функцийн график

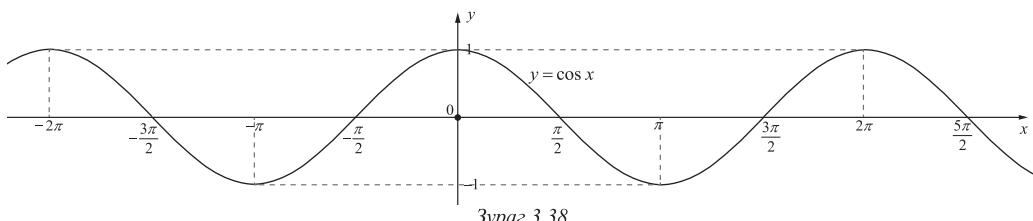
$y = \cos x$  функцийн графикийг дараах чанарууд дээр тулгуурлан байгуульяа.

1. Косинус функциц тоон шулуун дээр буюу  $]-\infty, +\infty[$  мужид тодорхойлогдоно.
2.  $[-1, 1]$  мужаас утгаа авна.
3. Координатын I, IV мөчид эерэг, II, III мөчид сөрөг утгатай
4. Тэгш функц.  $\Theta$ өрөөр хэлбэл функцийн график  $Oy$  тэнхлэгийн хувьд тэгш хэмтэй
5.  $2\pi$  үндсэн үетэй учраас функцийн графикийг  $[-\pi, \pi]$  хэрчим дээр байгуулахад хангалттай.

Үүний тулд  $[-\pi, \pi]$  хэрчим дээр дараах утгуудыг авч хүснэгт зохиоё.

$x$	$-\pi$	$-\frac{5\pi}{6}$	$-\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\pi$
$y$	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-1

Дээрх цэгүүдийг дэс дараалан холбосноор функцийн графикийн  $[-\pi, \pi]$  хэрчим дээрх хэсгийг байгуулна. Энэ хэсгийг  $Ox$  тэнхлэгийн  $2\pi$  урттай хэрчим бүрд зурах замаар  $y = \cos x$  функцийн графикийг байгуулна. (Зураг 3.38)



Зураг 3.38

## Тангенс функцийн график

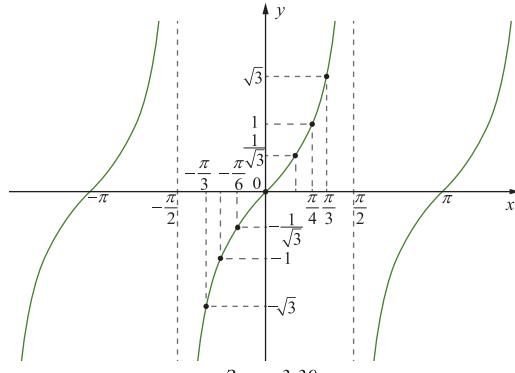
$y = \operatorname{tg}x$  функцийн графикийг дараах чанарууд дээр тулгуурлан байгуулья.

1. Тангенс функцийн тодорхойлогдох муж.  $x \neq \frac{(2k+1)\pi}{2}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  байна.
2.  $]-\infty, +\infty[$  мужаас утгаа авна.
3. Координатын I, III мөчид эерэг ба II, IV мөчид сөрөг утгатай.
4. Сондгой функцийн график  $O(0,0)$  цэгийн хувьд тэгш хэмтэй.
5.  $\pi$  үндсэн үетэй учраас  $y = \operatorname{tg}x$  функцийн графикийн  $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  хэрчим дээр байгуулахад хангалттай.

Графикийг байгуулахын тулд дараах утгын хүснэгтийг зохиоё.

$x$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$y$	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$\infty$

Олсон цэгүүдийг байгуулж дэс дараалан холбох замаар  $y = \operatorname{tg}x$  функцийн графикийн  $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  хэрчимд харгалзах хэсгийг зурна. Дараа нь  $Ox$  тэнхлэгийн дагуу  $\pi$  урттай хэрчим бүрд энэхүү хэсгийг зурах замаар  $y = \operatorname{tg}x$  функцийн графикийг байгуулна.



Зураг 3.39

### ДАСГАЛ

118. Нэгж тойрог дээр дараах өнцгүүдэд харгалзах радиусуудыг байгуулж, түүний төгсгөлийн цэгийн координатыг ол.

- а)  $45^\circ, 60^\circ, 30^\circ$  б)  $120^\circ, 135^\circ, 150^\circ$  в)  $210^\circ, 300^\circ, 330^\circ$  г)  $450^\circ, 600^\circ, 1260^\circ$

119. Дараах өнцгийг радианаар илэрхийл.

- а)  $45^\circ, 60^\circ, 30^\circ$  б)  $120^\circ, 135^\circ, 150^\circ$  в)  $210^\circ, 300^\circ, 330^\circ$  г)  $450^\circ, 600^\circ, 1260^\circ$

120. Дараах радианаар өгөгдсөн өнцгийг градусаар илэрхийл.

- а)  $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$  б)  $\frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}$  в)  $\pi, \frac{7\pi}{6}, \frac{4\pi}{3}$  г)  $\frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{4}, \frac{11\pi}{6}$  д)  $\frac{7\pi}{3}, \frac{23\pi}{4}, \frac{13\pi}{2}$

121. Тойргийн радиус нь 9 бол  $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}$  төв өнцгүүдэд харгалзах нумын уртыг ол.

## БҮЛГИЙН НЭМЭЛТ ДААЛГАВАР

1.  $\log_8 \left( \sqrt{2+\sqrt{3}} - \sqrt{2-\sqrt{3}} \right) = x$  нөхцөлийг хангах  $x$ -ийн утгыг ол.
2. Хэрэв  $x^2 - 4x + 1 = 0$  тэгшитгэлийн язгуур  $\alpha, \beta$  бол  $\log_4 \left| \frac{1}{\sqrt{\alpha}} - \frac{1}{\sqrt{\beta}} \right|$  илэрхийллийн утгыг ол.
3. Хэрэв  $x^2 - 3x + 1 = 0$  тэгшитгэлийн язгуур  $\alpha, \beta$  бол  $\log_4 \left( \frac{\beta}{\alpha^2 + 1} + \frac{\alpha}{\beta^2 + 1} \right)$  илэрхийллийн утгыг ол.
4. Хэрэв  $x = \sqrt{10} + \sqrt{2}$  ба  $y = \sqrt{10} - \sqrt{2}$  бол  $\log_4 (x^2 + xy + y^2)$  илэрхийллийн утгыг ол.
5. Хэрэв  $x = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$  бол  $\log_3 (x^2 - 6x + 10)$  илэрхийллийн утгыг ол.
6. Дараах илэрхийллийг хялбарчил.

a) 
$$\frac{\log_8 \sqrt{810} + \log_8 \sqrt{3.6} + \frac{1}{6}}{\log_8 63 + \log_8 3.5}$$

б) 
$$\log_2 \sqrt{\sqrt{3}-1} + \log_2 \sqrt[4]{4+2\sqrt{3}}$$

в) 
$$\log_2 (1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}) + \log_2 (1 + \sqrt{2} - \sqrt{3})$$

г) 
$$(\lg 2)^3 + (\lg 5)^3 + \lg 5 \lg 8$$

д) 
$$(\lg 20)^3 - \lg 20 \lg 8 - (\lg 2)^3$$

е) 
$$\lg \frac{\sqrt{11+2\sqrt{10}} + \sqrt{11-2\sqrt{10}}}{\sqrt{11+2\sqrt{10}} - \sqrt{11-2\sqrt{10}}}$$

ё) 
$$\sqrt{\lg \sqrt{6} + \sqrt{\lg 3 \lg 2}} + \sqrt{\lg \sqrt{6} - \sqrt{\lg 3 \lg 2}}$$

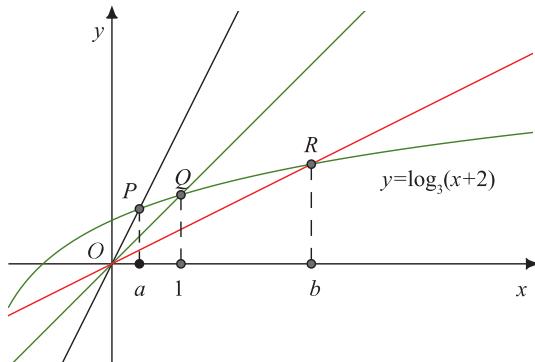
ж) 
$$\sqrt{\lg 100a - \sqrt{\lg a^8}}, (a > 1)$$

з) 
$$\sqrt{\lg 10a - \sqrt{\lg a^4}}, (1 < a < 10)$$

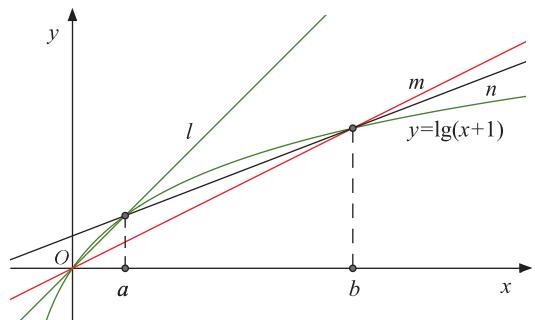
и) 
$$\log_2 \sqrt{2x + 2\sqrt{x^2 - 1}} + \log_2 (\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}), (x > 1)$$

7. Хэрэв  $0 \leq x \leq 4$  үед  $y = -x^2 + 2(\log_2 a)x + \log_2 b$  функцийн хамгийн их утгын 5, хамгийн бага утга нь  $-4$  бол  $a, b$ -ийн утгыг ол ( $1 < a < 16$ ).
8.  $y = \log_2 (x-1)$ ,  $3 \leq x \leq 5$  функцийн хамгийн их ба хамгийн бага утгыг ол.
9. Хэрэв  $1 \leq x \leq 1000$  бол  $10x^{2-\lg x}$  илэрхийллийн хамгийн их ба хамгийн бага утгыг ол.
10. Хэрэв  $x > 0$ ,  $y > 0$  ба  $y^3 x^{\lg x} = 10$  бол  $x^2 y$  илэрхийллийн хамгийн их утгыг ол.
11. Хэрэв  $x > 1$ ,  $y > 1$  ба  $xy = 100$  бол  $x^{\lg y}$  илэрхийллийн хамгийн их утгыг ол.
12. Хэрэв  $x \geq 2$ ,  $y \geq 2$  ба  $xy = 1024$  бол  $\log_2 xy^2 \log_2 x + 1$  илэрхийллийн хамгийн их ба хамгийн бага утгыг ол.

13. Хэрэв  $\log_3 x + \log_3 y = 2$  бол  $2x + 3y$  илэрхийллийн хамгийн бага утгыг ол.
14. Хэрэв  $f(x) = \log_3(2x+1)$  функц өгсөн бол  $g(f(x)) = 4x^2$  нөхцөлийг хангах  $y = g(x)$  функцийг ол.
15.  $y \leq 2\log_{10} x$ ,  $y \leq 3 - \log_{10} x$ ,  $y \geq 0$  тэнцэтгэл бишүүдийг нэгэн зэрэг хангах  $M(x, y)$  цэгүүдийн олонлогийг координатын хавтгайд дүрсэлж харуул.  $x, y$  бүхэл тоо байх цэгийн тоог ол.
16. Хэрэв  $a > 1 > b > 0$ ,  $ab > 1$  бол  $A, B, C$ -г өсөх эрэмбээр байрлуул.  
Энд  $A = \log_{a^2} b$ ,  $B = \log_a b^2$ ,  $C = \log_b a^2$  байна.
17. Хэрэв  $a > b > c > 1$ ,  $b^2 = ac$  бол  $A, B, C$ -г өсөх эрэмбээр байрлуул.  
Энд  $A = \log_b c$ ,  $B = \log_c a$ ,  $C = \log_a b$  байна.
18. Хэрэв  $0 < x < y^2 < x^2$ ,  $y > 1$  бол  $A, B, C, D$ -г өсөх эрэмбээр байрлуул. Энд  
 $A = \log_y y\sqrt{x}$ ,  $B = \log_x \frac{x^2}{y}$ ,  $C = \log_x y$ ,  $D = \log_y x$  байна.
19. Зураг 3.40-д  $y = \log_3(x+2)$  функцийн графикийг харууллаа.  
Хэрэв уг функцийн график координатын эхийг дайрсан гурван шулуунтай  $P, Q, R$  цэгээр огтолцох ба эдгээр цэгийн абсцисс нь харгалзан  $a, 1, b$  бол  $3^a, (a+2)^b, (b+2)^2$  илэрхийллийн утгыг буурах эрэмбээр байрлуул.
20. Зураг 3.41-д  $y = \lg(x+1)$  функцийн графикийг харууллаа.  
Хэрэв уг функцийн график  $l, m, n$  гэсэн гурван шулуунтай огтолцох ба  $0 < a < b$  бол  $(a+1)^{\frac{1}{a}}, (b+1)^{\frac{1}{b}}, \left(\frac{b+1}{a+1}\right)^{\frac{1}{b-a}}$  илэрхийлүүдийн утгыг өсөх эрэмбээр байрлуул.
21.  $y = \frac{x}{x+a}$  ба  $y = \frac{ax+1}{x-2}$  функцийн графикийн асимптотуудаар хүрээлэгдсэн дүрсийн талбай 20 кв. нэгж байв.  $a$  эерэг тоог ол.



Зураг 3.40



Зураг 3.41

22. Хэрэв  $y = \frac{ax+2b}{2x+c}$  функцийн график нь  $Oy$  тэнхлэгийг  $(0,1)$  цэгээр огтлох ба  $\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$  цэгийн хувьд тэгш хэмтэй бол  $a+b+c$  нийлбэрийг ол.
23. Хэрэв  $y = \frac{bx+2}{x+a}$  функцийн график нь  $y = x+3$  ба  $y = -x-2$  шулууны хувьд тэгш хэмтэй бол  $b-a$  ялгаврыг ол.
24. Хэрэв  $A = \left\{(x,y) \mid y = \frac{2x-1}{x}\right\}$  ба  $B = \left\{(x,y) \mid y = ax+2\right\}$  олонлогуудын хувьд  $A \cap B = \emptyset$  байdag бол  $a$  тоог ол.
25. Хэрэв  $f(x) = \frac{ax}{2x+3}$  функцийн хувьд  $f(x) = f^{-1}(x)$  нөхцөл биелдэг бол  $a$  тоог ол. Энд  $f^{-1}(x)$  нь  $f(x)$  функцийн урвуу байна.
26.  $f(x) = \frac{ax+b}{x+c}$  функцийн график нь  $(-1,2)$  цэгийн хувьд тэгш хэмтэй. Хэрэв  $f^{-1}(0) = 2$  нөхцөл биелдэг бол  $a, b, c$  тоог ол.  $f(x)$  функцийн урвуу  $f^{-1}(x)$  функцийг ол.
27. Хэрэв  $f(x) = \frac{x}{x-1}$  ба  $g(x) = \frac{2x-1}{x}$  функцуудийн урвуу харгалзан  $f^{-1}(x), g^{-1}(x)$  бол  $f^{-1}(g(x))$ -ийн урвуу функцийг ол. Олсон функцийн  $x=3$  цэг дээрх утгыг ол.
28. Хэрэв  $y = \frac{k}{x-4} + 8$  функцийн график нь координатын I, II, IV мөчийг дайрдаг,  $y = \frac{k}{x+5} - 3$  функцийн график нь координатын дөрвөн мөчийг дайрдаг бол  $k$  бүхэл тоо хэд байх вэ?
29.  $AB=10$  см диаметртэй тойрогт  $AP, AQ$  хөвчүүд татав. Хэрэв  $P$  ба  $Q$  нь диаметрийн 2 талд оршдог ба  $AP=8$  см,  $\angle QAB = 2\angle PAB$  бол  $AQ$  хөвчийн уртыг ол.
30. Хэрэв  $a$  бодит тооны хувьд  $\begin{pmatrix} \sin \theta & \cos \theta \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \\ 1 \end{pmatrix}$  нөхцөл биелдэг бол  $k$ -ийн хамгийн их утгыг ол.
31. Хэрэв  $ABC$  гурвалжны хувьд  $\cos A = \frac{\sqrt{10}}{10}, \cos B = \frac{3\sqrt{10}}{10}$  бол  $ABC$  нь ямар гурвалжин болохыг тогтоо.

Энэ бүлэг сэдвийг судалснаар сурагчид дараах мэдлэг чадварыг эзэмшишнэ.

- $e^x$ ,  $\ln x$ ,  $\sin x$ ,  $\cos x$ ,  $\operatorname{tg} x$  функцийн уламжлалыг мэдэх, эдгээр функцийн нийлбэр, ялгавар мөн тогтмол тоогоор үргсүүлэхэд үүссэн функцийн уламжлалыг мэдэх олох
- Аргумент нь шугаман функц байх үед уламжлалыг олох, хэрэглэх
- Үржсвэр ба ногдворын уламжлал олох, хэрэглэх
- Давхар функцийн уламжлал олох, хэрэглэх

#### 4.1. $y=e^x$ ФУНКЦИЙН УЛАМЖЛАЛ

$y = e^x$  функцийн  $x = 0$  цэг дээрх уламжлал 1-тэй тэнцүү байдгийг харуулъя.

Уламжлалын тодорхойлолт ёсоор  $\Delta x > 0$  тоо тэг рүү дөхөхөд  $\frac{e^{0+\Delta x} - e^0}{\Delta x} = \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$  харьцаа 1-тэй ойролцоогоор тэнцүү байдгийг харуулахад болно.

Өмнөх бүлэгт бид  $n$  тоо ихсэхэд  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  дарааллын гишүүн  $e$  тоо руу дөхөхийг мэдсэн. Иймээс  $n$ -ийн их утгад  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \approx e$  байна.

Ойролцоо утгатай энэ хоёр тоог  $\frac{1}{n}$  зэрэгт дэвшүүлж  $1 + \frac{1}{n} \approx e^{\frac{1}{n}}$ , гарсан хоёр тоо

бүрээс 1-ийг хасвал  $\frac{1}{n} \approx e^{\frac{1}{n}} - 1$  болно. Шинээр үүссэн хоёр тоог  $\frac{1}{n}$ -д хуваахад

$1 \approx \frac{e^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}}$  байна. Хэрэв  $\frac{1}{n} = \Delta x$  гэж авбал  $\frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} \approx 1$  болно.

$n$ -ийн их утгад  $\Delta x$  тоо 0 рүү дөхөж,  $\frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$  тоо  $y'_{x=0}$  руу дөхнө. Иймээс  $y'_{x=0} = 1$  болох нь харагдлаа.

**Теорем.**  $y = e^x$  функцийн уламжлал  $e^x$ -тэй тэнцүү.

Өөрөөр хэлбэл  $(e^x)' = e^x$  байна.

**Баталгаа.**  $x$ -ийн аливаа утгад

$\frac{e^{x+\Delta x} - e^x}{\Delta x} = \frac{e^x(e^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} = e^x \cdot \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$  гэсэн хувиргалт хийе. Тэгвэл  $\frac{e^{x+\Delta x} - e^x}{\Delta x}$  нь  $y'$  рүү,  $\frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$  нь 1 рүү тус тус дөхөж  $y' = e^x$  болов.

**Жишээ 1.**  $f(x) = x^2 - e^x$  функцийн уlamжлалыг ол.

**Бодолт.**  $f'(x) = (x^2 - e^x)' = 2x - e^x$

**Жишээ 2.**  $f(x) = 3x^2 - 2e^x$  функцийн  $x_0 = 0$  цэг дээрх уlamжлал ол.

**Бодолт.**  $(3x^2)' = 6x$ ,  $(2e^x)' = 2e^x$  тул нийлбэрийн уlamжлалын дурмээр  $f'(x) = 6x - 2e^x$  болно.  $x$ -ийн оронд 0-ийг орлуулбал  $f'(0) = 60 - 2e^0 = -2$

**Жишээ 3.**  $y = e^{3x-1}$  функцийн уlamжлалыг ол.

**Бодолт.**  $y = e^u$ ,  $u = 3x - 1$  гэж авбал давхар функцийн уlamжлалын дурмээр

$$\frac{dy}{dx} = \frac{de^{3x-1}}{dx} = \frac{de^{3x-1}}{d(3x-1)} \cdot \frac{d(3x-1)}{dx} = e^{3x-1} \cdot 3 = 3e^{3x-1}$$

**Жишээ 4.**  $y = e^{3x^2}$  функцийн  $x_0 = \frac{1}{3}$  цэгт татсан шургэгч шулууны налалтыг ол.

**Бодолт.** Давхар функцийн уlamжлалын дурмээр

$$\frac{dy}{dx} = \frac{de^{3x^2}}{dx} = \frac{de^{3x^2}}{d(3x^2)} \cdot \frac{d(3x^2)}{dx} = e^{3x^2} \cdot 6x = 6xe^{3x^2}$$

Энд  $x_0 = \frac{1}{3}$  утга орлуулж шургэгч шулууны налалтыг олно.  $k = 6 \cdot \frac{1}{3} \cdot e^{\frac{1}{3}} = 2e^{\frac{1}{3}} = 2\sqrt[3]{e}$

болно.

**Жишээ 5.**  $g(x) = e^x - e^2 x + e^2$  функцийг уlamжлалаар шинжилж, график байгуул.

**Бодолт.**

I.  $g(x) = e^x - e^2 x + e^2$  функцийн тодорхойлогдох

муж нь  $]-\infty, +\infty[$

II.  $g(-x) = \frac{1}{e^x} + e^2 x + e^2$  нь  $g(x), -g(x)$ -ийн

алинтай нь ч тэнцүү биш тул функц тэгш ч биш, сондгой ч биш.

III.  $g(0) = e^0 - e^2 \cdot 0 + e^2 = 1 - 0 + e^2 = 1 + e^2 \approx 1 + 2.72^2 =$

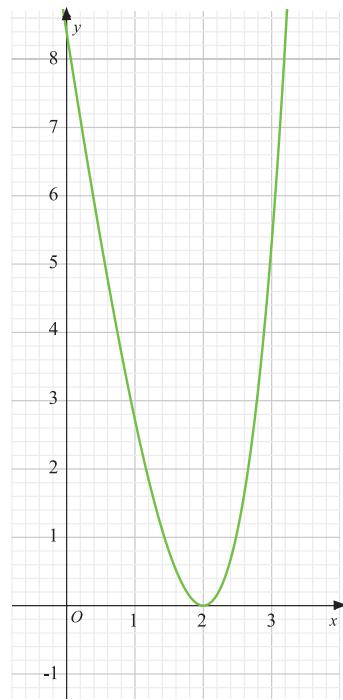
$= 1 + 7.3984 \approx 8.4$  учир функцийн ординат

тэнхлэгийг огтлох цэг  $(0, 8.4)$  болно.

IV. Функцийн уlamжлал  $g'(x) = e^x - e^2$  болно.

Түүнийг тэгтэй тэнцүүлэхэд  $e^x - e^2 = 0$  тэгшигтгэл гарна. Тэгшигтгэл  $x = 2$  гэсэн ганц шийдтэй.

$g(2) = e^2 - e^2 \cdot 2 + e^2 = 0$  тул сэжигтэй цэг  $(2, 0)$  байна.



Зураг 4.1

V.  $g'(x) = e^x - e^2 > 0$  тэнцэтгэл бишийн шийд  $x > 2$  тул  $[2, +\infty[$  завсарт функц өснө,  $]-\infty, 2[$  завсарт функц буурна. Иймээс  $(2, 0)$  сэжигтэй цэг нь минимумын цэг болно.

VI. Графикийн төлөвийг бүр тодорхой болгохын тулд түүнд харьяалагдах хоёр цэг нэмж ольё.  $g(1) = e^1 - e^2 + e^2 = e \approx 2.71$ ,  $g(3) = e^3 - 3e^2 + e^2 = e^3 - 2e^2 \approx 5.31$  буюу  $(1, 2.71), (3, 5.31)$  цэгүүдийг олж тэмдэглээд, графикийг тоймлон зурьяа (Зураг 4.1)

### ДАСГАЛ

1. Дараах функцийн уламжлалыг ол.

- |                                 |                                  |                                     |
|---------------------------------|----------------------------------|-------------------------------------|
| a) $f(x) = x + e^x$             | б) $f(x) = 2x + e^x$             | в) $f(x) = 2 + x - e^x$             |
| г) $f(x) = x + 3e^x$            | д) $y = e^2 - 15$                | е) $y = 2x^3 + e^x - 5$             |
| ঃ) $y = 3x^3 - e^x$             | ж) $y = e^x - x^4$               | з) $y = x^{\frac{3}{2}} + 3e^x + 3$ |
| и) $y = e^x + 2\sqrt{x}$        | й) $y = e^x - x^{\frac{1}{4}}$   | к) $y = x\sqrt{x} - 3e^x + 2$       |
| л) $y = x^{\frac{1}{3}} - 2e^x$ | м) $y = 2x^{-\frac{1}{2}} + e^x$ | н) $y = \frac{2}{\sqrt{x}} - 3e^x$  |

2. Дараах давхар функцийн уламжлалыг ол.

- |                    |                    |                      |                               |
|--------------------|--------------------|----------------------|-------------------------------|
| а) $f(x) = e^{-x}$ | б) $f(x) = e^{2x}$ | в) $f(x) = -e^{-2x}$ | г) $f(x) = \frac{1}{3}e^{3x}$ |
|--------------------|--------------------|----------------------|-------------------------------|

3. Уламжлал ашиглан дараах өгүүлбэрүүдийг тайлбарла.

- а)  $y = e^x$  функц экстремумын цэггүй  
 б)  $y = e^x$  функц тоон шулууны бүх цэг дээр өснө.  
 в)  $y = e^x$  функцийн ямар ч цэг дээрх өсөлтийн хурд, хурдатгал хоёр тэнцүү байна.

4. Лабораторид өсгөвөрлөж байгаа бактерийн тоог хугацаа  $t$ -ийн тодорхой завсарт  $y = 0.3e^t$  томъёогоор олж болдог байв. Түүний өсөлтийн хурдыг тухайн завсарт ямар томъёогоор олох вэ?

5.  $y = e^x - x$  функцийн өсөх буурах завсрыйг ол.  
 6.  $f(x) = ex - e^{x-1}$  функцийн өсөх, буурах завсар, максимум утгыг ол.  
 7.  $f(x) = e^x - e^2 x$  функцийн өсөх, буурах завсар, минимум утгыг ол.  
 8.  $f(x) = e^x - e^{2-x}$  функцийн өсөх, буурах завсар, минимум утгыг ол.  
 9.  $f(x) = ex - e^x + 1$  функц өгөв.  
 а) Функцийн графикийг тоймлон байгуул.  
 б) Графикийн  $(1, 1)$  цэгт татсан шүргэгч ба нормал шулууны тэгшитгэлийг бич.  
 10. Хэрэв  $y = e^{x-1} - ex + e - 3$  функцийн график абсцисс тэнхлэгийг  $(0.04, 0), (3.19, 0)$  цэгүүдээр огтолдог бол графикийг тоймлон байгуул.  
 11. Хэрэв  $y = 3 + 2e^x$  бол  $y + y'$  нийлбэрийг ол.

## 4.2. $y = \ln x$ ФУНКЦИЙН УЛАМЖЛАЛ

$e$  сууртай логарифмыг натуран логарифм гээд  $\log_e x = \ln x$  гэж тэмдэглэдэг.  $y = \ln x$  функцийн уlamжлал олох нь өөр сууртай логарифмын уlamжлал олохоос хялбар тул энд онцлон судална. Дурын сууртай логарифмыг  $e$  суурьд шилжүүлж уlamжлалыг олдог.

**Чанар.** Хэрэв  $y$ -ээс  $x$ -ээр авсан уlamжлал  $\frac{dy}{dx}$ ,  $x$ -ээс  $y$ -ээр авсан уlamжлал  $\frac{dx}{dy}$  бол  $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$  харьцаа биелнэ.

Учир нь  $\frac{dy}{dx}$  нь  $\Delta x$  нь 0-рүү дөхөх үеийн  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ -ийн дөхөх утга билээ.  $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}}$  гэж бичиж болно. Уlamжлал оршин байхын тулд  $\Delta x$  нь 0-рүү дөхөхөд  $\Delta y$  мөн 0-рүү дөхнө. Иймээс  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  нь  $\frac{dy}{dx}$  рүү,  $\frac{\Delta x}{\Delta y}$  нь  $\frac{dx}{dy}$  рүү тус тус дөхөж,  $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$  болно.

**Теорем.**  $y = \ln x$  функцийн уlamжлал  $\frac{1}{x}$ -тэй тэнцүү.

Өөрөөр хэлбэл  $(\ln x)' = \frac{1}{x}$  байна

**Баталгаа.**  $y = \ln x$  гэсэн бичлэг нь  $x = e^y$ -тэй тэнцүү чанартай тул  $y = \ln x$  функцийн уlamжлалыг  $x = e^y$  функцийн олох боломжтой.

Хэрэв  $x = e^y$  функцийн  $y$ -ээр уlamжлал авбал  $\frac{dx}{dy} = \frac{de^y}{dy} = e^y = x$ . Эндээс  $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$  буюу  $\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}$  болж  $(\ln x)' = \frac{1}{x}$  батлагдлаа.

**Жишээ 1.**  $f(x) = \ln\left(\frac{3}{\sqrt{x}}\right)$  функцийн уlamжлалыг ол.

**Бодолт.** Логарифмын чанараар

$f(x) = \ln\left(\frac{3}{\sqrt{x}}\right) = \ln 3 - \ln \sqrt{x} = \ln 3 - \frac{1}{2} \ln x$  болох ба нийлбэрийн уlamжлалын

дүрмээр  $\frac{d}{dx}(f(x)) = \frac{d}{dx}(\ln 3) - \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2} \ln x\right) = 0 - \frac{1}{2} \frac{d}{dx}(\ln x) = -\frac{1}{2} \frac{1}{x} = -\frac{1}{2x}$  болно.

**Жишээ 2.**  $y = \ln\left(\frac{(x+3)^3}{(x+1)^2}\right)$  функцийг нийлбэр (ялгавар) дурсэд шилжүүлээд, уlamжлалыг ол.

**Бодолт.**

$$y' = \left( \ln \frac{(x+3)^3}{(x+1)^2} \right)' = (3 \ln(x+3) - 2 \ln(x+1))' = \frac{3}{x+3} - \frac{2}{x+1} = \frac{3x+3-2x-6}{x^2+4x+3} = \frac{x-3}{x^2+4x+3}$$

**Жишээ 3.**  $y = \ln x - x$  функцийг уламжлалаар шинжилж, графикийг тоймлон зур.

**Бодолт.**

I. Тодорхойлогдох муж нь  $]0, +\infty[$

II.  $x \in ]0, +\infty[$  үед  $\ln(-x)$  утгагүй тул функц тэгш ч биш, сондгой ч биш.

III.  $x = 0$  нь функцийн тодорхойлогдох мужид харьялагдахгүй тул  $Oy$  тэнхлэгийг огтлохгүй.

IV. Функцийн уламжлал  $y' = \frac{1}{x} - 1$ -тэй тэнцүү. Түүнийг тэгтэй тэнцүүлбэл  $\frac{1}{x} - 1 = 0$

тэгшигтгэл гарна. Тэгшигтгэл  $x = 1$  гэсэн ганц шийдтэй. Түүнийг  $y = \ln x - x$ -д орлуулбал  $y = -1$  гэж гарах тул сэжигтэй цэг  $(1, -1)$  болно.

V  $\frac{1}{x} - 1 > 0$  тэнцэтгэл бишийг бодоход  
 $x < 1$ , мөн  $\frac{1}{x} - 1 < 0$  тэнцэтгэл бишийг

бодоход  $x > 1$  гарах тул  $]0, 1[$  завсарт функц өсөх ба  $]1, +\infty[$  завсарт буурна.  
 Иймээс  $(1, -1)$  сэжигтэй цэг нь максимумын цэг болно.

VI. Графикийг тоймлон зурав (Зураг 4.2)

**ДАСГАЛ**

12. Дараах функцийн уламжлалыг ол.

- |                             |                          |                             |
|-----------------------------|--------------------------|-----------------------------|
| a) $f(x) = x + \ln x$       | b) $f(x) = x - \ln x$    | v) $f(x) = 3x + \ln x$      |
| г) $f(x) = \ln x - 2x$      | д) $f(x) = 2 \ln x - 5x$ | е) $y = \ln x - x^2$        |
| ë) $y = 5x^3 + 3 \ln x - 6$ | ж) $y = \ln x + e^x$     | з) $y = \ln x - e^x + 8$    |
| и) $y = 3 \ln x + e^x - 6$  | й) $y = 2 \ln x - 3e^x$  | к) $y = 4 \ln x - 2e^x + 9$ |

13. Дараах функцийн уламжлалыг ол.

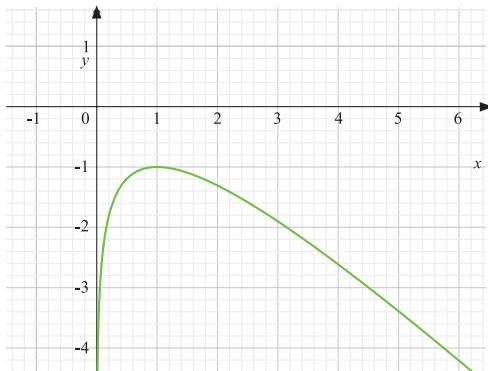
- а)  $y = -0.5x^2 + 16 \ln x - 0.4$  б)  $y = -4.5x^2 + 225 \ln x - 3.3$  в)  $y = 4.5x^2 - 324 \ln x + 3.7$   
 г)  $y = 4x^2 - 648 \ln x - 2.9$  д)  $y = -4x^2 + 392 \ln x + 1.8$  е)  $y = -x^2 + 162 \ln x + 1.7$

14. Дараах давхар функцийн уламжлалыг ол.

- а)  $f(x) = \ln(-x)$  б)  $f(x) = \ln 2x$  в)  $f(x) = -\ln(-2x)$  г)  $f(x) = \frac{1}{3} \ln 3x$

15. Уламжлал ашиглан дараах өгүүлбэрүүдийг тайлбарла.

- а)  $y = \ln x$  функц экстремумын цэггүй  
 б)  $y = \ln x$  функц тодорхойлогдох муж дээрээ өснө.  
 в)  $x$ -ийн утга ихсэх тусам функцийн өсөлтийн хурд огцом багасна.



Зураг 4.2

16. Функцийн сэжигтэй цэгийг ол.

- |                              |  |                                   |
|------------------------------|--|-----------------------------------|
| a) $y = x - 2 \ln x + \ln 4$ | б) $y = 2x - 3 \ln x + \ln \frac{27}{8}$ | в) $y = 3x - \ln x - \ln 3$       |
| г) $y = 2x - \ln x - \ln 2$  | д) $y = x^2 - 2 \ln x + 3$               | е) $y = x^2 - 18 \ln \frac{x}{3}$ |

17. Функцийн экстремумын цэгийн абсциссыг ол.

- |                                  |                                    |
|----------------------------------|------------------------------------|
| a) $y = -x^2 + 162 \ln x - 1.3$  | б) $y = -1.5x^2 + 192 \ln x + 3.8$ |
| в) $y = x^2 - 98 \ln x - 2.3$    | г) $y = 2.5x^2 - 245 \ln x - 4.5$  |
| д) $y = 2.5x^2 - 20 \ln x + 1.1$ | е) $y = -0.5x^2 + 81 \ln x + 4.3$  |

18. Дараах функцийн экстремумын цэггүй гэж харуул.

- |                                  |                                   |
|----------------------------------|-----------------------------------|
| a) $y = -x^2 - 162 \ln x - 1.3$  | б) $y = 1.5x^2 + 192 \ln x + 3.8$ |
| в) $y = x^2 + 98 \ln x - 2.3$    | г) $y = 2.5x^2 + 245 \ln x - 4.5$ |
| д) $y = 2.5x^2 + 20 \ln x + 1.1$ | е) $y = -0.5x^2 - 81 \ln x + 4.3$ |

19. Функцийн максимумын цэгийн абсциссыг ол.

- |                       |                      |                       |
|-----------------------|----------------------|-----------------------|
| a) $y = 5 \ln x - 2x$ | б) $y = 3 \ln x - x$ | в) $y = 2 \ln x - 3x$ |
|-----------------------|----------------------|-----------------------|

20.  $y = x - \ln x$  функцийн  $x=3$  цэгт татсан шургэгч шулууны наалалтыг ол.

21.  $y = x - 3 \ln x$  функцийн  $x=6$  цэгт татсан шургэгч шулууны наалалтыг ол.

Минимум цэгийн абсциссыг ол.

22. Функцийг нийлбэр (ялгавар) дүрсэд шилжүүлээд, уламжлалыг ол.

- |                                  |                                      |                                   |
|----------------------------------|--------------------------------------|-----------------------------------|
| a) $y = \ln((x-2)^4(x+1)^5)$     | б) $y = \ln((x+1)^3(x-3)^2)$         | в) $y = \ln((x+2)(x-3)^3)$        |
| г) $y = \ln \frac{x-1}{x+3}$     | д) $y = \ln \frac{(x+2)^2}{(x-3)^3}$ | е) $y = \ln((x+2)^2(x-3)^3)$      |
| ё) $y = \ln \frac{x-1}{(x+1)^2}$ | ж) $y = \ln \frac{(x+2)^3}{x-4}$     | з) $y = \ln \frac{x+2}{x^2-2x+4}$ |

23. Дараах функцийн  $x_0$  цэг дээрх уламжлалыг ол.

- |   |  |
|---|--|
| a) $y = -2 \ln x + 3x + 2, x_0=1$         | б) $y = -3 \ln x - 3x + 1, x_0=3$        |
| в) $y = 3 \ln x + 2x - 2, x_0=4$          | г) $y = -4 \ln x - x, x_0=5$             |
| д) $y = 2 \ln x - x + 5, x_0=5$           | е) $y = -2x^2 + 196 \ln x - 0.8, x_0=3$  |
| ё) $y = -2.5x^2 + 320 \ln x + 1.9, x_0=5$ | ж) $y = -1.5x^2 + 48 \ln x - 3.3, x_0=3$ |

24. Дараах функцийн  $x_0$  цэгт татсан шургэгч шулууны наалалтыг ол.

- |   |  |
|---|--|
| a) $y = \ln x + 3x, x_0=2$              | б) $y = 4 \ln x - 3x, x_0=2$             |
| в) $y = -4 \ln x + 5x - 4, x_0=5$       | г) $y = 2 \ln x + 3x - 4, x_0=1$         |
| д) $y = -4 \ln x - 5x + 2, x_0=5$       | е) $y = 1.5x^2 - 75 \ln x - 0.1, x_0=2$  |
| ё) $y = 3.5x^2 - 28 \ln x - 1.9, x_0=1$ | ж) $y = -0.5x^2 + 16 \ln x - 3.8, x_0=2$ |
| з) $y = 0.5x^2 - 25 \ln x + 4.4, x_0=5$ | и) $y = -3x^2 + 54 \ln x + 4, x_0=1$     |

25.  $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$  томьёо ашиглан дараах функцийн уламжлалыг ол.

- |                         |                      |                                  |
|-------------------------|----------------------|----------------------------------|
| a) $f(x) = \log_2 x$    | б) $f(x) = \log_3 x$ | в) $f(x) = \log_{\frac{3}{2}} x$ |
| г) $f(x) = \log_{10} x$ | д) $y = \log_2(-x)$  | е) $y = 2 \lg x$                 |

26. Хөдөлгөөний тэгшигтгэл өгчээ.  $t_0$  агшин дахь хурдыг ол.

- |  |  |
|--|--|
| a) $s = 3 \ln t - 3t + 2$ , $t_0=1$        | b). $s = -4 \ln t + 5t + 4$ , $t_0=1$      |
| в) $s = -2 \ln t + 5t + 4$ , $t_0=2$       | г) $s = 3 \ln t - 4t + 3$ , $t_0=3$        |
| д) $s = 3 \ln t + 3t - 2$ , $t_0=1$        | е) $s = -2.5t^2 + 45 \ln t + 5$ , $t_0=3$  |
| ё) $s = 3.5t^2 - 5 \ln t + 2.6$ , $t_0=1$  | ж) $s = -3t^2 + 50 \ln t - 1.7$ , $t_0=5$  |
| з) $s = 2.5t^2 - 20 \ln t - 3.6$ , $t_0=2$ | и) $s = 0.5t^2 - 49 \ln t - 3.2$ , $t_0=5$ |

27. Функцийн буурах завсрыг ол.

- |                       |                    |                        |                        |
|-----------------------|--------------------|------------------------|------------------------|
| a) $y = 5x - 2 \ln x$ | б) $y = x + \ln x$ | в) $y = x^2 - \ln x^8$ | г) $y = x^2 - 8 \ln x$ |
|-----------------------|--------------------|------------------------|------------------------|

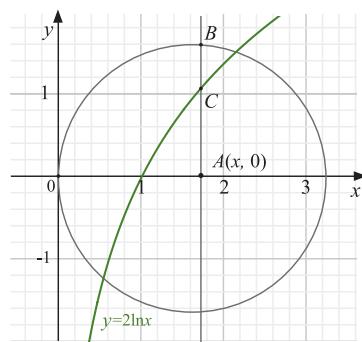
28. Функцийн график байгуул.

- |  |   |
|--|---|
| a) $y = -x^2 + 8 \ln x - 8 \ln 2 + 8$      | б) $y = 0.5x^2 - 9 \ln x + 9 \ln 3 - 3.5$ |
| в) $y = -0.5x^2 + 16 \ln x - 32 \ln 2 + 7$ | г) $y = 5x - 5 \ln x - 4$                 |

29. Хэвтээ тэнхлэг дээр дурын  $A(x, 0)$  цэг өгөв.

Түүнийг дайрсан  $Ox$  тэнхлэгт перпендикуляр шулуун  $A$  төвтэй  $AO$  радиустай тойргийг  $B$  цэгээр,  $y = 2 \ln x$  функцийн графикийг  $C$  цэгээр тус тус огтолно. (Зураг 4.3).  $BC$  хэрчмийн уртын хамгийн бага утгыг ол.

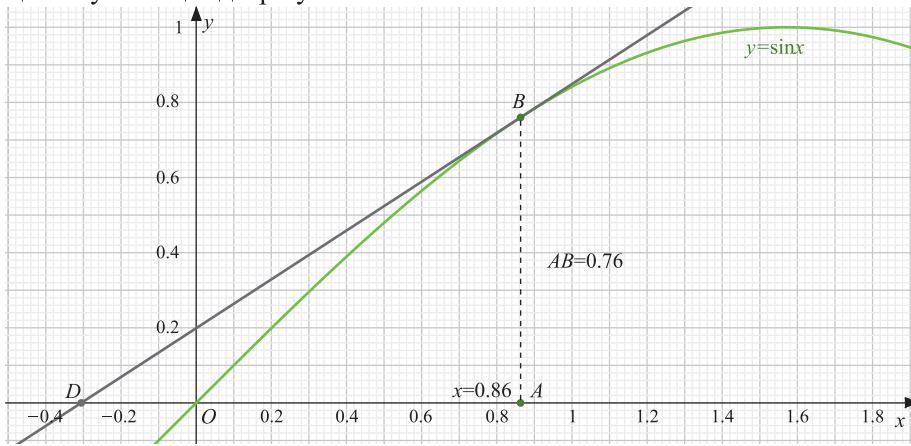
30. Хэрэв  $y = 0.5x^2 - \ln x - 2$  бол  $y' = x$  ялгаврыг ол.



Зураг 4.3

### 4.3. $y=\sin x$ БА $y=\cos x$ ФУНКЦИЙН УЛАМЖЛАЛ

$y = \sin x$  функцийн зарим цэг дээрх уламжлалыг график ашиглан ольё. Зураг 4.4-д  $y = \sin x$  функцийн график, түүний  $B(x, \sin x)$  цэгийг дайруулан графикт татсан шүргэгч шулууныг дүрсэлжээ. Шүргэгчийн абсцисс тэнхлэгтэй огтлолцох цэг нь  $D$  болог. Энэ шүргэгч шулууны наалалтыг  $\frac{AB}{AD}$  гэж олж болох бөгөөд тэр нь уг функцийн тухайн цэг дээрх уламжлал болно.



Зураг 4.4

Бидний жишээнд  $x \approx 0.86$  байна.  $AB = 0.76$ ,  $AD = AO + OD = 0.86 - (-0.3) = 1.16$  болохыг зургаас олж болно.  $x \approx 0.86$  цэг дээрх уламжлал буюу налалтыг бодвол  $y' = \frac{AB}{AD} = \frac{0.76}{1.16} \approx 0.65$  гэж гарна.

Гэтэл  $\cos x = \sqrt{1 - 0.76^2} = \sqrt{1 - 0.5776} = \sqrt{0.4224} = 0.65$ . Энэ хоёр тоо тэнцүү гарсан нь санамсаргүй тохиолдол биш болохыг дараах хүснэгтээс харья.

$x$	$\sin x$	Шүргэгчийн налалт	$\cos x$
0.86	0.76	0.65	0.65
0.32	0.31	0.95	0.949
1.5	0.99	0.07	0.071
2	0.91	-0.42	-0.416
2.48	0.61	-0.79	-0.789

Хүснэгт дэх  $x$  хувьсагчийн утга бүрд  $y = \sin x$ -ийн налалт нь  $y = \cos x$  функцийн утгатай ойролцоогоор тэнцүү байгаа тул ерөнхий тохиолдолд энэ дүгнэлт үнэн гэж таамаглаж болно. Үнэндээ  $y = \sin x$  функцийн уламжлал  $y' = \cos x$  байдгийг бид цаашид баталгаагүйгээр хэрэглэнэ.

Өөрөөр хэлбэл

$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x \text{ буюу } (\sin x)' = \cos x \text{ байна.}$$

Харин үүнийг ашиглаад

$$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x \text{ буюу } (\cos x)' = -\sin x$$

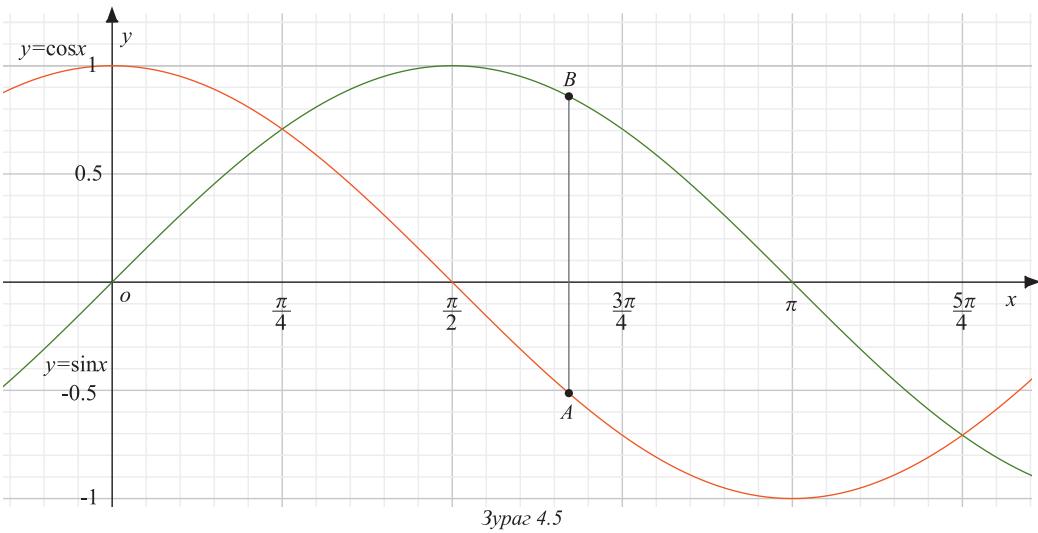
бoloхыг баталъя.

$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$  томьёо ашиглавал  $(\cos x)' = \left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right)'$ . Давхар функцээс уламжлал авах  $(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x)$  дүрэм болон  $(\sin x)' = \cos x$ -ийг тооцвол  $\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right)' = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot \left(\frac{\pi}{2} - x\right)' = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot (-1)$  болно.  $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$  томьёогоор  $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot (-1) = -\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\sin x$  болно. Ийнхүү  $(\cos x)' = -\sin x$  болж батлагдлаа.

**Жишээ 1.**  $f(x) = \sin x - \cos x + e^x$  функцийн уламжлалыг ол.

**Бодолт.**  $f'(x) = (\sin x)' - (\cos x)' + (e^x)' = \cos x + \sin x + e^x$

**Жишээ 2.**  $AB$  шулуун босоо тэнхлэгтэй параллел,  $A$  цэг  $y = \cos x$  функцийн график дээр,  $B$  цэг  $y = \sin x$  функцийн график дээр тус тус оршиж байв.  $x_0 = \frac{3}{4}\pi$  үед  $AB$  хэрчмийн урт хамгийн их байна гэж батал. (Зураг 4.5). Уг утгыг ол.



Зураг 4.5

**Бодолт.** Зургаас харвал  $x$ -ийн утгыг  $\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{5\pi}{4}$  байхаар авахад хангалттай. Энэ үед  $AB$  хэрчмийн урт  $y = \sin x - \cos x$  функцээр тодорхойлогдоно. Уг функцийн экстремумын цэгийг ольё.

Уламжлал нь  $y' = \sin x + \cos x$  ба  $x_0 = \frac{3\pi}{4}$  утга орлуулахад  $y' = \sin \frac{3\pi}{4} + \cos \frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$  болж экстремумын цэг болох нь тодорхой боллоо.

$x_0 = \frac{3\pi}{4}$  үед функцийн утга  $y_0 = \sin \frac{3\pi}{4} - \cos \frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$  гэж гарна.

Өсөх, буурах завсрыйг ольё.  $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$  завсрын  $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$  тоог уламжлалд орлуулахад

$y' = \sin \frac{\pi}{2} + \cos \frac{\pi}{2} = 1 + 0 = 1 > 0$  эерэг тоо гарч байгаа тул тухайн завсарт  $y' > 0$ ,

$\left[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$  завсрын  $\frac{4\pi}{4} = \pi$  тоог орлуулахад  $y' = \sin \pi + \cos \pi = 0 - 1 = -1 < 0$  сөрөг

тоо гарч байгаа тул тухайн завсарт  $y' < 0$  байна. Иймээс  $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$  завсарт функц

өсөж,  $\left[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$  завсарт буурна. Эндээс  $(x_0, y_0) = \left(\frac{3\pi}{4}, \sqrt{2}\right)$  цэг  $y = \sin x - \cos x$  функцийн максимумын цэг болно. Иймээс  $AB$  хэрчмийн урт хамгийн ихдээ  $\sqrt{2}$ -той тэнцүү байна.

### ДАСГАЛ

31. Дараах функцийн уламжлалыг ол.

- a)  $f(x) = x + \sin x$       b)  $f(x) = x^2 - 2 \cos x$       в)  $f(x) = e^x - 2 \sin x$

- г)  $f(x) = \sin x + \cos x$       д)  $f(x) = \sin x - \cos x$       е)  $f(x) = \cos x - \ln x$   
 ё)  $f(x) = e^x - \cos x$       ж)  $f(x) = x^2 - 2x + 3 \sin x$       3)  $f(x) = x^2 + \sin x$

32. Дараах давхар функцийн уламжлалыг ол.

- а)  $f(x) = \sin(-x)$       б)  $f(x) = \sin 2x$       в)  $f(x) = -\sin(-2x)$   
 г)  $f(x) = \frac{1}{3} \sin 3x$       д)  $f(x) = \cos(-x)$       е)  $f(x) = \cos 2x$   
 ё)  $f(x) = -\cos(-2x)$       ж)  $f(x) = \frac{1}{3} \cos 3x$       3)  $f(x) = -2 \cos 3x$

33.  $y = \sin x$  функцээс хэдэн удаа уламжлал авахад функц өөрөө гарах вэ?

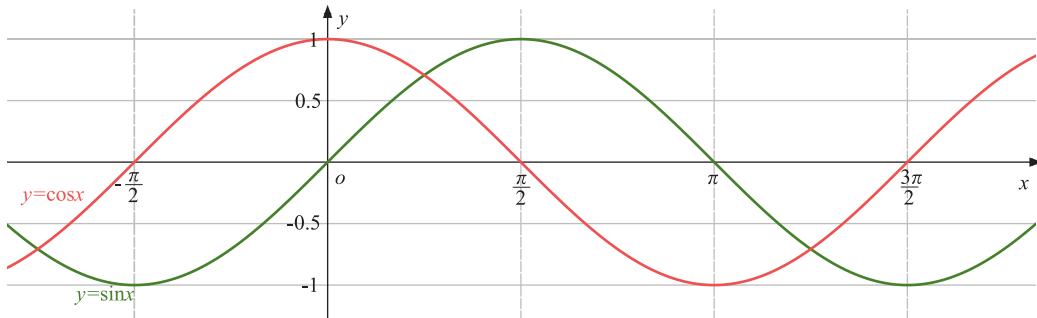
34.  $y = \cos x$  функцээс хэдэн удаа уламжлал авахад функц өөрөө гарах вэ?

35.  $y = \sin x + \cos x$  функцээс хэдэн удаа уламжлал авахад функц өөрөө гарах вэ?

36.  $\cos ec x = \frac{1}{\sin x}$  томьёо ашиглан  $y = \cos ec x$  функцийн уламжлалыг ол.

37.  $\sec x = \frac{1}{\cos x}$  томьёо ашиглан  $y = \sec x$  функцийн уламжлалыг ол.

38. Зураг 4.6-д  $y = \sin x$  ба түүний уламжлал  $y = \cos x$  функцийн график өгөв.

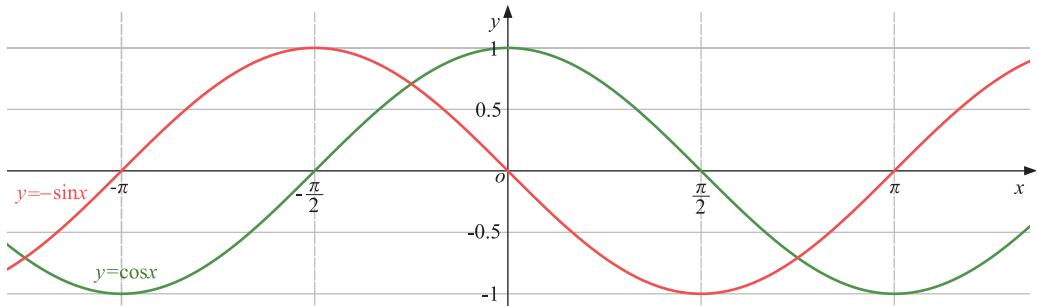


Зураг 4.6

Уламжлал ашиглан дараах өгүүлбэрүүдийг тайлбарла.

- а)  $y = \sin x$  функцийн экстремумын цэг дээр  $y = \cos x$  функц 0 утга авна.  
 б)  $y = \sin x$  функцийн өсөж байгаа завсарт  $y = \cos x$  функц эерэг утгатай.  
 в)  $y = \sin x$  функцийн буурч байгаа завсарт  $y = \cos x$  функц сөрөг утгатай.

39. Зураг 4.7-д  $y = \cos x$  ба түүний уламжлал  $y = -\sin x$  функцийн график өгөв.



Зураг 4.7

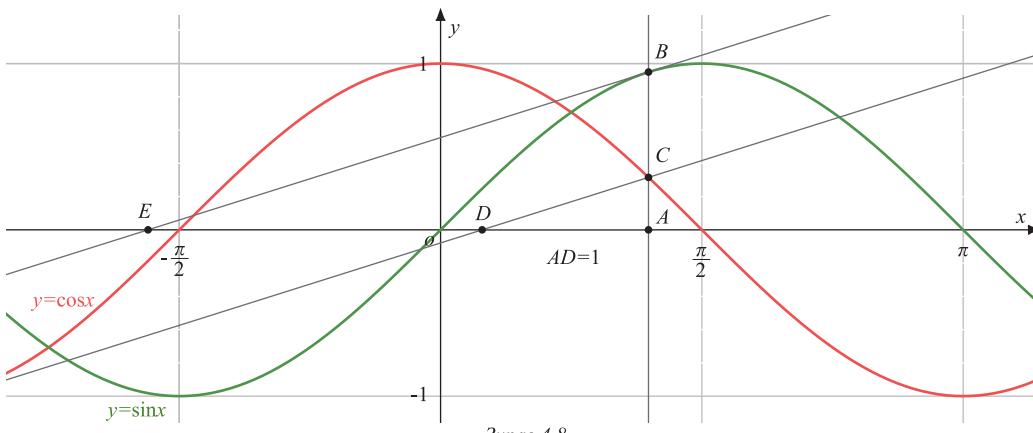
Уламжлал ашиглан дараах өгүүлбэрүүдийг тайлбарла.

- $y = \cos x$  функцийн экстремумын цэг дээр  $y = -\sin x$  функц 0 утга авна.
- $y = \cos x$  функцийн өсөж байгаа завсарт  $y = -\sin x$  функц эрэг угтатай.
- $y = \cos x$  функцийн буурч байгаа завсарт  $y = -\sin x$  функц сөрөг угтатай.

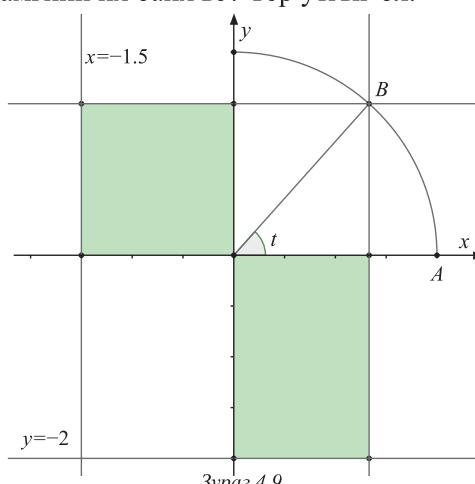
40. Функцийн өгсөн цэг дээрх уламжлалыг ол.

- |   |  |
|---|--|
| a) $y = \sin x, x = 0$                              | 6) $y = 2\sin x + 3\cos x, x = \frac{\pi}{2}$        |
| b) $y = 2\sin x - 3\cos x, x = 0$                   | г) $y = -\cos x, x = \frac{\pi}{2}$                  |
| д) $y = \sqrt{3}\cos x + \sin x, x = \frac{\pi}{6}$ | е) $y = \cos x - \sqrt{3}\sin x, x = -\frac{\pi}{3}$ |

41. Зураг 4.8-д  $y = \sin x$  ба  $y = \cos x$  функцийн графикийг дүрслэв. Хэрэв  $A(x, 0)$ ,  $B(x, \sin x)$ ,  $C(x, \cos x)$ ,  $BE$  нь  $y = \sin x$  функцийн графикийн  $B$  цэгт татсан шүргэгч,  $CD \parallel BE$ ,  $E, D \in Ox$  бол  $AD = 1$  гэж батал.



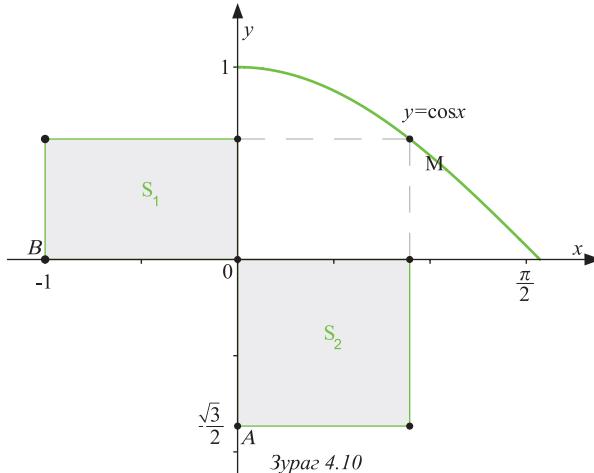
42. Гурвалжны хоёр талын урт 2 см ба 3 см байв. Өгсөн хоёр талын хооронд үүсэх өнцгийн ямар утгад гурвалжны талбай хамгийн их байх вэ? Тэр утгыг ол.



43. Координатын эх дээр төвтэй 2 нэгж радиустай тойргийн I мөчид харьялагдах нум дээгүүр  $B$  цэг хөдөлнө.  $AOB$  өнцгийн ямар утгад зурагт дүрсэлсэн хоёр тэгш өнцөгтийн талбайн нийлбэр хамгийн их байх вэ? (Зураг 4.9).

44.  $y = \cos x$ ,  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$  функцийн график дээр  $M$  цэг хөдөлнө. Хэрэв  $A\left(0, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ,

$B(-1, 0)$  цэгүүд үл хөдлөх бол Зураг 4.10-д үзүүлсэн хоёр тэгш өнцөгтийн талбайн нийлбэр ( $S_1 + S_2$ )-ийн хамгийн их утгыг ол.



45. Талууд нь координатын тэнхлэгүүдтэй параллел, нэг орой нь координатын эх дээр, эсрэг орой нь нэгж тойргийн I мөчийн нум дээрх  $A$  цэгээр тодорхойлогдох тэгш өнцөгтийн талбайн хамгийн их утгыг ол.

46. Дараах функцийн өгсөн завсар дээрх экстремумын цэгийг ол.

a)  $y = 0.5x + \cos x$ ,  $]0, \pi[$       б)  $y = x - 2\cos x$ ,  $]\pi, 2\pi[$

в)  $y = \sqrt{3}x + 2\sin x$ ,  $\left]\frac{3\pi}{4}, \frac{4\pi}{4}\right[$       г)  $y = \sqrt{3}x - 2\sin x$ ,  $\left]\frac{3\pi}{4}, \frac{4\pi}{4}\right[$

47. Дараах функцийн хамгийн бага, хамгийн их утгыг уламжлал ашиглан ол.

a)  $y = \sin x + \cos x$       б)  $y = 3\sin x - 4\cos x$

48. Дараах функцийн өсөх буурах завсрыг ол. Графикийг тоймлон байгуул.

a)  $y = x - \sin x$       б)  $y = x - \cos x$

49. Дараах функцийн уламжлалын хамгийн их, хамгийн бага утгыг ол.

a)  $y = \sin \pi x + \cos \pi x$       б)  $y = \sin \sqrt{2}x - \cos \sqrt{2}x$

50. Дараах функцийн өгсөн цэгт татсан шүргэгч шулууны тэгшитгэл бич.

a)  $y = \sin x$ ,  $x = 0$       б)  $y = \sin x$ ,  $x = \frac{\pi}{6}$       в)  $y = \sin x$ ,  $x = \frac{\pi}{4}$

г)  $y = \sin x$ ,  $x = \frac{\pi}{3}$       д)  $y = \sin x$ ,  $x = \frac{\pi}{2}$       е)  $y = \cos x$ ,  $x = 0$

ё)  $y = \cos x$ ,  $x = \frac{\pi}{6}$       ж)  $y = \cos x$ ,  $x = \frac{\pi}{4}$       з)  $y = \cos x$ ,  $x = \frac{\pi}{3}$

и)  $y = \cos x$ ,  $x = \frac{\pi}{2}$       ѹ)  $y = -\sin x$ ,  $x = -\frac{\pi}{3}$       к)  $y = -\cos x$ ,  $x = -\frac{\pi}{6}$

51. Хэрэв  $y = \sin x + \cos x$  бол  $y - y'$  ялгаврыг ол.

52. Хэрэв  $y = 3\sin x - 2\cos x$  бол  $2y - 3y'$  ялгаврыг ол.

#### 4.4. ҮРЖВЭР ФУНКЦИЙН УЛАМЖЛАЛ

Дифференциаллагдах  $y = f(x)$ ,  $y = g(x)$  функцүүд өгсөн байг.

**Теорем.**  $f(x) \cdot g(x)$  үржвэр функцийн уламжлал

$$f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$
 -тэй тэнцүү байна.

**Баталгаа.**  $(f(x) \cdot g(x))'$  уламжлал нь  $\frac{f(x + \Delta x) \cdot g(x + \Delta x) - f(x) \cdot g(x)}{\Delta x}$  харьцааны утгаар тодорхойлогдох тул түүнийг хувиргая.

$$\frac{f(x + \Delta x) \cdot g(x + \Delta x) - f(x) \cdot g(x)}{\Delta x} =$$

$$\frac{f(x + \Delta x) \cdot g(x + \Delta x) - f(x)g(x + \Delta x) + f(x)g(x + \Delta x) - f(x) \cdot g(x)}{\Delta x} =$$

$$\frac{f(x + \Delta x) \cdot g(x + \Delta x) - f(x)g(x + \Delta x)}{\Delta x} + \frac{f(x)g(x + \Delta x) - f(x) \cdot g(x)}{\Delta x} =$$

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \cdot g(x + \Delta x) + \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} \cdot f(x)$$

$$\Delta x \text{ нь } 0\text{-рүү дөхөхөд } \frac{f(x + \Delta x) \cdot g(x + \Delta x) - f(x) \cdot g(x)}{\Delta x} \text{ илэрхийлэл}$$

$$(f(x) \cdot g(x))' \text{ уламжлалд, } \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \text{ нь } f'(x)\text{-д, } g(x + \Delta x) \text{ нь } g(x)\text{-д,}$$

$$\frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} \text{ нь } g'(x)\text{-д тус тус дөхнө.}$$

Ийнхүү  $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$  болж батлагдав.

Хоёр функцийн үржвэрийн уламжлал нь нэгдүгээр функцийн уламжлалыг хоёрдугаар функцээр, нэгдүгээр функцийг хоёрдугаар функцийн уламжлалаар тус тус үржүүлсэн үржвэрүүдийн нийлбэртэй тэнцүү байна. Түүнийг үржвэрийн уламжлал олох дүрэм гэдэг.

**Жишээ 1.**  $f(x) = x(x^2 + 1)$  функц өгөв.

а) Уламжлалыг үржвэрийн уламжлал олох дүрмээр ол.

б) Функцийг нийлбэр функц болгоод уламжлалыг ол.

**Бодолт.** а)  $f'(x) = x'(x^2 + 1) + x(x^2 + 1)' = 1 \cdot (x^2 + 1) + x \cdot 2x = 3x^2 + 1$

б)  $f'(x) = (x(x^2 + 1))' = (x^3 + x)' = 3x^2 + 1$

**Жишээ 2.**

a)  $f(x) = \cos x \sin x$  функцийн уламжлалыг ол.

б)  $g(x) = \frac{1}{2} \sin 2x$  давхар функцийн уламжлалын дүрмээр уламжлалыг ол.

