

Б.Баяржаргал, Э.Азжаргал, Д.Анхтуяа,
Ж.Батболд, М.Бат-Эрдэнэ, Д.Даваасүрэн, Ж.Дэнсмаа,
А.Наранхүү Д.Түвшинжаргал,
Д.Түмэнбаяр, Н.Цогзолмаа, Э.Чойсүрэн, Б.Энхболд

МАТЕМАТИК XI

Ерөнхий боловсролын 12 жилийн сургуулийн
11 дүгээр ангийн сурах бичиг

Боловсрол, Соёл, Шинжлэх Ухаан, Спортын Яамны
зөвшөөрлөөр хэвлэв.

Гурав дахь хэвлэл

СУРГУУЛИЙН НОМЫН САНД ОЛГОВ.
БОРЛУУЛАХЫГ ХОРИГЛОНО.

Улаанбаатар хот
2019 он

ННА - 74.2
ДАА 373
М-294

Математик XI: Ерөнхий боловсролын 12 жилийн сургуулийн 11 дүгээр ангийн сурах бичиг. /Баяржаргал Б. ба бус; Ред. Пүрэвсүрэн Д., -УБ., 2017- 220х

Азийн Хөгжлийн Банкны “Эдийн засгийн хүндрэлийн үед боловсролын чанар, хүртээмжийг сайжруулах төсөл”-ийн хүрээнд хэвлүүлэв.

Энэхүү сурах бичиг нь “Монгол Улсын Зохиогчийн эрх болон түүнд хамаарах эрхийн тухай” хуулиар хамгаалагдсан бөгөөд Боловсрол, Соёл, Шинжлэх Ухаан, Спортын Яамнаас бичгээр авсан зөвшөөрлөөс бусад тохиолдолд цахим болон хэвлэмэл хэлбэрээр бүтнээр эсхүл хэсэгчлэн хувилах, хэвлэх, мэдээллийн санд оруулахыг хориглоно.

Сурах бичгийн талаарх аливаа санал, хүснэгтээ textbook@mecs.gov.mn хаягаар ирүүлнэ үү.

© Боловсрол, Соёл, Шинжлэх Ухаан, Спортын Яам

ISBN 978-99978-61-41-2

АГУУЛГА

I БҮЛЭГ. КВАДРАТ ТЭГШИТГЭЛ БА ТЭНЦЭТГЭЛ БИШ

1.1.	Квадрат тэгшитгэл	5
1.2.	Квадрат тэнцэтгэл биш	10
1.3.	Квадрат тэнцэтгэл бишийг бодох графикийн арга	14

II БҮЛЭГ. ТЭГШИТГЭЛИЙН СИСТЕМ

2.1.	Хоёр хувьсагчтай тэгшитгэлийн систем	20
2.2.	Шугаман тэгшитгэлийн систем	27

III БҮЛЭГ. ФУНКЦ БА ГРАФИК

3.1.	Функци, функцийг өгөх арга	36
3.2.	Зэрэгт функци	40
3.3.	Харилсан нэг утгатай функци	43
3.4.	Давхар функци	47
3.5.	Урвуу функци	50
3.6.	Өсөх ба буурах функци	55
3.7.	Тэгш, сондгой функци	56

IV БҮЛЭГ. ПРОГРЕСС БА БИНОМ ЗАДАРГАА

4.1.	Тоон дараалал	59
4.2.	Арифметик прогресс	61
4.3.	Геометр прогресс	66

V БҮЛЭГ. КООРДИНАТЫН ГЕОМЕТР

5.1.	Параллел ба перпендикуляр шулуун	72
5.2.	Огторгуйн тэгш өнцөгт координатын систем, цэгийн координат	79
5.3.	Огторгуйн тэгш өнцөгт координатын систем дэх хоёр цэгийн хоорондох зай, хэрчмийн дундаж цэгийн координат	83

VI БҮЛЭГ. ТРИГОНОМЕТР

6.1.	Нэгж радиустай тойрог ба тригонометр функци	87
6.2.	Тригонометр функцийн зарим утга	92
6.3.	Тригонометр адилтгалууд	95

VII БҮЛЭГ. ОГТОРГУЙ ДАХЬ ВЕКТОР

7.1.	Огторгуй дахь векторын тухай ухагдахуун	101
7.2.	Огторгуй дахь векторын үйлдэл	102
7.3.	Огторгуй дахь векторын координат	105
7.4.	Хоёр векторын скаляр үржвэр	112

VIII БҮЛЭГ. УЛАМЖЛАЛ

8.1. Функцийн графикийн өгсөн цэг дээрх шүргэгч шулууны наалт	118
8.2. Уламжлал ба дифференциалчлах үйлдэл	121
8.3. $y = x^n$ функцийн уламжлал	124
8.4. Нийлбэр, ялгавар, тогтмол тоон үржигдэхүүнтэй функцийн уламжлалыг олох	126
8.5. Давхар функцийн уламжлал	128
8.6. Функцийн графикийн өгсөн цэг дээрх наалт, шүргэгч ба нормал шулууны тэгшитгэл	131
8.7. Функцийн өсөх, буурах завсар, функцийн өөрчлөлтийн хурд	135
8.8. Функцийн экстремум (максимум, минимум) цэг	139
8.9. Уламжлал ашиглан функцийн графикийг тоймлон зурах	145

IX БҮЛЭГ. ИНТЕГРАЛ

9.1. Дифференциалчлахын урвуу үйлдэл интегралчлах үйлдэл	155
9.2. x^n хэлбэрийн функцийн интеграл	159
9.3. $(ax + b)^n$ хэлбэрийн функцийн интеграл	161
9.4. Интегралын чанарууд	163
9.5. Өгсөн цэгийг дайрсан муруйн тэгшитгэл ба интеграл ашиглан бодох бодлогууд	164
9.6. Тодорхой интеграл	167
9.7. Тодорхой интеграл ба дүрсийн талбай	170

X БҮЛЭГ. ӨГӨГДЛИЙН ШИНЖИЛГЭЭ

10.1. Өгөгдлийн шинжилгээ	176
10.2. Дундаж	194
10.3. Хазайлт	198

ХАРИУ	208
--------------------	------------

I БҮЛЭГ. КВАДРАТ ТЭГШИТГЭЛ БА ТЭНЦЭТГЭЛ БИШ

Энэ бүлэг сэдвийг судалснаар дараах мэдлэг, чадварыг эзэмшинэ.

- Квадрат тэгшиитгэлийн шийдийг шинжслэх, тэгшиитгэл бодох
- Квадрат тэнцэтгэл бишийг үржигдэхүүн болгон задалж бодох
- Квадрат тэнцэтгэл бишийг графикаар бодох
- $ax^2 + bx + c$ квадрат гурван гишүүнт ямагт эерэг (сөрөг) утгатай байх нөхцөлийг мэдэх

1.1. КВАДРАТ ТЭГШИТГЭЛ

Бид өмнөх ангиудад квадрат тэгшиитгэл шийдтэй эсэхийг тогтоож, шийдийг олж чаддаг болсон.

$ax^2 + bx + c = 0$, $x^2 + px + q = 0$ хэлбэрийн тэгшиитгэл шийдтэй эсэх, хэдэн шийдтэйг хэрхэн тогтоох вэ? Ярилцааж, дүгнэлт гаргаарай.

Жишээ 1. $3x^2 - 4x + 9 = 0$ тэгшиитгэл шийдтэй эсэхийг тогтоо.

Бодолт. Квадрат тэгшиитгэлийн шийдтэй эсэхийг дискриминант хэрэглэн тогтооё.

$a = 3$, $b = -4$, $c = 9$, $D = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 9 = -92 < 0$ тул бодит шийдгүй байна.

Жишээ 2. p -ийн ямар утгад $x^2 + 3px + p = 0$ тэгшиитгэл нэг шийдтэй байх вэ?

Бодолт. Квадрат тэгшиитгэлийн дискриминант нь 0-тэй тэнцүү үед тэгшиитгэл нэг шийдтэй. $D = (3p)^2 - 4 \cdot 1 \cdot p = 9p^2 - 4p = 0$ буюу $p(9p - 4) = 0$ болох тул

$p = 0$, $p = \frac{4}{9}$ үед тэгшиитгэл нэг шийдтэй байна.

1. Квадрат тэгшиитгэл хэдэн шийдтэй вэ?

a. $2x^2 + 7x + 15 = 0$ б. $x^2 - 14x + 49 = 0$ в. $5x^2 + x - 1 = 0$

2. Тэгшиитгэл шийдгүй болохыг батал.

a. $x^2 + 14x + 50 = 0$ б. $3y^2 - 7y + 5 = 0$ в. $10x^2 - x + 1 = 0$

3. Тооны машин ашиглан тэгшиитгэл хэдэн шийдтэйг тогтоо.

a. $3x^2 - 55.6x^2 + 1000 = 0$ б. $-1.5x^2 + 30x^2 - 150 = 0$

4. $x^2 + kx + 24 = 0$ тэгшиитгэл нэг шийдтэй байх k -ийн утгыг ол.

5. t -ийн ямар утгад $2x^2 - 2x + t = 0$ тэгшиитгэл

а. шийдгүй б. нэг шийдтэй в. хоёр шийдтэй байх вэ?

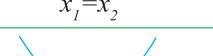
6. p -ийн ямар утгад тэгшиитгэл нэг шийдтэй байх вэ?

a. $x^2 - px + 9 = 0$ б. $x^2 - 2px + 3p = 0$ в. $(p-1)x^2 + 2(p+1)x + p - 2 = 0$

Квадрат тэгшитгэл бодох графикийн арга

$ax^2 + bx + c = 0$ квадрат тэгшитгэлийг графикийн аргаар бодно гэдэг нь $y = ax^2 + bx + c$ функцийн графикийн Ox тэнхлэгийг огтлох цэгийн абсциссыг олно гэсэн ёт. Үүнийг хүснэгтээр үзүүльье.

$y = ax^2 + bx + c$ функцийн график ашиглан $ax^2 + bx + c = 0$ тэгшитгэл шинжслэх

$D = b^2 - 4ac$	$ax^2 + bx + c = 0$ Тэгшитгэлийн шийд	$y = ax^2 + bx + c$ функцийн график		
		$a > 0$	$a < 0$	Графикийн онцлог
$D > 0$	Ялгаатай 2 шийтгэй			Ox тэнхлэгийг огтолно
$D = 0$	Нэг шийтгэй (давхардсан 2 шийд)			Ox тэнхлэгийг шүргэнэ
$D < 0$	Бодит тоон шийтгүй			Ox тэнхлэгийг огтлохгүй

Жишээ 3. $y = x^2 - 2x - 2$ функцийн график ашиглан тэгшитгэлийн шийдийг ойролцоогоор ол.

a. $x^2 - 2x - 2 = 0$ б. $x^2 - 2x - 2 = 4$ в. $x^2 - 2x - 2 = x$

Бодолт.

a. $y = x^2 - 2x - 2$ функцийн график Ox тэнхлэгтэй огтлолцсон цэгийн абсциссыг олбол $x_1 \approx 2.7$, $x_2 \approx -0.7$ болно. Эдгээр нь $x^2 - 2x - 2 = 0$ тэгшитгэлийн шийд болно. (Зураг 1.)

б. $y = x^2 - 2x - 2$ функцийн график $y = 4$ шулуунтай огтлолцсон цэгийн абсциссыг олбол $x_1 \approx 3.6$, $x_2 \approx -1.6$ болно. Эдгээр нь $x^2 - 2x - 2 = 4$ тэгшитгэлийн шийд болно.

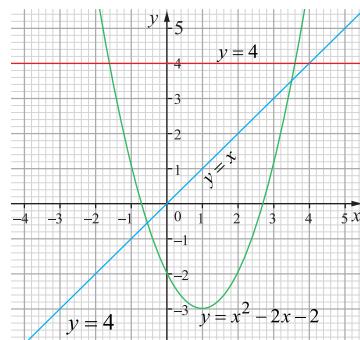
в. $y = x^2 - 2x - 2$ функцийн график $y = x$ шулуунтай огтлолцсон цэгийн абсциссыг 0.1 нарийвчлалтай олбол $x_1 \approx 3.5$, $x_2 \approx -0.5$ болно.

Эдгээр нь $x^2 - 2x - 2 = x$ тэгшитгэлийн шийд болно.

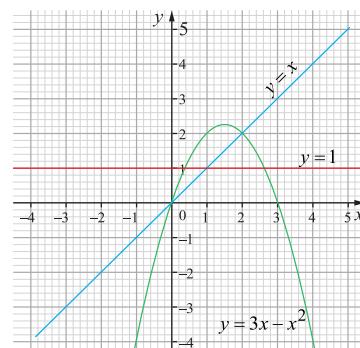
7. $y = x^2 - 2x - 2$ функцийн график ашиглан $x^2 - 2x - 2 = -3$ тэгшитгэлийг ойролцоогоор бод.

8. График ашиглан өгсөн тэгшитгэлийг ойролцоогоор бод. (Зураг 2.)

a. $3x - x^2 = 0$ б. $3x - x^2 = 1$
в. $3x - x^2 = x$ г. $3x - x^2 = -x$



Зураг 1.



Зураг 2.

9. График ашиглан өгсөн тэгшитгэлийг ойролцоогоор бод. (Зураг 3.)

- $x^2 - 3x - 4 = 0$
- $x^2 - 3x - 4 = 2$
- $x^2 - 3x - 4 = -5$
- $x^2 - 3x - 4 = -2x$
- $x^2 - 3x - 4 = x$

10. $y = x^2 + 3x - 4$ функцийн график байгуулж, тэгшитгэл бод.

- Хүснэгтийг гүйцээж нөх. ($y = x^2 + 3x - 4$)

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2
y		0		-6				

- $y = x^2 + 3x - 4$ функцийн график байгуул.
- $x^2 + 3x - 4 = 0$ тэгшитгэлийг графикийн аргаар бод.
- $x^2 + 3x - 4 = 2$ тэгшитгэлийг графикийн аргаар бод.
- $x^2 + 3x - 4 = x + 1$ тэгшитгэлийг графикийн аргаар бод.

11. а. $f(x) = x^2 + 6x + 9$ параболын оройн цэгийн координатыг олж, графикийг тоймлон байгуул.

- $x^2 + 6x + 9 = 0$ тэгшитгэл хэдэн шийдтэй вэ? Шийдийг ол.
- $x^2 + 6x + 9 = -2$ тэгшитгэл шийдтэй юу? Тайлбарла.

12. Тэгшитгэлийг графикийн аргаар бодож, харгалзах функцийн график нь Ox тэнхлэгийг хэдэн цэгээр огтлох талаар дүгнэлт гаргарай.

- $3x^2 - 5x - 2 = 0$
- $4x^2 - 12x + 9 = 0$
- $2x^2 + 7x + 8 = 0$

13. $Q(x) = x^4 + 6x^2 - 27$ функцийн $Q(-3)$, $Q(3)$, $Q(-\sqrt{3})$, $Q(\sqrt{3})$ утгыг ол.
Эдгээр утгууд хоорондоо ямар хамааралтай вэ?

Квадрат тэгшитгэл бодох

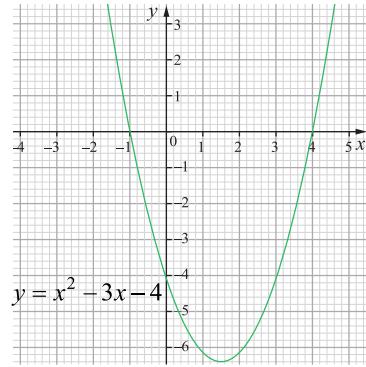
Бид өмнөх ангиудад квадрат тэгшитгэлийг үржигдэхүүн болгон задлах, нийлбэр, ялгаврын квадрат, квадратуудын ялгаврын томьёо хэрэглэх, бүтэн квадрат ялгах аргууд болон квадрат тэгшитгэлийн шийд олох томьёо хэрэглэн бодож сурсан.

Санамж $D \geq 0$ үед $ax^2 + bx + c = 0$ тэгшитгэлийн шийдийг $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$,

$x^2 + px + q = 0$ тэгшитгэлийн шийдийг $x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$ томьёогоор олно.

14. Квадрат тэгшитгэлийг үржигдэхүүн болгон задалж бод.

- $3x^2 + 5x = 0$
- $20x - \sqrt{5}x^2 = 0$
- $x^2 + 8x + 15 = 0$
- $x^2 - 5x - 14 = 0$
- $x^2 - 6x - 27 = 0$
- $3x^2 + 8x - 3 = 0$

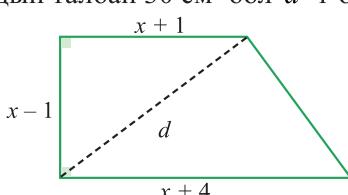
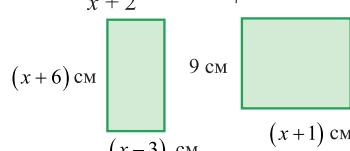
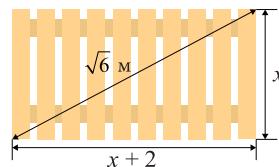


Зураг 3.

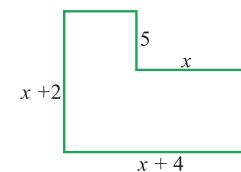
- 15.** Нийлбэр, ялгаврын квадрат, квадратуудын ялгаврын томьёо хэрэглэн тэгшигтгэл бод.
- а. $x^2 + 6x + 9 = 0$ б. $(4x - 1)^2 = 196$ в. $x^2 - x + \frac{1}{4} = 0$
 г. $(x + 3)^2 = 4$ д. $x^2 - 13 = 0$ е. $9x^2 - 12x + 4 = 0$
- 16.** Бүтэн квадрат ялгах аргаар тэгшигтгэл бод.
- а. $x^2 + 4x + 3 = 0$ б. $x^2 - 10x - 24 = 0$ в. $x^2 + 18x + 81 = 0$
 г. $x^2 + 6x - 16 = 0$ д. $x^2 - x - 12 = 0$ е. $x^2 - 7x + 12 = 0$
 ё. $x^2 - 11x + 28 = 0$ ж. $2x^2 - 5x + 2 = 0$ з. $3x^2 - x - 7 = 0$
- 17.** Тэгшигтгэлийг томьёо хэрэглэн бод.
- а. $x^2 + 8x + 6 = 0$ б. $7x^2 + 6x + 1 = 0$ в. $x^2 - 2x - 1 = 0$
- 18.** Квадрат тэгшигтгэлийг $ax^2 + bx + c = 0$ хэлбэрт оруулж, бод.
- а. $2x^2 + 6x = 9x^2 - 15x$ б. $12x^2 - 5x = 9x^2 + 7x$
 в. $x(x - 15) = 3(108 - 5x)$ г. $47 - x(3x + 4) = 2(17 - 2x) - 62$
 д. $5(5x^2 + 9) - 6(4x^2 - 9) = 90$ е. $(x - 7)(x + 3) + (x - 1)(x + 5) = 102$
- 19.** Тэгшигтгэл бод.
- а. $2x^2 - 9 = 0$ б. $3x^2 + 5x = 0$ в. $5x^2 = 0$
 г. $-x^2 - 4 = 0$ д. $-x^2 + x - 2 = 0$ е. $\frac{x^2 - 1}{3} - 3 = x$
 ё. $\frac{(x + 3)^2}{18} + 1 = x$ ж. $x + 5 = \frac{6}{x}$ з. $\frac{t}{t - 2} = \frac{2t - 3}{t}$
- 20.** Тэгшигтгэл бод.
- а. $\frac{13x^2 - 3}{5} + \frac{9x^2 - 5}{4} = 3$ б. $\frac{3x^2 - 11}{8} + \frac{37 - x^2}{6} = 10$
- 21.** Тэгшигтгэлийн шийдийг 0.01 нарийвчлалтай ол.
- а. $2x^2 + 3x - 1 = 0$ б. $4x^2 - 7x + 2 = 0$ в. $\frac{13x^2 - 4}{12} + \frac{20 - 3x^2}{18} = \frac{32}{9}$
 г. $\frac{1}{x} + \frac{1}{x - 1} = \frac{1}{4}$ д. $\frac{1}{x} - \frac{2}{1-x} = \frac{1}{2}$ е. $\frac{3}{x+1} + \frac{7}{x-6} = 5$
- 22.** Тэгшигтгэлийг орлуулах аргаар бод.
- а. $(5x - 7)^2 - (5x - 7) - 6 = 0$ б. $(x^2 + 3x)^2 - 7x^2 - 21x + 6 = 0$
- 23.** Тэгшигтгэл бод.
- а. $a^4 + 6a^2 + 8 = 0$ б. $b^4 + 13b^2 + 36 = 0$ в. $x^4 - 16 = 0$
 г. $t^4 - 4 = 0$ д. $x^3 - 8 = 0$ е. $x^3 + 0.125 = 0$
 ё. $x^6 - 7x^3 - 8 = 0$ ж. $x^6 = 12 - x^3$ з. $x + 15 = 8\sqrt[3]{x}$
- 24.** Тэгшигтгэлийг үржигдэхүүн болгон задалж бод.
- а. $x^3 - 5x^2 + 6x = 0$ б. $2x^3 - 5x^2 + 2x = 0$
 в. $x^3 - x^2 - 81x + 81 = 0$ г. $x^3 + 3x^2 - 16x - 48 = 0$

Тэгшийтгэл зохиж бод. №25-39

25. Хоёр тооны нэг нь нөгөөгөөс 4-өөр их байв. Хэрэв тэдгээрийн үржвэр дээр нийлбэрийг нь нэмэхэд 44 гарах бол эдгээр тоог ол.
26. Хэрэв дараалсан 5 бүхэл тооны эхний турван тооны квадратын нийлбэр үлдсэн хоёр тооны квадратын нийлбэртэй тэнцүү бол эдгээр тоог ол.
27. а. Квадрат хэлбэртэй цааснаас 59 см^2 талбайтай турвалжныг хайчилж авахад үлдсэн хэсгийн талбай 85 см^2 болов. Квадратын талын уртыг ол.
 б. Хэрэв тэгш өнцөгт турвалжны катетуудын харьцаа $8 : 15$, гипотенуз нь 6.8 м бол талбайг ол.
28. Дөлгөөн дугуйгаар үдээс өмнө 60 км, үдээс хойш 42 км аялжээ. Тэрээр үдээс хойш аялахдаа үдээс өмнө зарцуулсан хугацаанаас 1 цаг илүү зарцуулсан бөгөөд хурд нь үдээс өмнөхөөс 4 км/ц-аар бага байсан бол түүний үдээс өмнө болон үдээс хойш явсан хурдыг ол.
29. Хулан, Марал нар гэр бүлийн хамт нэг чиглэлд аялжээ. Хулан өглөөний 8 цаг 00 минутад галт тэргээр, Марал өглөөний 9 цаг 00 минутад машинаар гарч тус бүр 300 км зам туулж, хүрэх газраа нэгэн зэрэг иржээ. Хэрэв Маралын суусан машины хурд галт тэрэгний хурднаас 10 км/ц-аар хурдан бол тэд хэдэн цагт хүрэх газраа ирсэн бэ?
30. Аялагчид завиар гол өгсөн 8 км явж, загас бариад буцжээ. Хэрэв голын урсгалын хурд 4 км/ц бөгөөд очихдоо буцахаасаа 20 минут илүү хугацаа зарцуулсан бол завинь хурдыг ол.
31. Сүхбаатар хотоос гарсан аялагчид моторт завиар Сэлэнгэ мөрнийг өгсөж 80 км яваад буцаж ирэхэд нийт 8 цаг 20 минут болов. Хэрэв Сэлэнгэ мөрний урсгалын хурд 4 км/ц бол завинь хурдыг ол.
32. Квадрат хэлбэртэй нимгэн төмрөөс 3 см өргөнтэй тэгш өнцөгт хэлбэртэйг хайчилж авахад үлдсэн хэсгийн талбай 70 см^2 болжээ. Квадратын талын уртыг ол.
33. Зуслангийн хашааны хайсны диагональ $\sqrt{6}$ м бөгөөд урт нь өргөнөөсөө 2 м-ээр их бол
 а. Хайсны урт ба өргөний хэмжээг ол.
 б. Хайсны периметрийг ол.
 в. Хайсны талбайн хэмжээг ол.
34. Хоёр тэгш өнцөгтийн талбай тэнцүү бол
 а. x -ийг ол.
 б. Тэгш өнцөгт бүрийн периметрийг олж, жиши.
35. Хэрэв трапецийн талбай 30 см^2 бол d -г ол.



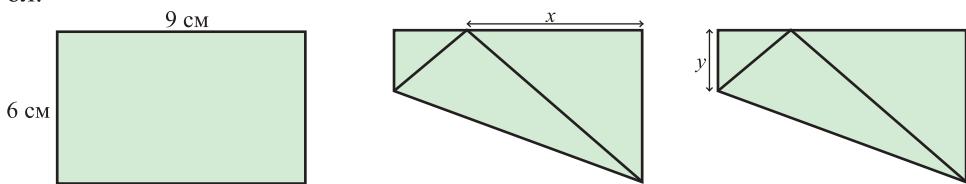
36. Зурагт үзүүлсэн хэлбэртэй ногооны газрын талбай 80 м^2 байв. Ногооны газраа тойруулж 1 м өргөнтэй төмөр тоор хашаа барих болжээ. Хэдэн метр төмөр тор хэрэгтэй вэ?



37. Хэрэв ногоон өнгөөр будсан квадратын талбай 32 см^2 , харин цагаан өнгөөр будсан хэсгийн талбай 40.25 см^2 бол x -ийг ол.



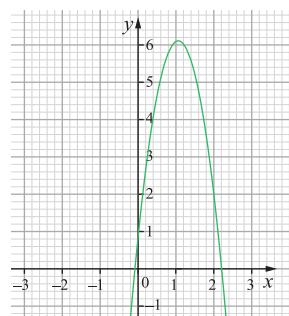
38. 9 см \times 6 см хэмжээтэй цаасыг зурагт үзүүлснээр нугалжээ. x ба y -ийн уртыг ол.



39. 1984-1994 онд Украяны тамирчин Сергей Бубка эрэгтэйчүүдийн өндрийн хайлтын төрөлд дэлхийн дээд амжилт тогтоожээ. Тэрээр 1988 онд 6.05 м өндөрт хайрж, дээд амжилт тогтоосон бөгөөд хайрх үед түүний хурд нь 11 м/с байжээ. Хэрэв t секунд дэх хайлтын өндрийг $h = -5t^2 + 11t$ томьёогор олдог бол



- а. Томьёо ашиглан 5 м өндөрт хайрх үеийн хугацааг 0.1-ийн нарийвчлалтай ол.
 б. Функцийн график ашиглан тамирчны хамгийн өндөрт хайрх үеийн хугацааг ол.
 в. Тамирчин агаарт ойролцоогоор хэдэн секунд байсан бэ?
 г. Функцийн график ашиглан $t = 2$ үед хайлтын өндрийг ол.



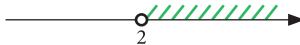
1.2. КВАДРАТ ТЭНЦЭТГЭЛ БИШ

Бид нар өмнөх ангиудад шугаман тэнцэтгэл бишийг бодож чаддаг болсон.

Жишээ 1. Тэнцэтгэл бишийг бод.

а. $7x > 14$ б. $3x - 2 \geq 7$ в. $-5 \leq 2x + 4 < 8$

Бодолт. а. $7x > 14$ буюу $x > 2$, шийдийн олонлогийг тоон шулуун дээр дүрсэлье.



Иймд тэнцэтгэл бишийн шийдийн олонлог $x \in]2, +\infty[$ болно.

б. $3x - 2 \leq 7$ тэнцэтгэл бишийг хялбарчилбал $3x \leq 9$ буюу $x \leq 3$, болох ба үүнийг тоон шулуун дээр дүрсэлбэл



болж тэнцэтгэл бишийн шийдийн олонлог $x \in]-\infty, 3]$ болно.

в. $-5 \leq 2x + 4 < 8$ тэнцэтгэл бишийг хялбарчилбал $-9 \leq 2x < 4$ буюу $-4.5 \leq x < 2$ болох ба үүнийг тоон шулуун дээр дүрсэлбэл



болж тэнцэтгэл бишийн шийдийн олонлог $x \in [-4.5, 2]$ болно.

Санамж Хэрэв $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a < b$ бол $a + c < b + c$, $a - c < b - c$, $c > 0$ үед $ac < bc$, $c < 0$ үед $ac > bc$ чанар биелнэ.

XI ангид бид квадрат тэнцэтгэл биш бодох аргуудыг судална.

Тодорхойлолт. $a \neq 0$, $ax^2 + bx + c > 0$, $ax^2 + bx + c < 0$, $ax^2 + bx + c \geq 0$, $ax^2 + bx + c \leq 0$ хэлбэрийн тэнцэтгэл бишүүдийг **квадрат тэнцэтгэл биш** гэнэ.

Санамж Хоёр тооны үржвэр эерэг байхын тулд үржигдэхүүн тус бүр ижил тэмдэгтэй байх ёстой. Θөрөөр хэлбэл хэрэв $ab > 0$ бол $\begin{cases} a > 0 \\ b > 0 \end{cases}$ эсвэл $\begin{cases} a < 0 \\ b < 0 \end{cases}$ байна.

Жишээ 2. $x^2 + 2x - 8 \geq 0$ тэнцэтгэл биш бод.

Бодолт. Квадрат гурван гишүүнтэйг үржигдэхүүн болгон задалъя.

$x^2 + 2x - 8 = (x - 2)(x + 4) \geq 0$ тэнцэтгэл биш нь $x = 2$, $x = -4$ үед 0-тэй тэнцүү.

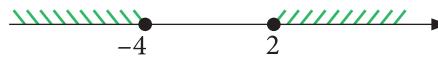
Мөн үржвэр эерэг утгатай байхын тулд үржигдэхүүн тус бүр ижил тэмдэгтэй байх ёстой.

Иймд $(x - 2)(x + 4) \geq 0$ тэнцэтгэл биш нь дараах системтэй тэнцүү чанартай.

а. $\begin{cases} x - 2 \geq 0 \\ x + 4 \geq 0 \end{cases}$ эсвэл б. $\begin{cases} x - 2 \leq 0 \\ x + 4 \leq 0 \end{cases}$ байна. Эдгээр систем тус бүрийн шийдийг ольё.

а. $\begin{cases} x - 2 \geq 0 \\ x + 4 \geq 0 \end{cases}$ эндээс $\begin{cases} x \geq 2 \\ x \geq -4 \end{cases}$ систем гарах ба шийдийн олонлог нь $[2, +\infty[$ байна.

б. $\begin{cases} x - 2 \leq 0 \\ x + 4 \leq 0 \end{cases}$ эндээс $\begin{cases} x \leq 2 \\ x \leq -4 \end{cases}$ систем гарах ба шийдийн олонлог нь $]-\infty, -4]$ байна.



Ерөнхий шийд нь $x \in]-\infty, -4] \cup [-2, +\infty[$ болно.

Санамж Хоёр тооны үржвэр сөрөг байхын тулд үржигдэхүүнүүд эсрэг тэмдэгтэй байна. Θөрөөр хэлбэл хэрэв $ab < 0$ бол $\begin{cases} a > 0 \\ b < 0 \end{cases}$ эсвэл $\begin{cases} a < 0 \\ b > 0 \end{cases}$ байна.

Жишээ 3. $x^2 - 4x - 2 < 0$ тэнцэтгэл биш болд.

Бодолт. Үржигдэхүүн болгон задлахын тулд бүтэн квадратыг ялгаж, квадратуудын ялгаврын томъёогоор задалдь.

$$x^2 - 4x - 2 = (x-2)^2 - 6 = (x-2)^2 - (\sqrt{6})^2 = (x-2-\sqrt{6})(x-2+\sqrt{6}) < 0$$

Үржвэр 0-ээс бага байхын тулд

a. $\begin{cases} x-2-\sqrt{6} > 0 \\ x-2+\sqrt{6} < 0 \end{cases}$ эсвэл б. $\begin{cases} x-2-\sqrt{6} < 0 \\ x-2+\sqrt{6} > 0 \end{cases}$ байна гэсэн үг.

Эдгээр систем тус бүрийн шийдийн олонлогийг ольё.

a. $\begin{cases} x > 2 + \sqrt{6} \\ x < 2 - \sqrt{6} \end{cases}$ шийдийн олонлог нь \emptyset байна.

б. $\begin{cases} x < 2 + \sqrt{6} \\ x > 2 - \sqrt{6} \end{cases}$ шийдийг тоон шулуун дээр дүрсэлье.
 $]2 - \sqrt{6}, 2 + \sqrt{6}[$ болно.

Ерөнхий шийд нь $x \in]2 - \sqrt{6}, 2 + \sqrt{6}[$ болно.

Жишээ 4. $x^2 - 6x + 4 \leq 0$ тэнцэтгэл бишийг бод.

Бодолт. $x^2 - 6x + 4$ квадрат гурван гишүүнтэйг Жишээ 3-тай адилаар $(x-p)^2 + q$ хэлбэрт оруульяа.

$x^2 - 6x + 4 = (x-3)^2 - 5 \leq 0$ эндээс $(x-3)^2 - (\sqrt{5})^2 \leq 0$ болно. Үүнийг үржвэр болгон бичвэл $(x-3-\sqrt{5})(x-3+\sqrt{5}) \leq 0$ болох тул $x^2 - 6x + 4 < 0$ тэнцэтгэл бишийг шийдийн олонлог нь $x \in [3 - \sqrt{5}, 3 + \sqrt{5}]$ болно.

Санамж Хоёр тооны ногдвор сөрөг утгатай байхын тулд хуваагч ба хуваагдагч эсрэг тэмдэгтэй байх ёстой.

Санамж Бутархай тэнцэтгэл бишийг бодохдоо хуваарийн квадрат болох эерэг илэрхийллээр тэнцэтгэл бишийн хоёр талыг үржүүлж гарсан тэнцэтгэл бишийг боддог.

Жишээ 5. $\frac{-x+8}{x-3} \leq 0$ тэнцэтгэл биш болд.

Бодолт. Тэнцэтгэл бишийн хоёр талыг $(x-3)^2$ гэсэн эерэг илэрхийллээр үржүүлбэл анхны тэнцэтгэл бишийг бодох нь дараах системийг бодохтой ижил болно. Энд тодорхойлогдох муж нь $x-3 \neq 0$ байна.

$$\begin{cases} (-x+8)(x-3) \leq 0 \\ x-3 \neq 0 \end{cases} \quad (*) \text{Өөрөөр хэлбэл бутархай тэнцэтгэл биш бодох нь}$$

$(-x+8)(x-3) \leq 0$ квадрат тэнцэтгэл бишийг бодоход шилжиж байна.

Энэ тэнцэтгэл биш нь

a. $\begin{cases} -x+8 \geq 0 \\ x-3 < 0 \end{cases}$ эсвэл б. $\begin{cases} -x+8 \leq 0 \\ x-3 > 0 \end{cases}$ гэсэн тэнцэтгэл бишийн системүүдэд

шилжинэ. Иймээс (*) тэнцэтгэл бишийн системийн шийд нь



40. Шугаман тэнцэтгэл биш болд.

- | | | |
|---|--|---|
| a. $7 - 2x \leq 4x + 10$ | b. $x + 13 > 5x - 3$ | v. $13 < 4x + 3 < 27$ |
| г. $9(x-1) \leq 4(2x-3)$ | д. $3(2x-4) < 2(2x+1)$ | е. $\frac{4-x}{5} < 2$ |
| ё. $\frac{2x-3}{3} > 7$ | ж. $\frac{3-2x}{4} \geq -5$ | з. $\frac{5-3x}{4} \leq 5$ |
| и. $\frac{2x-5}{3} - \frac{3x+1}{5} \geq 0$ | й. $\frac{3x+4}{2} - \frac{2x-1}{3} < 0$ | к. $\frac{x-1}{3} - \frac{x+1}{4} \leq \frac{x}{2}$ |

41. Тэнцэтгэл бишийг үржигдэхүүн болгон задлах аргаар бод.

- a. $x^2 > 9$ б. $x^2 - 25 < 0$ в. $x^2 - 4x < 0$ г. $2x^2 \geq 6$

42. Тэнцэтгэл бишийг үржигдэхүүн болгон задлах аргаар бод.

- a. $x^2 + 10x + 21 \geq 0$ б. $x^2 + 6x + 5 < 0$ в. $3x^2 + 8x - 3 > 0$

43. Тэнцэтгэл биш болд.

- | | | |
|------------------------|---------------------|-----------------------|
| а. $(x-3)(x-5) \leq 0$ | б. $(x+4)(x-7) < 0$ | в. $(2x-1)(3x+2) > 0$ |
| г. $(x-3)^2 > 4$ | д. $3(x-1)^2 > 12$ | е. $(x+4)^2 < 3$ |

44. Тэнцэтгэл биш болд.

- | | | |
|-----------------------|--------------------------|------------------------|
| а. $x^2 - 6x + 5 > 0$ | б. $a^2 + 3a - 4 \leq 0$ | в. $2y^2 + y - 3 < 0$ |
| г. $y^2 \geq 4y + 5$ | д. $x^2 - 4x + 4 > 0$ | е. $p^2 - 3p \leq -2$ |
| ё. $(a+2)(a-1) > 4$ | ж. $8 - 2a \geq a^2$ | з. $3y^2 + 2y - 1 > 0$ |

45. Тэнцэтгэл бишийг бод. $(2-x)(3-x) > x+5$

46. Тэгшитгэл хоёр шийдтэй байх k -ийн утгыг ол.

- a. $kx^2 + kx + 1 = 0$ б. $kx^2 + 5x + k = 0$ в. $x^2 - 4kx + 9 = 0$

47. Рационал тэнцэтгэл биш болд.

- | | | | |
|--------------------------|-----------------------------|-----------------------------|---------------------------|
| а. $\frac{x+2}{x+7} > 0$ | б. $\frac{x-5}{x+5} \leq 0$ | в. $\frac{x+2}{x+7} \geq 0$ | г. $\frac{x+2}{3x-4} < 0$ |
|--------------------------|-----------------------------|-----------------------------|---------------------------|

48. Тэнцэтгэл бишийг үржигдэхүүн болгон задалж бод.

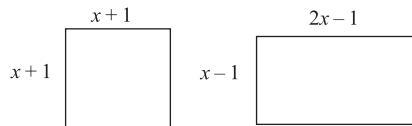
- а. $x - x^3 < 0$ б. $x^3 + x^2 \geq 6x$ в. $3x^3 + 2x^2 - x > 0$

49. а. Квадратын талбай тэгш өнцөгтийн талбайгаас бага байх x -ийн утгуудыг олж, шийдийн олонлогийг тоон шулуун дээр дүрсэл.

- б. $x = 6$ байх үед квадрат ба тэгш

өнцөгтийн талбайг олж, жиши.

- в. $x = 8$ байх үед квадрат ба тэгш өнцөгтийн периметрийг олж, жиши.



1.3. КВАДРАТ ТЭНЦТГЭЛ БИШИЙГ БОДОХ ГРАФИКИЙН АРГА

Бид нар өмнөх хичээлүүдээр квадрат функцийг дараах 3 хэлбэрт авч үзсэн.

$f(x) = ax^2 + bx + c$, $f(x) = a(x - p)(x - q)$, $f(x) = a(x - p)^2 + q$ эдгээр хэлбэрт байгаа функцийн графикийн координатын хавтгайд тоймлон зурж, тэнцтгэл биш бодох аргыг авч үзье.

Квадрат тэнцтгэл бишийг графикийн аргаар бодоход

- a -гийн тэмдэг эерэг бол параболын салаа дээшээ, сөрөг бол параболын салаа доошоо харсан байна.
- $ax^2 + bx + c = 0$ тэгшитгэлийн дискриминантыг олж, шийдтэй бол Ox тэнхлэгийг огтлох цэгүүдийг олно.
- $f(x) = ax^2 + bx + c$ функцийн графикийг тоймлон зурна.
- График ашиглан өгсөн нөхцөлийг ($f(x) > 0$, $f(x) \geq 0$, $f(x) < 0$, $f(x) \leq 0$) хангах x -ийн утгын олонлогийг олно.

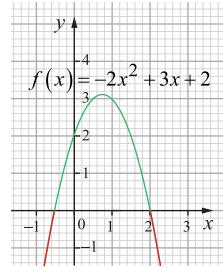
Жишээ 1. а. $-2x^2 + 3x + 2 < 0$ б. $-2x^2 + 3x + 2 > 0$ тэнцтгэл бишийг графикийн аргаар бод.

Бодолт. $f(x) = -2x^2 + 3x + 2$ функцийн графикийг тоймлон зуръя. $a = -2 < 0$ тул доошоо харсан парабол байна.

Дискриминант нь $D = 3^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 2 = 25 > 0$ тул Ox тэнхлэгийг хоёр цэгээр огтолно. Эдгээр нь $x_1 = 2$, $x_2 = -0.5$ байна.

а. $-2x^2 + 3x + 2 < 0$ тэнцтгэл бишийг бодно гэдэг нь $f(x) < 0$ байх x -ийн бүх утгуудыг олно гэсэн үг. Өөрөөр хэлбэл функцийн графикийн Ox тэнхлэгээс доош орших хэсгийн цэгүүдийн (график дээр улаан өнгөөр тэмдэглэсэн) абсциссын олонлогийг олно.

Иймд тэнцтгэл бишийн шийдийн олонлог нь $x \in]-\infty, -0.5[\cup]2, +\infty[$ болно.