**Бодолт.**

$$\begin{aligned} \text{а)} \quad f'(x) &= (\cos x \sin x)' = (\cos x)' \sin x + \cos x (\sin x)' = -\sin \\ &= -\sin x \sin x + \cos x \cos x = \cos^2 x - \sin^2 x \end{aligned}$$

$$\text{б)} \quad g'(x) = \left( \frac{1}{2} \sin 2x \right)' = \frac{1}{2} \cos 2x (2x)' = \frac{2}{2} \cos 2x = \cos 2x$$

**Жишээ 3.** Тодорхойлогдох муж нь  $[0, 3\pi]$  байх  $f(x) = \left( x - \frac{\pi}{2} \right) \sin x + \cos x$  функц

өгөв. Сэжигтэй цэг нь  $x = \frac{\pi}{2}$ ,  $x = \frac{3\pi}{2}$ ,  $x = \frac{5\pi}{2}$  болохыг харуул. Графикийг тоймлон байгуул.

**Бодолт.**

I. Функцийн тодорхойлогдох муж нь  $[0, 3\pi]$

II.  $f(-x)$ -ийг бодож үзэхэд  $f(-x) \neq -f(x)$ ,  $f(-x) \neq f(x)$  тул функц тэгш ч биш, сондгой ч биш.

III.  $x = 0$  үед  $y = 1$  учир функцийн ординат тэнхлэгийг огтлох цэг  $(0, 1)$  болно.

Харин абсцисс тэнхлэгийг огтлох нэг цэг нь  $x = \frac{\pi}{2}$  болно. Бусад нь график байгуулсны дараа харагдана.

IV. Функцийн уламжлал  $f'(x) = 1 \cdot \sin x + \left( x - \frac{\pi}{2} \right) \cos x - \sin x = \left( x - \frac{\pi}{2} \right) \cos x$  байна.

Энэ нь  $x = \frac{\pi}{2}$ ,  $x = \frac{3\pi}{2}$ ,  $x = \frac{5\pi}{2}$  утгуудад 0-тэй тэнцүү байна. Тэдгээрийг анхны

функцэд орлуулбал сэжигтэй цэгүүд  $\left( \frac{\pi}{2}, 0 \right)$ ,  $\left( \frac{3\pi}{2}, -\pi \right)$ ,  $\left( \frac{5\pi}{2}, 2\pi \right)$  болно.

V.  $[0, 3\pi]$  тодорхойлогдох муж дээр  $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}$  тоонуудыг тэмдэглэхэд дөрвөн завсарт хуваагдана. Завсар тус бүрээс харгалзан  $\frac{\pi}{4}, \pi, 2\pi, \frac{11\pi}{4}$  тоо сонгон авч

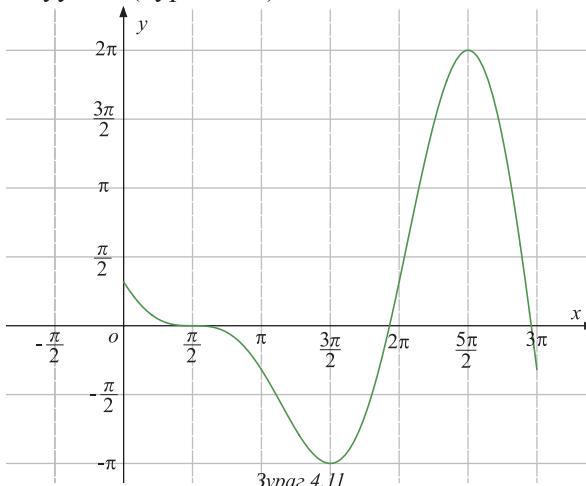
орлуулахад уламжлал нь  $\left[ \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2} \right]$  завсарт эерэг, харин бусад

$\left[ 0, \frac{\pi}{2} \right], \left[ \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right], \left[ \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2} \right], \left[ \frac{5\pi}{2}, 3\pi \right]$  завсарт сөрөг тоо гарна. Тэгэхээр функц  $\left[ \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2} \right]$  завсарт өсөж, бусад завсарт буурна. Хүснэгтийг харна уу.

$x$	0	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{2}$	$3\pi$	
$f''(x)$	-	0	-	0	+	0
$f(x)$	1	↘	0	↘	- $\pi$	↗
нугаралт min max						

Иймээс сэжигтэй цэг  $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$  нь нугаралт,  $\left(\frac{3\pi}{2}, -\pi\right)$  нь минимум,  $\left(\frac{5\pi}{2}, 2\pi\right)$  нь максимумын цэг болно.

#### VI. Графикийг байгуулъяа. (Зураг 4.11)



#### ДАСГАЛ

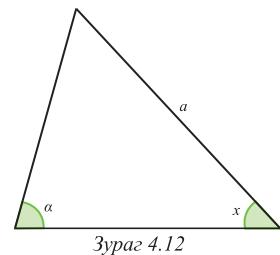
53. Дараах функцийн уламжлалыг ол.

- |                                      |                                   |
|--------------------------------------|-----------------------------------|
| a) $f(x) = x^2(x - 2)$               | б) $f(x) = xe^x$                  |
| в) $f(x) = x \sin x$                 | г) $f(x) = (x^2 - 2x + 2)e^x$     |
| д) $f(x) = (x^3 - 3x^2 + 6x - 6)e^x$ | е) $f(x) = (x - 3)^2 e^x$         |
| ё) $f(x) = (x - 3)^{-2} \ln x$       | ж) $f(x) = (2x - 3) \sin x$       |
| з) $f(x) = (-5x + 1) \cos x$         | и) $f(x) = (x^2 - 4x + 3) \sin x$ |
| й) $f(x) = (x - 15) \cos x$          | к) $f(x) = e^x \sin x$            |
| л) $f(x) = e^x \cos x$               | м) $f(x) = \sin x \ln x$          |
| н) $f(x) = \cos x \cdot \ln x$       | о) $f(x) = -e^x \cos x$           |

54. Дараах функцийн уламжлалыг үржвэрийн уламжлалын дүрмээр ол. Хэрэв боломжтой бол нийлбэр функц болгоод, уламжлалыг ол. Гарсан хариунуудыг жиш.

- |                         |                             |                          |
|-------------------------|-----------------------------|--------------------------|
| а) $y = x^2(x - 3)$     | б) $y = \sqrt{x}(x^2 + 3x)$ | в) $y = \sin 2x \cos 4x$ |
| г) $y = \cos 3x \cos x$ | д) $y = \sin 4x \sin 6x$    | е) $y = \sin 2x \cos x$  |

- 55.**  $y = x^3 e^{-x}$  функц өгөв.
- $x = 0, x = 3$  цэгүүд сэжигтэй цэг гэж харуул.
  - Графикийн  $x=1$  координаттай цэгт татсан шургэгч шулууны тэгшитгэл бич.
- 56.** Функцийн графикийн  $x_0$  цэгт татсан нормал шулууны тэгшитгэлийг бич.
- $y = (x+1)^2(x-2)$ ,  $x_0 = -2$
  - $y = e^x(x-3)$ ,  $x_0 = 0$
  - $y = e^x \sin x$ ,  $x_0 = 0$
  - $y = e^x \ln x$ ,  $x_0 = 1$
- 57.**  $y = (x-2)e^x$  функц нэг сэжигтэй цэгтэй.
- Тэр цэгийн координатыг ол.
  - Уг цэг максимум, минимум цэгийн аль нь вэ?
- 58.**  $f(x) = e^x(x-1)^2$  функц өгөв.
- Функцийн уламжлалыг ол.
  - Функцийн сэжигтэй цэгүүдийг ол.
  - Функцийн өсөх буурах завсрыйг ол.
  - Функцийн максимум, минимум цэгийг ол.
- 59.**  $f(x) = x \cos x - \sin x$  функц өгөв.
- Функцийн тодорхойлогдох мужийг ол. Функцийн тэгш, сондгойг тогтоо.
  - Функцийн уламжлал  $f'(x)$ -ыг ол.
  - Сэжигтэй цэгүүд нь  $x = 0, x = \pi, x = 2\pi$  болохыг харуул.
  - Функцийн  $[-2\pi, 2\pi]$  завсарт орших сэжигтэй цэгүүдийг ол.
  - $x = \frac{\pi}{2}, x = \frac{3\pi}{2}$  абсцисстай функцийн өсөх, буурах завсрыйг ол. Сэжигтэй цэгүүдэд татсан шургэгч шулууны наалалтын тэмдгийг тогтоо.
  - Функцийн графикийг  $[-2\pi, 2\pi]$  завсарт тоймлон байгуул.
- 60.**  $f(x) = \cos x + x \sin x$  функцийг уламжлааар шинжилж, графикийг байгуул.
- 61.**  $x \in \left] -\pi, \frac{3\pi}{4} \right[$  үед  $f(x) = e^x \cos x$  функцийг уламжлааар шинжилж, графикийг байгуул.
- 62.**  $f(x) = (x-3)^2 e^x$  функцийг уламжлааар шинжилж, графикийг байгуул.
- 63.**  $(0,1)$  цэг нь  $f(x) = \cos x - x \sin x$  функцийн максимумын цэг болохыг харуул.
- 64.** Хэрэв  $(1.4, 1.62)$  цэг нь  $f(x) = x \cos x + \sin x$  функцийн экстремумын цэг бол максимумын цэг болохыг харуул.
- 65.**  $y = \left( x - \frac{\pi}{2} \right) \cos x - \sin x, -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{5\pi}{2}$  функцийг уламжлааар шинжилж, график байгуул.
- 66.** Дараах функцийн нэг сэжигтэй цэг нь  $x = 0$  болохыг харуул.
- $y = x \cos x + x \sin x + \cos x - \sin x$
  - $y = x \cos x - x \sin x - \cos x - \sin x$



Зураг 4.12

**67.** Гурвалжны нэг тал  $a$ , түүний эсрэг орших өнцөг  $\alpha$  байв. Зураг 4.12-т дүрсэлсэн  $x$  өнцгийн хэмжээ  $\frac{\pi}{4}$  уед гурвалжны талбай хамгийн их байна гэж харуул.

**68.** Хэрэв  $y = x \cos x$  бол  $\cos x - y'$ -ийг ол.

**69.** Хэрэв  $y = x \sin x$  бол  $\frac{y' - \sin x}{y}$ -ийг ол.

#### 4.5. НОГДВОР ФУНКЦИЙН УЛАМЖЛАЛ

Уlamжлал нь оршин байдаг  $f(x)$  ба  $g(x) \neq 0$  функцыүд өгсөн байг.

**Теорем.**  $\frac{f(x)}{g(x)}$  ногдвор функцийн уlamжлал нь

$$\frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2} - \text{тэй тэнцүү байна.}$$

**Баталгаа.**

$$\left( \frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \left( f(x)(g(x))^{-1} \right)' = \left( f(x) \right)' (g(x))^{-1} + f(x) \left( (g(x))^{-1} \right)' = \frac{f'(x)}{g(x)} +$$

$$f(x) \left( -1 \cdot (g(x))^{-2} g'(x) \right) = \frac{f'(x)}{g(x)} + \frac{f(x)g'(x)}{(g(x))^2} = \frac{f'(x)g(x) + f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$$

болж теорем батлагдлаа.

Хоёр функцийн ногдворын уlamжлал нь хуваагдагч функцийн уlamжлалыг хуваагч функцээр, хуваагдагч функцийг хуваагч функцийн уlamжлалаар тус тус үргүүлсэн үргвэрүүдийн ялгаврыг хуваагч функцийн квадратад хуваасантай тэнцүү байна. Үүнийг ногдворын уlamжлалын дүрэм гэдэг.

**Жишээ 1.**  $f(x) = \frac{e^x}{\ln x}$  функцийн уlamжлалыг ол.

$$\text{Бодолт. } f'(x) = \left( \frac{e^x}{\ln x} \right)' = \frac{(e^x)' \cdot \ln x - (\ln x)' e^x}{\ln^2 x} = \frac{e^x \cdot \ln x - \frac{e^x}{x}}{\ln^2 x} = \frac{e^x \cdot (x \ln x - 1)}{x \ln^2 x}$$

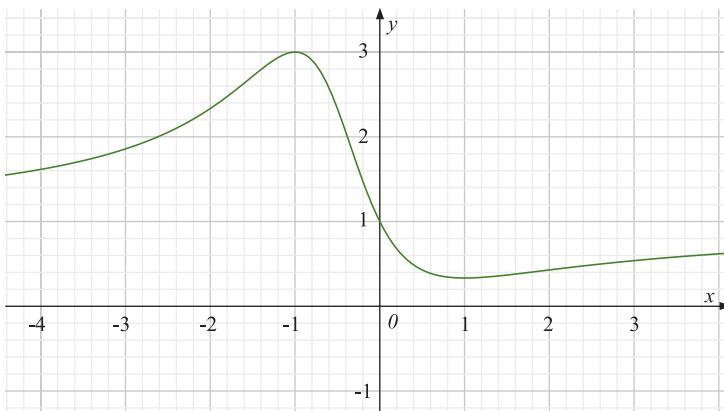
**Жишээ 2.**  $f(x) = \frac{\ln x}{e^x}$  функцийн уlamжлалыг ол.

$$\begin{aligned} \text{Бодолт. } f'(x) &= \left( \frac{\ln x}{e^x} \right)' = \frac{(\ln x)' e^x - (e^x)' \cdot \ln x}{e^{2x}} = \frac{\frac{e^x}{x} - e^x \cdot \ln x}{e^{2x}} = \frac{e^x - x e^x \cdot \ln x}{x e^{2x}} = \\ &= \frac{e^x (1 - x \cdot \ln x)}{x e^{2x}} = \frac{1 - x \cdot \ln x}{x e^x} \end{aligned}$$

**Жишээ 3.**  $y = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$  функцийг уlamжлалаар шинжилж, графикийг байгуул.

**Бодолт.**

- I.  $x^2 + x + 1 \neq 0$  учир функцийн тодорхойлогдох муж нь  $]-\infty, +\infty[$
- II.  $x$ -ийн оронд  $-x$ -ийг орлуулахад  $\frac{(-x)^2 - (-x) + 1}{(-x)^2 + (-x) + 1} = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1}$  болж у ба  $-y$ -ийн аль нь ч гарагчийг тул функц тэгш ч биш, сондгой ч биш.
- III.  $x = 0$  үед  $y = 1$  учир функцийн ординат тэнхлэгийг огтлох цэг  $(0, 1)$  болно.  
 $\frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1} = 0$  тэгшитгэл шийдгүй тул абсцисс тэнхлэгийг огтлохгүй.
- IV. Функцийн уламжлал  $y' = \frac{2(x^2 - 1)}{(x^2 + x + 1)^2}$ -ыг тэгтэй тэнцүүлэхэд  $x^2 - 1 = 0$  тэгшитгэл гарна. Тэгшитгэл  $x_1 = -1$ ,  $x_2 = 1$  гэсэн хоёр шийдтэй. Эндээс сэжигтэй цэгүүд  $(-1, 3)$ ,  $\left(1, \frac{1}{3}\right)$  болно.
- V.  $x^2 - 1 > 0$  тэнцэтгэл бишийн шийдийн олонлог  $]-\infty, -1[ \cup ]1, +\infty[$  нь функцийн өсөх завсар,  $x^2 - 1 < 0$  тэнцэтгэл бишийн шийдийн олонлог  $]-1, 1[$  нь функцийн буурах завсар болно. Иймээс сэжигтэй цэг  $\left(1, \frac{1}{3}\right)$  нь минимум,  $(-1, 3)$  нь максимумын цэг болно.
- VI. Графикийг тоймлон зураг 4.13-д байгууллаа.



Зураг 4.13

**ДАСГАЛ**

70. Дараах функцийн уламжлалыг ол.

a) $y = \frac{(x+3)^8}{(x-8)^3}$	b) $y = \frac{(x-3)^6}{(x+5)^7}$	v) $y = \frac{x^5}{x+7}$	г) $y = \frac{(x-3)^2}{(x-9)^5}$
д) $y = \frac{(x+6)^9}{(x+7)^6}$	е) $y = \frac{(x-6)^2}{(x-8)^3}$	ë) $y = \frac{(x-8)^3}{(x+9)^2}$	ж) $y = \frac{(x-2)^5}{(x-1)^7}$
з) $y = \frac{x-8}{(x+1)^8}$	и) $y = \frac{(x+7)^6}{(x-9)^3}$	й) $y = \frac{x-7}{(x-3)^5}$	к) $y = \frac{(x-4)^2}{x-8}$

**71.** Дараах бутархай рационал функцийн уламжлалыг ол.

а)  $y = \frac{3x^2 - x - 1}{4x^2 - 4x - 4}$

б)  $y = \frac{-4x + 2}{2x^2 + 5x - 1}$

в)  $y = \frac{5x^2 - 3x - 3}{x^2 + 5x + 5}$

г)  $y = \frac{x^2 - x - 1}{x^2 - x + 1}$

д)  $y = \frac{3x^2 - 3x}{x^2 - x - 2}$

е)  $y = \frac{x^2 - 4x + 4}{5x^2 - 2x - 3}$

ё)  $y = \frac{-x^2 + 4x - 4}{-5x + 1}$

ж)  $y = \frac{x^2 + x - 1}{x^2 - x - 1}$

з)  $y = \frac{-x^2 + 2x + 2}{5x^2 + 5x + 1}$

и)  $y = \frac{-3x^2 + 2x + 3}{2x^2 - 4x - 4}$

й)  $y = \frac{-3x^2 + 4x - 2}{3x^2}$

к)  $y = \frac{5x^2 + 5x}{x^2 - 5x - 5}$

л)  $y = \frac{3x^2 + x - 2}{-4x - 4}$

м)  $y = \frac{3x - 3}{x^2 + 3x - 3}$

н)  $y = \frac{2x^2 + 3x + 1}{5x^2 + 5x - 1}$

**72.** Дараах функцийн уламжлалыг ол.

а)  $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$

б)  $f(x) = \frac{2x-3}{3x-2}$

в)  $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 + 2}$

г)  $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x - 3}$

д)  $f(x) = \frac{(x-2)^3}{(x+1)^2}$

е)  $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 + 4}$

ё)  $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{x}$

ж)  $f(x) = \frac{\ln x - 1}{\ln x + 1}$

з)  $f(x) = \frac{e^x}{x}$

и)  $f(x) = \frac{x}{e^x}$

й)  $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

к)  $f(x) = \frac{x}{\ln x}$

л)  $f(x) = \frac{x}{\sin x}$

м)  $f(x) = \frac{\sin x}{x}$

н)  $f(x) = \frac{\cos x}{x}$

о)  $f(x) = \frac{x}{\cos x}$

о)  $f(x) = \frac{\sin x}{e^x}$

п)  $f(x) = \frac{e^x}{\cos x} - 1$

**73.** Хэрэв  $\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}$  бол  $y = \operatorname{cosec} x \cdot \operatorname{tg} x$  функцийн уламжлалыг ол.

**74.** Хэрэв  $\sec x = \frac{1}{\cos x}$  бол  $y = \frac{\sec x}{\operatorname{tg} x}$  функцийн уламжлалыг ол.

**75.**  $x = 4$  үед  $\frac{dy}{dx}$ -ийн утгыг ол.

а)  $y = x \ln(x - 3)$

б)  $y = \frac{x-1}{x+1}$

в)  $y = \frac{8 \ln x}{x}$

г)  $y = \frac{16e^x}{x}$

**76.** Функцийн экстремумын цэгийг ол.

а)  $y = \frac{-5x^2 - x + 4}{5x^2 + x + 3}$

б)  $y = \frac{-2x^2 - 5x + 1}{-3x + 1}$

в)  $y = \frac{2x^2 + x + 5}{2x^2 + x + 3}$

г)  $y = \frac{2x^2 + 2}{5x^2 - 3x + 1}$

д)  $y = \frac{-5x^2 + x - 1}{x^2 - x + 1}$

е)  $y = \frac{x^2 + 4x - 4}{-5x + 5}$

77. Функцийн өсөх, буурах завсрлыг ол.

a)  $y = \frac{x^2 + 7x + 11}{x + 2}$

б)  $y = \frac{x^2 + x + 1}{x + 1}$

в)  $y = \frac{x^2 + 2x + 1}{x}$

г)  $y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$

д)  $y = \frac{x^2 - 5x + 7}{x - 2}$

е)  $y = \frac{x^2 - 8x + 16}{x - 3}$

ë)  $y = \frac{x^2 - 8x + 17}{x - 4}$

ж)  $y = \frac{x^2 - 11x + 31}{x - 5}$

з)  $y = \frac{-x^2 + 2x - 1}{x^2 + x + 1}$

78. Функцийн  $x_0$  цэг дээрх шургэгч шулууны тэгшитгэл бич.

а)  $y = \frac{2x - 4}{4x - 3}, x_0 = 2$

б)  $y = \frac{-4x - 3}{2x^2 - 4x + 2}, x_0 = 0$

в)  $y = \frac{-2x^2 + 4x - 2}{4x + 1}, x_0 = 0$

г)  $y = \frac{x^2 + 4x + 4}{4x + 3}, x_0 = -1$

д)  $y = \frac{-2x^2 + 4x + 2}{2x^2 + 4x - 1}, x_0 = -1$

е)  $y = \frac{-2x^2 + 4x + 2}{2x^2 + 4x - 1}, x_0 = -1$

79. Функцийн  $x_0$  цэг дээрх нормал шулууны тэгшитгэл бич.

а)  $y = \frac{2x - 4}{4x - 3}, x_0 = 2$

б)  $y = \frac{-4x - 3}{2x^2 - 4x + 2}, x_0 = 0$

в)  $y = \frac{-2x^2 + 4x - 2}{4x + 1}, x_0 = 0$

г)  $y = \frac{x^2 + 4x + 4}{4x + 3}, x_0 = -1$

80.  $f(x) = \frac{(x-1)^2}{e^x}$  функц өгөв.

а) Функцийн уламжлалыг ол.

б) Функцийн сэжигтэй цэгийг ол.

в) Функцийн өсөх буурах завсрлыг ол.

г) Функцийн максимум, минимумын цэгийг ол.

81. Функцийг уламжлааар шинжилж, график байгуул.

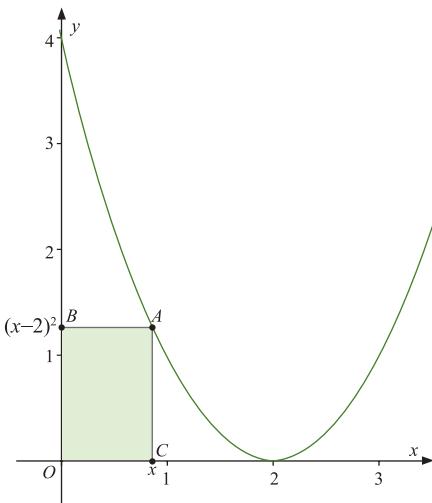
а)  $y = \frac{x^2 + 2x - 3}{2x^2 - 2x + 1}$

б)  $y = \frac{-5x^2 - 5x + 1}{2x^2 + 2x + 3}$

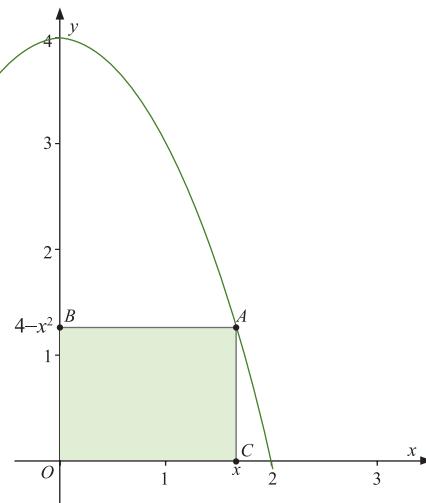
в)  $y = \frac{2x + 2}{x^2 + x + 4}$

82. а) Зураг 4.14.а-д  $[0, 2]$  тодорхойлогдох мужтай  $y = (x-2)^2$  функцийн график дээр  $A$  цэг дүрслэгджээ.  $ABOC$  тэгш өнцөгтийн талбайн хамгийн их утгыг ол.  
б) Зураг 4.14.б-д  $[0, 2]$  тодорхойлогдох мужтай  $y = 4 - x^2$  функцийн график дээр  $A$  цэг тэмдэглэжээ.  $ABOC$  тэгш өнцөгтийн талбайн хамгийн их утгыг ол.

83. Хэрэв  $y = \frac{e^x}{x}$  бол  $y - y'$  ялгаврыг ол.



Зураг 4.14 а



Зураг 4.14 б

## 4.6. $y=\operatorname{tg}x$ ФУНКЦИЙН УЛАМЖЛАЛ

Ногдвор функцийн уламжлалын дүрмийг  $y=\operatorname{tg}x$  функцийн уламжлал олоход хэрэглэе.

**Теорем.**  $y=\operatorname{tg}x$  функцийн уламжлал нь  $\frac{1}{\cos^2 x}$ -тай тэнцүү.

Өөрөөр хэлбэл  $(\operatorname{tg}x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$  байна.

**Баталгаа.** Ногдворын уламжлал олох дүрмээр  $\frac{d}{dx}(\operatorname{tg}x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right) = \frac{d \sin x}{dx} \cdot \cos x - \sin x \cdot \frac{d \cos x}{dx} = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$

болж теорем батлагдав.

Мөн  $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$  ба  $\frac{1}{\cos x} = \sec x$  тул  $(\operatorname{tg}x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x = 1 + \operatorname{tg}^2 x$  болно.

### Жишээ 1.

$f(x) = x^2 - \operatorname{tg}x - e^x$  функцийн уламжлалыг ол.

**Бодолт.**  $(x^2)' = 2x$ ,  $(\operatorname{tg}x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ ,  $(e^x)' = e^x$  тул  $f'(x) = 2x - \frac{1}{\cos^2 x} - e^x$

### ДАСГАЛ

**84.** Дараах функцуудийн уламжлалыг ол.

- а)  $f(x) = x - \operatorname{tg}x$   
г)  $f(x) = \operatorname{tg}x + e^x$

- б)  $f(x) = \operatorname{tg}x + x$   
д)  $f(x) = x \operatorname{tg}x$

- в)  $f(x) = \operatorname{tg}x - e^x$   
е)  $f(x) = \cos x \operatorname{tg}x$

- ë)  $f(x) = e^x \operatorname{tg} x$       ж)  $f(x) = \frac{\operatorname{tg} x}{e^x}$       3)  $f(x) = x^2 + \operatorname{tg} x$   
 и)  $f(x) = e^x - 2 \operatorname{tg} x$       ѹ)  $f(x) = x^2 + \operatorname{tg} x$       к)  $f(x) = -e^x \operatorname{tg} x$   
 л)  $f(x) = \frac{\operatorname{tg} x}{x}$       м)  $f(x) = \frac{e^x}{\operatorname{tg} x} - 1$       н)  $f(x) = \frac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x}$   
 о)  $f(x) = \frac{x^2}{\ln x} + x$       ѡ)  $f(x) = \ln \cos x + x \operatorname{tg} x$

85. Дараах давхар функцийн уламжлалыг ол.

а)  $f(x) = \operatorname{tg}(-x)$     б)  $f(x) = \operatorname{tg} 2x$     в)  $f(x) = -\operatorname{tg}(-2x)$     г)  $f(x) = \frac{1}{3} \operatorname{tg} 3x$

86. Дараах үржвэр функцийн уламжлалыг ол.

а)  $f(x) = (2x - 4) \operatorname{tg} x$     б)  $f(x) = (2 - 3x) \operatorname{tg} x$     в)  $f(x) = (x^2 - 2x - 3) \operatorname{tg} x$   
 г)  $f(x) = (4 - 2x - x^2) \operatorname{tg} x$     д)  $f(x) = \operatorname{tg} x \sin x$     е)  $f(x) = \cos x \operatorname{tg} x$   
 ё)  $f(x) = e^{-x} \operatorname{tg} x$       ж)  $f(x) = \operatorname{tg} x \ln x$

87. Дараах ногдвор функцийн уламжлалыг ол.

а) $f(x) = \frac{2x - 4}{\operatorname{tg} x}$	б) $f(x) = \frac{\operatorname{tg} x}{2x - 4}$	в) $f(x) = \frac{2 - 3x}{\operatorname{tg} x}$
г) $f(x) = \frac{\operatorname{tg} x}{2 - 3x}$	д) $f(x) = \frac{\operatorname{tg} x}{x^2 - 2x - 3}$	е) $f(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{\operatorname{tg} x}$
ё) $f(x) = \frac{\operatorname{tg} x}{4 - 3x - x^2}$	ж) $f(x) = \frac{\operatorname{tg} x}{4 - 3x - x^2}$	з) $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\operatorname{tg} x}$
и) $f(x) = \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{x}}$	и) $f(x) = \frac{\operatorname{tg} x}{\sin x}$	к) $f(x) = \frac{\sin x}{\operatorname{tg} x}$
л) $f(x) = \frac{\operatorname{tg} x}{\cos x}$	м) $f(x) = \frac{\cos x}{\operatorname{tg} x}$	н) $f(x) = \frac{\operatorname{tg} x}{e^x}$
о) $f(x) = \frac{e^x}{\operatorname{tg} x}$	ө) $f(x) = \frac{\operatorname{tg} x}{\ln x}$	п) $f(x) = \frac{\ln x}{\operatorname{tg} x}$

88.  $\operatorname{ctgx} = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$  томьёо ашиглан  $y = \operatorname{ctgx}$  функцийн уламжлалыг ол.

89. Уламжлал ашиглан дараах өгүүлбэрүүдийг тайлбарла.

- а)  $y = \operatorname{tg} x$  функц экстремумын цэгтүй  
 б)  $y = \operatorname{tg} x$  функц тодорхойлогдох муж дээрээ өснө.

90.  $y = \ln x + \operatorname{tg} x$  функц экстремумын цэгтүй гэж батал.

91.  $y = \operatorname{tg}(x - 1) - x$  функцийн графикийн  $x = 1$  абсцисстай цэг нь сэжигтэй цэг болохыг харуул.

92.  $y = e^x - \operatorname{tg} x$  функцийн  $x = 0$  абсцисстай цэгт татсан шүргэгч шулууны тэгшитгэл бич.

93. Дараах функцийн өгсөн завсар дахь экстремумын цэгийг ол.

$$y = 2x - \operatorname{tg} x, \left[ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$$

94. Хэрэв  $y = 4x - \operatorname{tg} x, \left( -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \right)$  функц абсцисс тэнхлэгийг ойролцоогоор

(1.39, 0) цэгээр огтолдог бол

а) Функцийн тодорхойлогдох муж ба дүрийг ол. Тэгш, сондгойг тогтоо.

б) Функцийн уламжлал ( $y'$ )-ыг ол.

в)  $x = -\frac{\pi}{3}$ ,  $x = \frac{\pi}{3}$  нь  $4 - \frac{1}{\cos^2 x} = 0$  тэгшитгэлийн шийд болохыг харуул.

г) Функцийн өсөх буурах завсар болон максимум, минимумын цэгийг ол.

д) Графикийг байгуул.

95.  $y = 2x$ ,  $y = \operatorname{tg} x$  функц тус бүрийн

тодорхойлогдох муж  $\left[ 0, \frac{\pi}{2} \right]$  байв.

Графикуудын огтлолцлын цэгийг  $O(0, 0)$ ,  $A$

$(\alpha, 0)$  гэж тэмдэглэв. Хэрэв  $x \in [0, \alpha]$  бол

$x = \frac{\pi}{4}$  үед  $B(x, 2x)$ ,  $C(x, \operatorname{tg} x)$  цэгүүдийн

хоорондох зайд хамгийн их утгатай байна гэж харуул. (Зураг 4.15)

96. Хэрэв  $y = e^x \operatorname{tg} x$  бол  $y' - y(\operatorname{tg} x + 1)$ -ийг ол.

97. Хэрэв  $y = \frac{\operatorname{tg} x}{e^x}$  бол  $y' - y(\operatorname{tg} x - 1)$ -ийг ол.

98. Дараах функцийн уламжлал ба  $x_0$  цэг дээрх налалтыг ол.

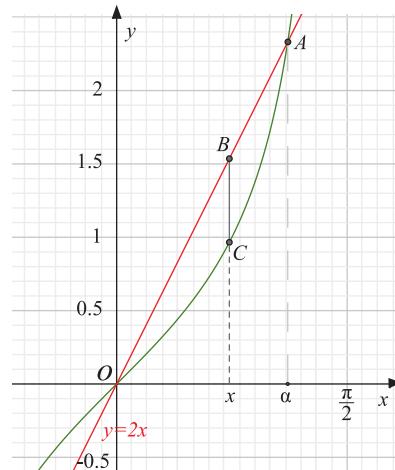
а)  $y = x^2 + e^x$ ,  $x_0 = 0$     б)  $y = x - \ln x$ ,  $x_0 = 1$     в)  $y = 1 - \sin x$ ,  $x_0 = \pi$     г)  $y = \operatorname{tg} x - x$ ,  $x_0 = \frac{\pi}{4}$

д)  $y = x^2 e^x$ ,  $x_0 = 0$     е)  $y = x \ln x$ ,  $x_0 = e$     ё)  $y = \frac{1}{\sin x}$ ,  $x_0 = \pi$     ж)  $y = x \operatorname{tg} x$ ,  $x_0 = \frac{\pi}{4}$

99. Бактери хугацаа ( $t$ )-аас хамаарч  $y = \frac{e^t}{t}$  хуулиар өсөж байв.

а) Хугацаа тоолж эхлэхээс 3 секундийн өмнөх өсөлтийн хурдыг ол.

б) Хугацаа тоолж эхэлснээс 3 секундийн дараа ямар хурдтай өсөх вэ?



Зураг 4.15

## 4.7. ДАВХАР ФУНКЦИЙН УЛАМЖЛАЛ

Дифференциалчлагдах  $y = y(u(x))$  давхар функцийн хувьд  $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$  тэнцэтгэл

биелдэг. Эмнэ нь хоёр давхар функцийн уlamжлал олж байсан бол энэ сэдвийн хүрээнд хоёр буюу турван давхар функцийн уlamжлалыг олж, хэрэглэж сурна.

**Жишээ 1.**  $f(x) = e^{\cos x}$  функцийн уlamжлалыг ол.

**Бодолт.**  $f'(x) = (e^{\cos x})' = e^{\cos x} (\cos x)' = e^{\cos x} (-\sin x) = -\sin x \cdot e^{\cos x}$

**Жишээ 2.**  $f(x) = \sin 3x \cos 2x$  функцийн уlamжлалыг ол.

**Бодолт.**  $f'(x) = (\sin 3x \cos 2x)' = 3 \cos 3x \cos 2x - 2 \sin 3x \sin 2x$

**Жишээ 3.**  $f(x) = \ln((2x-1)^3 (3x+1)^2)$  функцийн уlamжлалыг ол.

**Бодолт.**

$$f'(x) = \left( \ln((2x-1)^3 (3x+1)^2) \right)' = (3 \ln(2x-1) + 2 \ln(3x+1))' = \frac{3 \cdot (2x-1)'}{2x-1} + \frac{2 \cdot (3x+1)'}{3x+1} = \frac{3 \cdot 2}{2x-1} + \frac{2 \cdot 3}{3x+1} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 5x}{(2x-1)(3x+1)} = \frac{30x}{6x^2 - x - 1}$$

**Жишээ 4.**  $y = 2^x$  функцийн уlamжлалыг ол.

**Бодолт.** Функцийг  $y = e^{x \ln 2}$  гэж бичиж болдог.  $\ln 2$  нь тогтмол тоо гэдгийг анхаарвал функцийн уlamжлал нь  $y' = (e^{x \ln 2})' = e^{x \ln 2} (x \ln 2)' = e^{x \ln 2} \cdot \ln 2 = 2^x \ln 2$  болно.

### ДАСГАЛ

**100.** Дараах функцийн уlamжлалыг ол.

$$\text{а)} y = \frac{(x-1)^2}{(x+3)^4} \quad \text{б)} y = \frac{(2x-1)^3}{(3x-2)^2} \quad \text{в)} y = \frac{(3x-1)^4}{(5x+4)^3} \quad \text{г)} y = \frac{(x-4)^2}{(6x-3)^4}$$

**101.** Дараах функцийн өгсөн цэг дээрх уlamжлалыг ол.

$$\begin{array}{ll} \text{а)} y = \frac{(2x-7)^2}{(6x-3)^3}, \quad x_0 = 1 & \text{б)} y = \frac{(2x-6)^5}{(2x-4)^3}, \quad x_0 = 4 \\ \text{в)} y = \frac{(4x+5)^3}{(3x+7)^2}, \quad x_0 = -1 & \text{г)} y = \frac{(4x-1)^4}{(x+2)^3}, \quad x_0 = 1 \end{array}$$

**102.** Дараах функцийн сэжигтэй цэгийг ол.

$$\text{а)} y = \frac{(-3x+5)^2}{(4x-7)^3} \quad \text{б)} y = \frac{(5x-9)^3}{(x-2)^2} \quad \text{в)} y = \frac{(2x-1)^3}{(x+1)^2} \quad \text{г)} y = \frac{(2x-4)^3}{(3x-7)^2}$$

**103.** Дараах функцийн өгсөн цэгт татсан шүргэгч шулзууны наалалтыг ол.

$$\text{а)} y = \frac{(4x+1)^2}{(2x-1)^4}, \quad x = 1 \quad \text{б)} y = \frac{(5x+2)^3}{(x+2)^5}, \quad x = -1$$

в)  $y = \frac{(10x-9)^5}{(2x-9)^4}$ ,  $x=18.9$  г)  $y = \frac{(3x-6)^3}{(x+9)^4}$ ,  $x=3$

104. Дараах функцийн уламжлалыг ол.

а)  $f(x) = x - \sin x^2$  б)  $f(x) = \cos^2 x$  в)  $f(x) = \ln(2x+1)$

г)  $y = 7^x$  д)  $y = 5^{2x+1}$  е)  $y = 3^{1-x}$

105. Дараах давхар функцийн уламжлалыг ол.

а)  $y = e^{x+1}$  б)  $y = e^{1-x}$  в)  $y = e^{3-x}$  г)  $y = e^{-2x}$

д)  $y = e^{2x-3}$  е)  $y = e^{3x+2}$  ё)  $y = e^{3x-2}$  ж)  $y = e^{-5x+3}$

з)  $y = e^{4-3x}$  и)  $y = e^{2-3x}$  ѹ)  $y = e^{x^2}$  к)  $y = e^{\sqrt{x}}$

106. Дараах функцийн уламжлалыг ол.

а)  $y = 3x^2 + e^{\sqrt{x}}$  б)  $y = e^{\frac{1}{x^3}} - 5x - 5$  в)  $y = x^3 - e^{x^2}$   
г)  $y = e^3 - e^{3x}$  д)  $y = 4x^{\frac{1}{2}} + e^{1-x} + 3$  е)  $y = e^{2x+1} + 3x^2 - x^{\frac{3}{2}} - 6$

107. Дараах давхар функцийн уламжлалыг ол.

а)  $y = \ln 3x$  б)  $y = \ln x^2$  в)  $y = \ln x^9$

г)  $y = \ln(5x^{-3})$  д)  $y = \ln(6x^{-7})$  е)  $f(x) = \ln(2x+5)$

ё)  $f(x) = \ln(8-3x)$  ж)  $f(x) = \ln(2x^3 + 3x^2 - 5)$

108. Дараах давхар функцийн уламжлалыг ол.

а)  $f(x) = \sin(2x-3)$  б)  $f(x) = \sin(2x-1)$  в)  $f(x) = \cos(-5x+1)$

г)  $f(x) = \cos(2-3x)$  д)  $f(x) = \sin(5x+4)$  е)  $f(x) = \cos(2x-5)$

ё)  $f(x) = \cos(x-15)$  ж)  $f(x) = \sin(x^2 - 4x + 3)$  3)  $f(x) = \sin^2 x$

и)  $f(x) = \cos^2 x$  ѹ)  $f(x) = \sin x^2$  к)  $f(x) = \cos x^2$

л)  $f(x) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$  м)  $f(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$  н)  $f(x) = \cos\left(3x - \frac{\pi}{3}\right)$

о)  $f(x) = -\cos 3x$  Ѹ)  $f(x) = \cos(x-5) + \sin x$  п)  $f(x) = \cos 2x - \sin x$

п)  $f(x) = \sin 3x - \cos 2x$  с)  $f(x) = \cos(2x-\pi) - \sin x$  т)  $f(x) = \sin \pi x + \cos \pi x$

у)  $f(x) = \sin \frac{x}{3} + \cos \frac{x}{2}$  ў)  $f(x) = 3 \cos \frac{x}{3} - 5 \sin \frac{x}{5}$  ф)  $f(x) = \frac{1}{3} \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$

109. Дараах давхар функцийн уламжлалыг ол.

а)  $y = \ln((x-3)(2x+1)^2)$  б)  $y = \ln((x+1)^2(3x-1))$

в)  $y = \ln((x-2)^3(2x+3))$  г)  $y = \ln((2x+1)^2(x-1)^3)$

д)  $y = \ln((3x-1)^2(x-3)^2)$  е)  $y = \ln \frac{(2x-1)^2}{x+3}$

ë)  $y = \ln \frac{3x+2}{(x-1)^3}$

ж)  $y = \ln \frac{(3x+2)^3}{(2x-3)^2}$

110. Дараах давхар функцийн уламжлалыг ол.

а)  $f(x) = \operatorname{tg}(2x-4)$

б)  $f(x) = \operatorname{tg}(2-3x)$

в)  $f(x) = \operatorname{tg}(x^2 - 2x - 3)$

г)  $f(x) = \operatorname{tg}(\sin x)$

д)  $f(x) = \sin(\operatorname{tg} x)$

е)  $f(x) = \operatorname{tg}(\cos x)$

ë)  $f(x) = \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{8}\right)$

ж)  $f(x) = \frac{1}{3} \operatorname{tg}\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$

з)  $f(x) = 2 \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6} - \frac{x}{2}\right)$

111. Дараах функцийн уламжлалыг ол.

а)  $f(x) = x^2 \ln x - 2x$

б)  $f(x) = x^2 \sin x$

в)  $f(x) = x^3 \cos x$

г)  $y = \sin \sqrt{2}x + \cos \sqrt{2}x$

д)  $f(x) = 3^x$

е)  $f(x) = 5^{-x}$

112. Дараах функцийн уламжлалыг ол.

а)  $f(x) = \sin 3x \sin 2x$

б)  $f(x) = \cos 3x \sin 2x$

в)  $f(x) = \cos 3x \cos 2x$

г)  $f(x) = \cos x \sin 2x$

д)  $f(x) = \cos x \cos 2x$

е)  $f(x) = \sin x \cos 2x$

ë)  $f(x) = \sin x \sin 2x$

ж)  $f(x) = \cos 3x \sin x$

з)  $f(x) = \cos 3x \cos x$

113. Дараах функцийн уламжлалыг ол.

а)  $y = \frac{1+2x}{1-x}$

б)  $y = \ln \frac{x}{1-x}$

в)  $y = -3^{-3x}$

г)  $y = 4^{-x}$

д)  $y = \sin e^x$

е)  $y = \cos e^x$

114.  $f(x) = xe^x$  функцүү өгөв.

а) Функцийн уламжлалыг ол.

б)  $e \approx 2.72$  гэж үзээд функцийн минимумын цэгийг ол.

115. Хэрэв  $f(x) = \ln(x^2 - 6x)$  бол  $f'(x) = 0$  тэгшитгэлийг бод.

116.  $y = \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$  функцийн  $x_0 = 0$  цэг дээрх уламжлалыг ол

117.  $y = \sin 3x$  функцийн а)  $x_0 = \frac{\pi}{3}$  б)  $x_0 = \frac{\pi}{6}$  цэгт татсан шүргэгч шулууны тэгшитгэл бич.

118.  $y = \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$  функцийн  $\pi$  цэгт татсан шүргэгч шулууны тэгшитгэл бич.

119.  $y = \cos\left(3x - \frac{\pi}{6}\right)$  функцийн  $x_0 = 0$  цэгт татсан нормал шулууны тэгшитгэл бич

120.  $y = \sin\left(4x - \frac{\pi}{4}\right)$  функцийн  $x_0 = \frac{3\pi}{16}$  цэгт татсан шүргэгч шулууны тэгшитгэл бич.

121.  $y = \cos\left(4x - \frac{4\pi}{3}\right)$  функцийн  $x_0 = \frac{\pi}{12}$  цэгт татсан шүргэгч шулууны тэгшитгэл бич.

122.  $y = 2x - e^{2x-1}$  функцийн экстремумын цэгийг ол.

**123.**  $y = 2x - \ln(2x-1)$  функцийн экстремумын цэгийг ол.

**124.** Дараах функцийн графикийг уламжлал ашиглан байгуул.

а)  $y = \sin 3x - 3x$ ,  $-\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{3}$       б)  $y = 2x - \cos 2x + \frac{\pi}{2}$ ,  $-\frac{3\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$

в)  $y = \ln \frac{2}{x-1} + x - 1 - \ln 2$       г)  $y = e^{\frac{x}{3}} - \frac{e}{3}x$

**125.** Хэрэв  $y = \sin 2x$  бол  $\frac{y'}{y}$ -ийг ол.

**126.** Хэрэв  $y = e^{3x}$  бол  $y' = 3y$  тэнцэтгэл биелэхийг харуул.

**127.** Хэрэв  $y = e^{x^2}$  бол  $\frac{y'}{y}$ -ийг ол.

**128.** Хэрэв  $y = \frac{x-1}{x+1}$  бол  $2y^2 = (x-1)^2$   $y'$  тэнцэтгэл биелэхийг харуул.

**129.** Хэрэв  $y = \frac{1}{x^5}$  бол  $5y + xy' = 0$  тэнцэтгэл биелэхийг харуул.

**130.** Дараах функцүүдийн уламжлалыг ол.

а) $f(x) = (2-3x)^{10}$	б) $f(x) = \cos 3x + \sin 2x$	в) $f(x) = \sin^2 x$
г) $f(x) = \cos x^2$	д) $f(x) = \ln x + \cos x$	е) $f(x) = e^{-\cos x}$
ё) $f(x) = \operatorname{tg} x - \ln x$	ж) $f(x) = e^{\sin x + 3x}$	з) $f(x) = \ln(x^2 + 2x + 4)$

**131.**  $y = (2x-1)^2 - 6x + 5$  параболын оройн цэгийг уламжлал хэрэглэн ол.

**132.**  $y = -xe^{-x}$  функцийн экстремумын цэгийг ол.

**133.**  $(0,1)$  цэг нь  $f(x) = e^{\sin x - x}$  функцийн нугаралтын цэг болохыг харуул.

**134.**  $y = \sin x + \cos x$  функцийн  $x_0 = -\frac{\pi}{2}$  цэг дээрх уламжлалыг ол.

## БҮЛГИЙН НЭМЭЛТ ДААЛГАВАР

**1.** Функцийн уламжлалыг ол.

а)  $y = e^{2x} - \sin 3x$       б)  $y = \ln \frac{x}{2} + \cos 3x$       в)  $y = e^x \operatorname{tg} 4x$

г)  $y = \frac{\ln x}{x^2}$       д)  $y = \frac{x^2 - x + 2}{x^2 + x + 2}$       е)  $y = \sin x^3 + \cos x^3$

**2.** Функцийн өгсөн цэг дээрх уламжлалыг ол.

а)  $y = \frac{x+x^2}{x^2-x+1}$ ,  $x=1$       б)  $y = \ln 2x \cdot \sin x$ ,  $x=\frac{\pi}{2}$

в)  $y = \cos 3x + \operatorname{tg} x$ ,  $x = \frac{\pi}{3}$       г)  $y = \frac{e^{2x}}{2 \sin x}$ ,  $x = \frac{\pi}{2}$

д)  $y = \sin 2x - \cos 3x$ ,  $x = \frac{2\pi}{3}$       е)  $y = e^x \sin x$ ,  $x = \frac{\pi}{4}$

3. Функцийн өгсөн цэг дээрх наалттыг ол.

а)  $y = -x^2 e^{3x}$ ,  $x = 1$       б)  $y = \frac{x^2}{\operatorname{tg} 4x}$ ,  $x = \frac{\pi}{4}$       в)  $y = \frac{\cos x}{e^{3x}}$ ,  $x = \frac{\pi}{6}$

г)  $y = \sin 3x - \operatorname{tg} 2x$ ,  $x = \frac{\pi}{2}$       д)  $y = \ln \frac{x}{2} + x^2$ ,  $x = 1.5$

4.  $y = \operatorname{tg} x + \operatorname{sec} x$ , функцийн  $x = 0$  цэгт татсан шүргэгч шулууны тэгшигтгэл бич.

5.  $y = \ln \frac{x}{4} - x + x^2$  функцийн  $x = 0$  цэгт татсан шүргэгч шулууны наалттыг ол.

6.  $f(x) = 5 \ln(2x) - 4\sqrt{x}$  функцийн  $x = 4$  цэгт татсан шүргэгч шулууны наалттыг ол.

7. Функцийн өгсөн цэгт татсан шүргэгч шулууны тэгшигтгэл бич.

а)  $y = \operatorname{sec} x - x$ ,  $x = -\pi$       б)  $y = -e^x + e^2 x$ ,  $x = 2$       в)  $y = \cos 2x - x$ ,  $x = \pi$

8. Функцийн өгсөн цэгт татсан нормал шулууны тэгшигтгэл бич.

а)  $y = \operatorname{tg} x - \operatorname{sec} x$ ,  $x = 0$       б)  $y = \ln \frac{x}{3} \sin 3x$ ,  $x = \frac{\pi}{2}$       в)  $y = \frac{\sin 2x}{\cos 3x}$ ,  $x = \pi$

г)  $y = \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$ ,  $x = \frac{\pi}{3}$       д)  $y = \operatorname{tg}\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ ,  $\left(\frac{\pi}{6}, 0\right)$

9. Хэрэв цэгийн координат  $x = 5 \ln(2t+3) + 4t$  хуулиар өөрчлөгдж байсан бол  $t_0 = 4$  үеийн хурд ба хурдатгалыг ол.

10.  $y = \frac{\ln 2x}{x^2}$  функцийн экстремумын цэгийг ол. Тэр цэг максимум, минимум, нугаралтын цэгийн аль нь болохыг тогтоо.

11.  $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$  функцийн координатын эхэд хамгийн ойрхон орших максимумын цэг ол.

12.  $y = \ln(x^2 + x + 1)$  функцийн экстремумын цэгийг ол. Тэр цэг максимум, минимум, нугаралтын цэгийн аль нь болохыг тогтоо.

13.  $y = e^{\frac{x^2 - 4x + 7}{3}}$  ба  $y = e^{x^2 - 4x + 5}$  функцийн экстремумын цэгүүд давхацна гэдгийг харуул.

14. Функцийн өсөх, буурах завсрыг ол.

а)  $y = -e^x + e^3 x$       б)  $y = e^{1+2x-x^2}$

в)  $y = -\ln(3-2x) - \ln(3x-1)$       г)  $y = \ln(x^2 - 4x + 3)$

15.  $y = e^{0.2x-1}$  функц буурахгүй гэж харуул.

16. Функцийг уламжлалаар шинжилж, графикийг байгуул.

a)  $y = \ln(3-x) + \ln(x+1)$

b)  $y = e^{\frac{x^2+4x+5}{5}}$

в)  $y = 0.5x^2 - \ln x - 2$

г)  $y = 5\ln(4x+8) - 4\sqrt{x+2}$  ( $\ln 5 = 1.61$  гэж ав)

17. B цэг  $y = -\frac{1}{2}x^2 + x + 4$  функцийн

график дээр, C цэг  $y = x^2 - x$  функцийн график дээр орших ба  $BC \parallel Oy$  байв.  $BC$  хэрчмийн уртын хамгийн их утгыг ол. (Зураг 4.16 зөвхөн харагдах хэсэг дээр)

18. Хэрэв  $f(x) = \sin x$ ,  $x = 2t + \frac{\pi}{6}$  бол

$f'(t)$ -г ол.

19.  $f'(x) = 0$  тэгшитгэл бод.

a)  $f(x) = e^x(x^2 - x + 1)$

б)  $f(x) = \frac{x^2 + x - 1}{e^{2x}}$

20. Хэрэв  $f(g) = g^2 + g + 1$ ,  $g(x) = \operatorname{tg} 2x$

бол  $\frac{df}{dx}$ -ийг ол.

21. Хэрэв  $f(u) = u^2 - u + 1$ ,  $u(x) = \cos x$  бол  $\frac{df}{dx}$ -ийг ол.

22. Хэрэв  $f(u) = e^{2u-1}$ ,  $u(x) = \cos x$  бол

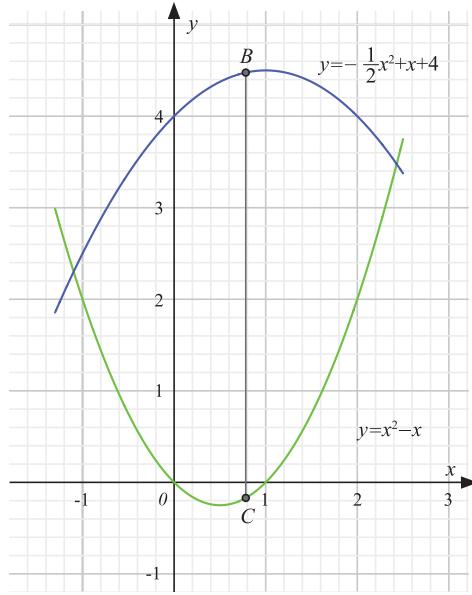
a)  $\frac{df}{du}$ -ийг ол. б)  $\frac{du}{dx}$ -ийг ол. в)  $\frac{df}{dx}$ -ийг ол. г)  $x = \frac{\pi}{3}$  бол  $\frac{df}{dx}$ -ийн утгыг ол.

23. Хэрэв  $f(u) = \ln u$ ,  $u(x) = \cos x$  бол

a)  $\frac{df}{du}$ -ийг ол. б)  $\frac{du}{dx}$ -ийг ол. в)  $\frac{df}{dx}$ -ийг ол. г)  $x = \frac{\pi}{3}$  бол  $\frac{df}{dx}$ -ийн утгыг ол.

24. Хэрэв  $f(u) = u^2 + u + 1$ ,  $u(x) = x^2 - x + 1$  бол

a)  $\frac{df}{du}$ -ийг ол. б)  $\frac{du}{dx}$ -ийг ол. в)  $x = -1$  үед  $\frac{df}{dx}$ -ийн утгыг ол.



Зураг 4.16

25. Функцийн тодорхойлогдох муж ба уламжлалыг ол.

а)  $y = \ln((x-2)(x+1))$

б)  $y = \ln((x-1)(x^2 - 2x + 2))$

в)  $y = \ln(x+1) + \ln(x^2 - x + 1)$

г)  $y = \ln(x+1)^2 + \ln(2x-1)$

26.  $y = -x^2 + 8 \ln x - 3$  функцийн уламжлалыг ол.

27.  $y = 4x^2 - 392 \ln x + 0.6$  функцийн  $x_0 = 4$  цэг дээрх уламжлалыг ол.

28.  $y = -4x^2 + 32 \ln x + 3.9$  функцийн сэжигтэй цэгийн абсциссыг ол.

29.  $y = 2 \ln x + 4x$  функцийн графикийн  $x_0 = 1$  координаттай цэгт татсан шүргэгч шулууны налалтыг ол.

30.  $y = 1.5x^2 - 108 \ln x - 3.6$  функцийн  $x_0 = 2$  цэгт татсан нормал шулууны налалтыг ол.

31. Хэрэв  $y = x \cos x$  бол  $\frac{y'}{y} = \frac{1}{x} + \operatorname{tg} x$  болохыг харуул.

32. Зураг 4.17-д  $y = (3-x)e^x$  функцийн график, максимумын  $M$ , абсцисс тэнхлэгийг огтлох  $A$ , ординат тэнхлэгийг огтлох  $B$  цэг, мөн функцийн графикийн  $B$  цэгт татсан шүргэгч шулуун  $b$  дүрслэгджээ.

а)  $A$  цэгийн координатыг ол.

б)  $B$  цэгийн координатыг ол.

в)  $M$  цэгийн координатыг ол.

г)  $b$  шулууны тэгшитгэл бич.

33.  $y = x + 2 \cos x$  функцийн  $0 \leq x \leq 2\pi$  завсарт орших абсцисстэй сэжигтэй цэгийг ол.

34.  $y = (x-2)e^x$  функц өгөв.

а) Сэжигтэй цэгийн координатыг ол.

б) Уул цэг максимум, минимумын цэгийн аль нь болохыг тогтоо.

35.  $y = x^3 e^{-x}$  функц өгөв.

а) Түүний сэжигтэй цэгийн абсцисс  $x = 3$  болохыг харуул.

б)  $x = 1$  цэгт татсан шүргэгч шулууны тэгшитгэл бич.

36.  $y = 4x^2 \ln x$  функц өгөв.

а) Сэжигтэй цэгийн абсциссыг олж, хариуг мянганы оронгоор тоймло.

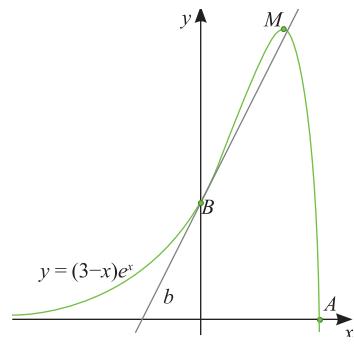
б) Уул цэг максимум, минимумын цэгийн аль нь болохыг тогтоо.

37.  $y = \frac{1}{2}e^{2x} + 2e^x - 3$  функц өгөв.

а) Түүний уламжлалыг ол.

б)  $y' = 0$  тэгшитгэлийг бод.

в) Функц хэдэн сэжигтэй цэгтэй вэ?



Энэ бүлэг сэдвийг судалснаар дараах мэдлэг чадварыг эзэмшинэ.

- $e^{ax+b}$ ,  $\frac{1}{ax+b}$ ,  $\sin(ax+b)$ ,  $\cos(ax+b)$  ба  $\sec^2(ax+b)$  хэлбэрийн функцийн интегралыг олох
- Тодорхой бус коэффициентийн аргыг ашиглан бутархай рационал функцийн интегралыг олох
- $\frac{f'(x)}{f(x)}$  хэлбэрийн функцийг таних, түүний интегралыг олох
- Орлуулгын аргаар тодорхой болон тодорхой бус интегралыг хялбар интегралд шилжүүлэн бodoх

## 5.1. ИЛТГЭГЧ, ТРИГОНОМЕТР, РАЦИОНАЛ ФУНКЦИЙН ИНТЕГРАЛ

### $e^x$ функцийн интеграл

Өгсөн функцийн эх функц олох дифференциалчлахын урвуу үйлдлийг интегралчлах үйлдэл гэдэг. Тухайлбал, Хэрэв аливаа  $x$ -ийн хувьд  $F'(x) = f(x)$  нөхцөл биелж байвал  $F(x)$  функцийг  $f(x)$  функцийн эх функц гэх ба бүх эх функцийн олонлогийг тодорхойгүй интеграл гээд

$$\int f(x) dx = F(x) + C \text{ гэж бичдэг.}$$

Мөн өмнөх ангид  $x^n$ ,  $(ax+b)^n$  хэлбэрийн функцийн эх функц олох, интегралын чанарыг ашиглах, тодорхой интегралын утгыг хэрхэн олохыг судалсан. Тухайлбал,

$$\int (ax+b)^n dx = \frac{1}{a(n+1)} (ax+b)^{n+1} + C$$

төмьёог мэднэ. Энд  $C$  нь дурын тогтмол тоо ба цаашид бодлого бүрд  $C \in \mathbb{R}$  гэж бичих шаардлагагүй.

**Жишээ 1.** Интеграл бод. а)  $\int (5x^4 - x) dx$  б)  $\int_1^2 (2x-3)^4 dx$

**Бодолт.**

а)  $\int (5x^4 - x) dx = \int 5x^4 dx - \int x dx = 5 \cdot \frac{x^5}{5} - \frac{x^2}{2} + C = x^5 - \frac{x^2}{2} + C$

б)  $\int_1^2 (2x-3)^4 dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{(2x-3)^5}{5} \Big|_1^2 = \frac{1}{10} (1^5 - (-1)^5) = \frac{1}{5}$

Тухайлбал, Жишээ 1-ийн  $F(x) = x^5 - \frac{x^2}{2} + C$  функц нь  $f(x) = 5x^4 - x$  функцийн эх функц тул тодорхойлолт ёсоор

$$F'(x) = (x^5 - \frac{x^2}{2} + C)' = 5x^4 - x \text{ эсвэл } \int (5x^4 - x) dx = x^5 - \frac{x^2}{2} + C \text{ болно.}$$

Уламжлал ба интеграл нь харилцан урвуу үйлдэл тул

$$\int F'(x) dx = F(x) + C \text{ буюу } \left( \int f(x) dx \right)' = f(x)$$

чанар биелнэ.

$y = e^x$  функцийн эх функцийг ольё.

$$y = e^x \text{ функцийн уламжлал } \frac{d}{dx} e^x = e^x \text{ гэдгээс } \int e^x dx = e^x + C \text{ болно.}$$

Үүнтэй адиллаар уламжлалын чанар ёсоор

$$\frac{d}{dx} (c \cdot e^x) = c \cdot e^x \text{ ба } \frac{d}{dx} (e^{ax+b}) = a \cdot e^{ax+b} \text{ тул}$$

$$\int c \cdot e^x dx = c \cdot e^x + C \text{ ба } \int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a} \cdot e^{ax+b} + C \text{ болно.}$$

**Жишээ 2.**  $\int 2e^x dx$  интеграл бод.

**Бодолт.**  $\int 2e^x dx = 2e^x + C$ .

**Жишээ 3.**  $\int 4e^{(2-3x)} dx$  интеграл бод.

**Бодолт.** Дээрх томьёо ёсоор  $\int 4e^{(2-3x)} dx = 4 \cdot \left( -\frac{1}{3} \right) \cdot e^{(2-3x)} + C = -\frac{4}{3} \cdot e^{(2-3x)} + C$  болно.

**Жишээ 4.**  $\int \frac{e^{2x} + 1}{e^x} dx$  интеграл бод.

**Бодолт.** Эхлээд интегралын доорх функцийн хүртвэрийг хуваарьд гишүүнчлэн хувааж гарсан функцийг интегралчилья.

$$\int \frac{e^{2x} + 1}{e^x} dx = \int \left( \frac{e^{2x}}{e^x} + \frac{1}{e^x} \right) dx = \int (e^x + e^{-x}) dx = e^x - e^{-x} + C.$$

**Жишээ 5.**  $\int_0^1 e^{3x} dx$  тодорхой интеграл бод.

**Бодолт.** Тодорхой интеграл бодох дүрмээр

$$\int_0^1 e^{3x} dx = \frac{1}{3} e^{3x} \Big|_0^1 = \frac{1}{3} (e^{3 \cdot 1} - e^{3 \cdot 0}) = \frac{1}{3} (e^3 - 1)$$

болно.

**Жишээ 6.** Хэрэв  $\int_{-\alpha}^{\alpha} e^x dx = \frac{3}{2}$ ,  $\alpha > 0$  бол  $\alpha$ -ийн утгыг ол.

**Бодолт.** Эхлээд тодорхой интегралыг олсны дараа  $\frac{3}{2}$  тоотой тэнцүүлэн тэгшигтгэл бодож шийдийг олно. Иймд

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} e^x dx = e^{\alpha} - e^{-\alpha}, \quad e^{\alpha} - e^{-\alpha} = \frac{3}{2}$$

гэсэн илтгэгч тэгшигтгэл болно. Энэ тэгшигтгэлийг орлуулгын аргаар бодъё.

$e^{\alpha} - e^{-\alpha} = \frac{3}{2}$  тэгшигтгэлийг зэргийн чанар ашиглан  $e^{\alpha} - \frac{1}{e^{\alpha}} = \frac{3}{2}$  хэлбэрт шилжүүлнэ.

Хэрэв  $e^{\alpha} = t$  гэж орлуулбал  $t - \frac{1}{t} = \frac{3}{2}$  рационал тэгшигтгэл болно.

Алгебрын хувиргалт хийвэл  $2t^2 - 3 - 2 = 0$  гэсэн квадрат тэгшигтгэлд шилжинэ.

Энэ тэгшигтгэлийн шийд  $t = 2$ ,  $t = -\frac{1}{2}$  гэж гарна.

Илтгэгч функцийн утга эерэг тул  $e^{\alpha} = 2$  ба эндээс  $\alpha = \ln 2$  болно.

**Жишээ 7.**  $y = e^{2x-1}$  функцийн график,  $Ox$  тэнхлэг,  $x = \frac{1}{2}$ ,  $x = 1$  шугамаар хязгаарлагдсан дүрсийн талбайг ол.

**Бодолт.**  $y = e^{2x-1}$  функцийн график,  $Ox$  тэнхлэг,

$x = \frac{1}{2}$ ,  $x = 1$  шугамаар хязгаарлагдсан дүрсийг

Зураг 5.1-д харуулав.

Энэ дүрсийн талбай нь  $\int_{\frac{1}{2}}^1 e^{2x-1} dx$  гэсэн тодорхой

интегралтай тэнцүү. Иймд

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 e^{2x-1} dx = \frac{1}{2} e^{2x-1} \Big|_{\frac{1}{2}}^1 = \frac{1}{2} (e^1 - e^0) \approx 0.85 \text{ (нэгж.кв)}$$

болно.

### ДАСГАЛ

1.  $x$  хувьсагчаар интегралчилж бод.

a)  $e^{4x}$

б)  $e^{5x-2}$

в)  $7e^{-3x}$

г)  $e^{\frac{3+x}{2}}$

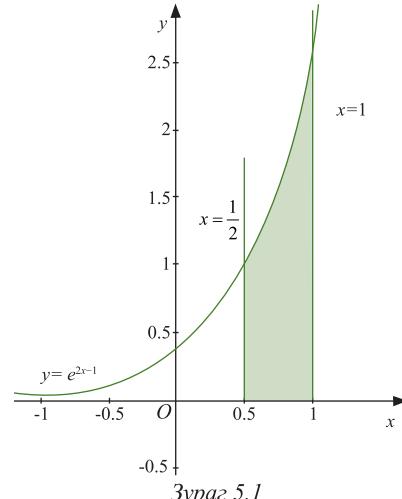
д)  $e^{9-2x}$

е)  $\frac{1}{3}e \cdot e^{2x-7}$

ж)  $4e^x + \frac{3}{e^{4x}}$

ж)  $4e^x - \frac{9}{e^{2x}}$

з)  $0.8e^{2x} + \frac{4}{e^{4x}}$



2. Тодорхой интеграл бод.

$$\text{а)} \int_0^2 e^{2x} dx$$

$$\text{б)} \int_0^1 e^{5x-2} dx$$

$$\text{в)} \int_{-1}^{\ln 2} 6e^{-x} dx$$

$$\text{г)} \int_0^1 3e^{\frac{x}{2}} dx$$

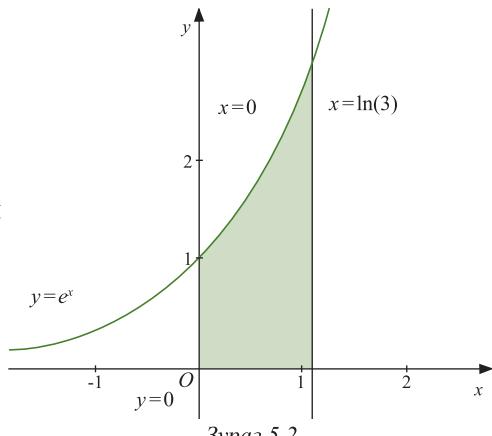
$$\text{д)} \int_1^3 2e^{9-4x} dx$$

$$\text{е)} \int_{-1}^0 4e^{x-5} dx$$

$$\text{ж)} \int_0^{\ln 3} \left( e^{2x} + \frac{1}{e^{2x}} \right) dx$$

$$\text{з)} \int_{\ln 2}^{\ln 3} \left( e^x - \frac{1}{e^x} \right)^2 dx$$

$$\text{и)} \int_0^1 \left( e^{2x} - \frac{3}{e^{3x}} \right) dx$$



3.  $y = e^x$  функцийн график,  $Ox$  тэнхлэг,  $x = 0$ ,  $x = \ln 3$  шугамаар хязгаарлагдсан дүрсийн талбайг ол. (Зураг 5.2)

$y = \frac{1}{x}$  функцийн интеграл

$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C$  томьёог ашиглан  $\int x^{-1} dx$  интегралыг бодож болохгүй.

Учир нь  $\int x^{-1} dx = \frac{1}{-1+1} x^{-1+1} + C = \frac{1}{-1+1}$  бутархайн хуваарь тэг гарч байна.

Гэвч  $y = \ln x$  функцийн уламжлал  $x > 0$  үед

$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x} \text{ тул } \int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$$

болно. Харин  $x < 0$  үед  $y = \ln x$  функцийн тодорхойлогдохгүй боловч  $x < 0$  буюу

$-x > 0$  үед  $\int \frac{1}{-x} dx = \ln(-x) + C$  байх тул  $x < 0$  үед  $\int \frac{1}{x} dx = \ln(-x) + C$  болно.

Хэрэв энэ хоёр үр дүнг нэгтгэн бичвэл

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C \text{ болно.}$$

Үүнтэй адилгаар  $\frac{d}{dx} \ln(ax+b) = \frac{a}{ax+b}$  тул

$$\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln|ax+b| + C \text{ болно.}$$

**Жишээ 1.** Интеграл бод. а)  $\int \frac{1}{7x-3} dx$  б)  $\int \frac{2}{5-3x} dx$ .

**Бодолт.** Дээрх томьёог ашиглан интеграл бодьё.

$$\text{а)} \int \frac{1}{7x-3} dx = \frac{1}{7} \ln|7x-3| + C. \quad \text{б)} \int \frac{2}{5-3x} dx = -\frac{2}{3} \ln|5-3x| + C.$$

**Жишээ 2.**  $\int_2^4 \left( \frac{2}{1-3x} + \frac{1}{x+5} \right) dx$  тодорхой интеграл бод.

**Бодолт.** Нийлбэрийн интеграл нь нэмэгдэхүүн бүрийн интегралын нийлбэр болох тул

$$\int_2^4 \left( \frac{2}{1-3x} + \frac{1}{x+5} \right) dx = \int_2^4 \frac{2}{1-3x} dx + \int_2^4 \frac{1}{x+5} dx = \left[ 2 \cdot \left( -\frac{1}{3} \right) \ln|1-3x| + \ln|x+5| \right]_2^4 = -\frac{2}{3} (\ln 11 - \ln 5) + \ln 9 - \ln 7 = -\frac{2}{3} \ln \left( \frac{11}{5} \right) + \ln \left( \frac{9}{7} \right) \text{ гэж гарна.}$$

**Жишээ 3.**  $\int \left( \frac{2x^3 - 3x^2 + 7}{x} \right) dx$  интеграл бод.

**Бодолт.** Интегралын доорх функц нь зөв биш рационал бутархай функц учир хүртвэрийг хуваарьд хувааж, бүхэл хэсгийг нь олж гурван функцийн нийлбэр болгоно. Интегралын чанар ашиглан нийлбэрийн интегралыг олно.

$$\begin{aligned} \int \left( \frac{2x^3 - 3x^2 + 7}{x} \right) dx &= \int \left( \frac{2x^3}{x} - \frac{3x^2}{x} + \frac{7}{x} \right) dx = \int \left( 2x^2 - 3x + \frac{7}{x} \right) dx \\ &= \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 7 \ln|x| + C. \end{aligned}$$

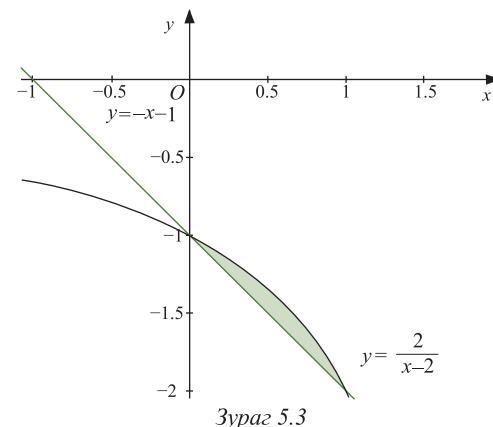
**Жишээ 4.**  $y = \frac{2}{x-2}$ ,  $y = -x-1$  функцийн графикаар хязгаарлагдсан дүрсийн талбайг ол.

**Бодолт.**  $y = \frac{2}{x-2}$ ,  $y = -x-1$  функцийн

графикаар хязгаарлагдсан дүрсийг Зураг 5.3-д харуулав.

Хоёр функцийн графикийн огтлонцлын цэгийн абсциссыг ольё.

Хэрэв  $\frac{2}{x-2} = -x-1$ ,  $x \neq 2$  тэгшитгэлийг бодвол  $x=0$  буюу  $x=1$  болно.



Иймд дүрсийн талбай

$$\int_0^1 \left( \frac{2}{x-2} + x + 1 \right) dx = \left( 2 \ln|x-2| + \frac{x^2}{2} + x \right) \Big|_0^1 = \frac{3}{2} - 2 \ln 2 \text{ (нэгж.кв)}$$

**Жишээ 5.** Уламжлал нь  $\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2x+1}$  байх функц өгөв.

а)  $y$  функцийг ол. б) График нь  $(1,0)$  цэгийг дайрах  $y$  функцийг ол.

**Бодолт.**

а) Уламжлалын урвуу үйлдэл болох интегралыг нь бодвол

$$y = \int \frac{3}{2x+1} dx = \frac{3}{2} \ln|2x+1| + C;$$

б) Өмнө олсон  $y$  функцийн томьёонд  $x=0, y=1$  утга орлуулж  $C$ -ийн утга олно.

$$0 = \frac{3}{2} \ln|2 \cdot 1 + 1| + C, \quad C = -\frac{3}{2} \ln 3$$

Иймд  $y = \frac{3}{2} \ln|2x+1| - \frac{3}{2} \ln 3 = \frac{3}{2} \ln \frac{|2x+1|}{3}$  гэж гарна.

### ДАСГАЛ

**4.** Интеграл бод.

а)  $\int \frac{1}{2x} dx$

б)  $\int \frac{2}{x} dx$

в)  $\int \frac{3}{4x} dx$

г)  $\int \frac{2}{3x-2} dx$

д)  $\int \frac{1}{2x+1} dx$

е)  $\int \frac{3}{5-2x} dx$

ж)  $\int \left( \frac{1}{3x-2} - \frac{2}{5-4x} \right) dx$

ж)  $\int \left( \frac{1}{5x^5} - \frac{2}{1-x} \right) dx$

з)  $\int \left( \frac{4}{(x-3)^3} + \frac{3}{2x+1} \right) dx$

**5.** Тодорхой интеграл бод.

а)  $\int_1^2 \frac{1}{x+3} dx$

б)  $\int_1^2 \frac{1}{2x-1} dx$

в)  $\int_0^1 \frac{1}{2-x} dx$

г)  $\int_4^5 \frac{2}{x-3} dx$

д)  $\int_2^5 \frac{dx}{2x-3}$

е)  $\int_1^e \frac{x^3+x}{x^2} dx$

ж)  $\int_1^2 \frac{e}{ex-7} dx$

ж)  $\int_{-1}^0 \left( 2 + \frac{1}{x-1} \right) dx$

з)  $\int_1^e \frac{x^3-x}{ex^2} dx$

**6.** Интеграл бод.

а)  $\int \left( (x-1)^2 + 3e^{1-2x} \right) dx$

б)  $\int \frac{e^{2x} + e^x - 7}{e^x} dx$

в)  $\int \left( \frac{2}{x} + 3e^x \right) dx$

г)  $\int \frac{4x^3 - 7x + 5}{4x^2} dx$

д)  $\int \frac{1-2x}{2x+1} dx$

е)  $\int \left( 5\sqrt{e^{4x-1}} - \frac{2}{3x-5} \right) dx$

ж)  $\int \left( e^{2x} + \frac{1}{3x+1} \right) dx$

ж)  $\int \left( \sqrt{e^{3x}} - \frac{2}{1-x} \right) dx$

з)  $\int e^{2x} (e^{2x} - 2e^{-2x}) dx$

7.  $y = \frac{1}{x}$  функцийн график,  $y = 0$  шулуун болон дараах шугамаар хязгаарлагдсан дүрсийн талбайг ол.

а)  $x = 3, x = 6$       б)  $x = 4, x = 8$       в)  $x = \frac{1}{2}, x = 1$       г)  $x = a, x = 2a, a > 0$

8.  $\int_6^{16} \frac{6}{2x-7} = \ln 125$  болохыг батал.

9. Дараах шугамаар хязгаарлагдсан дүрсийн талбай ол.

а)  $y = \frac{1}{x+2}, y = 0, x = -1, x = 0$

б)  $y = \frac{1}{2x-1}, y = 0, x = 2, x = 5$

в)  $y = \frac{1}{-x-1}, y = 0, x = -3, x = -2$

г)  $y = 2 + \frac{1}{x-1}, y = 0, x = 2, x = 6$

10.  $y = \frac{3}{2x-1}$  муруй,  $x = 1, x = 4$  шулуун ба  $Ox$  тэнхлэгээр хязгаарлагдсан дүрсийг зурж, талбайг 0.001 нарийвчлалтай тоймлон ол.

11.  $\frac{dy}{dx} = \frac{8}{4x-3}$  байх  $y$  функцийн график  $(1,2)$  цэгийг дайрна.  $y$  функцийг ол.

### Тригонометрийн функцийн интеграл

Тригонометрийн функцийн уламжлал мэдэх тул интегралыг нь олж болно.

Тухайлбал  $y = \sin x$  функцийн уламжлал  $\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$  гэдгээс

$$\int \cos x dx = \sin x + C.$$

$y = \cos x$  функцийн уламжлал  $\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$  гэдгээс

$$\int \sin x dx = -\cos x + C.$$

Мөн  $y = \operatorname{tg} x$  функцийн уламжлал  $\frac{d}{dx}(\operatorname{tg} x) = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$  гэдгээс

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \sec^2 x dx = \operatorname{tg} x + C \text{ болно.}$$

Үүнтэй адил аар уламжлалын чанарыг ашиглавал  $\frac{d}{dx}(k \cdot \sin x) = k \cdot \cos x$  ба

$\frac{d}{dx}(\sin(ax+b)) = a \cdot \cos(ax+b)$  болно. Иймд дифференциалчлахын урвуу үйлдэл

интегралчлах үйлдэл тул  $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$  томьёо ёсоор

$$\int k \cdot \cos x dx = k \cdot \sin x + C \text{ ба } \int \cos(ax+b)dx = \frac{1}{a}\sin(ax+b) + C \text{ болно.}$$

**Жишээ 1.** Интеграл бод. а)  $\int 3\sec^2 x dx$  б)  $\int \sin 4t dt$

**Бодолт.** Дээрх томьёо ёсоор

а)  $\int 3\sec^2 x dx = 3\tg x + C$  б)  $\int \sin 4t dt = -\frac{1}{4}\cos 4t + C$  гэж гарна.

**Жишээ 2.**  $\int_0^{\frac{3\pi}{2}} \frac{1}{\cos^2\left(\frac{2x}{9}\right)} dx$  тодорхой интегралыг бод.

**Бодолт.**  $\int \frac{dx}{\cos^2(ax+b)} = \frac{1}{a}\tg(ax+b) + C$  ашиглай.

$$\int_0^{\frac{3\pi}{2}} \frac{1}{\cos^2\frac{2x}{9}} dx = \frac{9}{2}\tg\frac{2x}{9} \Big|_0^{\frac{3\pi}{2}} = \frac{9}{2} \left( \tg\frac{2 \cdot \frac{3\pi}{2}}{9} - \tg\frac{2 \cdot 0}{9} \right) = \frac{9}{2} \cdot \tg\frac{\pi}{3} = \frac{9}{2}\sqrt{3} \text{ гэж гарна.}$$

**Жишээ 3.**  $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx$  интеграл бод.

**Бодолт.**  $y = \ctgx$  функцийн уламжлал  $\frac{d}{dx}(\ctgx) = -\frac{1}{\sin^2 x} = -\cosec^2 x$  гэдгээс

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = \int \cosec^2 x dx = -\ctgx + C \text{ болно.}$$

**Жишээ 4.**  $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos\left(\frac{2\pi}{3} - 3x\right) dx$  тодорхой интеграл бод.

**Бодолт.**  $\int \cos(ax+b)dx = \frac{1}{a}\sin(ax+b) + C$  томьёо ёсоор

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos\left(\frac{2\pi}{3} - 3x\right) dx = -\frac{1}{3}\sin\left(\frac{2\pi}{3} - 3x\right) \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = -\frac{1}{3} \left( \sin\left(\frac{2\pi}{3} - 3 \cdot \frac{\pi}{3}\right) - \sin\left(\frac{2\pi}{3} - 3 \cdot 0\right) \right) = -\frac{1}{3} \left( \sin\left(-\frac{7\pi}{3}\right) - \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) \right) = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ болно.}$$

**Жишээ 5.**  $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cosec^2 3x dx$  тодорхой интеграл бод.

**Бодолт.** Жишээ 3-ын бодолтыг ашиглан интегралчилъя.

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cosec^2 3x dx = -\frac{1}{3}\ctg 3x \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{3} \left( \ctg\frac{3\pi}{2} - \ctg\frac{\pi}{2} \right) = 0.$$

**Жишээ 6.** Хэрэв  $F'(x) = 2\sin 5x + 3\cos \frac{x}{2}$  функц өгсөн бол  $F\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0$  нөхцөлийг хангах  $F(x)$  функц ол.

**Бодолт.** Интегралчлах ба дифференциалчлах нь харилцан урвуу үйлдэл тул  $\int F'(x)dx = F(x) + C$  болох ба энэ томъёог ашиглаж  $F(x)$  функцийг олно.

Иймд  $F(x) = \int \left(2\sin 5x + 3\cos \frac{x}{2}\right)dx = -\frac{2}{5}\cos 5x + 3 \cdot 2\sin \frac{x}{2} + C$  болно.

Одоо өгсөн нөхцөлийг ашиглай.

$$F\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{2}{5}\cos\left(5 \cdot \frac{\pi}{3}\right) + 3 \cdot 2\sin\frac{\frac{\pi}{3}}{2} + C = 0$$

Эндээс  $C = \frac{14}{5}$  болно. Иймд өгсөн нөхцөлийг хангах  $F(x) = -\frac{2}{5}\cos 5x + 6\sin \frac{x}{2} + \frac{14}{5}$

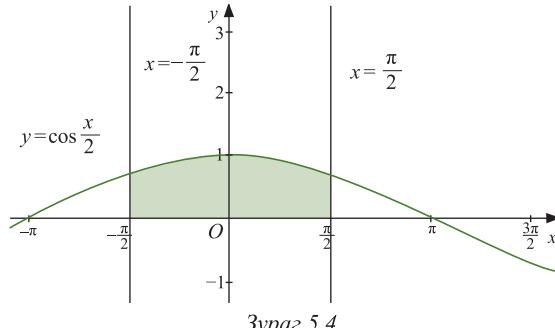
эх функц оллоо.

**Жишээ 7.**  $y = \cos \frac{x}{2}$  функцийн график,  $Ox$  тэнхлэг,  $x = -\frac{\pi}{2}, x = \frac{\pi}{2}$  шугамаар хязгаарлагдсан дүрсийн талбайг ол.

**Бодолт.**  $y = \cos \frac{x}{2}$  функцийн

график,  $Ox$  тэнхлэг,  $x = -\frac{\pi}{2}, x = \frac{\pi}{2}$  шугамаар хязгаарлагдсан дүрсийг зураг 5.4-д харуулав.

Энэ дүрсийн талбай нь  $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \frac{x}{2} dx$



тодорхой интегралтай тэнцүү. Зургаас харахад  $y = \cos \frac{x}{2}$  нь тэгш функц тул график нь  $Oy$  тэнхлэгийн хувьд тэгш хэмтэй байна. Иймд энэ дүрсийн талбайг  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  завсарт олж, хоёр дахин авахад анхны олох дүрсийн талбай гарна.

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \frac{x}{2} dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \frac{x}{2} dx = 2 \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}} \cdot \sin \frac{x}{2} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 4 \sin \frac{\pi}{4} = 2\sqrt{2} \text{ (нэгж кв).}$$

## ДАСГАЛ

12. Интеграл бод.

а)  $\int \sin 7x dx$

б)  $\int 3 \cos 2x dx$

в)  $\int \frac{3}{4 \cos^2 5x} dx$

г)  $\int 4 \sec^2 3x dx$

д)  $\int 3 \sin(1 - 2x) dx$

е)  $\int 5 \cos\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) dx$

ё)  $\int (\cos 3x + 10 \sin 5x) dx$

ж)  $\int (4 \sin 2x - 3 \cos 2x) dx$

з)  $\int \frac{1}{2} \operatorname{cosec}^2(2x) dx$

13. Тодорхой интеграл бод.

а)  $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin 3x dx$

б)  $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{6}} \cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) dx$

в)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) dx$

г)  $\int_0^{\frac{\pi}{8}} \sec^2 2x dx$

д)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\cos^2 2x}$

е)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) dx$

ё)  $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \operatorname{cosec}^2 \frac{x}{2} dx$

ж)  $\int_0^{\pi} (4 - 3 \cos 2x) dx$

з)  $\int_0^{\frac{\pi}{6}} 2 \sec^2\left(\frac{3x}{2}\right) dx$

14. Интеграл бод.

а)  $\int \left( \sin 3x + 3 \cos x - \sin \frac{x}{2} \right) dx$

б)  $\int \left( \frac{e^{2x}}{3} - \sec^2 2x \right) dx$

в)  $\int \left( \frac{2}{x} + 3e^x - \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \right) dx$

г)  $\int \left( \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) + e^{1-2x} \right) dx$

д)  $\int \left( \frac{1}{\sin^2 \frac{x}{3}} + \frac{5}{2x-1} \right) dx$

е)  $\int \left( 5 \cos\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) - \frac{2}{3x-5} \right) dx$

15. а) Хэрэв  $F'(x) = \sin 2x + 3x^2$  функц өгсөн бол  $F(0) = 2$  нөхцөлийг хангах  $F(x)$  функцийг ол.б) Хэрэв  $F'(x) = 1 + x + \cos 2x$  функц өгсөн бол  $F(0) = 1$  нөхцөлийг хангах  $F(x)$  функцийг ол.16. Хэрэв  $f(x) = 3 - \cos(2 - x)$  функцийн график  $M(2; 6)$  цэгийг дайрах бол  $f(x)$ -ийн эх функцийг ол.

17. Тэгшигэл бод.

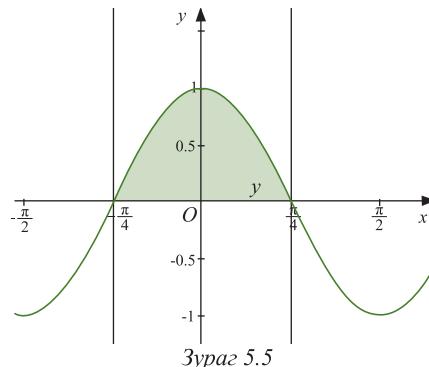
а)  $\int_2^x \frac{dt}{t} = 2$

б)  $\int_0^x e^{2t} dt = 1$

в)  $\int_0^x 2 \cos 3t dt = 0, \quad x \in ]0, \pi]$

18.  $y = \cos 2x$  функцийн график,  $Ox$  тэнхлэг,

$x = -\frac{\pi}{4}$ ,  $x = \frac{\pi}{4}$  шугамаар хязгаарлагдсан дүрсийн талбай ол. (Зураг 5.5)



19.  $y = \sin x$  функцийн графикийн  $[0; \pi]$  завсар дахь дүрсийн талбайг ол.

20.  $y = \cos 2x$  функцийн график,  $x = \frac{\pi}{6}$ ,  $x = \frac{\pi}{4}$  шулуун,  $Ox$  тэнхлэгээр хязгаарлагдсан дүрсийг зурж, талбайг 0.001 нарийвчлалтай тоймлон ол.

## 5.2. РАЦИОНАЛ ФУНКЦИЙН ИНТЕГРАЛ

Бид рационал бутархайг тодорхой бус коэффициентийн аргаар хялбар рационал бутархайн нийлбэрт хэрхэн задлахыг сурсан.

Мөн  $\frac{1}{ax+b}, \frac{1}{(ax+b)^n}$  хялбар рационал функцийн эх функцийг олж чадна.

Тухайлбал,

$$\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln |ax+b| + C \text{ ба } \int \frac{dx}{(ax+b)^n} = \frac{1}{a(1-n)} (ax+b)^{1-n} + C,$$

болно. Энд  $a, b, n, C$  тогтмол тоо байна.

Тодорхой бус коэффициентийн арга ашиглан рационал функцийн интеграл бодохыг жишээгээр харуулъя.

**Жишээ 1.**  $\int \frac{x}{(x-1)(x+2)} dx$  интеграл бод.

**Бодолт.** Тодорхой бус коэффициентийн арга ашиглан  $\frac{x}{(x-1)(x+2)}$  рационал бутархайг хоёр хялбар рационал бутархайн нийлбэр болгоно.

$$\frac{x}{(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} = \frac{A(x+2) + B(x-1)}{(x-1)(x+2)} = \frac{x(A+B) + 2A - B}{(x-1)(x+2)}$$

Эндээс  $A = \frac{1}{3}$ ,  $B = \frac{2}{3}$  гэж гарна.

Иймд өгсөн интеграл

$$\int \frac{x}{(x-1)(x+2)} dx = \int \frac{1}{3(x-1)} dx + \int \frac{2}{3(x+2)} dx = \frac{1}{3} \ln|x-1| + \frac{2}{3} \ln|x+2| + C.$$

**Жишээ 2.**  $\int \frac{x-1}{x^2-x-6} dx$  интеграл бод.

**Бодолт.** Хэрэв бутархайн хуваарийг үржигдэхүүн болгон задалбал  $x^2 - x - 6 = (x+2)(x-3)$  болно.

Иймд хэрэв  $\frac{x-1}{(x+2)(x-3)}$  рационал функцийг тодорхой бус коэффициентийн аргаар хялбар рационал функцийн нийлбэрт задалбал

$$\frac{x-1}{(x+2)(x-3)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-3} = \frac{x(A+B) - 3A + 2B}{(x+2)(x-3)}$$

болно. Эндээс  $B = \frac{2}{5}$ ,  $A = \frac{3}{5}$  гэж гарах тул

$$\frac{x-1}{(x+2)(x-3)} = \frac{\frac{3}{5}}{x+2} + \frac{\frac{2}{5}}{x-3} = \frac{3}{5(x+2)} + \frac{2}{5(x-3)}$$

хоёр хялбар рационал бутархайн нийлбэр болж байна. Өгсөн интеграл

$$\int \left( \frac{x-1}{x^2-x-6} \right) dx = \int \left( \frac{\frac{3}{5}}{x+2} + \frac{\frac{2}{5}}{x-3} \right) dx = \frac{3}{5} \ln|x+2| + \frac{2}{5} \ln|x-3| + C .$$

**Жишээ 3.**  $\int \frac{9x+2}{(x+1)^2} dx$  интеграл бод.

**Бодолт.** Хуваарь нь  $(x+1)^2$  тул

$$\frac{9x+2}{(x+1)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2}$$

гэж хялбар рационал бутархайн нийлбэрт задална. Эндээс  $A = 9$ ,  $B = -7$  гэж гарна.

Иймд

$$\frac{9x+2}{(x+1)^2} = \frac{9}{x+1} + \frac{-7}{(x+1)^2} = \frac{9}{x+1} - \frac{7}{(x+1)^2} \text{ болно.}$$

Өгсөн интеграл

$$\begin{aligned} \int \frac{9x+2}{(x+1)^2} dx &= \int \left( \frac{9}{x+1} - \frac{7}{(x+1)^2} \right) dx = \int \frac{9}{(x+1)} dx - \int \frac{7}{(x+1)^2} dx = \\ &= 9 \ln|x+1| - \frac{7(x+1)^{-2+1}}{-1} = 9 \ln|x+1| + \frac{7}{x+1} + C. \end{aligned}$$

**Жишээ 4.**  $\int \left( \frac{3x^2 + 19x - 32}{(x-1)(x-2)(x+4)} \right) dx$  интеграл бод.

**Бодолт.** Интегралын доорх рационал бутархай функцийг тодорхой бус коэффициентийн аргаар хялбар рационал функцийн нийлбэрт задалъя.

$$\frac{3x^2 + 19x - 32}{(x-1)(x-2)(x+4)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x-2)} + \frac{C}{(x+4)}$$

$$\frac{3x^2 + 19x - 32}{(x-1)(x-2)(x+4)} = \frac{A(x-2)(x+4) + B(x-1)(x+4) + C(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)(x+4)}$$

Иймд  $3x^2 + 19x - 32 = A(x-2)(x+4) + B(x-1)(x+4) + C(x-1)(x-2)$  адилтгал болиенэ. Эндээс  $A = 2$ ,  $B = 3$ ,  $C = -2$  (Энэ сурх бичгийн 32 дугаар нүүрт бодолт нь

байгаа) гэж гарах тул  $\frac{3x^2 + 19x - 32}{(x-1)(x-2)(x+4)} = \frac{2}{x-1} + \frac{3}{x-2} + \frac{-2}{x+4}$  болно.

$$\begin{aligned} \text{Өгсөн интеграл } & \int \left( \frac{3x^2 + 19x - 32}{(x-1)(x-2)(x+4)} \right) dx = \int \left( \frac{2}{(x-1)} + \frac{3}{(x-2)} - \frac{2}{(x+4)} \right) dx = \\ & = \int \frac{2}{(x-1)} dx + \int \frac{3}{(x-2)} dx - \int \frac{2}{(x+4)} dx = 2\ln|x-1| + 3\ln|x-2| - 2\ln|x+4| + C \text{ болно.} \end{aligned}$$

**Жишээ 5.**  $\int \frac{x+2}{(x-2)(x+1)^2} dx$  интеграл бод.

**Бодолт.**  $(x-2)(x+1)^2$  хэлбэрийн хуваарытай рационал функцийг тодорхой бус коэффициентийн аргаар хялбар рационал функцийн нийлбэрт задлахыг сурсан. Иймд

$$\frac{x+2}{(x-2)(x+1)^2} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2} \text{ болно. Эндээс } A = \frac{4}{9}, B = -\frac{4}{9}, C = -\frac{1}{3} \text{ гэж}$$

гарна. Өгсөн функцээ

$$\frac{x+2}{(x-2)(x+1)^2} = \frac{4}{9(x-2)} - \frac{4}{9(x+1)} - \frac{1}{3(x+1)^2}$$

гэсэн гурван хялбар рационал функцийн нийлбэрт задаллаа.

Одоо өгсөн интеграл

$$\begin{aligned} \int \frac{x+2}{(x-2)(x+1)^2} dx &= \int \left( \frac{4}{9(x-2)} - \frac{4}{9(x+1)} - \frac{1}{3(x+1)^2} \right) dx = \frac{4}{9} \ln|x-2| - \frac{4}{9} \ln|x+1| - \\ & 1 \frac{(x+1)^{-2+1}}{-2+1} + C = \frac{4}{9} \ln \left| \frac{x-2}{x+1} \right| + \frac{1}{3(x+1)} + C \text{ болно.} \end{aligned}$$

**Жишээ 6.**  $\int_0^1 \frac{x^2}{x^2 + x - 6} dx$  тодорхой интеграл бод.

**Бодолт.** Интегралын доорх функц зөв биш рационал бутархай тул бүхэл хэсгийг нь ялгаж, олон гишүүнт ба зөв рационал бутархайн нийлбэр болгоё.

$$\frac{x^2}{x^2 + x - 6} = \frac{x^2 + x - 6 - x + 6}{x^2 + x - 6} = 1 - \frac{x - 6}{(x - 2)(x + 3)}$$

$\frac{x - 6}{(x - 2)(x + 3)}$  нь зөв рационал бутархай тул тодорхой бус коэффициентийн аргаар задалъя.

$$\frac{x - 6}{(x - 2)(x + 3)} = \frac{A}{(x - 2)} + \frac{B}{(x + 3)}$$

Эндээс  $B = \frac{9}{5}$ ,  $A = -\frac{4}{5}$  гэж гарна.

Иймд өгсөн интеграл

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x^2}{x^2 + x - 6} dx &= \int_0^1 \left( 1 - \frac{x - 6}{(x - 2)(x + 3)} \right) dx = x - \int_0^1 \left( \frac{-\frac{4}{5}}{x - 2} + \frac{\frac{9}{5}}{x + 3} \right) dx = \\ &1 - \left( -\frac{4}{5} \ln|x - 2| + \frac{9}{5} \ln|x + 3| \right) \Big|_0^1 = 1 - \frac{22}{5} \ln 2 + \frac{9}{5} \ln 3 \text{ болно.} \end{aligned}$$

**Жишээ 7.** Хэрэв  $f'(x) = \frac{1}{x^2 - 5x + 6}$ ,  $f(4) = -\ln 2$  бол  $f(x)$  функцийг ол.

**Бодолт.**  $f'(x) = \frac{1}{x^2 - 5x + 6}$  гэж өгсөн тул

$f(x) = \int \frac{1}{x^2 - 5x + 6} dx = \int \left( \frac{1}{x - 3} + \frac{1}{x - 2} \right) dx = \ln \left| \frac{x - 3}{x - 2} \right| + C$  гарах ба өгсөн нөхцөлийг тооцвол  $f(4) = \ln \left| \frac{4 - 3}{4 - 2} \right| + C = -\ln 2$  болно. Эндээс  $C = 0$  гэж гарна.

Иймд  $f(x) = \ln \left| \frac{x - 3}{x - 2} \right|$ .

### ДАСГАЛ

**21.** Дараах бутархай рационал функцийн интеграл бод.

a)  $\int \frac{2}{x(x+2)} dx$

б)  $\int \frac{2x}{(x-1)(x+2)} dx$

в)  $\int \frac{x-3}{(x-1)(x+2)} dx$

г)  $\int \frac{1-x}{(x-2)(x-3)} dx$

д)  $\int \frac{x+3}{(x-3)(x+2)} dx$

е)  $\int \frac{x-1}{x^2+2x} dx$

ë)  $\int \frac{3x}{x^2 - 4} dx$

ж)  $\int \frac{2}{x^2 - 1} dx$

3)  $\int \frac{5}{(x^2 - 4)x} dx$

и)  $\int \frac{2x + 3}{(x-1)^2} dx$

к)  $\int \frac{x}{(x-3)^2} dx$

л)  $\int \frac{-3x^2 + x + 19}{(x-4)(x+1)(x-2)} dx$

**22.** Интеграл бод.

а)  $\int \frac{x}{x^2 - 4x - 5} dx$

б)  $\int \frac{2}{x^2 + x - 6} dx$

в)  $\int \frac{2x - 3}{x^2 - 3x + 2} dx$

г)  $\int \frac{x - 1}{x^2 - 5x + 6} dx$

д)  $\int \frac{x + 3}{2x^2 - 3x + 1} dx$

е)  $\int \frac{2x - 3}{x^3 - x^2} dx$

**23.** Интеграл доорх бутархайн бүхэл хэсгийг ялган түүнийг бод.

а)  $\int \frac{x}{x+5} dx$

б)  $\int \frac{x}{2x+3} dx$

в)  $\int \frac{2+x}{2-x} dx$

г)  $\int \frac{3x-1}{x-2} dx$

д)  $\int \frac{x+1}{2x+1} dx;$

е)  $\int \frac{(1+x)^2}{x^2+1} dx$

ë)  $\int \frac{2x^2 - 11}{x^2 + x - 6} dx$

ж)  $\int \frac{4x^3}{x^2 - 1} dx$

з)  $\int \frac{x^2}{x^2 - 4} dx$

**24.** Тодорхой интегралыг бод.

а)  $\int_1^2 \frac{x}{(2x-1)(x+1)} dx$

б)  $\int_0^1 \frac{2x}{(x-3)(x+1)} dx$

в)  $\int_3^4 \frac{x}{x^2 - 4} dx$

г)  $\int_1^2 \frac{x+1}{x(x+4)} dx$

д)  $\int_0^1 \frac{x}{x^2 - 4x - 5} dx$

е)  $\int_{-1}^1 \frac{5}{x^2 + x - 6} dx$

ë)  $\int_0^1 \frac{2x^2 - 11}{x^2 + x - 6} dx$

ж)  $\int_{-1}^1 \frac{4}{x^2 - 4} dx$

з)  $\int_0^1 \frac{4x}{x^2 - 5x + 6} dx$

**25.** Хэрэв  $f'(x) = \frac{5}{x^2 - x - 6}$ ,  $f(2) = -\ln 4$  бол  $f(x)$  функцийг ол.**26.**  $y = \frac{2}{x^2 - 1}$  функцийн график,  $Ox$  тэнхлэг,  $x = 0$ ,  $x = 3$  шугамаар хязгаарлагдсан дүрсийн талбайг ол.

### 5.3. $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx$ ХЭЛБЭРИЙН ИНТЕГРАЛ БОДОХ

$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$  (1) байдгийг бид мэднэ. Энд хэрэв  $x > 0$  байвал  $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$  гэж бичиж болно.

Энэ (1) томьёог хэрэглэх хэдэн хялбар жишээ авч үзье.

**Жишээ 1.**  $\int \frac{3}{2x} dx = \frac{3}{2} \int \frac{1}{x} dx = \frac{3}{2} \ln|x| + C$ . (Тогтмол тоон үржигдэхүүнийг интегралын тэмдгийн өмнө гаргаж болно)

**Жишээ 2.**  $\int \frac{2}{3x+1} dx = 2 \int \frac{1}{3x+1} dx = 2 \cdot \frac{1}{3} \ln|3x+1| + C = \frac{2}{3} \ln|3x+1| + C$ .

(Хэрэв  $\int f(x) dx = F(x) + C$  бол  $\int f(kx+b) dx = \frac{1}{k} F(kx+b) + C$  байна.)

**Жишээ 3.**

$$\int \frac{3x}{x+1} dx = \int \frac{3x+3-3}{x+1} dx = \int \frac{3(x+1)-3}{x+1} dx = \int \left( 3 - \frac{3}{x+1} \right) dx = 3x - 3 \ln|x+1| + C$$

**Бодлого.**  $\int \frac{2x}{x^2+1} dx$  тодорхойгүй интегралыг бод.

Энэ бодлогыг өмнө судалсан рационал бутархайг интегралчлах аргаар бодож болохгүй. Рационал бутархайг интегралчлахад хэрэв интегралын доорх функц нь  $\frac{f'(x)}{f(x)}$  хэлбэртэй байвал  $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$  томьёо руу шилжүүлэн бodoх боломжийг дараах теорем олгоно.

**Теорем.**  $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C$  байна. (2)

**Баталгаа.** Хэрвээ  $y = \ln f(x)$  функц өгсөн байвал давхар функцийн уламжлал олох томьёо ёсоор  $y' = (\ln f(x))' = \frac{f'(x)}{f(x)}$  гэж гарна. Интеграл нь уламжлалын

урвуу үйлдэл тул  $f(x) > 0$  үед  $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln f(x) + C$ ,

$f(x) < 0$  үед  $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln(-f(x)) + C$  гэж гарна.

Энэ хоёр тохиолдлыг нэгтгэн  $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C$  гэж бичиж болно.

Тэгвэл дээрх бодлогын хувьд  $(x^2 + 1)' = 2x$  байгаа тул теорем ёсоор

$\int \frac{2x}{x^2+1} dx = \ln(x^2+1) + C$  болно. Энд  $x^2 + 1 > 0$  тул  $|x^2 + 1| = x^2 + 1$  юм.

### Функцийн дифференциал

Бид функцийн уламжлалыг  $y' = \frac{dy}{dx}$  гэж тэмдэглэдгийг мэднэ. Үүнийг  $dy = y' dx$  гэж бичиж болдог. Үүнийг интеграл, дифференциал тэгшитгэл бодоход олонтоо ашиглах болно.  $y = f(x)$  функцийн хувьд энэ бичиглэл  $df(x) = f'(x)dx$  (3)

хэлбэртэй болно.  $df(x)$ -ийг  $f(x)$  **функцийн дифференциал** гэх бөгөөд (3) томьёонос харвал функцийн дифференциал нь функцийн уламжлалыг  $dx$ -ээр үржүүлсэнтэй тэнцүү байна. Дээрх (2) томьёо нь функцийн дифференциалын тодорхойлолт ёсоор  $f'(x)dx = df(x)$  байх тул

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int \frac{1}{f(x)} df(x) = \ln|f(x)| + C$$

хэлбэртэй болно. Энэ нь (2) томьёоны бас нэг баталгаа юм.

**Жишээ 1.**  $\int \frac{1}{x+3} dx$  интегралыг бод.

**Бодолт.** Функцийн дифференциалын тодорхойлолт ёсоор  $dx = d(x+3)$  тул

$$\int \frac{1}{x+3} dx = \int \frac{1}{x+3} d(x+3) \text{ гэж бичиж болох ба } t = x+3 \text{ гэсэн орлуулга хийвэл}$$

$$\int \frac{1}{t} dt = \ln|t| + C \text{ болно. Орлуулгаа буцаавал } \int \frac{1}{x+3} dx = \ln|x+3| + C \text{ гэж гарна.}$$

**Жишээ 2.**  $\int \frac{3dx}{3x-2}$  интегралыг бод.

**Бодолт.**  $y = \ln(3x-2)$  функцийн уламжлал ольё. Давхар функцийн уламжлал

$$\text{олох } \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} \text{ томьёо ашиглай. Хэрэв } t = 3x - 2 \text{ орлуулга хийвэл } y = \ln t \text{ болох}$$

$$\text{ба } \frac{dy}{dt} = \frac{1}{t} = \frac{1}{3x-2}, \frac{dt}{dx} = 3 \text{ гэж тус тус гарах тул } \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{1}{3x-2} \cdot 3 = \frac{3}{3x-2}$$

болно. Эндээс  $\int \frac{3}{3x-2} dx = \ln|3x-2| + C$  болно. Энэ үр дүнг ерөнхийлөн дараах дүгнэлт хийж болно.

**Дүгнэлт.** Хэрвээ  $y = \ln f(x)$  гэж өгсөн байвал  $\frac{dy}{dx} = \frac{f'(x)}{f(x)}$  тул урвуугаар

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C \text{ гэж гарна.}$$

**Жишээ 3.**  $\int \frac{12dx}{3x-2}$  интегралыг бод.

**Бодолт.**  $y = 4 \ln(3x-2)$  функцийн уламжлал нь

$$\frac{dy}{dx} = 4 \cdot \frac{3}{3x-2} \text{ гэж гарах тул } \int 4 \cdot \frac{3}{3x-2} dx = 4 \int \frac{3}{3x-2} dx = 4 \ln|3x-2| + C \text{ байна.}$$

Иймд өмнөхөөс гадна дараах ерөнхий дүгнэлт хийж болно.

**Дүгнэлт**

Хэрвээ  $y = k \ln f(x)$  бол  $\frac{dy}{dx} = k \cdot \frac{f'(x)}{f(x)}$  тул урвуугаар

$\int k \cdot \frac{f'(x)}{f(x)} dx = k \ln|f(x)| + C$  гэж гарна. Энд  $k$  тогтмол тоо.

**ДАСГАЛ**

27. Интегралыг  $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C$  томьёо ашиглан бод

a)  $\int \frac{4}{x} dx$       б)  $\int \frac{3}{3x-4} dx$       в)  $3 \int \frac{2x}{x^2-5} dx$       г)  $\int \frac{6x^2}{2x^3-1} dx$

д)  $\int 5 \cdot \frac{4x+1}{2x^2+x+1} dx$       е)  $\int \frac{8x^2}{2x^3+1} dx$       ё)  $\int \frac{x-4}{x^2-8x+17} dx$       ж)  $\int \frac{x-\frac{1}{2}}{x^2-x+1} dx$

з)  $\int \frac{3x+1}{x^2+\frac{2}{3}x} dx$       и)  $\int \frac{8x+2}{2x^2+x-5} dx$       к)  $\int \frac{3y^2+2y}{y^3+y^2} dy$       л)  $\int \frac{3t^3}{4t^4} dt$

28. Олон гишүүнтний хуваах үйлдэл ашиглан бүхэл хэсгийг ялгаж интегралыг бод.

a)  $\int \frac{3x^2+17x+5}{x^2+5x} dx$       б)  $\int \frac{3x^2-4x-2}{x^2-2x} dx$       в)  $\int \frac{x^4+x^3+3x^2+2x}{x^3+x^2} dx$   
 г)  $\int \frac{x^3+x}{x^2-1} dx$       д)  $\int \frac{(x+1)^2}{x^2+1} dx$       е)  $\int \frac{x^2+2x-4}{x^2-4} dx$

29. Интегралыг зөв хариутай нь сумаар холбоорой. Жишээ болгон нэгийг холбож үзүүллээ.

I.  $\int \frac{2x}{x^2+4} dx$

II.  $\int \frac{x-1}{x^2-2x} dx$

III.  $\int \left( \frac{x}{x^2} + \frac{1}{2x} \right) dx$

IV.  $\int \frac{x+4}{x^2+8x} dx$

a.  $\frac{1}{2} \ln|x^2 - 2x| + C$

б.  $\frac{1}{2} \ln|x^2 + 2x| + C$

в.  $\ln(x^2 + 4) + C$

г.  $\frac{1}{2} \ln|x^2 + 8x| + C$

30. Бодлогын бодолтын бичлэг дэх  $\boxed{\phantom{0}}$  дотор байх илэрхийллийг нөхөж бич.

**Бодлого.**  $\int \frac{-6x}{x^2+4} dx$  интеграл бод.

**Бодолт.**  $(x^2+4)' = \boxed{\phantom{0}}x$  учраас

$\int \frac{-6x}{x^2+4} dx = \int \frac{-3 \cdot \boxed{\phantom{0}}x}{x^2+4} dx = -3 \int \frac{\boxed{\phantom{0}}}{x^2+4} dx = -3 \ln|x^2+4| + C$  болно.  $x^2+4 > 0$  тул

$|x^2 + 4| = x^2 + \square$ . Иймд  $\int \frac{-6x}{x^2 + 4} dx = \square \ln(x^2 + 4) + C$  гэж гарна.

**31.** Хосоор ажиллаж, дараах бодлогын бодолтын алдааг олоорой.

**Бодлого.**  $\int \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x} dx$  интегралыг бод.

**Бодолт.**  $(\sin x + \cos x)' = \cos x - \sin x$  тул  $\int \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x} dx = \ln|\cos x - \sin x| + C$ .

**32.**  $\int \frac{5x}{2x^2 - 2} dx$  тодорхойгүй интегралын хоёр өөр бодолтыг харьцуулж дүгнэлт гаргаарай.

Нэгдүгээр бодолт.  $\int \frac{5x}{2x^2 - 2} dx = \frac{5}{2} \int \frac{x}{x^2 - 1} dx$  болох тул  $\frac{x}{x^2 - 1}$  бутархайг хялбар бутархайнуудын нийлбэрт тодорхойгүй коэффициентийн аргаар задалъя.

$\frac{x}{x^2 - 1} = \frac{x}{(x+1)(x-1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1}$  хэлбэртэй задрах ёстой. Хуваариас чөлөөлбөл

$x = A(x-1) + B(x+1)$  болох ба эндээс  $x = (A+B)x + B - A$  гэж гарна. Олон

гишүүнтнийн тэнцэх нөхцөлөөс  $\begin{cases} A + B = 1 \\ B - A = 0 \end{cases}$  тэгшигтгэлийн систем гарах ба эндээс

$A = \frac{1}{2}$ ,  $B = \frac{1}{2}$  гэж олдоно. Иймд  $\frac{x}{x^2 - 1} = \frac{1}{2(x+1)} + \frac{1}{2(x-1)}$  болов. Ийнхүү

$$\int \frac{5x}{2x^2 - 2} dx = \frac{5}{2} \int \frac{x}{x^2 - 1} dx = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{2} \int \left( \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1} \right) dx = \frac{5}{4} (\ln|x+1| + \ln|x-1|) + C$$

$$= \frac{5}{4} \ln|x^2 - 1| + C.$$

Хоёр дугаар бодолт.  $\int \frac{5x}{2x^2 - 2} dx = \frac{5}{4} \int \frac{2x}{x^2 - 1} dx = \frac{5}{4} \int \frac{(x^2 - 1)'}{x^2 - 1} dx = \frac{5}{4} \ln|x^2 - 1| + C$ .

**33.** Дараах интегралыг хэрхэн бодох талаар таамаглал дэвшиүүлж, багаар ажиллаж бодоорой.

а)  $\int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} dx$       б)  $\int \operatorname{tg} x dx$       в)  $\int \operatorname{ctg} x dx$       г)  $\int \operatorname{tg} 2x dx$

**34.** Тодорхойгүй интегралыг бод

а)  $\int \frac{\cos x}{2 + \sin x} dx$       б)  $\int \frac{x^2}{x^3 + 5} dx$       в)  $3 \int \frac{e^x}{6 + e^x} dx$       г)  $\int \frac{3e^{2x}}{7 - e^{2x}} dx$

**35.** Багаар ажиллах дадлага ажил.

$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C$  томьёог ашиглан бодох жишээ хоёрыг өөрсдөө

зохиогоод бусад багуудаараа бодуулж, үнэлгээ өгөөрэй. Үнэлгээ өгөх шалгуурыг багаараа хэлэлцэн боловсруулна. Тухайлбал, ямар үед бүтэн 5 оноо

өгөх, ямар үед 1 оноо өгөх гэх мэтээр эхлээд тохиролцсон байна.

**36.** Тодорхойгүй интеграл бод

$$\text{а)} \int \frac{\cos x}{\sin x + 1} dx \quad \text{б)} \int \frac{\cos^2 x}{\operatorname{ctg} x} dx \quad \text{в)} \int \frac{e^x + 2e^{-2x}}{e^x - e^{-2x}} dx \quad \text{г)} \int \operatorname{tg} 3x dx$$

### 5.4. $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C$ ТОМЬЁО АШИГЛАН ТОДОРХОЙ ИНТЕГРАЛ БОДОХ

$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C$  томьёо нь тодорхой интегралын хувьд дараах хэлбэртэй

болно.

$$\int_a^b \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| \Big|_a^b = \ln|f(b)| - \ln|f(a)|.$$

**Жишээ 1.** Тодорхой интегралыг бод  $\int_2^3 \frac{2x}{x^2 + 1} dx$

**Бодолт.**  $(x^2 + 1)' = 2x$  тул  $\int_2^3 \frac{2x}{x^2 + 1} dx = \ln(x^2 + 1) \Big|_2^3 = \ln 10 - \ln 5 = \ln 2.$

**Жишээ 2.**  $\int_1^2 \frac{4}{4x + 3} dx$  тодорхой интегралыг бодож, хариуг 0.01 нарийвчлалтай тоймло.

**Бодолт.**  $\int_1^2 \frac{4}{4x + 3} dx = \ln|4x + 3| \Big|_1^2 = \ln 11 - \ln 7 = \ln \frac{11}{7} \approx 0.19629 \approx 0.20.$

**Жишээ 3.**  $\int_0^1 \frac{x + \frac{1}{2}}{x^2 + x + 1} dx$  тодорхой интегралыг бод.

**Бодолт.**  $\int_0^1 \frac{x + \frac{1}{2}}{x^2 + x + 1} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2 + x + 1) \Big|_0^1 = \frac{1}{2} (\ln 3 - \ln 1) = \frac{1}{2} \ln 3.$

**Жишээ 4.**

а)  $y = \operatorname{tg} x$  функцийн графикийг  $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$  завсарт байгуул

б)  $y = \operatorname{tg} x$  функцийн график,  $x = \frac{\pi}{4}$  шулуун,  $Ox$  тэнхлэгээр хязгаарлагдсан

дүрсийн талбайг 0.01 нарийвчлалтай тоймлон олоорой.

в)  $y = \operatorname{tg} x$  функцийн график,  $x = -\frac{\pi}{4}$ ,  $x = -\frac{\pi}{6}$  шулуун,  $Ox$  тэнхлэгээр

хязгаарлагдсан дүрс зурж талбайг 0.001 нарийвчлалтай тоймлон ол.

**Бодолт.**

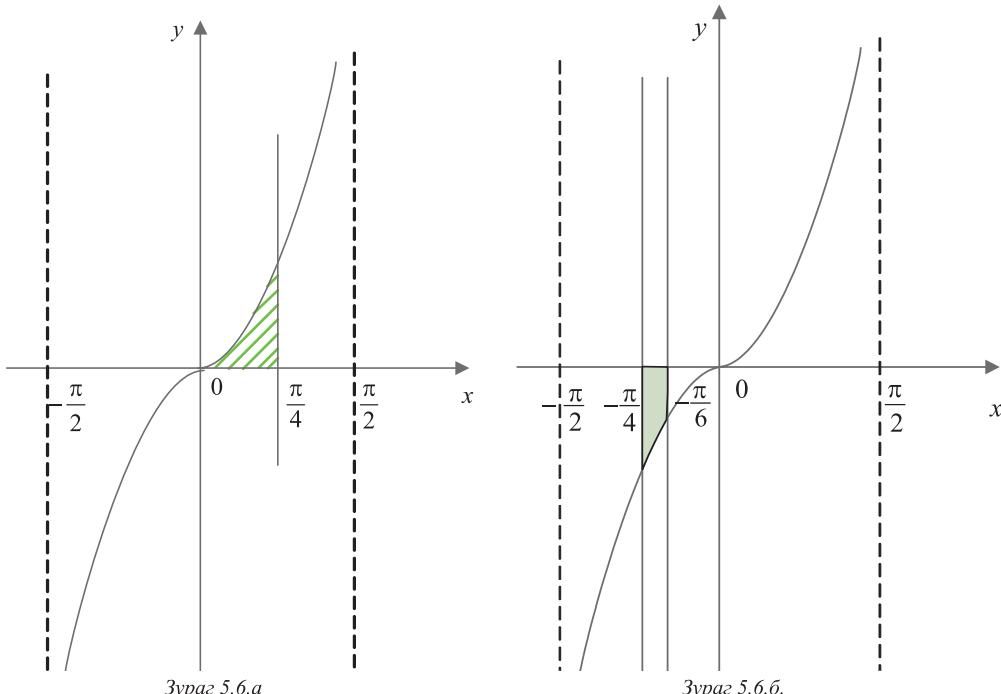
а)  $y = \operatorname{tg}x$  функцийн графикийг Зураг 5.6.а-д үзүүлэв.

б) Талбайг нь олох дүрсийг мөн Зураг 5.6.а-д үзүүлэв.

Энэ дүрсийн талбай нь

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}x dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(\cos x)'}{\cos x} dx = -\ln|\cos x| \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \\ &= -\left( \ln \cos \frac{\pi}{4} - \ln \cos 0 \right) = -\left( \ln \frac{1}{\sqrt{2}} - \ln 1 \right) = -\ln(\sqrt{2})^{-1} = \ln \sqrt{2} \approx 0.35 \end{aligned}$$

в) I арга. Талбайг нь олох дүрсийг Зураг 5.6.б-д үзүүлэв.



Талбайг нь олох муруй шугаман трапец нь  $Ox$  тэнхлэгийн доор байрлажээ. 11 дүгээр ангид судалсан тодорхой интегралын чанарыг эргэн саная.

Хэрэв  $y = f(x)$  функцийн график  $[a, b]$  завсарт  $Ox$  тэнхлэгийн доор оршиж байвал энэ функцийн график ба  $x = a, x = b$  шулууун,  $Ox$  тэнхлэгээр хязгаарлагдсан муруй шугаман трапецын талбай

$$S = -\int_a^b f(x) dx \text{ байна.}$$

Иймд энэ чанарыг ашиглан талбайг нь ольё.

$$\begin{aligned} S &= - \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{6}} \operatorname{tg} x dx = (\ln |\cos x|) \Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{6}} = \ln \left| \cos \left( -\frac{\pi}{6} \right) \right| - \ln \left| \cos \left( -\frac{\pi}{4} \right) \right| = \\ &= \ln \left| -\frac{\sqrt{3}}{2} \right| - \ln \left| -\frac{\sqrt{2}}{2} \right| = \ln \frac{\sqrt{3}}{2} - \ln \frac{\sqrt{2}}{2} = \ln \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \ln \sqrt{\frac{3}{2}} = 0.203. \end{aligned}$$

II арга.  $S = - \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{6}} \operatorname{tg} x dx$  интегралыг мөн 11 дүгээр ангид судалсан интегралын

(4) чанарыг ашиглан бодож болно.

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= - \int_b^a f(x) dx \quad (4) \\ S &= - \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{6}} \operatorname{tg} x dx = (-\ln |\cos x|) \Big|_{-\frac{\pi}{6}}^{-\frac{\pi}{4}} = - \left( \ln \left| \cos \left( -\frac{\pi}{4} \right) \right| - \ln \left| \cos \left( -\frac{\pi}{6} \right) \right| \right) = \\ &\ln \left| -\frac{\sqrt{3}}{2} \right| - \ln \left| -\frac{\sqrt{2}}{2} \right| = \ln \frac{\sqrt{3}}{2} - \ln \frac{\sqrt{2}}{2} = \ln \sqrt{\frac{3}{2}} \approx 0.203. \end{aligned}$$

### Жишээ 5.

a)  $f(x) = \frac{2x}{x^2 - 1}$  функцийг уламжлал ашиглан шинжилж, графикийг байгуул.

Хэвтээ ба босоо асимптотыг олж, зур.

б)  $f(x) = \frac{2x}{x^2 - 1}$  функцийн график ба  $x = 2, x = 3$  шулуун,  $Ox$  тэнхлэгээр хязгаарлагдсан дүрсийн талбайг ол.

**Бодолт.** а. Функцийн графикийг байгуулья.

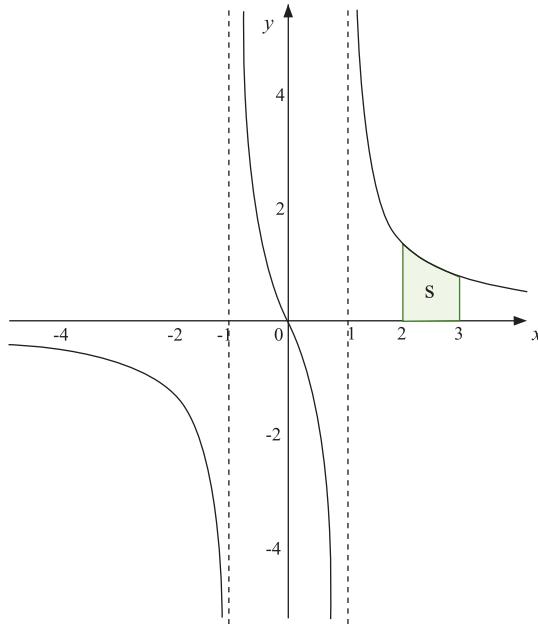
I. Функц  $x^2 - 1 = 0$  буюу  $x = \pm 1$  үед утгагүй. Иймд функцийн тодорхойлогдох муж нь  $]-\infty; -1[ \cup ]-1; 1[ \cup ]1; \infty[$  гэж гарна.

II.  $f(-x) = \frac{2(-x)}{(-x)^2 - 1} = -\frac{2x}{x^2 - 1} = -f(x)$  тул сондгой функц. Иймд график нь координатын эхийн хувьд тэгш хэмтэй байна.

III.  $f(x) = \frac{2x}{x^2 - 1} = 0$  гэдгээс  $2x = 0$  буюу  $x = 0$ . Мөн  $x = 0$  үед  $f(0) = 0$  тул функцийн график  $(0, 0)$  цэгийг дайрна.

IV.  $f'(x) = \frac{2(x^2 - 1) - 2x \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{-2(x^2 + 1)}{(x^2 - 1)^2} \neq 0$  тул функц сэжигтэй цэггүй. Энд  $x^2 + 1 > 0$ .

- V.  $f'(x) < 0$  тул функц тодорхойлогдох муж дээрээ буурна. Экстремумын цэгтэй.
- VI. Хэвтээ ба босоо асимптот.  $x^2 - 1 = 0$  тэгшитгэлээс  $x = \pm 1$  гэж гарах тул  $x = 1, x = -1$  гэсэн хоёр босоо асимптоттой. Хүртвэр дэх олон гишүүтийн зэрэг нь хуваар дахь олон гишүүнтийн зэргээс бага тул  $y = 0$  шулуун хэвтээ асимптот болно.
- VII. Дээрх үр дүнгүүдэд үндэслэн графикийг тоймлон зурвал (Асимптотуудын хооронд нэмэлт нэгээс хоёр цэг олж тэмдэглэнэ.) дараах график гарна (Зураг 5.7 үз).



Зураг 5.7

- б. Талбайг нь олох муруй шугаман трапецыг Зураг 5.7-д ногоон өнгөөр будаж үзүүлэв.

$$(x^2 - 1)' = 2x \text{ учраас талбай нь } S = \int_{-2}^3 \frac{2x}{x^2 - 1} dx = \ln|x^2 - 1| \Big|_2^3 = \ln 8 - \ln 3 = \ln \frac{8}{3} \approx 0.98.$$

**Жишээ 6.**  $\int_{-1}^1 \frac{e^x}{6 + e^x} dx$  тодорхой интегралыг бод.

$$\text{Бодолт. } (6 + e^x)' = e^x \text{ тул } \int_{-1}^0 \frac{e^x}{e^x + 2} dx = \left[ \ln(e^x + 2) \right]_{-1}^0 = \left( \ln(1 + 2) - \ln\left(\frac{1}{e} + 2\right) \right) = \ln \frac{3e}{2e + 1}$$

## ДАСГАЛ

- 37.** Тодорхой интегралыг бод.

$$\text{а)} \int_0^1 \frac{2x}{x^2 + 1} dx \quad \text{б)} \int_1^2 \frac{3}{3x - 1} dx \quad \text{в)} \int_1^3 \frac{x + 1}{x^2 + 2x} dx \quad \text{г)} \int_1^2 \frac{6x^2}{2x^3 - 1} dx$$

38. Тодорхой интегралыг 0.01 нарийвчлалтай бод.

$$\text{а)} \int_{-1}^1 \frac{4x+1}{2x^2+x+1} dx \quad \text{б)} \int_4^5 \frac{x-4}{x^2-8x+17} dx \quad \text{в)} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x-\frac{1}{2}}{x^2-x+1} dx \quad \text{г)} \int_1^2 \frac{12x^2}{2x^3+1} dx$$

39. Тодорхой интегралыг бод.

$$\text{а)} \int_0^{\pi} \frac{\cos x}{3+\sin x} dx \quad \text{б)} \int_0^1 \frac{2e^{2x}}{7+e^{2x}} dx \quad \text{в)} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{2\sin x \cos x}{\cos^2 x} dx \quad \text{г)} \int_1^2 \frac{4e^{2x}}{1+e^{2x}} dx$$

40.  $y = \operatorname{tg} x$  функцийн график,  $x = \frac{\pi}{6}$ ,  $x = \frac{\pi}{3}$  шулуун,  $Ox$  тэнхлэгээр хязгаарлагдсан муруй шугаман трапец зурж, талбайг 0.001 нарийвчлалтай тоймлон ол.

41. а)  $f(x) = \frac{2x}{x^2 - 4}$  функцийг уламжлал ашиглан шинжилж, графикийг байгуул.

Хэвтээ ба босоо асимптотыг олж, зур.

б)  $f(x) = \frac{2x}{x^2 - 4}$  функцийн график,  $x = 3, x = 4$  шулуун,  $Ox$  тэнхлэгээр хязгаарлагдсан дурсийн талбайг ол.

в)  $f(x) = \frac{2x}{x^2 - 4}$  функцийн график,  $x = 1$  шулуун,  $Ox, Oy$  тэнхлэгээр хязгаарлагдсан дурсийн талбайг ол.

42. Хэрэв  $\int_0^k \frac{2x}{x^2 + 4} dx = 3$  бол  $k$ -ийн утгыг 0.01 нарийвчлалтай олоорой. ( $k > 0$ )

## 5.5. ОРЛУУЛАХ АРГААР ТОДОРХОЙ БОЛОН ТОДОРХОЙ БУС ИНТЕГРАЛЫГ ХЯЛБАР ИНТЕГРАЛД ШИЛЖҮҮЛЭН БОДОХ

$\int \frac{1}{x + \sqrt{x}} dx$  интегралыг хэрхэн бodoх талаар асуудал дэвшүүлье.

Өмнө судалсан аргуудаар дээрх интегралыг бodoх боломжгүй юм.

Тэгвэл  $x$ -ээс хамаарсан илэрхийллийг шинэ хувьсагчаар илэрхийлснээр өгсөн интегралыг бодож болдог. Интегралыг  $\int \frac{1}{x + \sqrt{x}} dx = F(x)$  гэж тэмдэглэе.

Интегралчлах ба уламжлал авах нь харилцан урвуу үйлдэл тул  $F'(x) = \frac{1}{x + \sqrt{x}}$

болно. Энэ функц нь квадрат язгуур агуулж байна. Иймд  $x = u^2$  орлуулга хийе.

Тэгвэл  $F(x)$  нь давхар функц болох ба давхар функцээс уламжлал авах дурмээр

$$F'(x) = \frac{dF}{dx} = \frac{dF}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{u^2 + u} \cdot 2u = \frac{2}{u + 1} \text{ гэж гарна.}$$

$F(x)$ -ийн уламжлал нь  $u$  хувьсагчаас хамаарсан, өмнөхөөс хялбар функц гарсан байна. Эндээс  $F(x)$ -ийг  $u$ -аар интеграл авч олж чадна.

$$F(u) = \int \frac{2}{u+1} du = 2 \ln|u+1| + C$$

$u$  хувьсагчийн оронд  $\sqrt{x}$ -ийг орлуулж анхны интегралыг олно.

$$F(x) = \int \frac{1}{x+\sqrt{x}} dx = 2 \ln(\sqrt{x}+1) + C$$

( $\sqrt{x}+1 > 0$  тул модулын тэмдэг шаардлагагүй).

Дээрх аргыг интегралыг бодох орлуулах арга гэнэ.

Ерөнхий тохиолдолд:

$F(x) = \int f(x) dx$  интегралыг бодохын тулд  $F'(x) = \frac{dF}{dx} = f(x)$  тэгшигтгэлд  $x = g(u)$  орлуулга хийе.  $f$  нь давхар функц болно. Тэгвэл давхар функцээс уламжлал авах дүрмээр  $\frac{dF}{du} = \frac{dF}{dx} \cdot \frac{dx}{du} = f(x) \cdot \frac{dx}{du} = f(g(u)) \cdot \frac{dx}{du} = h(u) \cdot \frac{dx}{du}$  гэж гарна. Энд  $f(g(u)) = h(u)$  давхар функц.  $\int h(u) \cdot \frac{dx}{du}$  интегралыг бодож,  $u$  хувьсагчийн оронд  $g^{-1}(x)$  гэж орлуулж  $F(x)$ -ийг олно.

### Дүгнэлт

$x = g(u)$  ба  $f(g(u)) = h(u)$  орлуулгаар  $\int f(x) dx$  интеграл нь түүнтэй тэнцүү  $\int h(u) \cdot \frac{dx}{du} du$  хялбар интегралд шилжих ба дараа нь  $u$  хувьсагчийн оронд  $g^{-1}(x)$  орлуулж анхны интегралыг олно.

Тодорхойгүй интегралд хувьсагчийг солихдоо 2 аргаар орлуулга хийдэг.

- 1)  $x = g(u)$ . Энд  $g(u)$  нь уламжлалтай, урвуутай функц байх хэрэгтэй.  $u$  нь шинэ хувьсагч юм. Энэ тохиолдолд орлуулах арга нь  $\int f(x) dx = \int f(g(u)) g'(u) du$  хэлбэртэй болно.
- 2)  $u = h(x)$ . Энд  $u$  нь шинэ хувьсагч,  $\int f(x) dx$ -ийн нэг хэсэг нь  $h(x)$ , үлдсэн хэсэг нь  $h'(x) dx$  байх юм. Энэ тохиолдолд орлуулах арга нь  $\int f(h(x)) h'(x) dx = \int f(u) du$  хэлбэртэй болно.

**Санамж** Практикт ихэвчлэн хоёр дахь хэлбэрийн орлуулгыг хийдэг. Орлуулах аргаар интеграл бодоход  $u = h(x)$  тэнцэтгэлийн хоёр талын дифференциал  $d(u) = h'(x) dx$  байдгийг олонтоо ашиглана.