б. $-2x^2 + 3x + 2 > 0$ тэнцтгэл бишийг бодно гэдэг нь $f(x) > 0$ байх x -ийн бүх утгуудыг олно гэсэн үг. Өөрөөр хэлбэл функцийн графикийн Ox тэнхлэгээс дээш орших хэсгийн цэгүүдийн (график дээр ногоон өнгөөр тэмдэглэсэн) абсциссын олонлогийг олно. Иймд тэнцтгэл бишийн шийдийн олонлог нь $x \in]-0.5, 2[$ болно.

Жишээ 2. а. $(x - 1)(x - 3) \leq 0$ б. $(x - 1)(x - 3) \geq 0$ тэнцтгэл биш бод.

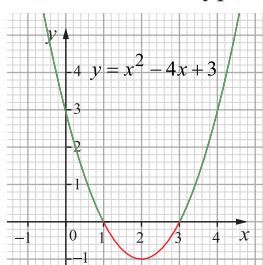
Бодолт. $f(x) = (x - 1)(x - 3) = x^2 - 4x + 3$ функцийн графикийг тоймлон зуръя.

$a = 1 > 0$ тул дээшээ харсан парабол байна. Ox тэнхлэгийг $x = 1$, $x = 3$ цэгээр огтолно.

а. Дээрх жишээтэй адилгаар функцийн утга $f(x) \leq 0$ байх x -ийн утгууд болох $(x - 1)(x - 3) \leq 0$ тэнцтгэл бишийн шийдийн олонлог нь график дээр улаанаар дурслэгдсэн хэсгийн цэгүүдийн абсцисс буюу $x \in [1, 3]$ болно.

б. Мөн функцийн утга $f(x) \geq 0$ байх x -ийн утгууд болох

$(x - 1)(x - 3) \geq 0$ тэнцтгэл бишийн шийдийн олонлог нь график дээр ногооноор дурслэгдсэн хэсгийн цэгүүдийн абсцисс буюу $x \in]-\infty, 1] \cup [3, \infty[$ болно.

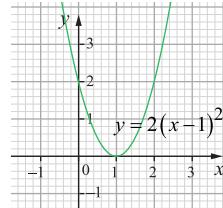


Жишиг 3. Тэнцэтгэл биш болд. а. $2(x-1)^2 \leq 0$ б. $2(x-1)^2 \geq 0$

Бодолт. $f(x) = 2(x-1)^2$ функцийн графикийг тоймлон зуръя. $a = 2 > 0$ тул дээшээ харсан парабол байна. Параболын оройн цэгийн координат нь $(1, 0)$ байх ба $2(x-1)^2 = 0$ тэгшитгэл $x = 1$ гэсэн ганц шийдтэй байна.

а. $2(x-1)^2 \leq 0$ тэнцэтгэл бишийг бодох нь $f(x) = 2(x-1)^2$ функцийн утга $f(x) \leq 0$ байх x -ийн утгуудыг олно гэсэн үг. Графикаас харахад функц сөрөг утга авахгүй, $x = 1$ үед 0-тэй тэнцүү байна. Иймд тэнцэтгэл биши $x = 1$ гэсэн ганц шийдтэй.

б. Графикаас харахад x -ийн аливаа утгад $f(x) = 2(x-1)^2$ функц эерэг утгатай, харин $x = 1$ үед функцийн утга нь 0-тэй тэнцэж байна. Иймд $f(x) \geq 0$ байх x -ийн бүх утгууд нь $2(x-1)^2 \geq 0$ квадрат тэнцэтгэл бишийн шийдийн олонлог тул $x \in]-\infty, \infty[$ болно.



Квадрат тэнцэтгэл бишийн шийд ($a > 0$ үед)

$f(x) = ax^2 + bx + c$ функцийн график	$D > 0$	$D = 0$	$D < 0$
	$x_1 < x_2$	$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$	шагаалт
$ax^2 + bx + c > 0$	$]-\infty, x_1[\cup]x_2, \infty[$	$x \neq -\frac{b}{2a}$	$]-\infty, \infty[$
$ax^2 + bx + c \geq 0$	$]-\infty, x_1] \cup [x_2, \infty[$	$]-\infty, \infty[$	$]-\infty, \infty[$
$ax^2 + bx + c < 0$	$]x_1, x_2[$	шагаалт	шагаалт
$ax^2 + bx + c \leq 0$	$[x_1, x_2]$	$x = -\frac{b}{2a}$	шагаалт

$a < 0$ үед квадрат тэнцэтгэл бишийн шийдийг график ашиглан хэрхэн олох тухай дээрхтэй адил аар хүснэгт зохио.

50. $y = x^2 - 3x - 4$ функцийн графикийн Ox тэнхлэгтэй огтлолцох цэгийн координатыг олж, графикийг тоймлон зур. Уг графикийг ашиглан дараах тэнцэтгэл бишийг бод.

а. $x^2 - 3x - 4 > 0$

б. $x^2 - 3x - 4 < 0$

в. $x^2 - 3x - 4 \geq 0$

г. $x^2 - 3x - 4 \leq 0$

51. Тэнцэтгэл бишийг графикийн аргаар бод.

а. $(x-1)(x+2) < 0$

б. $(2x-3)(5-2x) > 0$

в. $(1-5x)(3-x) < 0$

г. $(7x-2)(4+3x) \geq 0$

д. $(6+5x)(2-3x) \leq 0$

е. $x(x-7) \geq 0$

52. Тэнцэтгэл бишийг графикийн аргаар бод.

а. $x^2 - 5 < 0$

б. $3x^2 - 6x > 0$

в. $x^2 - x - 2 > 0$

г. $8 - 3x^2 \geq 0$

д. $8 - 3x - x^2 \leq 0$

е. $2x^2 - 3x - 1 \geq 0$

ё. $(x+4)^2 > 3$

ж. $x(x+2) \leq 12$

з. $2(x-3)^2 > 8$

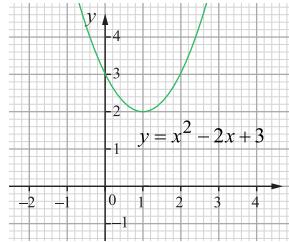
Жишээ 4. а. $x^2 - 2x + 3 > 0$ б. $x^2 - 2x + 3 < 0$ тэнцэтгэл биш болд.

Бодолт. $x^2 - 2x + 3 = 0$ тэгшитгэлийн дискриминант $D = (-2)^2 - 4 \cdot 3 = -8 < 0$ тул бодит тоон шийдгүй байна. Өөрөөр хэлбэл $f(x) = x^2 - 2x + 3$ функцийн график Ox тэнхлэгийг огтлохгүй, $a = 1 > 0$ тул дээшээ харсан парабол байна.

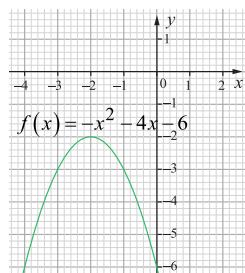
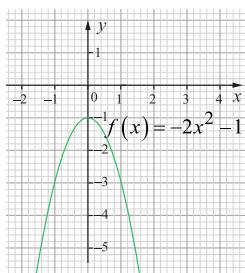
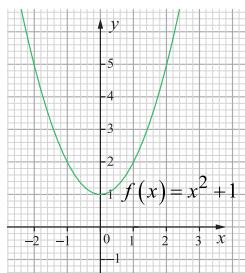
Мөн $f(x) = x^2 - 2x + 3 = (x-1)^2 + 2 > 0$ функцийн утга нь x -ийн аливаа утгад эерэг утгатай байх бөгөөд параболын оройн цэгийн координат $(1, 2)$ байна. Зурагт графикийг дүрслэв.

а. $x^2 - 2x + 3 > 0$ квадрат тэнцэтгэл бишийн шийдийн олонлог нь $x \in]-\infty, \infty[$ болно.

б. $x^2 - 2x + 3 < 0$ квадрат тэнцэтгэл биш шийдгүй.



53. Функцийн график ашиглан тэнцэтгэл бишийг бод.



а. $x^2 + 1 > 0$

б. $-2x^2 - 1 < 0$

в. $-x^2 - 4x - 6 > 0$

г. $x^2 + 1 < 0$

д. $-2x^2 - 1 > 0$

е. $-x^2 - 4x - 6 < 0$

54. Тэнцэтгэл бишийг графикийн аргаар бод.

а. $(x+4)^2 + 1 > 0$

б. $-(x-2)^2 - 3 < 0$

в. $-x^2 - 1 < 0$

55. Квадрат гурван гишүүнтийг $a(x-p)^2 + q$ хэлбэрт оруулж, x -ийн аливаа утгад ямагт эерэг эсвэл сөрөг утгатай байна гэдгийг батал.

а. $x^2 - 2x + 2 > 0$

б. $-x^2 - 4x - 5 < 0$

в. $2x^2 + 4x + 5 > 0$

56. Тэнцэтгэл бишийг графикийн аргаар бод.

а. $x^2 - 9 < 0$

б. $6x - x^2 > 0$

в. $x^2 + 3x - 10 \leq 0$

г. $5x^2 - 4x - 1 > 0$

д. $5x^2 - x - 4 \leq 0$

е. $x^2 - 6x + 10 > 0$

57. $f(x)$ функцийн график өгчээ. График ашиглан

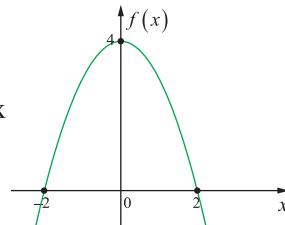
а. $f(x) < 0$ тэнцэтгэл биш болд.

б. $f(x) \geq 0$ тэнцэтгэл биш болд.

в. Функцийн графикийн Ox ба Oy тэнхлэгийг огтлох цэгийн координатыг бич.

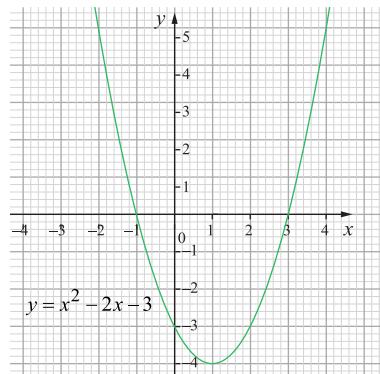
г. $f(x)$ функцийн томъёог бич.

д. $f(x)$ функцийн томъёо ашиглан $x = 5$ үед функцийн утгыг ол.



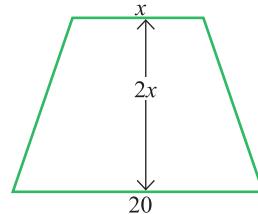
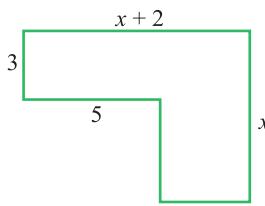
БҮЛГИЙН НЭМЭЛТ ДААЛГАВАР

1. Тооны машин ашиглан тэгшитгэл хэдэн шийдтэйг тогтоо.
 - a. $x^2 - 7.3x^2 + 4.5 = 0$
 - б. $2.1x^2 + 2.7x^2 - 5 = 0$
2. a -ийн ямар утгад $ax^2 - 4x + 5 = 0$ тэгшитгэл шийдгүй байх вэ?
3. a -ийн ямар утгад $ax^2 + 2x + 1 = 0$ тэгшитгэл
 - а. нэг шийдтэй
 - б. хоёр шийдтэй байх вэ?
4. Тэгшитгэлийг үржигдэхүүн болгон задалж бод.
 - a. $m^2 - 4m + 4 = 0$
 - б. $4x^2 + 3x - 7 = 0$
 - в. $24r^2 + 19r + 2 = 0$
 - г. $3p^2 = 14p - 8$
 - д. $a^2 + 11a + 18 = 0$
 - е. $p^2 - 2p - 15 = 0$
 - ё. $x^2 - 8x + 12 = 0$
 - ж. $2x^2 + 5x + 2 = 0$
 - з. $15t^2 + 2t - 1 = 0$
5. Тооны машин ашиглан тэгшитгэл бод.
 - a. $3x^2 - 55.6x^2 + 1000 = 0$
 - б. $-1.5x^2 + 30x^2 - 150 = 0$
 - в. $x^2 - 2x - 10 = 0$
6. Томьёо ашиглан квадрат тэгшитгэл бод.
 - a. $2x^2 - 3x - 4 = 0$
 - б. $5x^2 - 10x - 50 = 29$
 - в. $3x^2 + 2x = 46$
7. Тэгшитгэлийн шийдийг 0.01 нарийвчлалтай ол.
 - a. $x^2 + 3x - 6 = 0$
 - б. $2x^2 + x - 8 = 0$
 - в. $x^2 = 4x + 1$
8. Тэгшитгэлийг үржигдэхүүн болгон задлах, бүтэн квадрат ялгах, квадрат тэгшитгэлийн томьёо ашиглах гэсэн 3 аргаар бод.
 - a. $x^2 + 4x - 45 = 0$
 - б. $x^2 - 7x - 18 = 0$
 - в. $6x^2 + 7x - 3 = 0$
9. Тэгшитгэлийг орлуулах аргаар бод.
 - a. $x^4 - 116x^2 + 1600 = 0$
 - б. $(2x-1)^2 - (2x-1) - 6 = 0$
10. Тэгшитгэл бод.
 - a. $\frac{y}{3y-4} = \frac{2}{y+4}$
 - б. $\frac{49}{2} - \frac{1}{4}x^2 = 0$
 - в. $\frac{33}{x^2} = 1 - \frac{6}{x}$
 - г. $\frac{7}{x+2} + \frac{1}{x-1} = 4$
11. $x^3 + 2x^2 - 25x - 50 = 0$ тэгшитгэлийг үржигдэхүүн болгон задлах аргаар бод.
12. $y = x^2 - 2x - 3$ функцийн график ашиглан тэгшитгэл бод.
 - а. $x^2 - 2x - 3 = 0$
 - б. $x^2 - 2x - 3 = 5$
 - в. $x^2 - 2x - 3 = -4$
 - г. $x^2 - 2x - 3 = x - 1$
13. $f(x) = x^2 + 4x - 7$ функцийн графикийг $-7 \leq x \leq 3$ завсарт байгуул. Тэгшитгэлийг графикийн аргаар бод.
 - а. $x^2 + 4x - 7 = 0$
 - б. $x^2 + 4x - 7 = 3$
 - в. $x^2 + 4x - 7 = -4$
14. $f(x) = x^2 - 3x + 1$ функцийн графикийг $-2 \leq x \leq 5$ завсарт байгуул. Тэгшитгэлийг графикийн аргаар бод.
 - а. $x^2 - 3x + 1 = 0$
 - б. $x^2 - 3x + 1 = 3$
 - в. $x^2 - 3x + 1 = -0.5$



Тэгшитгэл зохиож бод.

- 15.** Хоёр тооны нэг нь нөгөөгөөс 5-аар их байв. Хэрэв тэдгээрийн үржвэр нийлбэрээс нь 6 дахин их бол эдгээр тоог ол.
- 16.** Хэрэв дараалсан хоёр тооны нийлбэрийн квадрат нь квадратуудын нийлбэрээс 112-оор их бол эдгээр тоог ол.
- 17.** Усан онгоц A зогсоолоос голын урсгал сөрж 210 км явж B зогсоолд очоод, буцаж A зогсоолд ирэв. Хэрэв A -аас B -д хүрэхэд зарцуулсан хугацаа нь B -ээс A -д хүрэхэд зарцуулсан хугацаанаас 4 цагаар илүү бөгөөд голын урсгалын хурд 3 км/ц бол онгоцны хурдыг ол.
- 18.** 20 км/ц хурдтай моторт завиар тамирчин голын урсгалын дагуу 60 км яваад буцаж ирэхдээ 6 цаг 15 минут зарцуулав. Голын урсгалын хурдыг ол.
- 19.** Хэрэв дүрсийн талбай 69 бол **20.** Хэрэв трапецын талбай 400 бол x -ийн утгыг 0.01-ийн нарийвчлалтай ол.

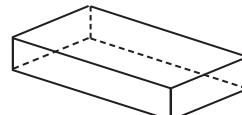
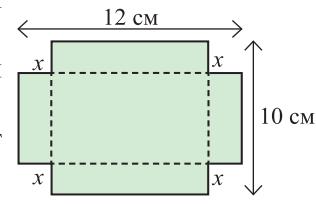


- 21.** Ах дүү хоёр нэг сургуульд явдаг бөгөөд дүү нь 7 цаг 15 минутад гэрээсээ гарч, явган алхжээ. Харин ах нь 7 цаг 35 минутад дугуйтай гарч, дүүгээсээ 10 км/ц илүү хурдтай явжээ. Хэрэв гэрээс сургууль хүртэл 2.5 км зйтай бөгөөд тэд сургууль дээр нэгэн зэрэг ирсэн бол хүүхдүүдийн хурдыг ол.

- 22.** Билгүүн өгсөн хэмжээстэй дэлгээсийг ашиглан хайрцаг хийхээр болжээ.
Хэрэв дөрвөн булангаас нь ижил талтай квадратыг хайчлан аваад, таггүй хайрцаг хийхэд суурийн талбай нь 80 см^2 байх бол
- Квадратын талын уртыг ол.
 - Хайрцгийн дэлгээсийн гадаргуугийн талбайг ол.
 - Хайрцгийн эзлэхүүнийг ол.
 - Хайрцгийн эзлэхүүнийг дөрөв дахин ихэсгэхийн тулд хайрцгийн урт, өргөн, өндрийг ямар хэмжээтэй авах вэ?

- 23.** Шугаман тэнцэтгэл биш бол.

- | | | |
|--|--|-------------------------------------|
| a. $x + 13 > 5x - 3$ | b. $3x + 4 < 5x - 4$ | c. $10x - 2 \geq 6x$ |
| d. $-5 \leq 2x + 4 < 8$ | e. $\frac{2 - 4x}{3} \leq 6$ | |
| g. $3(x+1) > 7x + 27$ | | |
| ж. $\frac{x+1}{4} + \frac{1}{6} \geq \frac{2x-5}{3}$ | ж. $\frac{x}{2} - \frac{3-2x}{5} \leq 1$ | ж. $\frac{x}{3} > 5 - \frac{3x}{4}$ |



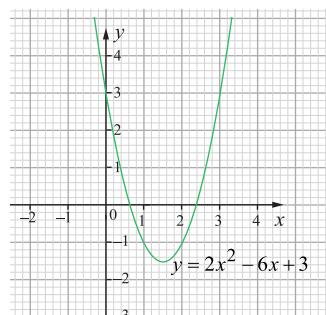
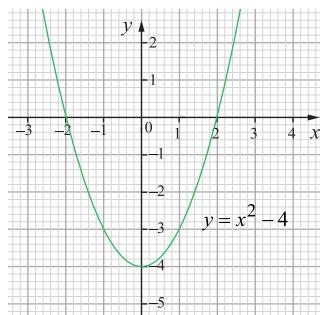
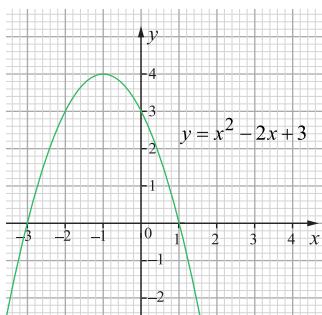
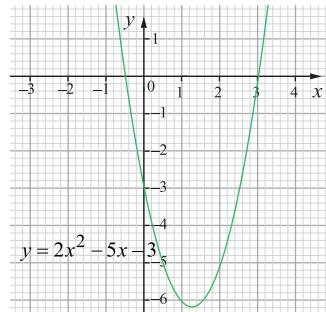
24. Тэнцэтгэл бишийг үржигдэхүүн болгон задлах аргаар бод.

- a. $x^2 + 5x - 6 \geq 0$
- б. $x^2 + 3x + 2 > 0$
- в. $2x^2 - 5x - 3 \leq 0$

25. $y = 2x^2 - 5x - 3$ функцийн график ашиглан тэнцэтгэл биш бод.

- а. $2x^2 - 5x - 3 > 0$
- б. $2x^2 - 5x - 3 \geq 0$
- в. $2x^2 - 5x - 3 \leq 0$
- г. $2x^2 - 5x - 3 < 0$

26. Функцийн график ашиглан тэнцэтгэл биш бод.



a. $x^2 - 2x + 3 > 0$

б. $x^2 - 4 \geq 0$

в. $2x^2 - 6x + 3 < 0$

27. $y = -3x^2 + 6x - 7$ функцийн графикийг тоймлон зурж, тэнцэтгэл бишийг бод.

- а. $-3x^2 + 6x - 7 < 0$
- б. $-3x^2 + 6x - 7 \geq 0$
- в. $-3x^2 + 6x - 7 \leq 0$

28. $y = -x^2 - 4x + 5$ функцийн графикийг тоймлон зур. График ашиглан тэнцэтгэл биш бод.

а. $-x^2 - 4x + 5 \leq 0$

б. $-x^2 - 4x + 5 > 0$

в. $-x^2 - 4x + 5 \geq 0$

29. $y = x^2 - 2x + 7$ функцийн графикийг тоймлон зур. График ашиглан тэнцэтгэл биш бод. а. $x^2 - 2x + 7 \geq 0$ б. $x^2 - 2x + 7 < 0$ в. $x^2 - 2x + 7 > 0$

30. Хоёр тооны нэг нь нөгөөгөөс 3-аар их байв. Хэрэв тэдгээрийн квадратуудын нийлбэр нь хоёр тооны нийлбэрээс 12-оор их бол эдгээр тоог ол.

31. $f(x)$ функцийн график өгөгджээ. График ашиглан

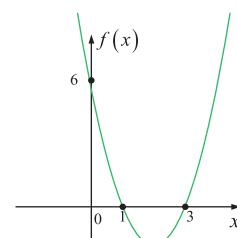
а. $f(x) \geq 0$ тэнцэтгэл биш бод.

б. $f(x) < 0$ тэнцэтгэл биш бод.

в. Функцийн графикийн Ox болон Oy тэнхлэгийг огтлох цэгийн координатыг бич.

г. $f(x)$ функцийн томъёог бич.

д. $f(x)$ функцийн томъёо ашиглан $x = -6$ үед функцийн утгыг ол.



II БҮЛЭГ. ТЭГШИТГЭЛИЙН СИСТЕМ

Энэ бүлэг сэдвийг судалснаар дараах мэдлэг, чадварыг эзэмшинэ.

- Шулуун ба муруйн харилцан байршлыг тодорхойлох
- Хоёр хувьсагчтай шугаман болон шугаман биш тэгшиштгэлээс тогтох системийг бодох (графикийн арга, орлуулах арга)
- Хоёр хувьсагчтай шугаман тэгшиштгэлийн системийг урвуу матриц ашиглан бодох
- Гурван хувьсагчтай шугаман тэгшиштгэлийн систем бодох

2.1. ХОЁР ХУВЬСАГЧТАЙ ТЭГШИТГЭЛИЙН СИСТЕМ

Шулуун ба муруйн харилцан байришил

II эрэмбийн муруйнууд болох парабол, тойрог, гипербол болон шулууны харилцан байршлыг авч үзье. Эдгээр муруй ба шулуун нь

- нэг ерөнхий цэгтэй
- хоёр ерөнхий цэгтэй
- ерөнхий цэгтэй (огтлолцсон) байна.

Жишээ 1. Зураг ашиглан өгсөн шулуун ба параболын харилцан байршлыг тодорхойлж бич.

Бодолт.

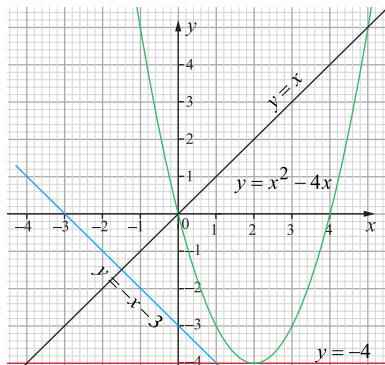
а. $y = x^2 - 4x$ парабол ба $y = x$ шулуун нь хоёр ерөнхий цэгтэй (огтлолцсон) байна.

б. $y = x^2 - 4x$ парабол ба $y = -4$ шулуун нь нэг ерөнхий цэгтэй (шүргэлцсэн) байна.

в. $y = x^2 - 4x$ парабол ба $y = -x - 3$ шулуун нь ерөнхий цэгтэй (огтлолцоогүй) байна.

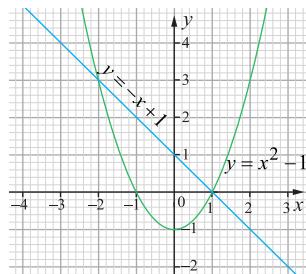
Жишээ 2. $y = x^2 - 1$ муруй болон $x + y = 1$

шулууны ерөнхий цэгийг ол.



Бодолт. Муруй болон шулууныг нэг координатын хавтгайд байгуульяа. $y = x^2 - 1$ муруйн график нь $(0, -1)$ цэгт оройтой дээшээ харсан парабол байна. $y = -x + 1$ шулуун ба параболын огтлолцлын цэгийн координатыг бичвэл $(1, 0), (-2, 3)$ байна.

Эдгээр цэгүүд муруй болон шулууны графикт зэрэг харьялагдах тул ерөнхий цэг болно.

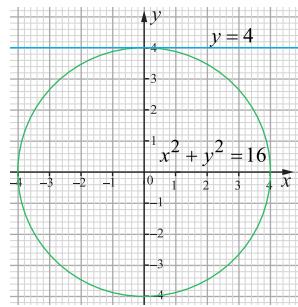


Жишээ 3. $x^2 + y^2 = 16$ муруй ба $y - 4 = 0$ шулууны харилцан байршилыг тодорхойл.

Бодолт. $x^2 + y^2 = 16$ муруйн график нь координатын эх дээр төвтэй 4 нэгж радиустай тойрог, харин $y = 4$ нь Ox тэнхлэгтэй параллел шулуун байна. Эдгээр нь $(0, 4)$ координаттай цэгт шүргэлцсэн (1 ерөнхий цэгтэй) байна.

Санамж Урвуу пропорционал хамаарлын тэгшитгэл нь $y = \frac{k}{x}$ томьёогоор илэрхийлэгддэг. График нь $k > 0$ үед

координатын хавтгайн I ба III мөчид, $k < 0$ үед II ба IV мөчид орших гипербол байна.

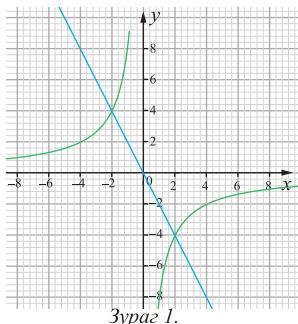


1. $x^2 + y^2 = 25$ тойрог болон $x = -3$ шулууны графикийг байгуул.

- a. Шулуун ба тойргийн харилцан байршилыг тодорхойл.
- b. Ерөнхий цэгийн координатыг ол.

2. Зураг 1-ийг ашиглан

- a. Шулуун ба гиперболын ерөнхий цэгийн координатыг ол.
- b. Урвуу пропорционал хамаарлын тэгшитгэлийг бич.
- c. Шулууны тэгшитгэлийг бич.



3. (Зураг 2)-т $y = x^2 - 1$ муруй болон шулууны график өгчээ.

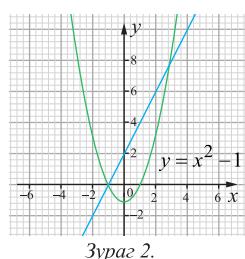
- a. Эдгээрийн огтлолцлын цэгийн координатыг ол.
- b. Шулууны тэгшитгэлийг бич.

4. $2x - 3y = 6$ шулуун ба $y = -\frac{6}{x}$ гиперболыг нэг координатын хавтгайд байгуулж, харилцан байршилыг тодорхойл.

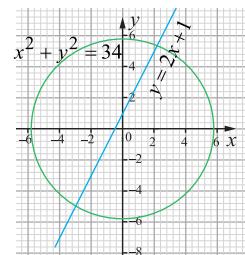
5. $xy = 6$ гипербол болон $y = 9 - 3x$ шулууныг нэг координатын хавтгайд байгуулж, огтлолцлын цэгийн координатыг ол.

6. Өгсөн муруй болон шулууны график байгуулж, ерөнхий цэгийн координатыг ол.

- a. $x + y = 7$ ба $x^2 + y^2 = 25$
- b. $y = x - 3$ ба $y = x^2 - 3x - 8$
- c. $xy = 12$ ба $y = 3x - 1$
- d. $4y = 12 - x$ ба $xy = 9$



7. $x^2 + y^2 = 34$ тойрог болон $y = 2x + 1$ шулууны график ашиглан огтлолцлын цэгийн координатыг 0.1 нарийвчлалтай ол. (Зураг 3)



Зураг 3.

Тэгшитгэлийн системийг графикийн аргаар бодох

Жишээ 4. График ашиглан $\begin{cases} y = x^2 + x - 2 \\ y = 2x \end{cases}$ тэгшитгэлийн системийг бод.

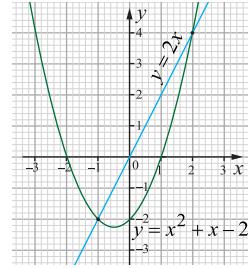
Бодолт. $y = x^2 + x - 2$ парабол ба $y = 2x$ шулууны график байгуулъя. Графикаас харахад эдгээр нь $(2, 4)$, $(-1, -2)$ хоёр ерөнхий цэгтэй байна. Эдгээр цэгийн координатыг парабол болон шулууны тэгшитгэлд орлуулъя. Эхний цэгийн

$x = 2$, $y = 4$ координат нь $2^2 + 2 - 2 = 4$, $2 \cdot 2 = 4$ учраас парабол болон шулууны тэгшитгэлийг хангаж байна. Хоёр дахь цэгийн $x = -1$, $y = -2$ координат нь мөн

$(-1)^2 + (-1) - 2 = -2$, $(-1) \cdot 2 = -2$ парабол болон шулууны

тэгшитгэлийг хангаж байна. Иймд $\begin{cases} y = x^2 + x - 2 \\ y = 2x \end{cases}$ тэгшитгэлийн систем нь

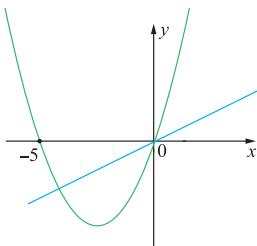
$\begin{cases} x_1 = 2 \\ y_1 = 4 \end{cases}$ ба $\begin{cases} x_2 = -1 \\ y_2 = -2 \end{cases}$ гэсэн хоёр шийдтэй байна. Эдгээр шийдийг $(2, 4)$, $(-1, -2)$ гэж бичиж болно.



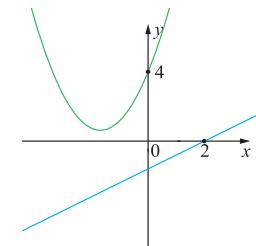
Санамж Тэгшитгэлийн систем бодох нь шулуун ба муруйн ерөнхий цэгийн координатыг олохтой ижил байна. Хэрэв шулуун ба муруй нь ерөнхий цэггүй бол систем шийдгүй байна.

8. $\begin{cases} y = x^2 + 3x - 4 \\ y = 0.5x - 1 \end{cases}$ Тэгшитгэлийн систем шийдтэй юу?
Шийдийг аль зургаар үзүүлсэн бэ?

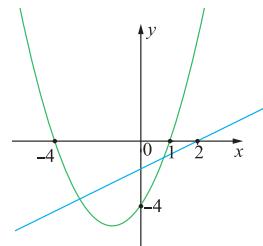
a.



б.



в.



9. $y = x + 2$ шулуун болон $y = 3x^2 + 2x + 1$ муруй огтлолцоно гэж харуул.

10. а. $y = x^2 - 3x - 2$ парабол ба $y = 2x - 6$ шулууныг нэг координатын хавтгайд байгуул.

- б. График ашиглан $\begin{cases} y = x^2 - 3x - 2 \\ y = 2x - 6 \end{cases}$ тэгшитгэлийн системийг бод.

11. $y = x + c$ шулуун $y = x^2 - 3x$ параболыг шүргэх бол c -г ол.

12. Тэгшитгэлийн системийг графикийн аргаар бод.

$$\text{a. } \begin{cases} y = x^2 + 3x - 3 \\ y = x \end{cases}$$

$$\text{б. } \begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

$$\text{в. } \begin{cases} y = x^2 - 3 \\ y = x + 3 \end{cases}$$

$$\text{г. } \begin{cases} y = x^2 - 3x + 1 \\ y = 2x - 5 \end{cases}$$

$$\text{д. } \begin{cases} y = x^2 - 3x - 2 \\ xy = 8 \end{cases}$$

$$\text{е. } \begin{cases} x^2 + y^2 = 29 \\ y - x = 3 \end{cases}$$

Тэгшитгэлийн системийг орлуулах аргаар бодох

Бид өмнө нь хоёр хувьсагчтай шугаман тэгшитгэлийн системийг орлуулах, нэмэх, графикийн аргаар бодож сурсан. Практикт шугаман ба шугаман биш тэгшитгэлүүдээс тогтсон системийг бодох хэрэгцээ байнга гардаг.

Хоёр хувьсагчтай шугаман ба шугаман биш тэгшитгэлээс тогтсон системийг ихэвчлэн орлуулах аргаар боддог. Өөрөөр хэлбэл, шугаман тэгшитгэлээс аль нэг хувьсагчийг нөгөө хувьсагчаар нь илэрхийлж шугаман биш тэгшитгэлд орлуулж нэг хувьсагчийн тэгшитгэлд шилжүүлж бодно гэсэн уг юм.

Жишээ 1. Тэгш өнцөгт хэлбэртэй ногооны газрын периметр 54 м, талбай нь 180 м.кв байхын тулд талууд нь ямар хэмжээтэй байх вэ?

Бодолт. Тэгш өнцөгтийн талуудыг x, y гэж тэмдэглэвэл бодлогод өгсөн нөхцөлөөр $\begin{cases} 2x + 2y = 54 \\ xy = 180 \end{cases}$ гэсэн систем гарна. Энэ системийн нэг тэгшитгэл шугаман, нөгөө нь шугаман биш байна. Уг системийн шугаман тэгшитгэлийг 2-т хувааж, y -ийг x -ээр $y = 27 - x$ гэж илэрхийлээд хоёрдугаар тэгшитгэлд орлуулья. Тэгвэл $x(27 - x) = 180$ буюу $x^2 - 27x + 180 = 0$ гэсэн квадрат тэгшитгэл гарч байна. Гарсан квадрат тэгшитгэлийг бодвол $x_1 = 15, x_2 = 12$ байна. Эдгээр шийдийг $y = 27 - x$ илэрхийлэлд орлуулж $y_1 = 12, y_2 = 15$ гэсэн 2 шийд олоод өгсөн системийн шийдийг (x, y) эрэмбэлсэн хос хэлбэртэй бичвэл $(15, 12)$ ба $(12, 15)$ болно. Иймээс бодлогын нөхцөлд заасан тэгш өнцөгтийн талууд 15 метр, 12 метр байна.

Тодорхойлолт. Хоёр хувьсагчтай тэгшитгэлийн системд орсон тэгшитгэл бүрийн шийд болдог эрэмбэлсэн хосыг өгсөн **системийн шийд** гэнэ.

Жишээлбэл: $(1,1), (-1,-1)$ гэсэн ялгаатай хоёр эрэмбэлсэн хос нь $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ x - y = 0 \end{cases}$ системийн тэгшитгэл бүрийн шийд болох бөгөөд эдгээрээс өөр ямар ч хос өгсөн тэгшитгэлүүдийг нэгэн зэрэг хангаж чадахгүй. Учир нь эхний тэгшитгэлийн график координатын эх дээр төвтэй, $\sqrt{2}$ радиустай тойрог болох ба хоёр дахь тэгшитгэлийн график координатын эхийг дайрсан шулуун байна. Шулуун тойрог хоёр хамгийн олондоо хоёр цэгээр огтлолцох учраас өгсөн тэгшитгэлийн систем $(1,1), (-1,-1)$ хосуудаас өөр шийдгүй. Ийм учраас өгсөн тэгшитгэлийн системийн шийдийн олонлог нь $\{(1,1), (-1,-1)\}$ болно.

Тодорхойлолт. Хэрэв өгсөн хоёр тэгшитгэлийн шийдийн олонлог ижил байвал уг хоёр тэгшитгэлийг **тэнцүү чанартай** гэдэг.

Хэрэв өгсөн хоёр тэгшитгэлийн системийн шийдийн олонлог ижил байвал уг хоёр системийг **тэнцүү чанартай** гэдэг.

Тэгшитгэлийн системийг бодохдоо аль болох хялбар бодож болох тэнцүү чанартай системээр сольдог. Тэгшитгэлийн системийг тэнцүү чанартай системээр солиход хэрэглэдэг дүрмүүдээс авч үзье.

1. **Тэгшитгэлийн байр солих дүрэм.** Системийн хоёр тэгшитгэлийн байрыг солиход анхны системтэй тэнцүү чанартай системд шилжинэ.

2. **Солих дүрэм.** Системийн аль нэг тэгшитгэлийг түүнтэй тэнцүү чанартай тэгшитгэлээр солиход анхны системтэй тэнцүү чанартай системд шилжинэ.

Жишээлбэл: $\begin{cases} x^2 - 3x + 2 = 0 \\ x - y = 1 \end{cases}$ системийн эхний тэгшитгэлийг үржигдэхүүн болгон задлахад тэнцүү чанартай $\begin{cases} (x-2)(x-1) = 0 \\ x = y + 1 \end{cases}$ систем гарна.

3. **Орлуулах дүрэм.** Системийн нэг тэгшитгэлээс аль нэг хувьсагчийг бусад хувьсагчаар нэг утгатай илэрхийлж болдог бол тэрхүү илэрхийллийг нөгөө тэгшитгэлд орлуулахад анхны системтэй тэнцүү чанартай систем гарна.

Жишээлбэл: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x - y = 1 \end{cases}$ системийн хоёрдугаар тэгшитгэлээс y -ийг x -ээр илэрхийлж эхний тэгшитгэлд орлуулбал тэнцүү чанартай $\begin{cases} x^2 + (x-1)^2 = 5 \\ y = x - 1 \end{cases}$ систем гарна.

4. **Нэмэх дүрэм.** Системийн аль нэг тэгшитгэлийг тоогоор үржүүлж, өөр нэг тэгшитгэл дээр нэмэхэд анхны системтэй тэнцүү чанартай систем гарна.

Жишээлбэл: $\begin{cases} xy = 2 \\ x^2 + y^2 = 12 \end{cases}$ системийн эхний тэгшитгэлийг 2-оор үржүүлж хоёрдугаар тэгшитгэл дээр нэмэхэд тэнцүү чанартай $\begin{cases} xy = 2 \\ x^2 + y^2 + 2xy = 16 \end{cases}$

систем гарч байна. Одоо цааш нь солих дүрмээр $\begin{cases} xy = 2 \\ (x+y)^2 = 16 \end{cases}$ гэсэн тэнцүү

chanartay системд шилжүүлнэ. Сүүлийн системийг $\begin{cases} xy = 2 \\ x + y = 4 \end{cases}$, $\begin{cases} xy = 2 \\ x + y = -4 \end{cases}$

гэсэн хоёр системээр солино. Эдгээр системийг өмнө үзсэн орлуулах аргаар шугаман тэгшитгэлээс нь нэг хувьсагчийг нөгөө хувьсагчаар илэрхийлж шугаман биш тэгшитгэлд орлуулж бодох боломжтой. Энэ мэтээр хялбар бодох боломжтой систем гартал үргэлжлүүлнэ.

Жишиг 2. $\begin{cases} 2x + y = 7 \\ x^2 + y^2 = 10 \end{cases}$ системийг орлуулах аргаар бод.

Бодолт. Эхний тэгшитгэлээс y -ийг x -ээр илэрхийлээд, хоёрдуугаар тэгшитгэлд орлуулбал өгсөн систем нь тэнцүү чанартай дараах системд шилжинэ.

$\begin{cases} y = 7 - 2x \\ x^2 + (7 - 2x)^2 = 10 \end{cases}$ Хоёрдуугаар тэгшитгэлийн хаалтыг задалж эмхэтгэе.

$\begin{cases} y = 7 - 2x \\ 5x^2 - 28x - 39 = 0 \end{cases}$ Квадрат тэгшитгэлийг бодвол $x_1 = 3$, $x_2 = \frac{13}{5}$ гэсэн хоёр шийд гарах ба x хувьсагчийн $x_1 = 3$ ба $x_2 = \frac{13}{5}$ утгад харгалзах y хувьсагчийн утгууд $y_1 = 7 - 2 \cdot 3 = 1$ ба $y_2 = 7 - 2 \cdot \frac{13}{5} = \frac{9}{5}$ болно.

Иймд өгсөн системийн шийдийн олонлог нь $\left\{(3,1), \left(\frac{13}{5}, \frac{9}{5}\right)\right\}$ буюу систем хоёр шийдтэй байна. Энэ нь системийн тэгшитгэл тус бүрийн графикийг координатын хавтгайд байгуулбал эхний тэгшитгэлийн график $y + 2x = 7$ шулуун, хоёрдуугаар тэгшитгэлийн график $x^2 + y^2 = 10$ тойрог гарах ба шулуун тойрогтой $(3,1)$, $\left(\frac{13}{5}, \frac{9}{5}\right)$ гэсэн координат бүхий хоёр цэгээр огтлоцно гэсэн ўг.

13. Өгсөн бодит тоон (x,y) хос өгсөн системийн шийд болох уу? Хэрэв шийд болохгүй бол ямар учраас гэдгийг тайлбарла.

a. $(-1, 4)$, $\begin{cases} x + y = 3 \\ x^2 + y^2 = 17 \end{cases}$	б. $(-\sqrt{5}, -\sqrt{5}), (\sqrt{5}, -\sqrt{5})$, $\begin{cases} x + y = 0 \\ x^2 + y^2 = 10 \end{cases}$
v. $\left(-\frac{2}{3}, 5\right)$, $\begin{cases} 3x - 2y = -14 \\ 6x + y = 1 \end{cases}$	г. $(1, -3)$, $\begin{cases} x + y = -2 \\ x^2 - y^2 = 8 \end{cases}$

14. Дараах тэнцэтгэлүүдээс x хувьсагчийг y хувьсагчаар илэрхийлсний дараа y хувьсагчийг x хувьсагчаар илэрхийл.

a. $2x + 3y = 7$ б. $3x - 5y = 1$ в. $x + xy = 10$ г. $xy - 2x = y + 1$

15. Дараах тэгшитгэлүүд тэнцүү чанартай эсэхийг шалга.

a. $3x^2 - 2x = 1$, $(x-1)\left(x - \frac{1}{3}\right) = 0$	б. $(x+1)^2 = 2x + 5$, $x^2 - 4 = 0$
v. $x^2 + 1 = 0$, $5x^4 = -2$	г. $\frac{x^2 + x + 2}{x + 3} = 2$, $(x^2 + x - 6) = 0$

16. Дараах системүүд тэнцүү чанартай эсэхийг шалга.

a. $\begin{cases} x + y = 5 \\ x - 2y = 3 \end{cases}$	б. $\begin{cases} y = \frac{6}{x} \\ x^2 + y^2 = 10 \end{cases}$, $\begin{cases} xy = 6 \\ (x+y)^2 = 16 \end{cases}$
--	---

в. $\begin{cases} x^2 + y^2 = -5 \\ x - 2y = 3 \end{cases}$, $\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x + 2y = 8 \end{cases}$ г. $\begin{cases} x = \frac{2}{y} \\ x^2 + y^2 = 13 \end{cases}$, $\begin{cases} xy = 2 \\ (x-y)^2 = 9 \end{cases}$

17. Хоёр хувьсагчтай хоёр тэгшитгэлээс тогтох системийн нэг тэгшитгэл нь шугаман нөгөө нь квадрат тэгшитгэл байв.
- Энэ систем яг турав эсвэл яг дөрвөн ялгаатай шийдтэй байж болох уу?
 - Б. Ийм систем ямар үед нэг шийдтэй, ямар үед шийдгүй байх вэ?
18. Тэгшитгэлийн системийг бод.
- | | | | |
|--|--|--|--|
| а. $\begin{cases} x^2 - 2y^2 = 7 \\ x - y = 2 \end{cases}$ | б. $\begin{cases} x^2 - 3xy = 7 \\ x - 3y = 2 \end{cases}$ | в. $\begin{cases} x^2 - 5xy = 160 \\ x - 5y = 1 \end{cases}$ | г. $\begin{cases} 5xy - y^2 = 9 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$ |
| д. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 100 \\ 3x - 2y = 12 \end{cases}$ | е. $\begin{cases} 2x^2 - 3y^2 = 24 \\ 2x - 3y = 0 \end{cases}$ | ё. $\begin{cases} 4x^2 - 9y^2 = 15 \\ 2x + 3y = 5 \end{cases}$ | ж. $\begin{cases} x - y = 0 \\ xy = 9 \end{cases}$ |
19. Орлуулах аргаар бод.
- | | | |
|--|--|--|
| а. $\begin{cases} x^2 + xy - y^2 = 11 \\ x - 2y = 1 \end{cases}$ | б. $\begin{cases} x^2 + xy - 3y = 9 \\ 3x + 2y = -1 \end{cases}$ | в. $\begin{cases} x^2 - 3xy - 2y^2 + 5x - 7y + 10 = 0 \\ x + 2y = 1 \end{cases}$ |
|--|--|--|
20. а. Хоёр тооны нийлбэр 20, үржвэр нь 96 бол эдгээр тоог ол.
б. Ялгавар нь 57, үржвэр нь -810 байдаг хоёр тоог ол.
21. а. Периметр нь 82 метр, диагональ нь 29 метр байдаг тэгш өнцөгийн талуудыг ол.
б. Нэг талыг нь 8 сантиметрээр, нөгөө талыг нь 2 сантиметрээр ихэсгэхэд талбай нь 1.5 дахин ихэсдэг тэгш өнцөгийн периметр 80 сантиметр бол уг тэгш өнцөгийн талуудыг ол.
22. Усан санг хоёр хоолойгоор 12 минутад дүүргэдэг. Хэрэв I хоолойг нээж усан сангийн хагас хүртэл ус шахаад, II хоолойг дангаар нь нээж дүүргэхэд 25 минут зарцуулдаг бол хоолой тус бүр дангаараа уг усан санг хэчинээн хугацаанд дүүргэх вэ?
23. А, В хотуудаас хоёр автомашин зэрэг уgtалцан гараад 1 цагийн дараа уулзав. Хэрэв нэг автомашин А хотод ирснээс 35 минутын дараа нөгөө автомашин В хотод ирсэн бол автомашинуудын хурдны харьцааг ол.
24. Хоёр төрлийн хайлшны эхний хайлшинд зэсийн эзлэх хувь хоёрдугаар хайлшныхаас 40%-аар бага байв. 6 кг зэс агуулсан I төрлийн хайлш, 12 кг зэс агуулсан II төрлийн хайлшийг нийлүүлж шинэ хайлш бэлтгэхэд 36% -ийн зэсийн агууламжтай хайлш гарчээ. I, II хайлш тус бүрийн зэсийн агууламжийг ол.
25. Хэрэв хоёр оронтой тоог түүний цифруүдийн үржвэрт хуваавал ногдвор 1, үлдэгдэл 16 гарна. Хэрэв цифруүдийн квадратын ялгавар дээр цифруүдийн үржвэрийг нэмбэл анх өгсөн тоо өөрөө гардаг бол уг тоог ол.

2.2 ШУГАМАН ТЭГШИГЧИЙН СИСТЕМ

Шугаман тэгшигчийн системийг урвуу матриц ашиглан бодох

Бид Х ангид матрицын нэмэх ба үржүүлэх үйлдэл, матрицын урвуу болон 2×2 хэмжээстэй квадрат матрицын урвууг олох аргыг үзсэн билээ. Мөн тодорхойлогч нь 0-тэй тэнцүү матрицад урвуу матриц оршин байдаггүйг мэддэг болсон.

Хэрэв $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ матрицын тодорхойлогч нь тэгээс ялгаатай бол урвуутай бөгөөд урвууг нь $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ томьёогоор олдог. Энд $|A|$ нь A матрицын тодорхойлогч.

Одоо хоёр хувьсагчтай шугаман тэгшигчийн системийг бодоход хэрхэн урвуу матриц ашиглах тухай асуудлыг авч үзье.

Жишээ болгож $\begin{cases} 4x - y = 7 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$ системийг авч үзье. Энэ системийг нэмэх аргаар бодохын тулд эхний тэгшигчийг $-\frac{1}{4}$ -ээр гишүүнчлэн үржүүлж хоёрдугаар тэгшигчэл дээр нэмбэл $\begin{cases} 4x - y = 7 \\ \frac{9}{4}y = \frac{9}{4} \end{cases}$ системд шилжинэ. Хоёрдугаар тэгшигчэлээс

$y = 1$ гэж гарах ба үүнийг эхний тэгшигчэлд орлуулбал $4x - 1 = 7$ буюу $x = 2$ болно. Иймээс өгсөн системийн шийд $(2, 1)$ гэсэн эрэмбэлсэн хос гарч байна.

Одоо өгсөн системийн x, y хувьсагчийн өмнөх коэффициентуудаас $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ матриц зохиоё. Тэгвэл уг системийг $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}$ гэсэн матрицаан тэгшигчэл хэлбэрт бичиж болно. Энэхүү матрицаан тэгшигчийг товчоор $AX = B$ гэж бичиж болох ба энд $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}$ байна.

Хэрэв $AX = B$ тэгшигчийн хоёр талыг зүүн гар талаас нь A матрицын урвуугаар үржүүлбэл $A^{-1}AX = A^{-1}B$ буюу $X = A^{-1}B$ болох бөгөөд энд A матрицын урвууг мэдсэнээр уг тэгшигчийг бодож болно гэсэн дүгнэлт гарч байна.

$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ матрицын урвуу нь $A^{-1} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ учраас
 $X = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 2 \cdot 7 + 1 \cdot 4 \\ -1 \cdot 7 + 4 \cdot 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 18 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ гарч байгаа нь нэмэх аргаар бодсон хариутай тохирч байна.

Энэхүү аргыг $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ матриц урвуутай үед л хэрэглэдэг.

Жишээ 1. $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ тэнцэтгэлийг үнэн байлгах x ба y тоог ол.

Бодолт. $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ гэвэл $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ болох ба өгсөн матрицан тэнцэтгэлийн хоёр талыг зүүн гар талаас нь A^{-1} матрицаар үржүүлбэл.

$$\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

гэсэн тэнцэтгэл гарч байна.

Матрицын үржүүлэх үйлдлийг гүйцэтгэвэл

Дүгнэлт. Хэрэв $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ матрицын урвуу оршин байдаг буюу $|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$ болно. Матрицын тэнцүү байх нөхцөлөөс $x = -11$, $y = 5$ гэж гарна. Өөрөөр хэлбэл энд $\begin{cases} 2x + 5y = 3 \\ x + 3y = 4 \end{cases}$ системийг урвуу матриц ашиглан бодож $(-11, 5)$ гэсэн шийдийг оллоо гэсэн үг.

Дүгнэлт. Хэрэв $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ матрицын урвуу оршин байдаг буюу $|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$ бол $\begin{cases} ax + by = p \\ cx + dy = q \end{cases}$ системийг урвуу матриц ашиглан бодож болох ба ийм үед систем ганц шийдтэй байна. Энэ тохиолдолд системийг $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ гэсэн матрицан хэлбэрт бичиж болох бөгөөд уг матрицан тэгшитгэлийг бодохын тулд $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ квадрат матрицын урвуу болох $\frac{1}{|A|} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ матрицаар зүүн гар талаас нь үржүүлдэг. Тэгвэл

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} dp - bq \\ -cp + aq \end{pmatrix}$$

булох ба шийдийг $\left(\frac{dp - bq}{|A|}, \frac{-cp + aq}{|A|} \right)$ гэсэн эрэмбэлсэн хос болгож бичиж болно. Өөрөөр хэлбэл $|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 0$ бол системийг урвуу матриц ашиглан бодох боломжгүй бөгөөд энэ тохиолдолд систем шийдгүй эсвэл төгсгөлгүй олон шийдтэй байна. Энэ тохиолдлыг бид дараагийн сэдэвт судална.

26. $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ бол $AX = D$ матрицан тэгшитгэлийг бод.

a. $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

б. $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

27. p -ийн ямар утгад тэгшитгэлийн системийг урвуу матриц ашиглан бодож болох вэ?

a. $\begin{cases} x + 3y = 4 \\ -2x - py = 5 \end{cases}$

б. $\begin{cases} 3a + pb = 7 \\ pa + 3b = 5 \end{cases}$

в. $\begin{cases} px - y = -2 \\ 2x - 2y = 4 \end{cases}$

г. $\begin{cases} (p+2)a - b = 3 \\ a + pb = 6 \end{cases}$

д. $\begin{cases} (p+1)x - y = 3 \\ x + (p-1)y = 6 \end{cases}$

е. $\begin{cases} px + 3y = 1 \\ 3x + py = 5 \end{cases}$

28. Тэгшитгэлийн системийг боломжтой бол урвуу матриц ашиглан бод.

а. $\begin{cases} x + 2y = 0 \\ 3x + 4y = 7 \end{cases}$

б. $\begin{cases} 4x + y = 3 \\ 7x + 2y = 5 \end{cases}$

в. $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 4x + 3y = 9 \end{cases}$

г. $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 3x + 4y = 7 \end{cases}$

д. $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 4x + 3y = 11 \end{cases}$

е. $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 4x + 2y = 5 \end{cases}$

Одоо хоёр хувьсагчтай шугаман тэгшитгэлийн системийг урвуу матриц ашиглан бодох боломжгүй үед хэрхэн бодох тухай асуудлыг авч үзье.

Жишээ 2. $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 4x + 2y = 6 \end{cases}$ тэгшитгэлийн системийг бод.

Бодолт. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ матрицын тодорхойлогч $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - 4 \cdot 1 = 0$ учраас өгсөн сис-

темийг урвуу матриц ашиглан бодох боломжгүй. Одоо хоёр дахь тэгшитгэлээс x хувьсагчийг зайлцуулах зорилгоор эхний тэгшитгэлийг (-2) -оор гишүүнчлэн үржүүлж хоёр дахь тэгшитгэл дээр нэмье. Тэгвэл нэмэх дүрэм ёсоор тэнцүү чанартай $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 0 = 0 \end{cases}$ системд шилжинэ. Энэ системийн хоёр дахь тэгшитгэл x, y

хувьсагчийн дурын утгад биелэх $0 = 0$ гэсэн үнэн тэнцэтгэл гарч байгаа тул үүнийг тооцохгүй орхиж болно. Иймээс үлдсэн хоёр хувьсагчтай $2x + y = 3$ тэгшитгэлийг бодох хэрэгтэй боллоо. Хэрэв эхний тэгшитгэлийн y хувьсагчийн оронд дурын бодит a тоо орлуулж x -ийг олбол $x = \frac{1}{2}(3 - a)$ болох тул системийн бүх шийд $\left(\frac{1}{2}(3 - a), a\right)$, $a \in \mathbb{R}$ хэлбэртэй бодит тоон хос байна. Ийм хос төгсгөлгүй олон учраас өгсөн систем төгсгөлгүй олон шийдтэй.

Жишээ 3. $\begin{cases} 2x - 3y = 3 \\ 6x - 9y = 7 \end{cases}$ тэгшитгэлийн системийг бод.

Бодолт. $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 6 & -9 \end{pmatrix}$ матрицын тодорхойлогч $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 6 & -9 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-9) - 6 \cdot (-3) = 0$ учраас өгсөн системийг урвуу матрицын аргаар бодох боломжгүй.

Иймээс өмнөх жишээний адилаар эхний тэгшитгэлийг (-3) -аар гишүүнчлэн үржүүлж хоёрдугаар тэгшитгэл дээр нэмье. Тэгвэл нэмэх дүрэм ёсоор тэнцүү чанартай $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 0 = -2 \end{cases}$ системд шилжих ба энэ системийн хоёрдугаар тэгшитгэл $0 = -2$ гэсэн илэрхий худал тэнцэтгэл гарч байгаа тул өгсөн системийн x, y хувьсагчийн оронд ямар ч бодит тоонууд орлуулахад тэнцэтгэл үүсэхгүй гэсэн үг. Иймээс өгсөн системийг шийдгүй гэж үзнэ.

Гурван хувьсагчтай шугаман тэгшитгэлийн системийг бодох Гауссын арга

Одоо x, y, z хувьсагчтай гурван тэгшитгэлийн систем авч үзье. Хоёр хувьсагчтай шугаман тэгшитгэлийн системд хэрэглэж буй бүх аргыг гурван хувьсагчтай шугаман тэгшитгэлийн системд мөн хэрэглэх боломжтой. Гурван хувьсагчтай гурван шугаман тэгшитгэлийн систем дараах хэлбэртэй байна.

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases}$$

Хэрэв $a_{11} \neq 0$ бол энэ системийн эхний тэгшитгэлийг $-\frac{a_{21}}{a_{11}}$ -ээр үржүүлж хоёр дахь тэгшитгэл дээр, $-\frac{a_{31}}{a_{11}}$ -ээр үржүүлж гуравдугаар тэгшитгэл дээр нэмбэл хоёр

ба гуравдугаар тэгшитгэл x хувьсагчийг агуулаагүй тэгшитгэлд шилжинэ. Энэ үйлдлийг x хувьсагчийг зайлцуулах гэдэг.

Дараа нь хоёрдугаар тэгшитгэлийг зохих тоогоор үржүүлж гуравдугаар тэгшитгэл дээр нэмснээр гуравдугаар тэгшитгэлээс y хувьсагчийг зайлцуулна. Эцэст нь эхний тэгшитгэлийн x хувьсагч, хоёрдугаар тэгшитгэлийн y хувьсагч, гуравдугаар тэгшитгэлийн z хувьсагчийн өмнөх коэффициентийг 1-тэй тэнцүү болсон байхаар тэгшитгэл тус бүрийг гишүүнчлэн тоонд хуваана.

Эдгээр үйлдлийн үр дүнд анхны өгсөн системтэй тэнцүү чанартай

$$\begin{cases} x + a_{12}'y + a_{13}'z = b_1' \\ y + a_{23}'z = b_2' \\ z = b_3' \end{cases}$$

хэлбэртэй системд шилжих ба ийм систем цор ганц шийдтэй байна. Шугаман тэгшитгэлийн системийн ийм хэлбэрийг **гурвалжин хэлбэр** гэдэг.

Санамж Хэрэв $a_{11} = 0$ бол a_{21}, a_{31} -ийн ядаж нэг нь тэгээс ялгаатай байх тул (эсрэг тохиолдолд x хувьсагчгүй систем болно) уг тэгшитгэлийг эхний тэгшитгэлтэй байрыг нь солих замаар эхний тэгшитгэлийн x -ийн өмнөх коэффициентийг тэгээс ялгаатай болгоно.

Чанар. Хэрэв шугаман тэгшитгэлийн системийг тэнцүү чанартай гурвалжин хэлбэрт шилжүүлж болж байвал өгсөн систем цор ганц шийдтэй байна.

Гурвалжин хэлбэртэй системийн гуравдугаар тэгшитгэлээс z -ийг, дараа нь хоёрдугаар тэгшитгэлээс y -ийг, эцэст нь эхний тэгшитгэлээс x -ийг олно.

Тодорхойлолт. Шугаман тэгшитгэлийн системийн хувьсагчийг дараалан зайлцуулах замаар гурвалжин хэлбэрт шилжүүлэн бодох аргыг **Гауссын арга** гэнэ.

Гауссын аргыг хэдэн ч хувьсагчтай шугаман тэгшитгэлүүдээс тогтох системийг бодоход хэрэглэж болдог.

$$\text{Жишээ 4. } \begin{cases} x - 2y + 2z = 5 \\ 3x - 8y + 10z = 25 \\ 4x - 3y + z = 1 \end{cases}$$

Эхлээд хоёр ба гуравдугаар тэгшитгэлээс x хувьсагчийг зайлцуулахын тулд эхний тэгшитгэлийг (-3) -аар үржүүлж хоёрдугаар тэгшитгэл дээр, (-4) -өөр үржүүлж гуравдугаар тэгшитгэл дээр нэмэхэд дараах систем үүснэ.

$$\begin{cases} x - 2y + 2z = 5 \\ 2y - 4z = -10 \\ 5y - 7z = -19 \end{cases}$$

Энэ системийн хоёр, гуравдугаар тэгшитгэлүүдэд x хувьсагч оролцохгүй байна. Одоо хоёрдугаар тэгшитгэлийг гишүүнчлэн 2-т хуваахад $y - 2z = -5$ тэгшитгэл үүснэ. Энэ тэгшитгэлийг (-5) -аар үржүүлж, сүүлчийн системийн гуравдугаар тэгшитгэл дээр нэмбэл

$$\begin{cases} x - 2y + 2z = 5 \\ y - 2z = -5 \\ 3z = 6 \end{cases}$$

Гэсэн уг системтэй тэнцүү чанартай систем үүснэ. Одоо сүүлчийн тэгшитгэлийг гишүүнчлэн 3-д хуваавал анхны системтэй тэнцүү чанартай дараах гурвалжин хэлбэртэй системд шилжинэ.

$$\begin{cases} x - 2y + 2z = 5 \\ y - 2z = -5 \\ z = 2 \end{cases}$$

Уг системийн сүүлийн тэгшитгэлээс эхлэн

$z = 2$, $y = -5 + 2 = -3$, $x = 5 + 2 \cdot (-3) - 2 \cdot 2 = -1$ гэж өмнөх тэгшитгэлүүдэд дараалан орлуулж бодвол $x = -1$, $y = -1$, $z = 2$ гэсэн ганц шийд гарч байгаа тул өгсөн системийн шийдийг $(-1, -1, 2)$ гэсэн эрэмбэлсэн гурвал хэлбэртэй бичнэ.

$$\text{Жишээ 5. } \begin{cases} x - 2y + 4z = 3 \\ 3x - 8y + 16z = 15 \\ 2x - 3y + 6z = 3 \end{cases}$$

системийг бод

Бодолт. Өмнөх жишээнд хэрэглэсэн хувьсагчийг дараалан зайлцуулах аргыг хэрэглэвэл өгсөн системтэй тэнцүү чанартай дараах системд шилжиж байна.

$$\begin{cases} x - 2y + 4z = 3 \\ y - 2z = -3 \\ y - 2z = -3 \end{cases}$$

Энэ системийн хоёр, гуравдугаар тэгшитгэл ижил байна.

Иймээс гуравдугаар тэгшитгэлийг тооцохгүй орхиж болно. Ингээд анхны систем хоёр шугаман тэгшитгэлээс тогтох тэнцүү чанартай системд шилжиж байна.

Одоо $\begin{cases} x - 2y + 4z = 3 \\ y - 2z = -3 \end{cases}$ системийн хоёрдугаар тэгшитгэлээс y хувьсагчийг z -ээр, эхний тэгшитгэлийн x хувьсагчийг z -ээр тус тус илэрхийлбэл $y = -3 + 2z$, $x = 2y - 4z + 3 = 2(2z - 3) - 4z + 3 = -3$ гэсэн тэнцэтгэлүүд гарна. Энэ бол анхны өгсөн систем $\begin{cases} x = -3 \\ y = 2z - 3 \end{cases}$ гэсэн тэнцүү чанартай системд шилжихийг харуулж байна. Энэ нь хэрэв z -ийн оронд дурын бодит a тоо орлуулж x, y -ийг олоод анхны системийн тэгшитгэл бүрд орлуулбал адилтгал гарна гэсэн үг. Иймээс өгсөн систем төгсгөлгүй олон шийдтэй бөгөөд системийн шийдийг $(-3, 2a - 3, a)$, $a \in \mathbb{R}$ гэсэн эрэмбэлсэн гурвал хэлбэртэй бичиж болно.

Жишээ 6. $\begin{cases} x - 2y + 3z = 5 \\ 2x - y + 5z = 12 \\ 3x - 9y + 10z = 7 \end{cases}$ системийг бод.

Бодолт. Эхний тэгшитгэлийг (-2) -оор үржүүлж хоёрдугаар тэгшитгэл дээр, (-3) -аар үржүүлж гуравдугаар тэгшитгэл дээр нэмбэл дараах систем үүснэ.

$\begin{cases} x - 2y + 3z = 5 \\ 3y - z = 2 \\ -3y + z = -8 \end{cases}$ Энэ системийн хоёр ба гуравдугаар тэгшитгэлүүд харгалзан $3y - z = 2$, $3y - z = 8$ болно. Эндээс $3y - z$ гэсэн илэрхийлэл y, z -ийн ямар нэгэн утгын хувьд хоёрдугаар тэгшитгэлд 2-той тэнцүү, гуравдугаар тэгшитгэлд 8-тай тэнцүү байна гэсэн зөрчилд хүргэж байна. Иймээс өгсөн тэгшитгэл шийдгүй гэсэн дүгнэлт гарах бөгөөд өгсөн системийн шийдийн олонлог нь хоосон буюу \emptyset гэж бичиж болно.

Дээрх жишээнүүдээс үзэхэд гурван хувьсагчтай шугаман тэгшитгэлийн систем

1. Цор ганц шийдтэй
2. Төгсгөлгүй олон шийдтэй
3. Шийдгүй байж болно.

$ax + by + cz = d$ тэгшитгэл нь огторгуйд хавтгайг тодорхойлдог тул гурван хувьсагчтай гурван тэгшитгэлээс тогтох системийн тухайд харгалзах геометр тайлбар өгч болдог. Тухайлбал,

- хэрэв гурван хавтгай нэг цэгээр огтлолцож байвал харгалзах гурван хувьсагчтай тэгшитгэлийн систем цор ганц шийдтэй,
- хэрэв хавтгайнуудын ядаж хоёр нь параллел, эсвэл хавтгайнууд ерөнхий цэггүй бол шийдгүй,
- хэрэв гурван хавтгай нэг шулуунаар огтлолцож байвал төгсгөлгүй олон шийдтэй байна.

Шугаман тэгшитгэлийн системийг тэнцүү чанартай системд шилжүүлж бодох хувьсагчийг дараалан зайлуулах Гауссын арга нь нэмэх, орлуулах аргатай төстэй боловч тодорхой эрэмбэ дараалалтай учраас гурав ба түүнээс олон хувьсагчтай шугаман тэгшитгэлүүдийн системийг бодоход илүү тохиromжтой байдаг.

29. Гурван хувьсагчтай шугаман тэгшитгэлийн систем яг дөрөв эсвэл яг таван ялгаатай шийдтэй байж болох уу?

30. Гурвалжин хэлбэрт оруулсан тэгшитгэлийн системийг гүйцээж бод.

a.
$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 1 \\ y - 5z = 2 \\ z = -1 \end{cases}$$

б.
$$\begin{cases} x + 3y + 5z = -2 \\ y + 2z = 5 \\ z = 3 \end{cases}$$

в.
$$\begin{cases} x + 3y - 4z = -2 \\ y - 2z = 1 \\ z = 4 \end{cases}$$

г.
$$\begin{cases} x - 5y + z = 3 \\ y + 4z = 4 \\ z = -3 \end{cases}$$

д.
$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 2 \\ y - 2z = -1 \\ z = 1 \end{cases}$$

е.
$$\begin{cases} x + 3y + 2z = -5 \\ y + 3z = -4 \\ z = -2 \end{cases}$$

31.
$$\begin{cases} x + y - 3z = -10 \\ x - y + 2z = 3 \\ 2x + y - z = -6 \end{cases}$$
 системийн шийд болох хос аль нь вэ?

- A. $(-3, 2, -2)$ Б. $(3, -2, -2)$ В. $(1, 2, -2)$ Г. $(-2, 1, 3)$

32. Тэгшитгэлийн системийн шийдийг бич.

a.
$$\begin{cases} 2x + 3y - 4z = 2 \\ x + 2y = 5 \\ 2x + 4y = 10 \end{cases}$$

б.
$$\begin{cases} x - 3y + z = 7 \\ 2x + 5y - 3z = 5 \\ x + 8y - 4z = -2 \end{cases}$$

в.
$$\begin{cases} 3x + y - 2z = 7 \\ 2x - y + 2z = 3 \\ x + 2y - 4z = 4 \end{cases}$$

33. а. Хэрэв гурвалжны нэг өнцгийг 4 дахин ихэсгэвэл хоёр дахь өнцгөөс 50 градусаар их болох ба гурав дахь өнцөг нь эхний өнцгөөс 40 градусаар бага бол гурвалжны өнцгүүдийг ол.

б. Нийлбэр нь 21-тэй тэнцүү арифметик прогресс үүсгэдэг гурван тооны бага хоёр тооны нийлбэр их тооноос 1-ээр бага бол эдгээр тоог ол.

34. Нийлбэр нь 0-тэй тэнцүү гурван тоог харгалзан 8, 4, 6-аар үржүүлбэл нийлбэр нь 8 гарах ба харин харгалзан 15, 3, 5-аар үржүүлбэл нийлбэр нь 0 гарна. Эдгээр тоог ол.

35. $x = 1, 2, 3$ утгуудад харгалзан 2, 9, 22 гэсэн утга авдаг $ax^2 + bx + c$ квадрат гурван гишүүнтийг ол.

36. Дараах тэгшитгэлийн систем шийдгүй гэж харуул.

a.
$$\begin{cases} 3x + 5y - 5z = 1 \\ x + 2y = 5 \\ 2x + 4y = 11 \end{cases}$$

б.
$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 7 \\ x + 5y - 3z = 5 \\ 2x + 7y = 9 \end{cases}$$

в.
$$\begin{cases} 2x - 3y + 4z = 5 \\ x + 2y + 5z = 7 \\ 3x - y + 9z = 10 \end{cases}$$

37. Тэгшитгэлийн системийг Гауссын аргаар бод.

a.
$$\begin{cases} x + y + z = -2 \\ x - y + 2z = -7 \\ 2x + 3y - z = 1 \end{cases}$$

б.
$$\begin{cases} x - 2y - z = -5 \\ 2x - y + 3z = 4 \\ 3x - 5y + 2z = -7 \end{cases}$$

в.
$$\begin{cases} x - y - z = 5 \\ 3x + y - 2z = 0 \\ x + 7y - 4z = -30 \end{cases}$$

г. $\begin{cases} x - 3y + z = 7 \\ 3x + y - 2z = 3 \\ x + 7y - 4z = 0 \end{cases}$ д. $\begin{cases} x - y + 3z = -1 \\ 2x + y - 5z = 3 \\ 4x - 3y + z = 7 \end{cases}$ е. $\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 3x + 5y + z = -10 \\ x + y + 3z = -10 \end{cases}$

БҮЛГИЙН НЭМЭЛТ ДААЛГАВАР

1. $y = kx$ шулуун $y = x^2 + 1$ муруйг шургэх бол k -г ол.
2. Тэгшитгэлийн системийг график ашиглаж бод.
3. $y = 4x$ шулуун $y = x^2 + 4$ муруйг шургэнэ гэж харуул.
4. Тэгшитгэлийн системийг график ашиглаж бод. $\begin{cases} y = x^2 - 2x \\ y = x + 4 \end{cases}$
5. Дараах тэнцэтгэлээс x хувьсагчийг y хувьсагчаар илэрхийлсний дараа y хувьсагчийг x хувьсагчаар илэрхийл.
 - а. $5x + 2y = 12$
 - б. $20x - 3y = 6$
 - в. $y + xy = 12$
 - г. $xy - 2y = x + y - 3$
6. Дараах тэгшитгэлүүд тэнцүү чанартай эсэхийг шалга.
 - а. $x^2 - 2x = -1$, $(x-1)^2 = 0$,
 - б. $(x-2)^2 = 7 - 4x$, $x^2 - 3 = 0$,
 - в. $x^2 + 3 = 0$, $3x^4 = -1$,
 - г. $\frac{x+2}{x+3} = 2$, $x + y = 0$
7. Дараах тэгшитгэлийн системүүд тэнцүү чанартай эсэхийг шалга.
 - а. $\begin{cases} x - y = 3 \\ x - 2y = 1 \end{cases}$
 - б. $\begin{cases} x - y = 3 \\ 2x - 3 = 4 \end{cases}$
 - в. $\begin{cases} y = \frac{4}{x} \\ x^2 + y^2 = 10 \end{cases}$
 - г. $\begin{cases} xy = 4 \\ (x-y)^2 = 2 \end{cases}$
8. Орлуулах аргаар бод.
 - а. $\begin{cases} x^2 - 2y = 15 \\ x - y = 1 \end{cases}$
 - б. $\begin{cases} x^2 + 3xy = 28 \\ x - 2y = 2 \end{cases}$
 - в. $\begin{cases} x^2 - 5xy = -4 \\ x - 3y = 1 \end{cases}$
 - г. $\begin{cases} 5xy + y^2 = 6 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$
9. Шугаман тэгшитгэлийн системийг урвуу матриц ашиглан бод.
 - а. $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 3x + 4y = 7 \end{cases}$
 - б. $\begin{cases} 4x - y = 3 \\ 7x - 2y = 5 \end{cases}$
 - в. $\begin{cases} 3x + y = 5 \\ 4x + 3y = 5 \end{cases}$
 - г. $\begin{cases} x + 2y = 6 \\ 3x - 4y = -2 \end{cases}$
 - д. $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 4x + 3y = 1 \end{cases}$
 - е. $\begin{cases} 2x + y = -1 \\ 3x + 2y = 0 \end{cases}$
10. Гурван хэсэг хайлшны нийт масс 150 килограмм байв. Зэсийн эзлэх хувь эхний хайлшинд 60%, хоёр дахь хайлшинд 30%, гурав дахь хайлшинд 10% байсан бөгөөд хоёр ба гурав дахь хайлшинд орсон зэсийн нийт масс эхний хайлшнаас 28.4 килограммаар бага, гурав дахь хайлшинд орсон зэсийн масс хоёр дахь хайлшнаас 6.2 килограммаар бага байсан бол хайлш тус бүрийн массыг ол.

11. Дараах тэгшитгэлийн систем шийдгүй гэж харуул.

$$\text{а. } \begin{cases} 3x + 2y - 4z = 2 \\ x + 2y + 2z = 5 \\ 4x + 4y - 2z = 13 \end{cases}$$

$$\text{б. } \begin{cases} x - 3y + z = 7 \\ x + 5y - 3z = 5 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$$

$$\text{в. } \begin{cases} x + 2y - 3z = 0 \\ 2x - y + 4z = 2 \\ x - 3y + 7z = 3 \end{cases}$$

12. Тэгшитгэлийн системийг Гауссын аргаар бод.

$$\text{а. } \begin{cases} x + 3y - 3z = 2 \\ x + 2y - z = 1 \\ -x - 5y + 7z = 8 \end{cases}$$

$$\text{б. } \begin{cases} x - 2y - z = 6 \\ 2x + y + 5z = 9 \\ 3x - 2y - 3z = 10 \end{cases}$$

$$\text{в. } \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 3x + y + 2z = 5 \\ x + 5y - 4z = -17 \end{cases}$$

13. Дараах тэгшитгэлийн систем төгсгөлгүй олон шийдтэй байх p -ийн утгыг олж, харгалзах шийдийг нь бич.

$$\begin{cases} (p+1)x + 8y = 4p \\ px + (p+3)y = 3p - 1 \end{cases}$$

14. $\begin{cases} 2x + y + 3z = 13 \\ x + y + z = 6 \\ 3x + y + z = 8 \end{cases}$ тэгшитгэлийн системийн шийд болох гурвал аль нь вэ?

- А. (1, -2, -1) Б. (2, 1, 3) В. (1, 2, 3) Г. (2, 3, 1)

15. Усан санг таван хоолойгоор ус шахаж дүүргэх байжээ. Усан санг I хоолой тасралтгүй 4 цаг, II, III, IV хоолой хамт 1 цаг, II, III, V хоолой 2 цаг, IV, V хоолой 3 цаг ажиллаж байж дүүргэх байв. Таван хоолойг зэрэг ажиллуулбал усан санг ямар хугацаанд дүүргэх вэ?

16. Хоёр трактор хэсэг газрыг хамтран ажиллавал 12 цагт хагалж дуусгадаг. Нэгдүгээр трактор цагт 8 га газар хагалдаг. Хоёрдугаар трактор цагт хагалдаг газрын хэмжээгээ 4 га-аар нэмэгдүүлбэл уг газрыг нэгдүгээрээс 15 цагийн өмнө хагалж дуусгах боломжтой. Хоёрдугаар трактор цагт хэдэн га газар хагалдаг вэ?

17. Бат, Цэцэг хоёр тэгшитгэл дээр ямар хувиргалт хийвэл тэнцүү чанартай тэгшитгэл гарах тухай ярилцаж байна. Цэцэг “тэгшитгэлийн хоёр талыг тэгээс ялгаатай ижил тоогоор үржүүлэх, тэгшитгэлийн хоёр тал дээр ижил тоо нэмэхэд тэнцүү чанартай тэгшитгэл гарна” гэхэд Бат “тэгшитгэлийн хоёр талыг ижил илэрхийлээр үржүүлэх, тэгшитгэлийн хоёр тал дээр ижил илэрхийлэл нэмэхэд тэнцүү чанартай тэгшитгэл гарна” гэв. Хэнийх нь зөв бэ?

18. А, В, С гурван ажилчин нэг ажлыг гүйцэтгэх болов. Хэрэв А, В хоёр хамтарвал 1 цагт, хэрэв А, С хоёр хамтарвал 1.4 цагт, хэрэв В, С хоёр хамтарвал 2 цаг 30 минутад уг ажлыг хийж дуусгадаг бол гурвуулаа хамтарвал ямар хугацаанд дуусгах вэ?

19. с сантиметр урттай тойрог замаар хоёр цэг хөдөлнө. Тэд эсрэг чиглэлд хөдөлбөл a секунд бүрд зэрэгцэх ба нэг зүгт хөдөлбөл b секунд бүрд зэрэгцдэг. Хэрэв $b > a > 0$ бол цэгүүдийн хурдыг a, b, c -ээр илэрхийл.

III БҮЛЭГ. ФУНКЦ БА ГРАФИК

Энэ бүлэг сэдвийг судалснаар дараах мэдлэг, чадварыг эзэмшинэ.

- Функцийг өгөх аргуудыг мэдэх, өгсөн муруй нь функцийн график мөн эсэхийг тогтоох, өгсөн функцууд адилтгал тэнцүү эсэхийг шалгах
- Зэрэгт функц, түүний графикийн чанарыг мэдэх
- Харилцан нэг утгатай функц, өгсөн функц нь харилцан нэг утгатай эсэхийг тогтоох
- Давхар функц, давхар функцийн тодорхойлогдох муж ба дүрийг олох
- Урвуу функц, функц ба түүний урвуу функцийн хоорондын хамаарлыг мэдэх
- Θсөх, буурах функцийн тухай мэдэх
- Тэгши, сондгой функцийг мэдэх, өгсөн функц нь тэгши сондгой эсэхийг тогтоох

3.1. ФУНКЦ, ФУНКЦИЙГ ӨГӨХ АРГА

Санамж D ба E нь бодит тоон олонлогийн хоосон биш дэд олонлог байг.

D олонлогийн x элемент бүрд E олонлогийн $f(x)$ гэсэн цор ганц элементийг харгалзуулдаг харгалзааг D олонлог дээр тодорхойлогдсон E олонлогоос утгаа авдаг f функц гэх бөгөөд үүнийг $f:D \rightarrow E$; $x \mapsto f(x)$; $y = f(x)$; $f:x \mapsto y$ гэж тэмдэглэдэг.

Тодорхойлолт. $y = f(x)$ гэж өгсөн функцийн хувьд x -ийг **үл хамаарах хувьсагч** буюу **аргумент**, y -ийг **хамаарах хувьсагч** буюу **функцийн утга** гэж нэрлэдэг.

Санамж $f:D \rightarrow E$, $y = f(x)$ функцийн хувьд D олонлогийг f функцийн тодорхойлогдох муж, E олонлогийг f функцийн утгын муж гэдэг.

$I = \{f(x) | x \in D\}$ олонлогийг f функцийн дүр гэнэ.

Тодорхойлогдох муж ба утгын мужийг заалгүйгээр $y = f(x)$ гэж өгсөн тохиолдолд функцийн утга $f(x)$ нь тодорхойлогдож байх бүх бодит x тооны олонлогийг тодорхойлогдох муж гэх ба бодит тоон олонлогийг утгын муж гэж үзнэ.

Адилтгал тэнцүү функцууд

Тодорхойлолт. $f:D \rightarrow E$, $g:U \rightarrow V$ гэсэн функцууд өгсөн гэе. Хэрэв

1. $D = U$ ба $E = V$ буюу тодорхойлогдох мужууд болон утгын мужууд нь давхацдаг
2. Тодорхойлогдох мужийн бүх x -ийн хувьд $f(x) = g(x)$ бол f ба g функцуудийг **адилтгал тэнцүү** гээд $f = g$ гэж тэмдэглэнэ.

Жишээ 1. Тодорхойлогдох муж нь $D = \{-1, 1\}$ байх $f(x) = x$, $g(x) = x^3$ гэсэн

функцийн төрөл бол f ба g функцийн агуултгал тэнцүү эсэхийг шалга.

Бодолт. 1 дүгээр нөхцөл биелэх нь тодорхой. Одоо 2 дугаар нөхцөл биелэх эсэхийг шалгая.

$f(-1) = -1$, $f(1) = 1$, $g(-1) = -1$, $g(1) = 1$ тул $f = g$ байна.

Жишээ 2. Тодорхойлогдох муж нь $D = \{-1, 1\}$ байх $f(x) = ax + b$, $g(x) = x^3 + 2a$ өгсөн бол $f = g$ байх a, b тоог ол.

Бодолт. 2 дугаар нөхцөлийг бичье.

$f(-1) = -a + b$, $f(1) = a + b$, $g(-1) = -1 + 2a$, $g(1) = 1 + 2a$ байна. Тодорхойлолт ёсоор $f(-1) = g(-1)$ ба $f(1) = g(1)$ байх тул $\begin{cases} -a + b = -1 + 2a \\ a + b = 1 + 2a \end{cases}$ систем гарна.

Эндээс $a = 1$, $b = 2$ гэж гарна.

Функцийн огог арга

Функцийг өгөх дараах аргууд байдаг. Үүнд:

- Хүснэгтээр өгөх
- Томьёогоор өгөх
- Графикаар өгөх
- Үгээр тайлбарлах

Эдгээр арга тус бүрийн хувьд жишээ авч аль нэг хэлбэр рүү шилжүүлэх дасгал ажиллай.