**Жишээ 1.**  $\int x\sqrt{x-5} dx$  интеграл бод

**Бодолт.**  $u = x - 5$  гэж орлуулъя. Эндээс  $x = u + 5$  ба  $du = dx$  гэж гарах тул

$$\int x\sqrt{x-5}dx = \int (u+5)\sqrt{u}du = \int \left(u^{\frac{3}{2}} + 5u^{\frac{1}{2}}\right)du = \frac{2}{5}u^{\frac{5}{2}} + \frac{10}{3}u^{\frac{3}{2}} + C = \\ = \frac{2}{5}(x-5)^{\frac{5}{2}} + \frac{10}{3}(x-5)^{\frac{3}{2}} + C = (x-5)\sqrt{x-5}\left(\frac{2}{5}(x-5) + \frac{10}{3}\right) + C.$$

**Жишээ 2.**  $\int \sqrt{\sin x} \cos x dx$  интеграл бод.

**Бодолт.** Өгсөн интегралыг өмнөх дэд бүлгүүдэд судалсан аргуудаар бодох боломжгүй байна.  $u = \sin x$  гэж орлуулъя.  $du = d\sin x = \cos x dx$  болно. Тэгвэл  $\int \sqrt{\sin x} \cos x dx = \int \sqrt{u} du$  гэсэн хялбар, зэрэгт функцийн интеграл боллоо.

Иймд  $\int \sqrt{u} du = \int u^{\frac{1}{2}} du = \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + C$ .  $u = \sin x$  тул  $\int \sqrt{\sin x} \cos x dx = \frac{2}{3}\sqrt{\sin^3 x} + C$  болно.

**Жишээ 3.**  $\int \frac{1}{x^2 \left(1 - \frac{1}{x}\right)^2} dx$  интеграл бод.

**Бодолт.**  $u = 1 - \frac{1}{x}$  гэж орлуулья. Тэгвэл  $du = \left(1 - \frac{1}{x}\right)' dx = x^{-2} dx = \frac{1}{x^2} dx$  тул

$$\int \frac{1}{x^2 \left(1 - \frac{1}{x}\right)^2} dx = \int \frac{1}{u^2} du = \int u^{-2} du = -\frac{u^{-2+1}}{-2+1} + C = \\ = -u^{-1} + C = -\left(1 - \frac{1}{x}\right)^{-1} + C = -\left(\frac{x-1}{x}\right)^{-1} + C = -\frac{x}{x-1} + C.$$

**Жишээ 4.**  $\int x(x^2 - 2)^{15} dx$  интеграл бод.

**Бодолт.** Хэрэв  $u = x^2 - 2$  гэвэл  $du = 2x dx$  болох ба эндээс  $x dx = \frac{1}{2} du$  гэж гарна.

Иймд  $\int x(x^2 - 2)^{15} dx = \int (x^2 - 2)^{15} x dx = \int u^{15} \cdot \frac{1}{2} du = \frac{1}{2} \int u^{15} du = \frac{1}{2} \cdot \frac{u^{16}}{16} + C =$

$$\frac{1}{32}u^{16} + C = \frac{1}{32}(x^2 - 2)^{16} + C \text{ болно.}$$

**Жишээ 5.**  $\int \frac{\sin \sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}} dx$  интеграл бод.

**Бодолт.**  $u = \sqrt[3]{x}$  гэе. Эндээс  $x = u^3$  гэж гарна. Хэрэв хоёрталаыг дифференциалчилбал  $dx = 3u^2 du$  болно. Энэ орлуулгыг хийснээр интегралын хувьсагч язгуураас чөлөөлөгддөх болно.

Иймд  $\int \frac{\sin \sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}} dx = \int \frac{\sin u \cdot 3u^2 du}{u^2} = 3 \int \sin u du = -3 \cos u + C$  гэж гарна.

$u = \sqrt[3]{x}$  тул  $\int \frac{\sin \sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}} dx = -3 \cos \sqrt[3]{x} + C$  болно.

**Жишээ 6.**  $\int x^2 \sqrt{x^3 + 5} dx$  интеграл бод.

**Бодолт.**  $\sqrt{x^3 + 5} = u$  гэе. Эндээс  $x^3 + 5 = u^2$  гэж гарна. Хэрэв тэнцэтгэлийн хоёр талыг дифференциалчилбал  $3x^2 dx = 2udu$  буюу  $x^2 dx = \frac{2}{3}udu$  болно. Эндээс

$$\begin{aligned}\int x^2 \sqrt{x^3 + 5} dx &= \int \sqrt{x^3 + 5} \cdot x^2 dx = \int u \cdot \frac{2}{3}udu = \frac{2}{3} \int u^2 du = \\ &= \frac{2}{9}u^3 + C = \frac{2}{9}(\sqrt{x^3 + 5})^3 + C = \frac{2}{9}(x^3 + 5)\sqrt{x^3 + 5} + C.\end{aligned}$$

**Жишээ 7.**  $\int \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{3}{4}} + 1} dx$  интегралыг бод. (Орлуулга хийх эхний аргыг хэрэглэ)

**Бодолт.** Хэрэв  $x = u^4$  гэж орлуулбал  $x^{\frac{1}{2}} = u^2$ ,  $x^{\frac{3}{4}} = (u^4)^{\frac{3}{4}} = u^3$ ,  $dx = 4u^3 du$  болно. Иймд өгсөн интеграл шинэ  $u$  гэсэн хувьсагчтай болох ба бүхэл хэсэг ялгах адилтгал хувиргалт хийгээд  $(u^3 + 1)' = 3u^2$  гэдгийг анхааран дараах байдлаар бодно.

$$\begin{aligned}\int \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{3}{4}} + 1} dx &= 4 \int \frac{u^2}{u^3 + 1} u^3 du = 4 \int \frac{u^5 + u^2 - u^2}{u^3 + 1} du = 4 \int \left( u^2 - \frac{u^2}{u^3 + 1} \right) du = \\ &= 4 \cdot \frac{u^3}{3} - \frac{4}{3} \ln |u^3 + 1| + C = \frac{4}{3} \left( x^{\frac{3}{4}} - \ln |x^{\frac{3}{4}} + 1| \right) + C.\end{aligned}$$

Эдгээр жишээнээс харахад хувьсагчийг солих аргыг хэрэглэхдээ интегралын доорх илэрхийллийн зарим хэсгийг  $u = h(x)$  гэж орлуулахад түүний уламжлал нь үлдсэн илэрхийлэлд байвал хялбар байна.

**Жишээ 8.**  $\int \frac{(2 \ln x + 3)^3}{x} dx$  интеграл бод

**Бодолт.** Интегралыг  $\int (2 \ln x + 3)^3 \frac{1}{x} dx$  гэж бичье.  $(2 \ln x + 3)$ -ийн уламжлал нь  $\frac{2}{x}$  ба энэ нь хоёр дахь үржигдэхүүн  $\frac{1}{x}$ -ээс зөвхөн 2 гэсэн коэффициентээр л ялгаатай байна. Иймд  $2 \ln x + 3 = u$  гэж орлуулах хэрэгтэй.

Эндээс  $2 \cdot \frac{1}{x} dx = du$  буюу  $\frac{1}{x} dx = \frac{1}{2}du$  болно.

$$\text{Иймд } \int \frac{(2 \ln x + 3)^3}{x} dx = \int u^3 \cdot \frac{1}{2} du = \frac{1}{2} \int u^3 du = \frac{1}{8} u^4 + C = \frac{1}{8} (2 \ln x + 3)^4 + C.$$

**ДАСГАЛ.****43.** Заасан орлуулгыг хийж интегралыг бод.

- |   |   |
|---|---|
| a) $\int \frac{\sin x \cos x}{1 + \sin^2 x} dx, (\sin x = u)$ | b) $\int \frac{dx}{1 + \sqrt{x}}, (\sqrt{x} = u)$ |
| b) $\int (4x + 7)^8 dx, (4x + 7 = u)$                         | c) $\int \frac{xdx}{1 - x^2}, (1 - x^2 = u)$      |
| d) $\int x\sqrt{x-4} dx, (\sqrt{x-4} = u)$                    | e) $\int x(1+2x)^8 dx, (1+2x = u)$                |
| ë) $\int \frac{x+1}{(2x+1)^2} dx, (u = 2x+1)$                 | ж) $\int \frac{x^3}{(x+2)^2} dx, (u = x+2)$       |

**44.** Орлуулах аргаар интегралыг бод.

a) $\int \sqrt{6x-12} dx$	b) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{4x+3}}$	c) $\int \frac{x}{\sqrt{1+x}} dx$	d) $\int \frac{4x+2}{(x-2)^3} dx$
---------------------------	-------------------------------------	-----------------------------------	-----------------------------------

**45.** Тодорхойгүй интегралыг бод.

a) $\int x^3 (1-5x^2)^{10} dx$	b) $\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}$	c) $\int \frac{x}{\sqrt{1-2x}} dx$	d) $\int \frac{\sqrt{1+3 \operatorname{tg} x}}{\cos^2 x} dx$
--------------------------------	---	------------------------------------	--

**46.** Орлуулах аргаар интегралыг бод.

a) $\int \frac{1}{x^2 \left(1 + \frac{1}{x}\right)^2} dx$	b) $\int \frac{x}{1+x^2} dx$	c) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^6}}; (\sqrt{1-x^6} = u)$
---	------------------------------	---

**47.** Тодорхойгүй интеграл бод

a) $\int \frac{1}{x-\sqrt{x}} dx$	b) $\int \sqrt{\cos x} \sin x dx$	c) $\int \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{3}{4}}-1} dx$	d) $\int \frac{dx}{2+\cos x}$
d) $\int \frac{e^{\sqrt{2x-1}}}{\sqrt{2x-1}} dx$	e) $\int x^3 (1-2x^4)^3 dx$	ë) $\int \sin(2-3x) dx$	ж) $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}}$

**Тодорхой интегралын хувьсагчийг сольж бодох**

Тодорхой интегралд шинэ хувьсагч хэрэглэх үед интегралын доод, дээд хязгаарыг шинэ хувьсагчийн хувьд бодоод интегралаа олдог.

**Жишээ 1.**  $\int_{-2\pi}^{\pi} \frac{dx}{\sin^2 \left(\frac{\pi}{6} - \frac{x}{3}\right)}$  интеграл бод.

**Бодолт.**  $t = \frac{\pi}{6} - \frac{x}{3}$  гэсэн орлуулга хийе. Хэрэв хоёр талыг дифференциалчилбал

$$dt = -\frac{1}{3}dx \text{ буюу } dx = -3dt \text{ болно.}$$

Шинэ  $t$  хувьсагчийн хувьд интегралын доод ба дээд хязгаарыг ольё.  $x = -2\pi$  үед

$$t = \frac{\pi}{6} - \frac{-2\pi}{3} = \frac{5\pi}{6}, \quad x = -\pi \quad \text{үед} \quad t = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} \quad \text{гэж гарна.}$$

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{-\pi} \frac{dx}{\sin^2\left(\frac{\pi}{6} - \frac{x}{3}\right)} &= -3 \cdot \int_{\frac{5\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sin^2 t} = -3 \cdot \left[ (-ctgt) \right]_{\frac{5\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = 3 \cdot \left[ \left( ctg\left(\frac{\pi}{2}\right) - ctg\left(\frac{5\pi}{6}\right) \right) \right] = \\ &= 3 \cdot \left( 0 - (-\sqrt{3}) \right) = 3\sqrt{3} \end{aligned}$$

Тодорхой интегралыг хувьсагч сольж бодох үед яагаад заавал интегралын доод, дээд хязгаарын утгыг сольж бодох ёстойг дараах жишээгээр тайлбарлай.

**Жишээ 2.**  $\int_1^{1.5} 2x(x^2 + 2)^3 dx$  тодорхой интегралыг бод.

**Бодолт.**  $(x^2 + 2)$ -ийн уламжлал нь  $2x$  тул  $x^2 + 2 = u$  орлуулга хийе. Эндээс

$$2xdx = du \quad \text{тул} \quad \int_1^{1.5} 2x(x^2 + 2)^3 dx = \int_1^{1.5} u^3 du \quad \text{боллоо.}$$

Гэвч анхны интегралын геометр утга нь  $y = 2x(x^2 + 2)^3$  функцийн график,  $x = 1, x = 1.5$  шулуун,  $Ox$  тэнхлэгийн хооронд хязгаарлагдсан муруй шугаман трапецын талбай юм. (Зураг 5.8.a) Гэтэл өгсөн муруйгаа  $y = u^3$  муруйгаар сольсон үед хязгаараа солихгүй бол хоёр дахь интегралын утга анхныхаас өөр гарах нь Зураг 5.8.б-ээс харагдаж байна.

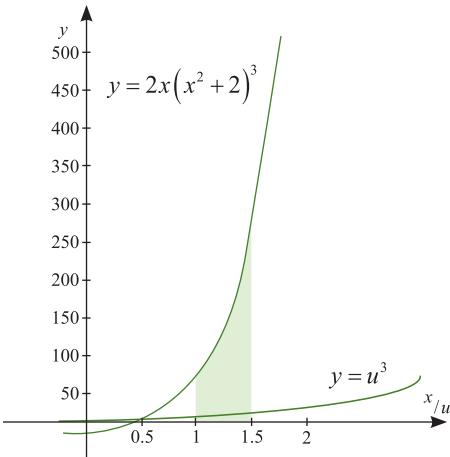
$u$  хувьсагчийн хувьд хувьсах хязгаарыг нь олохын тулд  $x = 1$  ба  $x = 1.5$  үед  $x^2 + 2$ -ийн харгалзах утгыг олох хэрэгтэй.

Доод хязгаар нь  $u = 1^2 + 2 = 3$ , дээд хязгаар нь  $u = 1.5^2 + 2 = 4.25$  болно. Одоо шинэ

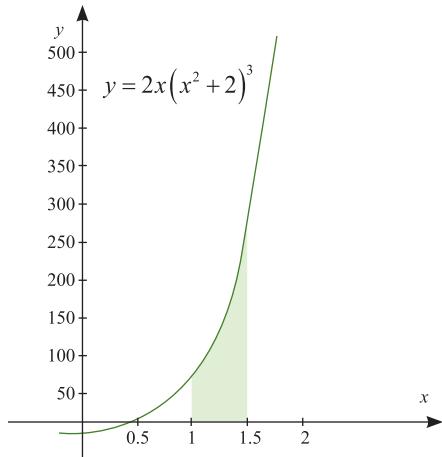
$$u \text{ хувьсагчийн хувьд интегралыг бичвэл} \int_1^{1.5} 2x(x^2 + 2)^3 dx = \int_3^{4.25} u^3 du \quad \text{болно.} \quad u \text{ хувьсагчийн хувьд интегралаа бодьё.}$$

$$\int_3^{4.25} u^3 du = \left( \frac{u^4}{4} \right) \Big|_3^{4.25} = \frac{4.25^4 - 3^4}{4} = \frac{326.25390625 - 81}{4} = \frac{245.25390625}{4} \approx 61.3$$

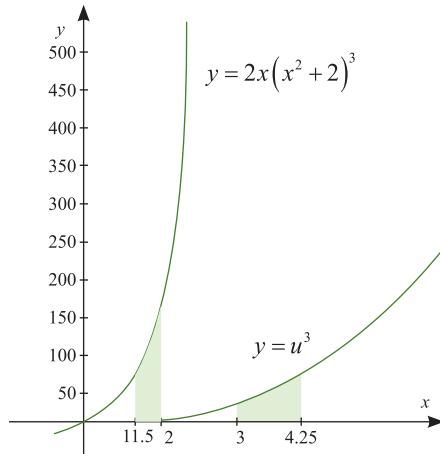
гэж гарна. Энэхүү шинэ хувьсагчийн хувьд олох талбайг Зураг 5.8.в-д харууллаа.



Зураг 5.8.а



Зураг 5.8.б



Зураг 5.8.в

**Жишээ 3.**  $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+2x}} dx$  интегралыг бод.

**Бодолт.** Энэ интегралд  $u = 1 + 2x$  орлуулга хийе. Эндээс  $x = \frac{u-1}{2}$  ба  $dx = \frac{1}{2} du$  гэж гарна. Интегралын доод, дээд хязгаар нь харгалзан  $u = 1 + 2 \cdot 0 = 1$ ,  $u = 1 + 2 \cdot 1 = 3$  болно.

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+2x}} dx &= \frac{1}{2} \int_1^3 \frac{\frac{u-1}{2}}{\sqrt{u}} du = \frac{1}{4} \int_1^3 \left( u^{\frac{1}{2}} - u^{-\frac{1}{2}} \right) du = \frac{1}{4} \cdot \left( \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \right) \Big|_1^3 = \\ &= \frac{1}{4} \cdot \left[ \left( \frac{2}{3} \cdot 3^{\frac{3}{2}} - 2 \cdot 3^{\frac{1}{2}} \right) - \left( \frac{2}{3} - 2 \right) \right] = \frac{1}{4} \cdot \left[ \left( 2 \cdot 3^{\frac{1}{2}} - 2 \cdot 3^{\frac{1}{2}} \right) - \left( -\frac{4}{3} \right) \right] = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

**Жишээ 4.**  $\int_1^2 \frac{x+1}{(2x-1)^3} dx$  тодорхой интегралыг орлуулах аргаар болон адилтгал хувиргалтын аргаар бодож үзүүллээ. Энэ хоёр аргын давуу болон сул талыг харьцуулж ярилцаарай.

**1 дүгээр бодолт** (орлуулах арга).  $t = 2x - 1$  гэсэн орлуулга хийе. Эндээс  $dt = 2dx$  буюу  $dx = \frac{dt}{2}$  гэж гарна. Орлуулгаас  $x+1 = \frac{t+3}{2}$  болно. Интегралын доод хязгаар нь  $t = 2 \cdot 1 - 1 = 1$ , дээд хязгаар нь  $t = 2 \cdot 2 - 1 = 3$  болно.

$$\begin{aligned} \text{Ийнхүү } \int_1^2 \frac{x+1}{(2x-1)^3} dx &= \frac{1}{2} \int_1^3 \frac{t+3}{t^3} \cdot \frac{dt}{2} = \frac{1}{4} \int_1^3 \left( \frac{1}{t^2} + \frac{3}{t^3} \right) dt = \frac{1}{4} \int_1^3 \left( t^{-2} + 3t^{-3} \right) dt = \\ &= \frac{1}{4} \left[ \frac{t^{-1}}{-1} + 3 \frac{t^{-2}}{-2} \right]_1^3 = \frac{1}{4} \left[ -\frac{1}{t} - \frac{3}{2t^2} \right]_1^3 = -\frac{1}{4} \left[ \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \right) - \left( 1 + \frac{3}{2} \right) \right] = \frac{1}{2} \text{ болно.} \end{aligned}$$

**2 дугаар бодолт** (адилтgal хувиргалтын арга).

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{x+1}{(2x-1)^3} dx &= \int_1^2 \frac{x-0.5+1.5}{(2x-1)^3} dx = \int_1^2 \frac{0.5}{(2x-1)^2} dx + \int_1^2 \frac{1.5}{(2x-1)^3} dx = \\ &= \left( -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2x-1} \right)_1^2 + \left( -\frac{3}{8} \cdot \frac{1}{(2x-1)^2} \right)_1^2 = -\frac{1}{4} \cdot \left( \frac{1}{3} - 1 \right) - \frac{3}{8} \cdot \left( \frac{1}{9} - 1 \right) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

**Жишээ 5.**  $\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x} dx$  интегралыг бод.

**Бодолт.** Хэрэв  $\ln x = u$  гэвэл  $\frac{1}{x} dx = du$  болно.  $x=1$  үед  $u=\ln 1=0$ ,  $x=e$  үед  $u=\ln e=1$  болох тул  $\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x} dx = \int_0^1 u^2 du = \left( \frac{1}{3} u^3 \right)_0^1 = \frac{1}{3} (1^3 - 0^3) = \frac{1}{3}$ .

## ДАСГАЛ

**48.** (А) Тодорхой интегралыг орлуулах аргаар бод. Хаалт дотор ямар орлуулга хийхийг зөвлөв.

a)  $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{5x-1}}$ , ( $5x-1=u$ )      б)  $\int_0^1 (2x^3+1)^4 x^2 dx$ , ( $2x^3+1=u$ )

в)  $\int_1^2 \frac{dx}{(3x+1)^4}$ , ( $3x+1=t$ )      г)  $\int_1^3 \sqrt{3x-1} dx$ , ( $3x-1=t$ )

(Б) Дээрх тодорхой интегралуудыг орлуулах арга хэрэглэхгүйгээр бодоорой. А, Б-д гаргасан харгалзах хариунуудыг харьцуулаарай.

**49.** Зааврын дагуу тодорхой интегралыг бод.

а)  $\int_2^3 \frac{x dx}{\sqrt{x^2-1}}$ ,  $x^2-1=u$  орлуулга хий    б)  $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x-1} dx$ ,  $\sqrt{e^x-1}=t$  орлуулга хий.

**50.** Тодорхой интегралыг орлуулах аргаар бод. (жишээ 1-5-ыг ашигла)

$$\text{a) } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x} \sin x dx$$

$$\text{б) } \int_2^3 \frac{1}{x^2 \left(1 - \frac{1}{x}\right)^2} dx$$

$$\text{в) } \int_1^{\sqrt{2}} x(x^2 - 2)^{15} dx$$

$$\text{г) } \int_{-1}^3 x^2 \sqrt{x^3 + 5} dx$$

$$\text{д) } \int_{-2\pi}^{-\pi} \frac{dx}{\sin^2 \left(\frac{\pi}{6} + \frac{x}{3}\right)}$$

$$\text{е) } \int_0^4 \frac{x}{\sqrt{1-2x}} dx$$

$$\text{ж) } \int_1^3 2x(x^2 - 1)^3 dx$$

$$\text{ж) } \int_1^3 4x(x^2 + 1)^2 dx$$

$$\text{з) } \int_{-1}^1 3x^2 \sqrt{x^3 + 1} dx$$

**51.** Тодорхой интегралыг орлуулах аргаар бод.

$$\text{а) } \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (1-2x)^3 dx$$

$$\text{б) } \int_3^{-18} \sqrt[3]{2 - \frac{x}{3}} dx$$

$$\text{в) } \int_1^2 \frac{x+1}{(2x-1)^3} dx$$

$$\text{г) } \int_0^2 \frac{x}{\sqrt{2 - \frac{x}{2}}} dx$$

$$\text{д) } \int_0^{28} \frac{5-x}{\sqrt{1 + \frac{x}{4}}} dx$$

$$\text{е) } \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{5}{3}} (x-2) \sqrt[5]{3x-1} dx$$

**52.** Тодорхой интегралыг орлуулах аргаар бод.

$$\text{а) } \int_0^1 x(x^2 + 1)^{\frac{3}{2}} dx$$

$$\text{б) } \int_1^{\sqrt{2}} \frac{x dx}{\sqrt{x^4 - 1}}$$

$$\text{в) } \int_9^{16} \frac{dx}{(x-4)\sqrt{x}}$$

**53.** а) Хэрэв  $x = 3\cos^2 \alpha + 5\sin^2 \alpha$  бол  $5 - x = 2\cos^2 \alpha$  болохыг харуул.

б) ( $x - 3$ )-ыг тригонометр функцийн илэрхийлээрэй.

в) Өмнөх үр дүнгүүд ба  $x = 3\cos^2 \alpha + 5\sin^2 \alpha$  орлуулгыг ашиглан

$$\int_4^5 \frac{1}{\sqrt{x-3\sqrt{5-x}}} dx \text{ тодорхой интегралыг бод.}$$

**54.** Сурагч  $\int_1^3 (2x-1)(x^2-x)^3 dx$  тодорхой интегралыг дараах байдлаар боджээ.

1 дүгээр алхам:  $u = x^2 - x$  гэж орлуулга хийе.

2 дугаар алхам:  $du = (2x-1)dx$  гэж гарна.

3 дугаар алхам:  $\int_1^3 (2x-1)(x^2-x)^3 dx = \int_1^3 u^3 du$

4 дүгээр алхам:  $\int_1^3 u^3 du = \left( \frac{u^4}{4} \right) \Big|_1^3 = \frac{3^4}{4} - \frac{1^4}{4} = \frac{80}{4} = 20.$

а) Сурагчийн бодолт зөв үү? Хэрвээ буруу бол алдаа нь юу байсан бэ?

б) Алдаатай бол залруулж бодоорой.

55.  $\int_1^2 12x^2(x^3 - 1)^3 dx$  тодорхой интегралын зөв хариуг ол.

А) 2500

Б) 2401

В) 1600

Г) 1204

56. Тодорхой интегралыг орлуулах аргаар бодоорой

а)  $\int_1^e \frac{(\ln x)^2}{x} dx$

б)  $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x \cos^3 x dx$

в)  $\int_0^1 \frac{4x}{\sqrt{1-x^4}} dx$

г)  $\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{4-x^2} dx$

57. Тодорхой интегралыг бод  $\int_0^1 x^2 2^{x^3} dx = ?$  (Заавар:  $2^{x^3} = (e^{\ln 2})^{x^3} = e^{x^3 \ln 2}$  гэж бичээд

 $x^3 \ln 2 = u$  орлуулга хий.)

## БҮЛГИЙН НЭМЭЛТ ДААЛГАВАР

1.  $x$  хувьсагчаар интегралчилж бод.

а)  $5e^x - 2\sqrt{e^{4x}}$

б)  $4e^{8x-2} + \frac{5}{2x^3}$

в)  $9e^{-3x} + 7x^6$

г)  $e^{\frac{3+x}{2}} + \frac{2}{3x-1}$

д)  $e^{9-2x} - \frac{5}{2-10x}$

е)  $\frac{3}{1-2x} + 4e \cdot e^{2x-7}$

ж)  $e^{2x} + \frac{2e}{e^{4x}} - \frac{3}{2x}$

ж)  $\frac{e^{3x} - e^x - 2}{e^x} + 2$

з)  $0.8\sqrt{e^{2x-1}} - \frac{6}{3x-5}$

и)  $-\sin(2x-1) + 4\cos\frac{2x}{3}$ ;    ж)  $\frac{e^{2x-3}}{5} + \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$     ж)  $\frac{2}{x-1} + 3e^{6x} - \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

2. Интеграл бод.

а)  $\int \left( \frac{2}{x} - e^{-x} \right) dx$

б)  $\int \sin\left(\frac{1}{3}x + \frac{\pi}{2}\right) dx$

в)  $\int \left( 3e^{-2x} + \frac{3}{3x-2} \right) dx$

г)  $\int \frac{-3}{\sin^2(\pi - 3x)} dx$

д)  $\int \frac{1+2x}{2x-1} dx$

е)  $\int \left( \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) + 7e^{1-2x} \right) dx$

ж)  $\int \left( \frac{x^3 - 4x^2 + 3}{4x^2} \right) dx$

ж)  $\int \left( (2x-1)^3 - 4e^{1-2x} \right) dx$

з)  $\int 2e^{3x} (e^{3x} - 3e^{-3x}) dx$

и)  $\int \left( (1-3x)^2 + \frac{6}{1-3x} \right) dx$

ж)  $\int \frac{2e^{2x} - e^x - 1}{e^x} dx$

к)  $\int \left( \sqrt{e^{-3x}} - \sec^2\left(\frac{x}{2}\right) \right) dx$

3. Тодорхой интегралыг бод.

а)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \cos x dx$

б)  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2x dx$

в)  $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) dx$

$$\text{г)} \int_1^2 \left( \frac{2}{x} - e^{-x} \right) dx \quad \text{д)} \int_0^\pi \sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{2}\right) dx \quad \text{е)} \int_2^4 \frac{9dx}{3x-4}$$

$$\text{ё)} \int_1^e \frac{x^3 + x - 1}{x^2} dx \quad \text{ж)} \int_0^1 \frac{1+3x}{3x-1} dx \quad \text{з)} \int_0^1 \left( \frac{(1+4x)^3}{3} + \cos \pi x \right) dx$$

4. Дараах бутархай рационал функцийн бүх эх функцийг ол.

$$\text{а)} \frac{4}{(x+2)(x-2)} \quad \text{б)} \frac{6}{(x-2)(x+1)} \quad \text{в)} \frac{x}{(x-3)(2x+1)}$$

$$\text{г)} \frac{8}{(2x-1)(x+2)} \quad \text{д)} \frac{7x-23}{(x-2)(x-5)} \quad \text{е)} \frac{29-3x}{(x-3)(x+2)}$$

$$\text{ё)} \frac{4x+12}{x^2-3x} \quad \text{ж)} \frac{4x+12}{4x^2-9} \quad \text{з)} \frac{-x+13}{x^2-x-6}$$

$$\text{и)} \frac{-2x+23}{x^2-3x-4} \quad \text{й)} \frac{10x}{2x^2-3x+1} \quad \text{к)} \frac{x+11}{2x^2-x-10}$$

5.  $\int_0^1 \frac{P(x)}{Q(x)} dx$  тодорхой интегралыг бод.

$$\text{а)} P(x) = x^2 - 5x + 2, Q(x) = x - 3 \quad \text{б)} P(x) = x^2 + 2x - 6, Q(x) = x + 1$$

$$\text{в)} P(x) = 2x^2 + 3x - 1, Q(x) = x - 2 \quad \text{г)} P(x) = 2x^2 + 3x + 1, Q(x) = 2x - 1$$

$$\text{д)} P(x) = 6x^2 - x - 2, Q(x) = 3x + 1 \quad \text{е)} P(x) = x^4 - x^3 + 3x - 2, Q(x) = x - 3$$

6. а) Хэрэв  $F'(x) = 4e^{4x-2} + \frac{5}{x}$  функц бол  $F(1) = 0$  нөхцөлийг хангах  $F(x)$  функцийг ол.

б) Хэрэв  $F'(x) = \frac{1}{2x-1} + \cos 2x$  функц бол  $F(0) = 1$  нөхцөлийг хангах  $F(x)$  функцийг ол.

7. Тэгшигтгэл бод.

$$\text{а)} \int_2^x \frac{dt}{2t+1} = \ln 5 \quad \text{б)} \int_0^x e^{1+2t} dt = 0 \quad \text{в)} \int_0^x 4 \cos 2tdt = 1, x \in [0, \pi]$$

8. Дараах шугамаар хязгаарлагдсан дүрсийн талбайг ол.

$$\text{а)} y = \frac{1}{x+1}, y = 0, x = 0, x = 1; \quad \text{б)} y = \frac{1}{1-2x}, y = 0, x = 1, x = 2;$$

$$\text{в)} y = e^{2x}, y = 0, x = 0, x = \ln 2 \quad \text{г)} y = 2 + e^x, y = 0, x = 0, x = 1;$$

$$\text{д)} y = \sin x, y = 0, x = 0, x = \pi \quad \text{е)} y = \cos x, y = 0, x = 0, x = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{ё)} y = 2 \cos x, y = 1, x = -\frac{\pi}{3}, x = \frac{\pi}{3} \quad \text{ж)} y = \sin x, y = \frac{1}{2}, x = \frac{\pi}{6}, x = \frac{5\pi}{6}$$

9.  $y = \cos x$  функцийн графикийн  $[0; \pi]$  завсар дахь дүрсийн талбайг ол.

10. а)  $y = e^{2x}$  функцийн график,  $x = \frac{1}{2}$ ,  $x = 1$  шулуун,  $Ox$  тэнхлэгээр

хязгаарлагдсан дүрс зурж, талбайг 0.001 нарийвчлалтай тоймлон ол.

б)  $y = \frac{1}{2x+1}$  функцийн график,  $x = 0$ ,  $x = 1$  шулуун,  $Ox$  тэнхлэгээр

хязгаарлагдсан дүрс зурж, талбайг 0.001 нарийвчлалтай тоймлон ол.

в)  $y = \sin 3x$  функцийн график,  $x = \frac{\pi}{6}$ ,  $x = \frac{\pi}{3}$  шулуун,  $Ox$  тэнхлэгээр

хязгаарлагдсан дүрс зурж, талбайг 0.001 нарийвчлалтай тоймлон ол.

11. Орлуулах аргаар тодорхойгүй интегралыг бод.

а)  $\int \frac{1}{\sqrt{1-9x^2}} dx$       б)  $\int x\sqrt{3-2x^2} dx$       в)  $\int \frac{1}{3-e^{-x}} dx$       г)  $\int \frac{x}{\sqrt[3]{4+x}} dx$

д)  $\int (1-x^2)^{-\frac{3}{2}} dx$       е)  $\int \frac{1}{2-\sqrt{x}} dx$       ё)  $\int \frac{1}{e^x - e^{-x}} dx$       ж)  $\int \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx$

12. Тодорхойгүй интегралыг бод

а)  $\int \frac{(\ln x)^3}{x} dx$       б)  $\int \frac{e^x}{10-6e^x} dx$       в)  $\int x\sqrt{x+1} dx$       г)  $\int \frac{\sqrt{x}}{2(x-4)} dx$

д)  $\int \frac{3x}{\sqrt{2x-1}} dx$       е)  $\int \sin^3 4x \cos 4x dx$       ё)  $\int \frac{4x}{\sqrt{x^2+1}} dx$       ж)  $\int x(3x^2-1)^4 dx$

з)  $\int \frac{1}{x-2\sqrt{x}} dx$       и)  $\int \frac{1}{2\sqrt{x}-3x} dx$       ў)  $\int \sin\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{x}{2}\right) dx$       к)  $\int \frac{e^x}{6-e^x} dx$

13. Тодорхой интегралыг бод.

а)  $\int_{-1}^0 \frac{8x}{(4x^2+1)^2} dx$       б)  $\int_0^1 -12x^2(4x^3-1)^3 dx$       в)  $\int_{-1}^2 6x(x^2-1)^2 dx$

г)  $\int_0^1 \frac{24x}{(4x^2+4)^2} dx$       д)  $\int_{-3}^0 -\frac{8x}{(2x^2+3)^2} dx$       е)  $\int_0^1 \frac{16x}{(4x^2+4)^2} dx$

ж)  $\int_{-1}^0 18x^2(3x^3+3)^2 dx$       ѿ)  $\int_0^1 -\frac{8x}{(4x^2+2)^2} dx$       з)  $\int_{-1}^0 (x-1)(x^2-2x)^2 dx$

14.  $x$  хувьсагчаар интегралчилж бод.

а)  $e^{6x+1} + \frac{1}{2} \sin\left(\frac{\pi}{6} - 3x\right) + \frac{1}{3x}$       б)  $\cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) + 7e^{1-7x} - \sec^2\left(\frac{x}{2} + \pi\right)$

15. Интеграл бод.

a)  $\int_5^6 \frac{1}{x-4} dx$

б)  $\int_0^1 \left( \frac{2}{x+1} - e^{-x} \right) dx$

в)  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) dx$

16. Хэрэв  $F'(x) = \frac{1}{2x-1} + \cos 2x$  бол  $F(0) = 1$  нөхцөл хангах  $F(x)$  функцийг ол.

17. Тэгшигэл бод.  $\int_0^x e^{1+3t} dt = \frac{1}{3}$

18. Дараах шугамаар хязгаарлагдсан дүрсийн талбайг ол.

а)  $y = \cos x - 1$ ,  $y = 0$ ,  $x = 0$ ,  $x = \frac{\pi}{2}$ ;

б)  $y = e^{3x}$ ,  $y = 0$ ,  $x = 0$ ,  $x = 1$ ;

19.  $y = \frac{1}{2x+1}$  функцийн график,  $x = 0$ ,  $x = 1$  шулуун,  $Ox$  тэнхлэгээр хязгаарлагдсан дүрс зурж, талбайг 0.001 нарийвчлалтай тоймлон ол.

20.  $f(x) = a \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) + b$  функцийн хувьд  $f'(4) = 2\pi$ ,  $\int_0^6 f(x) dx = \frac{22}{\pi}$  нөхцөлийг хангадаг бол  $a$ ,  $b$  тоонуудыг ол.

21. Тодорхойгүй интегралыг орлуулах аргаар бод

а)  $\int x e^{x^2} dx$

б)  $\int x(ax^2 + b)^{11} dx$

в)  $\int \frac{\sin x}{(1 + \cos x)^2} dx$

г)  $\int \frac{\sqrt{1 + \sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x^2}} dx$

д)  $\int \frac{x^3}{(x-1)^2} dx$

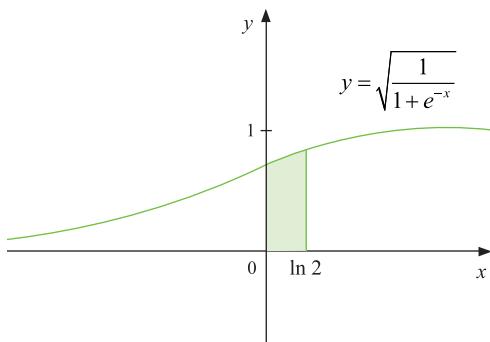
е)  $\int \frac{x}{\sqrt[3]{3x+1}} dx$

ë)  $\int \sqrt{\sin x} \cos x dx$

ж)  $\int \frac{x}{1+x^2} dx$

22. Зурагт  $y = \sqrt{\frac{1}{1+e^{-x}}}$  функцийн

график,  $Ox$ ,  $Oy$  тэнхлэг,  $x = \ln 2$  шулуунаар хязгаарлагдсан муруй шугман трапецыг дүрсэлжээ. Энэ дүрсийг  $Ox$  тэнхлэг тойруулан эргүүлсэн биетийн эзлэхүүнийг ол.



23.  $S$  интеграл  $S = \int_0^2 4u^3 \ln(u^2 + 1) du$  гэж тодорхойлогдог.

а)  $x = u^2 + 1$  орлуулга хийж  $S = \int_1^5 (2x-2) \ln x dx$  болохыг харуул.

б) Эндээс  $S$ -ийн утгыг ол.

**Энэ бүлэг сэдвийг судалснаар дараах мэдлэг, чадварыг эзэмшинэ.**

- *X дискрет санамсаргүй хувьсагчийн магадлалын тархалтыг хүснэгтээр харуулах*
- *X дискрет санамсаргүй хувьсагчийн математик дундаж, дисперс, стандарт хазайлтыг тооцоолох*

### 6.1. ДИСКРЕТ САНАМСАРГҮЙ ХУВЬСАГЧ

Байгаль орчин болон нийгэмд илэрч байгаа аливаа үзэгдлийг ямар нэгэн туршилтын үр дүн мэтээр үзэж болно. Энэ туршилтыг тодорхой орчин нөхцөл бүрдүүлэн хүн хийсэн байж болохоос гадна байгаль өөрөө хийсэн байж болно. Жишээлбэл, шоо орхиход 3 нүдээрээ буух үзэгдэл, бороо орж солонго татах үзэгдэл гэх мэт. Ийнхүү аливаа үзэгдлийг заавал туршилттай холбон авч үзэх ба харин тэрхүү үзэгдэл туршилт бүрд заавал илрэх нь албагүй байдаг.

**Тодорхойлолт.** Тухайн туршилтаар илэрч болох үр дүнг үзэгдэл гэдэг.

Туршилтын үр дүнгээс гарах үзэгдлүүдийг тоогоор илэрхийлж болдог. Жишээлбэл, ангийн 30 сурагчаас санамсаргүйгээр нэг сурагч сонгоход уг сурагч эмэгтэй бол 0 эсвэл эрэгтэй бол 1, шоо орхиход 3 нүдээрээ буувал 3, зоосыг дараалан дөрвөн удаа орхих туршилт хийж, сүлд буух үзэгдлийг сонирхоход СТСТ, ТТСС, ТССТ, СТСС, ССТТ, ТСТС гэсэн үзэгдлүүдийн аль нэг нь илэрхээс үл хамааран 2 гэсэн тоон утга оноох байдлаар туршилтад илрэх үзэгдлүүдийг тоогоор илэрхийлж болдог.

**Тодорхойлолт.** Туршилтын үр дүнд илрэх үзэгдэл болон түүнд харгалзуулсан тоон утгуудыг **санамсаргүй хувьсагч** гэдэг.

Өөрөөр хэлбэл, авч болох боломжит утгуудын алийг нь авахыг туршилт хийхээс өмнө хэлэх боломжгүй гэсэн үг.

Жишээлбэл, шоо орхиход 1, 2, 3, 4, 5, 6 гэсэн нүднүүдийн аль нь буухыг туршилтын өмнө хэлэх боломжгүй. Иймд эдгээр зургаан утга санамсаргүй хувьсагч болно.

Жишээлбэл, таван зоосыг нэгэн зэрэг орхих туршилт хийе.  $X$ -ээр сүлд буусан тоог тэмдэглээ. Хэрэв дөрвөн тоо, нэг сүлд буусан бол  $X = 1$  болно. Хэрэв тавуулаа тоо буусан бол  $X = 0$  болно. Иймд  $X$  нь санамсаргүй хувьсагч юм.  $X$ -ийн авч болох утга нь 0, 1, 2, 3, 4, 5 болно.

### ТЭМДЭГЛЭГЭЭ

- Санамсаргүй хувьсагчийг латин том үсгээр тэмдэглэнэ. Жишээлбэл,  $X, Y, \dots$
  - Хувьсагчийн авах утгыг латин жижиг үсгээр тэмдэглэнэ. Жишээлбэл,  $x, y, \dots$
- Жишээлбэл, талсуудыг 1, 2, 3, 4, 5, 6 гэж дугаарласан шоог орхиход буух талсын дугаар 1, 2, 3, 4, 5, 6 нь санамсаргүй утга байна.

**Тодорхойлолт.** Хэрэв санамсаргүй хувьсагчийн авах тоон утгын тоо нь төгсгөлөг бол дискрет санамсаргүй хувьсагч гэдэг.

Жишээлбэл, хоёр зоосыг нэгэн зэрэг орхиход сүлд буух үзэгдлийн тоо нь санамсаргүй хувьсагч болох бөгөөд 0, 1, 2 гэсэн гурван тоон утга авна.

$X = 0$  нь сүлд буухгүй байх үзэгдэл.

$X = 1$  нь нэг зоос сүлдээрээ буух үзэгдэл.

$X = 2$  нь хоёр зоос хоёулаа сүлдээрээ буух үзэгдэл болно.

Өмнө үзсэн бүх жишээ дискрет санамсаргүй хувьсагчийн жишээ болно.

$X$  санамсаргүй хувьсагч  $a$  утга авах үзэгдлийн магадлалыг  $P(X = a)$  гэж тэмдэглэнэ.

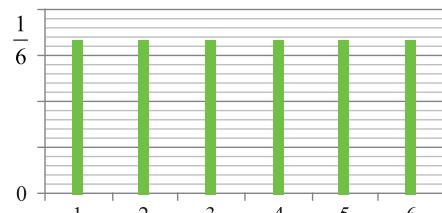
**Жишээ 1.**  $X$  нь шоог нэг удаа орхиход буух нүдний тоо бол энэ нь 1, 2, 3, 4, 5, 6 утга авах санамсаргүй хувьсагч болох ба  $X$  санамсаргүй хувьсагч 4 утга авах магадлалыг  $P(X = 4)$  гэж бичнэ.

**Тодорхойлолт.**  $X$  дискрет санамсаргүй хувьсагчийн бүх боломжит утгад магадлалыг нь харгалзуулсныг  **$X$  дискрет санамсаргүй хувьсагчийн магадлалын тархалт** гэдэг.

Магадлалын тархалтыг хүснэгтээр болон диаграммаар дүрсэлж болно.

Жишээ 1-ийн хувьд  $X$  санамсаргүй хувьсагчийн магадлалын тархалтыг доор хүснэгт болон баганан диаграммаар дүрслэн харуулав.

$x$	1	2	3	4	5	6
$P(X = x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$



$x_1, x_2, \dots, x_n$  гэсэн төгсгөлөг утга авах  $X$  дискрет санамсаргүй хувьсагчийн магадлалын тархалтыг ихэнх тохиолдолд хүснэгтээр өгдөг.

$X$ санамсаргүй хувьсагчийн авах утга	$x_1$	$x_2$	$x_3$	...	$x_n$
$X$ санамсаргүй хувьсагчийн $x_i$ утга авах магадлал	$p_1$	$p_2$	$p_3$	...	$p_n$

## Өөрөөр хэлбэл

$x$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	...	$x_n$
$P(X = x)$	$p_1$	$p_2$	$p_3$	...	$p_n$

**Чанар.** Уг санамсаргүй хувьсагчийн бүх боломжит утга авах магадлалын нийлбэр 1 байна. Иймд

$$P(X = x_1) + P(X = x_2) + P(X = x_3) + \dots + P(X = x_n) = 1 \text{ болно.}$$

**Жишээ 2.** Хүрдийг таван секторт хувааж харгалзан 1, 2, 3, 4, 5 гэсэн тоогоор тэмдэглэжээ. Уг хүрдийг эргүүлэхэд таарах тоог  $x$  гээд  $X$  санамсаргүй хувьсагчийн магадлалын тархалтыг хүснэгтээр өгчээ.

$x$	1	2	3	4	5
$P(X = x)$	0.15	0.24	$b$	0.25	0.19

Магадлалын тархалт ашиглан дараах утгыг ол.

- а)  $b$ -ийн утгыг ол.
- б) Оноо нь 3-аас их байх магадлалыг ол.
- в) Оноо нь 5-аас бага байх магадлалыг ол.
- г)  $P(2 < X \leq 4)$  -ийг ол.

**Бодолт.**

а)  $P(X = x_1) + P(X = x_2) + P(X = x_3) + \dots + P(X = x_n) = 1$  тул

$$0.15 + 0.24 + b + 0.25 + 0.19 = 1 \text{ буюу } b + 0.83 = 1 \text{ болох ба эндээс } b = 0.17 \text{ болно.}$$

б) Оноо нь 3-аас их байх магадлал

$$P(X > 3) = P(X \geq 4) = P(X = 4) + P(X = 5) = 0.25 + 0.19 = 0.44 \text{ болно.}$$

в) Оноо нь 5-аас бага байх магадлал

$$P(X < 5) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) = 0.15 + 0.24 + 0.17 + 0.25 = 0.81$$

$$\text{Эсвэл } P(X < 5) = 1 - P(X = 5) = 1 - 0.19 = 0.81 \text{ болно.}$$

г)  $P(2 < X \leq 4) = P(X = 3) + P(X = 4) = 0.17 + 0.25 = 0.42$  байна.

**Жишээ 3.** Талсууд нь дээрээ харгалзан 1, 2, 3, 4 гэсэн тоотой тетраэдр хэлбэртэй хоёр шоог орхив. Шоог орхиход буусан онооны нийлбэрийг  $x$ -ээр тэмдэглэвэл  $X$  нь дискрет санамсаргүй хувьсагч болно.  $X$  дискрет санамсаргүй хувьсагчийн магадлалын тархалтыг хүснэгтээр харуул.

**Бодолт.** Хэрэв хоёр шоо орхиход буух онооны нийлбэрийг хүснэгт хэлбэрээр тэмдэглэж (Зураг 6.1)-д харуулав. Эндээс харахад  $X$  дискрет санамсаргүй хувьсагч нь 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 гэсэн утга авна.

Дээрх хүснэгтийг ашиглан  $X$  дискрет санамсаргүй хувьсагчийн утга бүрийн харгалзах магадлалыг ольё. Жишээлбэл,  $X$  дискрет санамсаргүй хувьсагчийн 5 гэсэн утгад харгалзах магадлалыг олоходоо хүснэгтээс нийлбэр нь 5 гарсан нийт 4 боломжийг 16

4	5	6	7	8
3	4	5	6	7
2	3	4	5	6
1	2	3	4	5
	1	2	3	4

II шоо  
Зураг 6.1

боломжид харьцуулна. Иймд  $P(X = 5) = \frac{4}{16}$  болно.

Үүнтэй адилгаар  $X$  дискрет санамсаргүй хувьсагчийн бусад утгыг авах магадлалыг олж, тархалтыг хүснэгтээр харуулав.

$x$	2	3	4	5	6	7	8
$P(X = x)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$

Эндээс  $x$ -ийн 2 -оос 5 хүртэлх утгад харгалзах магадлалын зүй тогтлыг ажиглавал

$$P(X = x) = \frac{x-1}{16}, \quad x \in \{2, 3, 4, 5\}$$

болно. Мөн  $x$ -ийн 6-аас 8 хүртэлх утгад харгалзах магадлалын зүй тогтлыг ажиглавал

$$P(X = x) = \frac{9-x}{16}, \quad x \in \{6, 7, 8\}$$

болно. Иймд  $X$  дискрет санамсаргүй хувьсагчийн магадлалын тархалтыг дараах байдлаар тодорхойлж болно.

$$P(X = x) = \begin{cases} \frac{x-1}{16}, & x \in \{2, 3, 4, 5\} \\ \frac{9-x}{16}, & x \in \{6, 7, 8\} \end{cases}$$

Үүнийг дискрет санамсаргүй хувьсагчийн магадлалын тархалтыг томьёогоор тодорхойлох гэнэ.

Мөн  $P(X = x) = \frac{1}{16} \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 3 + 2 + 1) = 1$  болно.

**Жишээ 4.**  $Y$  дискрет санамсаргүй хувьсагчийн магадлалын тархалтыг  $P(Y = y) = c \cdot y^2$ ,  $y \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$  гэсэн томьёогоор тодорхойлжээ. Хэрэв  $c$  тогтмол тоо бол уг тоог ол.

**Бодолт.**  $Y$  дискрет санамсаргүй хувьсагчийн магадлалын тархалтыг хүснэгтээр харуулав.

$y$	0	1	2	3	4
$P(Y = y)$	0	$c$	$4c$	$9c$	$16c$

Эндээс  $Y$  дискрет санамсаргүй хувьсагч учраас бүх утгын харгалзах магадлалуудын нийлбэр нь 1 буюу  $\sum_{i=1}^n P(Y = y_i) = 1$  байна.

Иймд

$$0 + c + 4c + 9c + 16c = 1$$

$$30c = 1$$

$$c = \frac{1}{30}$$

болно.

**Жишээ 5.**  $W$  дискрет санамсаргүй хувьсагчийн магадлалын тархалтыг хүснэгтээр өгчээ.

$w$	-3	-2	-1	0	1
$P(W=w)$	0.1	0.25	0.3	0.15	$d$

Магадлалын тархалтыг ашиглан дараах утгыг ол.

- а)  $d$  -ийн утгыг ол.      б)  $P(-3 \leq w < 0)$       в)  $P(W > -1)$   
 г)  $P(-1 < w < 1)$       д) Мoodыг ол.

### Бодолт.

а)  $W$  дискрет санамсаргүй хувьсагч учраас бүх утгын харгалзах магадлалуудын нийлбэр 1 гэдгээс

$$\begin{aligned} 0.1 + 0.25 + 0.3 + 0.15 + d &= 1 \\ 0.8 + d &= 1 \\ d &= 0.2 \end{aligned}$$

болно.

$$\begin{aligned} \text{б)} \quad P(-3 \leq w < 0) &= P(W = -3) + P(W = -2) + P(W = -1) \\ &= 0.1 + 0.25 + 0.3 \\ &= 0.65 \end{aligned}$$

болно.

$$\begin{aligned} \text{в)} \quad P(w > -1) &= P(W = 0) + P(W = 1) \\ &= 0.15 + 0.2 \\ &= 0.35 \end{aligned}$$

болов ба өөр аргаар олбол

$$\begin{aligned} P(w > -1) &= 1 - P(-3 \leq w < 0) \\ &= 1 - 0.65 \\ &= 0.35 \end{aligned}$$

болно.

г)  $P(-1 < w < 1) = P(w = 0) = 0.15$  болно.

д) -1 авах магадлал нь бусад санамсаргүй хувьсагчийн утга авах магадлалаас хамгийн их байна. Иймд моод нь -1 болно.

### ДАСГАЛ

1.  $X$  дискрет санамсаргүй хувьсагчийн магадлалын тархалтыг хүснэгтээр өгчээ.

$x$	1	2	3	4	5
$P(X=x)$	0.2	$0.25a$	0.4	$a$	0.05

Магадлалын тархалтыг ашиглан дараах утгыг ол.

- а)  $a$ -ийн утгыг ол.  
 б) Энэ магадлалын тархалтыг баганан диаграммаар дүрсэл.

в) Тооцоолж ол.

$$1) P(1 \leq X \leq 3) = ?$$

2)  $X$  санамсаргүй хувьсагчийн утга 3 байх магадлалыг ол.

$$3) P(2 < X < 5) = ?$$

2.  $Y$  дискрет санамсаргүй хувьсагчийн магадлалын тархалтыг хүснэгтээр өгчээ.

$y$	2	4	6	8	10
$P(Y = y)$	$2a$	$4a$	$\frac{7}{16}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{32}$

Магадлалын тархалтыг ашиглан дараах утгыг ол.

а)  $a$ -ийн утгыг ол.

$$\text{б) } P(Y < 9) \text{-ийг ол.}$$

3.  $X$  дискрет санамсаргүй хувьсагчийн магадлалын тархалтыг өгчээ.

$$P(X = x) = \begin{cases} 0.1, & x \in \{0, 2, 5\} \\ a, & x \in \{1, 3\} \\ 0.3, & x = 4 \end{cases}$$

а) Магадлалын тархалтыг хүснэгтийг байгуул.

б)  $a$ -ийн утгыг ол.

$$\text{в) } P(X \geq 3) = ?$$

4.  $A$  дискрет санамсаргүй хувьсагчийн магадлалын тархалтыг хүснэгтээр өгчээ.

$w$	-3	-2	-1	0	1
$P(W = w)$	0.1	0.25	0.3	0.15	$d$

Магадлалын тархалтыг ашиглан дараах утгыг ол.

а)  $d$ -ийн утгыг ол.    б)  $P(-3 \leq W < 0)$     в)  $P(W > -1)$     г)  $P(-1 < W < 1)$

5.  $X$  дискрет санамсаргүй хувьсагчийн магадлалын тархалтыг хүснэгтээр өгчээ.

$x$	1	2	3	4	5
$P(X = x)$	0.2	0.25	0.4	$a$	0.05

а)  $a$ -ийн утгыг олж, магадлалын тархалтыг баганан диаграммаар дүрсэл.

б) Магадлалын тархалтыг ашиглан дараах утгыг ол.

$$\text{1) } P(1 \leq X \leq 3) \quad \text{2) } P(X > 2) \quad \text{3) } P(2 < X < 5)$$

6.  $X$  дискрет санамсаргүй хувьсагчийн магадлалын тархалтыг

$P(X = x) = kx$ ,  $x \in \{1, 2, 3, 4\}$  томьёогоор өгчээ. Магадлалын тархалтыг хүснэгтээр харуулж,  $k$ -ийн утгыг ол.

7.  $X$  дискрет санамсаргүй хувьсагч нь зөвхөн 3, 5, 6, 8, 10 гэсэн утгыг авах ба  $P(X = 3) = 0.1$ ,  $P(X = 5) = 0.05$ ,  $P(X = 6) = 0.45$ ,  $P(X = 8) = 3P(X = 10)$  бол магадлалын тархалтыг хүснэгтээр харуул.

8.  $X$  дискрет санамсаргүй хувьсагчийн магадлалын тархалтыг хүснэгтээр өгчээ.

$x$	1	2	3	4	5
$P(X = x)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$a$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{20}$

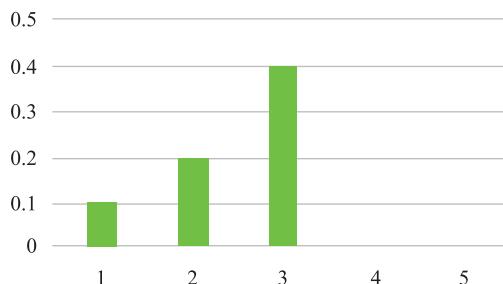
Магадлалын тархалтыг ашиглан дараах утгыг ол.

а)  $a$ -ийн утгыг ол. б)  $P(X \geq 4)$  в)  $P(X < 1)$  г)  $P(2 \leq X < 4)$ .

9.  $R$  санамсаргүй хувьсагчийн магадлалын тархалтыг  $P(R = r) = c(3 - r)$ ,  $r \in \{0, 1, 2, 3\}$  томьёогоор өгчээ. Магадлалын тархалтын томьёог ашиглан дараах утгыг ол.

- а)  $c$  тогтмол утгыг ол.  
 б) Магадлалын тархалтыг баганан диаграммаар дүрсэл.  
 в)  $P(1 \leq R < 3)$ -ийг ол.

10.  $X$  санамсаргүй хувьсагч 1, 2, 3, 4, 5 утгыг авах ба хэрэв  $P(X = 4) = 2P(X = 5)$  бол дараах баганан диаграммыг гүйцээж байгуул.



## 6.2. МАТЕМАТИК ДУНДАЖ

Нэг сонирхолтой туршилт авч үзье.

Шоог 120 удаа орхиж үр дүнг дараах давтамжийн хүснэгтэд бичив.

Оноо, $x$	1	2	3	4	5	6
Давтамж, $f$	15	22	23	19	23	18

Эндээс дунджийг олбол

$$\bar{x} = \frac{\sum f x}{\sum f} = \frac{1 \cdot 15 + 2 \cdot 22 + 3 \cdot 23 + 4 \cdot 19 + 5 \cdot 23 + 6 \cdot 18}{120} = 3.6$$

болно.

Үүнийг өөрөөр бичвэл

$$\bar{x} = 1 \cdot \frac{15}{120} + 2 \cdot \frac{22}{120} + 3 \cdot \frac{23}{120} + 4 \cdot \frac{19}{120} + 5 \cdot \frac{23}{120} + 6 \cdot \frac{18}{120} = 3.6$$

болно.

Энд буй  $\frac{15}{120}, \frac{22}{120}, \frac{23}{120}, \frac{19}{120}, \frac{23}{120}, \frac{18}{120}$  утгууд нь 1, 2, 3, 4, 5, 6 гэсэн онооны

харгалзах харьцангуй давтамж болох ба нөгөө талаасаа уг тоонуудын харгалзах туршилтын магадлал болно. Эдгээр туршилтын магадлалууд  $\frac{20}{120} = \frac{1}{6}$ -д ойрхон байна.

Хэрэв шоог олон удаа орхивол дээрх харьцангуй давтамж  $\frac{1}{6}$  рүү дөхнө.

Шоог орхиход ямар нэг оноогоороо буух магадлалыг математикт  $\frac{1}{6}$  гэж үздэг.

Хэрэв шоог орхиход ямар нэг оноогоороо буух магадлалыг  $\frac{1}{6}$ ,  $X$ -ээр буух оноог тэмдэглэвэл  $P(X = x) = \frac{1}{6}$  болно.  $X$  дискрет санамсаргүй хувьсагчийн магадлалын тархалтыг хүснэгтээр үзүүлэв.

$x$	1	2	3	4	5	6
$P(X = x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Дунднийг олбол

$$\text{Дундаж} = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = 3.5$$

болно.

$X$  дискрет санамсаргүй хувьсагчийн магадлалын тархалтыг дараах хүснэгтэд өгчээ.

$x$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	...	$x_n$
$P(X = x)$	$p_1$	$p_2$	$p_3$	...	$p_n$

**Тодорхойлолт.** Дискрет санамсаргүй хувьсагчийн боломжит утга бүрийг харгалзах магадлалаар нь үржүүлж, нэмсэн нийлбэрийг уг санамсаргүй хувьсагчийн **математик дундаж** гэх бөгөөд  $\mu = E(X)$  гэж тэмдэглэдэг.

Математик дундаж буюу  $\mu = E(X)$ -ийг тооцоолоходоо

I.  $x_i$  утгыг түүнд харгалзах  $p_i$  магадлалаар үржүүлнэ.

II. Гарсан үржвэрүүдийг хооронд нь нэмнэ.

$X$  дискрет санамсаргүй хувьсагчийн математик дундаж

$$\mu = E(X) = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + x_3 \cdot p_3 + \dots + x_n \cdot p_n = \sum_{i=1}^n x_i \cdot p_i$$

болно.

Өөрөөр хэлбэл, дискрет санамсаргүй хувьсагчийн математик дундаж

$$\mu = E(X) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot P(X = x_i)$$

болно.

**Жишээ 6.**  $X$  дискрет санамсаргүй хувьсагчийн магадлалын тархалтыг хүснэгтээр өгчээ.

$x$	-2	-1	0	1	2
$P(X = x)$	0.3	0.1	0.15	0.4	0.05

$X$ -ийн математик дунджийг ол.

**Бодолт.** Томьёо ёсоор

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum x \cdot P(X = x) \\ &= (-2) \cdot 0.3 + (-1) \cdot 0.1 + 0 \cdot 0.15 + 1 \cdot 0.4 + 2 \cdot 0.05 \\ &= -0.2 \end{aligned}$$

болно.

**Жишээ 7.** Гурван ижилхэн шоог зэрэг орхих туршилт хийв.  $X$ -ээр 6 оноо буусан шооны тоог тэмдэглэж  $X$  дискрет санамсаргүй хувьсагчийн магадлалын тархалтыг хүснэгтээр илэрхийлж, математик дунджийг ол.

**Бодолт.** Бодлогын нөхцөл ёсоор  $X$  нь 0, 1, 2, 3 гэсэн утга авч болно.

6 оноо буугаагүй гэдгийг дээрээ зураастай зургаагаар буюу  $\bar{6}$  гэж тэмдэглэж,  $X$ -ийн утгуудын харгалзах магадлалыг ольё.

$$P(X = 0) = P(\bar{6}, \bar{6}, \bar{6}) = \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{125}{216}$$

$$\begin{aligned} P(X = 1) &= P(6, \bar{6}, \bar{6}) + P(\bar{6}, 6, \bar{6}) + P(\bar{6}, \bar{6}, 6) \\ &= \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} + \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} + \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{75}{216} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X = 2) &= P(6, 6, \bar{6}) + P(6, \bar{6}, 6) + P(\bar{6}, 6, 6) \\ &= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{15}{216} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X = 3) &= P(6, 6, 6) \\ &= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{216} \end{aligned}$$

болно.

$X$  дискрет санамсаргүй хувьсагчийн магадлалын тархалтыг хүснэгтээр илэрхийлэв.

$x$	0	1	2	3
$P(X = x)$	$\frac{125}{216}$	$\frac{75}{216}$	$\frac{15}{216}$	$\frac{1}{216}$

$X$ -ийн математик дундаж

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum x \cdot P(X=x) \\ &= 0 \cdot \frac{125}{216} + 1 \cdot \frac{75}{216} + 2 \cdot \frac{15}{216} + 3 \cdot \frac{1}{216} \\ &= 0.5 \end{aligned}$$

болно.

**Жишээ 8.** Гурван цонхтой автомат тоглоомын цонх тус бүрд нимбэг, интоор, гадил, алим гэсэн дөрвөн төрлийн жимс бие биеэсээ хамааралгүйгээр гарч ирнэ.

Нимбэг гарч ирэх магадлал  $P(\text{Нимбэг})=0.4$

Интоор гарч ирэх магадлал  $P(\text{Интоор})=0.2$

Гадил гарч ирэх магадлал  $P(\text{Гадил})=0.3$

Алим гарч ирэх магадлал  $P(\text{Алим})=0.1$

байв. Тоглоомын дүрэм нь 100 төгрөг хийж, эхлэх товчийг дарна.

Хэрэв гурван цонхон дээр алим гарвал 1000 төгрөг хожно.

Хэрэв гурван цонхон дээр интоор гарвал 500 төгрөг хожно.

Хэрэв гурван цонхон дээр нимбэг гарвал 400 төгрөг хожно.

Хэрэв гурван цонхон дээр хоёр алим, нэг интоор дараалал нь хамаарахгүйгээр гарвал 800 төгрөг хожно.

Бусад тохиолдолд 100 төгрөгөө алдана. Тоглоомыг тоглоход дунджаар хэдэн төгрөг хожихыг тооцоол.

**Бодолт.** Хэрэв  $X$ -ийг тоглоом бүрд олох боломжтой мөнгөн дүн гэвэл  $X$  нь дискрет санамсаргүй хувьсагч болно. Тоглолт бүрийн хувьд 100 төгрөг өгөх учраас  $X$ -ийн утгууд 900, 700, 400, 300, -100 болно.

Одоо харгалзах магадлалыг олбол

$$P(X=900)=P(A,A,A)=0.1 \cdot 0.1 \cdot 0.1 = 0.001$$

$$\begin{aligned} P(X=700) &= P(\text{хоёр алим, нэг интоор}) \\ &= P(A,A,I) + P(A,I,A) + P(I,A,A) \\ &= 3 \cdot 0.1 \cdot 0.1 \cdot 0.2 = 0.006 \end{aligned}$$

$$P(X=400)=P(I,I,I)=0.2 \cdot 0.2 \cdot 0.2 = 0.008$$

$$P(X=300)=P(H,H,H)=0.4 \cdot 0.4 \cdot 0.4 = 0.064$$

$$\begin{aligned} P(X=-100) &= P(\text{Хожлоос бусад тохиолдол}) \\ &= 1 - (0.001 + 0.006 + 0.008 + 0.064) \text{ болно.} \\ &= 0.921 \end{aligned}$$

$X$  дискрет санамсаргүй хувьсагчийн магадлалын тархалтыг хүснэгтээр илэрхийлэв.

$x$	900	700	400	300	-100
$P(X=x)$	0.001	0.006	0.008	0.064	0.921

Математик дундаж

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum x \cdot P(X=x) \\ &= 900 \cdot 0.001 + 700 \cdot 0.006 + 400 \cdot 0.008 + 300 \cdot 0.064 + (-100) \cdot 0.921 \\ &= -64.6 \end{aligned}$$

болно.

Иймд хэрэв автомат тоглоомоор тогловол тоглолт тутамд дунджаар 64.6 төгрөг алдана. Хэрэв 1000 удаа тогловол дунджаар 64600 төгрөг алдана гэсэн үг.

**Жишээ 9.** Гурван шоог зэрэг орхиж тоглов. Хэрэв гурван шооны ядаж нэг нь 1 эсвэл 6 гэсэн оноогоор буувал 1000 төгрөг хожно. Эсрэг тохиолдолд 5000 төгрөг алдана. Хэрэв энэ дүрмээр 9 удаа тогловол хэдэн төгрөг хожих вэ?

**Бодолт.** Эхлээд шоог орхиход 1 буюу 6 оноогоор буух үзэгдлийн магадлалыг олбол

$$P(1 \text{ буюу } 6) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

болно. Тэгвэл эсрэг үзэгдлийн магадлалыг олбол

$$P(1 \text{ эсвэл } 6 \text{ онооноос бусад тохиолдолд}) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

болно. Гурван шооны хувьд магадлалыг  $P(A)$  гэж тэмдэглээд олбол

$$P(A) = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$$

болно. Хэрэв шоонуудын ядаж нэг нь 1 буюу 6 оноогоор буух магадлалыг  $P(B)$  гэж тэмдэглээд, олбол

$$P(B) = 1 - \frac{8}{27} = \frac{19}{27}$$

болно.  $X$ -ийг тоглолт болгонд хожих боломжит мөнгөн дүн гэвэл  $X$  дискрет санамсаргүй хувьсагч 1000, -5000 гэсэн утгыг авна.

Хэрэв шоонуудын ядаж нэг нь 1 эсвэл 6 оноогоор буувал 1000 төгрөг хожих ба

$$X = 1000 \text{ буюу } P(X=1000) = \frac{19}{27}$$

болно.