Жишээ 3. Аргументын утгад харгалзах функцийн утгыг хүснэгтэд бичиж өгч болно.

x	...	-2	-1	0	1	2	...
y	...	-4	-2	0	2	4	...

Хүснэгтээс харахад аргументын утгыг 2-оор үргүүлэхэд функцийн утга гарч байна. Иймд томьёогоор илэрхийлбэл $y = 2x$ болно.

Жишээ 4. Функцийг $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ гэж шууд томьёогоор өгч болно. Энэ нь x хувьсагчаас хамаарсан функцийн байна. Бид энэ функцийн утгын хүснэгтийг зохиож, графикийг нь байгуулж чадна.

Жишээ 5. Дугуйн талбай олох томьёо нь $S = \pi r^2$ байдаг. Энд дугуйн талбай S нь радиус r -ээс хамаарсан функцийн бөгөөд энэ функцийн тодорхойлогдох муж нь эерэг бодит тооны олонлог, дүр нь мөн эерэг бодит тооны олонлог байна.

Жишээ 6. Зурагт квадрат функцийн график агуулж байна.

Функцийн график дээр орших цэгүүдийн координатыг ашиглан функцийн томьёог олж болно. Энэ функцийн томьёог

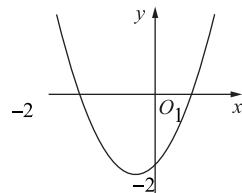
$y = ax^2 + bx + c$ гэе. Өгсөн парабол нь Ox тэнхлэгийг

$(-2, 0)$, $(1, 0)$, Oy тэнхлэгийг $(0, -2)$ цэгээр огтлох тул

$$\begin{cases} 4a - 2b + c = 0 \\ a + b + c = 0 \\ c = -2 \end{cases}$$

тэгшитгэлийн систем гарна. Эндээс

$a = 1$, $b = 1$, $c = -2$ гэж гарах тул өгсөн функцийн томьёо $y = x^2 + x - 2$ гэж гарна.

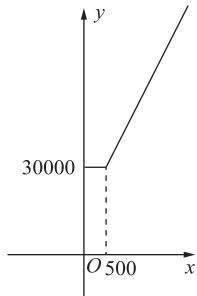


Жишээ 7. Жи-мобайл гар утасны операторын нэгэн багцад сарын суурь хураамж 30000 төгрөг бөгөөд уг суурь хураамжид интернет чөлөөтэй ашиглах эрх ба 500 минут үнэгүй ярих эрх багтсан байдаг. Ярианы эрхийн 500 минутаас илүү гарсан минут бүрд 50 төгрөг төлдөг. Тэгвэл утасны хэрэглээний сарын нийт төлбөр нь ярьсан хугацаанаас хамаарсан функц юм. Энэ функцийн томьёог ол. Графикийг нь тоймлон зур.

Бодлт. Тухайн сард ярьсан нийт хугацааг x , сарын нийт төлбөрийг y гэе.

Бодлогын нөхцөлөөр $0 \leq x \leq 500$ бол сарын нийт төлбөр 30000 төгрөг байна. Θөрөөр хэлбэл $y = 30000$ гэсэн тогтмол функц гарна.

Одоо $x > 500$ үед сарын нийт төлбөрийн функцийг ольё. $x - 500$ минут илүү ярьсан гэвэл илүү гарсан минутад нийт $50(x - 500)$ төгрөг төлөх ба суурь хураамж 30000 төгрөгийг нэмбэл сарын нийт төлбөрийг илэрхийлэх функци $y = 30000 + 50(x - 500)$ болно. Өөрөөр хэлбэл $y = 50x + 5000$ гэж

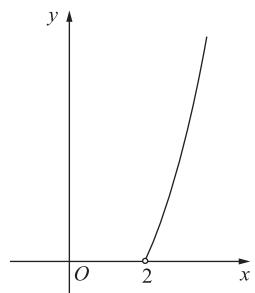


Функц бүрийг дээрх дөрвөн аргаар нэг зэрэг илэрхийлэх боломж үргэлж байдаггүй. Хэрэв функцийг дээрх дөрвөн аргын аль алинаар нь илэрхийлэх боломжтой бол уг функцийн талаар илүү мэдээлэл авахын тулд нэг хэлбэрээс нөгөө рүү шилжүүлэх нь тохиромжтой байdag. Тухайлбал: Жишээ 6-д өгсөн функцийг томьёо болон графикаар илэрхийлэх нь илүү ач холбогдолтой (утасны сарын төлбөрөө тооцоолоход илүү ойлгомжтой) байна.

Одоо функцийн томьёог олох жишээ бодьё.

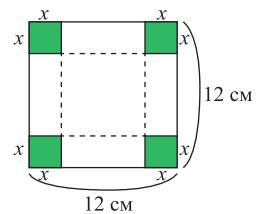
Жишээ 8. Тэгш өнцөгтийн урт нь өргөнөөсөө 2 см-ээр илүү байсан бол талбайг нь уртаас хамаарсан функцийн илэрхийлж графикийг нь байгуул.

Бодлт. Тэгш өнцөгтийн талбайг S , уртыг x гэе. Тэгвэл өргөн нь $x-2$ болно. x , $x-2$ нь тэгш өнцөгтийн талын урт тул $x > 0$ ба $x-2 > 0$ байна. Иймд $x > 2$ гэж гарна. Тэгвэл талбайг илэрхийлэх функц нь $x > 2$ үед тодорхойлогдсон $S = x(x - 2)$ буюу $S = x^2 - 2x$ томьёотой байна. Графикийг байгуулж харууллаа.



Жишээ 9. 12 см талтай квадрат хэлбэртэй цаасны дөрвөн булангаас ижилхэн x см талтай квадратыг таслан авч зурагт харуулсан тасархай шугамын дагуу нутгалж таггүй сав хийхээр болов. Уг савны эзлэхүүнийг x -ээс хамаарсан функцээр илэрхийл.

Бодлт. Бодлогод өгсний дагуу нугалахад тэгш өнцөгт хэлбэртэй параллелепипед үүснэ. Параллелепипедийн эзлэхүүн V нь урт, өндөр өргөний үржвэр байдаг. Өгсөн ёсоор өндөр нь x ба урт ба өргөн нь ижилхэн $12 - x$ болох тул $V = (12 - 2x)^2 \cdot x$ буюу $V = 4x^3 - 48x^2 + 144x$ гэсэн функцийн

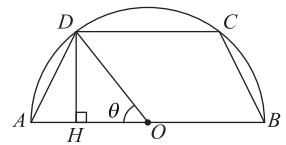
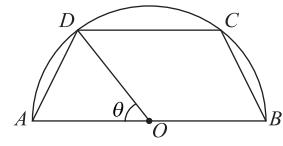


болно. $x, 12 - 2x$ нь хэрчмийн урт тул $x > 0, 12 - 2x > 0$ байна. Иймд эзлэхүүнийг илэрхийлэх функцийн тодорхойлогдох муж нь $0 < x < 6$ байна.

Жишээ 10. Диаметр нь 2 нэгж байх хагас тойрогт багтсан $ABCD$ трапецыг зурагт харуулсан байна. $\angle AOD = \theta$ гэвэл трапецын талбайг θ -өөс хамаарсан функцийн илэрхийл.

Бодолт. Трапецын талбай S нь сууриудын нийлбэрийн хагасыг өндөрөөр үргүүлсэнтэй тэнцүү байдаг. Өгсөн ёсоор $AB = 2$ байна. D оройгоос өндөр буулгаж суурийг нь H гэе. Тэгвэл $DC = 2HO$ болно.

Нөгөө талаас $HO = \cos \theta$ ба $DH = \sin \theta$ гэж олдох тул $S = \frac{2 + 2 \cos \theta}{2} \sin \theta$ буюу $S = (1 + \cos \theta) \sin \theta$ гэж гарна. $ABCD$ трапец байхын тулд $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ байна. Өөрөөр хэлбэл талбайг илэрхийлэх функцийн тодорхойлогдох муж нь $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ болно.



1. Хэрэв тодорхойлогдох муж нь $D = \{1, 2\}$ олонлог байх $f(x) = x^2 - 4x + 6$ ба $g(x) = ax + b$ функцийн илэрхийлэх талбайг тэнцүү бол a, b тоог ол.

2. Хэрэв D олонлог тодорхойлогдох муж нь болдог $f(x) = x^2$ ба $g(x) = 5x - 6$ функцийн илэрхийлэх талбайг тэнцүү бол D олонлогийн элементийн тоог ол.

3. $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ ба $g(x) = x + 2$ функцийн илэрхийлэх талбайг тэнцүү эсэхийг шалга.

Хэрэв биш бол ямар үед адилтгал тэнцүү байх вэ?

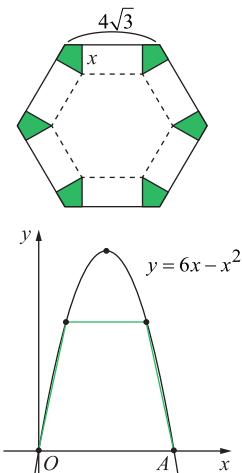
4. Хэрэв бодит тоон олонлог дээр тодорхойлогдсон функцийн зарим утгыг хүснэгтээр өгсөн бол графикийг нь зурж, томьёог нь ол.

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1
y	8	3	0	-1	0	3	8

5. Ажилтан нэг сарын үндсэн цалингаасаа тэтгэврийн даатгалын шимтгэлд 7.0 хувь, тэтгэмжийн даатгалын шимтгэлд 0.8 хувь, ажилгүйдлийн даатгалын шимтгэлд 0.2 хувь, эрүүл мэндийн даатгалын шимтгэлд 2 хувь, нийтдээ 10 хувийн шимтгэл төлөх ёстой. Мөн “Хувь хүний орлогын албан татварын тухай хууль”-д заасны дагуу үндсэн цалингаас дээрх шимтгэлүүдийг хассан дүнгийн 10%-ийг хувь хүний орлогын албан татварт төлөх үүрэгтэй бөгөөд сарын татвараас 7.000 төгрөгийн хөнгөлөлт үзүүлдэг. Тэгвэл дараах функцийдийг томьёогоор илэрхийл. Нэгжийг тохиромжтойгоор сонгон авч, графикийг нь тоймлон зур.

- а. Тэтгэврийн даатгалыг үндсэн цалингаас хамаарсан функцийн илэрхийл
- б. Тэтгэмжийн даатгалыг үндсэн цалингаас хамаарсан функцийн илэрхийл
- в. Ажилгүйдлийн даатгалыг үндсэн цалингаас хамаарсан функцийн илэрхийл
- г. Эрүүл мэндийн даатгалыг үндсэн цалингаас хамаарсан функцийн илэрхийл

- д. Нийт шимтгэлийг үндсэн цалингаас хамаарсан функцээр
 е. Хувь хүний орлогын татварыг үндсэн цалингаас хамаарсан функцээр
 ё. Гар дээр авах мөнгийг үндсэн цалингаас хамаарсан функцээр
6. Эрчим хүчний зохицуулах хорооны тогтоолоор айл өрхөд борлуулах цахилгааны өдрийн тарифыг киловатт цаг тутамд 104.3 F гэж тогтоосон байдаг. Төлбөрийн дүнгийн 10%-тай тэнцэх НӨАТ ба цахилгаан эрчим хүч хэрэглэсний суурь хураамж 2200 төгрөг нэмж төлдөг. Тэгвэл цахилгааны сарын хэрэглээний төлбөрийг илэрхийлэх функцийг ол. Нэгжийг тохиромжтойгоор сонгон авч, графикийг нь тоймлон зур.
7. $4\sqrt{3}$ нэгж талтай зөв зургаан өнцөгт хэлбэртэй өнгийн цаасаар таггүй хайрцаг хийх болов. Орой тус бүрээс будсан хэсгийг таслаад, зурагт харуулсан тасархай шугамын дагуу нугалахад үүсэх савны эзлэхүүнийг x -ээс хамаарсан функцээр илэрхийл.
8. $y = 6x - x^2$ функцийн график Ox тэнхлэгтэй огтлолцох цэгүүдийг O, A гэе. Нэг суурь нь OA байдаг, нөгөө хоёр орой нь парабол дээр орших трапецын талбайг илэрхийлэх томъёог ол. Зургийг харна уу.
9. Тэгш өнцөгтийн хоёр орой нь $y = 4 - x^2$ функцийн график Ox тэнхлэгтэй огтлолцох цэгүүд дээр орших ба энэ талтай параллел тал нь параболыг огтолдог байв. Тэгвэл уг тэгш өнцөгтийн талбайг илэрхийлэх томъёог ол.



3.2 ЗЭРЭГТ ФУНКЦИЙН ГРАФИК

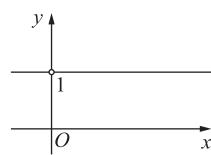
Бид Х ангид $f(x) = x^{-2}$, $f(x) = x^{-1}$, $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$, $f(x) = x$, $f(x) = x^2$, $f(x) = x^3$ функцийн тухай, график нь ямар чанартай байдаг талаар судалсан.

Тодорхойлолт. $f(x) = x^r$ хэлбэрийн функцийг зэрэгт функц гэнэ.

Энд r бүхэл эсвэл $r = \frac{1}{n}$ (n нь натурал тоо) байх үед зэрэгт функцийн тухай судална.

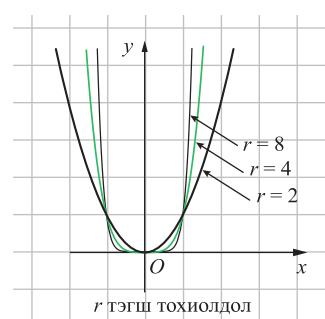
1. $r = 0$ тохиолдол

$f(x) = x^0$ байна. 0^0 тодорхойлогохгүй тул $x \neq 0$ үед $f(x) = 1$ функц болно. Дүр нь $\{1\}$ гэсэн олонлог байна.



2. $r > 0$ бүхэл тоо байх тохиолдол

- $r = 1, 2, 3, 4$ гэх мэт зэрэг бүхэл тоо байхад $f(x) = x$, $f(x) = x^2$, $f(x) = x^3$, $f(x) = x^4$ функциүүд болно. r нь дурын зэрэг бүхэл тоо байхад x^r -ийн утга тодорхойлогох тул $f(x) = x^r$ зэрэгт функцийн тодорхойлогох муж нь бодит



тоон олонлог байна.

- r тэгш үед аливаа x -ийн хувьд $x^r \geq 0$ тул $f(x) = x^r$ функцийн дүр нь сөрөг биш болит тоон олонлог байна. Харин r сондгой үед $f(x) = x^r$ функцийн дүр нь болит тоон олонлог байна.
- r тэгш үед аливаа x -ийн хувьд $x^r = (-x)^r$ тул (x, x^r) , $(-x, x^r)$ цэгүүд $f(x) = x^r$ функцийн график дээр оршино. Иймд график нь Oy тэнхлэгийн хувьд тэгш хэмтэй. Харин r сондгой үед $x^r = -(-x)^r$ тул (x, x^r) , $(-x, -x^r)$ цэгүүд $f(x) = x^r$ функцийн график дээр оршино. Иймд график нь координатын эхийн хувьд тэгш хэмтэй.

r тэгш, сондгой хэд хэдэн тохиолдолд графикийг зурж харууллаа.

Санамж Хэрэв n нь натурал тоо ба $a \neq 0$ болит тоо бол $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ байдаг.

3. $r < 0$ бүхэл тоо байх тохиолдол

- Тухайн тохиолдолд $r = -1, -2, -3, -4$ гэсэн сөрөг бүхэл тоо байх үед зэрэгт функц нь $f(x) = x^{-1}$, $f(x) = x^{-2}$, $f(x) = x^{-3}$, $f(x) = x^{-4}$ болно. Дээрх санамж болон адилтгал тэнцүү функцийн тодорхойлолт ёсоор эдгээр нь харгалзан $f(x) = \frac{1}{x}$, $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $f(x) = \frac{1}{x^3}$, $f(x) = \frac{1}{x^4}$ функцтэй адилтгал тэнцүү байна.
- Ерөнхий тохиолдолд $r < 0$ бүхэл тоо байхад $f(x) = x^r$ функц нь $f(x) = \frac{1}{x^{|r|}}$ функцтэй адилтгал тэнцүү байна. $x \neq 0$ үед $\frac{1}{x^{|r|}}$ нь тодорхойлогдох тул $f(x) = x^r$ буюу $f(x) = \frac{1}{x^{|r|}}$ функцийн тодорхойлогдох муж нь $]-\infty, 0[\cup]0, \infty[$ байна.
- r тэгш үед $x \neq 0$ аливаа x -ийн хувьд $\frac{1}{x^{|r|}} > 0$ тул $f(x) = x^r$ буюу $f(x) = \frac{1}{x^{|r|}}$ функцийн дүр нь ээрэг болит тооны олонлог байна. Харин r сондгой үед $f(x) = x^r$ функцийн дүр нь $y \neq 0$ болит тооны олонлог байна.
- r тэгш үед $x \neq 0$ аливаа x -ийн хувьд $\frac{1}{x^{|r|}} = \frac{1}{(-x)^{|r|}}$ тул $\left(x, \frac{1}{x^{|r|}}\right)$, $\left(-x, \frac{1}{x^{|r|}}\right)$ цэгүүд $f(x) = x^r$ буюу $f(x) = \frac{1}{x^{|r|}}$ функцийн график дээр оршино. Иймд

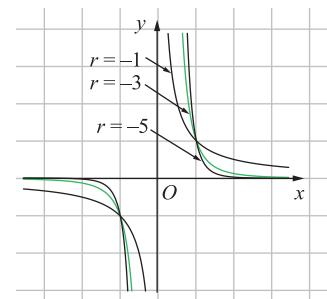
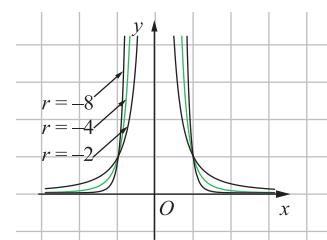
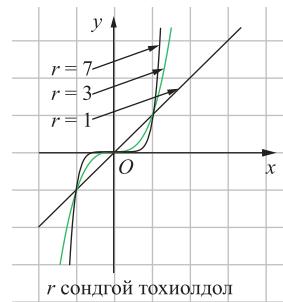


график нь Oy тэнхлэгийн хувьд тэгш хэмтэй. Харин r сондгой үед $\frac{1}{x^{|r|}} = -\frac{1}{(-x)^{|r|}}$ тул $\left(x, -\frac{1}{x^{|r|}}\right), \left(-x, -\frac{1}{x^{|r|}}\right)$ цэгүүд $f(x) = x^r$ функцийн график дээр оршино. Иймд график нь координатын эхийн хувьд тэгш хэмтэй

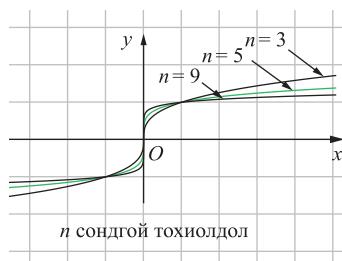
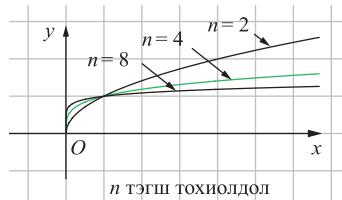
4. $r = \frac{1}{n}$ (n нь натурал тоо) тохиолдол

- Тухайн тохиолдолд $r = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$ гэсэн бутархай тоо байхад $f(x) = x^{\frac{1}{2}}, f(x) = x^{\frac{1}{3}}, f(x) = x^{\frac{1}{4}}, f(x) = x^{\frac{1}{5}}$ гэсэн функцийн тодорхойлолт ёсоор эдгээр

ильтгэгчтэй зэрэг болон адилтгал тэнцүү функцийн тодорхойлолт ёсоор эдгээр нь харгалзан $f(x) = \sqrt{x}, f(x) = \sqrt[3]{x}, f(x) = \sqrt[4]{x}, f(x) = \sqrt[5]{x}$ функцийтэй адилтгал тэнцүү.

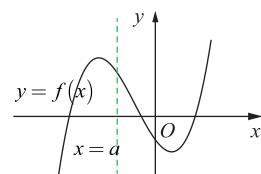
$f(x) = \sqrt{x}$ ба $f(x) = \sqrt[4]{x}$ функцийн тодорхойлогдох муж нь $[0, \infty[$, дүр нь $[0, \infty[$ байна. $f(x) = \sqrt[3]{x}$ ба $f(x) = \sqrt[5]{x}$ функцийн тодорхойлогдох муж нь $]-\infty, \infty[$, дүр нь мөн $]-\infty, \infty[$ байна.

- Ерөнхий тохиолдолд $r = \frac{1}{n}$ (n нь натурал тоо) үед $f(x) = x^{\frac{1}{n}}$ буюу $f(x) = \sqrt[n]{x}$ функц юм. n тэгш үед $f(x) = \sqrt[n]{x}$ функцийн тодорхойлогдох муж нь $[0, \infty[$, дүр нь $[0, \infty[$ байна. Харин n сондгой үед $f(x) = \sqrt[n]{x}$ функцийн тодорхойлогдох муж нь $]-\infty, \infty[$, дүр нь мөн $]-\infty, \infty[$ байна.



Өгсөн муруй нь функцийн график мөн эсэхийг тогтоох

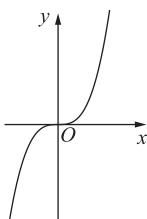
Өгсөн a тоо нь $y = f(x)$ функцийн тодорхойлогдох мужийн дурын цэг байг. $x=a$ шулуун $y = f(x)$ функцийн графикийг огтолдог гэж үзвэл функцийн тодорхойлолт ёсоор a -д харгалзах $f(a)$ гэсэн утга цор ганц олдох ёстой. Өөрөөр хэлбэл $(a, f(a))$ координаттай цэг цор ганц олдоно гэсэн үг.



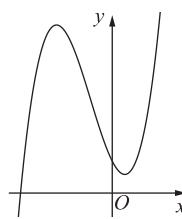
Хэрэв координатын хавтгайд өгсөн муруй ямар нэг функцийн график болдог бол уг муруй нь $x=a$ гэсэн аливаа шулуунтай хамгийн олондоо нэг ерөнхий цэгтэй байна. Үүнийг **босоо шулууны шалгуур** гэдэг.

Жишээ 1. Координатын хавтгайд дурсэлсэн дараах муруйнуудаас аль нь функцийн график болох вэ?

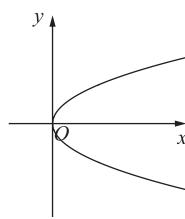
1.



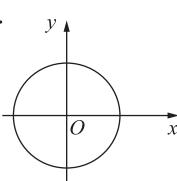
2.



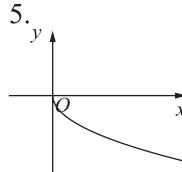
3.



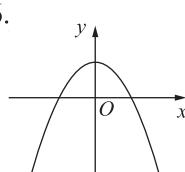
4.



5.

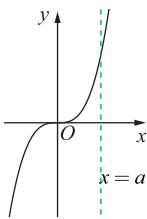


6.

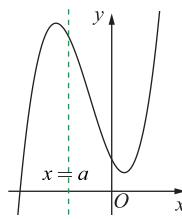


Бодолт. Муруй бүрийг $x = a$ гэсэн шулуунаар огтолж зурагт харуулсан байна.

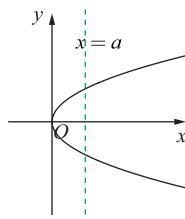
1.



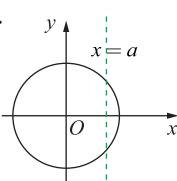
2.



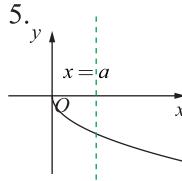
3.



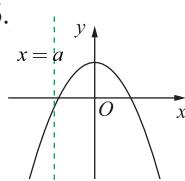
4.



5.



6.



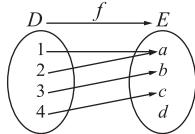
Зургаас харахад 1, 2, 5, 6-д өгсөн муруйнууд нь $x = a$ гэсэн дурын шулуунтай (шулууныг Ox тэнхлэгийн дагуу шилжүүлж байна гэж төсөөл) огтлолцдог бол нэг ерөнхий цэгтэй байна. Иймд функцийн график болно. Харин 3, 4-д өгсөн муруйнууд нь $x = a$ гэсэн шулуунтай 2 цэгээр огтлолзох тохиолдолд байгаа тул функцийн график болохгүй.

3.3. ХАРИЛЦАН НЭГ УТГАТАЙ ФУНКЦ

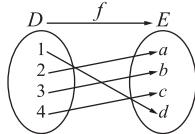
Харилцан нэг утгатай функцийг тодорхойлохоос өмнө дараах жишээг авч үзье.

Жишээ 1. Өгсөн функцийн график тус бүрийн тодорхойлогдох муж, утгын муж, дүрийг ол. Функцийн ялгаатай болон төстэй шинж чанарыг тодорхойл.

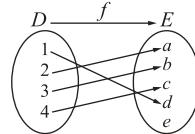
1.



2.



3.



1, 2, 3-д үзүүлсэн функцийн тодорхойлогоо муж нь $D = \{1, 2, 3, 4\}$ ба утгын муж нь нэг ба хоёрдугаар функцийн хувьд $E = \{a, b, c, d\}$, харин гуравдугаар функцийнх $E = \{a, b, c, d, e\}$ байна.

Дүр нь $I = \{a, b, c\}$ олонлог ба утгын мужийн дэд олонлог болж байна.
 $f(1) = f(2) = a$,
 $f(3) = b$, $f(4) = c$ байна.

Дүр нь $I = \{a, b, c, d\}$ олонлог ба утгын мужтай давхцаж байна. $f(1) = d$,
 $f(2) = a$, $f(3) = b$,
 $f(4) = c$ байна.

Дүр нь $I = \{a, b, c, d\}$ олонлог ба утгын мужийн дэд олонлог болж байна. $f(1) = d$,
 $f(2) = a$, $f(3) = b$,
 $f(4) = c$ байна.

- Нэг ба гуравдугаар функцийн дүр нь утгын мужийн дэд олонлог болно. Харин хоёрдугаар функцийн дүр нь утгын мужтай давхцаж байна.
- Хоёр ба гуравдугаар функцийн хувьд D олонлогийн ялгаатай элементэд E олонлогийн ялгаатай элемент харгалзаж байна. Харин нэгдүгээр функцийн хувьд D олонлогийн 1, 2 гэсэн ялгаатай элементэд E олонлогийн a гэсэн ижил элемент харгалзаж байна.

Тодорхойлолт. $f : D \rightarrow E$ функц өгсөн гээ. Хэрэв f функцийн утгын муж нь дүртэйгээ давхацдаг ба D олонлогийн $x_1 \neq x_2$ гэсэн ялгаатай элементүүдэд E олонлогийн $f(x_1) \neq f(x_2)$ гэсэн ялгаатай элементүүд харгалздаг бол f функцийг **харилцан нэг утгатай функц** гэнэ.

Тухайлбал: Жишээ 1-ийн 2 дахь функц харилцан нэг утгатай байна.

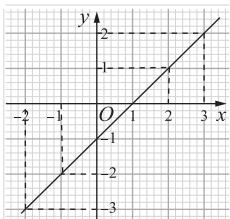
Жишээ 2. Харилцан нэг утгатай функцуудийг ол.

$$\text{а. } f(x) = x - 1 \quad \text{б. } f(x) = x^2 \quad \text{в. } f(x) = x^3 \quad \text{г. } f(x) = 3$$

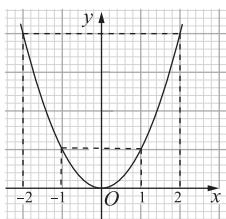
Бодолт. а ба в-д өгсөн функцийн утгын муж нь дүртэй давхцах (бодит тоон олонлог байна гэж 10 дугаар ангид үзсэн) ба $x_1 \neq x_2$ гэсэн ялгаатай элементүүдийн хувьд $f(x_1) \neq f(x_2)$ тул харилцан нэг утгатай функц байна. Харин б-д өгсөн квадрат функцийн утгын муж нь бодит тоон олонлог, дүр нь сөрөг биш бодит тооны олонлог тул харилцан нэг утгатай функцийн тодорхойлолтыг хангахгүй. Мөн тодорхойлогоо мужийн аливаа x -ийн хувьд $f(x) = f(-x)$ тул $x, -x$ гэсэн x -ийн ялгаатай утгад харгалзах функцийн утгууд тэнцүү тул харилцан нэг утгатай биш.

г-д өгсөн функцийн хувьд утгын муж нь бодит тоон олонлог, дүр нь $\{3\}$ тул харилцан нэг утгатай функц биш. Тодорхойлогоо мужийн x цэг бүрд 3 гэсэн ижил элемент харгалзаж байгаа тул харилцан нэг утгатай функц биш. Функц тус бүрийн графикийг байгуулж харууллаа.

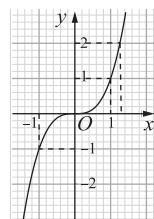
a. $f(x) = x - 1$



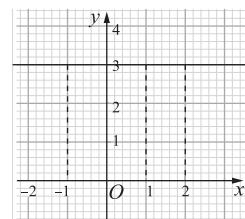
б. $f(x) = x^2$



в. $f(x) = x^3$



г. $f(x) = 3$

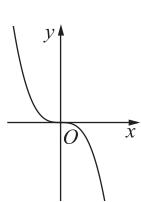


Харилцан нэг утгатай функцийн тодорхойлолт дээр тулгуурлан дараах дүгнэлтийг хийж болно.

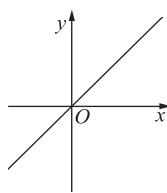
Утгын муж нь дүртэйгээ давхацдаг $f: D \rightarrow E$ функц өгсөн гэе. Хэрэв $y = f(x)$ функцийн график нь $y = b$ гэсэн аливаа шулуунтай хамгийн олондоо нэг ерөнхий цэгтэй байдаг бол уг функц харилцан нэг утгатай байна. Үүнийг **ХЭВТЭЭ ШУЛУУНЫ ШАЛГУУР** гэдэг.

Жишээ 4. Дараах функцүүдээс харилцан нэг утгатай функцийг ол.

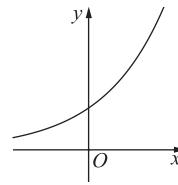
1. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$



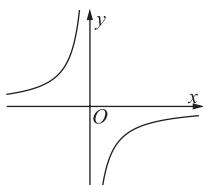
2. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$



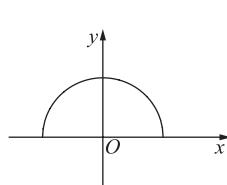
3. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$



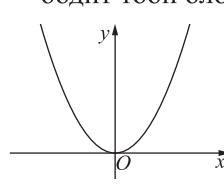
4. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$



5. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$



6. $f: \mathbb{R} \rightarrow E$, E нь сөрөг биш бодит тоон олонлог

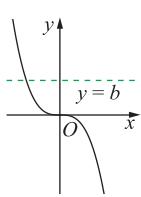


Бодолт. 1, 2, 3-д өгсөн функц нь харилцан нэг утгатай функц юм. Функц тус бүрийн графикийг зурж, $y = b$ шулуунтай огтлолцуулж харууллаа (шулууны Oy тэнхлэгийн дагуу шилжүүлж байна гэж төсөөл).

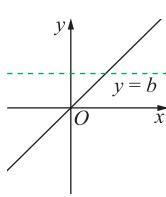
1, 2-т өгсөн функцийн хувьд утгын муж нь дүртэй давхцах (бодит тоон олонлог) ба хэвтээ шулууны шалгуурыг хангаж байгаа тул харилцан нэг утгатай функц болно. 3-д өгсөн функцийн график нь хэвтээ шулууны шалгуурыг хангах ба функцийн утгын муж (эерэг бодит тооны олонлог) нь дүртэй (эерэг бодит тооны олонлог) давхцах тул харилцан нэг утгатай функц байна. 4-д өгсөн функцийн график нь хэвтээ шулууны шалгуурыг хангах боловч функцийн утгын муж (бодит тоон олонлог) нь дүртэй (тэгээс ялгаатай бодит тоо) давхцахгүй тул харилцан нэг утгатай функц биш. 5 ба 6-д өгсөн функц нь хэвтээ шулууны

шалгуурыг хангахгүй тул харилцан нэг утгатай функц биш.

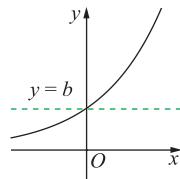
$$1. f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$



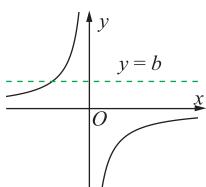
$$2. f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$



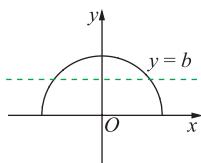
$$3. f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$$



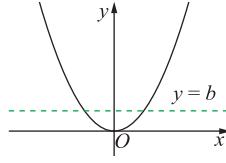
$$4. f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$



$$5. f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$



$$6. f : \mathbb{R} \rightarrow E, E \text{ нь сөрөг биш бодит тоон олонлог}$$



Жишээ 5. $D = \{x \mid -2 \leq x \leq 3\}$, $E = \{y \mid 1 \leq y \leq 11\}$ олонлог өгөв. $D \rightarrow E$, $f(x) = ax + b$ функц харилцан нэг утгатай үед a ($a < 0$) ба b бодит тоог ол.

Бодолт. Тодорхойлогоо мужийн x_1, x_2 гэсэн ялгаатай хоёр утгад функцийн ялгаатай утга харгалзана. Одоо утгын муж ба дүр нь давхцах нөхцөлийг ашиглай. $a < 0$ тул x -ийн утга өсөхөд $f(x) = ax + b$ функцийн утга буурна.

Иймд $f(-2) = 11$ ба $f(3) = 1$ байна. Эндээс $\begin{cases} -2a + b = 11 \\ 3a + b = 1 \end{cases}$ тэгшитгэлийн систем гарах ба үүнийг бодвол $a = -2$, $b = 7$ гэж гарна.

10. Дараах функцүүд харилцан нэг утгатай эсэхийг шалга.

a. $y = 5x$ b. $y = 3(x - 2)^2 + 1$ v. $y = 2x^3 - 1$ г. $y = -\sqrt{x}$

д. $D = [-\infty, \infty[$, $E =]-\infty, 0[$ ба $D \rightarrow E$, $y = -2^x$ е. $y = \frac{2}{x} + 1$

11. $D = \{x \mid -2 \leq x \leq 3\}$, $E = \{y \mid 1 \leq y \leq 11\}$ олонлогууд өгөв. $D \rightarrow E$, $f(x) = ax + b$ функц харилцан нэг утгатай байх a, b ($a > 0$) бодит тоог ол.

12. $D = \{x \mid x \geq 2\}$, $E = \{y \mid y \geq 3\}$ олонлогууд өгөв. $D \rightarrow E$, $f(x) = x^2 + 2x + c$ функц харилцан нэг утгатай байх c бодит тоог ол.

13. $D = \{1, 2, 3\}$ олонлог өгөв. $D \rightarrow D$ байх бүх функцийн тоог a , харилцан нэг утгатай функцийн тоог b гэе. Тэгвэл a ба b -ийн нийлбэрийг ол.

14. $D = \{a, b, c, d\}$ ба $E = \{1, 2, 3, 4\}$ гэсэн бодит тооны дэд олонлог өгөв. $D \rightarrow D$ байх бүх функцийн тоо, харилцан нэг утгатай функцийн тоог ол.

3.4. ДАВХАР ФУНКЦ

Давхар функцийг төсөөлөхийн тулд дараах жишээгээр эхэлье.

Жишээ 1. $D = \{1, 2, 3, 4\}$, $E = \{a, b, c, d\}$, $K = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ бодит тооны дэд олонлог ба $f: D \rightarrow E$; $g: E \rightarrow K$ функц өгөгдөв.

Энэ хоёр функцийг тодорхойлж байгаа харгалзаг хамтад нь зурагт дүрсэлж харууллаа.
Эндээс

$$\begin{aligned}f(1) &= a \text{ ба } g(a) = \beta, f(2) = a \text{ ба } g(a) = \beta \\f(3) &= b \text{ ба } g(b) = \beta, f(4) = c \text{ ба } g(c) = \gamma\end{aligned}$$

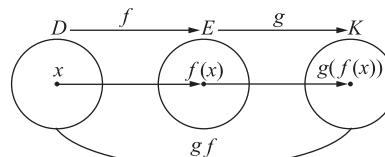
гэсэн хамаарал гарна. Эдгээрийг өөрөөр
 $g(f(1)) = \beta, g(f(2)) = \beta, g(f(3)) = \beta, g(f(4)) = \gamma$
 гэж бичиж болно.

Иймд D олонлогийг K олонлогт харгалзуулсан харгалзааг тодорхойлж болох ба үүнийг дүрсэлж харуулав.

Энэ харгалзаа нь функц болно. Эндээс харвал D олонлог дээр тодорхойлогдсон, K олонлогоос утгаа авдаг шинэ функц тодорхойлж болж байна.

Одоо ерөнхий тохиолдолд авч үзье.

$f : D \rightarrow E$ ба $g : E \rightarrow K$ функцууд өгөгдсөн байг. f функц нь D олонлогийн x элемент бүрд E олонлогийн $f(x)$ элементийг харгалзуулдаг гэе. Харин g функц нь E олонлогийн $f(x)$ гэсэн элементэд K олонлогийн $g(f(x))$ элементийг харгалзуулдаг гэвэл D олонлог дээр тодорхойлогдсон, K олонлогоос утгаа авдаг шинэ функцийг тодорхойлж болж байна. Энэ функцийг f ба g функцийн **давхар функц** гэдэг бөгөөд $y = g(f(x))$ гэж бичдэг. Заримдаа $g(f(x))$ -ийг $gf(x)$ гэж тэмдэглэдэг.



$y = g(f(x))$ функц нь D олонлогийн x элемент бүрд K олонлогийн $g(f(x))$ элементийг харгалзуулна.

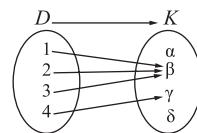
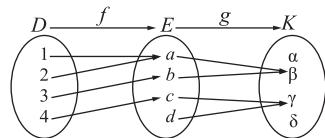
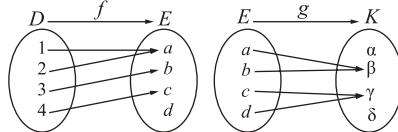
Тодорхойлолт дээр тулгуурлан дараах дүгнэлтийг хийж болно.

Дүгнэлт. f -ийн дур нь g -ийн тодорхойлогдох мужийн дэд олонлог байх үед $y = g(f(x))$ давхар функцийг тодорхойлж болно.

$y = g(f(x))$ функцийн тодорхойлогдох муж нь f -ийн тодорхойлогдох муж D -тэй адил байх ба түүний утгын муж нь g -ийн утгын муж K олонлогтой адил байна. Харин энэ давхар функцийн дур нь g -ийн утгын муж K -ийн дэд олонлог байна.

Жишээ 2. Хэрэв $f : x \mapsto 2x$ ба $g : x \mapsto x^2 - 2$ функц өгсөн бол $y = g(f(x))$, $y = f(g(x))$ функцуудийг ол.

Бодолт. Тодорхойлолт ёсоор f -ийн дур нь g -ийн тодорхойлогдох мужийн дэд олонлог байх үед $y = g(f(x))$ функцийг тодорхойлж болно. f -ийн дур ба g -ийн



тодорхойлогдох муж нь адилхан бодит тоон олонлог тул

$$g(f(x)) = (2x)^2 - 2 = 4x^2 - 2$$

гарна. Харин g -ийн дүр нь f -ийн тодорхойлогдох мужийн дэд олонлог байх үед $y = f(g(x))$ функцийг тодорхойлно. g -ийн дүр нь $[-2, \infty[$ ба f -ийн тодорхойлогдох муж нь $]-\infty, \infty[$ тул $y = f(g(x))$ нь $f(g(x)) = 2x^2 - 4$ функц байна.

Жишээ 3. $f(x) = \sqrt{x-1}$ ба $g(x) = -2x^2$ гэж өгсөн бол дараах давхар функцийг тодорхойлж болох уу? Хэрэв тодорхойлж болдог бол уг функцийг ол. Мөн тодорхойлогдох муж ба дүрийг ол. а. $y = g(f(x))$ б. $y = f(g(x))$

Бодолт. Эхлээд өгсөн функцуудийн тодорхойлогдох муж ба дүрийг ольё. f функцийн тодорхойлогдох муж нь $D = [1, \infty[$, дүр нь $I = [0, \infty[$ байна. Харин g функцийн тодорхойлогдох муж нь $D_1 =]-\infty, \infty[$ ба дүр нь $I_1 =]-\infty, 0]$ байна.
а. f функцийн дүр нь g -ийн тодорхойлогдох мужийн дэд олонлог байх үед $y = g(f(x))$ функцийг тодорхойлно. $I \subset D_1$ тул $y = g(f(x))$ функц нь

$$g(f(x)) = g(\sqrt{x-1}) = -2(\sqrt{x-1})^2 = -2(x-1) = -2x + 2$$

гэж гарна. $y = g(f(x))$ функцийн тодорхойлогдох муж f функцийн тодорхойлогдох мужтай адил $[1, \infty[$ гэсэн олонлог байна.

Одоо дүрийг ольё. $y = g(f(x))$ нь $D = [1, \infty[$ олонлог дээр тодорхойлогдсон $y = -2x + 2$ шугаман функц юм. Шулууны наалт нь $a = -2 < 0$ тул тодорхойлогдох муж дээр x -ийн утга өсөхөд уг функцийн утга буурна. Мөн $g(f(1)) = 0$ учраас функцийн дүр нь $]-\infty, 0]$ байна.

б. g функцийн дүр нь $I_1 =]-\infty, 0]$ ба f -ийн тодорхойлогдох муж $D = [1, \infty[$ буюу $D \cap I_1 = \emptyset$ тул $y = f(g(x))$ давхар функцийг тодорхойлж болохгүй.

Жишээ 4. $y = f(x)$ ба $y = g(x)$ шугаман функцийн хувьд

$f(f(x)) = g(g(x)) = 9x - 8$ ба $f(0) < 0$, $g(0) > 0$ гэсэн нөхцөлүүд биелж байв.

а. $y = f(x)$ ба $y = g(x)$ функцийг ол.

б. $f(h(x)) = g(x)$ байх $y = h(x)$ функцийг ол.

Бодолт.

а. $y = f(x)$ нь шугаман функц тул $f(x) = ax + b$ гэвэл бид a, b -г олох хэрэгтэй. $f(f(x)) = 9x - 8$ нөхцөлийг ашиглай.

$f(f(x)) = a \cdot f(x) + b = a(ax + b) + b = a^2x + ab + b$ болно. Адилтгал тэнцүү функцийн тодорхойлолт ёсоор бүх x -ийн хувьд $a^2x + ab + b = 9x - 8$ биелнэ. Иймд тооцоо хийхэд хялбар байлгахын тулд x -ийг 0 ба 1 гэж сонговол

$\begin{cases} ab + b = -8 \\ a^2 + ab + b = 9 - 8 \end{cases}$ систем гарна. $ab + b = -8$ тул 2 дахь тэгшитгэлд орлуулбал

$\begin{cases} ab + b = -8 \\ a^2 - 8 = 9 - 8 \end{cases}$ системд шилжих ба 2 дахь тэгшитгэлээс $a = \pm 3$ гэж олдоно.

Үүнийг эхний тэгшитгэлд орлуулбал $\begin{cases} a = -3 \\ -3b + b = -8 \end{cases}$ эсвэл $\begin{cases} a = 3 \\ 3b + b = -8 \end{cases}$ болно.

Эндээс $\begin{cases} a = -3 \\ b = 4 \end{cases}$ буюу $\begin{cases} a = 3 \\ b = -2 \end{cases}$ гэж гарна. Θгсөн нөхцөл ёсоор $f(0) < 0$ тул $b < 0$ байна. Иймд $a = 3$, $b = -2$ болох тул $f(x) = 3x - 2$ гэж гарна.

Үүнтэй адил аргаар $y = g(x)$ -ийг $g(x) = -3x + 4$ гэж олно (бодолтыг өөрсдөө хийнэ үү).

6. $f(h(x)) = g(x)$ байх $y = h(x)$ функцийг ольё. $f(h(x)) = 3 \cdot h(x) - 2$ тул $3 \cdot h(x) - 2 = -3x + 4$ байна. Иймд $h(x) = -x + 2$ гэж гарна.

15. $f : X \rightarrow X$ функц өгөв. Зургийг харна уу.

$f(2) + f(f(2))$ ба $f(4) + f(f(4))$ утгыг ол.

16. $f(x) = 2x + 2$, $g(x) = x^2 - 3$ функц өгөв.

Дараах функцууд тодорхойлогдохыг шалгаж, томьёог ол.

а. $y = f(g(x))$ б. $y = g(f(x))$ в. $y = f(f(x))$ г. $y = g(g(x))$

17. $f(x) = 3x + 2$, $g(x) = x^2 - 4$ функц өгөв. $g(f(x)) = 5$ байх x -ийн утгыг ол.

18. $f(x) = 3x + 5$, $g(x) = x + k$ функц өгөв. $f(g(x)) = g(f(x))$ нөхцөл биелж байх k бодит тоог ол.

19. $f(x) = 2x + 1$, $g(x) = x^3$, $h(x) = \frac{1}{x}$ гэсэн функц өгөв. Дараах давхар функцийг тодорхойлж болох уу? Хэрэв тодорхойлж болох бол уг давхар функцийн томьёог гаргаж, түүний тодорхойлогдох мужийг ол.

а. $y = f(g(x))$ б. $y = f(h(x))$ в. $y = g(f(x))$

г. $y = g(g(x))$ д. $y = f(f(x))$ е. $y = g(h(x))$

20. $f(x) = x^2$; $g(x) = x^{\frac{1}{2}}$; $h(x) = x^{\frac{1}{5}}$, $x \leq 0$; $p(x) = x^3$, $x \geq 0$ гэсэн функц өгөв. Дараах давхар функцийг тодорхойлж болох уу? Хэрэв тодорхойлж болох бол уг давхар функцийн томьёог гаргаж, түүний тодорхойлогдох мужийг ол.

а. $y = f(g(x))$ б. $y = f(h(x))$ в. $y = f(p(x))$ г. $y = g(h(x))$

д. $y = g(p(x))$ е. $y = h(p(x))$ ё. $y = g(f(x))$ ж. $y = h(f(x))$

з. $y = h(g(x))$ и. $y = p(h(x))$ ѹ. $y = p(f(x))$ к. $y = p(g(x))$

21. $f(x) = 2x + 3$, $g(x) = 4x - 5$ функц өгөв.

а. $f(h(x)) = g(x)$ нөхцөл хангах $y = h(x)$ функцийн томьёог ол.

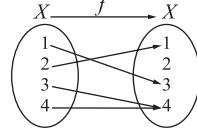
б. $h(f(x)) = g(x)$ биелж байх $y = h(x)$ функцийн томьёог ол.

в. $f(h(x)) = f(x)$ нөхцөл хангах $y = h(x)$ функцийн томьёог ол.

г. $h(f(x)) = f(x)$ нөхцөл хангах $y = h(x)$ функцийн томьёог ол.

22. $f(x) = ax + b$, $g(x) = x^2 + 1$ функцууд өгсөн гэе. Бүх бодит x -ийн хувьд $f(g(x)) = g(f(x))$ нөхцөлийг хангах a, b тоог ол.

23. $S = \{0, 1, 2, \dots, 10\}$ олонлог дээр тодорхойлогдсон $f(x) = x^2 + 3x + 2$ функц ба натурагийн олонлог дээр тодорхойлогдсон $g(x) = \{x \in S \mid x \text{ нийт } 6\text{-д хуваахад гарах үлдэгдэл}\}$ гэсэн функцууд өгсөн гэе. Тэгвэл $g(f(x)) = 0$ байх бүх x -ийг ол.

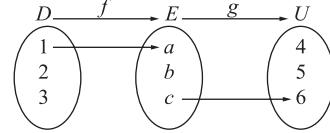


24. $D = \{1, 2, 3, 4\}$ олонлог өгсөн байг. Хэрэв $D \rightarrow D$ байх f, g функцийн хувьд $f(1) = 2, f(3) = 3, g(1) = 3, g(f(1)) = 4, g(f(3)) = 1, g(f(4)) = 3$ бол $f(2), f(4), g(4)$ -ийг ол.

25. Хэрэв $f(2x-1) = x^2 - 4x + 2$ бол $f(1)$ -ийг ол.

26. Хэрэв $f\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = x^2 + 3x + 1$ бол $f(2) + f(3)$ -ийг ол.

27. $D = \{1, 2, 3\}, E = \{a, b, c\}, U = \{4, 5, 6\}$ олонлог өгсөн байг. Хэрэв $f: D \rightarrow E$ ба $g: E \rightarrow U$ харилцан нэг утгатай f, g функцийн хувьд $f(1) = a, g(c) = 6, g(f(2)) = 4$ нөхцөл биелдэг бол $f(3)$ -ийг ол.

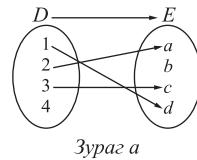


28. f гэсэн функц ба аливаа a, b бодит тооны хувьд $f\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{f(a)+f(b)}{2}$ $f(0) = 1, f(4) = 3$ нөхцөлүүд биелдэг бол $f(2)$ ба $f(-2)$ -ийг ол.

3.5. УРВУУ ФУНКЦИЙН ГРАФИК

$D \rightarrow E$ харгалзва өгсөн байг (Зураг а). Уг харгалзваа нь $(1, d), (2, a), (3, c)$ гэсэн эрэмбэлсэн хосоос бүрдэж байна.

Зураг б $(d, 1), (a, 2), (c, 3)$ гэсэн хосоос бүрдэх $E \rightarrow D$ харгалзааг $D \rightarrow E$ харгалзвааны **урвуу харгалзва** гэнэ. (Зураг б)



Зураг а

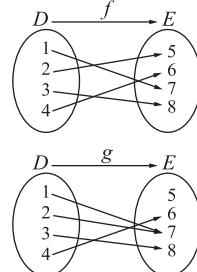
Урвуу функцийн тухай төсөөлөхийн тулд дараах жишээг авъя.

Жишээ 1. $f: D \rightarrow E$ ба $g: D \rightarrow E$ функц зурагт өгөгджээ.

f функцийн хувьд утгын муж нь дүртэй давхцааж байгаа ба D олонлогийн ялгаатай элементэд E олонлогийн ялгаатай элемент харгалзаж байгаа тул харилцан нэг утгатай функц юм.

Харин g функцийн хувьд утгын муж нь дүртэй давхцахгүй тул харилцан нэг утгатай функц биш. (Мөн D олонлогийн 1, 2 гэсэн ялгаатай элементэд E олонлогийн 7 гэсэн элемент харгалзаж байгааг харна уу.)

f -ийн урвуу харгалзваа нь $(7,1), (5,2), (6,4), (8,3)$ гэсэн хосоос тогтох ба энэ нь функц болно.



Харин g -ийн урвуу харгалзваа нь $(7,1), (7,2), (6,4), (8,3)$ хосоос бүрдэх бөгөөд энэ нь функц биш. Учир нь E олонлогийн 5 гэсэн элементэд D олонлогоос харгалзах элемент байхгүй. (Урвуу харгалзааг өөрсдөө дурсэлнэ үү.)

Ерөнхий тохиолдолд дараах дүгнэлтийг хийж болно.

$f: D \rightarrow E$ харилцан нэг утгатай функц өгсөн байг. Тэгвэл E олонлогийн элемент бурд D олонлогийн цор ганц элемент харгалзах тул E олонлог дээр тодорхойлогдсон, D олонлогоос утгаа авдаг функц тодорхойлж болно.

Тодорхойлолт. D олонлог дээр тодорхойлогдсон ба дүр нь E олонлог байдаг $f : D \rightarrow E$ гэсэн харилцан нэг утгатай функц өгсөн байг. Тэгвэл E олонлог дээр тодорхойлогдсон, дүр нь D олонлог байдаг ба аливаа $x \in D$ -ийн хувьд $f(x)$ бүрийг x -д харгалзуулдаг функцийг f функцийн **урвуу функц** гээд f^{-1} гэж тэмдэглэнэ.

Тайлбар: $f : x \mapsto y$ гэсэн бичлэгийг $y = f(x)$ гэж бичиж болох тул үүнтэй адиллаар $f^{-1} : y \mapsto x$ бичлэгийг $f^{-1}(y) = x$ гэж бичиж болно.

Иймд f функц ба түүний урвуу функц f^{-1} -ийн хувьд дараах хамаарал биелнэ гэдэг нь тодорхойлолтоос мөрдөн гарна.

- Дүгнэлт.**
- Хэрэв $y = f(x)$ бол $x = f^{-1}(y)$ байна. Хэрэв $x = f^{-1}(y)$ бол $y = f(x)$ байна. (Хэрэв $y = f^{-1}(x)$ бол $x = f(y)$ байна. Хэрэв $x = f(y)$ бол $y = f^{-1}(x)$ байна.)
 - f^{-1} функцийн тодорхойлогдох муж нь f функцийн дүр байна. Харин f^{-1} функцийн дүр нь f функцийн тодорхойлогдох муж байна.

Санамж $y = f(x)$ функц харилцан нэг утгатай үед л урвуутай байна.

Жишээ 1. $y = 2x + 1$ ба $y = x^2$ функцууд нь урвуутай эсэхийг шалга.

Бодолт. $y = 2x + 1$ функц нь харилцан нэг утгатай функц тул урвуу нь оршин байна. Харин $y = x^2$ функц нь харилцан нэг утгатай функц биш тул урвуугүй. (Зураг а, б)

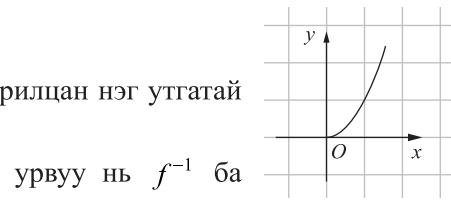
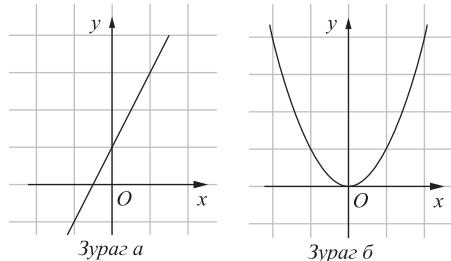
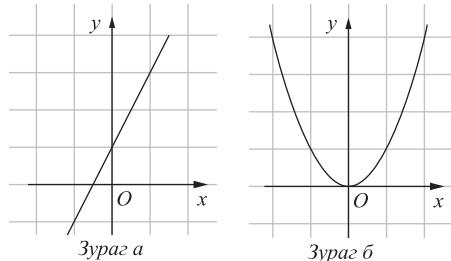
Жишээ 2. D ба E нь сөрөг биш бодит тооны олонлог байг. $f : D \rightarrow E$, $y = x^2$ гэсэн функц урвуутай эсэхийг шалга.

Бодолт. Энэ тохиолдолд $y = x^2$ функц нь харилцан нэг утгатай тул урвуутай. (Зураг в)

Жишээ 3. Хэрэв $f(x) = ax^3 + b$ функцийн урвуу нь $f^{-1}(7) = 2$ бол $8a + b$ илэрхийллийн утгыг ол.

Бодолт. $f^{-1}(7) = 2$ учраас урвуу функцийн тодорхойлолтыг ашиглавал $f(2) = 7$ байна. Нөгөө талаас f функцийн 2 дээрх утга нь $f(2) = a \cdot 2^3 + b = 8a + b$ тул $8a + b = 7$ гэж гарна.

Урвуу функцийн тодорхойлолтоос дараах чанар мөрдөн гарна. Үүнийг баталгаагүйгээр авч үзье.



Урвуу функцийн чанар

1. $(f^{-1})^{-1} = f$ байна.
2. $f^{-1}(f(x)) = x$ ба $f(f^{-1}(x)) = x$ байна.
3. Хэрэв $g(f(x)) = x$ ба $f(g(x)) = x$ бол $g(x) = f^{-1}(x)$ байна. Мөн $g(x) = f^{-1}(x)$ бол $g(f(x)) = x$ ба $f(g(x)) = x$ байна.
4. $(g(f(x)))^{-1} = f^{-1}(g^{-1}(x))$ байна.

Жишээ 4. $g(x) = \frac{1}{2}x - 1$ нь $f(x) = 2x + 2$ функцийн урвуу функц мөн эсэхийг шалгаа.

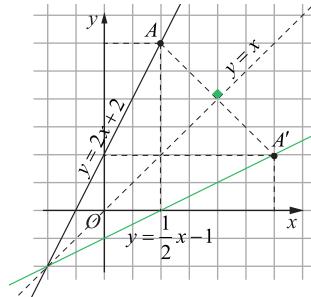
Бодолт. З дугаар чанарыг ашиглай. Θөрөөр хэлбэл $g(f(x)) = x$ ба $f(g(x)) = x$ нөхцөл биелэх эсэхийг шалгана. $g(f(x)) = \frac{1}{2}(2x + 2) - 1 = x$ ба $f(g(x)) = 2\left(\frac{1}{2}x - 1\right) + 2 = x$ тул f функцийн урвуу нь g функц байна.

Функцийн график ба түүний урвуу функцийн графикийн чанар

Жишээ 4-д бид $f(x) = 2x + 2$ функцийн урвуу нь $g(x) = \frac{1}{2}x - 1$ байна гэж харуулсан. Эдгээр функцийн графикийг байгуулж ажиглавал $y = x$ шулууны хувьд тэгш хэмтэй байна.

Ерөнхий тохиолдолд дүгнэлт гаргая.

D олонлог дээр тодорхойлогдсон, дүр нь E олонлог байх $y = f(x)$ функцийн график нь $\{(x, f(x)) | x \in D\}$ цэгийн олонлог байна. Харин f функцийн урвуу $y = f^{-1}(x)$ функцийн график нь $\{(f(x), x) | x \in D\}$ цэгийн олонлог юм. $(x, f(x))$ ба $(f(x), x)$ цэг нь $y = x$ шулууны хувьд тэгш хэмтэй байна. Иймд дараах дүгнэлтийг хийж болно.

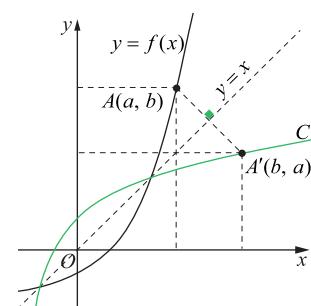


Урвуу функцийн графикийн чанар. $y = f(x)$ ба түүний урвуу $y = f^{-1}(x)$ функцийн график нь $y = x$ шулууны хувьд тэгш хэмтэй байна.

Урвуу функцийг олох

$y = f(x)$ харилцан нэг утгатай функц өгсөн байг. Түүний графикийг $y = x$ шулууны хувьд тэгш хэмтэй хувиргахад C муруй гарсан гэе. Энэ муруй нь $y = f^{-1}(x)$ функцийн график юм.

$y = f(x)$ функцийн график дээр орших цэгийн координатыг $A(a, f(a))$ гэвэл C муруй дээр орших цэгийн координат нь $A'(f(a), a)$ байна. Θөрөөр хэлбэл, A, A' цэгийн координатын хувьд x, y -ийн



(абсцисс ба ординатын) байр солигдож байна.

Иймд $y = f(x)$ тэгшитгэл дэх x, y -ийн үүргийг солих (x -ийг y -ээр, y -ийг x -ээр солих) замаар C муруйн тэгшитгэлийг гарган авч болно.

Жишээ 5. $f(x) = 5x + 1$ функцийн урвууг ол.

Бодолт. Өгсөн функцийн харилцан нэг утгатай тул урвуу нь оршин байна. $f(x) = 5x + 1$ тэгшитгэлийг $y = 5x + 1$ гэж бичээд x, y -ийн үүргийг соливол $x = 5y + 1$ болох ба эндээс y -ийг x -ээр илэрхийлбэл $y = \frac{x-1}{5}$ гэж гарна. Иймд $f^{-1}(x) = \frac{x-1}{5}$ байна.

Урвуу функцийг олох алхам

1. Өгсөн функцийн харилцан нэг утгатай эсэхийг шалгана.

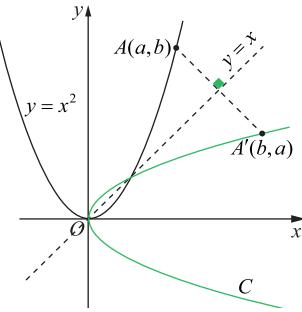
2. $y = f(x)$ тэгшитгэл дэх x, y -ийн үүргийг сольж, $x = f(y)$ тэгшитгэл гарган авна.

3. $x = f(y)$ тэгшитгэлээс y -ийг x -ээр илэрхийлнэ.

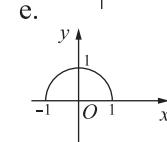
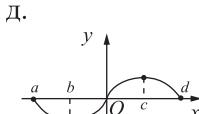
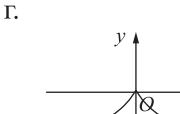
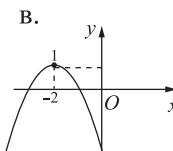
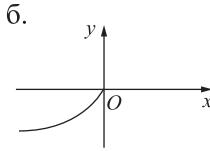
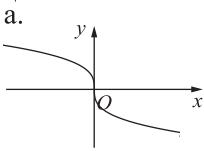
Санамж $y = f(x)$ хэлбэрийн тэгшитгэлээр илэрхийлэгдэх ямар ч муруйг $y = x$ шулууны хувьд тэгш хэмтэйгээр хувирган C муруй гарган авч болно. Гэвч C муруй нь функцийн график байх албагүй.

Жишээ 6. E нь сөрөг биш бодит тооны олонлог байг.

$f : \mathbb{R} \rightarrow E$, $y = x^2$ функцийн графикийг $y = x$ шулууны хувьд тэгш хэмтэйгээр хувирган C муруй гарган авсан гэе. $y = x^2$ тэгшитгэл дэх x, y -ийн үүргийг соливол $x = y^2$ болох ба эндээс y -ийг олбол $y = \pm\sqrt{x}$ гэж гарна (нэг утгатай илэрхийлэгдэхгүй). Өөрөөр хэлбэл $g(x) = \sqrt{x}$ эсвэл $g(x) = -\sqrt{x}$ байна гэсэн үг.



29. Функцийн графикийг зурагт харуулсан байна. Урвуу нь оршин байдаг функцийг ол.



30. Өгсөн функцийн урвуутай эсэхийг шалга.

а. $y = 2x + 2$

б. $y = -\frac{1}{2}x^2 + 1$

в. $y = x^3 - 1$

г. $y = x^{\frac{1}{3}}$

д. $y = \frac{1}{2x^2}$

е. $y = -2x^{-4}$

31. Зурагт дүрсэлсэн f функцийн хувьд дараах зүйлийг ол.

- а. $f(2)$ б. $f^{-1}(c)$ в. $f(f^{-1}(2))$ г. $f^{-1}(f(c))$

32. f, g функцийг дүрсэлж зурагт харуулсан байна. Тэгвэл $(gf)^{-1}(2) - (fg)^{-1}(2)$ -ийг ол.

33. Θгсөн функцийн урвууг нь ол.

а. $y = -\frac{1}{3}x + 2$ б. $y = x^2 - 2 (x \geq -2, y \geq -2)$

34. $f(x) = 2x + 5$, $g(x) = -3x - 1$ функц өгөв. Дараах функцийг ол.

- а. $f^{-1}(x)$ б. $g^{-1}(x)$ в. $(g(f(x)))^{-1}$
г. $(f(g(x)))^{-1}$ д. $g^{-1}(f^{-1}(x))$ е. $f^{-1}(g^{-1}(x))$

35. Хэрэв f функцийн урвуу нь $f^{-1}(x) = 2x - 6$ бол $f(f(4))$ -ийг ол.

36. Хэрэв $f(x) = 7x + 1$, $g(x) = x + 1$ бол $(g(f(x)))^{-1}$ функцийн $x = -1$ цэг дээрх утгыг ол.

37. Хэрэв $f(x) = ax + b$, $f^{-1}(x) = 5x + 2$ бол a, b тоог ол.

38. Хэрэв $f(x) = -x + 2$, $g(x) = 2x + 2$ бол $(g(f(x)))^{-1}$ функцийн $x = 2$ цэг дээрх утгыг ол.

39. Хэрэв $f(3) = 2$, $g^{-1}(4) = 1$ бол $f^{-1}(2) + g(1)$ -ийг ол.

40. Хэрэв $f(x) = 2x - 5$, $g(x) = 3x + 1$ бол $(g(f(x)))^{-1} = f^{-1}(g^{-1}(x))$ байна гэж харуул.

41. Хэрэв $f(x) = x + a$, $g(x) = -2x + b$ функцийн хувьд $f^{-1}(-1) = 2$ ба $g^{-1}(4) = -2$ бол a ба b -ийн нийлбэрийг ол.

42. $y = f(x)$, $y = g(x)$, $y = x$ гэсэн харилцан нэг утгатай гурван функцийн графикийг зурагт харуулсан байна. Тэгвэл $g(f^{-1}(d)) + f^{-1}(g(c))$ -ийн утгыг ол.

43. $f(x)$ функцийн урвууг $g(x)$ гэвэл $f(2g(x) + 4x) = x$ нөхцөл биелдэг бол $g(2)$ -ийг ол.

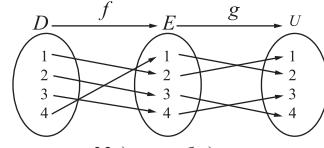
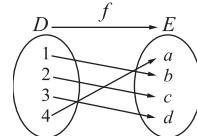
44. $f(x) = x^2 - 4x + 6$ функц өгөв.

а. $x \geq 2$, $y \geq 2$ үед урвууг нь ол.

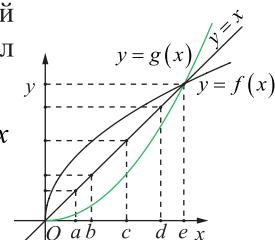
б. Урвуу функцийн график нь f функцийн графиктай 2 өрөнхий цэгтэй юу? Хэрэв тийм бол уг цэгүүдийг олж, тэдгээрийн хоорондох зайл ол.

45. $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + a$, $(x \geq 0, y \geq 0)$ функцийн урвууг $y = g(x)$ гэе. $f(x) = g(x)$ тэгшигтэл бодит шийдтэй байх a -ийн утгыг ол.

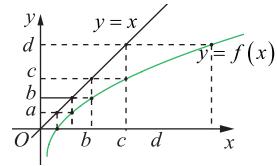
46. $D = \{a, b, c\}$, $E = \{d, e, f\}$ олонлогууд өгөв. $f : D \rightarrow E$ функцийн хувьд урвуу нь олддог функц нийт хэд байх вэ?



32 дугаар бодлогын зураг



- 47.** $y = f(x)$ ба $y = x$ функцийн графикийг зурагт харуулсан байна. Тэгвэл $(f(f(x)))^{-1}$ функцийн $x = a$ цэг дээрх утгыг ол.



3.6. ӨСӨХ БА БУУРАХ ФУНКЦ

Өсөх буурах функцийн тухай төсөөлөхийн тулд дараах гурван жишээгээр авч үзье.

Жишээ 1. $-2 \leq x \leq 2$ завсарт тодорхойлогдсон $y = 2x - 1$ функцийн өгсөн байг.

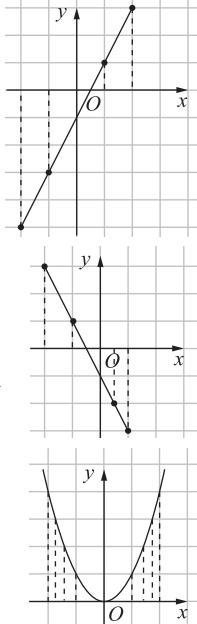
Үг функцийн график нь шулуун бөгөөд наалт нь эерэг тул x -ийн утга өсөхөд y -ийн утга өснө. Мөн $f(-2) = -5$, $f(2) = 3$ гарна. Иймд функцийн дүр нь $\{y | -5 \leq y \leq 3\}$ байна. Аргументын утга өсөхөд функцийн утга мөн өсөж байна. Зургаас харна уу.

Жишээ 2. $-2 \leq x \leq 1$ завсарт тодорхойлогдсон $y = -2x - 1$ функцийн өгсөн байг.

Шулууны наалт нь сөрөг тул x -ийн утга өсөхөд y -ийн утга буурна. Мөн $f(-2) = 3$, $f(1) = -3$ гарна. Иймд функцийн дүр нь $\{y | -3 \leq y \leq 3\}$ байна. Аргументын утга өсөхөд функцийн утга буурч байна. Зургаас харна уу.

Жишээ 3. $y = x^2$ функцийн өгсөн байг.

$x < 0$ үед x -ийн утга өсөхөд функцийн утга буурч, $x > 0$ үед x -ийн утга өсөхөд функцийн утга өсөж байна.



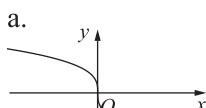
Тодорхойлолт. $y = f(x)$ функцийн тодорхойлогдох мужаас $[a, b]$ завсар авч үзье.

- $[a, b]$ завсарт оршдог бөгөөд $x_1 < x_2$ нөхцөлийг хангах ямар ч x_1, x_2 тооны хувьд
- Хэрэв $f(x_1) < f(x_2)$ нөхцөл биелдэг бол $y = f(x)$ функцийг $[a, b]$ завсар дээр **өсөх функц** гэнэ.
 - Хэрэв $f(x_1) > f(x_2)$ нөхцөл биелдэг бол $y = f(x)$ функцийг $[a, b]$ завсар дээр **буурах функц** гэнэ.

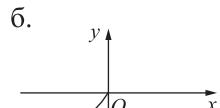
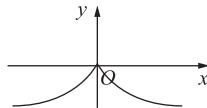
- 48.** Дараах функцийн графикийг нь байгуулж, өсөх буурах завсрыйг ол.

a. $y = 2x^2 - 6x + 3$	b. $y = -\frac{1}{2}x^2 - x + 1$	v. $y = (x+1)^3 - 1$
г. $y = 3x - 6$	д. $y = -\frac{1}{2x^2}$	е. $y = \frac{1}{x+1}$

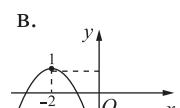
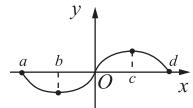
- 49.** Функцийг графикаар өгөв. Эдгээр функцийн өсөх, буурах завсрыйг тодорхойл. Өсөх, буурах завсарт харгалзах дүрийг ол.



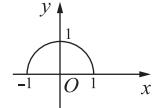
Г.



Д.



е.



50. Хэрэв $y = -2x^3$ ($-3 \leq x \leq -1$) гэсэн буурах функцийн дүр $b \leq y \leq c$ бол b, c тоог ол.

51. Хэрэв $y = ax + b$ ($-4 \leq x \leq 4, -6 \leq y \leq 18$) функц өсдөг бол a, b -г ол.

52. Хэрэв $y = a\sqrt{x}$ ($1 \leq x \leq 9$) буурах функцийн дүр нь $b \leq y \leq c$ ба график дээр нь $(8, -8)$ цэг оршдог бол abc үржвэрийг ол.

53. Хэрэв $y = ax^2 + bx + c$ ($2 \leq x \leq 6, 2 \leq y \leq 42$) функц өсөх ба график дээр нь $(3, 6)$ цэг оршдог бол a, b, c -г ол.

54. Хэрэв $y = ax^2 + bx + c$ ($-1 \leq x \leq 2, -30 \leq y \leq 0$) функцийн график дээр $(0, -6)$ цэг оршдог ба уг функц буурах бол a, b, c -г ол.

55. Хэрэв $y = ax^{\frac{1}{5}}$ ($-1 \leq x \leq 2$) буурах функцийн график дээр $(32, -4)$ цэг оршдог бол уг функцийн дүрийг ол.

56. Хэрэв $y = ax^{-4}$ ($0 < x \leq 2$) өсөх функцийн график дээр $\left(2, -\frac{1}{4}\right)$ цэг оршдог бол уг функцийн дүрийг ол.

3.7. ТЭГШ, СОНДГОЙ ФУНКЦ

Тодорхойлолт. $y = f(x)$ функцийн хувьд тодорхойлогдох мужийн ямар ч х тооны хувьд

- $f(-x) = f(x)$ нөхцөл биелдэг бол $y = f(x)$ функцийг **тэгш функц** гэнэ.
- $f(-x) = -f(x)$ нөхцөл биелдэг бол **сондгой функц** гэнэ.

Дээрх хоёр нөхцөлийн аль нь ч биелдэггүй бол $y = f(x)$ функц нь тэгш ч биш, сондгой ч биш байна.

Жишээ 1. Өгсөн функц бүрийн тэгш, сондгой эсэхийг тогтоо.

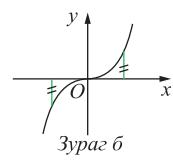
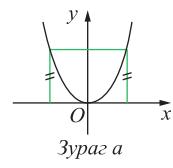
а. $f(x) = x^2$ б. $f(x) = x^3$ в. $f(x) = x^2 + x - 1$

Бодолт. а. Тодорхойлогдох мужийн дурын x -ийн хувьд

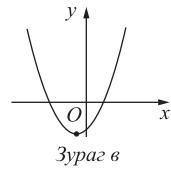
$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x) \text{ тул тэгш функц юм. (Зураг а)}$$

б. Харин $f(x) = x^3$ функцийн хувьд

$$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x) \text{ байна. Иймд энэ нь сондгой функц юм. (Зураг б)}$$



в. $f(x) = x^2 + x - 1$ функцийн хувьд
 $f(-x) = (-x)^2 - x - 1 = x^2 - x - 1 = -(-x^2 + x - 1)$ болно. Эндээс харахад $f(x) \neq f(-x)$ тул $f(x) = x^2 + x - 1$ функц тэгш биш,
 $f(x) \neq -f(-x)$ тул сондгой биш функц байна. (Зураг в)
Дээрх гурван функцийн графикийг ажиглана уу.



Зураг в

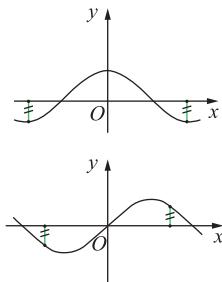
Тэгш ба сондгой функцийн графикийн чанар

$y = f(x)$ тэгш функц өгсөн гээ. Тодорхойлогдох мужийн ямар ч x тооны хувьд $f(-x) = f(x)$ нөхцөл биелэх тул уг функцийн график дээр $(x, f(x)), (-x, f(x))$ цэг оршино. Эдгээр цэг нь Oy тэнхлэгийн хувьд тэгш хэмтэй юм. Иймд тэгш функцийн график нь Oy тэнхлэгийн хувьд тэгш хэмтэй байна.

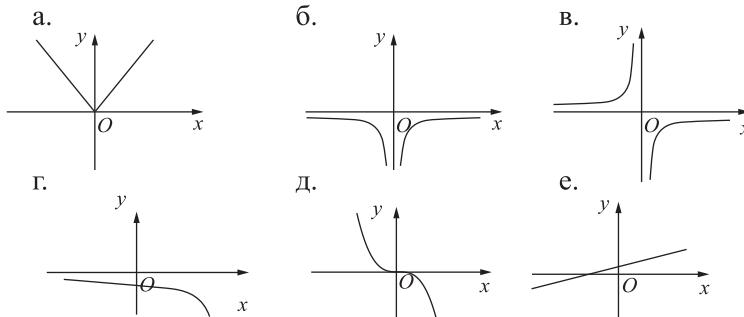
$y = f(x)$ нь сондгой функц байг. Тодорхойлогдох мужийн ямар ч x тооны хувьд $f(-x) = -f(x)$ нөхцөл биелэх тул уг функцийн график дээр $(x, f(x)), (-x, -f(x))$ цэг оршино. Эдгээр цэг нь координатын эхийн хувьд тэгш хэмтэй. Иймээс сондгой функцийн график нь координатын эхийн хувьд тэгш хэмтэй байна.

57. Тэгш сондгой эсэхийг шалга.

- | | | |
|-------------------------|---------------------------------|-----------------------|
| а. $y = -2x^2 + 6x + 3$ | б. $y = \frac{1}{2}x^2 - x - 1$ | в. $y = -(x+1)^3$ |
| г. $y = 3x^2 - 6$ | д. $y = -\frac{1}{2x^2}$ | е. $y = \frac{1}{2x}$ |



58. Функцийн графикаар өгөв. Тэгш, сондгой эсэхийг тогтоо.



59. Хэрэв $y = -5x + b$ нь сондгой функц бол b -г ол.

60. Хэрэв $y = ax + b$ нь сондгой функц бол a, b -г ол.

61. Хэрэв $y = -x^2 + bx + c$ функцийн график дээр $(2, 1)$ цэг орших ба тэгш функц бол b, c -г ол.

62. Хэрэв $y = ax^2 + bx + c$ функцийн график дээр $(1, -2)$ ба $(0, -3)$ цэг орших ба тэгш функц бол a, b, c -г ол.

63. Хэрэв $y = -2x^3 + b$ функц сондгой бол b -г ол.

64. Хэрэв $y = ax^3 + b$ функц сондгой бол a, b -г ол.

БҮЛГИЙН НЭМЭЛТ ДААЛГАВАР

1. $y = x^{-\frac{1}{2}}$ ба $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ функцууд адилтгал тэнцүү эсэхийг шалга.
2. $y = x^{\frac{1}{3}}$ ба $y = x^{\frac{2}{6}}$ функцууд адилтгал тэнцүү байх бүх x -ийн утгыг ол.
3. Дараах функцийн тодорхойлогдох муж ба дүрийг ол. Харилцан нэг утгатай эсэхийг шалга.
 - a. $f : x \mapsto x^2 + 6x + 12$
 - b. $f : x \mapsto x^{\frac{1}{5}}$
 - c. $f : x \mapsto x^{\frac{2}{3}}$
4. $y = g(f(x))$ давхар функцийг ол. Уг давхар функцийн тодорхойлогдох муж ба дүрийг ол.
 - a. $f : x \mapsto \sqrt{x}$, $g : x \mapsto x - 4$
 - b. $f : x \mapsto x + 2$, $g : x \mapsto \sqrt{x}$
 - c. $f : x \mapsto x - 3$, $g : x \mapsto \frac{1}{x}$
 - d. $f : x \mapsto \sqrt{(x-3)^2}$, $g : x \mapsto \sqrt{x}$
 - e. $f : x \mapsto x + 2$, $g : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{-x}}$
5. $f : x \mapsto x + 4$, $g : x \mapsto 3x$, $h : x \mapsto x^2$ гэсэн функцууд өгсөн ба энд $x \in \mathbb{R}$ бол дараах функцуудийг f, g, h функцээр илэрхийл.
 - a. $y = x^2 + 4$
 - b. $y = 3x + 4$
 - c. $y = x^4$
 - d. $y = 9x^2$
 - e. $y = 9x^2 + 24x + 16$
6. Хэрэв $f : x \mapsto ax + b$ функцийн хувьд $f(2) = 19$ ба $f(f(0)) = 55$ бол a, b -г ол.
7. $f : x \mapsto -3x + 1$ ба $g : x \mapsto ax + b$ гэсэн функцууд байг. Хэрэв бүх бодит x -ийн хувьд $f(g(x)) = g(f(x))$ бол a, b -ийн хамаарлыг ол.
8. Дараах функцууд харилцан нэг утгатай эсэхийг тогтоо.
 - a. $f : x \mapsto x^3 + 5$
 - b. $f : x \mapsto \sqrt{x^2 + 1}$
 - c. $f : x \mapsto x(x-3)$
 - d. $f : x \mapsto x^{\frac{1}{6}}$
 - e. $f : x \mapsto x^{\frac{1}{5}} + 1$
 - f. $f : x \mapsto 3x + 2$
9. Хэрэв дараах функцуудийн хувьд утгын муж нь дүртэй давхацдаг бол харилцан нэг утгатай эсэхийг тогтоо.
 - a. $f : x \mapsto x^4$, $x \geq 0$
 - b. $f : x \mapsto x^{\frac{1}{8}}$, $x \geq 0$
 - c. $f : x \mapsto 2x(x-5)$, $0 \leq x \leq 5$
 - d. $f : x \mapsto x^2 + 6x - 4$, $x > 0$
 - e. $f : x \mapsto x^2 + 6x - 4$, $x < 0$
10. Дараах функц урвуутай эсэхийг шалга. Хэрэв урвуутай бол түүнийг ол.
 - a. $f : x \mapsto 5x - 1$
 - b. $f : x \mapsto \frac{1}{3}x + 5$
 - c. $f : x \mapsto x^3 + 1$
 - d. $f : x \mapsto \frac{3x - 7}{4}$
11. Хэрэв дараах функцуудийн хувьд утгын муж нь дүртэй давхацдаг бол урвуутай эсэхийг шалга. Хэрэв урвуутай бол түүнийг ол.
 - a. $f : x \mapsto \sqrt{x} - 1$, $x \geq 0$
 - b. $f : x \mapsto (x-3)^2 + 2$, $x \geq 3$
 - c. $f : x \mapsto \frac{2}{x-3}$, $x \neq 3$
 - d. $f : x \mapsto \frac{1}{x} + 4$, $x \neq 0$
12. Хэрэв $f : x \mapsto ax + b$ (a, b бодит тоо) функцийн урвуу функц нь $f^{-1} : x \mapsto 3x + 7$ бол a, b -г ол.

IV БҮЛЭГ. ДАРААЛАЛ, ПРОГРЕСС

Энэ бүлэг сэдвийг судалснаар дараах мэдлэг, чадварыг эзэмшинэ.

- Тоон дарааллыг өгөх аргуудыг мэдэх
- Арифметик ба геометр прогрессын n дүгээр гишүүнийг олох томьёог гарах, хэрэглэх
- Арифметик ба геометр прогрессын эхний n гишүүний нийлбэрийг олох томьёог гарах, хэрэглэх
- Арифметик ба геометр прогрессын дараалсан гурван гишүүний чанарыг мэдэх, хэрэглэх

4.1. ТООН ДАРААЛАЛ

Тодорхойлолт. Натурал тоогоор дугаарласан $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ бодит тоонуудыг тоон дараалал гэх ба товчоор $\{u_n\}$ гэж тэмдэглэнэ. Тоон дарааллыг үүсгэж байгаа тоонуудыг **дарааллын гишүүд** гэнэ.