Хэрвээ шоо бүр 1 эсвэл 6 онооноос бусад оноо буувал 5000 төгрөг алдах ба

$$X = -5000 \text{ буюу } P(X=-5000) = \frac{8}{27}$$

болно.

$X$  дискрет санамсаргүй хувьсагчийн магадлалын тархалтыг хүснэгтээр харуулав.

$x$	1000	-5000
$P(X=x)$	$\frac{19}{27}$	$\frac{8}{27}$

Математик дундаж

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum x \cdot P(X=x) \\ &= 1000 \cdot \frac{19}{27} + (-5000) \cdot \frac{8}{27} \\ &= -\frac{7000}{9} \end{aligned}$$

Есөн удаа тогловол  $9 \cdot \left(-\frac{7000}{9}\right) = -7000$  буюу 7000 төгрөг алдана.

Одоо тоглоомын дүрмийг хэвээр нь байлгая. Харин хожвол авах мөнгөн дүн ямар байвал мөнгөө алдахгүй байхыг сонирхье. Иймд хэрэв хожвол  $y$  төгрөг авна гэж үзвэл  $X$  дискрет санамсаргүй хувьсагчийн магадлалын тархалт

$x$	$y$	-5000
$P(X=x)$	$\frac{19}{27}$	$\frac{8}{27}$

болно. Математик дундаж

$$\begin{aligned} E(X) &= \frac{19}{27}y + (-5000) \cdot \frac{8}{27} \\ &= \frac{19y - 5000}{27} \end{aligned}$$

болно. Мөнгөө алдахгүй байхыг сонирхсон учраас  $E(X) > 0$  байхаар  $y$ -ийг олбол

$$\begin{aligned} \frac{19y - 5000}{27} &> 0 \\ 19y - 5000 &> 0 \\ y &> 2105 \end{aligned}$$

болно. Иймд хэрэв хожих бүрд 2105-аас их төгрөг авбал энэ тоглоомд алдагдалгүй байх болно.

Мөн хэрэв хожвол 1000 төгрөг хэвээрээ, харин хожигдоход ямар хэмжээний төгрөг өгөхөд алдагдалгүй байхыг үүний адилаар тооцоолж болно.

**Чанар.** Хэрэв  $a, b$  нь бодит тоо ба  $X$  санамсаргүй хувьсагч бол

1.  $E(a) = a$
2.  $E(aX) = a \cdot E(X)$
3.  $E(aX + b) = a \cdot E(X) + b$  байна.

**Баталгаа.** Чанар 1.  $X$  санамсаргүй хувьсагчийн математик дунджийг олох томьёогоо эргэн саная.

$$E(X) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot P(X = x_i)$$

Энд  $X$ -ийн авах бүх утгыг тогтмол  $a$  гэвэл дээрх нийлбэрээс ерөнхий үржигдэхүүн болох  $a$ -г хаалтаас гаргаж бүх магадлалуудыг нэмбэл 1 гарна. Өөрөөр хэлбэл,

$$E(a) = a \cdot \sum P(X = x) = a \cdot 1 = a$$

болно. Үүнтэй адилаар 2, 3 дугаар чанарыг батлаарай.

**Жишээ 10.**  $X$  санамсаргүй хувьсагчийн магадлалын тархалтыг дараах хүснэгтээр өгчээ.

$x$	1	2	3
$P(X = x)$	0.1	0.6	0.3

Магадлалын тархалтыг ашиглан дараах утгыг ол.

a)  $E(X)$       б)  $E(3)$       в)  $E(5X)$       г)  $E(5X + 3)$

**Бодолт.** Математик дундгийн томъёо ёсоор

a)  $E(X) = \sum x P(X = x) = 1 \cdot 0.1 + 2 \cdot 0.6 + 3 \cdot 0.3 = 2.2$

б)  $E(3) = \sum 3P(X = x) = 3 \cdot 0.1 + 3 \cdot 0.6 + 3 \cdot 0.3 = 3$

в)  $E(5X) = \sum 5xP(X = x) = 5 \cdot 0.1 + 10 \cdot 0.6 + 15 \cdot 0.3 = 11$  буюу

Чанар 1 ёсоор  $E(5X) = 5E(X) = 5 \cdot 2.2 = 11$  болно.

г)  $E(5X + 3) = \sum (5x + 3)P(X = x)$   
 $= (5 \cdot 1 + 3) \cdot 0.1 + (5 \cdot 2 + 3) \cdot 0.6 + (5 \cdot 3 + 3) \cdot 0.3 = 14$

Чанар 3 ёсоор  $E(5X + 3) = 5E(X) + 3 = 11 + 3 = 14$  болно.

**Жишээ 11.** Хэрвээ  $X$  санамсаргүй хувьсагч нь зоосыг дараалан хоёр орхиход сүлд буух үзэгдлийн тоо бол дараах утгыг ол.

a)  $E(X)$       б)  $E(X^2)$       в)  $E(X^2 - X)$

**Бодолт.** Эхлээд  $X$  санамсаргүй хувьсагчийн магадлалын тархалтыг хүснэгтээр харуулъя. Иймд

$$P(X = 0) = P(T, T) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$P(X = 1) = P(C, T) + P(T, C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$P(X = 2) = P(C, C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

Магадлалын тархалтыг дараах хүснэгтээр харуулав.

$x$	0	1	2
$P(X = x)$	0.25	0.5	0.25

Математик дунджийг олох томьёо ашиглавал

a)  $E(X) = \sum xP(X=x) = 0 \cdot 0.25 + 1 \cdot 0.5 + 2 \cdot 0.25 = 1$

б)  $E(X^2) = \sum x^2 P(X=x) = 0^2 \cdot 0.25 + 1^2 \cdot 0.5 + 2^2 \cdot 0.25 = 1.5$

в)  $E(X^2 - X) = \sum (x^2 - x) P(X=x) = (0^2 - 0) \cdot 0.25 + (1^2 - 1) \cdot 0.5 + (2^2 - 2) \cdot 0.25 = 0.5$

а) болон б) бодолтын хариунаас  $E(X^2) - E(X) = 1.5 - 1 = 0.5$  байна.

Мөн в)-ийн хувьд  $E(X^2 - X) = 0.5$  гэдгээс  $E(X^2 - X) = E(X^2) - E(X)$  байна.

**Чанар.** Хэрэв  $X$  санамсаргүй хувьсагч нь  $g(X)$  болон  $h(X)$  хоёр функцээр тодорхойлогддог бол  $E(g(X) + h(X)) = E(g(X)) + E(h(X))$  байна.

**Жишээ 12.**  $X$  дискрет санамсаргүй хувьсагчийн магадлалын тархалтыг дараах хүснэгтээр өгчээ.

$x$	0	1	2	3	4
$P(X=x)$	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2

Магадлалын тархалтыг ашиглан дараах утгыг ол.

a)  $E(X)$                           б)  $E(X^2)$                           в)  $E(X^2 + 3X)$

**Бодолт:** Математик дунджийг олох томьёо ёсоор,

a)  $E(X) = \sum xP(X=x) = 0 \cdot 0.2 + 1 \cdot 0.2 + 2 \cdot 0.2 + 3 \cdot 0.2 + 4 \cdot 0.2 = 2$

б)  $E(X^2) = \sum x^2 P(X=x) = 0^2 \cdot 0.2 + 1^2 \cdot 0.2 + 2^2 \cdot 0.2 + 3^2 \cdot 0.2 + 4^2 \cdot 0.2 = 6$

в) Чанар 4 ёсоор  $E(X^2 + 3X) = E(X^2) + 3E(X) = 6 + 3 \cdot 2 = 12$  болно. Үнэн эсэхийг шалгаарай.

### ДАСГАЛ

11.  $X$  дискрет санамсаргүй хувьсагчийн магадлалын тархалтыг дараах хүснэгтээр өгчээ.  $E(X)$ -ийг ол.

$x$	0	1	2	3	4
$P(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

12.  $X$  дискрет санамсаргүй хувьсагчийн магадлалын тархалтыг дараах хүснэгтээр өгчээ.  $\mu$ -ийг ол.

$x$	5	6	7	8	9
$P(X=x)$	$\frac{3}{11}$	$\frac{2}{11}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{2}{11}$	$\frac{3}{11}$

13.  $Y$  дискрет санамсаргүй хувьсагчийн магадлалын тархалтыг дараах хүснэгтээр өгчээ.

$y$	1	2	3	4	5
$P(Y = y)$	0.1	0.3	$y$	0.2	0.1

Магадлалын тархалтаас дараах утгыг ол.



14.  $X$  дискрет санамсаргүй хувьсагч нь зөвхөн 10, 20 гэсэн утгыг авна. Хэрвээ  $E(X)=16$  бол магадлалын тархалтыг хүснэгтээр харуул.

15.  $X$  дискрет санамсаргүй хувьсагч нь зөвхөн 0, 1, 2, 3 гэсэн утгыг авна. Хэрэв  $P(X \leq 2) = 0.9$ ,  $P(X \leq 1) = 0.5$  ба  $E(X) = 1.4$  бол дараах утгыг ол.

- $$\text{a) } P(X=1) \quad \text{б) } P(X=0) \quad \text{в) } E(X)$$

16.  $X$  дискрет санамсаргүй хувьсагчийн магадлалын тархалттыг хүснэгтээр өгчээ

$x$	0	1	2	3
$P(X=x)$	$c$	$c^2$	$c^2 + c$	$3c^2 + 2c$

Магадлалын тархалтаас дараах утгыг ол.



17.  $X$  дискрет санамсаргүй хувьсагчийн магадлалын тархалтыг  $P(X=x)=kx$ ,  $x \in \{1,2,3,4,5\}$  томьёогоор өгчээ. Хэрэв  $k$  тогтмол тоо бол  $E(X)$ -ийг ол.

### **6.3. ДИСПЕРС**

Бид 11 дүгээр ангид өгөгдлийн дисперс буюу дунджаас хазайх хазайлтын квадратын дунджийг

$$\frac{\sum (x - \bar{x})^2}{n}$$

төмьёогоор олж сурсан.

Жишээлбэл, 4, 6, 6.5, 7.2, 11.3 гэсэн таван тооны хувьд дисперсийг ольё.

Эхлээд арифметик дундаж буюу  $\bar{x}$ -ийг олбол

$\bar{x} = \frac{4 + 6 + 6.5 + 7.2 + 11.3}{5} = 7$  болно. Одоо дисперсийг дээрх томьёогоор олбол

$$\text{Дисперс} = \frac{\sum (x - \bar{x})^2}{n} = \frac{(4 - 7)^2 + (6 - 7)^2 + (6.5 - 7)^2 + (7.2 - 7)^2 + (11.3 - 7)^2}{5} = \frac{28.78}{5} = 5.756$$

5

$X$  дискрет санамсаргүй хувьсагчийн дисперсийг зарим статистикийн номд  $D(X), \sigma^2(X), Var(X)$  гэх мэтээр тэмдэглэсэн байдаг. Бид цаашид  $Var(X)$  гэж тэмдэглэх болно.

$X$  дискрет санамсаргүй хувьсагчийн дисперс буюу  $X$ -ийн дунджаас хазайх хазайлтын квадратын дундаж

$$Var(X) = E((X - \mu)^2) \text{ болно.}$$

Үг томьёог хялбарчилбал

$$Var(X) = E((X - \mu)^2)$$

$$= E(X^2 - 2\mu X + \mu^2) \text{ болно. Чанар 4 ёсоор,}$$

$$= E(X^2) - 2\mu E(X) + \mu^2 \text{ болно. } \mu = E(X) \text{ гэдгээс}$$

$$= E(X^2) - 2\mu^2 + \mu^2 \text{ буюу } E(X^2) - \mu^2 \text{ болно.}$$

Цаашид дисперсийг

$$Var(X) = E(X^2) - \mu^2 = \sum x^2 P(X = x) - \mu^2 \text{ томьёогоор олно.}$$

**Тодорхойлолт.**  $X$  санамсаргүй хувьсагчийн дисперсээс арифметик квадрат язгуур авахад гарсан тоог стандарт хазайлт гэх ба  $\sigma$  гэж тэмдэглэдэг. ( $\sigma$ -т сигма гэж уншина.) Өөрөөр хэлбэл,  $\sigma = \sqrt{Var(X)}$  болно.

### Жишээ 10.

$X$  дискрет санамсаргүй хувьсагчийн магадлалын тархалтыг хүснэгтээр өгчээ.

$x$	1	2	3	4
$P(X = x)$	0.1	0.25	0.4	0.25

- a)  $E(X)$ -ийг ол.
- б)  $Var(X)$ -ийг ол.
- в)  $X$ -ийн стандарт хазайлтыг ол.

#### Бодолт.

- а) Математик дунджийг олбол  

$$\mu = E(X) = 1 \cdot 0.1 + 2 \cdot 0.25 + 3 \cdot 0.4 + 4 \cdot 0.25 = 2.8 \text{ болно.}$$

- б) Дисперсийг олбол

$$Var(X) = \sum_{i=1}^n x_i^2 \cdot p_i - \mu^2 = (1^2 \cdot 0.1 + 2^2 \cdot 0.25 + 3^2 \cdot 0.4 + 4^2 \cdot 0.25) - 2.8^2 = 0.86$$

болно.

- в) Стандарт хазайлтыг олбол  $\sigma = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{0.86} = 0.927 \text{ болно.}$

**Жишээ 11.** Зургаан талс нь харгалзан 1, 3, 5, 7, 9, 11 гэсэн оноотой шоог орхиж, буух оноог  $R$ -аар тэмдэглэв. Хэрэв  $R$  буух магадлал  $R$ -тайгаа шууд пропорционал бол

- а)  $R$  дискрет санамсаргүй хувьсагчийн магадлалын тархалтыг дараах томьёогоор тодорхойлж болохыг харуул.

$$P(R=r) = \frac{r}{36}, \quad r \in \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$$

б) Тал нь 6 ба  $R$  байх тэгш өнцөгийн дундаж талбайг ол.

### Бодлт.

а) Буух онооны магадлал нь харгалзах оноотойгоо шууд пропорционал гэсэн учраас

$r$	1	3	5	7	9	11
$P(R=r)$	$k$	$3k$	$5k$	$7k$	$9k$	$11k$

болно. Эндээс  $\sum P(R=r) = 1$  тул

$$\begin{aligned} k + 3k + 5k + 7k + 9k + 11k &= 1 \\ 36k &= 1 \\ k &= \frac{1}{36} \end{aligned}$$

болно. Хэрэв  $R$  дискрет санамсаргүй хувьсагчийн магадлалын тархалтыг хүснэгтээр харуулбал

$r$	1	3	5	7	9	11
$P(R=r)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$

болно. Иймд  $R$  дискрет санамсаргүй хувьсагчийн магадлалын тархалтыг

$$P(R=r) = \frac{r}{36}, \quad r \in \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$$

гэж томьёолж болно.

б) Бодлогын нөхцөл ёсоор  $R$  ба 6 талтай тэгш өнцөгийн талбайн дундаж утгыг олох ёстой. Иймд

$$S = R \cdot 6$$

булох ба мөн  $S$  нь дискрет санамсаргүй хувьсагч болно.

$S$  дискрет санамсаргүй хувьсагчийн магадлалын тархалтыг хүснэгтээр харуулбал

$s$	6	18	30	42	54	66
$P(S=s)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$

болно. Математик дунджийг олбол

$$E(S) = 6 \cdot \frac{1}{36} + 18 \cdot \frac{3}{36} + 30 \cdot \frac{5}{36} + 42 \cdot \frac{7}{36} + 54 \cdot \frac{9}{36} + 66 \cdot \frac{11}{36} = 47 \frac{2}{3}$$

болно. Эндээс  $R$  ба 6 талуудтай тэгш өнцөгийн дундаж талбай  $47 \frac{2}{3}$  квадрат нэгж байна.

**Жишээ 11.**  $X$  дискрет санамсаргүй хувьсагчийн магадлалын тархалтыг хүснэгтээр өгчээ.

$x$	1	2	3	4	5
$P(X = x)$	0.1	0.3	0.2	0.3	0.1

Магадлалын тархалтаас дараах утгыг ол.

- a)  $\mu = E(X)$
- б)  $Var(X)$
- в)  $\sigma$  буюу  $X$ -ийн стандарт хазайлтыг ол.

**Бодолт.**

- a)  $X$ -ийн математик дунджийг олбол

$$E(X) = \sum x \cdot P(X = x) = 1 \cdot 0.1 + 2 \cdot 0.3 + 3 \cdot 0.2 + 4 \cdot 0.3 + 5 \cdot 0.1 = 3$$

болно.

Мөн дээрх магадлалын тархалтыг ажиглавал тэгш хэмтэй байгаа учраас математик дунджийг шууд 3 гэж хэлж болно.

- б)  $X$ -ийн дисперсийг олбол

$$\begin{aligned} Var(x) &= \sum x^2 P(X = x) - \mu^2 \\ &= (1^2 \cdot 0.1 + 2^2 \cdot 0.3 + 3^2 \cdot 0.2 + 4^2 \cdot 0.3 + 5^2 \cdot 0.1) - 3^2 = 1.4 \end{aligned}$$

болно.

- в)  $X$ -ийн стандарт хазайлтыг олбол

$$\sigma = \sqrt{Var(x)} = 1.18 \text{ (цэгээс хойш хоёр орны нарийвчлалтай) болно.}$$

### ДАСГАЛ

**18.**  $X$  дискрет санамсаргүй хувьсагчийн магадлалын тархалтыг хүснэгтээр өгчээ.

$x$	1	2	3
$P(X = x)$	0.2	0.3	0.5

Магадлалын тархалтаас дараах утгыг ол.

- а)  $E(X)$
- б)  $E(X^2)$
- в)  $Var(X)$

**19.**  $X$  дискрет санамсаргүй хувьсагчийн магадлалын тархалтыг

$$P(X = x) = k, \quad x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

томьёогоор өгчээ. Тэгвэл магадлалын тархалтын дараах утгыг ол.

- а)  $E(X)$
- б)  $E(X^2)$
- в)  $Var(X)$

**20.**  $X$  дискрет санамсаргүй хувьсагч нь

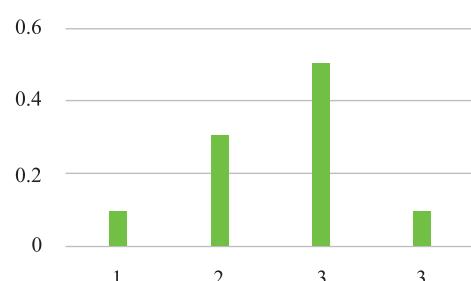
зөвхөн 2, 4, 6, 8 гэсэн утгыг авах

ба магадлалын тархалтыг баганан

диаграммаар өгчээ. Магадлалын

тархалтыг ашиглан дараах утгыг ол.

- а)  $E(X)$
- б)  $Var(X)$
- в)  $\sigma$



**21.** Дараах дискрет санамсаргүй хувьсагчийн магадлалын тархалтыг ашиглан математик дундаж, стандарт хазайлтыг ол.

a)	$x$	-3	-2	0	2	3
	$P(X = x)$	0.3	0.3	0.2	0.1	0.1

6)	$r$	1	3	5	7	9
	$P(R = r)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$

b)	$w$	0	2	5	6
	$P(W = w)$	0.11	0.35	0.46	0.08

22.  $X$  дискрет санамсаргүй хувьсагчийн магадлалын тархалтыг хүснэгтээр өгчээ.

$x$	1	2	3	4	5	6
$P(X = x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{5}$	$y$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$

Магадлалын тархалтыг ашиглан дараах утгыг ол.



23.  $X$  дискрет санамсаргүй хувьсагчийн магадлалын тархалтыг

$$P(X=x) = k|x|, \quad x \in \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$$

төмьёогоор өгчээ. Магадлалын тархалтыг ашиглан дараах утгыг ол.

- a)  $k$  тогтмол тоог ол.      б)  $E(X)$       в)  $Var(X)$       г)  $\sigma$

**24.**  $X$  дискрет санамсаргүй хувьсагчийн магадлалын тархалттыг

$$P(X=x) = \begin{cases} kx, & x \in \{1, 2, 3, 4, 5\} \\ k(10-x), & x \in \{6, 7, 8, 9\} \end{cases}$$

төмьёогоор өгчээ. Магадлалын тархалтыг ашиглан дараах утгыг ол.

- а)  $k$  тогтмод тоог ол.      б)  $E(X)$       в)  $Var(X)$       г)  $\sigma$

## БҮЛГИЙН НЭМЭЛТ ДААЛГАВАР

### 1. $X$ дискрет санамсаргүй хувьсагчийг дараах хүснэгтээр өгөв.

$E(X), Var(X)$ -ийг ол.

a)	$x$	1	2	4	5	6
	$P(X = x)$	0.1	0.2	0.4	0.2	0.1

б)	$x$	-2	-1	2	3	4
	$P(X = x)$	0.01	0.15	0.24	0.4	0.2

в)	$x$	0	2	3	6	8
	$P(X = x)$	0.05	0.25	0.4	0.2	0.1

г)	$x$	-1	0	4	5	6
	$P(X = x)$	0.25	0.15	0.3	0.2	0.1

2. Цүнхэнд байгаа 10 балны 3 нь шинэ байв. Санамсаргүйгээр хоёр бал авах туршилт хийхэд
- Яг нэг нь шинэ бал байх магадлал  $\frac{7}{15}$  болохыг харуул.
  - Шинэ бал гарч ирэх тооны магадлалын тархалтыг хүснэгтээр харуул.
3. Хоёр шоог зэрэг орхиход гарах үр дүнгүүд хэрэв ялгаатай бол бага оноог, ижилхэн буувал нэг оноог  $X$  санамсаргүй хувьсагчаар сонгов.
- $X$ -ийн магадлалын тархалтыг хүснэгтээр харуул.
  - Математик дундаж болон дисперсийг ол.
4. Хуучин CD зардаг дэлгүүрийн 5 CD тутмын 1 нь гэмтэлтэй байв.
- Санамсаргүйгээр 15 CD авахад хамгийн ихдээ 2 гэмтэлтэй байх магадлалыг ол.
  - Хэрэв гэмтэлтэй байх магадлал нь хамгийн багадаа 0.85 байхад хамгийн багадаа 1 гэмтэлтэй CD таарах хамгийн бага туршилтын тоог ол.
5. Шооны зургаан талс дээр 1, 1, 1, 2, 3, 4 гэсэн оноог тэмдэглэжээ. Шоог орхиход буух оноогоор талаараа хийсэн квадратыг талбайг  $A$  гэе. Жишээлбэл, Шоог орхиход 3 гэсэн тал буувал  $A$ -ийн утга 9 болно.
- $A$  дискрет санамсаргүй хувьсагчийн магадлалын тархалтыг хүснэгтээр харуул.
  - Математик дундаж болон дисперсийг ол.
6. Дараах бодлогын хувьд тодорхойлсон  $X$  дискрет санамсаргүй хувьсагчийн магадлалын тархалтыг хүснэгтээр харуул.
- $X$  нь 2 гологдолтой 5 бүтээгдэхүүнээс санамсаргүйгээр 3 бүтээгдэхүүнийг авахад түүнд байх гологдол биш бүтээгдэхүүний тоо.
  - $X$  нь 3 гологдолтой 7 бүтээгдэхүүнээс санамсаргүйгээр 5 бүтээгдэхүүнийг авахад түүнд байх гологдол бүтээгдэхүүний тоо.
  - 12 сурагчийн 4 нь XI ангийн сурагч байв. Санамсаргүйгээр 5 сурагч сонгоход тэдгээрт байх XI ангийн биш сурагчдын тоог  $X$  гэе.
  - 10 сурагчийн 5 нь XII ангийн сурагч байв. Санамсаргүйгээр 6 сурагч сонгоход тэдгээрт байх XII ангийн сурагчдын тоог  $X$  гэе.
  - Гологдол байх магадлал нь 0.1 байх бүтээгдэхүүнээс санамсаргүйгээр 5 бүтээгдэхүүн авахад түүнд байх гологдол бүтээгдэхүүний тоог  $X$  гэе.

- e) Гологдол байх магадлал нь 0.2 байх бүтээгдэхүүнээс санамсаргүйгээр 5 бүтээгдэхүүн авахад түүнд байх гологдол биш бүтээгдэхүүний тоог  $X$  гэе.
- ё) Шоог 3 удаа орхиход 3 гэсэн талсаараа буух тоог  $X$  гэе.
- ж) Зоосыг 5 удаа орхиход сүлдээрээ буух тоог  $X$  гэе.
7. Шалгалтын билет гурав өөр сэдвийн бодлоготой. Сурагч I, II, III сэдвийн бодлогыг бодож чадах магадлал харгалзан 0.6, 0.5, 0.8. Сурагчийн бодож чадах бодлогын тоог  $X$  гэвэл энэ санамсаргүй хувьсагчийн магадлалын тархалтыг хүснэгтээр харуулж, түүний 2-оос цөөнгүй бодлого бодож чадах магадлалыг ол.
8. Ферм зээл авахын тулд 1 жилийн турш банканд 3 удаа хүсэлт гаргажээ. Банкны зээл өгөх магадлал 0.8. Ферм тухайн жилд банкнаас авч чадах зээлийн хэмжээ магадлалын тархалтыг хүснэгтээр харуул.
9. Тухайн банкны үйлчлүүлэгч хугацаандаа зээлээ төлөхгүй байх магадлал 0.2. Банкны 5 үйлчлүүлэгчээс хугацаандаа зээлээ төлсөн зээлдэгчийн тооны магадлалын тархалтыг хүснэгтээр харуулж, 2-оос цөөнгүй нь хугацаандаа зээлээ төлсөн байх магадлалыг ол.
10. Хайрцагт 3 улаан, 2 цагаан, 1 алаг бөмбөг байв. Хайрцгаас таамгаар 3 бөмбөг авах туршилт хийв. Хэрэв  $X$  тухайн туршилтад улаан бөмбөг гарч ирсэн тоо бол  $X$  дискрет санамсаргүй хувьсагчийн магадлалын тархалтыг хүснэгтээр харуулж, 2-оос олонгүй улаан бөмбөг авсан байх магадлалыг ол.
11. 3 тамирчин байг тус бүр 2 удаа буудав. Хэрэв тамирчин бүрийн байг оног магадлал харгалзан 0.9, 0.6, 0.8 бол байг оног ерөнхий тооны магадлалын тархалтыг хүснэгтээр харуулж, 1-ээс цөөнгүй нь оносон байх магадлалыг ол.
12. Тамирчин нэг удаагийн буудалтаар байг оног магадлал 0.7 байв. Тэрээр байгаа анх удаа онотол буудаж, 4-өөс олонгүй удаа буудав. Хэрэв  $X$  алдаж буудсан тоо бол  $X$  дискрет санамсаргүй хувьсагчийн магадлалын тархалтыг хүснэгтээр харуулж,  $P(X<2)$ ,  $P(X<3)$ ,  $P(1 < X < 3)$  магадлалыг ол.
13. Шоог 3 удаа орхив. Хэрэв  $X$  нь шоо тэгш цифрээр буух тоо бол  $X$  дискрет санамсаргүй хувьсагчийн магадлалын тархалтыг хүснэгтээр харуулж, дор хаяж 2 удаад нь тэгш цифр буух магадлалыг ол.
14.  $X$  дискрет санамсаргүй хувьсагчийн магадлалын тархалтыг дараах хүснэгтээр өгөв. Уг дискрет санамсаргүй хувьсагчийн математик дундаж, дисперс, стандарт хазайлтыг ол.

a)

$x$	1	2	3
$P(X=x)$	0.2	0.5	0.3

б)

$x$	10	11	12
$P(X=x)$	0.2	0.6	0.2

в)

$x$	-1	0	1	2
$P(X=x)$	0.2	0.3	0.3	0.2

г)	$x$	1	3	5
	$P(X=x)$	0.3	0.4	0.3

15. Байг 2 удаа буудах туршилт хийв. Хэрэв эхний сумаар байг онох магадлал 0.6, хоёр дахь sumaар онох магадлал 0.7.  $X$ -ээр байг онох тоог тэмдэглэж, уг дискрет санамсаргүй хувьсагчийн математик дундаж, дисперс, стандарт хазайлтыг ол.
16. Дэлгүүрт ижил төрлийн 20 бараа байв. Тэдгээрийн 8 нь Болдынх, бусад нь дэлгүүрийн эзнийх байв. Тухайн өдөр 5 бараа зарсан.  $X$ -ээр зарсан бараан дахь дэлгүүрийн эзний барааны тоог тэмдэглэе.  $X$ ,  $5X$  дискрет санамсаргүй хувьсагчийн математик дундаж, дисперс, стандарт хазайлтыг ол.
17. Хайрцагт 5 алим, 9 жүрж байв. Хайрцгаас таамгаар 5 жимс авахад түүнд байх алимын тоог  $X$ , жүржийн тоог  $Y$  гэе.  $X$ ,  $Y$  ба  $5X+6Y$  дискрет санамсаргүй хувьсагчийн математик дундаж, дисперс, стандарт хазайлтыг ол.
18.  $X$  дискрет санамсаргүй хувьсагч нь зөвхөн 1, 4, 5, 7, 9 утгыг авах ба  $X$ -ийн магадлалыг тархалтыг дараах хүснэгтээр өгөв.

$x$	1	4	5	7	9
$P(X=x)$	$4p$	$5p^2$	$1.5p$	$2.5p$	$1.5p$

Магадлалын тархалтын хүснэгтийг ашиглан  $p$ -ийн утгыг ол.

19.  $A = \{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 2, 2, 4\}$  ба  $B = \{0, 0, 0, 0, 2, 2, 2\}$  хоёр олонлог өгөв. Олонлог тус бүрээс нэг цифрийг санамсаргүйгээр авч, хооронд нь нэмсэн нийлбэрийг  $X$  гэв.
- а)  $P(X=2) = \frac{2}{7}$  гэдгийг харуул.
  - б)  $X$  дискрет санамсаргүй хувьсагчийн магадлалын тархалтыг хүснэгтээр харуул.
  - в)  $E(X)$  болон  $Var(X)$ -ийг ол.
  - г) Хэрэв  $A$  олонлогоос 2 гэсэн цифр сонгогдсон бол  $P(X=2)$ -ийг ол.
20. Жижиг дэлгүүрт байсан 5 гоё, 2 анар ундаанаас санамсаргүйгээр дөрвөн ундаа сонгон авч, анар ундааны тоог  $X$ -ээр тэмдэглэв.
- а)  $X$  дискрет санамсаргүй хувьсагчийн магадлалын тархалтыг хүснэгтээр харуул.
  - б)  $E(X) = \frac{8}{7}$  гэдгийг харуулж,  $Var(X)$ -ийг ол.

Энэ бүлэг сэдвийг судалснаар сурагчид дараах мэдлэг, чадварыг эзэмшинэ.

- Комплекс тоо, түүний бодит ба хуурмаг хэсгийг мэдэх, ойлгох
- Комплекс тооны тэнцүү байх нөхцөл, комплекс тоонуудыг нэмэх, хасах, уржсуулэх үйлдлийг мэдэх, хэрэглэх
- Комплекс тооны урвуу ба хуваах үйлдлийг мэдэх, хэрэглэх
- Комплекс тооны модул ба хосмог, тэдгээрийн чанарыг мэдэх, хэрэглэх
- Бодит коэффициенттэй квадрат гурван гишүүнтийн комплекс тоон язгуурыг олох, язгуурын хамаарлыг мэдэх, ойлгох, хэрэглэх
- Комплекс тоог хавтгай дээр дүрслэх, комплекс тооны модул, аргументыг ойлгох, хэрэглэх

## 7.1. КОМПЛЕКС ТОО, ТҮҮНИЙ БОДИТ БА ХУУРМАГ ХЭСЭГ

Эрт дээр үеэс хүмүүсийн боломжгүй гэж боддог байсан зүйл үнэн хэрэгтээ боломжтой байж болохыг маш олон нээлт, математикийн шинэ аргууд харуулсаар байна. Үүний нэг том жишээ нь  $x^2 = -1$  гэсэн тэгшитгэл шийдтэй эсэх асуудал юм. Та нар энэ тэгшитгэл шийдгүй, учир нь тооны квадрат үргэлж эерэг байдаг гэж бодож байгаа. Олон зууны турш математикчид ч гэсэн ийм бодолтой байсан. Яагаад квадрат нь  $-1$  байх тоо байж болохгүй гэж, хэрэв байдаг бол ямар тоо вэ? гэж зарим математикчид сонирхож эхэлснээр энэ ойлголтын талаар илүү их судалж эхэлжээ. Италийн математикч Жэроламо Кардано (1501-1576) анх куб зэргийн тэгшитгэлийг бodoх үедээ квадрат зэрэг нь сөрөг тоо байх тооны талаар өөрийн бичсэн номдоо оруулсан байдаг.



Харин алдарт математикч Леонард Эйлер анх  $i$  гэсэн тэмдэглэгээг ашигласан.  $a > b$  байх хоёр натурал тооны хувьд  $a + x = b$  гэсэн тэгшитгэл натурал тоон олонлогт шийдгүй байдаг. Тэгвэл уг тэгшитгэл шийдтэй байх тоо нь сөрөг бүхэл тоо бөгөөд натурал тоон олонлогоо түүгээр өргөтгөн бүхэл тоон олонлог гэж нэрлэдэг олонлогийг байгуулдаг.

Тэгвэл үүнтэй төстэйгээр зөвхөн сөрөг биш бодит тооноос л квадрат язгуур гаргаж болдог бөгөөд  $a < 0$  тооны хувьд  $x^2 = a$  байх  $x$  бодит тоо олдохгүй. Гэвч квадрат нь  $-1$  байх  $i$  гэсэн тоог бодит тоон олонлогтоо нэмж өгснөөр  $x^2 = a$  тэгшигтгэлийн шийдийг олох боломжтой болдог. Энд  $i^2 = -1$  буюу  $i$  нь  $x^2 = -1$  тэгшигтгэлийн шийд болно.

**Тодорхойлолт.**  $a, b$  бодит тооны хувьд  $a + bi$  хэлбэрийн тоог **комплекс тоо** гэх ба уг тооноос тогтох олонлогийг **комплекс тоон олонлог** гэнэ. Энд  $i^2 = -1$  байна.

$a + 0i$  хэлбэрийн комплекс тоог бодит тоо гэх ба  $a$  гэж тэмдэглэдэг.

$0 + bi$  хэлбэрийн комплекс тоог хуурмаг тоо гэх ба  $bi$  гэж тэмдэглэдэг.

Ерөнхий тохиолдолд  $a + bi$  комплекс тооны хувьд  $a$  тоог түүний **бодит хэсэг** гээд

$$\operatorname{Re}(a + bi)$$

гэж харин  $b$  тоог түүний **хуурмаг хэсэг** гээд

$$\operatorname{Im}(a + bi)$$

гэж тус тус тэмдэглэдэг.

**Санамж** Комплекс тооны бодит ба хуурмаг хэсэг нь бодит тоо байна. Комплекс тоог ихэвчлэн  $z, s, t, r$  зэрэг үсгээр тэмдэглэдэг.

Комплекс тоон олонлогийг  $\mathbb{C}$  гэж тэмдэглэдэг. Дээрх тодорхойлолт ёсоор

$a = a + 0i$  нь комплекс тоо учир комплекс тоон олонлог  $\mathbb{C}$  нь бодит тоон олонлог  $\mathbb{R}$ -ийг агуулна, тодруулбал  $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$  байна.

Комплекс тоог зөвхөн математикт биш орчин үеийн физик болон электроникийн салбарыг өргөн хэрэглэдэг.

**Санамж** Комплекс тооны бодит тооноос ялгагдах гол онцлог нь хоёр комплекс тоог бодит тоонд байдаг их ба багын тэмдэгээр харьцуулж болдоггүй.

Жишээлбэл,  $1 + 2i, -3 + 5i, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{7}}{5}i, -19 + \sqrt[3]{11}i, 4, 3i$  нь комплекс тоо болно.

### Жишээ 1.

$$\text{а)} 3 + 2i ; \quad \text{б)} 3 ; \quad \text{в)} 2i ;$$

комплекс тооны бодит ба хуурмаг хэсгийг ол.

### Бодолт.

а) Бодит хэсэг нь  $\operatorname{Re}(3 + 2i) = 3$  харин хуурмаг хэсэг нь  $\operatorname{Im}(3 + 2i) = 2$  болно.

б) Тодорхойлолт ёсоор  $\operatorname{Re}(3) = 3, \operatorname{Im}(3) = 0$  болно.

в) Тодорхойлолт ёсоор  $\operatorname{Re}(2i) = 0, \operatorname{Im}(2i) = 2$  болно.

### Дүгнэлт

$a$  бодит тооны бодит хэсэг  $a$ , хуурмаг хэсэг нь тэг, харин  $bi$  хуурмаг тооны бодит хэсэг тэг, хуурмаг хэсэг нь  $b$  байна.

**Санамж** Хуурмаг тоо нь бодит тоо биш ба харин хуурмаг хэсэг нь бодит тоо гэдгийг анхаарах хэрэгтэй.

## ДАСГАЛ

1. Дараах тооны бодит ба хуурмаг хэсгийг тус тус олж бич.
  - a)  $1+2i$
  - б)  $-3+5i$
  - в)  $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{7}}{5}i$
  - г)  $-19+\sqrt[3]{11}i$
  - д) 4
  - е)  $3i$
2. Дараах илэрхийллийн утгыг ол.
  - а)  $\operatorname{Re}(3-5i)+\operatorname{Im}(2+3i)$
  - б)  $3\operatorname{Re}(5+2i)-2\operatorname{Im}(7+4i)$
  - в)  $\frac{\operatorname{Re}(7-3i)}{\operatorname{Im}(5-6i)}$

## 7.2. КОМПЛЕКС ТООНЫ НЭМЭХ ҮЙЛДЭЛ

Комплекс тоон дээр хийх үйлдэл, тэдгээрийн чанарыг судлахын өмнө хоёр комплекс тоо хэдийд хоорондоо тэнцүү байхыг тодорхойлж өгөх хэрэгтэй.

**Тодорхойлолт.** Хэрэв зөвхөн хоёр комплекс тооны бодит ба хуурмаг хэсэг харгалзан тэнцүү байвал л уг хоёр тоог **тэнцүү** гэнэ. Өөрөөр хэлбэл, хэрэв  $a=c$  ба  $b=d$  бол  $a+bi=c+di$ , мөн хэрэв  $a+bi=c+di$  бол  $a=c$  ба  $b=d$  байна.

Комплекс тоон дээр бодит тоотой адилаар нэмэх, хасах, үргүүлэх, хуваах үйлдлийг хийж болдог. Эдгээр үйлдэл нь бодит тоон дээрх үйлдлийн чанартай адил чанартай байдаг. Энэ талаар дэлгэрүүлэн авч үзье.

### Комплекс тооны нэмэх үйлдэл

**Тодорхойлолт.** Хоёр комплекс тоог нэмэхдээ бодит хэсэг дээр бодит хэсгийг, хуурмаг хэсэг дээр хуурмаг хэсгийг тус тус нэмдэг. Өөрөөр хэлбэл,

$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$$

байна.

Энд  $a,b,c,d$  нь бодит тоо учир  $a+c$ ,  $b+d$  нь мөн бодит тоо. Иймд  $(a+c)+(b+d)i$  нь комплекс тоо болно.

Комплекс тооны нэмэх үйлдлийн хувьд бодит тооны нэмэх үйлдлийн бүх чанар (хууль) биелдэг.

**Чанар 1.** Хэрэв  $z,s,t$  нь комплекс тоо бол

$$z+(s+t)=(z+s)+t$$

буюу **бүлэглэх чанар** биелнэ.

### Баталгаа.

Хэрэв  $z=a+bi$ ,  $s=c+di$ ,  $t=e+fi$  бол

$$\begin{aligned} z+(s+t) &= (a+bi)+((c+di)+(e+fi)) = (a+bi)+((c+e)+(d+f)i) \\ &= (a+(c+e))+((b+(d+f))i) \\ (z+s)+t &= ((a+bi)+(c+di))+(e+fi) = (a+c)+(b+d)i+(e+fi) \\ &= ((a+c)+e)+((b+d)+f)i \end{aligned}$$

болов ба бодит тооны нэмэх үйлдлийн бүлэглэх чанар ёсоор

$$a + (c + e) = (a + c) + e \text{ ба } b + (d + f) = (b + d) + f$$

тул уг хоёр комплекс тоо тэнцүү болох нь батлагдав.

**Чанар 2.** Хэрэв  $z, s$  нь комплекс тоо бол

$$z + s = s + z$$

буюу **байр солих чанар** биелнэ.

**Баталгаа.** Хэрэв  $z = a + bi, s = c + di$  бол

$$z + s = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

$$s + z = (c + di) + (a + bi) = (c + a) + (d + b)i$$

болов ба  $a, b, c, d$  бодит тооны хувьд  $a + c = c + a, b + d = d + b$  тул  $z + s = s + z$  болж батлагдав.

**Чанар 3.** Аливаа  $z$  комплекс тооны хувьд  $z + \mathbf{0} = \mathbf{0} + z = z$  байх  $\mathbf{0}$  гэсэн комплекс тоо байна.

Хэрэв  $z = a + bi, \mathbf{0} = x + yi$  гэвэл  $z + \mathbf{0} = a + bi + x + yi = a + x + (b + y)i = a + bi$  болох ба эндээс хоёр комплекс тоо тэнцүү гэдгээс  $a + x = a, b + y = b$  байна. Эдгээр тэгшитгэлээс  $x = 0, y = 0$  буюу  $\mathbf{0} = 0 + 0i$  болно. Үүнийг бид цаашид бодит тооны тэгтэй адиллаар тэмдэглэж хэрэглэнэ.

**Чанар 4.** Аливаа  $z$  комплекс тооны хувьд  $z + s = s + z = 0$  байх  $s$  гэсэн комплекс тоо байна. Үүнийг уг комплекс тооны **эсрэг комплекс тоо** гэх бөгөөд  $-z$  гэж тэмдэглэдэг.

Хэрэв  $z = a + bi, -z = c + di$  гэвэл

$$z + (-z) = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i = 0 = 0 + 0i$$

болов ба хоёр комплекс тоо тэнцүү байх нөхцөлөөс  $a + c = 0, b + d = 0$  байна.

Эндээс  $c = -a, d = -b$  буюу  $-z = -a + (-b)i$  болно.

**Тодорхойлолт.** Хэрэв  $z, s$  комплекс тоо бол  $z$ -ээс  $s$  комплекс тоог хасна гэдэг нь  $z$  дээр  $s$  комплекс тооны эсрэг тоог нэмэхийг хэлнэ. Өөрөөр хэлбэл

$$z - s = z + (-s)$$

байна.

Мөн  $-(a + bi) = -a + (-b)i$  гэдгээс  $-bi = (-b)i$  тул

$$-z = -a + (-b)i = -a + (-bi) = -a - bi$$

болно.

**Жишээ 1.** Үйлдлийг гүйцэтгэ. а)  $(4 + 5i) + (2 + 3i)$     б)  $(4 + 5i) - (2 + 3i)$

**Бодолт.**

$$\text{а)} (4 + 5i) + (2 + 3i) = 4 + 2 + (5 + 3)i = 6 + 8i.$$

$$\text{б)} (4 + 5i) - (2 + 3i) = (4 + 5i) + (-2 - 3i) = (4 + 5i) + (-2 - 3i) = 4 - 2 + (5 - 3)i = 2 + 2i$$

**Жишээ 2.** Тоог  $a+bi$  хэлбэрээр бич. а)  $5i+2$  б)  $3i-4$  в)  $1-8i$

**Бодолт.**

а)  $5i+2 = (0+5i)+(2+0i) = (0+2)+(5+0)i = 2+5i$  болох ба чанар 4 ёсоор  
 $5i+2 = 2+5i$  байна.

б)  $3i-4 = (0+3i)-(4+0i) = (0-4)+(3-0)i = -4+3i$  болох ба чанар 4 ёсоор  
 $3i-4 = 3i+(-4) = -4+3i$  байна.

в)  $1-8i = (1+0i)-(0+8i) = (1-0)+(0-8)i = 1+(-8)i$

**Жишээ 3.** Үйлдлийг гүйцэтгэ.  $(-2+i)-(-4-2i)$

**Бодолт.**  $-4-2i$  нь  $4+2i$  тооны эсрэг тоо. Мөн байр солих чанар биелдэг тул

$$(-2+i)-(-4-2i) = -2+i+4+2i = -2+4+i+2i = 2+3i \text{ болно.}$$

**Жишээ 4.** Үйлдлийг гүйцэтгэ.  $(7+3i)-(2-4i)+(2-3i)$

**Бодолт.**  $(7+3i)-(2-4i)+(2-3i) = (7-2+2)+(3-(-4)-3)i = 7+4i.$

**Чанар 5.** Комплекс тоон тэнцэтгэлийн хоёр талд ижил комплекс тоог нэмж буюу хасаж болно. Хэрэв  $s=t$  бол  $s\pm z=t\pm z$  байна.

**Жишээ 5.** Хэрэв  $z+(2-3i)=4+2i$  бол  $z$  тоог ол.

**Бодолт.**  $z+(2-3i)=4+2i$  тэнцэтгэлийн хоёр талд  $-(2-3i)$  тоог нэмбэл

$$z+(2-3i)-(2-3i)=4+2i-(2-3i) \text{ буюу } z=(4-2)+(2+3)i=2+5i \text{ болно.}$$

### ДАСГАЛ

3. Үйлдлийг гүйцэтгэ.

- |                 |                 |                |                   |
|-----------------|-----------------|----------------|-------------------|
| а) $(-i)+6i$    | б) $(-6i)-6i$   | в) $4i-5i$     | г) $(-3i)+(3+5i)$ |
| д) $(-2i)+(5i)$ | е) $(3i)+(-4i)$ | ё) $(2i-7)-4i$ | ж) $2-(3i-5)$     |

4. Үйлдлийг гүйцэтгэ.

- |                     |                     |                     |
|---------------------|---------------------|---------------------|
| а) $(4-i)-(5-3i)$   | б) $(-6-2i)+(6-5i)$ | в) $(8-3i)-(-5-6i)$ |
| г) $(9-5i)-(6-2i)$  | д) $(-1-2i)-(4-7i)$ | е) $(3-7i)-(2-5i)$  |
| ё) $(3-4i)-(-5-6i)$ | ж) $(-4-2i)-(1-i)$  | з) $(-5+3i)-(4-5i)$ |
| и) $(5+6i)+(2-7i)$  | й) $(6-8i)-(4i)+7$  | к) $(3-4i)-(-5+7i)$ |

5. Үйлдлийг гүйцэтгэ.

- |                     |                     |                   |
|---------------------|---------------------|-------------------|
| а) $(5+3i)-(-2-5i)$ | б) $(3-5i)-(2-4i)$  | в) $(3+2i)+(3+i)$ |
| г) $(4-2i)-(3-2i)$  | д) $(-1+3i)+(2+2i)$ | е) $(1+i)+(3+i)$  |
| ё) $(2+5i)-(1-4i)$  | ж) $(8-2i)+(2+6i)$  | з) $(3+i)+(2+5i)$ |

6. Үйлдлийг гүйцэтгэ.

- |                             |                              |
|-----------------------------|------------------------------|
| а) $(4+2i)-(6+4i)$          | б) $(-7+7i)-(-7-3i)+(-7-8i)$ |
| в) $(-4-7i)-(4+5i)-(2-i)$   | г) $(-1+i)-(-7+4i)-5$        |
| д) $(-1+6i)+(5-2i)-(8i)$    | е) $(1+6i)+(6-2i)-(-7+5i)$   |
| ё) $(-5+7i)-(-6+i)-(-6+5i)$ | ж) $(-8+6i)+(6-6i)+(7+6i)$   |

7. Хэрэв  $z+3-2i=1+i$  бол  $z$  тоог ол.
8. Хэрэв  $2+3i+z=-2+i$  бол  $z$  тоог ол.
9. Хэрэв  $4+3i-z=2+2i$  бол  $z$  тоог ол.

### 7.3. КОМПЛЕКС ТООНЫ ҮРЖҮҮЛЭХ ҮЙЛДЭЛ

**Тодорхойлолт.**  $a+bi, c+di, a, b, c, d \in \mathbb{R}$  байх хоёр комплекс тоог

$$(a+bi) \cdot (c+di) = (ac-bd) + (ad+bc)i$$

гэсэн дүрмээр үржүүлнэ.

Энд  $a, b, c, d$  нь бодит тоонууд тул  $ac-bd$  ба  $ad+bc$  нь мөн бодит тоо. Иймд  $(ac-bd) + (ad+bc)i$  нь комплекс тоо юм.

**Санамж.** Бодит тоотой ижлээр ихэнх тохиолдолд үржүүлэх тэмдгийг хэрэглэхгүй. Өөрөөр хэлбэл,  $z \cdot s$ -ийг  $zs$  гэж тэмдэглэдэг.

**Чанар 6.** Комплекс тооны үржүүлэх үйлдлийн хувьд **байр солих чанар** биелнэ. Хэрэв  $z, s$  нь комплекс тоо бол  $zs = sz$  байна.

**Баталгаа 1.** Хэрэв  $z = a+bi, s = c+di$  бол

$$zs = (a+bi)(c+di) = (ac-bd) + (ad+bc)i,$$

$$sz = (c+di)(a+bi) = (ca-db) + (cb+da)i$$

болов ба бодит тооны хувьд  $ac-bd = ca-db, ad+bc = cb+da$  тул батлагдав.

**Чанар 7.** Комплекс тооны үржүүлэх үйлдлийн хувьд **бүлэглэх чанар** биелнэ. Хэрэв  $z, s, t$  нь комплекс тоо бол  $(zs)t = z(st)$  байна.

Энэ чанарыг өмнөх чанарыг баталсантай адилаар баталж болно.

**Чанар 8.** Комплекс тооны хувьд **хаалт нээх чанар** биелнэ. Өөрөөр хэлбэл, хэрэв  $z, s, t \in \mathbb{C}$  бол  $z(s+t) = zs + zt$  байна.

**Баталгаа.** Хэрэв  $z = a+bi, s = c+di, t = e+fi, a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$  гэж авбал

$$\begin{aligned} z(s+t) &= (a+bi)(c+di+e+fi) = (a+bi)(c+e+(d+f)i) \\ &= a(c+e) - b(d+f) + (b(c+e) + a(d+f))i \\ &= ac - bd + (bc + ad)i + ae - bf + (be + af)i \\ &= (a+bi)(c+di) + (a+bi)(e+fi) = zs + zt \end{aligned}$$

болж батлагдав.

Иймд комплекс тооны үржүүлэх үйлдлийн хувьд бодит тооны үржүүлэх үйлдлийн бүх чанар биелнэ.

**Жишээ 1.**  $(4+5i)(2-3i)$  үйлдлийг гүйцэтгэ.

**Бодолт.**  $(4+5i)(2-3i) = (4 \cdot 2 - 5 \cdot (-3)) + (4 \cdot (-3) + 5 \cdot 2)i = 23 + (-2)i = 23 - 2i$

**Жишээ 2.**  $(-3) \cdot i$  үйлдлийг гүйцэтгэ.

**Бодолт.**

$$(-3) \cdot i = (-3 + 0i)(0 + 1i) = (-3 \cdot 0 - 0 \cdot 1) + (-3 \cdot 1 + 0 \cdot 0)i = 0 + (-3)i = (-3)i = -3i$$

болно.

Энэ жишээнээс дараах чанарыг гаргаж болно.

**Чанар 9.**  $b$  бодит тоог  $i$  хуурмаг тоогоор үржүүлбэл  $bi$  гэсэн хуурмаг тоо гарна.  
Өөрөөр хэлбэл  $b \cdot i = bi$  байна.

**Баталгаа.**  $b \cdot i = (b + 0i)(0 + i) = (b \cdot 0 - 0 \cdot 1) + (0 \cdot 0 + b \cdot 1)i = 0 + bi = bi$ .

**Жишээ 3.** 2 ба 3 бодит тоонуудыг комплекс тоо гэж үзээд үржүүл.

**Бодолт.**  $2 \cdot 3 = (2 + 0i)(3 + 0i) = 2 \cdot 3 - 0 \cdot 0 + (2 \cdot 0 + 0 \cdot 3)i = 6 - 0 + 0i = 6$  буюу бодит тооны үржүүлэх үйлдэлтэй адил байна.

**Жишээ 4.** Хэрэв  $a, b \in \mathbb{R}$  бол  $(a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$  гэж харуул.

**Бодолт.**  $(a + bi)(a - bi) = (a^2 - (-b^2)) + (-ab + ab)i = a^2 + b^2 + 0i = a^2 + b^2$ .

**Жишээ 5.** 5 гэсэн тоог хоёр комплекс тооны үржвэр болго.

**Бодолт.** Өмнөх жишээний томьёог ашиглан дараах байдлаар үржвэр болгон бичиж болно.

$$\begin{aligned} 5 &= 1 + 4 = 1^2 + 2^2 = (1 + 2i)(1 - 2i) \\ 5 &= 4 + 1 = 2^2 + 1^2 = (2 + i)(2 - i) \end{aligned}$$

### Комплекс тооны натурал тоон зэрэг

Комплекс тооны натурал тоон зэрэг  $z^n$  нь бодит тоотой ижлээр  $z$  тоог  $n$  удаа үржүүлсэн үржвэрийг хэлдэг.

**Жишээ 6.** Хэрэв  $z = i$  бол  $z^2$ -ийг ол.

**Бодолт.**  $z^2 = i^2 = (0 + i)(0 + i) = (0 - 1) + (0 + 0)i = -1$  буюу  $i^2 = -1$ .

**Жишээ 7.** Хэрэв  $z = 1 + 2i$  бол  $z^2, z^3$ -ийг ол.

**Бодолт.**  $z^2 = (1 + 2i)^2 = (1 + 2i)(1 + 2i) = (1 - 4) + (2 + 2)i = -3 + 4i$  болох ба

$z^3 = (1 + 2i)^3 = (1 + 2i)^2(1 + 2i) = (-3 + 4i)(1 + 2i) = (-3 - 8) + (-6 + 4)i = -11 - 2i$  болно.

**Жишээ 8.**  $(a + bi)^2$  илэрхийллийг хялбарчил.

**Бодолт.**  $(a + bi)^2 = (a + bi)(a + bi) = a^2 - b^2 + (ab + ba)i = a^2 - b^2 + 2abi$

**Жишээ 9.**  $\frac{2}{3}(6 + 5i) + \frac{3}{4}\left(-4 - \frac{8}{9}i\right)$  илэрхийллийг хялбарчил.

**Бодолт.**  $\frac{2}{3}(6 + 5i) + \frac{3}{4}\left(-4 - \frac{8}{9}i\right) = 4 + \frac{10}{3}i - 3 + \frac{2}{3}i = 1 + \frac{12}{3}i = 1 + 4i$  болно.

**Жишээ 10.** Хэрэв  $p(x) = 3x^2 + 5x - 4$  бол  $p(2 + i)$ -ыг ол.

$$\text{Бодолт. } p(2 + i) = 3(2 + i)^2 + 5(2 + i) - 4 = 3(3 + 4i) + 10 + 5i - 4 = 15 + 17i$$

**Жишээ 11.** Хэрэв  $p(z) = (3 + 2i)z^2 + (2 + i)z + 4 - 3i$  бол  $p(2 - i)$ -ыг ол.

**Бодолт.**

$$p(2 - i) = (3 + 2i)(2 - i)^2 + (2 + i)(2 - i) + 4 - 3i = (3 + 2i)(3 - 4i) + 4 + 1 + 4 - 3i = 26 - 9i$$

### ДАСГАЛ

**10.** Илэрхийллийг хялбарчил.

а)  $\frac{1}{2}(2 - 5i) - \frac{1}{6}(8 - 2i)$

б)  $\frac{1}{4}(5 - 6i) + \frac{1}{2}(5i) + \frac{3}{2}(7 + 6i)$

в)  $\frac{1}{3}(7 - 4i) + \frac{1}{6}(10 + 2i) - (7 - 4i)$

г)  $\frac{1}{3}(2 - 5i) - \frac{1}{6}(8 - 2i)$

д)  $\frac{1}{2}(2 - 5i) - \frac{1}{6}(8 - 2i)$

е)  $\frac{1}{3}(7 - 4i) + \frac{1}{6}(10 + 2i)$

**11.** Илэрхийллийг хялбарчил.

а)  $(-4i)^2$

б)  $(2i)(-7i)$

в)  $(3i)(-2 + 6i)$

г)  $(-2i)^2$

д)  $(6i)(-4i)$

е)  $(2i)^3$

ё)  $(-3 + 5i)(-5 + 7i)$

ж)  $(5 - 3i)(-8 + 5i)$

з)  $(5 + 5i)(-3 - 7i)$

и)  $(7 - 4i)(6 - 6i)$

й)  $(-5 + 4i)(-2 + 2i)$

к)  $5(-i)(-4 + 6i)$

л)  $(1 + 4i)(3 + 6i)$

м)  $(8 + 7i)^2$

н)  $(3 + 8i)(-2 - i)$

о)  $(-1 + 6i)^2$

ө)  $(-1 - 8i)(6 - 5i)$

п)  $(8 - 2i)^2$

р)  $(8 + 5i)(-6 - 2i)$

с)  $8(-2i)(-5 - 4i)$

**12.** Илэрхийллийг хялбарчил.

а)  $(2 - i)^2$

б)  $(-4 - 4i)(1 - 3i)$

в)  $(7 - 2i)(6 - 4i)$

г)  $(4 - 3i)(6 - 6i)$

д)  $(-2 - 3i)(7 + 7i)$

е)  $(4i)(-2i)(-8 + 4i)$

ё)  $(-2i)(6i)(4 + 6i)$

ж)  $(7i)(6i)(-3 - 5i)$

з)  $(1 + 3i)(-4 - 7i)(6 - 5i)$

и)  $(2 + 3i)^2(4 + i)$

й)  $(2 - 6i)(7 + 7i)(3 + 3i)$

к)  $(3 - 2i)^3$

л)  $(-4i)(-8 - 8i)(1 - 8i)$

м)  $(7 + 3i)(-7 + 5i)(-8 - 4i)$

н)  $(2 - 3i)(4 - 5i)(1 + 3i)$

## 7.4. ХОЁР КОМПЛЕКС ТООНЫ ТЭНЦҮҮГИЙН ТОДОРХОЙЛОЛТЫГ ХЭРЭГЛЭХ

**Жишээ 1.**  $(x + 2y + 1) + (2x - y)i = 0$  байх  $x, y$  бодит тоог ол.

**Бодолт.** Хоёр комплекс тоо тэнцүү байх нөхцөлөөс

$$(x + 2y + 1) + (2x - y)i = 0 = 0 + 0i$$

гэдгээс

$$\begin{cases} x + 2y + 1 = 0 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$$

тэгшитгэлийн систем үүснэ. Энэ тэгшитгэлийн системийг бодвол  $x = -0.2$  ба  $y = -0.4$  гэж гарна.

Комплекс тоо тэг байна гэдэг нь түүний бодит ба хуурмаг хэсгүүд тус бүр тэг байхыг хэлдэг. Өөрөөр хэлбэл комплекс тооны тэг элемент цор ганц оршин байдаг. Энэхүү чанараас хоёр комплекс тоо тэнцэх нөхцөлийг гарган авч болдог. Хэрэв  $a + bi = c + di$  бол

$$0 = a + bi - (c + di) = a - c + (b - d)i$$

болов ба эндээс  $a - c = 0$ ,  $b - d = 0$  буюу  $a = c$ ,  $b = d$  болно.

**Жишээ 2.**  $(x + yi)(3 - i) = 1 + 2i$  байх  $x$ ,  $y$  бодит тоог ол.

**Бодолт.**  $(x + yi)(3 - i) = (3x + y) + (3y - x)i$  тул  $(3x + y) + (3y - x)i = 1 + 2i$  гэж гарна. Хоёр комплекс тоо тэнцүү учир бодит ба хуурмаг хэсэг нь тэнцүү.

Иймд  $\begin{cases} 3x + y = 1 \\ 3y - x = 2 \end{cases}$  тэгшитгэлийн систем үүснэ. Энэ системийг бодоход  $x = 0.1$ ,  $y = 0.7$  гэж гарна.

**Жишээ 3.** Квадрат зэрэг дэвшүүлэхэд буюу өөрийг нь өөрөөр нь үржүүлэхэд  $1 + 2i$  гарах бүх комплекс тоог ол.

**Бодолт.**  $a + bi$  гэсэн комплекс тооны квадрат зэрэг нь  $1 + 2i$  тоо гардаг  $a$ ,  $b$  бодит тоог ольё. Өөрөөр хэлбэл  $(a + bi)^2 = (a + bi)(a + bi) = (a^2 - b^2) + 2abi = 1 + 2i$  байх  $a$ ,  $b$  бодит тоог олно. Энэ нь хоёр комплекс тоо тэнцүү гэдгээс

$\begin{cases} a^2 - b^2 = 1 \\ ab = 1 \end{cases}$  тэгшитгэлийн систем гарна. Энэ тэгшитгэлийн системийг бодоход

$$a_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, b_1 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \text{ ба } a_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}, b_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

гэсэн шийд гарах тул  $z_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} + i \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ ,  $z_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} + i \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$  гэсэн комплекс тоо бодлогын нөхцөлийг хангана. Эдгээр тоог квадрат зэрэг дэвшүүлэн  $1 + 2i$  гарч буй эсэхийг шалгаж болно.

**Жишээ 4.**  $z^2 + 2(1+i)z + 3 - 2i = 0$  нөхцөлийг хангах бүх  $z$  комплекс тоог ол.

**Бодолт.**  $(1+i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 2i$  учир

$z^2 + 2(1+i)z + 3 - 2i = z^2 + 2(1+i)z + (1+i)^2 - 2i + 3 - 2i = (z + 1 + i)^2 + 3 - 4i = 0$  болно. Эндээс  $(z + 1 + i)^2 = -3 + 4i$  болох ба квадрат нь  $-3 + 4i$  гарах комплекс тоо олох хэрэгтэй боллоо.  $a + bi$  гэсэн комплекс тооны квадрат зэрэг  $-3 + 4i$  тоо гардаг байхаар  $a$ ,  $b$  бодит тоог ольё. Өөрөөр хэлбэл,

$$(a + bi)^2 = (a + bi)(a + bi) = (a^2 - b^2) + 2abi = -3 + 4i$$

байх  $a$ ,  $b$  бодит тоог олно. Энэ нь хоёр комплекс тоо тэнцүү гэдгээс

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = -3 \\ ab = 2 \end{cases}$$

тэгшигтгэлийн систем үүснэ. Хэрэв энэ тэгшигтгэлийн системийг бодвол  
 $a_1 = -1, b_1 = -2$  ба  $a_2 = 1, b_2 = 2$

гэсэн шийд гарна. Иймээс  $z + 1 + i = -1 - 2i, z + 1 + i = 1 + 2i$  болох бөгөөд эндээс  $z = -2 - 3i, z = i$  гэсэн хоёр комплекс тоо бодлогын нөхцөлийг хангана.

### Дасгал.

13.  $(2x - y + 3) + (x + y)i = 0$  байх  $x, y$  бодит тоог ол.
14.  $(x + yi)(5 + 3i) = 7 + 7i$  байх  $x, y$  тоог ол.
15. Квадрат зэрэг нь  $4 + 3i$  гарах бүх комплекс тоог ол.
16.  $z^2 + 2(2 - i)z - 5 - 10i = 0$  нөхцөлийг хангах бүх  $z$  комплекс тоог ол.

## 7.5. КОМПЛЕКС ТООНЫ ХУВААХ ҮЙЛДЭЛ

Энэ сэдвийн хүрээнд бодит тооны урвуу болон хуваах үйлдэлтэй адилаар комплекс тооны урвуу болон хуваах үйлдлийг тодорхойлж шинж чанарыг нь судална.

**Тодорхойлолт.** Аливаа  $z = a + bi$  комплекс тооны хувьд хэрэв  $(a + bi)(x + yi) = 1$  байх  $x + yi$  гэсэн комплекс тоо олддог бол уг тоог  $a + bi$  тооны урвуу тоо гээд  $z^{-1}$  гэж тэмдэглэдэг.

**Жишээ 1.**  $z = 2 + 3i$  тооны урвуу тоог ол.

**Бодолт.**  $(2 + 3i)(x + yi) = 1$  байх ёстой гэдгээс үржүүлэх үйлдлийн дүрэм ёсоор  $(2x - 3y) + (3x + 2y)i = 1$  болно. Эндээс хоёр комплекс тоо тэнцүү тул

$$\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ 3x + 2y = 0 \end{cases}$$

болно. Эндээс  $x = \frac{2}{13}, y = -\frac{3}{13}$  гэж гарах тул  $z = 2 + 3i$  тооны урвуу нь  $z^{-1} = \frac{2}{13} - \frac{3}{13}i$  болов.

Энэ жишээтэй адилаар  $z = a + bi \neq 0$  комплекс тооны урвуу тоо нь

$$z^{-1} = \frac{a}{a^2 + b^2} + \frac{-b}{a^2 + b^2}i$$

гэж гарна. Энд  $a, b$  нь бодит тоо тул  $\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2}$  нь бас бодит тоо. Иймд гарсан илэрхийлэл комплекс тоо болно. Үүнийг шалгавал

$$(a + bi) \left( \frac{a}{a^2 + b^2} + \frac{-b}{a^2 + b^2}i \right) = \frac{a^2}{a^2 + b^2} + \frac{b^2}{a^2 + b^2} + \left( \frac{ab}{a^2 + b^2} + \frac{-ab}{a^2 + b^2} \right)i = \frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2} = 1$$

Аливаа комплекс  $a + bi$  тоог  $c + di \neq 0$  ( $c \neq 0, d \neq 0$ ) комплекс тоонд хуваана гэдэг нь бодит тооны хуваахтай ижлээр  $a + bi$  тоог  $c + di$  тооны урвуугаар үржүүлнэ гэсэн үг. Өөрөөр хэлбэл,

$\frac{a+bi}{c+di} = (a+bi)(c+di)^{-1} = (a+bi)\left(\frac{c}{c^2+d^2} + \frac{-d}{c^2+d^2}i\right) = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$

болно. Энд  $c+di \neq 0$  гэдгээс  $c^2+d^2 \neq 0$  байх ба  $\frac{ac+bd}{c^2+d^2}, \frac{bc-ad}{c^2+d^2}$  нь бодит тоо учир гарсан илэрхийлэл маань комплекс тоо болно.