Төгсгөлөг тооны гишүүдтэй дарааллыг **төгсгөлөг дараалал** гэнэ. Төгсгөлгүй тооны гишүүдтэй дарааллыг **төгсгөлгүй дараалал** гэнэ. $n \geq 2$ натурал тоо бүрийн хувьд $u_{n-1} < u_n$ байвал $\{u_n\}$ дарааллыг өсөх дараалал гэнэ. $n \geq 2$ натурал тоо бүрийн хувьд $u_{n-1} > u_n$ байвал $\{u_n\}$ дарааллыг буурах дараалал гэнэ.

Жишээ 1. 1, 3, 6, 10, ... дарааллын

а. 5 ба 6 дугаар гишүүнийг ол. б. n дүгээр гишүүнийг ол.

Бодолт. а. Эхний 4 гишүүнээс 1, 3, 6, 10, ... ийм зүй тогтлыг олж мэдсэнээр $u_5 = u_4 + 5 = 15$ ба $u_6 = u_5 + 6 = 21$ болно.

б. Дарааллын гишүүдийг дараах байдлаар бичиж, n дүгээр гишүүнийг ольё.

$$u_1 = 1$$

$$u_2 = 1 + 2$$

$$\text{буую } u_2 = 3$$

$$u_3 = \underbrace{1+2}_{u_2} + 3$$

$$\text{буую } u_3 = 6$$

$$u_4 = \underbrace{1+2+3}_{u_3} + 4$$

$$\text{буую } u_4 = 10$$

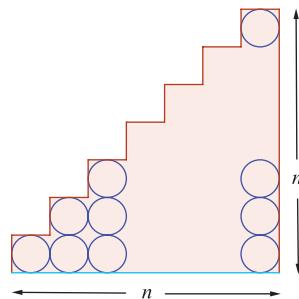
$$u_5 = \underbrace{1+2+3+4}_{u_4} + 5$$

$$\text{буую } u_5 = 15$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots$$

$$u_n = \underbrace{1+2+\dots+n-1}_{u_{n-1}} + n$$

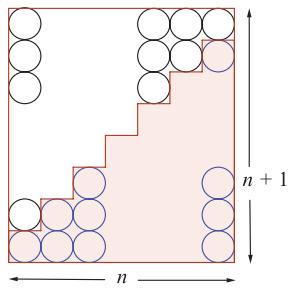
$$\text{буую } u_n = ?$$



Иймд дарааллын n дүгээр гишүүн нь 1-ээс n хүртэлх тооны нийлбэртэй тэнцүү. $1+2+\dots+n$ нийлбэрийг зурагт үзүүлсэн дүрслэлийг ашиглан ольё. Зурагт нэгдүгээр баганад 1 бөмбөг, хоёрдугаар баганад 2 бөмбөг,

гэх мэт n дүгээр баганад n бөмбөг байна. Нийт бөмбөгний тоо нь $1 + 2 + \dots + n$

нийлбэртэй тэнцүү байна. Зурагт үзүүлсэнтэй адил нэгдүгээр баганад n бөмбөг нэмж, хоёрдугаар баганад $(n-1)$ бөмбөг нэмж, гэх мэт n дүгээр баганад 1 бөмбөг нэмж байрлуулахад нийт $n(n+1)$ бөмбөг болно.



Эндээс анхны бөмбөгний тоо нь $\frac{n(n+1)}{2}$ болох ба $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ болно. Иймд дарааллын n дүгээр гишүүн $u_n = \frac{n(n+1)}{2}$ байна.

Тоон дарааллыг өгөх дараах гурван арга байна.

- Тоочих аргаар
- Ерөнхий гишүүний томьёогоор
- Рекуррент томьёогоор

Тодорхойлолт. Тоон дарааллыг эхний хэдэн эсвэл бүх гишүүнийг зааж бичих замаар өгөх аргыг **тоочих арга** гэнэ.

Тодорхойлолт. Дарааллын гишүүн бүрийг түүний дугаар n -ээр илэрхийлэх томьёог дарааллын n дүгээр гишүүний томьёо эсвэл **ерөнхий гишүүний томьёо** гэдэг.

Өмнөх жишээнд авч үзсэн $\{u_n\}$ дарааллын хувьд ерөнхий гишүүний томьёо нь $u_n = \frac{n(n+1)}{2}$ байна. Тэгвэл энэ томьёог ашиглан 5 ба 100 дугаар гишүүнийг

олохын тулд $u_n = \frac{n(n+1)}{2}$ томьёоны n -ийн оронд 5-ыг орлуулахад $u_5 = 15$ гарна.

Үүнтэй адилаар $u_n = \frac{n(n+1)}{2}$ томьёоны n -ийн оронд 100-г орлуулахад

$u_{100} = 5050$ гарна. Иймд дарааллын ерөнхий гишүүний томьёогоор дурын дугаартай гишүүнийг олж болно.

Тодорхойлолт. Ямар нэг дугаараасаа эхлэн дарааллын гишүүн бүр нь өмнөх гишүүдээрээ илэрхийлэгдэх томьёог **рекуррент томьёо** гэнэ.

Өмнөх жишээнд авч үзсэн $\{u_n\}$ дарааллын хувьд $n \geq 2$ үед $u_n = u_{n-1} + n$ гэсэн рекуррент томьёо билэнэ.

1. Ерөнхий гишүүний томьёогоор өгсөн дарааллын эхний 5 гишүүнийг ол.

a) $a_n = 6n + 3$ б) $x_n = n^2 - 3n$ в) $u_n = \frac{n-2}{n^2}$ г) $b_n = (-1)^n \cdot n$

2. Рекуррент томьёогоор өгсөн дарааллын эхний 4 гишүүнийг бичиж, ерөнхий гишүүний томьёог гарга.

a) $a_1 = 5$, $a_{n+1} = \frac{2}{5}a_n + 3$ б) $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 3a_n$ в) $x_1 = 3$, $x_{n+1} = -x_n$

3. $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$, $u_1 = 1$, $u_2 = 1$ рекуррент томьёогоор өгсөн дарааллын 6 дугаар гишүүнийг ол. Энэ тоон дарааллыг Фибоначийн дараалал гэж нэрлэдэг.

a_1, a_2, a_3, \dots дарааллын эхний n гишүүний нийлбэрийг S_n -ээр тэмдэглэдэг.

Жишээ нь: $S_3 = a_1 + a_2 + a_3$, $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$. Заримдаа

$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$ нийлбэрийг товчоор $\sum_{k=1}^n a_k$ гэж бичдэг. Үүнийг ашиглавал

$$S_3 = \sum_{k=1}^3 a_k, S_n = \sum_{k=1}^n a_k \text{ болно.}$$

4.2. АРИФМЕТИК ПРОГРЕСС

Тодорхойлолт. 2 дугаар гишүүнээс эхлэн гишүүн бүр нь өмнөх гишүүн дээр тогтмол тоог нэмэхэд гардаг тоон дарааллыг **арифметик прогресс** гэнэ. Энэ тогтмол тоог арифметик прогрессын **ялгавар** гэж нэрлэнэ. Өөрөөр хэлбэл $n \geq 2$ натурал тоо бүрийн хувьд $a_n = a_{n-1} + d$ байх $\{a_n\}$ дарааллыг d ялгавартай арифметик прогресс гэнэ. $a_n = a_{n-1} + d$ томьёог арифметик прогрессын рекуррент томьёо гэнэ.

4. Тоон дараалал арифметик прогресс мөн эсэхийг шалга, мөн бол ялгаврыг ол.
 а. $10, 6, 2, -2, -6, \dots$ б. $-5, 8, 21, 34, 47, \dots$ в. $1, 2, 4, 8, 16, \dots$
5. Ерөнхий гишүүний томьёогоор өгсөн тоон дараалал арифметик прогресс мөн эсэхийг шалга, мөн бол ялгаврыг ол.
 а. $a_n = 9n - 2$ б. $a_n = \frac{n+3}{5n}$ в. $a_n = 9n - (-1)^n$ г. $a_n = 13 - 5n$

Чанар 1. $\{a_n\}$ арифметик прогрессын ерөнхий гишүүний томьёо нь $a_n = a_1 + (n-1)d$ байна. Энд a_1 нь эхний гишүүн, d нь ялгавар.

$$a_1 = a$$

$$a_2 = a_1 + d$$

$$a_3 = a_2 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + 2d$$

$$a_4 = a_3 + d = (a_1 + 2d) + d = a_1 + 3d$$

$a_5 = a_4 + d = (a_1 + 3d) + d = a_1 + 4d$ гэх мэтээр ялгаврын өмнөх коэффициент нь гишүүний дугаараас 1-ээр бага байгааг ажиглаж болно. Эндээс $a_n = a_1 + (n-1)d$ гэж дүгнэж болно.

6. Хэрэв арифметик прогрессын ялгавар нь d бол хүснэгтийг дэвтэртээ нөх.

a.	Гишүүн	a_2	a_5	a_{99}	a_{k-2}	a_{k-1}	a_k	a_{2k}
	a_1 ба d -ээр илэрхийлэх		$a_1 + 4d$					
b.	Гишүүн	a_3	a_5	a_{99}	a_{k-2}	a_{k-1}	a_k	a_{2k}
	a_6 ба d -ээр илэрхийлэх		$a_6 - d$					

7. Арифметик прогрессын ерөнхий гишүүний томьёог гарга.
 - а. $a_1 = 2, a_{10} = 92$
 - б. $a_9 = -101, a_{20} = 75$
 - в. $a_{17} = 9, a_{100} = 1005$
 - г. $a_1 = 297, a_{100} = 0$
 - д. $a_5 = 28, a_{27} = 61$
 - е. $a_{15} = 5, a_{93} = 17$
8. Хэрэв арифметик прогрессын 8-р гишүүн 12 ба 17-р гишүүн 15 бол
а. d б. a_1 в. a_{38} г. a_n д. a_{2n} -ийг тус тус ол.
9. Арифметик прогрессын ялгаврыг өгсөн хоёр гишүүнээр илэрхийл.
а. a_1 ба a_{23} б. a_{15} ба a_{21} в. a_{17} ба a_{35} г. a_{15} ба a_n д. a_{n+2} ба a_{2n}
10. Арифметик прогрессын ерөнхий гишүүний томьёог гарга.
 - а. $7, -13, -33, -53, -73, \dots$
 - б. $1, \frac{5}{2}, 4, \frac{11}{2}, 7, \dots$
 - в. $-9, -2, 5, 12, 19, \dots$

Чанар 2. $\{a_n\}$ арифметик прогресс ба k нь натурал тоо бол a_k, a_{k+1}, a_{k+2} дараалсан гурван гишүүний хувьд

$$a_{k+1} = \frac{a_k + a_{k+2}}{2}$$

чанар биелнэ. Өөрөөр хэлбэл аль ч дараалсан гурван гишүүний захын хоёр гишүүний нийлбэрийн хагас нь дундах гишүүнтэй тэнцүү.

Баталгаа. Арифметик прогрессын тодорхойлолтоор $a_{k+2} = a_{k+1} + d, a_k = a_{k+1} - d$ болно. Тэгвэл $a_k + a_{k+2} = a_{k+1} - d + a_{k+1} + d = 2a_{k+1}$ байна. Иймд $\frac{a_k + a_{k+2}}{2} = a_{k+1}$ гэж гарна.

11. Хэрэв a, b, c бодит тооны хувьд $\frac{a+c}{2} = b$ биелэх бол a, b, c тоонууд арифметик прогресс үүсгэхийг харуул.
12. Дараах гурван тоо арифметик прогрессын дараалсан гурван гишүүн байх x -ийн утгыг ол.
 - а. $2x + 9, 5x, 15$
 - б. $11x + 9, 2, 5$
 - в. $x^2 + 9, 22, x + 5$
 - г. $x^2 - 9, x - 1, x - 5$
13. Хэрэв арифметик прогрессын $a_4 + a_8 = 7$ бол a_6 -г ол
14. Хэрэв арифметик прогрессын $a_7 + a_8 = -3$ бол $a_3 + a_{12}$ нийлбэрийг ол.
15. $\{a_n\}$ нь арифметик прогресс ба p, q, r, s нь натурал тоонууд байг. Хэрэв $p + q = r + s$ бол $a_p + a_q = a_r + a_s$ гэж харуул.

Тодорхойлолт. Ялгавар нь эерэг байх арифметик прогрессыг өсөх арифметик прогресс гэнэ. Ялгавар нь сөрөг байх арифметик прогрессыг буурах арифметик прогресс гэнэ.

Жишээ 1. Өсөх арифметик прогрессын эхний гурван гишүүний нийлбэр 3, эхний гишүүний квадрат нь гуравдугаар гишүүнтэйгээ тэнцүү бол түүний 100-р гишүүнийг ол.

Бодолт. Бодлогын нөхцөлөөс $\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 3 \\ a_1^2 = a_3 \end{cases}$ тэгшитгэлийн систем үүснэ. a_2, a_3 гишүүдийг a_1 ба d -ээр илэрхийлбэл $\begin{cases} a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) = 3 \\ a_1^2 = a_1 + 2d \end{cases}$ болох ба

хялбарчилбал $\begin{cases} a_1 + d = 1 \\ a_1^2 = a_1 + 2d \end{cases}$ болно. Энэ систем нь $(a_1, d) = (-2, 3)$ ба

$(a_1, d) = (1, 0)$ гэсэн хоёр шийдтэй. Бодлогын нөхцөл ёсоор $d > 0$ байна. Иймд $a_1 = -2$, $d = 3$ болох ба $a_{100} = a_1 + 99d = -2 + 297 = 295$.

16. Дараах нөхцөлийг хангах арифметик прогрессын ерөнхий гишүүний томъёог ол.

$$\text{а. } \begin{cases} a_2 + a_8 = 10 \\ a_3 + a_{14} = 31 \end{cases} \quad \text{б. } \begin{cases} a_2 + a_5 + a_8 = 18 \\ a_4 + a_2 = -2 \end{cases} \quad \text{в. } \begin{cases} a_5 - a_3 = -4 \\ a_2 a_4 = -3 \end{cases} \quad \text{г. } \begin{cases} a_2 + a_4 + a_6 = 36 \\ a_2 a_3 = 54 \end{cases}$$

17. Буурах арифметик прогрессын эхний гурван гишүүний нийлбэр 15 ба квадратуудын нийлбэр нь 93 бол энэ гурван гишүүнийг ол.

Жишиг 2. $\{a_n\}$ нь арифметик прогресс байг. Нэг нэгж өргөн-тэй a_1 нэгж урттай, нэг нэгж өргөнтэй a_2 нэгж урттай гэх мэт нэг нэгж өргөнтэй a_7 нэгж урттай 7 ширхэг тэгш өнцөгтийг нийлүүлж зурагт үзүүлсэн дүрсийг үүсгэв.

Уг дүрсийн талбай $a_1 + a_2 + \dots + a_7 = \frac{a_1 + a_7}{2} \cdot 7$ болохыг

харуул.

Бодолт. Эхний тэгш өнцөгтийн талбай нь

$$a_1 \text{ нэгж} \cdot 1 \text{ нэгж} = a_1 \text{ н.кв},$$

Хоёр дахь тэгш өнцөгтийн талбай нь

$$a_2 \text{ нэгж} \cdot 1 \text{ нэгж} = a_2 \text{ н.кв}$$

гэх мэт долоо дахь тэгш өнцөгтийн талбай нь a_7 н.кв байна.

Иймд уг дүрсийн талбай нь $(a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_7)$ н.кв

байна. Одоо уг дүрсийн талбайг $\frac{a_1 + a_7}{2} \cdot 7$ гэдгийг харуу-

лахын тулд үүнтэй ижилхэн дүрсийг зурагт үзүүлсэн шиг

нийлүүлэхэд үүсэх тэгш өнцөгтийн урт нь $(a_1 + a_7)$ нэгж,

өргөн нь 7 нэгж болно. Иймд тэгш өнцөгтийн талбай олох томъёогоор

$$S = (a_1 + a_7) \cdot 7 \text{ н.кв} \text{ болох ба анхны дүрсийн талбай } \frac{S}{2} = \frac{(a_1 + a_7) \cdot 7}{2} \text{ н.кв болно.}$$

$$\text{Иймд } (a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_7) \text{ н.кв} = \frac{(a_1 + a_7)}{2} \cdot 7 \text{ н.кв байна.}$$

Одоо $\{a_n\}$ арифметик прогрессын эхний n гишүүний нийлбэрийг хэрхэн олж болохыг нь үзье.

Эхний n гишүүний нийлбэрийг дараах хоёр хэлбэрт бичье

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n$$

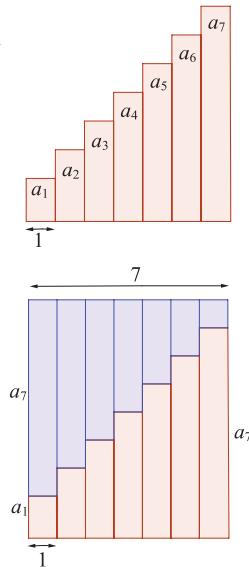
$$S_n = a_n + a_{n-1} + \dots + a_2 + a_1$$

Эдгээрийг нэмэхэд

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \dots + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1)$$

боловх ба хаалт бүр дэх нийлбэр $a_1 + a_n$ гарах учир $2S_n = (a_1 + a_n) \cdot n$ буюу

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n \text{ болно.}$$



Арифметик прогрессын эхний n гишүүний нийлбэрийг олох томъёо.

$\{a_n\}$ арифметик прогрессын эхний n гишүүний нийлбэр $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$ байна.

$a_n = a_1 + (n-1)d$ болохыг тооцвол $S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n$ байна.

18. Хэрэв арифметик прогрессын $S_{100} = -14800$ бол $a_5 + a_{96}$ нийлбэрийг ол.
19. Хэрэв 13 гишүүнтэй арифметик прогрессын эхний гишүүн 12 ба сүүлийн гишүүн 36 бол
 - а. 2 ба 3 дугаар гишүүнийг ол
 - б. Бүх гишүүний нийлбэрийг ол
20. а. Ерөнхий гишүүний томъёо $a_n = 5n - 2$ байх арифметик прогрессын эхний 25 гишүүний нийлбэрийг ол.
 б. Ерөнхий гишүүний томъёо $a_n = 2.5n - 6.5$ байх арифметик прогрессын 5-р гишүүнээс 23-р гишүүн хүртэлх гишүүдийн нийлбэрийг ол.
 в. Ерөнхий гишүүний томъёо $a_n = 2 - 3n$ байх арифметик прогрессын 17-р гишүүнээс 32-р гишүүн хүртэлх гишүүдийн нийлбэрийг ол.
 г. Ерөнхий гишүүний томъёо $a_n = 5 - 13n$ байх арифметик прогрессын эхний 57 гишүүний нийлбэрийг ол.

21. Нийлбэрийг ол.

$$\begin{array}{lll} \text{а. } 2+5+8+\dots+275 & \text{б. } 4+23+\dots+1296 & \text{в. } 13+11+9+\dots+(-135) \\ \text{г. } 16+16.4+16.8+\dots+38 & \text{д. } 3+7+\dots+147 & \text{е. } 7+19+\dots+247 \end{array}$$

- Жишээ 3. Арифметик прогрессын $a_1 = 1$ ба $d = 3$ бол эхний 30 гишүүний нийлбэрийг \sum тэмдэг ашиглан бич.

Бодолт. Ерөнхий гишүүний томъёо нь $a_n = a_1 + (n-1)d = 3n - 2$ болно.

$$S_{30} = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{30} = (3 \cdot 1 - 2) + (3 \cdot 2 - 2) + \dots + (3 \cdot 30 - 2) = \sum_{k=1}^{30} (3k - 2)$$

гэж илэрхийлэгдэнэ.

22. а. Хэрэв арифметик прогрессын $a_3 = 5$ ба $a_{44} = -77$ бол эхний 5 гишүүний нийлбэрийг \sum тэмдэг ашиглан бич.
 б. Хэрэв арифметик прогрессын $a_3 = 9$ ба $a_8 = 24$ бол 20-р гишүүнээс 42-р гишүүн хүртэлх гишүүдийн нийлбэрийг \sum тэмдэг ашиглан бич.
 в. Хэрэв арифметик прогрессын $a_1 = 10$ ба $a_{20} = 466$ бол эхний n гишүүний нийлбэрийг \sum тэмдэг ашиглан бич.

- Жишээ 4. $\sum_{k=1}^{23} (5k - 4)$ нийлбэрийг ол.

Бодолт. I арга: Нийлбэрийн тэмдгийн ард байгаа $(5k - 4)$ илэрхийллийг нийлбэрийн гишүүний срөнхий томъёо гэнэ.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{23} (5k - 4) &= (5 \cdot 1 - 4) + (5 \cdot 2 - 4) + (5 \cdot 3 - 4) + \dots + (5 \cdot 23 - 4) = 5(1 + 2 + \dots + 23) - \\ &- 4 \cdot 23 = 5 \cdot \frac{23(23+1)}{2} - 92 = 1288. \end{aligned}$$

$$\text{II apra: } \sum_{k=1}^{23} (5k - 4) = (5 \cdot 1 - 4) + (5 \cdot 2 - 4) + (5 \cdot 3 - 4) + \dots + (5 \cdot 23 - 4) = 1 + 6 +$$

$+11 + \dots + 111$ болох бөгөөд 5 ялгавартай арифметик прогрессын эхний 23

гишүүний нийлбэр болно. Иймд $\sum_{k=1}^{23} (5k - 4) = \frac{a_1 + a_{23}}{2} \cdot 23 = \frac{1+111}{2} \cdot 23 = 1288$.

23. Хэрэв арифметик прогрессын ерөнхий гишүүний томьёо нь $u_n = 4n + 7$ бол
а. Ялгаврыг ол. б. Эхний 27 гишүүний нийлбэрийг ол.

- ## 24. Нийлбэрийг ол.

$$\text{a. } 4 + 10 + 16 + \dots + (6n + 4)$$

$$6. -4 + 2 + 8 + \dots + (6n - 10)$$

$$\text{B. } 15.6 + 15.2 + 14.8 + \dots + (16 - 0.4n)$$

$$\Gamma. \sum_{i=1}^n (9n-2)$$

$$\text{д. } \sum_{k=1}^{16} \frac{2n-1}{5}$$

e. $\sum_{r=1}^k \frac{15-4r}{15}$

- 25.** а. 7-д хуваагддаг бүх 2 оронтой тооны нийлбэрийг ол.

- б. 7-д хуваахад 1 үлдэгдэл гардаг бүх 2 оронтой тооны нийлбэрийг ол.

26. Илэрхийллийг хялбарчил а. $\frac{x^3 \cdot x^8 \cdot x^{13} \cdot x^{18} \cdots x^{98}}{x \cdot x^{11} \cdot x^{21} \cdot x^{31} \cdots x^{151}}$ б. $\frac{x \cdot x^2 \cdot x^3 \cdots x^{n-1} \cdot x^n}{x \cdot x^3 \cdot x^5 \cdots x^{2n-3} \cdot x^{2n-1}}$

27. Хэрэв арифметик прогрессын эхний n гишүүний нийлбэрийг өгсөн бол n дүгээр гишүүнийг ол.

$$\text{a. } S_n = \frac{n^2}{4} - n$$

$$\delta_S = 2n^2 + 3n$$

$$\text{B. } S_n = \frac{3n^2 + n}{2}$$

$$\Gamma(S) = 6n^2 + n$$

- 28.** $a_1 = 4.8$, $d = 0.4$ байх арифметик прогрессын эхний хэчнээн дараалсан гишүүдийн нийлбэр 172 гарах вэ?

- 29.** Бөмбөг өндөрөс унажээ. Бөмбөг эхний ойлтоороо газраас 300 м өндөрт хөөрсөн ба дараагийн ойлт бүрдээ өмнөхөөсөө 5 м-ээр бага өндөрт хөөрч байсан бол 30 дахь удаагийн ойлтоор газраас хэдэн метр өндөрт хөөрөх вэ?

30. 21 м урттай утсыг арифметик прогресс үүсгэх урттай хэсгүүдэд хайчилж хуваав.

- а. Хэрэв хуваасан хэсгүүдийн хамгийн урт нь 2.8м ба хамгийн богино нь 20 см бол хэдэн хэсэгт хуваасан бэ?

- б. Хэрэв нийт 21 хэсэгт хуваасан ба хоёр дахь богино хэсгийн урт 55 см бол хамгийн богино хэсгийн уртыг ол.

31. Арифметик прогрессын ялгавар тэг биш бөгөөд эхний $3n$ гишүүний нийлбэр дараагийн n гишүүнийхээ нийлбэртэй тэнцүү. Тэгвэл эхний $2n$ гишүүний нийлбэрийг дараагийн $2n$ гишүүний нийлбэрт харьцуулсан харьцааг ол.

32. a, b, c нь арифметик прогресс үүсгэх тоонууд байг. Хэрэв $a^2, b^2, -c^2$ тоонууд нь арифметик прогресс үүсгэдэг бол $a:b:c$ харьцааг ол.

33. Гурвалжны талууд d ялгавартай арифметик прогресс үүсгэнэ. Хэрэв гурвалжинд багтсан тойргийн радиус d бол гурвалжны талбайг ол. Энд d эерэг тоо

4.3. ГЕОМЕТР ПРОГРЕСС

Тодорхойлолт. 2 дугаар гишүүнээс эхлэн гишүүн бүр нь өмнөх гишүүнийг тэг болон нэгээс ялгаатай тогтмол тоогоор үржүүлэхэд гардаг тоон дарааллыг **геометр прогресс** гэнэ. Энэ тогтмол тоог геометр прогрессын **хуваарь** гэж нэрлэнэ. Өөрөөр хэлбэл $n \geq 2$ натурал тоо бүрийн хувьд $b_n = b_{n-1} \cdot q$ байх b_1, b_2, b_3, \dots дарааллыг q хуваартай геометр прогресс гэнэ. $b_n = b_{n-1} \cdot q$ томьёог геометр прогрессын рекуррент томьёо гэнэ.

34. Тоон дараалал геометр прогресс мөн эсэхийг шалга, мөн бол хуваарийг ол.
 а. 81, 27, 9, ... б. 2, -6, 18, ... в. 10, 5, 2.5, ... г. 4, 1, -2, -5, ...
 35. Ерөнхий гишүүний томьёогоор өгсөн тоон дараалал геометр прогресс мөн эсэхийг шалга, мөн бол хуваарийг ол.

а. $b_n = 3^{3-n}$ б. $b_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$ в. $b_n = 9n - 2^n$ г. $b_n = 2^{n+3} - 2^n$

Чанар 1. $\{b_n\}$ геометрийн прогрессын ерөнхий гишүүнийг

$$b_n = b_1 q^{n-1}$$

томьёогоор олно. Энд b_1 нь нэгдүгээр гишүүн, q нь хуваарь.

$$b_1 = b_1,$$

$$b_2 = b_1 q$$

$$b_3 = b_2 q = (b_1 q) q = b_1 q^2$$

$b_4 = b_3 q = (b_1 q^2) q = b_1 q^3$ гэх мэтээр хуваарийн зэрэг нь гишүүний дугаараас 1-ээр бага байгааг ажиглаж болно. Эндээс $b_n = b_1 q^{n-1}$ гэж дүгнэж болно.

36. Хэрэв геометр прогрессын хуваарь нь q бол хүснэгтийг дэвтэртээ нөх.

a.	Гишүүн	b_2	b_7	b_{20}	b_{98}	b_{m-1}	b_m	b_{2m}
	b_1 ба q -ээр илэрхийлэх			$b_1 q^{19}$				

б.	Гишүүн	b_2	b_7	b_{20}	b_{98}	b_{k-1}	b_m	b_{2m}
	b_{13} ба q -ээр илэрхийлэх		$\frac{b_{13}}{q^6}$					

37. Геометр прогрессын ерөнхий гишүүний томьёог гарга.

а. $b_1 = 2, b_2 = 10$, б. $b_1 = -2, b_2 = 6$, в. $b_1 = 3, b_2 = 8$

38. Геометр прогрессын ерөнхий гишүүний томьёог гарга.

а. $b_1 = 32, b_5 = 162$, б. $b_5 = \frac{2}{3}, b_{12} = -\frac{2}{6561}$, в. $b_9 = -24, b_{12} = -3$

39. Хэрэв геометр прогрессын 8-р гишүүн 12 ба 10-р гишүүн 27 бол

а. q б. b_1 в. b_{38} г. b_n д. b_{2n} -ийг тус тус ол.

40. Геометр прогрессын хуваарийг өгсөн хоёр гишүүнээр илэрхийл.

а. b_1 ба b_2 б. b_{13} ба b_{20} в. b_{17} ба b_{29} г. b_{n+2} ба b_{2n}

41. Геометр прогрессын ерөнхий гишүүний томьёог гарга.

$$\text{а. } 2, 14, 98, 686, \dots \quad \text{б. } 3, 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \dots \quad \text{в. } 7, \frac{14}{5}, \frac{28}{25}, \frac{56}{125}, \dots$$

Чанар 2. $\{b_n\}$ геометр прогресс ба k нь дурын натурал тоо бол b_k, b_{k+1}, b_{k+2} дараалсан гурван гишүүний хувьд

$$(b_{k+1})^2 = b_k b_{k+2}$$

чанар биелнэ. Өөрөөр хэлбэл аль ч дараалсан гурван гишүүний захын хоёр гишүүний үржвэр нь дундах гишүүний квадраттай тэнцүү.

Баталгаа. $b_{k+1} = b_k q$ ба $b_{k+2} = b_{k+1} q$ гэдгээс $q = \frac{b_{k+1}}{b_k}$ ба $q = \frac{b_{k+2}}{b_{k+1}}$ болно. Эндээс $\frac{b_{k+1}}{b_k} = \frac{b_{k+2}}{b_{k+1}}$ гэж гарна. Иймд $(b_{k+1})^2 = b_k b_{k+2}$ болно.

42. a, b нь өгсөн тоонууд бол x -ийн ямар утгад a, x, b тоонууд геометр прогрессын дараалсан гурван гишүүн болох вэ?

43. $\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2}x, 8$ тоо геометр прогрессын дараалсан гишүүд бол x -ийн утга ба прогрессын хуваарийг ол.

44. Хэрэв геометр прогрессын $b_2 b_{16} = 9$ бол 9 дүгээр гишүүнийг ол.

45. Хэрэв геометр прогрессын $b_4 b_7 = 2^{11} \cdot 3^9$ бол $b_2 b_9$ үржвэрийг ол.

46. $\{b_n\}$ нь геометр прогресс ба k, l, m, n нь натурал тоо байг. Хэрэв $k + l = m + n$ бол $b_k b_l = b_m b_n$ болохыг харуул.

Геометр прогрессыг b_1 ба q -ээс хамааруулж дараах байдлаар ангиж тодорхойлдог.

Тодорхойлолт. Хэрэв $b_1 > 0, q > 1$ эсвэл $b_1 < 0, 0 < q < 1$ бол өсөх геометр прогресс, хэрэв $b_1 > 0, 0 < q < 1$ эсвэл $b_1 < 0, q > 1$ бол буурах геометр прогресс, хэрэв $q < 0$ бол өсөх ч биш, буурах ч биш геометр прогресс гэдэг.

Жишээ 1. Буурах геометр прогрессын $b_2 = -3$ болно. Хэрэв $b_1 + 1, b_2 - 1, b_3 + 1$ тоонууд арифметик прогресс үүсгэх бол геометр прогрессын

а. Ерөнхий гишүүний томьёог гарга.

б. Эхний 5 гишүүний нийлбэрийг \sum тэмдэг ашиглан илэрхийлж бич.

Бодолт. а. Бодлогын нөхцөлөөс $b_2 - 1 = \frac{b_1 + 1 + b_3 + 1}{2}$ буюу $2b_2 - 2 = b_1 + b_3 + 2$ тэгшитгэл үүснэ. Энэ тэгшитгэлийг b_2 ба q -ээр илэрхийлбэл $2b_2 - 4 = \frac{b_2}{q} + b_2 q$ болох ба $b_2 = -3$ гэдгийг орлуулбал $10 = \frac{3}{q} + 3q$ болно. Энэ тэгшитгэлийг бодоход $q = \frac{1}{3}$ ба $q = 3$ гэсэн шийдтэй. $q = \frac{1}{3}$ үед $b_1 = -9$ ба $q = 3$ үед $b_1 = -1$ гэж гарна. Бодлогын нөхцөлд буурах геометр прогресс гэж өгсөн учир $b_1 = -1, q = 3$. Иймд ерөнхий гишүүний томьёо нь $b_n = b_1 q^{n-1} = -3^{n-1}$.

- б. $S_5 = b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5 = (-1) + (-3) + (-3^2) + (-3^3) + (-3^4) = -\sum_{k=1}^5 3^{k-1}$.
- 47.** Дараах нөхцөлийг хангах геометр прогрессын ерөнхий гишүүний томьёог ол.
- а. $\begin{cases} b_4 + b_2 = 20, \\ b_4 - b_3 = 12 \end{cases}$ б. $\begin{cases} b_1 b_2 b_3 = 81, \\ b_5 = 3b_2 \end{cases}$ в. $\begin{cases} b_4 - b_1 = 126, \\ b_1 + b_2 + b_3 = 42 \end{cases}$ г. $\begin{cases} b_2 + b_5 = 1536, \\ b_4 \cdot b_5 = 72 \end{cases}$
- 48.**Өсөх геометр прогрессын $b_1 + b_2 + b_3 = 42$, $b_1 b_2 b_3 = 512$ бол ерөнхий гишүүний томьёог гарга.
- 49.** а. Хэрэв геометр прогрессын ерөнхий гишүүний томьёо нь $b_n = 6\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ бол эхний 4 гишүүний нийлбэрийг \sum тэмдэг ашиглан бич.
 б. Хэрэв геометр прогрессын хувьд $b_1 = 3$ ба $q = \sqrt{3}$ бол эхний 35 гишүүний нийлбэрийг \sum тэмдэг ашиглан бич.
 в. Хэрэв геометр прогрессын $b_5 = 5$ ба $b_{10} = 160$ бол 5-р гишүүнээс 17-р гишүүн хүртэлх нийлбэрийг \sum тэмдэг ашиглан бич.
 г. Хэрэв геометр прогрессын $b_{13} = 512$, $b_3 + b_7 = \frac{17}{2}$ бол эхний m гишүүний нийлбэрийг \sum тэмдэг ашиглан бич.

$\{b_n\}$ геометр прогрессын эхний n гишүүний нийлбэрийг ольё.

Эхний n гишүүний нийлбэр $S_n = \sum_{k=1}^n b_k = b_1 + b_1 q + b_1 q^2 + \dots + b_1 q^{n-1}$ болохыг бид мэднэ. S_n -ийг олохын тулд S_n -ийг q -ээр үржүүлж, түүнээс S_n -ийг хасахад

$$\begin{aligned} qS_n &= b_1 q + b_1 q^2 + b_1 q^3 + \dots + b_1 q^n \\ S_n &= b_1 + b_1 q + b_1 q^2 + \dots + b_1 q^{n-1} \\ (q-1)S_n &= -b_1 + b_1 q^n \text{ болно.} \end{aligned}$$

Хэрэв $q \neq 1$ бол $S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}$ болно.

Геометр прогрессын эхний n гишүүний нийлбэрийг олох томьёо.

$q \neq 1$ байх $\{b_n\}$ геометр прогрессын эхний n гишүүний нийлбэр

$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}.$$

Хэрэв $q = 1$ бол $S_n = \sum_{k=1}^n b_k = b_1 + b_1 \cdot 1 + b_1 \cdot 1^2 + \dots + b_1 \cdot 1^{n-1} = nb_1$ болно.

- 50.** Геометр прогрессын эхний 13 гишүүний нийлбэрийг ол.

а. $2, \frac{7}{2}, \frac{49}{8}, \dots$ б. $\frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \dots$ в. $81, 54, 36, \dots$ г. $370, 37, 3.7, \dots$

- 51.** Нийлбэрийг ол.

а. $1 + 2 + 4 + \dots + 128$	б. $1 + 3 + 9 + \dots + 729$
в. $1 - 3 + 9 + \dots + 729$	г. $\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{1024}$

д. $243 + 81 + 27 + \dots + \frac{1}{9}$
 ё. $0.1 + 0.01 + 0.001 + \dots + \underbrace{0.0\dots01}_{17}$

е. $370 + 37 + 3,7 + \dots + 0.000037$
 ж. $10000 + 1000 + 100 + \dots + \frac{1}{10^{29}}$

52. 49 дүгээр бодлогын нийлбэрийг \sum тэмдэг ашиглан бич.

53. Нийлбэрийг ол.

а. $1 + 2 + 4 + \dots + 2^{n-1}$
 в. $\frac{1}{2} + \frac{3}{2} + \frac{3^2}{2} + \dots + \frac{3^{n-1}}{2}$
 д. $\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{5}\right)^{2k-1}$

б. $1 + 2 + 4 + \dots + 2^{n+1}$
 г. $\sum_{k=5}^n \left(\frac{3}{2}\right)^{k+1}$

е. $0.1 + 0.01 + 0.001 + \dots + \underbrace{0.0\dots01}_{n-1}$

54. Хэрэв геометр прогрессын эхний n гишүүний нийлбэр $S_n = 6^n - 1$ бол ялгавар ба b_{12} гишүүнийг ол.

55. Төгсгөлөг геометр прогрессын мэдэгдээгүй гишүүдийг ол.

а. $b_1, 256, b_3, 144, b_5, 81$ б. $\sqrt{3}, b_2, b_3, 18\sqrt{2}, b_5, 108\sqrt{2}$ в. $\frac{1}{27}, b_2, \frac{1}{3}, b_4, b_5, -9$

56. Хэрэв геометр прогрессын ерөнхий гишүүний томьёо нь $u_n = 4 \cdot 3^{5-n}$ бол эхний n гишүүний нийлбэрийг ол.

57. Илэрхийллийг хялбарчил

а. $\frac{a^5 + a^4 + a^3 + a^2 + a + 1}{a^3 - 1}$
 в. $\frac{x^9 + x^8 + x^7 + \dots + x + 1}{x^4 - x^3 + x^2 - x + 1}$

б. $\frac{a^{13} + a^{12} + a^{11} + \dots + a + 1}{a^6 + a^5 + a^4 + \dots + a + 1}$
 г. $\frac{1 + x^2 + x^4 + \dots + x^{20}}{1 + x + x^2 + \dots + x^{21}}$

58. Хэрэв геометр прогрессын эхний 4 гишүүний нийлбэр 30 ба дараагийн 4 гишүүний нийлбэр 480 бол прогрессын эхний 3 гишүүнийг бич.

59. $1, x, x^2, \dots, x^n$ геометр прогрессын сондгой дугаартай гишүүний нийлбэр 7381. Тэгш дугаартай гишүүдийн нийлбэр 2460 бол n ба x -ийг ол.

60. Арифметик прогресс үүсгэдэг гурван тооны нийлбэр нь 15 ба дундах тооноос нь нэгийг хасвал өсөх геометр прогресс үүсгэнэ. Эдгээр тоог ол.

61. Өсөх арифметик прогрессын эхний гурван гишүүний нийлбэр нь 12. Хэрэв эхний гишүүний квадрат нь дөрөв ба хоёрдугаар гишүүдийн ялгавартай тэнцүү бол энэ прогрессын эхний 50 гишүүний нийлбэрийг ол.

62. Бөмбөг өндөрөөс унажээ. Бөмбөгний эхний ойлтын өндөр 50м байсан ба дараагийн ойлт бүрдээ өмнөх ойлтын өндрийн $\frac{1}{4}$ хэсгээр бага өндөрт ойдог бол дөрвөн ойлтын дараа газраас ямар өндөрт ойх вэ?

63. Банкны хугацаатай хадгаламжийн жилийн хүү нь 13%. Анх a төгрөгтэй хадгаламж нээсэн гэр бүл арван жилийн дараа хадгаламждаа хэдэн төгрөгтэй байх вэ?

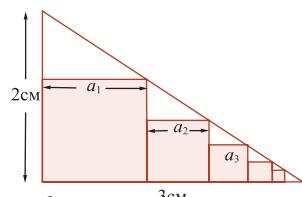
64. Таазнаас дүүжилсэн бөмбөг хоёр тийш савлаж байв. Анх таазтай перпен-

дикуляр тэнхлэгтэй 30° үүсгэхээр савласан ба дараагийн савлалт бүр өмнөх савлалтын 90% тэнцүү өнцгөөр савлаж байв.

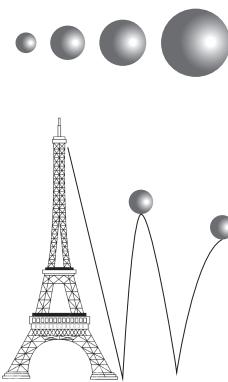
- Хэдэн савлалтын дараа 20° -аас бага өнцгөөр савлах вэ?.
- 10 дахь савлалт дуусахад бүх савласан өнцгийн нийлбэрийг ол.

БҮЛГИЙН НЭМЭЛТ ДААЛГАВАР

- Хэрэв арифметик прогрессын $a_7 = 12$, $a_{12} = 27$ бол ерөнхий гишүүний томъёог ол.
- Хэрэв геометр прогрессын $b_4 = 54$, $b_7 = \frac{729}{4}$ бол ерөнхий гишүүний томъёог ол.
- Нийлбэрийг ол.
 - $6 + 13 + 20 + 27 + \dots + 216$
 - $15 + 5 + 5 \cdot \frac{1}{3} + 5 \cdot \frac{1}{9} + 5 \cdot \frac{1}{27} + \dots + 5 \cdot \frac{1}{3^{10}}$
- 11 дүгээр ангийн сургач холын зайн гүйлтээр хичээллэхээр шийдэв. Эхний ээлжид 10 км гүйж сурахын тул эхний өдөр 2 км гүйж эхэлсэн ба дараагийн өдөр бүр өмнөхөөс 400 м-ээр хол зайд гүйж байв.
 - 10 км гүйж сурахын тул хэдэн өдөр гүйх вэ?
 - 10 км гүйж сурхад нийт хэдэн километр гүйх вэ?
- Сурагчийн гэрээс сургууль хүртэлх зайд 200 метр болно. Сургач сургууль руугаа явахдаа эхний минутад 60 метр, дараагийн минутад бүрд өмнөх минутад явсан замын 75% -тай тэнцэх метр явсан болно. Тэгвэл сурагчийн сургууль хүртэлх зарцуулсан хугацаа нь 6 минутаас их 7 минутаас бага байхыг харуул.
- Геометр прогресс үүсгэх гурван тооны үржвэр 64 ба түүний дундах гишүүн дээр 1-ийг нэмбэл арифметик прогресс үүсгэнэ. Энэ гурван тоо аль вэ?
 - Өсөх геометр прогрессын хувьд $b_1 + b_2 + b_3 = 21$, $b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = 189$ бол ерөнхий гишүүний томъёог ол.
 - Нийлбэрийг ол.
 - $\sum_{k=1}^n k + 3$
 - $\sum_{k=5}^n (7k - 2)$
 - $\sum_{k=4}^{30} 6\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}$
- Болд банкнаас авсан зээлээ 24 сард төлж дуусгасан болно. Эхний сар 520000 төгрөг төлсөн ба дараагийн сар бүрд өмнөх сараас 30000 төгрөг илүү төлдөг байв.
 - 24 дэх сард хэдэн төгрөг төлсөн бэ?
 - Нийт хэдэн төгрөг банканд төлсөн бэ?
- 2 см ба 3 см талуудтай тэгш өнцгөт гурвалжин дотор зурагт үзүүлснээр квадратуудыг байрлуулж, талуудыг a_1, a_2, a_3, \dots гэж тэмдэглэв. Тэгвэл $\{a_n\}$ тоон дараалал үүснэ.
 - a_1 ба a_2 гишүүнийг ол
 - $n > 1$ хувьд $a_n = a_{n-1}q$ биелдэг бол q тоог ол
 - n дугаар квадратын талбайг ол
 - Эхний n квадратын талбайн нийлбэрийг ол.



11. n ширхэг бөмбөрцгийг жижгээс нь том руу нь жагсаажээ. Хамгийн жижиг бөмбөрцгийн радиус 1м ба бөмбөрцөг бүр нь өмнөхөөсөө 2 дахин урт радиустай бол бүх бөмбөрцгийн эзлэхүүний нийлбэрийг ол.
12. Парисын цамхгаас бөмбөг унагажээ. Бөмбөгний эхний ойлтын өндөр 300 м байсан ба дараагийн ойлт бүрдээ өмнөх ойлтын өндөрөөс 5 м-ээр бага өндөрт хөөрч байсан бол 29 дэх удаагийн ойлтоор газраас хэдэн метр өндөрт хөөрөх вэ?
13. Тэгээс ялгаатай a, b, c тоонууд арифметик прогрессын дараалсан 3 гишүүн болох ба $-3a, c, 2b$ мөн арифметик прогресс үүсгэнэ. Тэгвэл $a:b:c$ -г ол.
14. $-5, a_1, a_2, \dots, a_m, 10, b_1, b_2, \dots, b_n, 15$ гэсэн арифметик прогрессын бүх гишүүдийн нийлбэр 325 бол $m+n$ дугаар гишүүнийг ол.
15. $-3, a_1, a_2, \dots, a_m, 7, b_1, b_2, \dots, b_n, 22$ гэсэн арифметик прогрессын бүх гишүүдийн нийлбэр 389.5 бол m -ийг ол.
16. $-2, 3, 8, 13, \dots, 1018$ ба $-3, 1, 5, 9, \dots, 993$ хоёр арифметик прогрессын хэчинээн гишүүд нь тэнцүү байх вэ?
17. $-2, 5, 8, 11, \dots, 1001$ ба $-1, 3, 7, 11, \dots, 1331$ хоёр арифметик прогрессын хэчинээн гишүүд нь тэнцүү байх вэ?
18. $\{b_n\}$ дарааллын гишүүн тус бүрээс a тоог хасвал хуваарь нь 2 байх геометр прогресс үүснэ. Хэрэв $b_3 = 7, b_4 = 11$ бол а. a ба b_1 -ийг ол. б. $\sum_{k=1}^{10} b_k$ -ийг ол.
19. $\{b_n\}$ дарааллын гишүүн тус бүрийг a тоогоор үргүүлбэл ялгавар нь 2 байх арифметик прогресс үүснэ. Хэрэв $b_3 = 8, b_9 = 12$ бол
а. a ба b_1 -ийг ол. б. $\sum_{k=1}^{10} b_k$ -ийг ол.
20. Хэрэв арифметик прогресс үүсгэх p, q, r турван тооны нийлбэр 15 ба үржвэр -120 бол p, q, r тоонуудыг ол.
21. Хэрэв $8, p, q$ тоонууд арифметик прогресс үүсгэдэг ба $p, q, 36$ тоонууд геометр прогресс үүсгэдэг бол p, q тоонуудыг ол.
22. p, q, r, s эерэг тоонуудын хувьд p, q, r тоонууд арифметик прогресс үүсгэх ба нийлбэр нь 27 байна. Харин q, r, s тоонууд геометр прогресс үүсгэдэг ба нийлбэр нь 19 бол p, q, r, s тоонуудыг ол.
23. Ерөнхий гишүүний томьёо $a_n = 3n$ байх дарааллын дараалсан 5 гишүүний эхний турван гишүүний квадратын нийлбэр нь сүүлийн хоёр гишүүнийхээ квадратын нийлбэртэй тэнцүү бол энэ дараалсан 5 гишүүнийг ол.
24. а. 1-ээс 190-ийн хооронд орших 8-д хуваагдах хэдэн тоо байх вэ?
б. 1-ээс 190-ийн хооронд орших 8-д хуваагдах тоонуудын нийлбэрийг ол.
в. 1-ээс 190-ийн хооронд орших 8-д үл хуваагдах тоонуудын нийлбэрийг ол.



V БҮЛЭГ. КООРДИНАТЫН АРГА

Энэ бүлэг сэдвийг судалснаар дараах мэдлэг, чадварыг эзэмшиш.

- Налалт ашиглан шулуунуудыг параллел, перпендикуляр болохыг тодорхойлох
- Өгсөн нөхцөлийг ашиглан шулууны тэгшигтгэлийг бичих, Тухайлбал, өгсөн цэгийг дайрах, өгсөн шулуунтай параллел эсвэл перпендикуляр шулууны тэгшигтгэлийг бичих
- Огторгуйн тэгши өнцөгт координатын систем болон цэгийн координатыг ойлгох, огторгуйн координатын системд цэг тэмдэглэх, дүрс биет байгуулах
- Огторгуйн тэгши өнцөгт координатын системд хоёр цэгийн хоорондох зайд, хэрчмийн дундааж цэгийн координатыг олох

5.1 ХАВТГАЙН ПАРАЛЛЕЛ БА ПЕРПЕНДИКУЛЯР ШУЛУУН

Параллел шулуун.

Нэг хавтгайд орших, огтолцохгүй хоёр шулууныг параллел шулуунууд гэнэ.

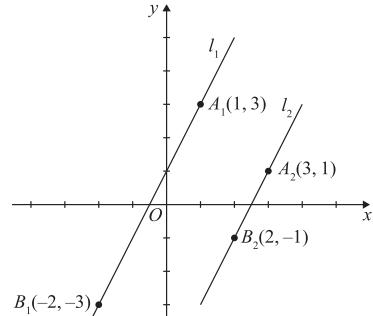
Бодлого 1. Зураг дээр l_1 , l_2 хоёр шулуун параллел байв. Эдгээр шулууны налалтыг тодорхойл.

Бодолт. l_1 шулууны налалт $m_1 = \frac{-3 - 3}{-2 - 1} = \frac{-6}{-3} = 2$

ба l_2 шулууны налалт $m_2 = \frac{1 - (-1)}{3 - 2} = \frac{2}{1} = 2$ байна.

Эндээс харахад $m_1 = m_2 = 2$ буюу параллел хоёр шулууны налалт хоорондоо тэнцүү байна.

Чанар 1. Хэрэв хоёр шулуун параллел байвал тэдгээрийн налалт тэнцүү, урвуугаар шулуунуудын налалт тэнцүү байвал хоёр шулуун параллел байна.



Баталгаа. Эхлээд шулуунууд параллел бол налалтууд тэнцүү гэдгийг баталъя.

$y = mx + c$ тэгшигтгэл бүхий l шулуун, $y = m_1x + c_1$ тэгшигтгэл бүхий l_1 шулуун авч үзье. Эдгээр шулуун параллел байхын тулд $\begin{cases} y = mx + c \\ y = m_1x + c_1 \end{cases}$ тэгшигтгэлийн

систем шийдгүй эсвэл төгсгөлгүй олон шийдтэй байна.

Уг системийн I тэгшигтгэлээс II тэгшигтгэлийг хасвал $(m - m_1)x = c - c_1$ хэлбэртэй болно.

а. Тэгшигтгэлийн систем шийдгүй байхын тулд $(m - m_1)x = c - c_1$ тэгшигтгэлийн $m - m_1 = 0$ байх ёстой. Хэрэв $m - m_1$ нь тэгээс ялгаатай байвал $x = \frac{c - c_1}{m - m_1}$ болж

үргэлж шийдтэй байна. Иймд $m - m_1 = 0$, $c - c_1 \neq 0$ буюу энэ тохиолдолд $m = m_1$ байх нь батлагдаа.

б. Тэгшитгэлийн систем төгсгөлгүй олон шийдтэй байхын тулд $(m - m_1)x = c - c_1$ тэгшитгэл $0 \cdot x = 0$ хэлбэртэй байх ёстой. Эндээс $m - m_1 = 0$, $c - c_1 = 0$ буюу энэ тохиолдолд мөн $m = m_1$ байх нь батлагдаж байна.

Одоо шулуунуудын наалтууд тэнцүү бол уг хоёр шулуун параллел болохыг баталья.

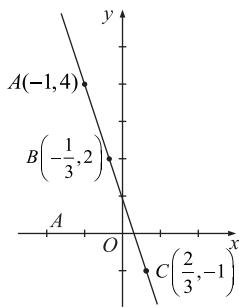
$y = mx + c$ тэгшитгэл бүхий l шулуун, $y = mx + c_1$ тэгшитгэл бүхий l_1 шулуун авч үзье. Эдгээр шулуун параллел гэдгийг батлахын тулд $\begin{cases} y = mx + c \\ y = mx + c_1 \end{cases}$ тэгшит-

гэлийн систем шийдгүй эсвэл төгсгөлгүй олон шийдтэй гэж харуулах хэрэгтэй. Уг тэгшитгэлийн системийн I тэгшитгэлээс II тэгшитгэлийг хасвал $mx + c = mx + c_1$ болно. Эндээс $c = c_1$ үед хоёр шулуун давхацна, харин $c \neq c_1$ бол уг тэгшитгэлийн систем шийдгүй болно. Иймд хоёр шулуун параллел байх нь батлагдаа.

Жишээ 1. Налалтуудыг харьцуулан $A(-1, 4)$, $B\left(-\frac{1}{3}, 2\right)$, $C\left(\frac{2}{3}, -1\right)$ цэг нэг шулуун дээр орших эсэхийг тодорхойл.

Бодолт. AB шулууны наалт $m_1 = \frac{2 - 4}{-\frac{1}{3} - (-1)} = \frac{-2}{\frac{2}{3}} = -3$ ба

BC шулууны наалт $m_2 = \frac{-1 - 2}{\frac{2}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right)} = \frac{-3}{1} = -3$ байна.



Эндээс AB, BC хоёр шулууны наалтууд тэнцүү тул параллел байна. Гэвч B гэсэн ерөнхий цэгтэй тул эдгээр шулуун давхацна. Иймд A, B, C цэгүүд нэг шулуун дээр оршино.

Перпендикуляр шулуун.

Тэгш өнцөг үүсгэн огтлоцсон хоёр шулууныг перпендикуляр шулуунууд гэнэ.

Бодлого 2. Зураг дээр l_1, l_2 шулуунууд перпендикуляр байв. Эдгээр шулууны наалтыг тодорхойл.

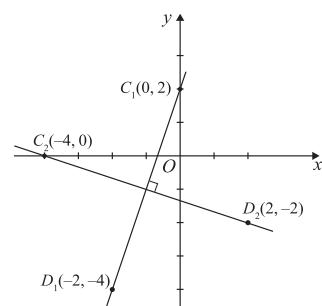
Бодолт. l_1 шулууны наалт $m_1 = \frac{2 - (-4)}{0 - (-2)} = \frac{6}{2} = 3$ ба

l_2 шулууны наалт $m_2 = \frac{-2 - 0}{2 - (-4)} = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3}$ байна.

Налалтуудын үржвэрийг олбол $m_1 \cdot m_2 = 3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = -1$

байна. $m_1 \cdot m_2 = -1$ буюу хоёр шулууны наалтуудын үржвэр -1 -тэй тэнцүү байна.

Эндээс хоорондоо перпендикуляр шулуунуудын наалтуудын үржвэр -1 -тэй тэнцүү гэсэн дүгнэлт хийж болно.



Чанар 2. Хэрэв хоёр шулууны перпендикуляр бол тэдгээрийн наалттын үржвэр -1 -тэй тэнцүү, урвуугаар хэрэв хоёр шулууны наалтуудын үржвэр -1 байвал шулуунууд хоорондоо перпендикуляр байна.

Баталгаа. l_1, l_2 хоёр шулууны наалтууд харгалзан m_1 ба m_2 бөгөөд тэгшитгэлүүд нь $l_1 : y = m_1x + c_1$, $l_2 : y = m_2x + c_2$ байг. l_1 шулууны тэгшитгэлд $x = 0, x = 1$ гэж орлуулбал уг шулуун дээр орших $A_1(0, c_1)$, $A_2(1, m_1 + c_1)$ цэгүүд гарна.

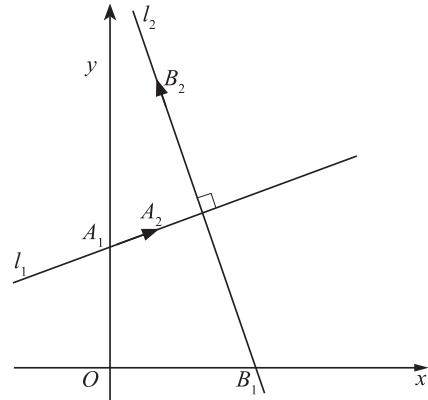
Иймд $\overrightarrow{A_1 A_2} = (1, m_1)$ вектор l_1 шулуунтай параллел байна.

Үүнтэй адилгаар l_2 шулууны тэгшитгэлд $x = 0, x = 1$ гэж орлуулбал уг шулуун дээрх $B_1(0, c_2)$, $B_2(1, m_2 + c_2)$ цэгүүд гарах ба $\overrightarrow{B_1 B_2} = (1, m_2)$ вектор l_2 шулуунтай параллел байна.

Эндээс $\overrightarrow{l_1} \perp \overrightarrow{l_2}$ буюу $\overrightarrow{A_1 A_2} \perp \overrightarrow{B_1 B_2}$ гэдгээс $\overrightarrow{A_1 A_2} \cdot \overrightarrow{B_1 B_2} = 0$ байх ёстой. Иймд $\overrightarrow{A_1 A_2} \cdot \overrightarrow{B_1 B_2} = 1 \cdot 1 + m_1 m_2 = 0$ болох ба

эндээс $m_1 m_2 = -1$ гэж батлагдav.

Урвуугаар хэрэв $m_1 m_2 = -1$ бол $\overrightarrow{A_1 A_2} \cdot \overrightarrow{B_1 B_2} = 0$ буюу $l_1 \perp l_2$ байна.



Жишээ 2. $A(-3, 1), B(1, -3), C(4, 3k+2)$ цэгт оройтой ABC турвалжин өгөв. Хэрэв $\angle BAC = 90^\circ$ бол k -ийн утгыг ол.

Бодолт. $\angle BAC = 90^\circ$ тул AB, AC талууд хоорондоо перпендикуляр байна. Өөрөөр хэлбэл AB талыг агуулсан шулууны наалт болон AC талыг агуулсан шулууны наалттын үржвэр -1 байна.

AB шулууны наалт $m_1 = \frac{-3-1}{1-(-3)} = \frac{-4}{4} = -1$ ба

AC шулууны наалт $m_2 = \frac{3k+2-1}{4-(-3)} = \frac{3k+1}{7}$ болно. AB, AC

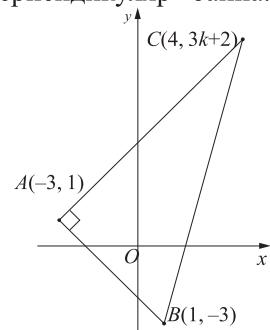
хоёр шулууны наалтуудын үржвэрийг -1 -тэй тэнцүүлбэл $-1 \cdot \frac{3k+1}{7} = -1$ буюу $k = 2$ болно.

1. Өгсөн цэгүүд нэг шулуун дээр орших эсэхийг тодорхойл.

a. $(0, 3), (1, 5), (2, 7)$ б. $(2, -11), \left(\frac{1}{7}, -6\right), (1, 12)$ в. $(3, 8), (6, 7), (0, 9)$

г. $(0, -3), (1, 4), \left(\frac{1}{2}, -\frac{5}{2}\right)$ д. $(1, 4), (-1, -6), \left(\frac{1}{5}, 0\right)$ е. $(4, -4), (8, -7), (0, -1)$

2. AB, CD хоёр шулууныг параллел, перпендикуляр эсвэл аль нь ч биш болохыг тодорхойл.



- a. $A(-1, -8), B(1, 6), C\left(-\frac{1}{7}, \frac{7}{10}\right), D\left(0, \frac{3}{10}\right)$
 б. $A(-1, -4), B(3, 16), C(0, -2), D(5, -3)$
 в. $A(1, 0), B(2, -2), C\left(1, \frac{1}{2}\right), D\left(0, -\frac{1}{2}\right)$
 г. $A(1, -3), B(0.25, 2), C(4, -4), D(8, -3)$
3. $A(0, 9), B(k+1, k+4), C(0, k+3), D(k+3, 2k-3)$ цэг өгөв. Хэрэв AB нь CD шулуунтай параллел бол k -ийн утгыг ол.
4. $A(-3, 0), B(-1, -6), C(9, k)$ цэгт оройтой ABC гурвалжин өгөв. Хэрэв $\angle BAC = 90^\circ$ бол k -ийн утгыг ол.
5. $A(1, 1), B(-1, 4), C(6, k)$ цэгт оройтой ABC гурвалжин өгөв. Хэрэв AB нь BC -д перпендикуляр бол k -ийн утгыг ол.
6. $A(k, 2k), B(-3, 0), C(-1, -3)$ цэгт оройтой ABC гурвалжин өгөв. Хэрэв AB нь BC -д перпендикуляр бол k -ийн утгыг ол.
7. $M(-1, -6), N(3, -12), P(k, 6)$ цэг өгөв.
 Хэрэв а. M, N, P цэгүүд нэг шулуун дээр оршдог бол k -ийн утгыг ол
 б. MN нь NP -д перпендикуляр бол k -ийн утгыг ол.
8. $A(-1, 1), B(6, 6), C(11, -1)$ цэг нь адил хажуут гурвалжны оройнууд болно. ABC өнцгийг тэгш өнцөг болохыг харуул.
9. $M(0, -3), N(6, -1)$ цэгүүд өгөв. а. $MN \parallel NP$ байх P цэгийг абсцисс тэнхлэг дээрээс ол. б. $\angle MNK = 90^\circ$ байх K цэгийг ординат тэнхлэг дээр ол.
10. Хэрэв M цэг нь $A(-1, 2), B(3, -2)$ хоёр цэгээс ижил зайд орших бөгөөд абсцисс нь ординатаасаа хоёр дахин их бол координатыг ол. Эдгээр цэгүүд нэг шулуун дээр орших уу?
11. $y = x + 3$ шулуун, $y = x^2 + x - 1$ муруйтай A, B хоёр цэгээр огтлолцох бол AB шулууны налалтыг ол.
12. Хэрэв $(2, -1), (8, a), (11, 2)$ цэгүүд нэг шулуун дээр оршдог бол a -ийн утгыг ол.
13. $A(1, 3), B(5, 1), C(k, -1)$ цэг өгөв. AB хэрчмийн дундаж M цэгийн координатыг ол. Хэрэв MC нь AB -д перпендикуляр бол k -ийн утгыг болон MC -ийн уртыг ол.

Жишээ 3. $A(-2, 3), B(3, 8), C(4, 1), D(-1, -4)$ цэгт оройтой дөрвөн өнцөгтийг ромбо болохыг батал.

Бүх тал нь тэнцүү параллелограммыг ромбо гэх тул эхлээд дөрвөн өнцөгтийг параллелограмм болохыг баталъя. Үүний тулд дөрвөн өнцөгтийн эсрэг талууд нь хос хосоороо параллел байна. Тодруулбал $AB \parallel CD, AD \parallel BC$ болохыг батална. Эсрэг талууд нь параллел байхын тулд эдгээрийг агуулсан шулууны налалтууд тэнцүү. AB талыг агуулсан шулууны налалт $\frac{8-3}{3-(-2)} = \frac{5}{5} = 1$ ба CD талыг

агуулсан шулууны наалт $\frac{-4-1}{-1-4} = \frac{-5}{-5} = 1$ байна. Налалтууд тэнцүү тул $AB \parallel CD$.

AD талыг агуулсан шулууны наалт $\frac{-4-3}{-1-(-2)} = \frac{-7}{1} = -7$ ба BC талыг агуулсан шулууны наалт $\frac{1-8}{4-3} = \frac{-7}{1} = -7$ байна. Эндээс $AD \parallel BC$ байна.

Иймд $ABCD$ дөрвөн өнцөгт нь параллелограмм байна. Одоо диагоналиуд нь перпендикуляр гэдгийг харуулбал өгсөн дөрвөн өнцөгт ромбо болно.

Диагоналиудын огтлонцлын цэгийн координатыг ольё.

AC, BD диагоналиуд дундаж цэгээрээ огтлонцох ба AC диагоналийн дундаж цэгийн координат $(1, 2)$ байна.

AC шулууны наалтыг олбол $m = \frac{1-3}{4-(-2)} = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3}$ ба BD шулууны наалтыг олбол $m = \frac{-4-8}{-1-3} = \frac{-12}{-4} = 3$ байна. Налалтуудын үржвэр $-\frac{1}{3} \cdot 3 = -1$ тул диагоналиуд перпендикуляр. Иймд $ABCD$ параллелограмм нь ромбо боллоо.

14. $A(-2, -1), B(3, 6), C(5, 5)$ цэгт оройтой гурвалжны AB, AC талын дунджуудыг харгалзан M, P гэж тэмдэглэе. $MP \parallel BC$ ба $BC = 2MP$ гэж батал.

15. Өгсөн цэгт оройтой дөрвөн өнцөгтийг параллелограмм болохыг батал.

a. $(-2, 5), (-1, 1), (2, -5), (1, -1)$ b. $(2, 5), (6, 1), (-3, -2), (-7, 2)$

16. Дараах цэгт оройтой дөрвөн өнцөгтийг ромбо болохыг батал.

a. $(3, 3), (-1, -2), (-3, -7), (-5, -2)$ b. $(0, 2), (5, 0), (0, -2), (-5, 0)$

17. Дараах цэгт оройтой дөрвөн өнцөгтийг ямар дөрвөн өнцөгт болохыг тодорхойл.

a. $(0, 0), (-1, -3), (-4, 4), (-3, 1)$	b. $(-5, 1), (5, 3), (2, 6), (-4, 5)$
v. $(-2, -2), (-4, -5), (2, -9), (4, -6)$	g. $(6, 2), (2, 4), (-6, -2), (-2, -4)$

18. $A(-1, 1), B(7, -3), C(7, 5), D(-1, 5)$ цэгт оройтой $ABCD$ дөрвөн өнцөгтийн AB, BC, CD, AD талуудын дундаж цэгүүд харгалзан M, N, P, Q бол $MNPQ$ дөрвөн өнцөгт ямар дүрс болохыг тодорхойл.

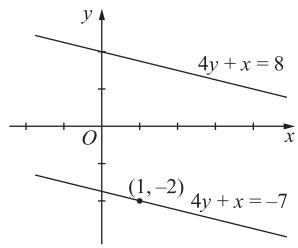
Шулууны тэгшитгэл

Бид өмнө нэг цэг ба наалт эсвэл хоёр цэг өгснөөр шулууны тэгшитгэл хэрхэн бичихийг судалсан. Одоо өгсөн цэгийг дайрах, өгсөн шулуунтай параллел, перпендикуляр шулууны тэгшитгэлийг хэрхэн бичихийг судлах болно.

Хоёр цэгийг дайрсан шулууны тэгшитгэл	Өгсөн цэгийг дайрсан, өгсөн наалттай шулууны тэгшитгэл
$A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ хоёр цэгийг дайрсан шулууны тэгшитгэл $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$ байна.	Өгсөн $A(x_1, y_1)$ цэгийг дайрах, m наалттай шулууны тэгшитгэл $y - y_1 = m(x - x_1)$ байна.

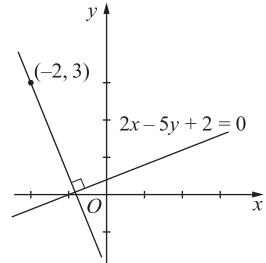
Жишээ 4. $(1, -2)$ цэгийг дайрсан, $4y + x = 8$ шулуунтай параллел шулууны тэгшитгэлийг бич.

Бодолт. Шулууны тэгшитгэлийг $y = -\frac{1}{4}x + 2$ гэж бичвэл наалт $m = -\frac{1}{4}$ байна. Тэгвэл энэ шулуунтай параллел шулуун нь $m = -\frac{1}{4}$ наалттай, $(1, -2)$ цэгийг дайрсан байна. Иймд тэгшитгэл нь $y - (-2) = -\frac{1}{4}(x - 1)$ буюу $4y + x + 7 = 0$ болно.



Жишээ 5. $(-2, 3)$ цэгийг дайрсан, $2x - 5y + 2 = 0$ шулуунд перпендикуляр шулууны тэгшитгэлийг бич. Эдгээр шулууны огтлолцлын цэгийн координатыг ол.

Бодолт. Шулууны тэгшитгэлийг $y = \frac{2}{5}x + \frac{2}{5}$ гэж бичвэл наалт нь $m = \frac{2}{5}$ байна. Иймд бидний тэгшитгэлийг нь бичих шулууны наалт $m = -\frac{5}{2}$ бөгөөд $(-2, 3)$ цэгийг дайрсан байна. Иймд $y - 3 = -\frac{5}{2}(x - (-2))$ буюу $5x + 2y + 4 = 0$ болно.



Хоёр шулууны огтлолцлын цэгийн координатыг олохын тулд дээрх шулуунуудын тэгшитгэлээр үүсэх шугаман тэгшитгэлийн системийн шийдийг олно. Огтлолцлын цэгийн координат $\left(-\frac{24}{29}, \frac{2}{29}\right)$ байхыг бие дааж бод.

Жишээ 6. $A(5, -1), B(-1, -2), C(-2, 4)$ цэг өгөв.

а. A цэгийг дайрсан, B, C цэгүүдийг агуулсан шулуунтай параллел шулууны тэгшитгэлийг бич.

б. $AB = BC$ болон $\angle ABC = 90^\circ$ гэж харуул.

в. Хэрэв $ABCD$ квадрат бол D оройн координатыг ол.

Бодолт. а. B, C хоёр цэгийг дайрсан шулууны

$$\text{налалтыг олбол } \frac{4 - (-2)}{-2 - (-1)} = \frac{6}{-1} = -6$$

$A(5, -1)$ цэгийг дайрсан, -6 наалттай шулууны тэгшитгэл нь $y - (-1) = -6(x - 5)$ буюу $6x + y - 29 = 0$ болно.

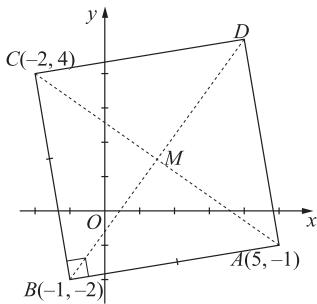
$$\text{б. } |AB| = \sqrt{(-1 - 5)^2 + (-2 - (-1))^2} = \sqrt{36 + 1} = \sqrt{37}$$

$$|BC| = \sqrt{(-2 - (-1))^2 + (4 - (-2))^2} = \sqrt{1 + 36} = \sqrt{37}$$

болов тул $AB = BC$ байна.

$$AB \text{ шулууны наалт } m = \frac{-2 - (-1)}{-1 - 5} = \frac{-1}{-6} = \frac{1}{6} \text{ ба } BC \text{ шулууны наалт } -6 \text{ байна.}$$

Эдгээр шулууны наалтуудын үржвэр нь $-6 \cdot \frac{1}{6} = -1$ тул $AB \perp BC$ буюу $\angle ABC = 90^\circ$ байна.

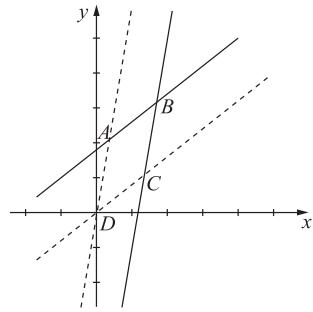


в. AC диагоналийн дундаж цэгийн координат нь $x = \frac{5+(-2)}{2} = \frac{3}{2}$, $y = \frac{-1+4}{2} = \frac{3}{2}$ буюу $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$. Энэ нь бас BD диагоналийн дундаж цэг гэдгээс D -ийн координатыг олбол $\frac{-1+x}{2} = \frac{3}{2}$, $x = 4$ ба $\frac{-2+y}{2} = \frac{3}{2}$, $y = 5$ байна. Иймд $D(4, 5)$.

Жишээ 7. $ABCD$ параллелограммын AB талыг агуулсан шулууны тэгшитгэл $5y - 4x = 9$ ба BC талыг агуулсан шулууны тэгшитгэл $y - 6x + 7 = 0$ байв. Хэрэв параллелограммын D орой нь координатын эх дээр оршдог бол AD болон CD талыг агуулсан шулууны тэгшитгэлийг тус тус бич.

Бодолт. $5y - 4x = 9$ шулууны налалт нь $\frac{4}{5}$ ба

$y - 6x + 7 = 0$ шулууны налалт 6 байна. Тэгвэл параллелограммын AD талыг агуулсан шулуун 6 налалттай бөгөөд $(0, 0)$ цэгийг дайрна. Харин CD талыг агуулсан шулуун нь $\frac{4}{5}$ налалттай бөгөөд мөн координатын эхийг дайрсан байна. Тэгвэл AD , CD талыг агуулсан шулууны тэгшитгэлүүд харгалзан $y = \frac{4}{5}x$, $y = 6x$ болно.



19. Дараах хос шулуун перпендикуляр эсэхийг тодорхойл.

а. $3x - 2y + 4 = 0$ ба $3x + y = 3$ б. $x - 2y + 5 = 0$ ба $2x + y = 4$

в. $-4y + 7x = 0$ ба $4x + y = -8$ г. $5x + 3y - 6 = 0$ ба $5y - 3x + 15 = 3$

20. A цэгийг дайрсан, өгсөн шулуунтай параллел шулууны тэгшитгэлийг бич.

а. $A(3, -1)$, $y = 5x - 4$ б. $A(0, 0)$, $-3y + 2x + 8 = 0$

в. $A(2, 4)$, $0.3y - 4x = 9$ г. $A\left(1, \frac{1}{4}\right)$, $y = 3x + 2$

д. $A(1, 0)$, $\frac{1}{2}y - x + 7 = 0$ е. $A(-3, 4)$, $4y - \frac{2}{3}x = 1$

21. B цэгийг дайрсан, өгсөн шулуунтай перпендикуляр шулууны тэгшитгэлийг бич.

а. $B(2, -2)$, $y = 3x - 1$ б. $B(0, -3)$, $5y + x + 2 = 0$

в. $B(-2, 4)$, $6y + x = 1$ г. $B(0.5, -4)$, $\frac{1}{3}y - 3x = 4$

д. $B\left(4, \frac{1}{2}\right)$, $-y + 5x + 0.5 = 0$ е. $B(-1, 3)$, $-\frac{1}{5}y - x = 3$

22. A, B хоёр цэгийг дайрсан шулуунтай параллел, $C(-2, 1)$ цэгийг дайрсан шулууны тэгшитгэлийг бич.

а. $A\left(-3, \frac{1}{3}\right)$, $B(2, 7)$ б. $A(0, -5)$, $B\left(3, -\frac{1}{2}\right)$ в. $A(2, 4)$, $B\left(\frac{3}{4}, 1\right)$

23. M, N хоёр цэгийг дайрсан шулуунтай перпендикуляр, $P(3, -4)$ цэгийг дайрсан шулууны тэгшитгэлийг бич.

$$\text{а. } M\left(-2, -\frac{1}{2}\right), N(-4, 6) \quad \text{б. } M(-1, 0), N\left(-3, \frac{1}{4}\right) \quad \text{в. } M(-5, 1), N\left(-\frac{3}{4}, -1\right)$$

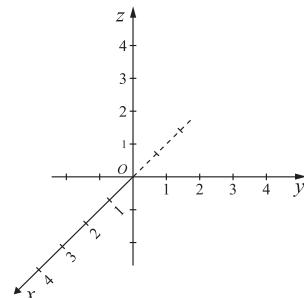
24. $A(-2, 5), B(-4, 1), C(2, -3)$ цэгт оройтой гурвалжин өгөв. A ба B оройгоос гарсан медианыг агуулсан шулууны тэгшитгэлийг бич. Эдгээр медианыг агуулсан шулуунуудын огтлолцлын цэгийг олж, C оройгоос гарсан медиан уг огтлолцлын цэгийг дайрахыг харуул.
25. $A(-1, 4), B(-6, 1), C(4, -3)$ цэгт оройтой гурвалжны A оройгоос буулгасан өндрийг агуулсан бөгөөд уг оройг дайрсан шулууны тэгшитгэлийг бич.
26. $A(-4, 3), B(1, 4), C(2, 3)$ цэгт оройтой гурвалжны A ба B оройгоос буулгасан өндруүдийг агуулсан шулууны тэгшитгэлийг бич. Эдгээр өндрийг агуулсан шулуунуудын огтлолцлын цэгийг олж, гурав дахь оройгоос буулгасан өндөр уг огтлолцлын цэгийг дайрна гэж харуул.
27. $y - 5x - 3 = 0, 5y + x = 5, y + 2x = 7$ шулуунуудын огтлолцолд үүсэх гурвалжны оройн цэгүүдийн координатыг ол. Энэ гурвалжин тэгш өнцөгт болохыг харуулж, талбайг ол.
28. Хэрэв $ABCD$ параллелограммын AB талыг агуулсан шулууны тэгшитгэл $4y + x + 6 = 0$, BC талыг агуулсан шулууны тэгшитгэл $y = x - 4$ бол B цэгийн координатыг ол. Хэрэв $A(-2, -1), C(7, 3)$ бол AD, CD талыг агуулсан шулууны тэгшитгэлүүдийг бичиж, D оройн координатыг ол.
29. $A(2, -2), B(5, 8), C(9, 1)$ цэгт оройтой гурвалжин өгөв. Гурвалжны C оройгоос татсан медианыг агуулсан шулууны тэгшитгэлийг бичиж, $(-2, 5)$ цэг уг медиан дээр оршихыг харуул.
30. $6y - x + 11 = 0, 3x + 4y - 11 = 0, 7x + 2y + 11 = 0$ шулуунуудын огтлолцолд үүсэх гурвалжны оройн цэгүүдийн координатыг ол.
31. $x + 3y = 1$ шулуун $5y = 20 - 3x - x^2$ муруйтай A, B хоёр цэгээр огтлолцоно. AB шулууны налалтыг олж, тэгшитгэлийг нь бич.

5.2 ОГТОРГУЙН ТЭГШ ӨНЦӨГТ КООРДИНАТЫН СИСТЕМ, ЦЭГИЙН КООРДИНАТ

Тэгш өнцөгт координатын системийг огторгуйд хэрхэн тодорхойлох талаар судалъя.

Зурагт үзүүлсэн хос хосоороо перпендикуляр, тоолын эхээрээ огтлолцох, ижил нэгжтэй гурван тоон шулуунаас бүрдэх системийг огторгуйн тэгш өнцөгт координатын систем гэнэ. O цэгийг координатын эх, тэнхлэгүүдийг Ox, Oy, Oz тэмдэглэх ба харгалzan абсцисс, ординат, аппликат тэнхлэг гэж нэрлэдэг.

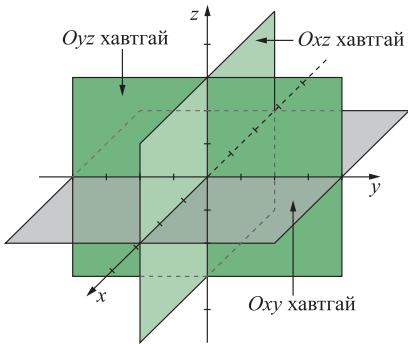
Координатын гурван тэнхлэгийн зэрэг чиглэлийг Ox тэнхлэгийнх цаанаас нааш, Oy тэнхлэгийнх зүүнээс баруун тийш, Oz тэнхлэгийнх доороос дээшээ чиглэсэн байхаар, харин сөрөг чиглэлийг тасархай зураасаар үзүүлсэн байна.



Тэнхлэгүүд нь хос хосоороо координатын хавтгайг тодорхойлдог.

Ox, Oy тэнхлэгүүд нь Oxy гэж нэрлэгдэх, хэвтээ хавтгайг тодорхойлно. Энэ хавтгай хавтгай дахь цэгийн z координат нь үргэлж 0 байна. Үүнтэй адилгаар Ox, Oz тэнхлэгүүд нь Oxz хавтгай, Oy, Oz тэнхлэгүүд нь Oyz хавтгайг тодорхойлно.

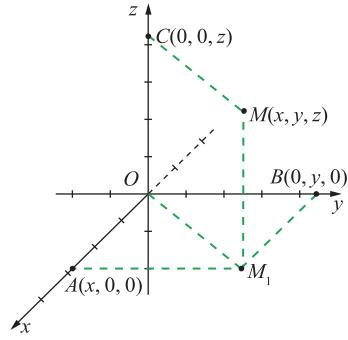
Огторгуйн тэгш өнцөгт координатын системд аливаа цэгийн байрлалыг (x, y, z) гэсэн эрэмбэлсэн бодит тоон гурвалаар тодорхойлно.



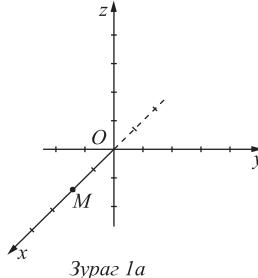
Цэгийн координат олох

Огторгуйд M цэг авья. M цэгээс Oxy хавтгайд перпендикуляр буулгаж, түүний суурийг M_1 гэе.

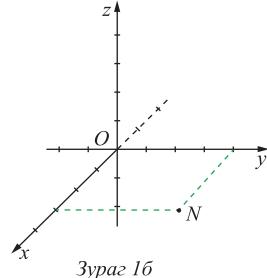
M_1 цэгийг дайруулан Oy тэнхлэгтэй параллел шулуун татаж, түүний Ox тэнхлэгтэй огтлолцох цэгийг A гэе. A цэгийн Ox тоон шулуун дээрх координат нь x байг. M_1 цэгийг дайруулан Ox тэнхлэгтэй параллел шулуун татаж, түүний Oy тэнхлэгтэй огтлолцох цэгийг B гэе. B цэгийн Oy тоон шулуун дээрх координат нь y байна. Одоо M цэгийг дайруулан OM_1 шулуунтай параллел шулуун татахад, түүний Oz тэнхлэгтэй огтлолцох цэгийг C гэвэл Oz тоон шулуун дээрх координат нь z болно. M цэгийн координатыг A цэгийн x , B цэгийн y , C цэгийн z координатаас хамаарсан (x, y, z) гэсэн эрэмбэлсэн бодит тоон гурвалаар тодорхойлж болно. Өөрөөр хэлбэл огторгуйн координатын системд M цэгийн координат (x, y, z) байна.



Жишээлбэл: Ox тэнхлэг дээр орших M цэгийн координат нь $(2, 0, 0)$, Oxy хавтгайд орших N цэгийн координат нь $(3, 4, 0)$ байна. (Зураг 1а, 1б) Үүнтэй адилгаар $(0, 0, z), (0, y, 0)$ координаттай цэг ба $(x, 0, z), (0, y, z)$ координаттай цэгүүд огторгуйн координатын системд хаана байрлахыг ярилц.