**Санамж** Уржвэр ба ногдвор олдог томъёог цээжилж, түүнийгээ бодлого бодоход ашиглахаас илүү хаалт задлах болон хүртвэр хуваарийг комплекс тоогоор үржүүлж хуваарийг бодит тоо болгох аргыг ашиглах нь илүү хялбар байдаг.

**Жишээ 2.**  $\frac{1+2i}{4+3i}$  бутархайг  $a+bi$  хэлбэрээр илэрхийл.

**Бодолт.** 7.3 сэдвийн жишээ 4-д үзүүлсэн  $(a+bi)(a-bi) = a^2 + b^2$  томъёог ашиглавал

$$\frac{1+2i}{4+3i} = \frac{(1+2i)(4-3i)}{(4+3i)(4-3i)} = \frac{(4+6)+(8-3)i}{16+9} = \frac{2}{5} + \frac{1}{5}i$$

**Чанар 10.** Комплекс тоон тэнцэтгэлийн хоёр талыг нэг ижил комплекс тоогоор үржүүлэхэд тэнцэтгэл хэвээрээ байна.

**Мөрдлөгөө.** Хэрэв  $c+di \neq 0$  ба  $(x+yi)(c+di) = a+bi$  бол  $x+yi = \frac{a+bi}{c+di}$  байна.

**Баталгаа.** Өгсөн тэнцэтгэлийн хоёр талыг  $(c+di)^{-1}$  тоогоор үржүүлбэл

$$(x+yi)(c+di)(c+di)^{-1} = (a+bi)(c+di)^{-1}$$

болов ба эндээс  $x+yi = (a+bi)(c+di)^{-1} = \frac{a+bi}{c+di}$  болно.

**Жишээ 3.**  $(x+yi)(1+5i) = 1-5i$  байх  $x, y$  бодит тоог ол.

**Бодолт.**

Нэгдүгээр бодолт.  $(x+yi)(1+5i) = (x-5y) + (5x+y)i = 1-5i$  тул  $\begin{cases} x-5y=1 \\ 5x+y=-5 \end{cases}$

бульно. Энэ тэгшитгэлийн системийг бодоход  $\begin{cases} x = -\frac{12}{13} \\ y = -\frac{5}{13} \end{cases}$  гарна. Өөрөөр хэлбэл  $x+yi = -\frac{12}{13} - \frac{5}{13}i$  болов.

Хоёрдугаар бодолт. Өгсөн нөхцөлөөс  $x+yi = \frac{1-5i}{1+5i}$  байх тул

$$x+yi = \frac{1-5i}{1+5i} = \frac{1-5i}{1+5i} \cdot \frac{1-5i}{1-5i} = \frac{1-10i+25i^2}{1^2+5^2} = \frac{-24-10i}{26} = -\frac{12}{13} - \frac{5}{13}i$$

болно.

Хоёр комплекс тооны ногдворыг олоходоо  $c^2+d^2 = (c+di)(c-di)$  байдгийг

ашиглан  $\frac{a+bi}{c+di}$  гэсэн тоогоо  $\frac{c-di}{c-di}$  тоогоор үржүүлэх хэрэгтэй.

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$$

**ДАСГАЛ**

17.  $z_1 = 4 + 2i, z_2 = -1 + 3i$  комплекс тооны хувьд дараах хүснэгтийг нөхөөрэй.

$z_1 + z_2$	$z_1 - z_2$	$z_1 z_2$	$\frac{z_1}{z_2}$

18. Үйлдлийг гүйцэтгэ.

a) $\frac{12}{-10-11i}$	б) $\frac{3}{9-13i}$	в) $\frac{8i}{-3+3i}$	г) $\frac{-8}{-14+5i}$
д) $\frac{9i}{9+14i}$	е) $\frac{8i}{-11-6i}$	ж) $\frac{8i}{-13+i}$	ж) $\frac{1}{8-8i}$
з) $\frac{13}{-9+11i}$	и) $\frac{11i}{-2+i}$	й) $\frac{14+4i}{5+6i}$	к) $\frac{11+7i}{-1-4i}$
л) $\frac{11i}{7-4i}$	м) $\frac{11i}{-1-8i}$	н) $\frac{1+i}{6+3i}$	о) $\frac{8+12i}{-11+i}$
ө) $\frac{4-2i}{-12-2i}$	п) $\frac{4-3i}{-10-13i}$	п) $\frac{-1+6i}{1+14i}$	с) $\frac{-12-2i}{6-i}$

**7.6. КОМПЛЕКС ТООНЫ МОДУЛ БА ХОСМОГ ТОО****Комплекс тооны модул**

**Тодорхойлолт.** Аливаа  $a+bi \in \mathbb{C}$  комплекс тооны хувьд  $\sqrt{a^2+b^2}$  гэсэн сөрөг биш тоог уг тооны модул гэж нэрлээд  $|a+bi|$  гэж тэмдэглэдэг. Өөрөөр хэлбэл  $|a+bi| = \sqrt{a^2+b^2}$  байна.

Тухайлбал,  $3+2i$  комплекс тооны модул нь  $|3+2i| = \sqrt{3^2+2^2} = \sqrt{13}$  болно.

**Чанар 11.**  $z_1, z_2$  комплекс тооны хувьд дараах чанар биелнэ.

а) $ z_1 z_2  =  z_1   z_2 $	б) $\left  \frac{z_1}{z_2} \right  = \frac{ z_1 }{ z_2 }$
------------------------------	---

**Баталгаа.** а)  $z_1 = a+bi, z_2 = c+di$  ба  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  байг.

Тэгвэл  $z_1 z_2 = (a+bi)(c+di) = ac-bd+(ad+bc)i$  учир

$$|z_1 z_2| = \sqrt{(ac-bd)^2 + (ad+bc)^2} = \sqrt{a^2 c^2 - 2abcd + b^2 d^2 + a^2 d^2 + 2abcd + b^2 c^2} = \sqrt{a^2(c^2 + d^2) + b^2(c^2 + d^2)} = \sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)} = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{c^2 + d^2} = |z_1| |z_2|$$

болж батлагдав.

б)  $z_1 = a + bi$ ,  $z_2 = c + di$  ба  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  байг.

Тэгвэл  $\frac{z_1}{z_2} = \frac{a+bi}{c+di} = \frac{(ac+bd)}{c^2+d^2} + \frac{(bc-ad)}{c^2+d^2}i$  учир

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \sqrt{\frac{(ac+bd)^2}{(c^2+d^2)^2} + \frac{(bc-ad)^2}{(c^2+d^2)^2}} = \sqrt{\frac{a^2c^2 + 2abcd + b^2d^2 + b^2c^2 + 2abcd + a^2d^2}{(c^2+d^2)^2}} = \\ \sqrt{\frac{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}{(c^2+d^2)^2}} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{c^2+d^2}} = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

болж чанар батлагдав.

**Жишээ 1.** Хэрэв  $z = 2+i$ ,  $w = 1-i$  бол  $\frac{z}{w}$  комплекс тооны модул хэд вэ?

**Бодолт.** Нэгдүгээр бодолт.

$$\left| \frac{z}{w} \right| = \left| \frac{2+i}{1-i} \right| = \left| \frac{2+i}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i} \right| = \left| \frac{2+3i-1}{1+1} \right| = \left| \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i \right| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{5}{2}}$$

Хоёрдугаар бодолт. Хэрэв чанар 11-ийг ашиглавал

$$\left| \frac{z}{w} \right| = \frac{|z|}{|w|} = \frac{|2+i|}{|1-i|} = \frac{\sqrt{4+1}}{\sqrt{1+1}} = \sqrt{\frac{5}{2}}$$

болно.

**Жишээ 2.** Хэрэв  $z = 2-3i$  бол  $|z^2 + 2z + 3|$  нь хэдтэй тэнцүү вэ?

**Бодолт.**

$$|z^2 + 2z + 3| = |(2-3i)^2 + 2(2-3i) + 3| = |4 - 12i + 9i^2 + 4 - 6i + 3| = |4 - 9 + 4 + 3 - 18i| =$$

$$|2-18i| = \sqrt{2^2 + 18^2} = \sqrt{328}$$

### Хосмог тоо

**Тодорхойлолт.**  $a-bi$  комплекс тоог  $a+bi$  комплекс тооны **хосмог тоо** гэнэ.

Хэрэв  $a+bi$  комплекс тоог  $z$  гэвэл түүний хосмог тоог  $\bar{z}$ -ээр тэмдэглэдэг.

Өөрөөр хэлбэл,  $\bar{z} = \overline{a+bi} = a-bi$  байна.

Жишээлбэл,  $z = 2+5i$  үед  $\bar{z} = 2-5i$  байна.

**Жишээ 3.**  $(2+5i)(-1-3i)$  тооны хосмог тоог ол.

$$\text{Бодолт. } (2+5i)(-1-3i) = \overline{-2-5i-6i-15i^2} = \overline{13-11i} = 13+11i$$

**Чанар 12.** Хэрэв  $z, s, t, a$  нь комплекс тоо ба  $b$  нь бодит тоо бол

$$\text{а) } z + \bar{z} = 2\operatorname{Re} z, z - \bar{z} = 2i\operatorname{Im} z; \quad \text{б) } \bar{b} = b; \quad \text{в) } z\bar{z} = |z|^2; \quad \text{г) } \overline{(z \pm t)} = \bar{z} \pm \bar{t};$$

$$\text{д) } \overline{st} = \bar{s} \cdot \bar{t}, \bar{bt} = b \cdot \bar{t}; \quad \text{е) } \overline{\left(\frac{s}{t}\right)} = \frac{\bar{s}}{\bar{t}}; \quad \text{ё) } \overline{(a \cdot z^n)} = \bar{a} \cdot \bar{z}^n \text{ биелнэ.}$$

**Баталгаа.**

а) Хэрэв  $z = x + iy$  бол  $\bar{z} = x - iy$  болох тул

$$z + \bar{z} = (x + iy) + (x - iy) = 2x = 2\operatorname{Re} z$$

$$z - \bar{z} = (x + iy) - (x - iy) = 2iy = 2i \operatorname{Im} z \text{ болно.}$$

б) Бодит тооны хуурмаг хэсэг 0 учир хосмог нь өөртэйгөө тэнцүү байна.

в) Хэрэв  $z = x + yi$  бол  $\bar{z} = x - yi$  болох ба  $z\bar{z} = (x + yi)(x - yi) = x^2 + y^2 = |z|^2$  болно.

г) Хэрэв  $z = x + iy, t = a + ib$  бол

$$\overline{(z \pm t)} = \overline{(x + iy) \pm (a + ib)} = \overline{x \pm a + i(y \pm b)} = x \pm a - i(y \pm b) = (x - iy) \pm (a - ib) = \bar{z} \pm \bar{t} \text{ болно.}$$

д) Хэрэв  $z = x + yi, t = c + di$  бол

$$\overline{st} = \overline{(x + yi)(c + di)} = \overline{xc - yd + (yc + xd)i} = xc - yd - (yc + xd)i = (x - yi)(c - di) = \bar{s} \cdot \bar{t} \text{ болно. Харин } \overline{bt} = b \cdot \bar{t} \text{ чанар нь д) болон б) чанараас мөрдөн гарна.}$$

е) Хэрэв  $z = x + yi, t = a + bi$  гэвэл

$$\begin{aligned} \overline{\left(\frac{s}{t}\right)} &= \overline{\left(\frac{x + yi}{a + bi}\right)} = \overline{\left(\frac{x + yi}{a + bi} \cdot \frac{a - bi}{a - bi}\right)} = \overline{\left(\frac{(xa + yb)}{a^2 + b^2} + \frac{(ya - xb)}{a^2 + b^2}i\right)} = \frac{(xa + yb)}{a^2 + b^2} - \frac{(ya - xb)}{a^2 + b^2}i \\ \overline{\frac{s}{t}} &= \frac{x - yi}{a - bi} = \frac{x - yi}{a - bi} \cdot \frac{a + bi}{a + bi} = \frac{(xa + yb)}{a^2 + b^2} + \frac{(-ya + xb)}{a^2 + b^2}i = \frac{(xa + yb)}{a^2 + b^2} - \frac{(ya - xb)}{a^2 + b^2}i \end{aligned}$$

болж батлагдав.

ё) Дээр дурьдсан д) чанараас  $\overline{z^2} = \overline{z \cdot z} = \overline{z}^2$  гэж мөрдөн гарах ба эндээс  $\overline{z^n} = \overline{z}^n$  болно. Иймд д) чанарыг ахин хэрэглэвэл  $\overline{(a \cdot z^n)} = \bar{a} \cdot \bar{z}^n$  чанар мөрдөн гарна. Эдгээр чанарыг ашиглан дараах теоремыг баталж болно.

**Теорем.** Хэрэв  $p(x)$  нь бодит тоон коэффициенттэй олон гишүүнт,  $z, \bar{z}$  нь комплекс too ба түүний хосмог бол  $\overline{p(z)} = p(\bar{z})$  байна.

**Жишээ 4.**  $p(z) = 4z - 3$  гэсэн олон гишүүнтийн хосмогийг ол.

**Бодолт.**  $\overline{p(z)} = \overline{4z - 3} = \overline{4z} - \overline{3} = \overline{4} \bar{z} - \overline{3} = 4\bar{z} - 3 = p(\bar{z})$  болов.

**Жишээ 5.**  $p(z) = 3z^2 - 2z + 4$  гэсэн квадрат гурван гишүүнтийн хосмогийг ол.

**Бодолт.**  $\overline{p(z)} = \overline{3z^2 - 2z + 4} = \overline{3z^2} - \overline{2z} + \overline{4} = 3\bar{z}^2 - 2\bar{z} + 4 = p(\bar{z})$  болов.

**Жишээ 6.**  $\frac{(2-i)(1-2i)}{(2+3i)^2}$  гэсэн комплекс тооны хосмогийг ол.

**Бодолт.**

Нэгдүгээр бодолт.

$$\overline{\left(\frac{(2-i)(1-2i)}{(2+3i)^2}\right)} = \overline{\frac{(2-i)(1-2i)}{(2+3i)^2}} = \overline{\frac{(2-i) \cdot 1-2i}{(2+3i)^2}} = \overline{\frac{(2+i)(1+2i)}{(2-3i)^2}} = \frac{2-2+(1+4)i}{4-9-12i}$$

$$= \frac{5i}{-5-12i} = \frac{5i}{-5-12i} \cdot \frac{-5+12i}{-5+12i} = \frac{-60-25i}{25+144} = -\frac{60}{169} - \frac{25}{169}i$$

Хоёрдугаар бодолт.

$$\begin{aligned} \overline{\left( \frac{(2-i)(1-2i)}{(2+3i)^2} \right)} &= \overline{\left( \frac{2-2-5i}{4-9+12i} \right)} = \overline{\left( \frac{-5i}{-5+12i} \cdot \frac{-5-12i}{-5-12i} \right)} = \overline{\left( \frac{-60+25i}{169} \right)} \\ &= \overline{\left( -\frac{60}{169} + \frac{25}{169}i \right)} = -\frac{60}{169} - \frac{25}{169}i \end{aligned}$$

### ДАСГАЛ

19. Дараах комплекс тооны модулыг ол.

- a)  $3+4i$       б)  $5+i$       в)  $6-i$       г)  $-i+1$       д)  $\sqrt{3}+2i$

20. Хэрэв  $z=1+2i$ ,  $w=2-i$  бол дараах илэрхийллийн утгыг ол.

- a)  $|z|$       б)  $|w|$       в)  $|z+2w|$       г)  $|3w-2z|$       д)  $|zw|$       е)  $|z^2|$       ё)  $|w^2|$       ж)  $|z^2+z+1|$

21.  $|z|=5$  байх  $z$  комплекс тооны хувьд дараах тооны модулыг ол.

- a)  $|-iz|$       б)  $|(2-3i)z|$       в)  $\left| \frac{z^3}{(1-i)^2} \right|$       г)  $\left| \frac{(3+i)z}{i-3} \right|$

22. Дараах комплекс тооны хосмог тоог ол.

- a)  $1+3i$       б)  $3-2i$       в)  $-6-i$       г)  $-i+1$       д)  $-\sqrt{3}i-1$

23. Дараах комплекс тооны хосмог тоог ол.

- a)  $(1+i)^2$       б)  $(5-4i)^2$       в)  $(3-4i)(7-4i)$       г)  $(1-3i)^2 + (2+3i)^2$

24. Хялбарчилж хосмог тоог ол.

- a)  $(2+3i)(4-5i)+(6-i)(3+5i)$ .      б)  $(i+1)^3$

25. Бутархайг  $a+bi$  хэлбэрт бичээд хосмог тоог ол.

- a)  $\frac{3-2i}{1+i}$       б)  $\frac{2+3i}{3-i}$       в)  $\frac{x-yi}{x+yi}$

26. Дараах комплекс тооны хосмог тоог ол.

- a)  $\frac{2}{1+2i} + \frac{1}{2+i}$       б)  $\frac{1}{x+2yi} + \frac{1}{x-2yi}$       в)  $\frac{(1+3i)(8-i)}{(2+i)^2}$

27. Хэрэв  $z=a+bi$  бол дараах тэнцэтгэлийг үнэн болохыг харуул.

- a)  $|z| = |\bar{z}|$       б)  $|z\bar{z}| = |z|^2$       в)  $|z^2| = |z|^2$       г)  $|z^3| = |z|^3$

28.  $|z|=3$  байх  $z$  комплекс тооны хувьд дараах тооны модулыг ол.

а) $\left  \frac{i+1}{z} \right $	б) $\left  \frac{i}{\bar{z}} \right $	в) $\left  \frac{z}{3-4i} \right $	г) $\left  \frac{z^3}{(1-i)^2} \right $
-----------------------------------	---------------------------------------	------------------------------------	---

29. Квадрат зэрэг нь  $-i$  байх бүх комплекс тоог ол.

30. Хэрэв  $z=1+i$ ,  $w=1-2i$  бол дараах тоог ол.

а) $\bar{z}$	б) $\bar{w}$	в) $\overline{zw}$	г) $\frac{\bar{z}}{\bar{w}}$
--------------	--------------	--------------------	------------------------------

31. Хэрэв  $z=1+3i$ ,  $w=2-i$  дараах тоог ол.

а) $ z $	б) $ w $	в) $ zw $	г) $\left  \frac{z}{w} \right $
----------	----------	-----------	---------------------------------

32. Хэрэв  $z=1-i$ ,  $w=2+i$  бол дараах тоог ол.

а) $\overline{z+w}$	б) $\overline{z-w}$	в) $\overline{z+\bar{w}}$	г) $\overline{\bar{z}+w}$
---------------------	---------------------	---------------------------	---------------------------

33. Хэрэв  $z=2+2i$ ,  $w=1+i$  бол дараах тоог ол.

а) $ z+w $	б) $ z-w $	в) $ z+ w  $	г) $\ z - w \ $
------------	------------	--------------	-----------------

34. Хэрэв  $z=2i-1$ ,  $w=i-1$  бол дараах тоог ол.

а) $ \bar{z} $	б) $ \bar{w} $	в) $ z+\bar{w} $	г) $ \bar{z}+w $
----------------	----------------	------------------	------------------

35.  $(1+2\sqrt{2}i)^3$  тооны модулыг ол

36. Өгсөн  $z=1+\sqrt{2}i$ ,  $w=1-\sqrt{2}i$  хоёр тооны модул тэнцүү болохыг харуул.

37. Дараах тоог хуваарь дахь тооны хосмог тоог ашиглан  $a+bi$  хэлбэртэй болгон бич.

а) $\frac{2+i}{i}$	б) $\frac{1}{6+3i}$	в) $\frac{3-\sqrt{2}i}{3+\sqrt{2}i}$	г) $\frac{1}{i}$
--------------------	---------------------	--------------------------------------	------------------

38. Тэгшитгэл бод.

а) $ z -iz=1-2i$	б) $z \cdot \bar{z} - 2i \cdot \bar{z} = 1+2i$	в) $z^2 + 2\bar{z} + 1 = 0$
------------------	--	-----------------------------

39.  $\frac{x}{2+i} + \frac{y}{2-i} = 6+i$  нөхцөлийг хангах  $x, y$  бодит тоог ол.

40. Хэрэв  $z^2 = 8-6i$  бол  $z \cdot \bar{z}$  илэрхийллийн утга хэд гарах вэ?

41. Дараах нөхцөлийг хангах  $z$  комплекс тоог ол.

а) $(2+i)z + 3(2-\bar{z}) = 0$	б) $(2-3i)\bar{z} - 4(3-z\bar{i}) = 0$
--------------------------------	--

42. Хэрэв  $z=2+i$  бол  $z^2(z-2) - z(z-2)(3z-4)$  илэрхийллийг  $a+bi$  хэлбэрт бичээд хосмог тоог ол.

43. Хэрэв  $z$  комплекс тооны хувьд  $z^2 - \bar{z} + 4 = 0$  бол  $\bar{z}^2 - z - 2$  илэрхийлэл хэдтэй тэнцүү вэ?

## 7.7. БОДИТ КОЭФФИЦИЕНТТЭЙ КВАДРАТ ТЭГШИТГЭЛИЙН КОМПЛЕКС ТООН ЯЗГУУР

Бодит тоон шийдгүй квадрат тэгшитгэл авч үзье.

**Жишээ 1.**

$$x^2 + 4x + 8 = 0 \text{ тэгшитгэлийн язгуурыг ол.}$$

**Бодолт.**

$x^2 + 4x + 8 = 0$  тэгшитгэлийн дискриминант  $D = 16 - 32 = -16 < 0$  тул бодит тоон язгуургүй байна.

Иймд  $x^2 + 4x + 8 = 0$  тэгшитгэл  $a, b \in \mathbb{R}$  үед  $x = a + bi$  гэсэн комплекс тоон язгууртай гэж үзээд, түүнийг тэгшитгэлд орлуулбал  $(a + bi)^2 + 4(a + bi) + 8 = 0$  болох ба хаалтаа задалбал  $a^2 + 2abi - b^2 + 4a + 4bi + 8 = 0$  гэж гарна. Одоо бодит ба хуурмаг хэсгийг ялгавал  $(a^2 - b^2 + 4a + 8) + i(2ab + 4b) = 0$  болно.

Эндээс  $(a^2 - b^2 + 4a + 8) + i(2ab + 4b) = 0 + i \cdot 0$  буюу

$$\begin{cases} a^2 - b^2 + 4a + 8 = 0 \\ 2ab + 4b = 0 \end{cases} \text{ гэсэн тэгшитгэлийн систем үүснэ. } 2ab + 4b = 0 \text{ гэдгээс } b = 0$$

буюу  $a = -2$  гэж гарна.

- $b = 0$  үед  $a^2 - b^2 + 4a + 8 = 0$  тэгшитгэл  $a^2 + 4a + 8 = 0$  болох бөгөөд энэ нь бодит тоон шийдгүй.
- $a = -2$  үед  $a^2 - b^2 + 4a + 8 = 0$  тэгшитгэл нь

$$(-2)^2 - b^2 + 4(-2) + 8 = 0$$

$$4 - b^2 - 8 + 8 = 0$$

$$b^2 = 4 \text{ болно.}$$

Эндээс  $b = 2$  эсвэл  $b = -2$  гэсэн шийдтэй болж  $a = -2$ ,  $b = 2$  эсвэл  $a = -2$ ,  $b = -2$  гэсэн хос шийд гарна.

Өөрөөр хэлбэл,  $x^2 + 4x + 8 = 0$  тэгшитгэл  $x_1 = -2 + 2i$ ,  $x_2 = -2 - 2i$  гэсэн хоёр комплекс тоон язгууртай.  $\bar{x}_1 = x_2$  учир уг хоёр шийд нь хоорондоо хосмог байна.

**Теорем.** Бодит коэффициенттэй квадрат тэгшитгэлийн комплекс тоон хоёр язгуур хосмог тоо байна.

**Баталгаа.** Хэрэв  $a, b, c$  бодит тоо,  $ax^2 + bx + c = 0$  тэгшитгэлийн нэг язгуур  $z$  комплекс тоо бол  $az^2 + bz + c = 0$  болох ба тэгшитгэлийн хоёр талаас хосмог авч, хосмогийн чанарыг хэрэглэвэл

$$\overline{az^2 + bz + c} = \overline{az^2} + \overline{bz} + \overline{c} = a\bar{z}^2 + b\bar{z} + c = 0$$

болно.

Эндээс  $ax^2 + bx + c = 0$  квадрат тэгшитгэлийн нэг язгуур нь  $z$  бол нөгөө язгуур  $\bar{z}$  болж батлагддаг.

Энэ теоремоос үндэслэн  $ax^2 + bx + c = 0$  квадрат тэгшитгэл

$$b^2 - 4ac > 0 \text{ үед } x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

гэсэн хоёр бодит язгууртай,

$$b^2 - 4ac = 0 \text{ үед } x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$$

гэсэн давхардсан хоёр бодит язгууртай,

$$b^2 - 4ac < 0 \text{ үед } x_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$$

гэсэн хоёр комплекс тоон шийдтэй байна.

Мөн  $x_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$  энэ томъёоноос шийдүүд нь

$$x_1 = \frac{-b + i\sqrt{4ac - b^2}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - i\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$$

болов бөгөөд

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= \frac{-b + i\sqrt{4ac - b^2}}{2a} + \frac{-b - i\sqrt{4ac - b^2}}{2a} = -\frac{b}{a} \\ x_1 \cdot x_2 &= \frac{-b + i\sqrt{4ac - b^2}}{2a} \cdot \frac{-b - i\sqrt{4ac - b^2}}{2a} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a} \end{aligned}$$

болно. Иймд квадрат тэгшитгэлийн шийд  $x_1, x_2$ -ын хувьд

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

адитгал биелэхийг харж болно.

## Жишээ 2.

Хэрэв  $2x^2 + px + q = 0$  квадрат тэгшитгэлийн нэг язгуур  $3 - 5i$  бол

а) нөгөө язгуурыг ол.

б)  $p, q$  хоёр бодит тоог ол.

**Бодолт а)** Θmnөх теорем ёсоор нэг язгуур  $3 - 5i$  гэдгээс нөгөө язгуур  $3 + 5i$  байна.

б) Нэгдүгээр арга.

Квадрат тэгшитгэлийн язгуур  $x_1, x_2$  байг. Тэгвэл  $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{p}{2} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{q}{2} \end{cases}$  болно.

$$p = -2(x_1 + x_2) = -2(3 - 5i + 3 + 5i) = -12,$$

$$q = 2x_1 \cdot x_2 = 2(3 - 5i)(3 + 5i) = 2(9 - 25i^2) = 64.$$

$2x^2 + px + q = 0$  тэгшитгэлд  $p = -12$ ,  $q = 64$  орлуулбал  $2x^2 - 12x + 68 = 0$  болно.

Хоёрдугаар арга.  $3 - 5i$ ,  $3 + 5i$  өгсөн тэгшитгэлийн язгуур тул

$$\begin{cases} 2(3 - 5i)^2 + p(3 - 5i) + q = 0 \\ 2(3 + 5i)^2 + p(3 + 5i) + q = 0 \end{cases}$$

тэгшитгэлийн систем гарна.

систем биелнэ. Тэгшитгэлийн системийг бодвол

$$2(3 - 5i)^2 + p(3 - 5i) - 2(3 + 5i)^2 - p(3 + 5i) = 0$$

буюу  $p = -12$  болно. Тэгшитгэлийн системд  $p = -12$  орлуулбал  $q = 64$  гэж олдоно.

### ДАСГАЛ

44. Тэгшитгэл бод.

- |                  |                   |                       |
|------------------|-------------------|-----------------------|
| a) $x^2 + 1 = 0$ | б) $x^2 + 16 = 0$ | в) $x^3 + 27 = 0$     |
| г) $x^2 = -3$    | д) $x^2 + 8 = 0$  | е) $x^2 + 2x + 4 = 0$ |

45. Хэрэв  $x^2 + px + q = 0$  квадрат тэгшитгэлийн нэг язгуурыг өгсөн бол  $p$ ,  $q$  хоёр бодит тоог ол.

- |        |          |             |                           |
|--------|----------|-------------|---------------------------|
| а) $i$ | б) $-3i$ | в) $2i + 1$ | г) $\sqrt{3}i - \sqrt{5}$ |
|--------|----------|-------------|---------------------------|

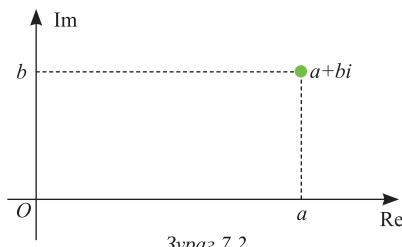
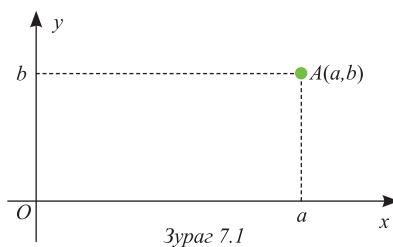
46. Тэгшитгэлийн язгуур ол.

- |                  |                       |                       |
|------------------|-----------------------|-----------------------|
| а) $x^2 + 5 = 0$ | б) $x^2 + 3x + 3 = 0$ | в) $x^3 + 8 = 0$      |
| г) $x^4 = 1$     | д) $x^4 - 16 = 0$     | е) $x^2 + 2x + 5 = 0$ |

## 7.8. КОМПЛЕКС ТООНЫ ГЕОМЕТР ДҮРСЛЭЛ

Хавтгай дахь тэгш өнцөгт координатын системийн  $(a, b)$  координаттай цэгт  $a + bi$  гэсэн комплекс тоог харгалзуулж болдог. Мөн  $a + bi$  комплекс тоонд  $(a, b)$  координаттай хавтгайн цэг харгалзана. (Зураг 7.1)

Комплекс тооны бодит хэсгийг  $Ox$  тэнхлэг дээр, хуурмаг хэсгийг  $Oy$  тэнхлэг дээр авч хавтгайд цэгээр тэмдэглэхийг (Зураг 7.2) **комплекс тоон хавтгай** буюу **Аргандын диаграммаар дүрслэх** гэдэг.  $Ox$  тэнхлэгийг бодит тэнхлэг гэж иерлээд  $Re$ ,  $Oy$  тэнхлэгийг хуурмаг тэнхлэг гээд  $Im$  гэж тэмдгэлэдэг. Комплекс тоон хавтгайг математикт анх John-Robert Argand (1768-1822) оруулж иржээ.



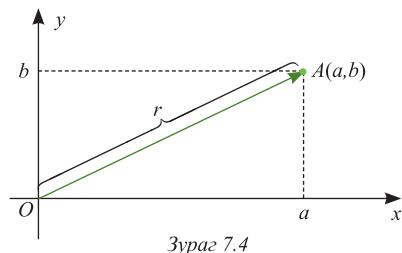
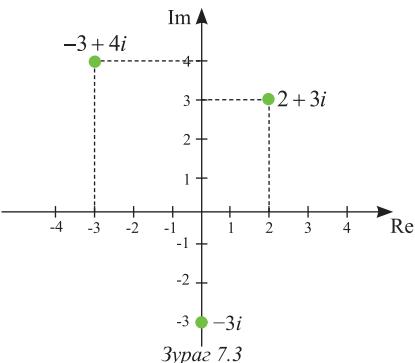
**Жишээ 1.** Комплекс тоон хавтгайд  $-3i$ ,  $2+3i$ ,  $-3+4i$  тоонуудыг дүрсэлж.

**Бодолт.**  $-3i$  тоог хуурмаг тэнхлэг дээр дүрсэлж болно. Мөн  $2+3i$  тоог  $(2, 3)$  координаттай цэгээр тэмдэглэж болох юм. Үүний адил аар  $-3+4i$  тоог  $(-3, 4)$  координаттай цэгээр тэмдэглэж болно. (Зураг 7.3)

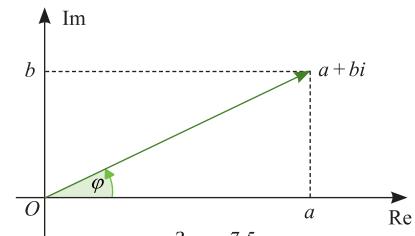
$a+bi$  комплекс тоог  $A(a, b)$  цэгээр дүрсэлдэг.

Мөн хавтгайн  $A$  цэг болгонд  $\overrightarrow{OA}$  векторыг харгалзуулж болдог. Иймд  $a+bi$  комплекс тоонд  $\overrightarrow{OA}$  радиус векторыг харгалзуулах нь илүү тохиромжтой. Тухайлбал  $\overrightarrow{OA}$  векторын уртыг  $r$  гэвэл  $r = \sqrt{a^2 + b^2}$  гэж олддог бөгөөд  $a+bi$  комплекс тооны модул  $|a+bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$  тул комплекс тооны модул нь түүнд харгалзах цэгийн радиус векторын урттай тэнцэнэ. (Зураг 7.4)

$\overrightarrow{OA}$  вектор ба  $Ox$  тэнхлэгийн нэгж вектор хоёрын хоорондох өнцгийг  $\varphi$  гэе. Тэгвэл  $\varphi$  өнцгийг  $-\pi < \varphi \leq \pi$  гэж үзэж болох ба түүнийг  $a+bi$  комплекс тооны аргумент гэж нэрлээд,  $\arg(a+bi)$  тэмдэглэдэг. Өөрөөр хэлбэл  $\arg(a+bi) = \varphi$  юм. (Зураг 7.5)



Зураг 7.4



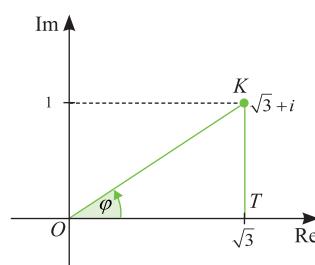
Зураг 7.5

**Жишээ 2.** Тоонуудыг комплекс тоон хавтгайд

дүрсэлж, аргументын утгыг ол. а)  $\sqrt{3}+i$  б)  $-\sqrt{3}+i$  в)  $-\sqrt{3}-i$  г)  $\sqrt{3}-i$

**Бодолт.** Дээрх комплекс тоо тус бүрийн модул 2 гарна.

а)  $\sqrt{3}+i$  тоо I мөчид орших тул  $\arg(\sqrt{3}+i)$  нь эерэг, хурц өнцөг байна.  $\arg(\sqrt{3}+i) = \varphi$  гэвэл  $OKT$  тэгш өнцөгт гурвалжны  $\angle KOT$  хурц өнцгийн эсрэг орших катетыг налсан катетад харьцуулсан харьцаа  $\operatorname{tg}\varphi$  гэдгээс  $\operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{\sqrt{3}}$  буюу  $\varphi = \frac{\pi}{6}$  болно. Зураг 6-д



Зураг 7.6

б)  $-\sqrt{3}+i$  тоо II мөчид орших тул  $\arg(-\sqrt{3}+i)$  нь эерэг ба мохoo өнцөг байна. Хэрэв  $\arg(-\sqrt{3}+i) = \varphi$  гэвэл  $OLH$  тэгш өнцөгт

гурвалжны  $\pi - \varphi$  өнцгийн эсрэг катетыг налсан катетад харьцуулсан харьцаа  $\operatorname{tg}(\pi - \varphi)$  гэдгээс

$$\operatorname{tg}(\pi - \varphi) = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ буюу } \pi - \varphi = \frac{\pi}{6} \text{ болно. Эндээс}$$

$$\varphi = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} \text{ гэж гарна. (Зураг 7.7)}$$

в)  $-\sqrt{3} - i$  тоо III мөчид орших тул  $\arg(-\sqrt{3} - i) = \varphi$

сөрөг бөгөөд мохоо өнцөг байна.  $SMO$  тэгш өнцөгт гурвалжны хувьд  $\angle SMO$  хурц өнцгийн эсрэг орших катетыг налсан катетад харьцуулбал

$$\operatorname{tg} \angle SMO = \frac{SM}{SO} = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ гэж гарах учир } \angle SMO = \frac{\pi}{6}$$

болно. Иймд  $\angle MOQ = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$  гэдгээс

$$\varphi = \arg(-\sqrt{3} - i) = -\frac{5\pi}{6} \text{ болно. (Зураг 7.8)}$$

г)  $\sqrt{3} - i$  тоо IV мөчид орших тул  $\arg(\sqrt{3} - i) = \varphi$

сөрөг бөгөөд хурц өнцөг байна.  $OPN$  тэгш өнцөгт гурвалжны хувьд  $\angle PON$  хурц өнцгийн эсрэг орших катетыг налсан катетад харьцуулбал

$$\operatorname{tg} \angle PON = \frac{PN}{OP} = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ гэж гарах учир } \angle PON = \frac{\pi}{6}$$

болно. Иймд  $\varphi = \arg(\sqrt{3} - i) = -\frac{\pi}{6}$  болно. (Зураг 7.9)

#### Жишээ 4.

Хэрэв  $a + bi$  комплекс тооны модул нь 2 бол дараах өгөгдсөн аргументын хувьд  $a$ ,  $b$  тоо,  $a + bi$  комплекс тоог ол.

а)  $\arg(a + bi) = \frac{\pi}{6}$     б)  $\arg(a + bi) = \frac{\pi}{3}$     в)  $\arg(a + bi) = -\frac{\pi}{6}$     г)  $\arg(a + bi) = -\frac{\pi}{3}$

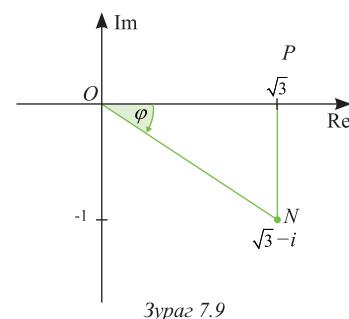
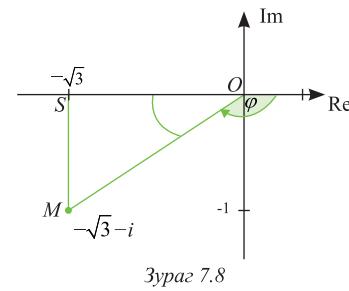
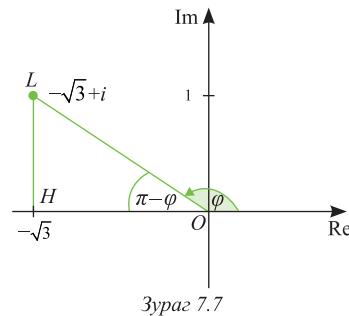
#### Бодолт

а)  $a + bi$  комплекс тооны модул нь  $|a + bi| = 2$  ба аргумент нь  $\arg(a + bi) = \frac{\pi}{6}$  учраас I мөчид орших тул  $a, b$  хоёр тоо нь эерэг бодит тоо байна.

Тэгш өнцөгт гурвалжны хурц өнцгийн эсрэг катетыг гипотенузад харьцуулсан

харьцаа нь  $\sin \frac{\pi}{6}$  гэдгээс  $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{b}{|a + bi|} = \frac{b}{2}$  болох ба  $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$  байдгийг

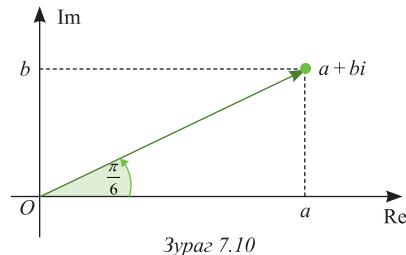
тооцвол  $\frac{b}{2} = \frac{1}{2}$  болж  $b = 1$  болно.



Мөн  $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{a}{|a+bi|} = \frac{a}{2}$  болох ба  $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

байдгийг тооцвол  $\frac{a}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$  болж  $a = \sqrt{3}$

болно.  $a + bi$  комплекс тоо нь  $\sqrt{3} + i$  болно.  
(Зураг 7.10)



Зураг 7.10

в)  $a + bi$  комплекс тооны модул нь  $|a + bi| = 2$  ба

аргумент нь  $\arg(a + bi) = -\frac{\pi}{6}$  учраас IV мөчид орших тул  $a > 0$  ба  $b < 0$  бодит тоо байна.

Тэгш өнцөгт  $ABO$  гурвалжны  $\angle AOB = \frac{\pi}{6}$

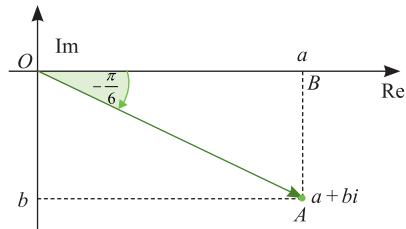
хурц өнцгийн эсрэг катетыг гипотенузад харьцуулсан харьцаа нь  $\sin \angle AOB$  гэдгээс

$$\sin \angle AOB = \frac{|b|}{|a+bi|} = \frac{|b|}{2} \text{ болох ба } \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

байдгийг тооцвол  $\frac{1}{2} = \frac{|b|}{2}$  болж  $|b| = 1$  байна. Энд  $b < 0$  байх тул  $b = -1$  юм.

Мөн  $\cos \angle AOB = \frac{a}{|a+bi|} = \frac{a}{2}$  болох ба  $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$  байдгийг тооцвол  $\frac{a}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

болж  $a = \sqrt{3}$  болно. Комплекс тоо  $\sqrt{3} - i$  болно. (Зураг 7.11)



Зураг 7.11

Аливаа  $a + bi$  тоо нь  $O$  цэгт эхлэлтэй  $A(a, b)$  цэгт төгсгөлтэй  $\overrightarrow{OA}$  векторыг тодорхойлж байна. Мөн  $\overrightarrow{OA}$  векторын модул нь  $a + bi$  комплекс тооны модултай тэнцүү. Өөрөөр хэлбэл  $|\overrightarrow{OA}| = \sqrt{a^2 + b^2} = |a + bi|$  юм.

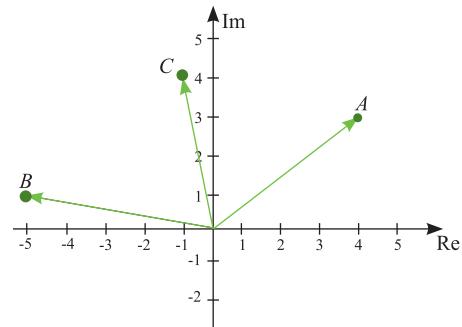
**Жишээ 5.** Хэрэв комплекс тоон хавтгайд  $A$  цэгээр  $4 + 3i$ ,  $B$  цэгээр  $-5 + i$ ,  $C$  цэгээр  $-1 + 4i$  тоонуудыг тэмдэглэсэн.

а)  $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$  векторуудын координатыг ол.

б)  $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{BC}$  болохыг харуул.

**Бодолт.**

а)  $A, B, C$  цэгийг комплекс тоон хавтгайд дүрслэв. (Зураг 7.12)



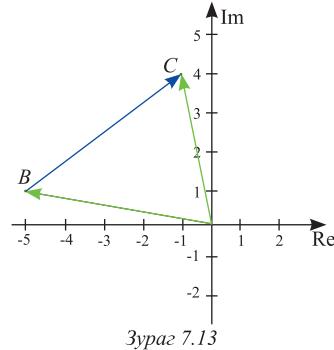
Зураг 7.12

$4 + 3i$  комплекс тоо нь  $O$  цэгт эхлэлтэй  $A$  цэгт төгсгөлтэй  $\overrightarrow{OA}$  векторыг

илэрхийлэх тул  $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$  кординаттай юм. Үүний адилаар  $\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$  координаттай болно.

### Бодолт.

- б)  $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$  векторуудын хувьд вектор нийлбэр бичвэл  $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{OC}$  болох ба  $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}$  болно.  $\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$  векторуудын координатыг орлуулбал  $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$  болно.  $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$  тул  $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{BC}$  болов. (Зураг 7.13)



Комплекс тоон хавтгайн  $A(a+bi)$  цэгт эхлэлтэй,  $B(c+di)$  цэгт төгсгөлтэй  $\overrightarrow{AB}$  векторыг  $a-c+i(b-d)$  комплекс тоогоор илэрхийлдэг.

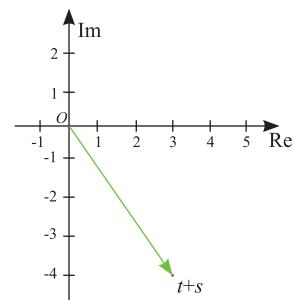
### Жишээ 6.

Хэрэв  $t = 4 - 7i$ ,  $s = 1 + 3i$  комплекс тоо өгсөн бол

- а)  $t + s$  комплекс тоог ол.
- б)  $t - s$  комплекс тоог ол.
- в)  $t \cdot s$  комплекс тоог ол.
- г)  $\frac{t}{s}$  комплекс тоог ол.
- д)  $t + s$  тоог комплекс тоон хавтгайд дүрсэл.

### Бодолт.

- а)  $t + s = 4 - 7i + 1 + 3i = 3 - 4i$
- б)  $t - s = 4 - 7i - (1 + 3i) = 4 - 7i - 1 - 3i = 3 - 10i$
- в)  $t \cdot s = (4 - 7i) \cdot (1 + 3i) = 4 + 12i - 7i - 21i^2 = 4 + 5i - 21(-1) = 25 + 5i$
- г)  $\frac{t}{s} = \frac{4 - 7i}{1 + 3i} \cdot \frac{1 - 3i}{1 - 3i} = \frac{(4 - 7i)(1 - 3i)}{1 + 9} = \frac{4 - 12i - 7i + 21i^2}{10} = \frac{-17 - 19i}{10} = -1.7 - 1.9i$
- д)  $t + s = 3 - 4i$  тоог комплекс тоон хавтгайд дүрслэв. (Зураг 7.14)



### ДАСГАЛ.

47. Дараах тоог комплекс тоон хавтгайд тэмдэглэн, модул ба аргументыг ол.

- |                     |                     |            |              |
|---------------------|---------------------|------------|--------------|
| а) $3i$             | б) $6$              | в) $-3$    | г) $-2i$     |
| д) $2 + i\sqrt{12}$ | е) $7\sqrt{3} - 7i$ | ё) $i - 1$ | ж) $-6 - 6i$ |

48. Дараах нөхцөлийг хангах  $a + ib$  тоог комплекс тоон хавтгайд тэмдэглэ.

- а)  $|a + ib| = 2$  ба  $\arg(a + ib) = \frac{\pi}{3}$   
 б)  $A(a + ib)$  цэг,  $|\overline{OA}| = 3$  ба  $\arg(a + ib) = -\frac{\pi}{4}$   
 в)  $|a - ib| = 5$  ба  $\arg(a - ib) = \frac{\pi}{2}$

49. Хэрэв  $a + bi$  комплекс тооны модул нь 2 бол дараах өгөгдсөн аргументын хувьд  $a$  ба  $b$  тоог ол.

- |                                     |                                     |
|-------------------------------------|-------------------------------------|
| а) $\arg(a + bi) = \frac{\pi}{4}$   | б) $\arg(a + bi) = \frac{3\pi}{4}$  |
| в) $\arg(a + bi) = -\frac{\pi}{4}$  | г) $\arg(a + bi) = -\frac{3\pi}{4}$ |
| д) $\arg(a + bi) = \frac{5\pi}{6}$  | е) $\arg(a + bi) = \frac{2\pi}{3}$  |
| ж) $\arg(a + bi) = -\frac{5\pi}{6}$ | ж) $\arg(a + bi) = -\frac{2\pi}{3}$ |

50. Хэрэв  $t$  ба  $s$  комплекс тоо өгсөн бол  $t + s$  нийлбэрийг олж, комплекс тоон хавтгайд дүрсэл.

- |                                |                                |
|--------------------------------|--------------------------------|
| а) $t = 3 + 6i$ , $s = -4 + i$ | б) $t = 1 + 6i$ , $s = -1 + i$ |
| в) $t = 4i$ , $s = -4 - 5i$    | г) $t = 2 - i$ , $s = -4 + i$  |

51. Хэрэв  $t$  ба  $s$  комплекс тоо өгсөн бол  $t \cdot s$  үржвэрийг олж, комплекс тоон хавтгайд дүрсэл.

- |                                 |                                |
|---------------------------------|--------------------------------|
| а) $t = -i$ , $s = 3 + 2i$      | б) $t = 1 - 2i$ , $s = -1 + i$ |
| в) $t = 5 + 4i$ , $s = -4 - 5i$ | г) $t = 2 - 4i$ , $s = -4 + i$ |

52. Хэрэв  $t$  ба  $s$  комплекс тоо өгсөн бол  $\frac{t}{s}$  ногдворыг олж, комплекс тоон хавтгайд дүрсэл.

- |                                |                                 |
|--------------------------------|---------------------------------|
| а) $t = -2i$ , $s = 3 - i$     | б) $t = 3 - 2i$ , $s = -3 + i$  |
| в) $t = 1 + 4i$ , $s = -2 - i$ | г) $t = 1 - 4i$ , $s = -1 + 5i$ |

53. Хэрэв  $t = 3 - 4i$  комплекс тоо өгсөн бол

- а)  $t$ -г комплекс тоон хавтгайд дүрсэл.  
 б)  $3t$  комплекс тоог олж, комплекс тоон хавтгайд дүрсэл.  
 в)  $|t|$  ба  $|3t|$ -ийн хоорондын хамаарлыг ол.

54. Хэрэв  $t = 1 + \sqrt{3}i$ , комплекс тоо өгсөн бол

- а)  $t \cdot t$  комплекс тоог олж, комплекс тоон хавтгайд дүрсэл.  
 б)  $\arg(t \cdot t)$ -ыг ол.

## БҮЛГИЙН НЭМЭЛТ ДААЛГАВАР

**1.** Үйлдлийг гүйцэтгэ.

- |                               |                              |                             |
|-------------------------------|------------------------------|-----------------------------|
| а) $(3+4i)+(5+3i)$            | б) $3i-(2-i)$                | в) $(x-iy)-(x+iy)$          |
| г) $(5-2i)(12-5i)$            | д) $(2+7i)(6-i)(1+2i)$       | е) $(i+1)^3$                |
| ë) $(2+3i)(4-5i)+(6-i)(3+5i)$ | ж) $(2+i)(i+1)-(1+3i)(5+2i)$ |                             |
| з) $\frac{2i}{2-3i}$          | и) $\frac{-3+2i}{4+3i}$      | й) $\frac{3+i}{(1+i)(2-i)}$ |

**2.** Хэрэв  $p = 1+2i$ ,  $q = 3-i$  бол дараах илэрхийллийг  $a+bi$  хэлбэрээр илэрхийл.

- |                   |                |              |                 |
|-------------------|----------------|--------------|-----------------|
| а) $p+q$          | б) $p-q$       | в) $pq$      | г) $(p+q)(p-q)$ |
| д) $p^2 - q^2$    | е) $p^2 + q^2$ | ë) $(p+q)^2$ | ж) $(p-q)^2$    |
| з) $(2p-q)(p+2q)$ |                |              |                 |

**3.** Бутархайг  $a+bi$  хэлбэрээр илэрхийл.

- |                    |                       |                     |                     |                        |
|--------------------|-----------------------|---------------------|---------------------|------------------------|
| а) $\frac{2}{5+i}$ | б) $\frac{3-2i}{1+i}$ | в) $\frac{3i}{-2i}$ | г) $\frac{2-i}{3i}$ | д) $\frac{x-yi}{x+yi}$ |
|--------------------|-----------------------|---------------------|---------------------|------------------------|

**4.**  $(4-3i)(x+yi)=5-4i$  байх  $x$ ,  $y$  бодит тоонуудыг Жишээ 3-тай адил хоёр аргаар ол.

**5.** Дараах илэрхийлүүдийн утгыг ол.

- |                              |                              |                                   |                                     |
|------------------------------|------------------------------|-----------------------------------|-------------------------------------|
| а) $\operatorname{Re}(5-2i)$ | б) $\operatorname{Im}(2-7i)$ | в) $\operatorname{Re}(2-3i)(2+i)$ | г) $\operatorname{Im}(3-4i)(11+2i)$ |
|------------------------------|------------------------------|-----------------------------------|-------------------------------------|

**6.** Комплекс тооны бодит ба хуурмаг хэсгийг ол.

- |                                  |                                     |  |
|----------------------------------|-------------------------------------|--|
| а) $(2+i)^2 - (2-i)^2$           | б) $\frac{2}{1+2i} + \frac{1}{2+i}$ | в) $\frac{1}{x+2yi} + \frac{1}{x-2yi}$ |
| г) $\frac{(1+3i)(8-i)}{(2+i)^2}$ | д) $(-0.5 + 0.5\sqrt{3}i)^2$        |  |

**7.** Хэрэв  $s = a+bi$ ,  $t = c+di$  нь комплекс тоо бол дараах тэнцэтгэл адилтгал мөн үү?

- |   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| а) $\operatorname{Re}s + \operatorname{Re}t = \operatorname{Re}(s+t)$ | б) $\operatorname{Re}5s = 5\operatorname{Re}s$                        | в) $\operatorname{Re}is = \operatorname{Im}s$                                     | г) $\operatorname{Im}is = \operatorname{Re}s$ |
| д) $(\operatorname{Im}s)(\operatorname{Im}t) = \operatorname{Im}(st)$ | е) $(\operatorname{Re}s)(\operatorname{Re}t) = \operatorname{Re}(st)$ | ë) $\frac{\operatorname{Re}s}{\operatorname{Re}t} = \operatorname{Re}\frac{s}{t}$ |   |

**8.**  $z^2 - 2(z+\bar{z}) + 4 = 0$  тэгшитгэл бод.

**9.** Хэрэв  $z=1+i$ ,  $w=-1+2i$  бол  $|wz| = |w| \cdot |z| = |zw|$  болохыг шалга.

**10.** Хэрэв  $z=1+2i$ ,  $v=-2-3i$  бол  $|zv^2| = |z| \cdot |v^2| = |z| \cdot |v|^2$  болохыг шалга.

**11.**  $z = a+bi$ ,  $w = b+ai$  байх комплекс тоо бол дараах дараах адилтгалууд үнэн үү:

- |  |                                   |  |  |
|--|-----------------------------------|--|--|
| а) $i\bar{z} = w$                      | б) $i(\bar{z} + \bar{w}) = z + w$ | в) $\frac{\bar{w}}{\bar{z}} = \frac{z}{w}$ | г) $z \cdot \bar{w} = \bar{z} \cdot w$ |
| д) $z \cdot \bar{z} = w \cdot \bar{w}$ |                                   |  |  |

# ХАРИУ

## I БҮЛЭГ

1. а) 15 б) 4.45 в) 3.25 г)  $3 - \sqrt{5}$  д)  $\cos 45^\circ$  е)  $\sin 10^\circ$  ё)  $2 - \sqrt{3}$  ж)  $x^2 + 1$  з)  $x^2 + 2x + 2$   
 и)  $2 - \sqrt[3]{7}$  к)  $12^{-13}$  л)  $\sqrt[3]{4} - \sqrt[4]{3}$  м)  $5^{10} - 10^5$  н)  $\sin 2 - \cos 2$  2. а)  $\{\pm 8\}$  б)  $\{0, 4\}$   
 в)  $\{\pm 13\}$  г)  $\{0, 3.5\}$  д)  $\{-20, -8\}$  е)  $\{\pm 9, \pm 1\}$  ё)  $\{-3.5, 6.5\}$  ж)  $-5.5, 6.5$  з)  $\{-1, 3\}$   
 и)  $\left\{-\frac{1}{3}, 1\right\}$  й) Шийдгүй. к)  $\left\{-\frac{3}{4}\right\}$  3. а)  $\left[-\frac{7}{5}; \infty\right[$  б)  $\left]-\infty; \frac{7}{4}\right]$  в)  $\{5.5\}$  г)  $\left\{-1, \frac{7}{3}\right\}$   
 д)  $\{3\}$  е)  $\{-2, -1\}$  ё)  $\{6\}$  ж)  $\emptyset$  з)  $\{3, 5\}$  и)  $\emptyset$  й)  $\{-0.25, 0.5\}$  к)  $\emptyset$  л)  $\{3, 4\}$  м)  
 { $-4, -1\}$  н)  $\{-2, 0\}$  4. а)  $\{-2, -1\}$  б)  $\{-1.5, -0.5\}$  в)  $\{0, 2\}$  г)  $\left\{\frac{1}{3}, 5\right\}$  д)  $\left\{-1, \frac{1}{3}\right\}$   
 е)  $\left\{\frac{1}{10}, \frac{11}{4}\right\}$  5. а)  $\{\pm 5\}$  б)  $\{\pm 4, \pm 2\sqrt{2}\}$  в)  $\{2, 3\}$  г)  $\left\{2, \frac{5+\sqrt{33}}{2}\right\}$  д)  $\left\{\frac{\sqrt{17}-1}{2}, 4\right\}$   
 е)  $\{2 - \sqrt{2}, 1 - \sqrt{3}\}$  6. а)  $\left\{\frac{7}{4}, \frac{9}{2}\right\}$  б)  $\{-5, 0\}$  в)  $\{3\}$  г)  $\left\{\frac{21}{10}, \frac{19}{6}\right\}$  д)  $\left\{-2, -\frac{4}{3}\right\}$   
 е)  $\left\{-5, \frac{7}{11}\right\}$  ё)  $\{\pm 1\}$  ж)  $\{\pm 1\}$  з)  $\{0.5\}$  7. а)  $\left\{\pm 3, -\frac{8}{3}, -\frac{2}{3}\right\}$  б)  $\left\{0, \frac{70}{13}, \frac{13}{2}\right\}$  в)  $\{-7, 2 \pm \sqrt{3}, 1\}$   
 г)  $\left\{-3, \frac{3}{2}, \frac{-5 \pm \sqrt{113}}{4}\right\}$  д)  $\left\{0, 1, \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{2}\right\}$  е)  $\{\pm 1, -3.5, -2.5\}$  8. а)  $]-\infty; -5] \cup [5; \infty[$   
 б)  $]-4; 4[$  в)  $]-4.5; 0.5[$  г)  $[-1; 6]$  д)  $]-\infty; -5] \cup [1; +\infty[$  е)  $]-\infty; \frac{2}{3}[ \cup ]\frac{8}{3}; \infty[$   
 ё)  $]-0.8; 2.4[$  ж)  $]-3; 1[ \cup ]1; 5]$  з)  $]-10; 0[$  9. а)  $]-3; 3[$  б)  $\left[-\frac{19}{3}; -\frac{7}{3}\right] \cup [-1; 3]$  в)  $]-2; 3.5[$   
 г)  $\emptyset$  д)  $]-3; 5; 6.5[$  е)  $]-\infty; -3.5[ \cup ]4.5; \infty[$  10. а)  $]-\infty; 1[$  б)  $]-5; \infty[$  в)  $]-\infty; -\frac{5}{2}[$   
 г)  $]-\infty; 1[$  д)  $]-\infty; -\frac{7}{5}[$  е)  $\emptyset$  ё)  $\emptyset$  ж)  $]-\infty; -\frac{3}{4}[$  з)  $]-\infty; -\frac{1}{3}[ \cup ]\frac{13}{7}; \infty[$  11. а)  $\left[\frac{1}{3}; 1\right]$   
 б)  $]-\infty; 0[$  в)  $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$  г)  $]-\infty; -2.5]$  д)  $\left[-4; \frac{2}{3}\right]$  е)  $]-\infty; -1.5] \cup [0; \infty[$  ё)  $]-1; \infty[$  ж)  
 $\left[-\frac{4}{3}; 0\right]$  з)  $]-\infty; \frac{1}{3}[ \cup ]7; \infty[$  12. а)  $\left\{-11, -\frac{1}{3}\right\}$  б)  $\{-3; 1.5\}$  в)  $\left\{\frac{5}{3}; 5\right\}$  г)  $\left\{\frac{16}{3}; 12\right\}$   
 д)  $\left\{-\frac{7}{2}\right\}$  е)  $\left\{-\frac{8}{11}; 8\right\}$  ё)  $\left]\frac{1}{3}; 1\right[$  ж)  $]-\infty; -0.25] \cup [0.5; \infty[$  з)  $]-6; 0[$  и)  $]-\infty; -1[ \cup ]1; \infty[$

- й)  $]-\infty; \infty[$  к)  $]-\infty; \frac{1}{7}] \cup [\frac{5}{2}; \infty[$  13. а)  $\{\pm 2, \pm 4\}$  б)  $\{\pm 2\}$  в)  $\{\pm 2\}$  г)  $]-\infty; -2] \cup [2; \infty[$
- е)  $[-5; 5]$  ё.  $\{-3; -2; 0; 1\}$  ж)  $\{\pm 1, -2, 0\}$  з)  $[-4; -2]$  и)  $]-\infty; -2.5] \cup [1.5; \infty[$  14. а)  $\{\pm 9\}$
- б)  $\{-9; 11\}$  в)  $\{-6; 7\}$  г)  $\{1\}$  д)  $\left\{ \frac{2}{3}; 4 \right\}$  е)  $\{3\}$  ё.  $\left\{ \frac{1}{3}; 1 \right\}$  ж)  $\{0; 2\}$  з)  $\left\{ -\frac{2}{3}; 4 \right\}$
15. а)  $]-\infty; -\frac{1}{2}[ \cup ]\frac{3}{2}; \infty[$  б)  $]1; 2[$  в)  $]-\infty; 0] \cup [1; \infty[$  г)  $[-4; 1.2]$  д)  $]0.75; 1.5[$
- е)  $]-\infty; \frac{2}{3}] \cup [1; \infty[$

### І БҮЛГИЙН НЭМЭЛТ ДААЛГАВАР

1. а)  $\{\pm 5\}$  б)  $\{\pm 4\}$  в)  $\left\{ \pm \frac{5}{3} \right\}$  г)  $\{-14; 4\}$  д)  $\left\{ -\frac{1}{3}; 3 \right\}$  е)  $\{-4; 7\}$  ё)  $\{-8; 2\}$  ж)  $\{-2; 4\}$
- з)  $\{-3; 2\}$  2. а)  $\{1; 1.5\}$  б)  $\{-2.8; 3.6\}$  в)  $\left\{ \frac{1}{3}; 3 \right\}$  г)  $\{-1.5; 2\}$  д)  $\{-1; 3\}$  е)  $\{-2.8; 1.2\}$
- ё)  $\{-0.2; 0.6\}$  ж)  $\{0.8; 6\}$  з)  $]-\infty; 1.5]$  и)  $\left\{ -\frac{1}{2} \right\}$  ў)  $\{2\}$  к)  $[0; \infty[$  л)  $\{1\}$  м)  $\{0\}$
- н)  $\{\pm 4; 0\}$  о)  $\{1\}$  3. а)  $\emptyset$  б)  $\{-4; -2\}$  в)  $\{-5; -3; -1\}$  г)  $\{-6; -4; -2\}$  4. а)  $\left\{ \frac{2}{3} \right\}$  б)  $\left\{ \frac{4}{3} \right\}$
- в)  $\left\{ -\frac{9}{2}; \frac{13}{4} \right\}$  г)  $\left\{ -\frac{11}{3} \right\}$  д)  $\emptyset$  е)  $[-3; \infty[$  ё)  $]-\infty; 2]$  ж)  $\{-1\}$  з)  $\left\{ \frac{2}{3}; 2 \right\}$  5. а)  $\left\{ \frac{5}{3}; 5 \right\}$
- б)  $\left\{ -\frac{2}{3}; 2 \right\}$  в)  $\left\{ -\frac{2}{3}; 4 \right\}$  г)  $]-\infty; -4]$  д)  $\{2\}$  ё)  $\{3; 11\}$  з)  $\{-1.5; 0.25\}$  6. а)  $\{0.8; 1\}$
- б)  $\{0.2; 1\}$  в)  $\{-5\}$  г)  $\left\{ -\frac{13}{2}; \frac{11}{4} \right\}$  д)  $\{\pm 1\}$  е)  $\left\{ \frac{1}{3}; 1 \right\}$  ё)  $\{-3; -0.2\}$  ж)  $\left\{ \frac{1}{3}; 2 \right\}$  7. а)  $\{1; 4\}$
- б)  $\{-5; -2 - \sqrt{5}; -2 + \sqrt{5}; 1\}$  в)  $\{-1; 5\}$  г)  $\{0; 2; 4; 6\}$  д)  $\{-5; 1\}$  е)  $\{-2; 1; 3\}$  8. а)  $\{1; 3\}$
- б)  $\{1; 3\}$  в)  $\{1; 3\}$  г)  $\left\{ \pm 3; -\frac{8}{3}; -\frac{2}{3} \right\}$  д)  $\{-1; 3; 4; 6\}$  9. а)  $\{\pm 5\}$  б)  $\{\pm 8\}$  в)  $\{-4; 6\}$
- г)  $\{-1; 5\}$  д)  $\{2\}$  е)  $]-\infty; 0.5]$  ё)  $[3; \infty[$  10. а)  $[-3; 2]$  б)  $\{2\}$  в)  $\{-3.2; -2\}$  г)  $[2; \infty[$
11. а)  $\left\{ 0; \frac{70}{13}; \frac{13}{2} \right\}$  б)  $\{-4; \pm 1\}$  в)  $]-\infty; 1.5]$  г)  $\{\pm 8\}$  д)  $\{1; 13\}$  е)  $\{-2; 0\}$  ж)  $[2; 3]$
- з)  $\{4\}$  и)  $\{0; 1\}$  12. а)  $\{\pm 5\}$  б)  $\{\pm 2\}$  в)  $\{\pm 9\}$  г)  $\{\pm 4; \pm 3\}$  д)  $\{\pm 7\}$  е)  $\{\pm 10\}$  ё)  $\left\{ \pm 1; \pm \frac{3}{5} \right\}$
13. а)  $]-\infty; -6] \cup [6; \infty[$  б)  $]-\infty; -10[ \cup ]10; \infty[$  в)  $[-8; 8]$  г)  $]-9; 9[$  ё)  $]-\infty; -\frac{13}{3}[ \cup ]5; \infty[$

- 14.** а)  $]-\infty; -4[ \cup ]-2; \infty[$  в)  $]1; 3[$  г)  $]-\infty; 0[ \cup ]1; \infty[$  ё)  $]-2; -1] \cup [2; 3[$
- ж)  $]-\frac{2}{3}; \frac{1}{3}] \cup [\frac{7}{3}; \frac{10}{3}[$  **15.** а)  $]-2; -1] \cup [1; 4[$  б)  $]-1; 2[$  в)  $]-2; 0]$  г)  $]-2; 1[$
- 16** а)  $]-\infty; -\frac{2}{7}[ \cup ]2; \infty[$  б)  $[-15; \frac{1}{3}]$  в)  $]-\infty; -40[ \cup ]\frac{30}{11}; \infty[$  г)  $]-\infty; -\frac{7}{11}] \cup [\frac{5}{3}; \infty[$
- д)  $]-\infty; -\frac{3}{5}] \cup [3; \infty[$  е)  $[0; 0.5]$  **17.** а)  $]-1; 5[$  в)  $]2; 5[$  г)  $]2; 4[$
- д)  $]-\infty; \frac{5-\sqrt{57}}{2}[ \cup ]\frac{5+\sqrt{57}}{2}; \infty[$  е)  $]-\infty; -1[ \cup ]2; \infty[$  ё)  $]1; 3[$  ж)  $]-\infty; -\frac{2}{3}] \cup [\frac{1}{2}; \infty[$
- з)  $]-\infty; \frac{11-\sqrt{57}}{4}] \cup [\frac{11+\sqrt{57}}{4}; \infty[$  **18.** а)  $]-\infty; \frac{1}{3}[$  б)  $]-\infty; -\frac{2}{3}[$  в)  $]-\infty; \infty[$  г)  $]\frac{1}{2}; \infty[$
- д)  $]-\infty; \infty[$  е)  $]-\infty; \frac{2}{3}]$  ё)  $]-\infty; 9]$  ж)  $]1; \infty[$  з)  $]-\infty; -1]$  **19.** а)  $]-\infty; -1] \cup [1; \infty[$
- б)  $[-7; 7]$  в)  $]-\infty; -4] \cup [4; \infty[$  г)  $]-\infty; -7[ \cup ]-4; 4[ \cup ]7; \infty[$
- д)  $]-\infty; -1[ \cup ]-\frac{2}{3}; \frac{2}{3}[ \cup ]1; \infty[$  е)  $]-2; 2[$  ё)  $]-\infty; \infty[$  ж)  $[-7; 7]$  з)  $]-7; 7[$
- 20.** а)  $]\frac{3-\sqrt{33}}{4}; 2-\sqrt{7}[ \cup ]\frac{3+\sqrt{33}}{4}; 2+\sqrt{7}[$  б)  $]-\infty; 1.5]$  г)  $]1; 3[$
- д)  $]-2\sqrt{2}; 2-2\sqrt{3}[ \cup ]2\sqrt{2}; 2+2\sqrt{3}[$  е)  $]-11; \frac{1-\sqrt{105}}{4}[ \cup ]\frac{1+\sqrt{105}}{4}; \infty[$
- 21.** а)  $]-\infty; 2[ \cup ]3; \infty[$  б)  $]1; 3-\sqrt{2}[ \cup ]3+\sqrt{2}; 5[$  в)  $]-\infty; 3] \cup [7; \infty[$
- г)  $]\frac{-9-\sqrt{41}}{2}; -5[ \cup ]-2; \frac{-9+\sqrt{41}}{2}[$  д)  $[-1.5; 5]$  е)  $]-\infty; -1[ \cup ]-\frac{2}{3}; \frac{2}{3}[ \cup ]1; \infty[$
- 22.** а)  $]-3; 3[$  б)  $]-\infty; \infty[$  в)  $\{7\}$  г)  $]-3; 7[$  д)  $]-\infty; -6]$   $\cup [0; \infty[$  е)  $]-4; 0[$
- ё)  $]-\infty; -4[ \cup ]-2; 1[ \cup ]3; \infty[$  ж)  $[0; 6]$  з)  $[3; 4[ \cup ]4; 5]$  **23.** а)  $]-\infty; \frac{3}{4}[ \cup ]\frac{5}{2}; \infty[$
- б)  $[1; \infty[$  в)  $]-\infty; -\frac{1}{3}[$  г)  $]-\infty; \infty[$  д)  $]-\infty; -2[ \cup ]2; \infty[$  е)  $]-\infty; \infty[$

## II БҮЛЭГ

1. а)  $11y+2$  б)  $-13x-3$  в)  $-5a+19$  г)  $2z+8$  д)  $x^2-6x-1$  е)  $3x^2-6x-10$

3. а)  $2x^3+x^2$  б)  $6x^3-9x^2+3x$  в)  $6x^3-3x^2-8x+4$  г)  $-2x^3-x^2-1$

д)  $3x^3-2x^2-61x-20$  5. а)  $-x^3-x^2-4x+7$  б)  $x^3+7x^2-4x+3$

в)  $-3x^5-8x^4+11x^3-14x^2-8x+10$

7. а)  $P(5)=39$ ,  $P(-4)=3$ ,  $P(3)=17$ ,  $P(y+1)=y^2+5y+3$

б)  $P(-2)=0$ ,  $P(0)=-2$ ,  $P(1)=-6$ ,  $P(z-2)=z^3-6z^2+7z$

в)  $P(x)=2x^2-x-2$ ,  $P(3)=26$ ,  $P(0)=-1$ ,

г)  $P(x)=3x^3-15x^2+15x+2$ ,  $P(-1)=8$ ,  $P(1)=2$

8. а)  $A=4, B=1$  б)  $A=2, B=-3$  в)  $A=2, B=1$  г)  $A=3, B=-2$  д)  $A=1, B=2$

11. а) 3 б)  $-5$  в)  $1.75$  г)  $13$  д)  $\{-5; 2\}$  е)  $\{-5; 4\}$  ж)  $\{-7; 10\}$  з)  $\{0; 2; 10\}$

12. а)  $\left\{-\frac{11}{3}; 0; 3\right\}$  б)  $\left\{-2; \frac{2}{3}; 1\right\}$  в)  $\left\{-\frac{1}{4} \pm \frac{\sqrt{37}}{4}; \frac{1}{2}\right\}$  г)  $-\frac{2}{3}; \frac{1 \pm \sqrt{10}}{3}$  д)  $\left\{-2; 1; \frac{1 \pm \sqrt{15}}{2}\right\}$

е)  $\left\{-2; 1; -\frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}\right\}$  19. а)  $p=-1$  б)  $q=-2$  в)  $-\frac{13}{3}$  г)  $p=3$  д)  $a=5; b=-3$

е)  $p=-1$  ё)  $p=15$  23. а)  $\left\{-1; -\frac{3 \pm \sqrt{3}}{2}\right\}$  б)  $\{-1; 3; 4\}$  в)  $\left\{-1; \frac{1}{2}; 3\right\}$  г)  $-\frac{2}{3}; -\frac{1}{2}; 4$

д)  $\{1; 2\}$  е)  $\{-3; -1; 0.5\}$  ё)  $\left\{-\frac{1}{2}; -\frac{1}{3}; 1\right\}$  ж)  $\{-5; 2; 3\}$  з)  $\left\{\frac{2}{3}; \frac{3}{2}; 5\right\}$  и)  $\{-5; -3; -1\}$

к)  $\{-1; 5\}$  25. а) мөн, б) биш, в) биш, г) мөн, д) биш, е) мөн, ё) биш, ж) мөн, з) биш,

и) мөн, й) мөн, к) биш. 26. а)  $\frac{8x}{(3x-1)(x+1)}$ , б)  $\frac{11x^2+7x+1}{(x+1)(2x+1)}$ , в)  $\frac{-3x^2+11x+5}{(x-2)(x+1)}$ , г)

$\frac{2x+7}{(x-1)(x+4)}$ , д)  $\frac{x^2+5x+2}{x(x+3)}$ , е)  $\frac{4x}{x^2-4}$ , ё)  $\frac{-5}{x+3}$ , ж)  $\frac{7(x+1)}{2x^2+8x-10}$ . 27. а)  $\frac{4x}{x-1}$

б)  $\frac{x-3}{x-2}$  в) 1 г)  $\frac{2(x-1)(4x-1)}{(2x-1)(4x-3)}$  29. а)  $\frac{4x-6}{x(x-1)(x-2)(x-3)}$  б)  $\frac{2}{(3x-1)}$  30. а)  $\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2}$ ,

б)  $\frac{3}{2(x-3)} - \frac{3}{2(x+1)}$ , в)  $\frac{3}{7(x-3)} + \frac{1}{7(2x+1)}$ , г)  $\frac{16}{5(2x-1)} - \frac{8}{5(x+2)}$ , д)  $\frac{3}{x-2} + \frac{4}{x-5}$

е)  $\frac{4}{x-3} - \frac{7}{x+2}$ , ё)  $-\frac{4}{x} + \frac{8}{x-3}$ , ж)  $\frac{3}{2x-3} - \frac{1}{2x+3}$ , з)  $\frac{-3}{x+2} + \frac{2}{x-3}$ , и)  $\frac{3}{x-4} - \frac{5}{x+1}$ ,

й)  $-\frac{10}{2x-1} + \frac{10}{x-1}$ , к)  $\frac{3}{2x-5} - \frac{1}{x+2}$ . 31. а)  $\frac{3}{x+4} - \frac{12}{(x+4)^2}$ , б)  $\frac{5}{x-2} + \frac{10}{(x-2)^2}$ ,

ХАРИУ

в)  $\frac{3}{(x-5)} + \frac{11}{(x-5)^2}$  г)  $\frac{1}{3(x-2)} + \frac{1}{(x-2)^2}$ , д)  $\frac{5}{3x+4} - \frac{4}{(3x+4)^2}$  е)  $\frac{1}{(x+2)} - \frac{3}{(x+2)^2}$

ё)  $\frac{1}{(4x-1)} + \frac{2}{(4x-1)^2}$  ж)  $\frac{2}{2x+3} + \frac{6}{(2x+3)^2}$  32. а)  $\frac{1}{2x} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2(x+2)}$

б)  $\frac{13}{4(x-3)} - \frac{4}{x-2} + \frac{3}{4(x+1)}$ , в)  $\frac{13}{x-3} - \frac{17}{3(x-2)} + \frac{5}{3(x+1)}$

г)  $-\frac{1}{4x} + \frac{25}{8(x-2)} + \frac{17}{8(x+2)}$  д)  $\frac{7}{2(x-1)} - \frac{3}{2(x-3)} - \frac{1}{(x+3)}$

е)  $-\frac{1}{5(x+2)} - \frac{1}{2(x-1)} + \frac{7}{10(x-3)}$  ё)  $-\frac{1}{3(x+1)} + \frac{3}{5(3x+1)} + \frac{4}{15(2x-1)}$

ж)  $-\frac{2}{5x} - \frac{2}{11(x+6)} + \frac{32}{55(x-5)}$  33. а)  $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x+1}$  б)  $\frac{5}{2(x+2)^2} + \frac{3}{4(x+2)} - \frac{3}{4x}$

в)  $\frac{5}{3(x+2)^2} + \frac{2}{9(x+2)} - \frac{2}{9(x-1)}$  г)  $\frac{42}{5(x-3)^2} + \frac{23}{25(x-3)} + \frac{2}{25(x+2)}$

д)  $-\frac{1}{(x+3)^2} - \frac{1}{5(x+3)} + \frac{1}{5(x-2)}$  е)  $\frac{5}{(x-2)^2} - \frac{3}{(x-2)} + \frac{3}{(x-1)}$

ё)  $\frac{78}{(4x-3)^2} + \frac{97}{(4x-3)} - \frac{25}{(x-1)}$  ж)  $\frac{2}{(2x-3)^2} - \frac{1}{(3x+1)}$  34. а)  $\frac{1}{x} - \frac{x-1}{x^2+1}$

б)  $\frac{1}{(x-2)} + \frac{3x+2}{(x^2+1)}$  в)  $\frac{5}{(x-1)} + \frac{-x+2}{(3x^2+4)}$  г)  $\frac{-3}{(3x+2)} - \frac{x+2}{(5x^2+1)}$

д)  $\frac{2}{3(2x-1)} - \frac{1+2x}{3(2x^2+1)}$  е)  $\frac{3}{2(x+1)} - \frac{x+1}{2(x^2+1)}$  ё)  $\frac{2}{(2x-7)} + \frac{x+5}{(16x^2+5)}$

ж)  $\frac{10}{(9x-2)} + \frac{-2x+3}{(2x^2+5)}$  35.  $S(x) = x$  36.  $R(x) = 14x + 49$

37.  $S(x) = x^2 + 2x - 3$ ,  $a = 7$ ,  $b = -23$  38.  $S(x) = 3x + 10$ ,  $a = 40$ ,  $b = 32$ ,  $c = -60$

39. а)  $2x+7 + \frac{3}{x-4} - \frac{5}{x+1}$  б)  $3x^2 - x + 2 + \frac{3}{2x-5} - \frac{1}{x+2}$  в)  $-x+7 + \frac{2}{x-5} - \frac{1}{x+6} + \frac{7}{x}$

г)  $1 - \frac{7}{x-5} - \frac{14}{(x-5)^2}$  д)  $x-1 + \frac{2}{2x+3} + \frac{6}{(2x+3)^2}$  е)  $x - \frac{1}{2} + \frac{11}{x+1} - \frac{2}{(x-2)} + \frac{1}{2(x-3)}$

ё)  $\frac{3}{2} + \frac{1}{(x-3)^2} + \frac{3}{(x-3)} - \frac{2}{(x+2)}$  ж)  $x-3 + \frac{1}{x} + \frac{-x+1}{(x^2+1)}$

з)  $\frac{7}{5} + \frac{5}{(x-2)^2} - \frac{3}{(x-2)} + \frac{3}{(x-1)}$  и)  $2x-9 - \frac{6}{(x+3)^2} + \frac{15}{(x+3)} + \frac{2}{(x-2)}$

$$\text{и)} 3 - \frac{2}{(3x+2)} + \frac{4x+1}{(5x^2+1)} \quad \text{к)} \frac{3}{2}x + 1 + \frac{2}{3(2x-1)} - \frac{1+2x}{3(2x^2+1)} \quad \text{40. } \frac{n}{(n+1)}$$

$$\text{41. а)} \frac{n}{(2n+1)} \quad \text{б)} \frac{n}{(4n+4)} \quad \text{42. } \frac{n(n^2+2n+2)}{2(n+1)} \quad \text{19. а)} \frac{10n^2+7n}{2n+1} \quad \text{б)} \frac{10n^2+11n}{2n+2}$$

$$\text{в)} \frac{10n+3}{2} - \frac{2n+3}{n^2+3n+2}$$

## II БҮЛГИЙН НЭМЭЛТ ДААЛГАВАР

1. а)  $\{1\}$  б)  $\{-123\}$  в)  $\{-7\}$  г)  $\{381\}$  д)  $\{8\}$  е)  $-x^2 - x$  ё)  $29x^2 - 62x + 97$

4. а)  $\{\pm 2; 0\}$  б)  $\left\{-\frac{1}{7}; 0\right\}$  в)  $\{\pm 1; 5\}$  г)  $\{-3; 1; 2\}$  д)  $\{-2; 1; 4\}$  е)  $\{-3; 2\}$  ё)  $\{\pm 3; 2\}$

5. а)  $\{-5; 2; 3; 4\}$  б)  $\left\{-3; -\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; 2\right\}$  в)  $\{1\}$  г)  $\{-3; -2 \pm 1\}$  д)  $\{1\}$  е)  $\left\{\frac{1}{5}; 1; 5\right\}$

ё)  $\left\{-2; 0; \frac{-7 \pm 3\sqrt{5}}{2}\right\}$  ж)  $\{1\}$  з)  $\left\{-3; -\frac{1}{3}; \frac{1}{2}; 2\right\}$  и)  $\{-1; 2; \pm 4\}$  ѹ)  $\{-3; \pm 2; 1\}$  к)  $\{-4; \pm 2\}$

6. а)  $a=1, b=1$  б)  $7x^3 + 2x^2 + 14x + 3$  в)  $A = \frac{13}{4}, B = \frac{26}{4}, C = \frac{15}{4}, D = -4$  7.  $a=1,$

$$b=1, c=4, A=5, B=-3$$

8. а)  $x^3 + x + \frac{2}{(x-1)} + \frac{-1}{(x+1)}$  б)  $x^2 + 4x + 12 + \frac{32}{(x-2)} + \frac{16}{(x-2)^2}$

б)  $x + \frac{5}{3(x-1)} - \frac{8x+10}{3(x^2+x+1)}$  г)  $x^2 - x + 1 + \frac{7}{5(x-3)} - \frac{27}{5(x+2)}$  9.  $a=2k, b=6k, c=6k,$

$d=7k$  11.  $A=-3, B=0, C=1$  12. а)  $\frac{10}{x+6} - \frac{2}{x-3}$  б)  $\frac{4}{x-3} - \frac{1}{x+2}$  в)  $\frac{1}{2x-1} - \frac{5}{x+4}$

г)  $\frac{4}{x-1} + \frac{16}{(x-2)^2}$  д)  $\frac{9}{x+3} - \frac{2}{(x+3)^2}$  е)  $-\frac{1}{x} + \frac{1}{2(x+2)} + \frac{5}{2(3x-2)}$  ё)  $\frac{2}{x} + \frac{6x-4}{x^2+2x-6}$

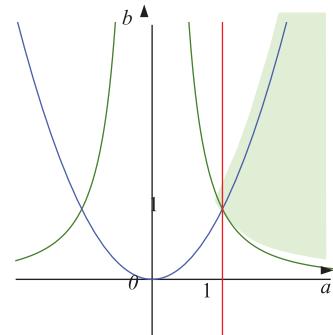
ж)  $\frac{3x}{x^2+2} + \frac{x-4}{(x^2+2)^2}$  13. а)  $5x+18$  б)  $18$  в)  $108, 60$  14. а)  $7x+11$  б)  $7$  в)  $60, 30$  15.

а)  $a=0, b=-1$  б)  $(2x+1)(x-1)$  16.  $\frac{2}{3}x - \frac{8}{3}$  17.  $k=7.5, q=4.5$

## III БҮЛЭГ

1. а)  $(\sqrt{5})^6 = 125$  б)  $(4)^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{8}$  в)  $(7)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{7}$  2. а)  $\log_{\frac{1}{2}} 8 = -3$  б)  $\log_{256} 4 = \frac{1}{4}$

- в)  $\log_{11} 1 = 0$  3. а)  $x \in [0, 1] \cup [1, 5] \cup [5, \infty[$  б)  $x \in ]3, 4[$  в)  $x \in ]-\infty, -5[ \cup ]0, \infty[$  4.
- а)  $x = -1.5$  б)  $x = 9$  в)  $x = 8$  5. а) 1 б) 4 в)  $\frac{11}{12}$  6. а) 5 б) 0 в) 3 г) 1 д) 1.5 е)  $\sqrt{3}$
- ë) 3 ж) 1.5 7. а)  $\frac{25}{6}$  б) 16 в) 8 г)  $\frac{1}{5}$  8. а) 1.4048 б) 2.4048 в) 4.4048 г) 0.5952
- д)  $-1.5952$  е)  $-2.5952$  9. а)  $2a + 4b$  б)  $4a - 5b$  в)  $2 + a + b$  г)  $2 - 2a$  д)  $-\frac{3}{2}a - \frac{1}{2}b$
10. а)  $\frac{a}{b}$  б)  $\frac{3a+b}{2a+b}$  в)  $\frac{1+a+b}{2a}$  г)  $\frac{b}{a}$  11.  $\sqrt{5}$  12. 1296 13.  $\frac{5a-b}{3}$  14.  $\frac{a+ab+abc}{1+abc}$
15.  $\frac{2b+3c}{a+b}$  16.  $-32$  17.  $\frac{5}{3}$  18.  $1 + \sqrt{2}$  19. 1 20. 2 21. 11 22. 64 23.  $12 - 10\sqrt{3}$
24.  $\log_2 5 - 1$  25.  $\frac{2}{3}$  26. 16 27.  $\frac{5}{3}$  28. 16 29.  $\frac{1}{2}$  30.  $\frac{10}{3}$  31. 0 32. 6 33.  $\frac{3}{2}$  34.
- $(x-3)^2 + y^2 < 1$ ,  $y > 0$ ,  $\frac{\pi}{2}$  35. 1 36. 24 37.  $\sqrt[4]{2^5}$  38. Тэгш өнцөгт гурвалжин 39.  $\frac{3}{4}$
40. а) Цэгээс хойш 10 дахь орон б) Цэгээс хойш 16 дахь орон в) Цэгээс хойш 2 дахь орон 41. 109 42. 123 43. 1 44. 19 45. 7.7% 46. 33% 47.  $10\sqrt{10}$  48.  $\frac{125}{8}$  49. 3.5% 50.  $k=10$  51. 66 52. 240 53. 101 54.  $1 - \log_2 7$  55.  $a=18$ ,  $b=4$  56.  $-10$  57.
- 13 58. а)  $2 + \lg 2$  б)  $\log_3 \frac{3}{8}$  в) 1 г) 0,  $\log_3 \frac{1}{5}$  д) 0,  $\log_5 9$  е) 0,  $\log_3 4$  ё)  $-1,1$  ж)  $-\log_2 3, -1,1$ ,  $\log_2 3$  59. а)  $x=1, y=2$  эсвэл  $x=2, y=1$  б)  $x=3, y=0$  в)  $x=1 - \lg 2, y = -\lg 2$  [Заавар: Тэгшигэл бүрийн 2 талыг 10 сууриар логарифмчилад хялбарчил] г)  $x = -\lg 5, y = \lg 2$  д)  $x = 1000, y = 100$  эсвэл  $x = 100, y = 1000$  [Заавар: Тэгшигэл бүрийн тэнцүүгийн тэмдгийн хоёр талаас 10 сууриар логарифмчил] е)  $x = 2, y = 5$  60. а)  $-\frac{4}{3} < x \leq \frac{2}{3}$  б)  $x > \log_2 3$  в)  $x < 2$  г)  $-1.5 < x \leq 0.5$  д)  $-2.5 < x \leq 0.5$
61.  $x = 3, y = -1$  [Заавар: Θгсөн тэгшигэлийг  $(2^2 \cdot 3)^x (2 \cdot 3)^y = 2^5 \cdot 3^2$  хэлбэрт бич] 62.  $x = -2, -1, 0, 2$
63. 3 64. 0,  $\pi$  65.  $x < -3$  66. 1 67.  $x = -3, x \geq -1$  68.
- $0 < a \leq \frac{1}{2}$  69. Хоёр талаас нь 10 сууриар логарифмчилад хялбарчилбал  $(\lg a)x^2 - (\lg b)x + \lg a > 0$  тэнцэтгэл биш бүх бодит  $x$ -ийн хувьд биелэх  $(a, b)$ -г олох бодлогод шилжинэ. Зурагт харуулав.



70. а)  $x > 4.5$  б)  $x < -\frac{5}{3}$  в)  $x \neq -\frac{3}{2}$  г)  $\left] -\infty, -\frac{1}{2} \right[ \cup ]4, \infty[$  д)  $]-\infty, \infty[$

71. а)  $E \rightarrow \mathbb{R}: f^{-1}(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x+3)$  б)  $E \rightarrow \mathbb{R}: f^{-1}(x) = \log_{\frac{1}{2}}(-x+1)$

в)  $\mathbb{R} \rightarrow D: f^{-1}(x) = 3^{\frac{x-1}{3}} + 1$  г)  $\mathbb{R} \rightarrow D: f^{-1}(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{-x-2} - 2$  72. а) өснө б) өснө в) өснө

г) буурна 73. Адилтгал тэнцүү функцүүд биш. Учир нь эхний функцийн тодорхойлогдох муж тэгээс ялгаатай бүх бодит тоон олонлог, харин дараагийн функцийн хувьд сөрөг биш бодит тоо байна. 74. а)  $y = \log_{\frac{1}{4}} x$  нь буурах функц тул

өсөх эрэмбэ нь  $\log_{\frac{1}{4}} 2, \log_{\frac{1}{4}} \frac{3}{8}, \log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{5}$  байна. б)  $y = \log_3 x$  нь өсөх функц тул өсөх

эрэмбэ нь  $\log_3 \frac{1}{5}, \log_3 \frac{3}{8}, \log_3 2$  байна. в) Логарифмын суурийг ижил 2 болговол

$y = \log_2 x$  нь өсөх функц тул өсөх эрэмбэ нь  $\log_2 \frac{1}{8}, \log_2 \sqrt{20}, \log_2 18$  байна. г)

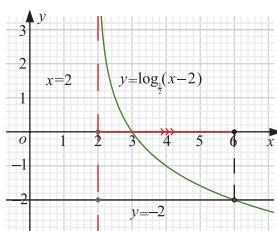
$\frac{1}{3} \lg \frac{1}{5}, \frac{1}{2} \lg 5, \lg 3$  76. а)  $y = 10^x$ , Тодорхойлогдох муж нь  $D = [-2, 2]$ , дүр нь

$E = \left[ \frac{1}{100}, 100 \right]$  б)  $y = 5^{-x} + 1$ , Тодорхойлогдох муж нь  $D = [-3, -\log_5 10]$ , дүр нь

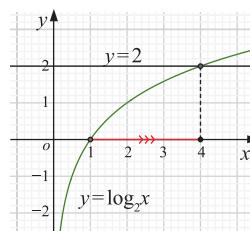
$E = [11, 26]$  в)  $y = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{2} \right)^x$ , Тодорхойлогдох муж нь  $D = [-4, -2]$ , дүр нь  $E = \left[ \frac{4}{3}, \frac{16}{3} \right]$

77. а) 5.5 б) 1 в)  $-\frac{24}{25}$  г) -2; 6

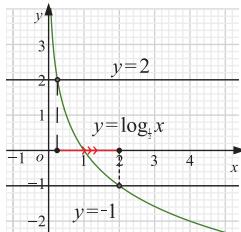
78. а)  $x \in ]2, 6]$



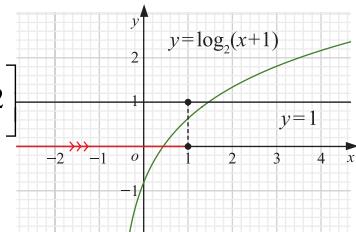
б)  $x \in ]1, 4[$



в)  $x \in \left[ \frac{1}{4}, 2 \right]$



г)  $x \in \left[ \frac{1}{4}, 2 \right]$



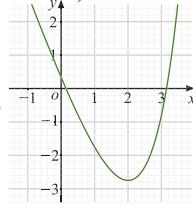
79. 6 80. 9 81.  $0 < a < 1$  82.  $a + b + c = -2$  83.  $\frac{1}{12}$  84. 2 85. д)  $\left(\frac{1}{625}\right)$  86. а) үнэн  
 б) худал в) үнэн г) худал 87. хамгийн их  $\log_b a$ , хамгийн бага  $\log_a \frac{b}{a}$  88.  $C < B < A$   
 89. 64 90. 3 91.  $p^4 = q^3$  93. а)  $1 \pm \ln 2$  б)  $\frac{e^2 - 1}{2}$  в)  $2 \pm e^{-1}$  94. а)  $\{x | -2 \leq x \leq 2\}$   
 б)  $\{x | -\ln 8 \leq x \leq 0\}$  в)  $\{x | \ln 2 \leq x \leq 2 \ln 2\}$  г)  $\{x | x > 2.5\}$  д)  $\{x | x > 1\}$   
 95. а)  $\{y | e^{-5} \leq y \leq e^3\}$  б)  $\{y | 1 \leq y \leq 5\}$  в)  $\{y | e^3 \leq y \leq e^{10}\}$  г)  $\{y | 2 \leq y \leq 5\}$   
 96. а)  $y = \ln(x+2)$ , Тодорхойлогдох муж нь өгсөн  $E$  олонлог байна.  
 б)  $y = \ln(3-y)-1$ , Тодорхойлогдох муж нь өгсөн  $E$  олонлог байна. в)  $y = e^{x-1} + 2$ ,  
 Дүр нь өгсөн  $D$  олонлог байна. г)  $y = e^{\frac{x-1}{3}} - 1$ , Дүр нь өгсөн  $D$  олонлог байна.  
 97. а) 729 б)  $\frac{7}{2}$  в)  $\frac{7}{3}$  г)  $\frac{13}{3}$  98.  $\frac{5}{7}$  104. а) 5 б) 3 в) 6 г) 1 д) 4 е) 2 105. 3 106. 6 107. -1  
 108. 1 109.  $D = \{x | -3 \leq x < -2 \cup -2 < x \leq 0\}$  110.  $\frac{9}{4}$  111.  $a=1, b=3, c=1$  112.  $-\frac{6}{7}$   
 113. 2 114. 4 115. 1 116. 5 117. 6

### III БҮЛГИЙН НЭМЭЛТ ДААЛГАВАР

1.  $\frac{1}{6}$  2.  $\frac{5}{6}$  3. -1 4.  $\frac{5}{6}$  5. 2 6. а)  $\frac{3}{2}$  б)  $\frac{3}{2}$  в)  $\frac{1}{2}$  г) 1 д) 1 е)  $\frac{1}{2}$  ё)  $\lg 9$  ж)  $a \geq 100$  үед  
 $\sqrt{\lg a} - \sqrt{2}$ ,  $1 < a < 100$  үед  $\sqrt{2} - \sqrt{\lg a}$  з)  $1 - \sqrt{\lg a}$  и) 17.  $(a,b) = (2,16); (a,b) = \left(8, \frac{1}{16}\right)$
8. хамгийн их утга 2, хамгийн бага утга 1 9. хамгийн их утга 100, хамгийн бага утга 0.01 [Заавар:  $y = 10x^{2-\lg x}$  хэлбэрт бичээд хоёр талыг нь 10 сууриар логарифмчил.  $\lg y$ -ийн хамгийн их, хамгийн бага утгыг ол] 10.  $1000\sqrt[3]{10}$  11. 10 12. хамгийн их утга 100, хамгийн бага утга 20 13.  $6\sqrt{6}$  14.  $g(x) = (3^x - 1)^2$  15. 1098
16.  $C < B < A$  17.  $A < C < B$  18.  $C < B < D < A$  19.  $(a+2)^b > 3^{ab} > (b+2)^b$  [Заавар:  
 $(OP), (OQ), (OR)$  шулгуунуудын наалалтыг жиши] 20.  $\left(\frac{b+1}{a+1}\right)^{\frac{1}{b-a}} > (b+1)^{\frac{1}{b}} > (a+1)^{\frac{1}{a}}$
21. 3 22. 2 23. -2 24.  $a \geq 0$  25. -3 26.  $a = 2, b = -4, c = 1; f^{-1}(x) = \frac{-x-4}{x-2}$  27. 2 28. 17  
 29.  $\frac{14}{5}$  30.  $\sqrt{10}$  31. тэгш өнцөгт гурвалжин

## IV БҮЛЭГ

1. а)  $f'(x) = 1 + e^x$  б)  $f'(x) = 2 + e^x$  в)  $f'(x) = 1 - e^x$  г)  $f'(x) = 1 + 3e^x$  д)  $y' = 0$   
 е)  $y' = 6x^2 + e^x$  ё)  $y' = 9x^2 - e^x$  ж)  $y' = e^x - 4x^3$  з)  $y' = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} + 3e^x$  и)  $y' = e^x + \frac{1}{\sqrt{x}}$   
 ў)  $y' = e^x - \frac{1}{4x^{\frac{3}{4}}}$  к)  $y' = \frac{3}{2}\sqrt{x} - 3e^x$  л)  $y' = \frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}} - 2e^x$  м)  $y' = -x^{\frac{-3}{2}} + e^x$   
 н)  $y' = -\frac{1}{x\sqrt{x}} - 3e^x$  2. а)  $f'(x) = -e^{-x}$  б)  $f'(x) = 2e^{2x}$  в)  $f'(x) = 2e^{-2x}$  г)  $f'(x) = e^{3x}$   
 4.  $y' = 0.3e^t$  5. буурах завсар  $]-\infty, 0[$ , өсөх завсар  $]0, +\infty[$  6.  $]-\infty, 2[$   $]2, +\infty[$ , е  
 7.  $]2, +\infty[$ ,  $]-\infty, 2[$ ,  $-e^2$  8. а) өсөх завсар  $]-\infty, +\infty[$  б) экстремум цэг байхгүй.



9. б)  $y = 1$ ,  $x = 1$  10.

11.  $y + y' = 3 + 4e^x$  12. а)  $f'(x) = 1 + \frac{1}{x}$ ,

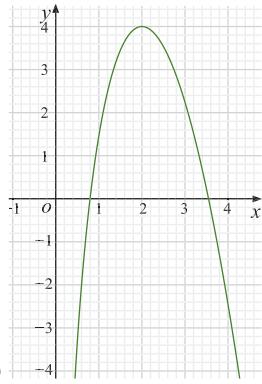
- б)  $f'(x) = 1 - \frac{1}{x}$ , в)  $f'(x) = 3 + \frac{1}{x}$  г)  $f'(x) = \frac{1}{x} - 2$  д)  $f'(x) = \frac{2}{x} - 5$  е)  $y' = \frac{1}{x} - 2x$   
 ё)  $y' = 15x^2 + \frac{3}{x}$  ж)  $y' = \frac{1}{x} + e^x$  з)  $y' = \frac{1}{x} - e^x$  и)  $y' = \frac{3}{x} + e^x$  ў)  $y' = \frac{2}{x} - 3e^x$   
 к)  $y' = \frac{4}{x} - 2e^x$  13. а)  $y' = \frac{-x^2 + 16}{x}$  б)  $y' = \frac{-9x^2 + 225}{x}$  в)  $y' = \frac{9x^2 - 324}{x}$   
 г)  $y' = \frac{8x^2 - 648}{x}$  д)  $y' = \frac{-8x^2 + 392}{x}$  е)  $y' = \frac{-2x^2 + 162}{x}$  14. а)  $f'(x) = \frac{1}{x}$   
 б)  $f'(x) = \frac{1}{x}$  в)  $f'(x) = -\frac{1}{x}$  г)  $f'(x) = \frac{1}{3x}$  16. а)  $(2, 2)$  б)  $\left(\frac{3}{2}, 3\right)$  в)  $\left(\frac{1}{3}, 1\right)$  г)  $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$   
 д)  $(1, 4)$  е)  $(3, 9)$  17. а) 9 б) 8 в) 7 г) 2 е) 9 18.  $y' = 0$  тэгшигтгэлийг шийдгүй  
 гэдгийг харуулахад болно. 19. а) 2.5 б) 3 в)  $\frac{2}{3}$  20.  $\frac{2}{3}$  21.  $\frac{1}{2}, 3$  22. а)  $y' = \frac{9x - 6}{x^2 - x - 2}$

- б)  $y' = \frac{5x - 7}{x^2 - 2x - 3}$  в)  $y' = \frac{4x + 3}{x^2 - x - 6}$  г)  $y' = \frac{4}{x^2 + 2x - 3}$  д)  $y' = \frac{-x - 12}{x^2 - x - 6}$   
 е)  $y' = \frac{5x}{x^2 - x - 6}$  ё)  $y' = \frac{3 - x}{x^2 - 1}$  ж)  $y' = \frac{2x - 14}{x^2 - 2x - 8}$  з)  $y' = \frac{-x^2 - 4x + 8}{x^3 + 8}$  23. а)  $y'_{x=1} = 3$   
 б)  $y'_{x=3} = -4$  в)  $y'_{x=4} = 2.75$  г)  $y'_{x=5} = -1.8$  д)  $y'_{x=5} = 1.4$  е)  $y'_{x=3} = \frac{160}{3}$  ё)  $y'_{x=5} = 39$   
 ж)  $y'_{x=3} = 7$  24. а)  $k = 3.5$  б)  $k = -1$  в)  $k = 4.2$  г)  $k = 5$  д)  $k = -5.8$  е)  $k = -\frac{63}{2}$  ё)  $k = -21$   
 ж)  $k = 6$  з)  $k = 0$  и)  $k = 48$  25. а)  $f'(x) = \frac{1}{x \ln 2}$  б)  $f'(x) = \frac{1}{x \ln 3}$

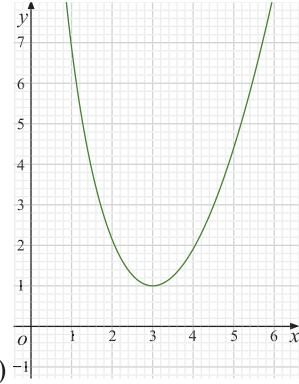
ХАРИУ

в)  $f'(x) = \frac{1}{x(\ln 3 - \ln 2)}$  г)  $f'(x) = \frac{1}{x \ln 10}$  д)  $\frac{1}{x \ln 2}$  е)  $\frac{2}{x \ln 10}$  26. а)  $v_0 = 0$  б)  $v_0 = 1$

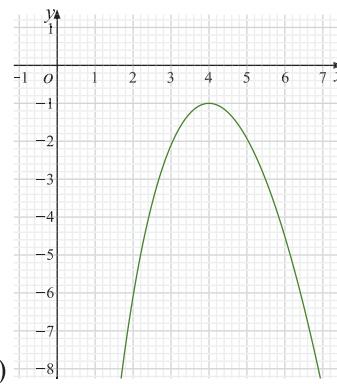
в)  $v_0 = 4$  г)  $v_0 = -3$  д)  $v_0 = 6$  е)  $v_0 = 0$  ё)  $v_0 = 2$  ж)  $v_0 = -20$  з)  $v_0 = 0$  и)  $v_0 = 0$  27. а)  $\left[0, \frac{2}{5}\right]$  б)  $\emptyset$   
в)  $]-\infty, -2] \cup [0, 2]$  г)  $]0, 2[$



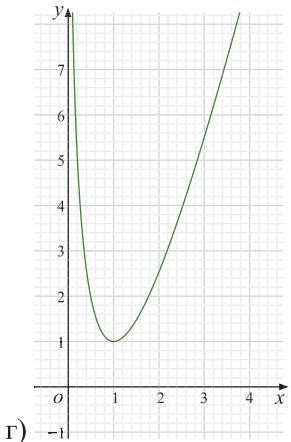
28. а)



б)



в)



г)

29. 2 - ln 4 30.  $y' = -x = -\frac{1}{x}$  31. а)  $f'(x) = 1 + \cos x$

б)  $f'(x) = 2x + 2 \sin x$  в)  $f'(x) = e^x - 2 \cos x$

г)  $f'(x) = \cos x - \sin x$  д)  $f'(x) = \cos x + \sin x$

е)  $f'(x) = -\sin x - \frac{1}{x}$  ё)  $f'(x) = e^x - \sin x$

ж)  $f'(x) = 2x - 2 + 3 \cos x$  з)  $f'(x) = 2x + \cos x$

32. а)  $f'(x) = -\cos x$  б)  $f'(x) = 2 \cos 2x$  в)  $f'(x) = 2 \cos 2x$

г)  $f'(x) = \cos 3x$  д)  $f'(x) = -\sin x$  е)  $f'(x) = -2 \sin 2x$

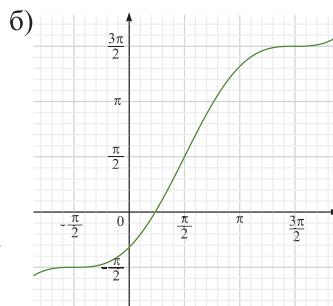
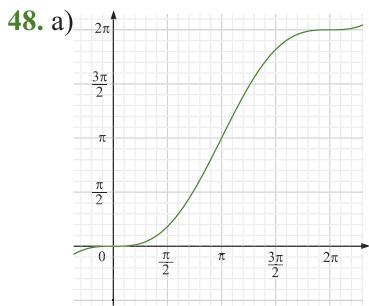
ё)  $f'(x) = 2 \sin 2x$  ж)  $f'(x) = -\sin 3x$  з)  $6 \sin 3x$  33. IV

34. IV 35. IV 36.  $-\frac{\cos x}{\sin^2 x}$ . 37.  $\frac{\sin x}{\cos^2 x}$  40. а) 1 б) -3 в) 2 г) 1 д) 0 е) 0 42.  $90^\circ$ ,  $S = 3 \text{ см}^2$

43.  $\operatorname{tg} x = \frac{4}{3}$ ,  $f_{\max} = 1.8$  44.  $\frac{\sqrt{3}\pi+3}{6}$  45.  $\frac{1}{2}$  46. а)  $\max\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi+6\sqrt{3}}{12}\right)$ ,  $\min\left(\frac{5\pi}{6}, \frac{5\pi-6\sqrt{3}}{12}\right)$

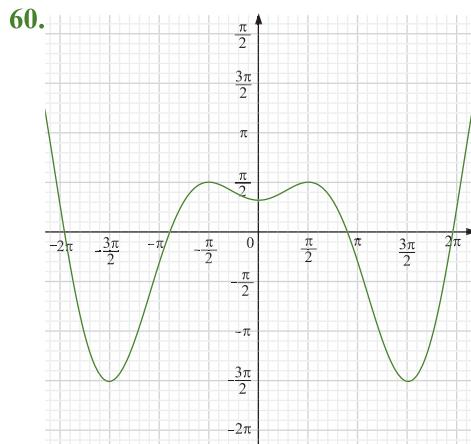
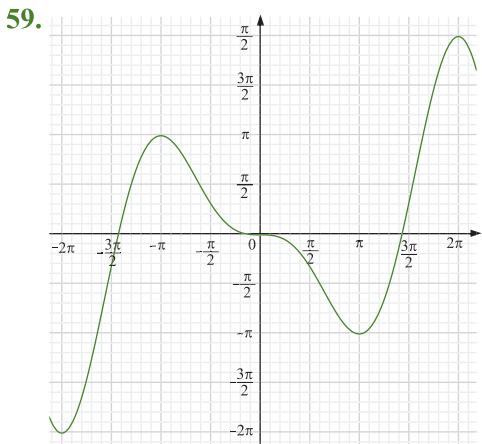
б)  $\max\left(\frac{7\pi}{6}, \frac{7\pi+6\sqrt{3}}{6}\right)$ ,  $\min\left(\frac{11\pi}{6}, \frac{11\pi-6\sqrt{3}}{6}\right)$  в)  $\max\left(\frac{5\pi}{6}, \frac{5\pi\sqrt{3}}{6}+1\right)$ ,  $\min\left(\frac{11\pi}{6}, \frac{7\pi\sqrt{3}}{6}-1\right)$

г)  $\max\left(-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi\sqrt{3}}{6}-1\right)$ ,  $\min\left(\frac{\pi}{6}, -\frac{\pi\sqrt{3}}{6}+1\right)$  47. а)  $-\sqrt{2}, \sqrt{2}$  б) -5, 5

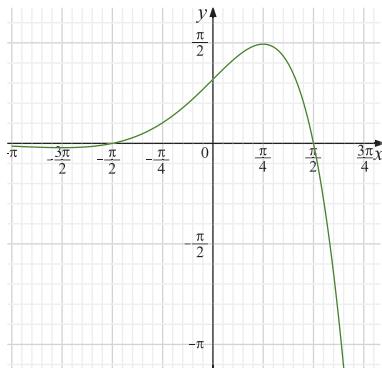


49. а)  $-\pi\sqrt{2}, \pi\sqrt{2}$  б)  $-2, 2$

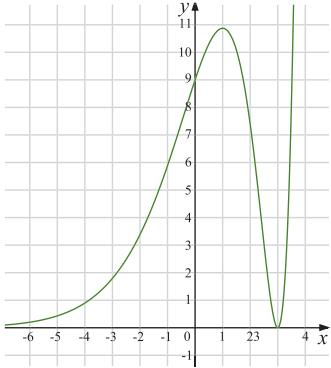
50. а)  $y = x$  б)  $y = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\pi\sqrt{2}}{8}$  в)  $y = \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{(\pi-1)\sqrt{2}}{8}$  г)  $y = \frac{1}{2}x + \frac{3\sqrt{3}-\pi}{6}$   
 д)  $y = 1$  е)  $y = 1$  ё)  $y = -\frac{1}{2}x + \frac{6\sqrt{3}+\pi}{12}$  ж)  $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}(\pi+4)}{8}$  з)  $y = -\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{3+\pi\sqrt{3}}{6}$   
 и)  $y = -x + \frac{\pi}{2}$  к)  $y = -\frac{1}{2}$  51.  $y - y' = 2 \sin x$  52.  $2y - 3y' = -13 \cos x$  53. а)  $f'(x) = 3x^2 - 4x$   
 б)  $f'(x) = (x+1)e^x$  в)  $f'(x) = \sin x + x \cos x$  г)  $f'(x) = x^2 e^x$  д)  $f'(x) = x^3 e^x$   
 е)  $f'(x) = e^x (x-3)(x-1)$  ё)  $f'(x) = \frac{x-3-2x \ln x}{x(x-3)^3}$  ж)  $f'(x) = (2x-3) \cos x + 2 \sin x$   
 з)  $f'(x) = (5x-1) \sin x - 5 \cos x$  и)  $f'(x) = (x^2 - 4x + 3) \cos x + (2x-4) \sin x$   
 ј)  $f'(x) = (15-x) \sin x + \cos x$  к)  $f'(x) = e^x (\cos x + \sin x)$  л)  $f'(x) = e^x (\cos x - \sin x)$   
 м)  $f'(x) = \frac{x \cos x \ln x + \sin x}{x}$  н)  $f'(x) = \frac{-x \sin x \ln x + \cos x}{x}$  о)  $f'(x) = e^x (\sin x - \cos x)$   
 55. б)  $y = \frac{2}{e}x - \frac{1}{e}$  56. а)  $x + 9y = -38$  б)  $2y - x + 6 = 0$  в)  $y = -x$  г)  $x + ey = 1$   
 57. а)  $(1, -e)$  б) минимум 58. а)  $f'(x) = e^x (x^2 - 1)$  б)  $\left(-1, \frac{4}{e}\right), (1, 0)$  в) өсөх  
 $]-\infty, -1[ \cup ]1, +\infty[$ , буурах  $]-1, 1[$  г)  $\max\left(-1, \frac{4}{e}\right), \min(1, 0)$



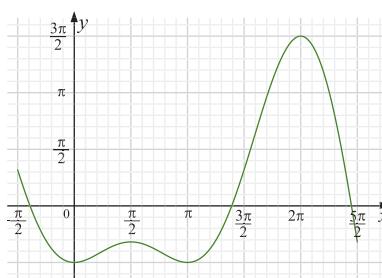
61.



62.



65.



68.  $\cos x - y' = x \sin x$  69.  $\frac{y' - \sin x}{y} = \operatorname{ctgx}$

70. а)  $y' = \frac{(x+3)^7(5x-73)}{(x-8)^4}$  б)  $y' = \frac{(x-3)^5(-x+51)}{(x+5)^8}$

в)  $y' = \frac{x^4(4x+35)}{(x+7)^2}$  г)  $y' = \frac{-3(x-3)(x+1)}{(x-9)^6}$

д)  $y' = \frac{3(x+6)^8(x+9)}{(x+7)^7}$  е)  $y' = \frac{-(x-6)(x-2)}{(x-8)^4}$  ё)  $y' = \frac{(x-8)^2(x+43)}{(x+9)^3}$

ж)  $y' = \frac{(x-2)^4(-2x+9)}{(x-1)^8}$  з)  $y' = \frac{(x-8)(-7x+65)}{(x+1)^9}$  и)  $y' = \frac{3(x+7)^5(x-25)}{(x-9)^4}$

и)  $y' = \frac{-4(x-8)}{(x-3)^6}$  к)  $y' = \frac{(x-4)(x+9)}{(x-8)^2}$  71. а)  $y' = \frac{-x^2-2x}{2(x^2-x-1)^2}$

б)  $y' = \frac{8x^2-8x-6}{(2x^2+5x-1)^2}$  в)  $y' = \frac{28(x^2+2x)}{(x^2+5x+5)^2}$  г)  $y' = \frac{2(2x-1)}{(x^2-x+1)^2}$

д)  $y' = \frac{-6(2x-1)}{(x^2-x-2)^2}$  е)  $y' = \frac{18x^2-46x+20}{(5x^2-2x-3)^2}$  ё)  $y' = \frac{5x^2-2x-16}{(5x-1)^2}$

ж)  $y' = \frac{-3x^2-2}{(x^2-x-1)^2}$  з)  $y' = \frac{-15x^2-22x-8}{(5x^2+5x+1)^2}$  и)  $y' = \frac{2x^2+3x+1}{(x^2-2x-2)^2}$  и)  $y' = \frac{-4(x-1)}{3x^3}$

к)  $y' = \frac{-5x^2-10x}{(x^2-5x-5)^2}$  л)  $y' = -\frac{3}{4}$  м)  $y' = \frac{-3x(x-2)}{(x^2+3x-3)^2}$  н)  $y' = \frac{-5x^2-14x-8}{(5x^2+5x-1)^2}$

72. а)  $f'(x) = \frac{2}{(x+1)^2}$  б)  $f'(x) = \frac{5}{(3x-2)^2}$  в)  $f'(x) = \frac{2x}{(x^2+2)^2}$  г)  $f'(x) = \frac{x^2-6x+2}{(x-3)^2}$

- д)  $f'(x) = \frac{(x-2)^2(x+7)}{(x+1)^3}$  е)  $f'(x) = \frac{16x}{(x^2+4)^3}$  ё)  $f'(x) = \frac{(e^x - e^{-x})x + e^x + e^{-x}}{x^2}$
- ж)  $f'(x) = \frac{2}{x(\ln x + 1)^2}$  з)  $f'(x) = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$  и)  $f'(x) = \frac{1-x}{e^x}$  ѹ)  $f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$
- к)  $f'(x) = \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x}$  л)  $f'(x) = \frac{\sin x + x \cos x}{\sin^2 x}$  м)  $f'(x) = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}$
- н)  $f'(x) = -\frac{x \sin x + \cos x}{x^2}$  о)  $f'(x) = \frac{\cos x - x \sin x}{\cos^2 x}$  Ѻ)  $f'(x) = \frac{\cos x - \sin x}{e^x}$
- п)  $f'(x) = \frac{e^x(\cos x + \sin x)}{\cos^2 x}$  73.  $y' = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$  74.  $y' = -\frac{\cos x}{\sin^2 x}$  75. а) 4 б) 0.08 в)  $\frac{1-\ln 4}{2}$
- р)  $3e^4$  76. а)  $(-0.1, \frac{81}{59})$  б)  $(-\frac{1}{3}, \frac{11}{9})$ ,  $(1, 3)$  в)  $(-\frac{1}{4}, \frac{39}{23})$  г)  $(-3, \frac{4}{11})$ ,  $(\frac{1}{3}, 4)$
- д)  $\max(0, -1), \min(2, -6\frac{1}{3})$  е)  $\max(2, -\frac{8}{5}), \min(0, -\frac{4}{5})$  77. а) өсөх завсар  
 $x < -3, -1 < x$  буурах завсар  $-3 < x < -2, -2 < x < -1, \min(-1, 5) \max(-3, 1)$  б) өсөх завсар  $x < -2, 0 < x$ , буурах завсар  $-2 < x < -1, -1 < x < 0, \min(0, 1) \max(-2, -3)$   
 в) өсөх завсар  $x < -1, 1 < x$ , буурах завсар  $-1 < x < 0, 0 < x 1, \min(1, 4) \max(-1, 0)$   
 г) өсөх завсар  $x < 0, 2 < x$ , буурах завсар  $0 < x < 1, 1 < x < 2, \min(2, 2) \max(0, -2)$   
 д) өсөх завсар  $x < 1, 3 < x$ , буурах завсар  $1 < x < 2, 2 < x < 3, \min(3, 1) \max(1, -3)$   
 е) өсөх завсар  $x < 2, 4 < x$ , буурах завсар  $2 < x < 3, 3 < x < 4, \min(4, 0) \max(2, -4)$  Ѽ) өсөх завсар  $x < 3, 5 < x$ , буурах завсар  $3 < x < 4, 4 < x < 5, \min(5, 2) \max(3, -2)$  ж) өсөх завсар  $x < 4, 6 < x$ , буурах завсар  $4 < x < 5, 5 < x < 6 \min(6, 1) \max(4, -3)$  з) өсөх завсар  $-1 < x < 1$ , буурах завсар  $x < -1, 1 < x$

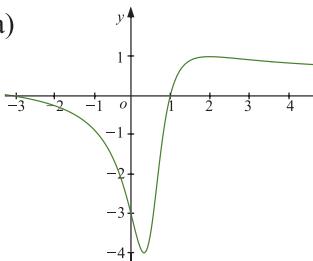
78. а)  $y = \frac{2}{5}x - \frac{4}{5}$  б)  $y = -5x - 1.5$  в)  $y = 12x - 2$  г)  $y = -6x - 7$  д)  $y = -8x + 3$

е)  $y = -\frac{8}{3}x - \frac{4}{3}$  79. а)  $y = -\frac{5}{2}x + 5$  б)  $y = \frac{1}{5}x - 1.5$  в)  $y = -\frac{1}{12}x - 2$  г)  $y = \frac{1}{6}x - \frac{5}{6}$

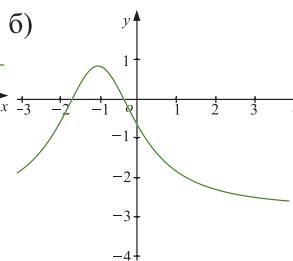
80. а)  $f(x) = -\frac{x^2 - 4x + 3}{e^x}$  б)  $(1, 0), \left(3, \frac{4}{e^3}\right)$  в) Өсөх  $[1, 3[, \text{бүүрал} ]-\infty, 1[ \cup ]3, +\infty[$

г)  $\max\left(3, \frac{4}{e^3}\right), \min(1, 0)$

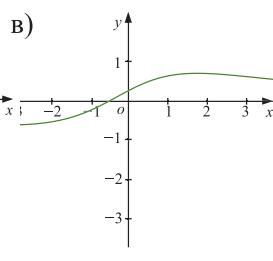
81. а)



б)



в)



82. а)  $\frac{32}{27}$  б)  $\frac{16}{3\sqrt{3}} \approx 3.08$  83.  $y - y' = \frac{e^x}{x^2}$  84. а)  $f'(x) = -\operatorname{tg}^2 x$  б)  $f'(x) = \operatorname{tg}^2 x + 2$

в)  $f'(x) = -e^x + \operatorname{tg}^2 x + 1$  г)  $f'(x) = e^x + \operatorname{tg}^2 x + 1$  д)  $f'(x) = x \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x + x$

е)  $f'(x) = \cos x$  ё)  $f'(x) = e^x (\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x + 1)$  ж)  $f'(x) = \frac{\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x + 1}{e^x}$

з)  $f'(x) = 2x + \operatorname{tg}^2 x + 1$  и)  $f'(x) = e^x + \frac{2}{\cos^2 x}$  ї)  $f'(x) = 2x + \frac{1}{\cos^2 x}$

к)  $f'(x) = -e^x (\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x + 1)$  л)  $f'(x) = \frac{x \operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x + x}{x^2}$  м)  $f'(x) = e^x \cdot \frac{\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x + 1}{\operatorname{tg}^2 x}$

н)  $f'(x) = \frac{-2}{1 + \sin 2x}$  о)  $f'(x) = \frac{\ln^2 x + 2x \ln x - x}{\ln^2 x}$  он)  $f'(x) = \frac{x}{\cos^2 x}$

85. а)  $f'(x) = -\frac{1}{\cos^2 x}$  б)  $f'(x) = \frac{2}{\cos^2 2x}$  в)  $f'(x) = \frac{2}{\cos^2 2x}$  г)  $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 3x}$

86. а)  $\frac{\sin 2x + 2x - 4}{\cos^2 x}$  б)  $\frac{2 - 3x - 3 \sin x \cos x}{\cos^2 x}$  в)  $\frac{x^2 - 2x - 3 + (x-1)\sin 2x}{\cos^2 x}$

г)  $-\frac{(x+1)\sin 2x - 4 + 2x + x^2}{\cos^2 x}$  д)  $f'(x) = \operatorname{tg} x \cos x + \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \sin x \frac{\cos^2 x + 1}{\cos^2 x}$ ,

е)  $f'(x) = \cos x$ , ё)  $f'(x) = (\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x + 1) \cdot e^x$  ж)  $\frac{\ln x^{2x} + \sin 2x}{2x \cos^2 x}$

87. а)  $f'(x) = \frac{\sin 2x - 2x + 4}{\sin^2 x}$  б)  $f'(x) = \frac{2x - 4 - \sin 2x}{(2x-4)^2 \cos^2 x}$

в)  $f'(x) = \frac{-3 \sin x \cos x - 2 + 3x}{\sin^2 x}$  г)  $f'(x) = \frac{2 - 3x + \sin x \cos x}{(2-3x)^2 \cos^2 x}$

д)  $f'(x) = \frac{x^2 - 2x - 3 - (x-1)\sin 2x}{(x^2 - 2x - 3)^2 \cos^2 x}$  е)  $f'(x) = \frac{(x-1)\sin 2x - x^2 + 2x + 3}{\sin^2 x}$

ё)  $f'(x) = -\frac{4 - 3x - x^2 + (3+2x)\sin x \cos x}{(4-3x-x^2)\cos^2 x}$

ж)  $f'(x) = -\frac{x^2 + 3x - 4 - (3+2x)\sin x \cos x}{\sin^2 x}$  з)  $f'(x) = \left( \frac{\sqrt{x}}{\operatorname{tg} x} \right)' = \frac{\sin 2x - 4x}{4\sqrt{x} \sin^2 x}$  и)

$f'(x) = \left( \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{x}} \right)' = \frac{4x - \sin 2x}{4\sqrt{x} \cos^2 x}$  ї)  $f'(x) = \left( \frac{\operatorname{tg} x}{\sin x} \right)' = \frac{\operatorname{tg} x}{\cos x}$  ж)  $f'(x) = \left( \frac{\sin x}{\operatorname{tg} x} \right)' = -\sin x$

л)  $f'(x) = \left( \frac{\operatorname{tg} x}{\cos x} \right)' = \frac{1 + \sin^2 x}{\cos^3 x}$ , м)  $f'(x) = \left( \frac{\cos x}{\operatorname{tg} x} \right)' = \frac{(\sin^2 x + 1)\cos x}{\sin^2 x}$ ,

н)  $f'(x) = \left( \frac{\operatorname{tg} x}{e^x} \right)' = \frac{1 - \sin x \cos x}{e^x}$  о)  $f'(x) = \left( \frac{e^x}{\operatorname{tg} x} \right)' = \frac{e^x (\sin x \cos x - 1)}{\sin^2 x}$

о)  $f'(x) = \left( \frac{\operatorname{tg} x}{\ln x} \right)' = \frac{x \ln x - \sin x \cos x}{x \cos^2 x \ln^2 x}$  и)  $f'(x) = \left( \frac{\ln x}{\operatorname{tg} x} \right)' = \frac{\sin x \cos x - x \ln x}{x \sin^2 x}$

**88.**  $(\operatorname{ctgx})' = -\frac{1}{\sin^2 x}$  **92.**  $y=1$  **93.**  $\max\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}-1\right), \min\left(-\frac{\pi}{4}, 1-\frac{\pi}{2}\right)$  **94.** а)  $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ ,

$] -\infty, +\infty [$ , Сондгой функц 6)  $y=4-\frac{1}{\cos^2 x}$  в)  $x_{1,2}=\pm\frac{\pi}{3}$  г)  $\left] -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3} \right[$ ,

$\left] -\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{3} \right[ \cup \left] \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2} \right[$ ,  $\left( \frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3} \right), \left( -\frac{\pi}{3}, -\frac{4\pi}{3} + \sqrt{3} \right)$  **96.**  $y' - y(\operatorname{tg} x + 1) = e^x$

**97.**  $y' - y(\operatorname{tg} x - 1) = e^{-x}$  **98.** а)  $y=2x+e^x$  1 б)  $y=1-\frac{1}{x}$  0 в)  $y=-\cos x$ , 1

г)  $y=\frac{1}{\cos^2 x}-1$ , 1 д)  $y=x(x+2)e^x$ , 0 е)  $y=\ln x+1$ , 2 ё)  $y'=-\frac{\cos x}{\sin^2 x}$  тодорхойлогдохгүй

ж)  $y=\operatorname{tg} x+\frac{x}{\cos^2 x}$ , 1 +  $\frac{\pi}{2}$  **99.** а)  $-\frac{4}{9e^3}$  б)  $\frac{2e^3}{9}$  **100.** а)  $y'=\frac{-2(x-1)(x-5)}{(x+3)^5}$

б)  $y'=\frac{6(2x-1)^2(x-1)}{(3x-2)^3}$  в)  $\frac{3(3x-1)^3(5x+21)}{(5x+4)^4}$  г)  $\frac{-6(x-4)(2x-15)}{(6x-3)^5}$  **101.** а)  $\frac{-220}{27}$

б)  $\frac{7}{4}$  в) 54 г) 13 **102.** а)  $\left( 1\frac{2}{3}, 0 \right)$ ,  $(1.5, 0.25)$  б)  $(1.8, 0)$ ,  $(2.4, -50)$  в)  $(0.5, 0)$ ,

$(-4, 81)$  г)  $(2, 0)$ ,  $(3, 2)$  **103.** а)  $k=y'=\frac{-16(4x+1)(x+1)}{(2x-1)^5}=\frac{-16 \cdot 5 \cdot 2}{1}=-160$

б) 270 в) 0 г)  $\frac{1}{9}$  **104.** а)  $f'(x)=1-2x\cos x^2$  б)  $f'(x)=-\sin 2x$  в)  $f'(x)=\frac{2}{2x+1}$

г)  $f'(x)=7^x \ln 7$  д)  $f'(x)=2 \cdot 5^{2x+1} \ln 5$  е)  $f'(x)=-3^{1-x} \ln 3$  **105.** а)  $y'=e^{x+1}$ , б)

ж)  $y'=-e^{1-x}$ , в)  $y'=-e^{3-x}$ , г)  $y'=-2e^{-2x}$ , д)  $y'=2e^{2x-3}$ , е)  $y'=3e^{3x+2}$ , ё)  $y'=3e^{3x-2}$ ,

ж)  $y'=-5e^{-5x+3}$ , з)  $y'=-3e^{4-3x}$ , и)  $y'=-3e^{2-3x}$ , ў)  $y'=2xe^{x^2}$ , к)  $y'=\frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$

**106.** а)  $y'=6x+\frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$ , б)  $y'=\frac{e^{\frac{x^3}{3}}}{3x^{\frac{2}{3}}}-5$ , в)  $y'=3x^2-2xe^{x^2}$ , г)  $y'=-3e^{3x}$ ,

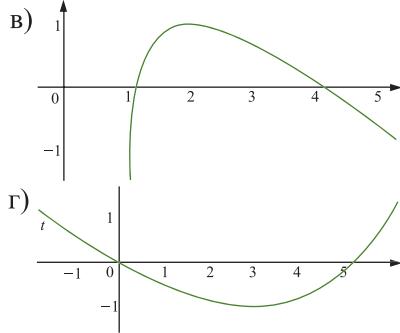
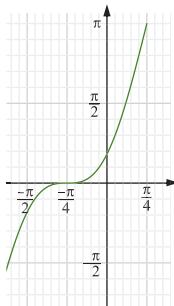
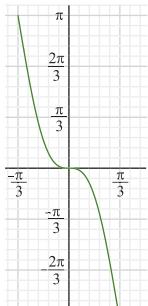
д)  $y'=\frac{2}{x^{\frac{1}{2}}}-e^{1-x}$ , е)  $y'=2e^{2x+1}+6x-\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$ , **107.** а)  $y'=\frac{1}{x}$ , б)  $y'=\frac{2}{x}$ , в)  $y'=\frac{9}{x}$ ,

- г)  $y' = -\frac{3}{x}$ , д)  $y' = -\frac{7}{x}$ , е)  $f'(x) = \frac{2}{\ln(2x+5)}$ , ё)  $f'(x) = \frac{-3}{\ln(8-3x)}$ ,
- ж)  $f'(x) = \frac{6x^2 + 6x}{2x^3 + 3x^2 - 5}$  108. а)  $f'(x) = 2\cos(2x-3)$  б)  $f'(x) = 2\cos(2x-1)$   
 в)  $f'(x) = 5\sin(-5x+1)$  г)  $f'(x) = 3\sin(2-3x)$  д)  $f'(x) = 5\cos(5x+4)$   
 е)  $f'(x) = -2\sin(2x-5)$  ё)  $f'(x) = -\sin(x-15)$  ж)  $f'(x) = (2x-4)\cos(x^2-4x+3)$   
 з)  $f'(x) = 2\sin x \cos x = \sin 2x$  и)  $f'(x) = -2\cos x \sin x = -\sin 2x$  ї)  $f'(x) = 2x \cos x^2$   
 к)  $f'(x) = -2x \sin x^2$  л)  $f'(x) = 2 \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$  м)  $f'(x) = -\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$   
 н)  $f'(x) = -3 \sin\left(3x - \frac{\pi}{3}\right)$  о)  $f'(x) = 3 \sin 3x$  о)  $f'^{(x)} = -\sin(x-5) + \cos x$   
 п)  $f'(x) = -2 \sin 2x - \cos x$  р)  $f'^{(x)} = 3 \cos 3x + 2 \sin 2x$   
 с)  $f'(x) = -2 \sin(2x-\pi) - \cos x$  т)  $f'(x) = \pi(\cos \pi x - \sin \pi x)$   
 ю)  $f'(x) = \frac{1}{3} \cos \frac{x}{3} - \frac{1}{2} \sin \frac{x}{2}$  ў)  $f'(x) = -\sin \frac{x}{3} - \cos \frac{x}{5}$  ф)  $f'(x) = \cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$
109.  $y' = \frac{6x-11}{2x^2-2x-3}$  б)  $y' = \frac{9x+1}{3x^2+2x-1}$  в)  $y' = \frac{8x+5}{2x^2-x-6}$  г)  $y' = \frac{8x+1}{2x^2-x-1}$   
 д)  $y' = \frac{12x-20}{3x^2-10x+3}$  е)  $y' = \frac{2x+13}{2x^2+5x-3}$  ё)  $y' = \frac{-6x-9}{3x^2-x-2}$  ж)  $y' = \frac{6x-35}{6x^2-5x-6}$
110. а)  $f'(x) = \frac{2}{\cos^2(2x-4)}$  б)  $f'(x) = \frac{-3}{\cos^2(2-3x)}$  в)  $f'(x) = \frac{2x-2}{\cos^2(x^2-2x-3)}$   
 г)  $f'(x) = -\frac{1}{\cos^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}$  д)  $f'(x) = \frac{4}{\cos^2 2x}$  е)  $f'(x) = -\frac{3}{\cos^2(\pi-3x)}$   
 ё)  $f'(x) = \frac{1}{\cos^2\left(x - \frac{\pi}{8}\right)}$  ж)  $f'(x) = \frac{1}{\cos^2\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)}$  з)  $f'(x) = -\frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{6} - \frac{x}{2}\right)}$
111. а)  $f'(x) = 2x \ln x + x - 2$  б)  $f'(x) = 2x \sin x + x^2 \cos x$  в)  $f'(x) = 3x^2 \cos x - x^3 \sin x$   
 г)  $y' = \sqrt{2} (\cos \sqrt{2}x - \sin \sqrt{2}x)$  д)  $f'(x) = 3^x \ln 3$  е)  $f'(x) = -5^{-x} \ln 5$  112.  
 а)  $f'(x) = 3 \cos 3x \sin 2x + 2 \sin 3x \cos 2x$  б)  $f'(x) = -3 \sin 3x \sin 2x + 2 \cos 3x \cos 2x$   
 в)  $f'(x) = -3 \sin 3x \cos 2x - 2 \cos 3x \sin 2x$  г)  $f'(x) = -\sin x \sin 2x + 2 \cos x \cos 2x$   
 д)  $f'(x) = -\sin x \cos 2x - 2 \cos x \sin 2x$  е)  $f'(x) = \cos x \cos 2x - 2 \sin x \sin 2x$   
 ё)  $f'(x) = \cos x \sin 2x + 2 \sin x \cos 2x$  ж)  $f'(x) = -3 \sin 3x \sin x + \cos 3x \cos x$   
 з)  $f'(x) = -3 \sin 3x \cos x - \cos 3x \sin x$  113. а)  $y' = \frac{3}{(1-x)^2}$  б)  $y' = \frac{1}{x(1-x)}$

в)  $y' = 3^{1-3x} \ln 3$  г)  $y' = -4^{-x} \ln 4$ , д)  $y' = e^x \cos e^x$  е)  $y' = -e^x \sin e^x$  114. а)  $f(x) = (x+1)e^x$

б)  $(-1, -0.37)$  115.  $x = 3$  116.  $\frac{3\sqrt{2}}{2}$  117. а)  $y = -3x + \pi$  б)  $y = 1$  118.  $y = x - \frac{\sqrt{3}}{2} - \pi$

119.  $y = -\frac{2}{3}x + \frac{\sqrt{3}}{2}$  120.  $y = 1$  121.  $y = -1$  122.  $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$  123.  $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$



124. а)

б)

125.  $\frac{y'}{y} = \frac{2}{\operatorname{tg} 2x}$  127.  $\frac{y'}{y} = \frac{1}{2x}$  130. а)  $f'(x) = -30(2-3x)^9$  б)  $f'(x) = -3\sin 3x + 2\cos 2x$

в)  $f'(x) = \sin 2x$  г)  $f'(x) = -2x \sin x^2$  д)  $f'(x) = \frac{1}{x} - \sin x$  е)  $f'(x) = \sin x e^{-\cos x}$

ё)  $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{x}$  ж)  $f'(x) = e^{\sin x + 3x} (\cos x + 3)$  з)  $f'(x) = \frac{2(x+1)}{x^2 + 2x + 4}$  131.  $\left(\frac{5}{4}, -\frac{1}{4}\right)$

132.  $\left(1, \frac{1}{e}\right)$  134. 1

#### IV БҮЛГИЙН НЭМЭЛТ ДААЛГАВАР

1. а)  $y' = 2e^{2x} - 3\cos 3x$  б)  $y' = \frac{1}{x} - 3\sin 3x$  в)  $y = e^x (4\operatorname{tg}^2 4x + \operatorname{tg} 4x + 4)$

г)  $y = \frac{1-2\ln x}{x^3}$  д)  $y = \frac{2x^2-4}{(x^2+x+2)^2}$  е)  $y' = 3x^2 (\cos x^3 - \sin x^3)$  2. а) 1 б)  $\frac{2}{\pi}$  в) 4

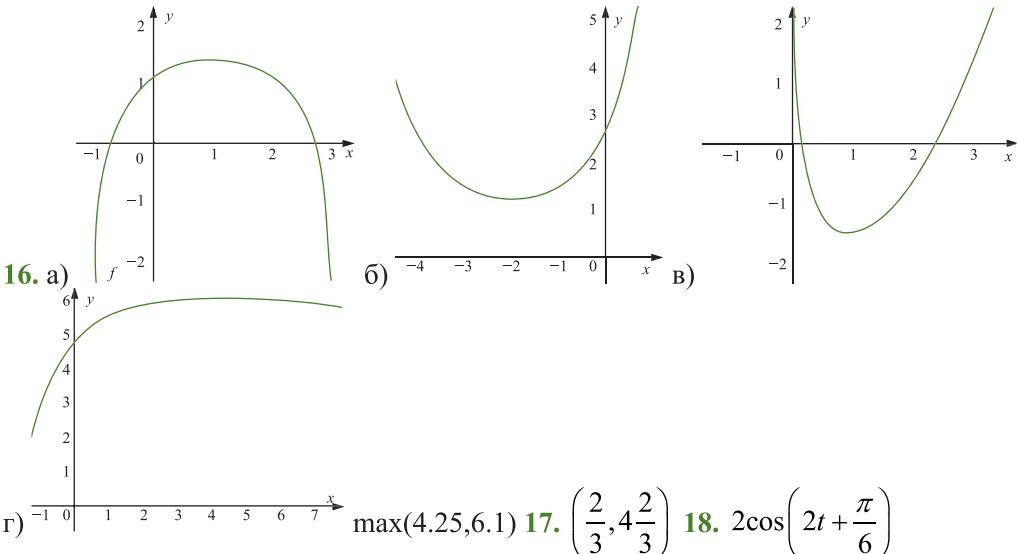
г)  $e^\pi$  д) 1 е)  $y' = e^x (\sin x + \cos x) = \sqrt{2}e^{\frac{x}{4}}$  3. а)  $-5e^3$  б)  $\frac{\pi^2}{16}$  в)  $-\frac{2+3\sqrt{3}}{2e^2}$  г) -2

д)  $3\frac{2}{3}$  4.  $y = x+1$  5. 3.5 6.  $\frac{1}{4}$  7. а)  $y = -x-1$  б)  $y = e^2$  в)  $y = -x+1$

8. а)  $y = -x-1$  б)  $\frac{\pi}{2}$  в)  $y = \frac{1}{2}x - \frac{\pi}{2}$  г)  $x = \frac{\pi}{3}$  д)  $y = -\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{12}$  9.  $\frac{8t+22}{2t+3} = \frac{54}{11}$ ,

$-\frac{20}{(2t+3)^2} = -\frac{20}{121}$  10.  $\left(\frac{\sqrt{e}}{2}, \frac{2}{e}\right)$  max 11.  $\left(\frac{\pi}{12}, 1\right)$  12.  $\left(-\frac{1}{2}, \ln \frac{3}{4}\right)$  min 14. а) ёсөх

]-∞, 3[, бүүрарах ]3, +∞[ 6) есөөх ]-∞, 1[, бүүрарах ]1, +∞[ в) есөөх  $\left[\frac{11}{12}, \frac{3}{2}\right]$ , бүүрарах  
 $\left[\frac{1}{3}, \frac{11}{12}\right]$  есөөх..., бүүрарах ]-∞, 1[



$\max(4.25, 6.1)$  17.  $\left(\frac{2}{3}, 4\frac{2}{3}\right)$  18.  $2\cos\left(2t + \frac{\pi}{6}\right)$

19. a)  $-1, 0$  б)  $\pm\sqrt{\frac{3}{2}}$  20.  $2\tg^3 2x + 2\tg^2 2x + 4\tg 2x + 2 = 2 \frac{2\sin 2x + \cos 2x}{\cos^3 2x}$

21.  $\sin x - \sin 2x$  22. a)  $2e^{2u-1}$  б)  $-\sin x$  в)  $-2\sin x e^{2\cos x - 1}$  г)  $-\sqrt{3}$  23. a)  $\frac{1}{u}$  б)  $-\sin x$

в)  $-\operatorname{tg} x$  г)  $-1$  24. a)  $2u+1$  б)  $2x-1$  в)  $-21$  25. a)  $]-\infty, -1[ \cup ]2, +\infty[$ ,  $\frac{2x-1}{(x-2)(x+1)}$   
 б)  $]1, +\infty[$ ,  $\frac{3x^2-6x+4}{(x-1)(x^2-2x+2)}$  в)  $]-1, +\infty[$ ,  $\frac{3x^2}{x^3+1}$  г)  $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$ ,  $\frac{6x}{(x+1)(2x-1)}$

26.  $y' = \frac{-2x^2+8}{x}$  27.  $y_0 = -66$  28.  $x = 2$  29.  $k = 6$  30.  $\frac{1}{48}$  32. а)  $A(3, 0)$  б)  $B(0, 3)$  в)  
 $M(2, e^2)$  г)  $y = 2x + 3$  33.  $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6} + \sqrt{3}\right), \left(\frac{5\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} - \sqrt{3}\right)$  34. а)  $(1, -e)$  б) минимум

35. б)  $y = \frac{2}{e}x - \frac{1}{e}$  36. а)  $x = 0.607$  б) минимум 37. а)  $y' = e^{2x} - e^x$  б) 0 в) 1

## V БҮЛЭГ

ХАРИУ

- 1.** а)  $\frac{1}{4}e^{4x} + C$  б)  $\frac{1}{5}e^{5x-2} + C$  в)  $-\frac{7}{3}e^{-3x} + C$  г)  $2e^{3+\frac{x}{2}} + C$  д)  $-\frac{1}{2}e^{9-2x} + C$  е)  $\frac{1}{6}e^{2x-6} + C$
- в)  $\frac{1}{2}e^{2x} - \frac{3}{4e^{4x}} + C$  ж)  $4e^x + \frac{9}{2e^{2x}} + C$  з)  $0.4e^{2x} - \frac{1}{e^{4x}} + C$  **2.** а)  $\frac{1}{2}(e^4 - 1)$  б)  $\frac{1}{5}(e^3 - e^{-2})$
- в)  $-3 + 6e$  г)  $6(\sqrt{e} - 1)$  д)  $\frac{1}{2}\left(e^5 - \frac{1}{e^3}\right)$  е)  $\frac{4e-4}{e^6}$  ж)  $4\frac{4}{9}$  з)  $2\frac{41}{72} + \ln\frac{4}{9}$  и)  $\frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{e^3} - \frac{3}{2}$
- 3.** **2.** **4.** а)  $\frac{1}{2}\ln|x| + C$  б)  $2\ln|x| + C$  в)  $\frac{3}{4}\ln|x| + C$  г)  $\frac{2}{3}\ln|3x-2| + C$  д)  $\frac{1}{2}\ln|2x+1| + C$
- е)  $-\frac{3}{2}\ln|5-2x| + C$  ж)  $\frac{1}{3}\ln|3x-2| + \frac{1}{2}\ln|5-4x| + C$  в)  $-\frac{1}{20x^4} + 2\ln|1-x| + C$
- з)  $\frac{3}{2}\ln|2x+1| - \frac{2}{(x-3)^2} + C$  **5.** а)  $\ln\frac{5}{4}$  б)  $\frac{1}{2}\ln 3$  в)  $\ln 2$  г)  $2\ln 2$  д)  $\frac{1}{2}\ln 7$  е)  $\frac{1}{2}(e^2 + 1)$
- ж)  $\ln\left|\frac{2e-7}{e-7}\right|$  ж)  $2 - \ln 2$  з)  $\frac{1}{2e}(e^2 - 3)$  **6.** а)  $\frac{(x-1)^3}{3} - \frac{3}{2}e^{1-2x} + C$  б)  $e^x + x + 7e^{-x} + C$
- в)  $2\ln|x| + 3e^x + C$  г)  $\frac{x^2}{2} - \frac{7}{4}\ln|x| - \frac{5}{4x} + C$  д)  $-x + \ln|2x+1| + C$
- е)  $\frac{5}{2}e^{2x-0.5} - \frac{2}{3}\ln|3x-5| + C$  ж)  $\frac{1}{2}e^{2x} + \frac{1}{3}\ln|3x+1| + C$  в)  $\frac{2}{3}e^{1.5x} + 2\ln|x-1| + C$
- з)  $\frac{1}{4}e^{4x} - 2x + C$  **7.** а)  $\ln 2$  б)  $\ln 2$  в)  $\ln 2$  г)  $\ln 2$  **9.** а)  $\ln 2$  б)  $\frac{1}{2}\ln 3$  в)  $\ln 2$  г)  $8 + \ln 5$
- 10.** 1.268 **11.**  $y = 2\ln|4x-3| + 2$  **12.** а)  $-\frac{1}{7}\cos 7x + C$  б)  $\frac{3}{2}\sin 2x + C$  в)  $\frac{3}{20}\operatorname{tg} 5x + C$
- г)  $\frac{4}{3}\operatorname{tg} 3x + C$  д)  $\frac{3}{2}\cos(1-2x) + C$  е)  $\frac{5}{3}\sin\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) + C$  ж)  $\frac{1}{3}\sin 3x - 2\cos 5x + C$
- ж)  $-2\cos 2x - \frac{3}{2}\sin 2x + C$  з)  $-\frac{1}{4}\operatorname{ctg}(2x) + C$  **13.** а)  $\frac{1}{3}$  б)  $-\frac{1}{4}$  в)  $0$  г)  $\frac{1}{2}$  д)  $0$  е)  $1$
- ж)  $2\cos 2x - \frac{3}{2}\sin 2x + C$  з)  $-\frac{1}{4}\operatorname{ctg}(2x) + C$  **14.** а)  $-\frac{1}{3}\cos 3x + 3\sin x + 2\cos\frac{x}{2} + C$  б)  $\frac{1}{6}e^{2x} - \frac{1}{2}\operatorname{tg} 2x + C$
- в)  $2\ln|x| + 3e^x - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + C$  г)  $-\frac{1}{2}\cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) - \frac{1}{2}e^{1-2x} + C$
- д)  $-3\operatorname{ctg}\left(\frac{x}{3}\right) + \frac{5}{2}\ln|2x-1| + C$  е)  $\frac{5}{3}\sin\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) - \frac{2}{3}\ln|3x-5| + C$
- 15.** а)  $F(x) = -\frac{1}{2}\cos 2x + x^3 + \frac{5}{2}$  б)  $F(x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\sin 2x + 1$

**16.**  $F(x) = 3x + \sin(2-x)$  **17.** а)  $x = 2e^2$  б)  $x = \frac{1}{2} \ln 3$  в)  $x = \pi$  **18.**  $S = 1$  **19.**  $S = 2$

**20.** 0.067 **21.** а)  $\ln \left| \frac{x}{x+2} \right| + C$  б)  $\frac{2}{3} \ln |(x-1)(x+2)^2| + C$  в)  $\frac{1}{3} \ln \left| \frac{(x+2)^5}{(x-1)^2} \right| + C$

г)  $\ln \left| \frac{x-2}{(x-3)^2} \right| + C$  д)  $\frac{1}{5} \ln \left| \frac{(x-3)^6}{x+2} \right| + C$  е)  $\frac{1}{2} \ln \left| \frac{(x+2)^3}{x} \right| + C$  ё)  $\frac{3}{2} \ln |x^2 - 4| + C$

ж)  $\ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C$  з)  $\frac{5}{8} \ln \left| \frac{(x-2)(x+2)}{x^2} \right| + C$  и)  $2 \ln |x-1| - \frac{5}{x-1} + C$  к)  $\ln |x-3| - \frac{3}{x-3} + C$

л)  $\ln |x+1| - \frac{5}{2} \ln |x-4| - \frac{3}{2} \ln |x-2| + C$  **22.** а)  $\frac{1}{6} \ln |(x+1)(x-5)^2| + C$  б)  $\frac{2}{5} \ln \left| \frac{x-2}{x+3} \right| + C$

в)  $\ln |(x-1)(x-2)| + C$  г)  $\ln \left| \frac{(x-3)^2}{x-2} \right| + C$  д)  $\frac{1}{2} \ln \left| \frac{(x-1)^8}{(2x-1)^7} \right| + C$  е)  $\ln \left| \frac{x}{x-1} \right| - \frac{3}{x} + C$

**23.** а)  $x - 5 \ln |x+5| + C$  б)  $\frac{x}{2} - \frac{3}{4} \ln |4x+6| + C$  в)  $-x - 4 \ln |x-2| + C$

г)  $3x + 5 \ln |x-2| + C$  д)  $\frac{x}{2} + \frac{1}{4} \ln |4x+2| + C$  е)  $x + \ln |x^2 + 1| + C$

ё)  $2x - \frac{1}{5} \ln |(x+3)^7 (x-2)^3| + C$  ж)  $2x^2 + 2 \ln |x^2 - 1| + C$  з)  $x + \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right| + C$

**24.** а)  $\frac{1}{6} \ln \frac{27}{4}$  б)  $\frac{1}{2} \ln \frac{16}{27}$  в)  $\frac{1}{2} \ln \frac{12}{5}$  г)  $\frac{3}{4} \ln \frac{48}{5}$  д)  $\frac{5}{6} \ln \frac{128}{5}$  е)  $-\ln 6$  ё)  $\frac{1}{5} \ln \frac{3^7}{2^{11}} + 2$

ж)  $-2 \ln 3$  з)  $20 \ln 2 - 12 \ln 3$  **25.**  $f(x) = \ln \left| \frac{x-3}{x+2} \right|$  **26.**  $S = \ln \frac{1}{2}$  **27.** а)  $4 \ln |x| + C$

б)  $\ln |3x-4| + C$  в)  $3 \ln |x^2 - 5| + C$  г)  $\ln |2x^3 - 1| + C$  д)  $5 \ln |(2x^2 + x + 1)| + C$

е)  $\frac{4}{3} \ln |2x^3 + 1| + C$  ё)  $\frac{1}{2} \ln |x^2 - 8x + 7| + C$  ж)  $\frac{1}{2} \ln |(x^2 - x + 1)| + C$  з)  $\frac{3}{2} \ln \left| x^3 + \frac{2}{3}x \right| + C$

и)  $2 \ln |2x^2 + x - 5| + C$  ж)  $\ln |y^3 + y^2| + C$  л)  $\frac{3}{4} \ln |t| + C$  **28.** а)  $3x + \ln |x^2 + 5x| + C$

б)  $3x + \ln |x^2 - 2x| + C$  в)  $\frac{1}{2} x^2 + \ln |x^3 + x^2| + C$  г)  $\frac{1}{2} x^2 + \ln |x^2 - 1| + C$

д)  $x + \ln |(x^2 + 1)| + C$  е)  $x + \ln |x^2 - 4| + C$  **29.** I-Б, II-а, III-∅, IV-Г

**33.** а)  $\ln(e^x + e^{-x}) + C$  б)  $-\ln |\cos x| + C$  в)  $\ln |\sin x| + C$  **34.** а)  $\ln(2 + \sin x) + C$

б)  $\frac{1}{3} \ln |x^3 + 5| + C$  в)  $3 \ln |(e^x + 6)| + C$  г)  $-\frac{3}{2} \ln |7 - e^{2x}| + C$  **36.** а)  $\ln |(\sin x + 1)| + C$

б)  $\frac{\sin^2 x}{2} + C$  в)  $\ln |e^x - e^{-2x}| + C$  г)  $-\frac{1}{3} \ln |\cos 3x| + C$  **37.** а)  $\ln 2$  б)  $\ln \frac{2\sqrt{2}}{3}$  в)  $\ln \sqrt{\frac{13}{3}}$

- г)  $\ln 15$  **38.** а) 0.69 б) 0.35 в)  $-0.14$  г) 3.47 **39.** а) 0 б) 0.59 в) 0.69 **40.** 0.549  
**41.** б) 0.875 в) 0.288 **42.** 8.74 **43.** а)  $\frac{1}{2} \ln(1 + \sin^2 x) + C$  б)  $2(\sqrt{x} - \ln(1 + \sqrt{x})) + C$   
 в)  $\frac{1}{36}(4x+7)^9 + C$  г)  $-\frac{1}{2} \ln|1-x^2| + C$  д)  $\frac{2}{15}(x-4)^{\frac{3}{2}}(3x+8) + C$   
 е)  $\frac{1}{360}(1+2x)^9(18x-1) + C$  ё)  $\frac{1}{2} \ln|2x+1| - \frac{1}{2(2x+1)} + C$   
 ж)  $\frac{(x+2)^2}{2} - 6(x+2) + 12 \ln|x+2| + \frac{8}{x+2} + C$  **44.** а)  $\frac{2}{3} \sqrt{6(x-2)^3} + C$   
 б)  $\frac{3}{8} \sqrt[3]{(4x+3)^2} + C$  в)  $\frac{2}{3} \sqrt{1+x} \cdot (x-2) + C$  г)  $\frac{3-4x}{(x-2)^2} + C$   
**45.** а)  $-\frac{(1-5x^2)^{11}}{6600}(55x^2+1) + C$  б)  $2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6 \ln(\sqrt[6]{x}+1) + C$   
 в)  $-\frac{1}{3}(x+1)\sqrt{1-2x} + C$  г)  $\frac{2}{9} \sqrt{(1+3\tan x)^3} + C$  **46.** а)  $\frac{x}{x+1} + C$  эсвэл  $C - \frac{1}{x+1}$   
 б)  $\frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C$  в)  $\frac{1}{3} \sin^{-1} \sqrt{1-x^6} + C$  **47.** а)  $2 \ln|\sqrt{x}-1| + C$  б)  $-\frac{2}{3} \cos^{\frac{3}{2}} x + C$   
 в)  $\frac{4}{3} \left( x^{\frac{3}{4}} + \ln \left| x^{\frac{3}{4}} - 1 \right| \right) + C$  г)  $\frac{1}{2} \cos^2 x - 2 \cos x + 3 \ln(2 + \cos x) + C$  д)  $e^{\sqrt{2x-1}} + C$   
 е)  $-\frac{1}{32}(1-2x^4)^4 + C$  ё)  $\frac{1}{3} \cos(2-3x) + C$  ж)  $\ln \left| \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} \right| + C$  **48.** а)  $\frac{2}{5}$  б)  $8\frac{1}{15}$   
 в)  $\frac{31}{28^3}$  г)  $7\sqrt{2}$  **49.** а)  $2\sqrt{2} - \sqrt{3}$  б)  $\ln \sqrt{2}$  **50.** а)  $\frac{2}{3}$  б)  $\frac{1}{2}$  в)  $-\frac{1}{32}$  г)  $\frac{16}{9}(16\sqrt{2}-1)$   
 д)  $3\sqrt{3}$  е)  $6\frac{2}{3}$  ё)  $20\frac{1}{4}$  ж)  $661\frac{1}{3}$  з)  $\frac{4\sqrt{2}}{3}$  **51.** а) 2 б)  $-33\frac{3}{4}$  в)  $\frac{3}{4}$  г)  $\frac{8}{3}(4\sqrt{2}-5)$   
 д)  $-\frac{8}{3}(10\sqrt{2}+23)$  е)  $-\frac{310}{297}\sqrt[5]{4}$  **52.** а)  $\frac{1}{5}(4\sqrt{2}-1)$  б)  $\ln(1+\sqrt{2})$  в)  $\frac{1}{2} \ln \frac{5}{3}$  **53.** в)  $\frac{\pi}{2}$   
**55.** 2401 **56.** а)  $\frac{1}{3}$  б)  $\frac{15}{64}$  в)  $\pi$  г) 0 **57.**  $\frac{1}{3 \ln 2}$

## V БҮЛГИЙН НЭМЭЛТ ДААЛГАВАР

- 1.** а)  $5e^x - e^{2x} + C$  б)  $\frac{1}{2}e^{8x-2} - \frac{5}{4x^2} + C$  в)  $-3e^{-3x} + x^7 + C$  г)  $2e^{\frac{3+x}{2}} + \frac{2}{3} \ln|3x-1| + C$   
 д)  $\frac{1}{2} \ln|2-10x| - \frac{1}{2}e^{9-2x} + C$  е)  $-\frac{3}{2} \ln|1-2x| + 2e^{2x-6} + C$  ё)  $\frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{2}e^{1-4x} - \frac{3}{2} \ln|x| + C$

- ж)  $\frac{1}{2}e^{2x} + x + 2e^{-x} + C$  3)  $\frac{4}{5}e^{\frac{x-1}{2}} - 2\ln|3x-5| + C$  и)  $\frac{1}{2}\cos(2x-1) + 6\sin\frac{2x}{3} + C$
- й)  $\frac{1}{10}e^{2x-3} - \frac{1}{2}\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right) + C$  к)  $2\ln|x-1| + \frac{1}{2}e^{6x} - \sin x + C$  2. а)  $2\ln x + e^{-x} + C$
- б)  $3\sin\frac{1}{3}x + C$  в)  $-\frac{3}{2}e^{-2x} + \ln|3x-2| + C$  г)  $\operatorname{ctg}3x + C$  д)  $x + \ln|2x-1| + C$
- е)  $\frac{1}{2}\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right) - \frac{7}{2}e^{1-2x} + C$  ё)  $\frac{x^2}{8} - x - \frac{3}{4x} + C$  ж)  $2x^4 - 4x^3 + 3x^2 - x + 2e^{1-2x} + C$
- 3)  $\frac{1}{3}e^{6x} - 6x + C$  и)  $-\frac{1}{9}(1-3x)^3 - 2\ln|1-3x| + C$  ѹ)  $2e^x - x + e^{-x} + C$
- к)  $-\frac{2}{3}e^{\frac{-3}{2}x} - 2\operatorname{tg}\frac{x}{2} + C$  3. а) 2 б)  $\frac{1}{2}$  в)  $\frac{\sqrt{3}-1}{6}$  г)  $2\ln 2 + e^{-2} - e^{-1}$  д)  $-2$  е)  $3\ln 4$
- ё)  $\frac{e^2}{2} + \frac{1}{e} - \frac{1}{2}$  ж)  $1 + \frac{2}{3}\ln 2$  3) 13 4. а)  $\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + C$  б)  $2\ln\left|\frac{x-2}{x+1}\right| + C$
- в)  $\frac{1}{14}\ln\left|\frac{(x-3)^6(2x+1)}{2x+1}\right| + C$  г)  $\frac{8}{5}\ln\left|\frac{2x-1}{x+2}\right| + C$  д)  $3\ln|x-2| + 4\ln|x-5| + C$
- е)  $4\ln|x-3| - 7\ln|x+2| + C$  ё)  $8\ln|x-3| - 4\ln|x| + C$  ж)  $\frac{3}{2}\ln|2x-3| - \frac{1}{2}\ln|2x+3| + C$
- 3)  $2\ln|x-3| - 3\ln|x+2| + C$  и)  $3\ln|x-4| - 5\ln|x+1| + C$  ѹ)  $10\ln\left|\frac{x-1}{(2x-1)^2}\right| + C$
- к)  $\frac{3}{2}\ln|2x-5| - \ln|x+2| + C$  5. а)  $-\frac{3}{2} + 4\ln\frac{3}{2}$  б)  $1.5 - 7\ln 2$  в)  $8 - 13\ln 2$  г) 2.5
- д)  $-\frac{1}{3}\ln 4$  е)  $\frac{299}{12} + 61\ln\frac{2}{3}$  6. а)  $F(x) = e^{4x-2} + 5\ln x - e^2$  б)  $F(x) = \frac{1}{2}\ln|2x-1| + \frac{1}{2}\sin 2x + 1$
7. а)  $x = 62$  б)  $x = \frac{\pi}{12}$  8. а)  $\ln 2$  б)  $\frac{1}{2}\ln 3$  в)  $\frac{3}{2}$  г)  $1 + e$  д) 2 е) 1 ё)  $2\sqrt{3} - \frac{2\pi}{3}$
- ж)  $\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$  9. 2 10. а) 2.335 б) 0.238 в) 0.333 11. а)  $\frac{1}{3}\arcsin 3x + C$
- б)  $\frac{1}{6}\sqrt{(3-2x^2)^3} + C$  в)  $\frac{1}{3}\ln|1-3e^x| + C$  г)  $\frac{3}{5}(x-6)\sqrt[3]{(x+4)^2} + C$
- д)  $\operatorname{tg}(\sin x) + C$  е)  $-2\sqrt{x} - 4\ln|\sqrt{x}-2| + C$  ё)  $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{e^x-1}{e^x+1}\right| + C$  ж)  $\operatorname{arctg}e^x + C$
12. а)  $\frac{1}{4}\ln^4 x + C$  б)  $\frac{1}{6}\ln|10-6e^x| + C$  в)  $\frac{2}{5}\sqrt{(x+1)^5} - \frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3} + C$
- г)  $\sqrt{x} + \ln\left|\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2}\right| + C$  д)  $(x-1)\sqrt{2x-1} + C$  е)  $\frac{1}{4}\sin^4 4x + C$  ё)  $4\sqrt{x^2+1} + C$
- ж)  $\frac{1}{30}(3x^2-1)^5 + C$  3)  $2\ln|\sqrt{x}-2| + C$  и)  $-\frac{2}{3}\ln|2-3\sqrt{x}| + C$  ѹ)  $2\cos\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{x}{2}\right) + C$

к)  $-\ln|6-e^x|+C$  13. а)  $-0.8$  б)  $-20$  в)  $27$  г)  $\frac{3}{8}$  д)  $\frac{4}{7}$  е)  $\frac{1}{4}$  ё)  $18$  ж)  $-\frac{1}{3}$  з)  $-4.5$

14. а)  $\frac{1}{6}e^{6x+1} + \frac{1}{6}\cos\left(\frac{\pi}{6}-3x\right) - \frac{1}{3}\ln|x|+C$  б)  $\frac{1}{2}\sin\left(2x-\frac{\pi}{2}\right) - e^{1-7x} - 2\tg\left(\frac{x}{2}+\pi\right)+C$

15. а)  $\ln 2$  б)  $\ln 2 + \frac{1}{e} - 1$  в)  $\frac{2+\sqrt{2}}{6}$  16.  $F(x) = \frac{1}{2}(\ln|2x-1| + \sin 2x) + 1$

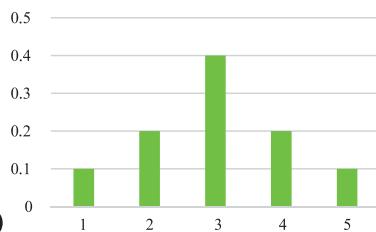
17.  $\frac{1}{3}\ln\frac{1+e}{e}$  18. а)  $\frac{\pi}{2} - 1$  б)  $\frac{1}{3}(e^3 - 1)$  19. 0.549 20.  $a=4, b=\frac{1}{\pi}$  21. а)  $\frac{1}{2}e^{x^2} + C$

б)  $\frac{1}{24a}(ax^2 + b)^{12} + C$  в)  $\frac{1}{1+\cos x} + C$  г)  $2\sqrt{(1+\sqrt[3]{x})^3} + C$

д)  $\frac{x^2}{2} + 2x + 3\ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + C$  е)  $\frac{1}{6}\sqrt[3]{(3x+1)^2} + C$  ё)  $\frac{2}{3}\sqrt{\sin^3 x} + C$

ж)  $\frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$  22. 0.53 23.  $15\ln 5 - 4$

## VI БҮЛЭГ



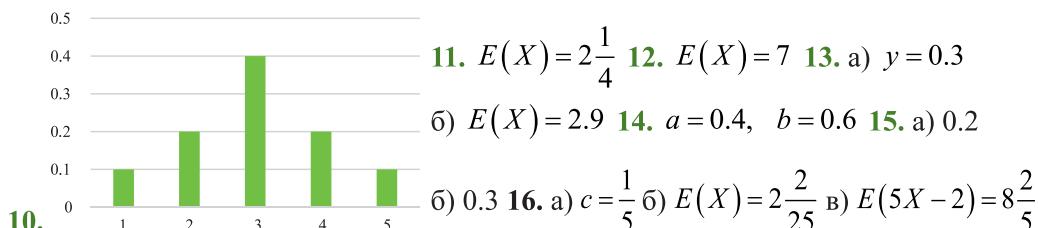
1. а) 0.28 б) 0.67 в) 0.67 2) 0.4 3) 0.68 2. а)  $a=\frac{1}{12}$  б)  $\frac{31}{32}$

3. а)

x	0	1	2	3	4	5
$P(X=x)$	0.1	0.2	0.1	0.2	0.3	0.1

б)  $a=0.2$  в)  $0.6$  4. а)  $d=0.2$  б)  $0.65$  в)  $0.35$  г)  $0.15$  5. а.  $a=0.1$ . б. 1)  $0.85$  2)  $0.55$  3)

0.5 6.  $k=\frac{1}{39}$  7.  $a=0.1$  8. а)  $a=\frac{7}{20}$  б)  $\frac{1}{4}$  в) 0 г)  $\frac{13}{20}$  9. а)  $c=\frac{1}{6}$  в)  $\frac{1}{2}$



17.  $k=\frac{1}{15}$  18. а)  $E(X)=2.3$  б)  $E(X^2)=5.9$  в)  $Var(X)=0.61$  19. а)  $E(X)=3.5$

6)  $E(X^2) = 15 \frac{1}{6}$  б)  $Var(X) = 2 \frac{11}{12}$  20. а)  $E(X) = 5.2$  6)  $Var(X) = 2.56$  б)  $\sigma = 1.6$ .

21. а)  $E(X) = -1$   $\sigma = 2.05$  6)  $E(X) = 5$   $\sigma = 2.71$  б)  $E(X) = 3.48$   $\sigma = 1.92$

22. а)  $y = \frac{4}{15}$  6)  $E(X) = 4.17$  б)  $\sigma = 0.734$  23. а)  $k = \frac{1}{12}$  6)  $Var(X) = 6$

б)  $\sigma = \sqrt{6} = 2.45$  24. 6)  $E(X) = 5$  б)  $Var(X) = 4$  г)  $\sigma = 2$

## VI БҮЛГИЙН НЭМЭЛТ ДААЛГАВАР

1. а)  $E(X) = 3.7$   $Var(X) = 2.21$  6)  $E(X) = 2.31$   $Var(X) = 2.6139$

б)  $E(X) = 3.7$   $Var(X) = 4.51$  г)  $E(X) = 2.55$   $Var(X) = 7.1475$

2.

$x$	0	1	2
$P(X=x)$	$\frac{7}{10} \cdot \frac{6}{9} = \frac{7}{15}$	$\frac{7}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot 2 = \frac{7}{15}$	$\frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} = \frac{1}{15}$

3. 6)  $E(X) = 3.5$   $Var(X) = 2.92$

4. а)

$a$	1	4	9	16
$P(A=a)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

6)  $E(X) = 5.33$   $Var(X) = 30.9$

5. а)

$x$	1	2	3
$P(X=x)$	$3 \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{3} = \frac{6}{20}$	$3 \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{12}{20}$	$\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{20}$

6)

$x$	1	2	3
$P(X=x)$	$\frac{1}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{2}{7}$

б)  $A = \{11\text{-р ангийн биш сурагч}\}$   $B = \{11\text{-р ангийн сурагч}\}$

$$P(ABBBB) = 5 \cdot \frac{8}{12} \cdot \frac{4}{11} \cdot \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{99}, \quad P(AABBB) = 10 \cdot \frac{8}{12} \cdot \frac{7}{11} \cdot \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8} = \frac{14}{99},$$

$$P(AAABB) = 10 \cdot \frac{8}{12} \cdot \frac{7}{11} \cdot \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} = \frac{42}{99}, \quad P(AAAAB) = 5 \cdot \frac{8}{12} \cdot \frac{7}{11} \cdot \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} = \frac{35}{99},$$

$$P(AAAAA) = \frac{8}{12} \cdot \frac{7}{11} \cdot \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} = \frac{7}{99}$$

$x$	1	2	3	4	5
$P(X = x)$	$\frac{1}{99}$	$\frac{14}{99}$	$\frac{42}{99}$	$\frac{35}{99}$	$\frac{7}{99}$

г)

$x$	1	2	3	4	5
$P(X = x)$	$\frac{1}{42}$	$\frac{10}{42}$	$\frac{20}{42}$	$\frac{10}{41}$	$\frac{1}{42}$

д)

$x$	1	2	3	4	5
$P(X = x)$	0.59049	0.32805	0.0729	0.0081	0.00045

е)

$x$	0	1	2	3	4
$P(X = x)$	0.00032	0.0064	0.0512	0.2048	0.4096

ё)

$x$	0	1	2	3
$P(X = x)$	$\frac{125}{216}$	$\frac{75}{216}$	$\frac{15}{216}$	$\frac{1}{216}$

ж)

$x$	0	1	2	3	4	5
$P(X = x)$	$\frac{1}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{1}{32}$

6.

$x$	0	1	2	3
$P(X = x)$	0.04	0.26	0.46	0.24

$$P(X \geq 2) = 0.7$$

7.

$x$	0	1	2	3
$P(X = x)$	0.008	0.096	0.384	0.512

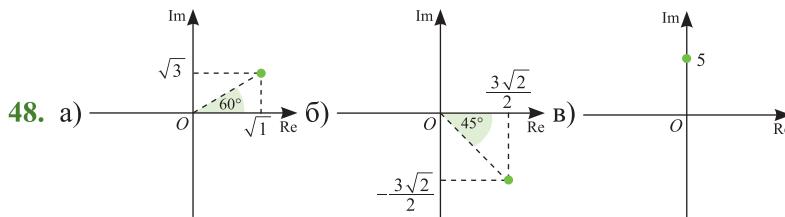
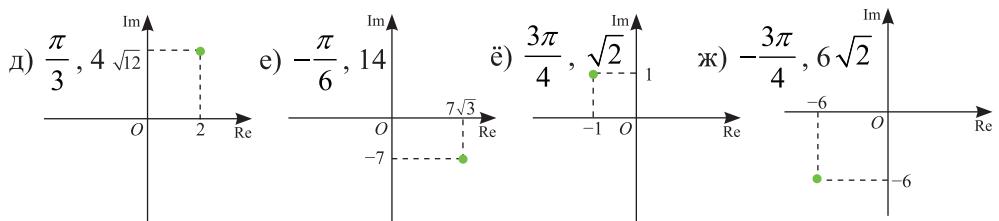
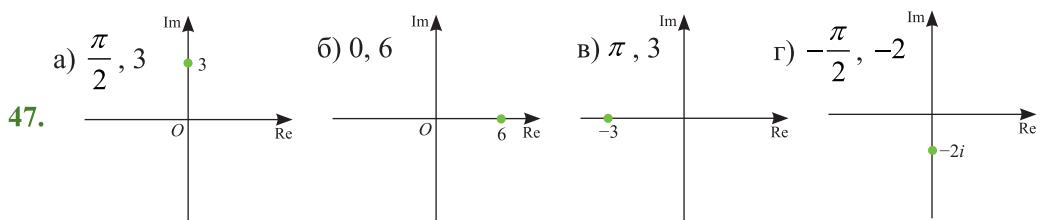
8.

$x$	0	1	2	3	4	5
$P(X = x)$	0.32768	0.4096	0.2048	0.0512	0.0064	0.00032

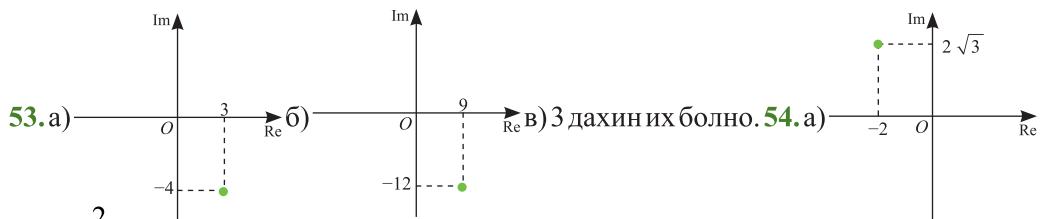
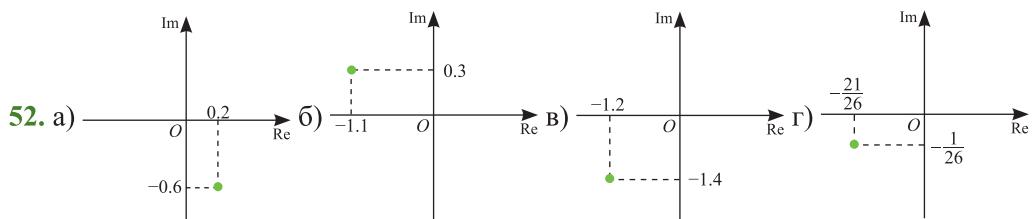
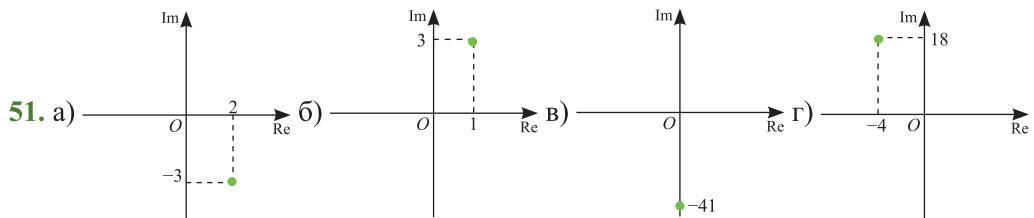
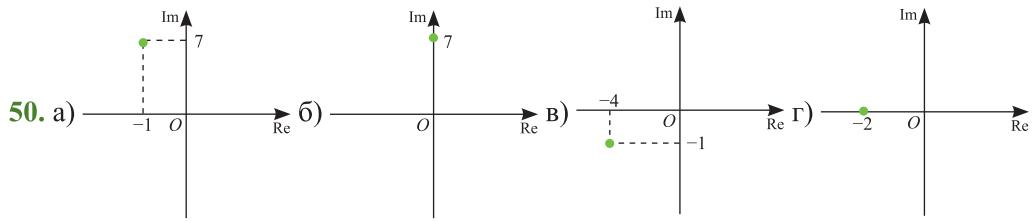
## VII БҮЛЭГ

- 1.** Бодит хэсэг: а) 1 б) -3 в)  $\frac{1}{2}$  г) -19 д) 4 е) 0 Хуурмаг хэсэг: а) 2 б) 5 в)  $\frac{\sqrt{7}}{5}$   
 г)  $\sqrt[3]{11}$  д) 0 е) 3 **2.** а) 6 б) 7 в)  $-\frac{7}{6}$  **3.** а)  $5i$  б)  $-12i$  в)  $-i$  г)  $3 + 2i$  д)  $3i$  е)  $-i$   
 ё)  $-7 - 2i$  ж)  $-3 - 3i$  **4.** а)  $-1 + 2i$  б)  $-7i$  в)  $13 + 3i$  г)  $3 - 3i$  д)  $-5 + 5i$  е)  $1 - 2i$   
 ё)  $8 + 2i$  ж)  $-5 - i$  з)  $-9 + 8i$  и)  $7 - i$  ѿ)  $13 - 12i$  к)  $8 - 11i$  **5.** а)  $7 + 8i$  б)  $1 - i$   
 в)  $6 + 3i$  г) 1 д)  $1 + 5i$  е)  $4 + 2i$  ё)  $1 + 9i$  ж)  $10 + 4i$  з)  $5 + 6i$  **6.** а)  $-2 - 2i$  б)  $-7 + 2i$   
 в)  $-10 - 11i$  г)  $1 - 3i$  д)  $4 - 4i$  е)  $14 - i$  ё)  $7 + i$  ж)  $5 + 6i$  **7.**  $-2 + 3i$  **8.**  $-4 - 2i$
- 9.**  $2 + i$  **10.** а)  $-\frac{1}{3} - \frac{13}{6}i$  б)  $\frac{47}{4} + 10i$  в)  $-3 + 3i$  г)  $-\frac{2}{3} - \frac{4}{3}i$  д)  $-\frac{1}{3} - \frac{13}{6}i$  е)  $4 - i$
- 11.** а)  $-16i$  б)  $14i$  в)  $-18 - 6i$  г)  $-4$  д)  $24$  е)  $-8i$  ё)  $-20 - 46i$  ж)  $-25 + 49i$   
 з)  $20 - 50i$  и)  $18 - 66i$  ѿ)  $2 - 18i$  к)  $30 + 20i$  л)  $-21 + 18i$  м)  $15 + 112i$  н)  $2 - 19i$   
 о)  $-5 - 12i$  ё)  $-46 - 43i$  п)  $60 - 32i$  р)  $-38 - 46i$  с)  $-64 - 80i$  **12.** а)  $3 - 4i$   
 б)  $-16 + 8i$  в)  $34 - 40i$  г)  $6 - 42i$  д)  $7 - 35i$  е)  $-64 + 32i$  ё)  $48 + 72i$  ж)  $126 + 210i$   
 з)  $7 - 199i$  и)  $-32 + 43i$  ѿ)  $252 + 84i$  к)  $-9 - 46i$  л)  $224 + 288i$  м)  $568 + 144i$   
 н)  $-58 - 46i$  **13.**  $x = -1$ ,  $y = 1$  **14.**  $x = \frac{28}{17}$ ,  $y = \frac{7}{17}$  **15.**  $\frac{3}{2} + i$ ;  $-\frac{3}{2} - i$  **16.**  $z = -5; 1 + 2i$
- 17.**  $z_1 + z_2 = 3 + 5i$ ,  $z_1 - z_2 = 3 - i$ ,  $z_1 z_2 = -10 + 10i$  **18.** а)  $-\frac{120}{221} + \frac{132i}{221}$  б)  $\frac{27}{250} + \frac{39i}{250}$   
 в)  $\frac{4}{3} + \frac{4i}{3}$  г)  $\frac{112}{221} + \frac{40i}{221}$  д)  $\frac{126}{277} + \frac{81i}{277}$  е)  $-\frac{48}{157} - \frac{88i}{157}$  ё)  $\frac{4}{85} - \frac{52i}{85}$  ж)  $\frac{1}{16} + \frac{i}{16}$   
 и)  $-\frac{117}{202} - \frac{143i}{202}$  ѿ)  $\frac{94}{61} - \frac{64i}{61}$  к)  $\frac{-39}{17} - \frac{37i}{17}$  л)  $-\frac{44}{65} + \frac{77i}{65}$  м)  $-\frac{88}{65} - \frac{11i}{65}$  н)  $\frac{1}{5} + \frac{i}{15}$   
 о)  $-\frac{38}{61} - \frac{70i}{61}$  ё)  $-\frac{11}{37} + \frac{8i}{37}$  п)  $-\frac{1}{269} + \frac{82i}{269}$  р)  $\frac{83}{197} + \frac{8i}{197}$  с)  $-\frac{70}{37} - \frac{24i}{37}$  **19.** а) 5  
 б)  $\sqrt{26}$  в)  $\sqrt{37}$  г)  $\sqrt{2}$  д)  $\sqrt{7}$  **20.** а)  $\sqrt{5}$  б)  $\sqrt{5}$  в) 5 г)  $\sqrt{17}$  д) 5 е) 5 ё)  $\sqrt{37}$
- 21.** а) 5 б)  $5\sqrt{13}$  в)  $\frac{125}{\sqrt{2}}$  г) 5 **22.** а)  $1 - 3i$  б)  $3 + 2i$  в)  $i + 1$  г)  $\sqrt{3}i - 1$  **23.** а)  $-2i$   
 б)  $9 + 40i$  в)  $5 + 40i$  г)  $-13 - 6i$  **24.** а)  $46 + 29i$  б)  $-2 - 2i$  **25.** а)  $\frac{4}{5} + i$  б)  $\frac{2x}{x^2 + 4y^2}$   
 в)  $5 + i$  **28.** а)  $\frac{\sqrt{2}}{3}$  б)  $\frac{1}{3}$  в)  $\frac{3}{5}$  г)  $\frac{27}{2}$  д) 3 **29.**  $\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i$ ,  $-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$  **30.** а)  $1 - i$   
 б)  $1 + 2i$  в)  $3 - i$  г)  $-\frac{1}{5} - \frac{3i}{5}$  **31.** а)  $\sqrt{10}$  б)  $\sqrt{5}$  в)  $5\sqrt{2}$  г)  $\sqrt{2}$  **32.** а) 3 б)  $-1 + 2i$   
 в)  $3 + 2i$  г)  $3 - 2i$  **33.** а)  $3\sqrt{2}$  б)  $\sqrt{2}$  в)  $\sqrt{10 + 4\sqrt{2}}$  г)  $\sqrt{10 - 4\sqrt{2}}$  **34.** а)  $\sqrt{5}$

- б)  $\sqrt{2}$  в)  $\sqrt{5}$  г)  $\sqrt{5}$  35. 27 37. а)  $1-2i$  б)  $\frac{2}{15}-\frac{i}{15}$  в)  $\frac{7}{11}-\frac{6\sqrt{2}i}{11}$  г)  $-i$  38. а)  $2-\frac{3i}{2}$   
 б)  $-1; -1-\frac{4i}{3}$  в)  $-1; 1+2i; 1-2i$  39.  $x=5, y=10$  40. 100 41. а)  $z=3+3i$   
 б)  $z=-8-4i$  42.  $4+2i, 4-2i$  43.  $-6$  44. а)  $\{i, -i\}$  б)  $\{4i, -4i\}$   
 в)  $\{-3, 1.5+1.5\sqrt{3}i, 1.5-1.5\sqrt{3}i\}$  г)  $\{\sqrt{3}i, -\sqrt{3}i\}$  д)  $\{2\sqrt{2}i, -2\sqrt{2}i\}$  е)  $\{-1+\sqrt{3}i, -1-\sqrt{3}i\}$   
 45. а)  $p=0, q=1$  б)  $p=0, q=9$  в)  $p=-2, q=5$  г)  $p=2\sqrt{5}, q=8$  46. а)  $\{\sqrt{5}i, -\sqrt{5}i\}$   
 б)  $\{-1.5+0.5\sqrt{3}i, -1.5-0.5\sqrt{3}i\}$  в)  $\{1+\sqrt{3}i, 1-\sqrt{3}i\}$  г)  $\{1, -1, i, -i\}$  д)  $\{2, -2, 2i, -2i\}$   
 е)  $\{-1+2i, -1-2i\}$



49. а)  $\sqrt{2}+\sqrt{2}i$  б)  $-\sqrt{2}+\sqrt{2}i$  в)  $\sqrt{2}-\sqrt{2}i$  г)  $-\sqrt{2}-\sqrt{2}i$  д)  $-\sqrt{3}+i$  е)  $-1+\sqrt{3}i$   
 ё)  $-\sqrt{3}-i$  ж)  $-1-\sqrt{3}i$



54. б)  $\frac{2}{3}\pi$

### БҮЛГИЙН НЭМЭЛТ ДААЛГАВАР

1. а)  $8+7i$  б)  $-2+4i$  в)  $-2yi$  г)  $50-49i$  д)  $-61+78i$  е)  $-2+2i$  ё)  $46+29i$

ж)  $-1-14i$  з)  $-\frac{6}{13}+\frac{4}{13}i$  и)  $-\frac{6}{25}-\frac{1}{25}i$  ў) 1 2. а)  $4+i$  б)  $-2+3i$  в)  $5+5i$

г)  $-11+10i$  д)  $-11+10i$  е)  $5-2i$  ё)  $15+8i$  ж)  $-5-12i$  з)  $-7+35i$  3. а)  $\frac{5}{13}-\frac{1}{13}i$

б)  $\frac{5}{2}-\frac{5}{2}i$  в)  $-\frac{3}{2}$  г)  $-\frac{1}{3}-\frac{2}{3}i$  д)  $\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}-\frac{2xy}{x^2+y^2}i$  4.  $x=\frac{32}{25}, y=-\frac{1}{25}$  5. а) 5 б) -7

в) 7 г) -38 6. а)  $\text{Re}=0, \text{Im}=8$  б)  $\text{Re}=\frac{4}{5}, \text{Im}=-1$  в)  $\text{Re}=\frac{2x}{x^2+4y^2}, \text{Im}=0$

г)  $\text{Re}=5, \text{Im}=1$  д)  $\text{Re}=-0.5, \text{Im}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$  7. а) үнэн б) үнэн в) худал г) үнэн д) худал

е) худал ё) худал 8.  $2i, -2i$  11. а) үнэн б) үнэн в) үнэн г) худал д) үнэн

## Хавсралт 1. $1 \leq b < 10$ тооны 10 суурьтай логарифм

(Цэгээс хойш 6 орны нарийвчлалтай)

ХАВСРАЛТ

	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>7</b>	<b>8</b>	<b>9</b>
<b>1.0</b>	0.000000	0.004321	0.008600	0.012837	0.017033	0.021189	0.025306	0.029384	0.033424	0.037426
<b>1.1</b>	0.041393	0.045323	0.049218	0.053078	0.056905	0.060698	0.064458	0.068186	0.071882	0.075547
<b>1.2</b>	0.079181	0.082785	0.086360	0.089905	0.093422	0.096910	0.100371	0.103804	0.107210	0.110590
<b>1.3</b>	0.113943	0.117271	0.120574	0.123852	0.127105	0.130334	0.133539	0.136721	0.139879	0.143015
<b>1.4</b>	0.146128	0.149219	0.152288	0.155336	0.158362	0.161368	0.164353	0.167317	0.170262	0.173186
<b>1.5</b>	0.176091	0.178977	0.181844	0.184691	0.187521	0.190332	0.193125	0.195900	0.198657	0.201397
<b>1.6</b>	0.204120	0.206826	0.209515	0.212188	0.214844	0.217484	0.220108	0.222716	0.225309	0.227887
<b>1.7</b>	0.230449	0.232996	0.235528	0.238046	0.240549	0.243038	0.245513	0.247973	0.250420	0.252853
<b>1.8</b>	0.255273	0.257679	0.260071	0.262451	0.264818	0.267172	0.269513	0.271842	0.274158	0.276462
<b>1.9</b>	0.278754	0.281033	0.283301	0.285557	0.287802	0.290035	0.292256	0.294466	0.296665	0.298853
<b>2.0</b>	0.301030	0.303196	0.305351	0.307496	0.309630	0.311754	0.313867	0.315970	0.318063	0.320146
<b>2.1</b>	0.322219	0.324282	0.326336	0.328380	0.330414	0.332438	0.334454	0.336460	0.338456	0.340444
<b>2.2</b>	0.342423	0.344392	0.346353	0.348305	0.350248	0.352183	0.354108	0.356026	0.357935	0.359835
<b>2.3</b>	0.361728	0.363612	0.365488	0.367356	0.369216	0.371068	0.372912	0.374748	0.376577	0.378398
<b>2.4</b>	0.380211	0.382017	0.383815	0.385606	0.387390	0.389166	0.390935	0.392697	0.394452	0.396199
<b>2.5</b>	0.397940	0.399674	0.401401	0.403121	0.404834	0.406540	0.408240	0.409933	0.411620	0.413300
<b>2.6</b>	0.414973	0.416641	0.418301	0.419956	0.421604	0.423246	0.424882	0.426511	0.428135	0.429752
<b>2.7</b>	0.431364	0.432969	0.434569	0.436163	0.437751	0.439333	0.440909	0.442480	0.444045	0.445604
<b>2.8</b>	0.447158	0.448706	0.450249	0.451786	0.453318	0.454845	0.456366	0.457882	0.459392	0.460898
<b>2.9</b>	0.462398	0.463893	0.465383	0.466868	0.468347	0.469822	0.471292	0.472756	0.474216	0.475671
<b>3.0</b>	0.477121	0.478566	0.480007	0.481443	0.482874	0.484300	0.485721	0.487138	0.488551	0.489958
<b>3.1</b>	0.491362	0.492760	0.494155	0.495544	0.496930	0.498311	0.499687	0.501059	0.502427	0.503791
<b>3.2</b>	0.505150	0.506505	0.507856	0.509203	0.510545	0.511883	0.513218	0.514548	0.515874	0.517196
<b>3.3</b>	0.518514	0.519828	0.521138	0.522444	0.523746	0.525045	0.526339	0.527630	0.528917	0.530200
<b>3.4</b>	0.531479	0.532754	0.534026	0.535294	0.536558	0.537819	0.539076	0.540329	0.541579	0.542825
<b>3.5</b>	0.544068	0.545307	0.546543	0.547775	0.549003	0.550228	0.551450	0.552668	0.553883	0.555094
<b>3.6</b>	0.556303	0.557507	0.558709	0.559907	0.561101	0.562293	0.563481	0.564666	0.565848	0.567026
<b>3.7</b>	0.568202	0.569374	0.570543	0.571709	0.572872	0.574031	0.575188	0.576341	0.577492	0.578639
<b>3.8</b>	0.579784	0.580925	0.582063	0.583199	0.584331	0.585461	0.586587	0.587711	0.588832	0.589950
<b>3.9</b>	0.591065	0.592177	0.593286	0.594393	0.595496	0.596597	0.597695	0.598791	0.599883	0.600973
<b>4.0</b>	0.602060	0.603144	0.604226	0.605305	0.606381	0.607455	0.608526	0.609594	0.610660	0.611723
<b>4.1</b>	0.612784	0.613842	0.614897	0.615950	0.617000	0.618048	0.619093	0.620136	0.621176	0.622214
<b>4.2</b>	0.623249	0.624282	0.625312	0.626340	0.627366	0.628389	0.629410	0.630428	0.631444	0.632457
<b>4.3</b>	0.633468	0.634477	0.635484	0.636488	0.637490	0.638489	0.639486	0.640481	0.641474	0.642465
<b>4.4</b>	0.643453	0.644439	0.645422	0.646404	0.647383	0.648360	0.649335	0.650308	0.651278	0.652246
<b>4.5</b>	0.653213	0.654177	0.655138	0.656098	0.657056	0.658011	0.658965	0.659916	0.660865	0.661813
<b>4.6</b>	0.662758	0.663701	0.664642	0.665581	0.666518	0.667453	0.668386	0.669317	0.670246	0.671173
<b>4.7</b>	0.672098	0.673021	0.673942	0.674861	0.675778	0.676694	0.677607	0.678518	0.679428	0.680336
<b>4.8</b>	0.681241	0.682145	0.683047	0.683947	0.684845	0.685742	0.686636	0.687529	0.688420	0.689309
<b>4.9</b>	0.690196	0.691081	0.691965	0.692847	0.693727	0.694605	0.695482	0.696356	0.697229	0.698101
<b>5.0</b>	0.698970	0.699838	0.700704	0.701568	0.702431	0.703291	0.704151	0.705008	0.705864	0.706718
<b>5.1</b>	0.707570	0.708421	0.709270	0.710117	0.710963	0.711807	0.712650	0.713491	0.714330	0.715167
<b>5.2</b>	0.716003	0.716838	0.717671	0.718502	0.719331	0.720159	0.720986	0.721811	0.722634	0.723456

5.3	0.724276	0.725095	0.725912	0.726727	0.727541	0.728354	0.729165	0.729974	0.730782	0.731589
5.4	0.732394	0.733197	0.733999	0.734800	0.735599	0.736397	0.737193	0.737987	0.738781	0.739572
5.5	0.740363	0.741152	0.741939	0.742725	0.743510	0.744293	0.745075	0.745855	0.746634	0.747412
5.6	0.748188	0.748963	0.749736	0.750508	0.751279	0.752048	0.752816	0.753583	0.754348	0.755112
5.7	0.755875	0.756636	0.757396	0.758155	0.758912	0.759668	0.760422	0.761176	0.761928	0.762679
5.8	0.763428	0.764176	0.764923	0.765669	0.766413	0.767156	0.767898	0.768638	0.769377	0.770115
5.9	0.770852	0.771587	0.772322	0.773055	0.773786	0.774517	0.775246	0.775974	0.776701	0.777427
6.0	0.778151	0.778874	0.779596	0.780317	0.781037	0.781755	0.782473	0.783189	0.783904	0.784617
6.1	0.785330	0.786041	0.786751	0.787460	0.788168	0.788875	0.789581	0.790285	0.790988	0.791691
6.2	0.792392	0.793092	0.793790	0.794488	0.795185	0.795880	0.796574	0.797268	0.797960	0.798651
6.3	0.799341	0.800029	0.800717	0.801404	0.802089	0.802774	0.803457	0.804139	0.804821	0.805501
6.4	0.806180	0.806858	0.807535	0.808211	0.808886	0.809560	0.810233	0.810904	0.811575	0.812245
6.5	0.812913	0.813581	0.814248	0.814913	0.815578	0.816241	0.816904	0.817565	0.818226	0.818885
6.6	0.819544	0.820201	0.820858	0.821514	0.822168	0.822822	0.823474	0.824126	0.824776	0.825426
6.7	0.826075	0.826723	0.827369	0.828015	0.828660	0.829304	0.829947	0.830589	0.831230	0.831870
6.8	0.832509	0.833147	0.833784	0.834421	0.835056	0.835691	0.836324	0.836957	0.837588	0.838219
6.9	0.838849	0.839478	0.840106	0.840733	0.841359	0.841985	0.842609	0.843233	0.843855	0.844477
7.0	0.845098	0.845718	0.846337	0.846955	0.847573	0.848189	0.848805	0.849419	0.850033	0.850646
7.1	0.851258	0.851870	0.852480	0.853090	0.853698	0.854306	0.854913	0.855519	0.856124	0.856729
7.2	0.857332	0.857935	0.858537	0.859138	0.859739	0.860338	0.860937	0.861534	0.862131	0.862728
7.3	0.863323	0.863917	0.864511	0.865104	0.865696	0.866287	0.866878	0.867467	0.868056	0.868644
7.4	0.869232	0.869818	0.870404	0.870989	0.871573	0.872156	0.872739	0.873321	0.873902	0.874482
7.5	0.875061	0.875640	0.876218	0.876795	0.877371	0.877947	0.878522	0.879096	0.879669	0.880242
7.6	0.880814	0.881385	0.881955	0.882525	0.883093	0.883661	0.884229	0.884795	0.885361	0.885926
7.7	0.886491	0.887054	0.887617	0.888179	0.888741	0.889302	0.889862	0.890421	0.890980	0.891537
7.8	0.892095	0.892651	0.893207	0.893762	0.894316	0.894870	0.895423	0.895975	0.896526	0.897077
7.9	0.897627	0.898176	0.898725	0.899273	0.899821	0.900367	0.900913	0.901458	0.902003	0.902547
8.0	0.903090	0.903633	0.904174	0.904716	0.905256	0.905796	0.906335	0.906874	0.907411	0.907949
8.1	0.908485	0.909021	0.909556	0.910091	0.910624	0.911158	0.911690	0.912222	0.912753	0.913284
8.2	0.913814	0.914343	0.914872	0.915400	0.915927	0.916454	0.916980	0.917506	0.918030	0.918555
8.3	0.919078	0.919601	0.920123	0.920645	0.921166	0.921686	0.922206	0.922725	0.923244	0.923762
8.4	0.924279	0.924796	0.925312	0.925828	0.926342	0.926857	0.927370	0.927883	0.928396	0.928908
8.5	0.929419	0.929930	0.930440	0.930949	0.931458	0.931966	0.932474	0.932981	0.933487	0.933993
8.6	0.934498	0.935003	0.935507	0.936011	0.936514	0.937016	0.937518	0.938019	0.938520	0.939020
8.7	0.939519	0.940018	0.940516	0.941014	0.941511	0.942008	0.942504	0.943000	0.943495	0.943989
8.8	0.944483	0.944976	0.945469	0.945961	0.946452	0.946943	0.947434	0.947924	0.948413	0.948902
8.9	0.949390	0.949878	0.950365	0.950851	0.951338	0.951823	0.952308	0.952792	0.953276	0.953760
9.0	0.954243	0.954725	0.955207	0.955688	0.956168	0.956649	0.957128	0.957607	0.958086	0.958564
9.1	0.959041	0.959518	0.959995	0.960471	0.960946	0.961421	0.961895	0.962369	0.962843	0.963316
9.2	0.963788	0.964260	0.964731	0.965202	0.965672	0.966142	0.966611	0.967080	0.967548	0.968016
9.3	0.968483	0.968950	0.969416	0.969882	0.970347	0.970812	0.971276	0.971740	0.972203	0.972666
9.4	0.973128	0.973590	0.974051	0.974512	0.974972	0.975432	0.975891	0.976350	0.976808	0.977266
9.5	0.977724	0.978181	0.978637	0.979093	0.979548	0.980003	0.980458	0.980912	0.981366	0.981819
9.6	0.982271	0.982723	0.983175	0.983626	0.984077	0.984527	0.984977	0.985426	0.985875	0.986324
9.7	0.986772	0.987219	0.987666	0.988113	0.988559	0.989005	0.989450	0.989895	0.990339	0.990783
9.8	0.991226	0.991669	0.992111	0.992554	0.992995	0.993436	0.993877	0.994317	0.994757	0.995196
9.9	0.995635	0.996074	0.996512	0.996949	0.997386	0.997823	0.998259	0.998695	0.999131	0.999565

**Ашиглалын жижигтэй.**  $\lg 8.08$ -ыг хүснэгт ашиглан ольё. Үүний тулд зурагт үзүүлснээр хүснэгтээс 8.0 мөр, 8 баганын огтлолцол дахь тоог олох ба энэ нь  $\lg 8.08$ -ын утга болно. Иймд  $\lg 8.08 = 0.907411$  байна.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
<b>7.6</b>	0.880814	0.881385	0.881955	0.882525	0.883093	0.883661	0.884229	0.884795	0.885361	0.885926
<b>7.7</b>	0.886491	0.887054	0.887617	0.888179	0.888741	0.889302	0.889862	0.890421	0.890980	0.891537
<b>7.8</b>	0.892095	0.892651	0.893207	0.893762	0.894316	0.894870	0.895423	0.895975	0.896526	0.897077
<b>7.9</b>	0.897627	0.898176	0.898725	0.899273	0.899821	0.900367	0.900913	0.901458	0.902003	0.902547
<b>8.0</b>	0.903090	0.903633	0.904174	0.904716	0.905256	0.905796	0.906335	0.906874	0.907411	0.907949
<b>8.1</b>	0.908485	0.909021	0.909556	0.910091	0.910624	0.911158	0.911690	0.912222	0.912753	0.913284
<b>8.2</b>	0.913814	0.914343	0.914872	0.915400	0.915927	0.916454	0.916980	0.917506	0.918030	0.918555
<b>8.3</b>	0.919078	0.919601	0.920123	0.920645	0.921166	0.921686	0.922206	0.922725	0.923244	0.923762

# МАТЕМАТИК XII

Ерөнхий боловсролын 12 жилийн  
сургуулийн 12 дугаар ангийн сурх бичиг

Зохиогчийн баг

Ахлагч:	Б.Баяржаргал
Гишүүд:	Э.Азжаргал Д.Анхтуяа М.Бат-Эрдэнэ Д.Даваасүрэн А.Наранхүү П.Ренчинбал Д.Түмэнбаяр Б.Энхболд
Редактор:	Д.Пүрэвдорж
Техник редактор:	Ж.Дэнсмаа
Хэвлэлийн эх бэлтгэгч:	Б.Боорчи
Засварласан баг:	Б.Баяржаргал Д.Түмэнбаяр
Хэвлэлийн дизайнэр:	А.Мөнхмагнай

Формат 70x100/16  
Офсет хэвлэл. Офсет хэвлэлийн цаас. 80гр/м<sup>2</sup>  
Хэвлэлийн хуудас 20 х,х

Хэвлэлийн эхийг “Мөнхийн Үсэг” ХХК-д  
бэлтгэж, 21630 хувь хэвлэв.