Зураг 1а



Зураг 1б

Зураг 2-т P цэгээс Oxy хавтгайд перпендикуляр буулгаж, түүний суурийг P_1 гэе. P_1 цэгийг дайруулан Oy ба Ox тэнхлэгтэй харгалзан параллел шулуун татахад, эдгээр тэнхлэгийг харгалзан огтлох цэг нь $A(3, 0, 0), B(0, -2, 0)$ байна.

OP_1 шулуунтай параллел, P цэгийг дайрсан шулуун Oz тэнхлэгийг $C(0,0,4)$ цэгээр огтолдог байг. Тэгвэл P цэгийн координат нь $P(3,-2,4)$ болно.

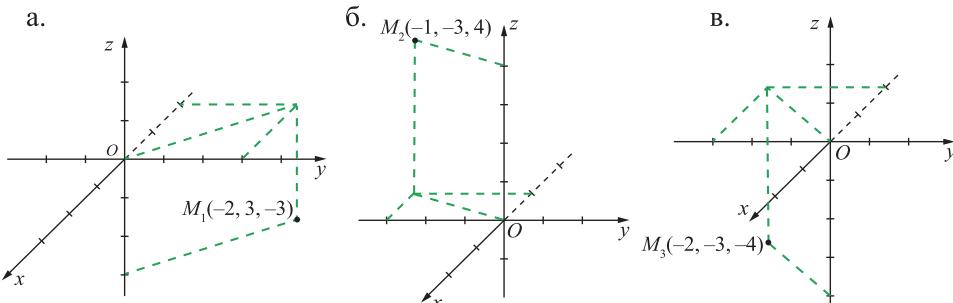
Координатаар цэгийг байгуулах

Жишээ 1. $M(3, 5, 6)$ цэгийг огторгуй дахь тэгш өнцөгт координатын системд байгуул.

Бодолт. Ox тэнхлэг дээр $(3,0,0)$ цэг тэмдэглээд, түүнийг дайруулан Oy тэнхлэгтэй параллел шулуун татяа. Oy тэнхлэг дээр $(0,5,0)$ цэг тэмдэглээд, түүнийг дайруулан Ox тэнхлэгтэй параллел шулуун татяа. Энэ хоёр шулууны огтолцлын цэгийг M_1 гэвэл координат нь $(3,5,0)$ болно.

Oz тэнхлэг дээр $(0,0,6)$ цэг тэмдэглэн, түүнийг дайруулж OM_1 шулуунтай параллел шулуун, M_1 цэгийг дайруулан Oz тэнхлэгтэй параллел шулуун татяа. Эдгээр шулууны огтолцлын цэг нь бидний байгуулах $M(3,5,6)$ цэг болно. (Зураг 3)

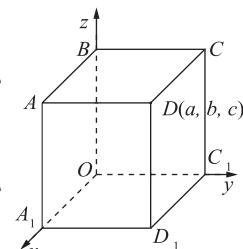
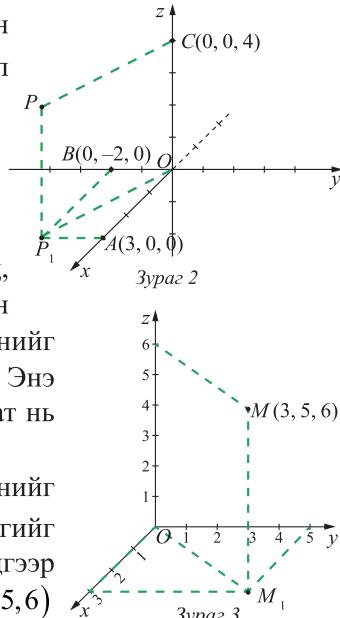
Огторгуй дахь тэгш өнцөгт координатын системд дараах цэгүүдийг хэрхэн тэмдэглэснийг ажиглаж, ярилц. а. $M_1(-3,5,-6)$ б. $M_2(-3,-3,6)$ в. $M_3(-4,-5,-7)$



Ийнхүү огторгуйд тэгш өнцөгт координатын систем байгуулснаар огторгуйн цэг бүрд (x, y, z) гэсэн эрэмбэлсэн бодит тоон гурвал, ийм бодит тоон гурвал бүрд огторгуйн нэг цэгийг харгалзуулах боломжтой боллоо.

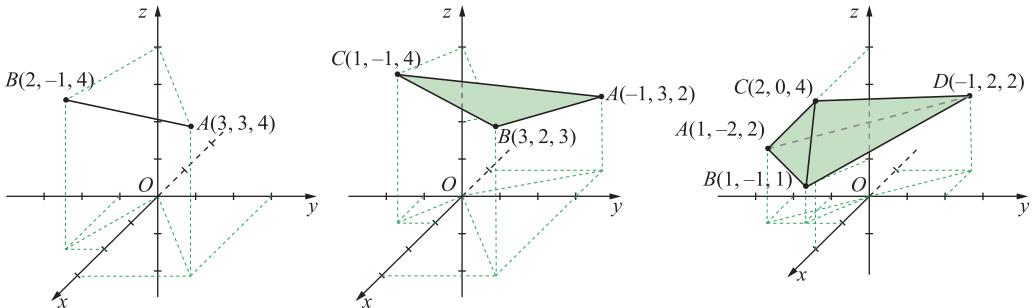
Жишээ 2. Хэрэв $D(a,b,c)$ цэг нь Oxy хавтгайд нэг суурь нь, Oxz , Oyz хавтгай дээр хоёр хажуу талс нь орших $ABCD_1OC_1D_1$ тэгш өнцөгт параллелепипедийн нэг орой бол D_1, A, C оройн координатыг ольё.

Бодолт. D_1 оройн координат нь $(a,b,0)$ байна. Учир нь D_1 цэг Oxy хавтгай дээр орших тул z координат 0 байна. A цэг нь Oxz хавтгай дээр орших тул y координат нь 0 байна. Иймд A цэгийн координат нь $(a,0,c)$ болно. C цэг нь Oyz хавтгай дээр орших тул x координат нь 0 байна. Иймд C цэг $(0,b,c)$ координаттай болно.



Жишээ 3. Огторгуйн тэгш өнцөгт координатын системд дараах дүрс, биетийг байгуул.

- $A(3,3,4), B(2,-1,4)$ цэгт төгсгөлтэй хэрчим
- $A(-1,3,2), B(3,2,3), C(1,-1,4)$ цэгт оройтой гурвалжин
- $A(1,-2,2), B(1,-1,1), C(2,0,4), D(-1,2,2)$ цэгт оройтой $ABCD$ пирамид

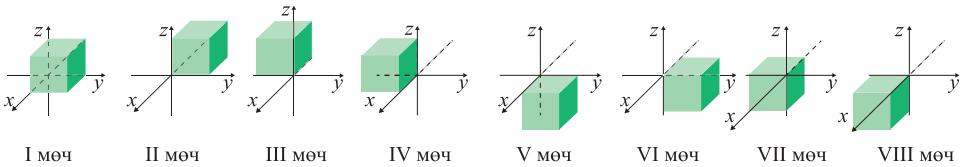


32. Хэрэв $M(x, y, z)$ цэгийн а. $y = 0$ б. $x = 0, y = 0$ в. $x = 0, z = 0$ г. $y = 0, z = 0$ д. $z = 0$ е. $x = 0, z = 0$ бол огторгуй дахь тэгш өнцөгт координатын системд уг цэгийн байрлалыг тодорхойл.

33. Дараах цэгийг огторгуйн тэгш өнцөгт координатын системд байгуул.

- | | | |
|-------------------|-----------------|-----------------|
| а. $A(1,2,-2)$ | б. $B(-1,-3,4)$ | в. $A(5,-2,1)$ |
| г. $A(3,-4,-2.5)$ | д. $A(0,1,-4)$ | е. $A(-4,0,-5)$ |

34. Огторгуйн координатын системийн I мөчид орших цэгийн координат зэрэг байна. Бусад мөчид орших аливаа цэгийн координатын тэмдэг ямар байх вэ? Зургийг ашиглан, хүснэгтийг нөх.



Цэгийн координат	Мөчийн дугаар							
	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
Абсцисс	+							
Ординат	+							
Аппликат	+							

35. Дараах цэг хэддүгээр мөчийн цэг болохыг тодорхойл.

$$A(1,2,3), B(-1,2,3), C(-1,-2,-3), D(1,2,-3), E(-1,-2,3), F(1,-2,-3)$$

36. $ABCD$ суурьтай, AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 хажуу ирмэгтэй $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубийн зарим оройн координат өгөв. Кубийн бусад оройн координатыг ол.

- $A(4,0,0), B(0,0,0), C(0,-4,0), B_1(0,0,-4)$
- $A(0,0,0), C(-2,-2,0), D(0,-2,0), C_1(-2,-2,-2)$

- 37.** $ABCD$ суурьтай, AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 хажуу ирмэгтэй $ABCDA_1B_1C_1D_1$ тэгш өнцөгт параллелепипедийн зарим оройн координат өгөв. Параллелепипедийн бусад оройн координатыг ол.
- $A(0,0,0), B(1,0,0), D(0,3,0), A_1(0,0,2)$
 - $A(-2,0,0), B(0,0,0), C(0,-5,0), B_1(0,0,1)$
- 38.** $A_1OC_1D_1$ суурьтай, AA_1, BO, CC_1, DD_1 хажуу ирмэгтэй $ABCDA_1OC_1D_1$ тэгш өнцөгт параллелепипедийн өндөр нь 6 нэгж, $D_1(4,5,0)$ бол бусад оройн координатыг ол.
- 39.** $ABCDA_1B_1C_1D_1$ тэгш өнцөгт параллелепипедийн өндөр нь 4 нэгж ба B_1C_1 ирмэг Oy тэнхлэг дээр, $A_1B_1C_1D_1$ суурь Oxy хавтгай дээр оршдог ба A_1B_1, C_1D_1 хоёр ирмэг Ox тэнхлэгийн хувьд тэгш хэмтэй. $D_1(4,2,0)$ бол бусад оройн координатыг ол.
- 40.** Хэрэв 2 нэгж талтай кубийн нэг орой $(0,0,1)$ координаттай цэг дээр оршдог бол бусад оройн координатыг ол.
- 41.** Координатын эх дээр оройтой 3 нэгж талтай кубийн бусад оройн координатыг ол.
- 42.** $(3,1,7)$ цэгийг дайруулан Oyz хавтгайтай параллел хавтгай нь Ox тэнхлэгийг ямар цэгээр огтлох вэ?
- 43.** $(3,-3,4)$ цэгээс координатын тэнхлэг бүрд болон координатын хавтгай бүрд перпендикуляр буулгав. Тэрхүү перпендикуляр бүрийн суурийн цэгүүдийн координатыг ол.
- 44.** $A(-1,2,-6), B(3,-5,7), C(2,4,-1)$ цэг бүртэй Oxy, Oxz, Oyz координатын хавтгай бүрийн хувьд тэгш хэмтэй цэгүүдийг ол.
- 45.** $A(3,2,-5), B(4,-1,-1), C(-2,4,3)$ цэг бүртэй Ox, Oy, Oz координатын тэнхлэг бүрийн хувьд тэгш хэмтэй байх цэгийг ол.
- 46.** Огторгуйн тэгш өнцөгт координатын системд дараах дурс, биетийг байгуул.
- $A(3,-2,1), B(-1,4,-3)$ цэгт төгсгөлтэй хэрчим
 - $A(1,-1,2), B(3,1,0), C(-1,2,-3)$ цэгт оройтой гурвалжин
 - $A(2,1,1), B(1,3,1), C(2,2,2), D(3,2,0)$ цэгт оройтой тетраэдр

5.3 ОГТОРГУЙН КООРДИНАТЫН СИСТЕМ ДЭХ ХОЁР ЦЭГИЙН ХООРОНДОХ ЗАЙ, ХЭРЧМИЙН ДУНДАЖ ЦЭГИЙН КООРДИНАТ

Хоёр цэгийн хоорондох зай

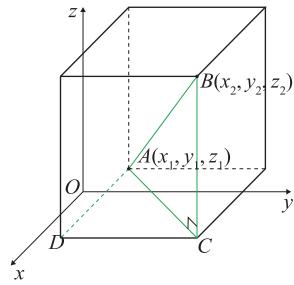
Огторгуйн тэгш өнцөгт координатын системд хоёр цэгийн хоорондох зайг олоходоо Пифагорын теорем хэрэглэнэ.

Огторгуйн тэгш өнцөгт координатын систем дэх $A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2)$ хоёр цэгийн хоорондох зайг ольё.

Үүний тулд талсууд нь координатын хавтгайтай параллел байх тэгш өнцөгт параллелепипедийг гол диагоналийн төгсгөлийн цэгүүд A, B байхаар байгуулья. Зураг хар. Параллелепипедийн суурийн хоёр цэгийг зурагт үзүүлснээр C, D гээд координатыг тодорхойлбол харгалзан (x_2, y_2, z_1) ба (x_2, y_1, z_1) байна.

ABC гурвалжны хувьд $AB^2 = AC^2 + BC^2$, ACD гурвалжны хувьд $AC^2 = AD^2 + DC^2$ байна. Үүнийг өмнөх тэнцэтгэлд орлуулбал $AB^2 = AD^2 + DC^2 + BC^2$ буюу $AB = \sqrt{AD^2 + DC^2 + BC^2}$

Энд $AD = |x_2 - x_1|$, $DC = |y_2 - y_1|$, $BC = |z_2 - z_1|$ тул
 $|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$ болно.



Хоёр цэгийн хоорондох зайд олох томъёо.

Огторгуйд өгсөн $A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2)$ хоёр цэгийн хоорондох зайд

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \text{ томъёогоор олно.}$$

Хэрчмийн дундаж цэгийн координат

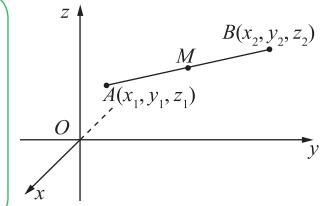
Хавтгай дээрх хэрчмийн дундаж цэгийн координат олох томъёог огторгуйн координатын системд өргөтгэн томъёолж болно.

Хэрчмийн дундаж цэгийн координат олох томъёо.

Огторгуй дахь AB хэрчмийн дундаж цэгийг $M(x, y, z)$

$$\text{гэвэл түүний координатыг } x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2},$$

$$z = \frac{z_1 + z_2}{2} \text{ томъёогоор олно.}$$



Жишээ 1. $A(4, 14, 8), B(1, 2, -1), C(2, 6, 2)$ цэг өгөв. Хоёр цэгийн хоорондох зайн томъёо ашиглан эдгээр цэгүүд нэг шулуун дээр оршино гэж батал. AB хэрчмийн дундаж цэгийн координатыг ол.

Бодолт. AB, BC, AC хэрчмийн уртыг оль ё.

$$|AB| = \sqrt{(1-4)^2 + (2-14)^2 + (-1-8)^2} = \sqrt{234} = \sqrt{9 \cdot 26} = 3\sqrt{26}$$

$$|BC| = \sqrt{(2-1)^2 + (6-2)^2 + (2-(-1))^2} = \sqrt{26}$$

$$|AC| = \sqrt{(2-4)^2 + (6-14)^2 + (2-8)^2} = \sqrt{104} = \sqrt{4 \cdot 26} = 2\sqrt{26}$$

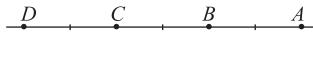
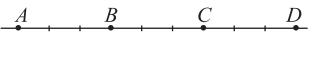
$3\sqrt{26} = \sqrt{26} + 2\sqrt{26}$ тул $AB = BC + AC$ байна. Эндээс C цэг AB хэрчим дээр оршино. Иймд гурван цэг нэг шулуун дээр оршино.

AB хэрчмийн дундаж цэгийг $D(x, y, z)$ гэж тэмдэглэн координатыг олбол

$$x = \frac{4+1}{2} = \frac{5}{2} = 2.5, \quad y = \frac{14+2}{2} = \frac{16}{2} = 8, \quad z = \frac{8+(-1)}{2} = \frac{7}{2} = 3.5 \text{ буюу } D(2.5, 8, 3.5)$$

байна.

47. A, B цэгүүдийн хоорондох зайд ол. AB хэрчмийн дундаж цэгийн координатыг ол.

- a. $A(2, -3, 4), B(0, -5, -1)$ б. $A(4, -2, 1), B(2, -4, -1)$
 в. $A(1, -3, 5), B(-2, -3, -4)$ г. $A(-3, -3, 0), B(5, 2, 6)$
- 48.** $A(6, -1, 4), B(2, 2, -5), C(-2, 3, 3)$ цэг өгөв. Эдгээрийн аль цэг нь
 а. координатын эхэд б. Oy тэнхлэгт в. Oxz хавтгайд ойр байрлах вэ?
- 49.** $A(2, 3, 7), B(-3, 2, -3)$ хоёр цэгээс ижил зайд алслагдсан
 а. Ox б. Oy в. Oz тэнхлэг дээр орших цэгийн координатыг ол.
- 50.** $A(-2, 3, 4), B(-3, -1, 2), C(0, 1, -1)$ гурван цэгээс ижил зайд алслагдсан
 а. Oxy б. Oyz в. Oxz хавтгай дээр орших цэгийн координатыг ол.
- 51.** $A(3, -2, 2)$ цэгээс $\sqrt{33}$ нэгж зайд орших хоёр цэгийн координатыг Ox тэнхлэг дээр ол.
- 52.** $B(-1, -1, -3)$ цэгээс $\sqrt{26}$ нэгж зайд орших хоёр цэгийн координатыг Oy тэнхлэг дээрээс ол.
- 53.** Хэрэв $A(-1, -4, 3), B(-2, 1, 2)$ бол C, D цэгүүдийн  координатыг ол.
- 54.** Хэрэв $B(2, -6, 5), C(2, -1, -4)$ бол A, D цэгүүдийн  координатыг ол.
- 55.** $A(3, 7, 4), B(5, -5, -2)$ цэгүүд өгөв. Координатын эхээс AB хэрчмийн дундаж цэг хүргэлх зайлж ол.
- 56.** Дараах цэгт оройтой гурвалжныг адил хажуут болохыг үзүүл.
 а. $A(0, 4, 4), B(2, 6, 5), C(1, 4, 3)$ б. $A(3, 5, -4), B(-1, 1, 2), C(-5, -5, -2)$
- 57.** $A(0, 4, 4), B(2, 6, 5), C(1, 4, 3)$ цэгт оройтой гурвалжны периметрийг ол.
- 58.** $ABCD$ суурьтай, AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 хажуу ирмэгтэй кубийн
 $A(0, 0, 0), B(3, 0, 0), D(0, -3, 0), A_1(0, 0, 3)$ бол B_1C_1, CD ирмэгүүдийн дунджид төгсгөлтэй хэрчмийн дундаж цэгийн координатыг тус тус ол.
- 59.** Хэрэв $SABCD$ гэсэн зөв дөрвөн өнцөгт пирамидын оройн цэгүүд
 $A(1, -1, 0), B(-1, -1, 0), C(-1, 1, 0), D(1, 1, 0), S(0, 0, 5)$ бол дараах цэгийн координатыг ол.
 а. SB ирмэгийн дундаж
 б. SCD талсын DM медианы дундаж
 в. BD_1 хэрчмийн дундаж
 г. AB, SC ирмэгийн дунджид төгсгөлтэй хэрчмийн дундаж
- 60.** Өгсөн цэгт оройтой дөрвөн өнцөгтийг параллелограмм болохыг батал.
 а. $A(2, 4, 2), B(-1, 2, 3), C(-3, 3, 6), D(0, 5, 5)$
 б. $A(0, 2, -3), B(-1, 1, 1), C(2, -2, -1), D(3, -1, -5)$
- 61.** Өгсөн цэгт оройтой дөрвөн өнцөгтийг ромбо болохыг батал.
 а. $A(6, 7, 8), B(8, 2, 6), C(4, 3, 2), D(2, 8, 4)$
 б. $A(0, 2, 0), B(1, 0, 0), C(2, 0, 2), D(1, 2, 2)$
- 62.** $A(5, 2, 6), B(6, 4, 4), C(4, 3, 2), D(3, 1, 4)$ цэгт оройтой дөрвөн өнцөгтийг квадрат болохыг батал.
- 63.** $ABCD$ параллелограммын D оройн координатыг ол.

- а. $A(1,3,-1)$, $B(-2,1,0)$, $C(-1,0,1)$ б. $A(2,1,3)$, $B(-4,2,0)$, $C(6,-2,4)$
64. $A(-2,-4,1)$, $B(-5,-6,-1)$ цэгүүд $ABCD$ параллелограммын оройнууд байг. Хэрэв диагоналиудын огтлонцлын цэг $O(1, 3, 2)$ бол C ба D оройн координатыг ол.

БҮЛГИЙН НЭМЭЛТ ДААЛГАВАР

1. $O(0,0)$, $A(3,k)$, $B(3k,9)$, $C(4k,2k+7)$ цэг өгөв.
а. Хэрэв O, A, B цэгүүд нэг шулуун дээр оршдог бол k -ийн утгыг ол.
б. Хэрэв OA нь BC -тэй параллел бол k -ийн утгыг ол.
2. $A(-1,-1)$, $B(2,5)$, $C(2k,k)$ цэгт оройтой ABC гурвалжин өгөв. Хэрэв AB нь BC -тэй перпендикуляр бол k -ийн утгыг ол.
3. Хэрэв $A(-2,2)$, $B(2,-5)$, $C(7,-6)$, $D(5,-1)$ цэгт оройтой дөрвөн өнцөгтийн AB, AD талуудын дундаж цэг харгалзан M, N бол MCN гурвалжныг адил хажуут болохыг харуул.
4. Хэрэв $y = 2 + \frac{1}{1+x}$ муруй нь абсцисс тэнхлэгийг A цэгээр, ординат тэнхлэгийг B цэгээр огтлох бол AB шулууны тэгшигтгэл бич.
5. Хэрэв $A(1,0)$, $B(-2,6)$ бол AB шулуунтай параллел, $(-3,1)$ цэгийг дайрсан шулууны тэгшигтгэлийг бич.
6. Хэрэв $A(1,-1)$, $B(-2,11)$ бол AB шулуунд перпендикуляр, $(-5,-4)$ цэгийг дайрсан шулууны тэгшигтгэлийг бич.
7. AB, DC талууд нь параллел, BC нь AB ба DC талуудад перпендикуляр байх $ABCD$ трапец өгөв. A, B, D оройн координатууд харгалзан $(4,2), (16,8), (5,10)$ бол DC ба BC талуудыг агуулсан шулууны тэгшигтгэлийг бич. C оройн координатыг олж, CD талын уртыг ол.
8. $(3,1), (1,-5)$ цэгт төгсгөлтэй хэрчмийн дундаж цэгийг дайрсан, $2y - x = 7$ шулуунтай параллел шулууны тэгшигтгэл бич.
9. ABC гурвалжны оройн цэгүүд харгалзан $(1,5), (4,4), (8,6)$ байг. Хэрэв P нь A оройгоос BC талд буулгасан өндрийн суурь бол AP өндрийг агуулсан шулууны тэгшигтгэл бич. P цэгийн координатыг ол. AP, BC талуудын уртыг олж ABC гурвалжны талбайг ол. B цэгээс AC талд буулгасан өндрийг агуулсан шулууны тэгшигтгэл бич.
10. Хэрэв $A(5,4,-1)$, $B(3,-2, z)$ хоёр цэгийн хоорондох зайд z бол z -ийн утгыг ол.
11. $A(2,5,3)$ цэгийг дайруулан Ox тэнхлэгтэй параллел бөгөөд Oyz хавтгайг B цэгт огтолсон AB шулуун татав. B цэгийн координатыг ол.
12. $A(0,4,4)$, $B(2,6,5)$, $C(1,4,3)$ цэгт оройтой гурвалжныг адил хажуут гурвалжин болохыг харуул.
13. $A(-1,2,1)$, $B(2,0,-1)$, $D(3,1,4)$ цэгт оройтой $ABCD$ параллелограммын C оройн координатыг ол.
14. $ABCD$ тэгш өнцөгтийн A оройн координат $(-2,2)$ ба BC талыг агуулсан шулууны тэгшигтгэл $y + x - 6 = 0$ байв. Тэгвэл AD, AB талуудыг агуулсан шулууны тэгшигтгэл бич. B оройн координатыг ол. Хэрэв BC талын урт нь AB талын уртаас 2 дахин их бол C ба D оройн координатыг ол.

VI БҮЛЭГ. ТРИГОНОМЕТР

Энэ бүлэг сэдвийг судалснаар дараах мэдлэг, чадварыг эзэмшинэ.

- Нэгж радиустай тойрог ашиглан тригонометрийн функцийн утга олох
- Тригонометр функцийн утга олох
- $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha$ ба $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ адилтгалыг хэрэглэх

6.1 НЭГЖ РАДИУСТАЙ ТОЙРОГ БА ТРИГОНОМЕТР ФУНКЦ

Хавтгайн тэгш өнцөгт координатын системийн Ox тэнхлэг дээр координатын эхийн баруун талд A цэг сонгон авч, түүнийг дайруулан O цэгт төвтэй OA радиустай тойрог татъя.

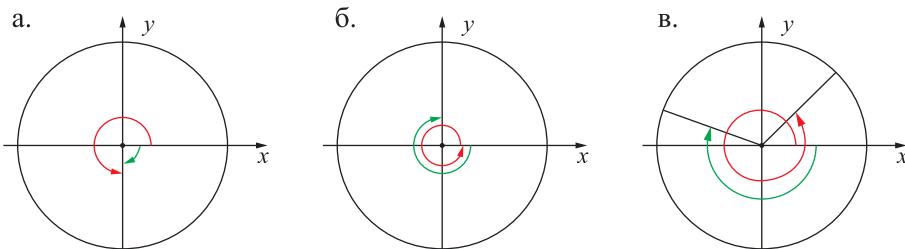
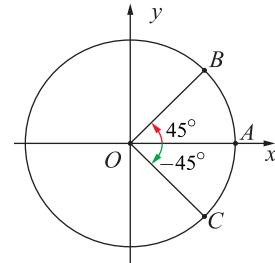
OA -г эхлэл радиус гэе. Эхлэл радиусыг O цэгт төвтэйгээр цагийн зүүний эсрэг 45° -аар эргүүлж OB радиуст шилжүүлснийг эхлэл радиус 45° -ын өнцгөөр эргэлээ, харин цагийн зүүний дагуу 45° -аар эргүүлж OC радиуст шилжүүлснийг эхлэл радиус (-45°) -ын өнцгөөр эргэлээ гэдэг. 45° ба -45° -ын эргэлтийн өнцгийг зураг дээр үзүүллээ.

Цаашид эхлэл радиусыг

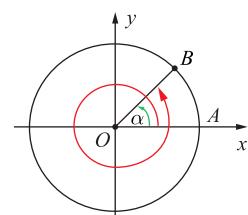
- цагийн зүүний эсрэг эргүүлэхэд үүсэх өнцгийг эерэг өнцөг
- цагийн зүүний дагуу эргүүлэхэд үүсэх өнцгийг сөрөг өнцөг гэе.

Эргэлтийн өнцгийн хэмжээг ямар нэг бодит тоон градусаар өгч болно.

Жишээ 1. Зурагт а. 270° ба -90° , б. 360° ба -270° , в. 405° ба -200° -ын эргэлтийн өнцгүүдийг үзүүллээ.



Зурагт OA ба OB радиусыг үзүүлэв. Энд эхлэл радиус OA -г α өнцгөөр эргүүлж OB радиуст шилжүүлэхэд α нь олон янз байж болохыг харуулсан болно. Хэрэв $\angle AOB = 45^\circ$ бол мөн AO радиусыг $45^\circ + 360^\circ \cdot n$ ($n \in \mathbb{Z}$) өнцгөөр эргүүлбэл OB радиус гарна.



Тухайлбал:

n -ийн утга	-2	-1	0	1	2
Өнцгийн хэмжээ	-675°	-315°	45°	405°	765°

-675° эргэнэ гэдэг нь цагийн зүүний дагуу хоёр бүтэн эргээд, цагийн зүүний эсрэг 45° эргэнэ гэсэн үг. Мөн -315° эргэнэ гэдэг нь цагийн зүүний дагуу нэг бүтэн эргээд, цагийн зүүний эсрэг 45° эргэнэ. Харин 405° эргэнэ гэдэг нь цагийн зүүний эсрэг нэг бүтэн болон нэмж 45° эргэнэ, 765° эргэнэ гэдэг нь цагийн зүүний эсрэг хоёр бүтэн болон нэмж 45° эргээд бүгд $\angle AOB = 45^\circ$ -тай давхаж зурагдана.

Координатын тэнхлэгүүд тойргийг мөчүүд гэж нэрлэгдэх дөрвөн хэсэгт хуваана. Мөчүүдийг зурагт үзүүлсэн байдлаар дугаарлана.

OA эхлэл радиус α өнцгөөр эргэж OB радиуст шилжсэн бол OB радиус координатын аль мөчид байрлаж буйгаас хамаарч, $\angle AOB = \alpha$ өнцгийг тэр мөчийн өнцөг гэдэг.

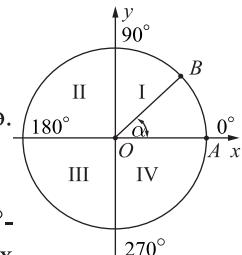
Хэрэв $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ байвал α өнцгийг I мөчийн өнцөг гэнэ.

Хэрэв $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ байвал α өнцгийг II мөчийн өнцөг гэнэ.

Хэрэв $180^\circ < \alpha < 270^\circ$ байвал α өнцгийг III мөчийн өнцөг гэнэ.

Хэрэв $270^\circ < \alpha < 360^\circ$ байвал α өнцгийг IV мөчийн өнцөг гэнэ.

Аливаа өнцгийг аль мөчид оршиж байгааг олохдоо түүнд 360° -ийн эргэлт хэд дахин орсныг тооцож, 360° -аас бага 0° -аас их хэмжээтэй бодит тоон эргэлтийн өнцөгт шилжүүлж олж болно.



Жишээ 2. а. 510° б. 1150° в. 660° г. 930° өнцөг хэддүгээр мөчийн өнцөг вэ?

Бодолт. а. 510° -ын өнцөг $510^\circ = 360^\circ + 150^\circ$ ба $90^\circ < 150^\circ < 180^\circ$ учраас 150° нь II мөчид оршино. Иймээс 510° нь II мөчид орших өнцөг байна.

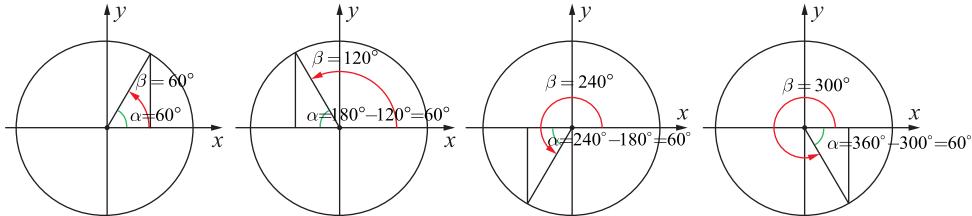
б. 1150° -ын өнцөг $1150^\circ = 3 \cdot 360^\circ + 70^\circ$ ба $0^\circ < 70^\circ < 90^\circ$ учраас 70° I мөчид оршино. Иймээс 1150° нь I мөчид орших өнцөг байна.

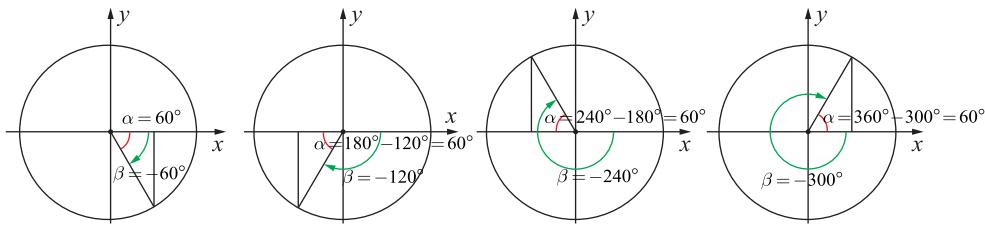
в. 660° -ын өнцөг $660^\circ = 360^\circ + 300^\circ$ ба $270^\circ < 300^\circ < 360^\circ$ учраас 300° IV мөчид оршино. Иймээс 660° нь IV мөчид орших өнцөг байна.

г. 930° -ын өнцөг $930^\circ = 2 \cdot 360^\circ + 210^\circ$ ба $180^\circ < 210^\circ < 270^\circ$ учраас 210° III мөчид оршино. Иймээс 930° нь III мөчид орших өнцөг байна.

$0^\circ, \pm 90^\circ, \pm 180^\circ, \pm 270^\circ, \pm 360^\circ, \dots$ өнцгүүд аль ч мөчид хамаарахгүй, координатын тэнхлэгүүд дээр оршино.

Дараах зурагт өнцгүүдийг координатын мөч тус бүрд хэрхэн эерэг хурц өнцгөөр дүрслэхийг харууллаа.





Өмнөх ангиудад $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$ байх α өнцгийн синус, косинус, тангенсыг тодорхойлсон. Одоо дурын α хэмжээтэй өнцгийн хувьд энэ тодорхойлолтыг өргөтгэн авч үзэх болно.

Тэгш өнцөгт координатын системийн эх O цэг дээр төвтэй $OA = R$ радиустай, $OA_1 = 1$ радиустай хоёр тойрог татъя. OA нь α өнцгөөр эргэж OB байрлалд шилжсэн байг. OB хэрчим OA_1 радиустай тойргийг B_1 цэгээр огтолдог гээ.

B, B_1 цэгүүдийн координат харгалзан $(x, y), (x_1, y_1)$ байг. Эдгээр цэгүүдээс Ox тэнхлэг рүү перпендикуляр буулгаж, түүнтэй огтоллцож байгаа цэгүүдийг харгалзан B', B'_1 гэе.

$OB_1B'_1$ ба $OB'B'$ тэгш өнцөгт гурвалжны хувьд α өнцөг ерөнхий, $\angle OB'B = \angle OB'_1B_1 = 90^\circ$ тул уг гурвалжнууд төсөтэй. Иймд төсөөгийн харьцаа

бичвэл $\frac{BB'}{OB} = \frac{B_1B'_1}{OB_1}$, $\frac{OB'}{OB} = \frac{OB'_1}{OB_1}$ болно.

Эдгээр харьцаанд

$BB' = y$, $OB = R$, $B_1B'_1 = y_1$, $OB_1 = 1$

$OB' = x$, $OB = R$, $OB'_1 = x_1$, $OB_1 = 1$ болохыг

тооцвол $\frac{y}{R} = \frac{y_1}{1}$, $\frac{x}{R} = \frac{x_1}{1}$ буюу $\frac{y}{y_1} = R$, $\frac{x}{x_1} = R$

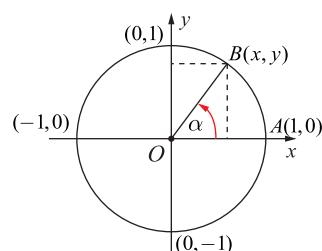
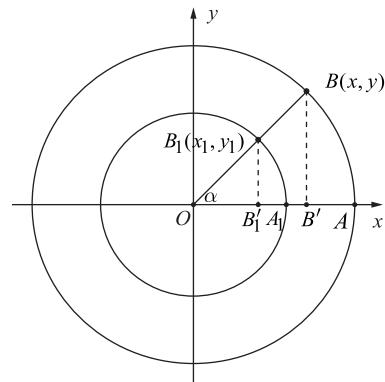
болно. Иймд $\frac{y}{y_1} = \frac{x}{x_1}$ гэдгээс $\frac{y}{x} = \frac{y_1}{x_1}$ байна. Эндээс $\frac{x}{R}, \frac{y}{R}, \frac{y}{x}$ харьцаанууд

тойргийн радиусаас хамаarahгүй тогтмол байна.

Тэгш өнцөгт гурвалжны тригонометр харьцааны утга, талын уртаас хамаarahгүй, зөвхөн хурц өнцгийн хэмжээнээс хамаардаг учраас нэгж гипотенузтай гурвалжны α хэмжээтэй өнцгийн хувьд тригонометр харьцаануудыг тодорхойльё.

Тодорхойлолт. Координатын эхэд төвтэй, нэгж радиустай, эргэлтийн эхлэл цэг, эерэг сөрөг хоёр чиглэл сонгогдсон тойргийг нэгж тойрог буюу тригонометр тойрог гэнэ.

Нэгж тойргийн Ox тэнхлэгтэй огтоллцсон цэгийг эхлэл цэг, OA -г эхлэл радиус гэдэг.



Тодорхойлолт. Нэгж тойргийн OA эхлэл радиус O цэгийг тойрч α өнцгөөр эргээд OB байрлалд шилжсэн гэж үзье. B цэгийн координатыг (x, y) гэж тэмдэглэе. Тэгвэл

- B цэгийн ординатыг α өнцгийн синус гээд $\sin \alpha$ гэж тэмдэглэнэ.
- B цэгийн абсциссыг α өнцгийн косинус гээд $\cos \alpha$ гэж тэмдэглэнэ.
- B цэгийн ординатыг түүний абсцисст харьцуулсан харьцааг α өнцгийн тангенс гээд $\operatorname{tg} \alpha$ гэж тэмдэглэнэ.

Өөрөөр хэлбэл $y = \sin \alpha$, $x = \cos \alpha$, $\frac{y}{x} = \operatorname{tg} \alpha$, ($x \neq 0$) болно.

Анхаар. Хэрэв $\alpha > 0$ цагийн зүүний эсрэг, $\alpha < 0$ бол цагийн зүүний дагуу эргэнэ.

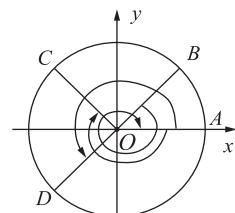
Тодорхойлолт. α хувьсагчийн авах утга бүрд тригонометр харьцаануудын $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$ гэсэн зөвхөн ганц утга харгалзана. Ийм учраас синус, косинус, тангенс нь α аргументтэй функц болно. Эдгээрийг тригонометр функц гэдэг.

$\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$ нь α аргументтай тригонометр функцийн утга юм.

Дээрх тодорхойлолтоос харахад α -ийн ямар ч утгад x , y тодорхой утга авч байна. Мөн $-1 \leq x \leq 1$, $-1 \leq y \leq 1$ байх учраас синус, косинус функцүүд $]-\infty, +\infty[$ тодорхойлогдох мужтай, $[-1, 1]$ утгын мужтай байна.

α -ийн $\pm 90^\circ$, $\pm 270^\circ$, $\pm 450^\circ \dots \pm (2k+1) \cdot 90^\circ$ утгад $x=0$, $y=\pm 1$ буюу $\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x}$ нь утгагүй болно. Харин α өнцгийн бусад утгад $-\infty < \frac{y}{x} < +\infty$ буюу $-\infty < \operatorname{tg} \alpha < +\infty$ болно. Иймд тангенс нь $\{\alpha \neq (2k+1) \cdot 90^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$ тодорхойлогдох мужтай, $]-\infty, +\infty[$ утгын мужтай функц юм.

- Координатын эх дээр төвтэй тойрог дээр
 - 175°
 - 320°
 - 765°
 - -305°
 - 1375°
 - -75°
 - -565° хэмжээтэй тэнцүү байх өнцгүүдийг зур.
- Зурагт дурсэлсэн өнцгүүдийн тэмдгийг тодорхойл. Хэддүгээр мөчид болон координатын тэнхлэгүүд дээрх ямар өнцгүүдийн хооронд оршиж байна вэ?
- α нь аль мөчийн өнцөг болохыг тодорхойл.
 - 25°
 - -95°
 - 125°
 - 345°
 - -235°
 - 225°
- OA эхлэл радиусыг α өнцгөөр эргүүлэх эргүүлэлтээр A цэгт харгалзах B, C, D, E, K цэгийг тригонометр тойрог дээр дүрсэл.
 - 245°
 - 55°
 - -765°
 - -345°
 - 1375°
- α өнцгөөр эргүүлэх эргүүлэлтээр $A(0,1)$ цэгт харгалзах B, C, D цэгийг тригонометр тойрог дээр дүрсэл.
 - $120^\circ + 360^\circ k$
 - $225^\circ + 360^\circ k$
 - $-765^\circ + 360^\circ k$



Тригонометр функцийн утгын тэмдэг

$OA=1$ байх эхлэл радиусыг α өнцгөөр эргүүлэхэд A цэг B цэгт шилжсэн байг. Тригонометр функцийн утга эерэг, сөрөг байх нь B цэг аль мөчид байгаагаас хамаарна. α өнцгийг OB радиус оршиж буй мөчийн өнцөг гэдэг.

$\sin \alpha = \frac{y}{r}$ байх учраас $\sin \alpha$ -ийн утгын тэмдэг y -ийн тэмдгээс хамаарна.

I ба II мөчид $y > 0$ учир $\sin \alpha > 0$

III ба IV мөчид $y < 0$ учир $\sin \alpha < 0$

$\cos \alpha = \frac{x}{1}$ байх учраас $\cos \alpha$ -ийн утгын тэмдэг x -ийн

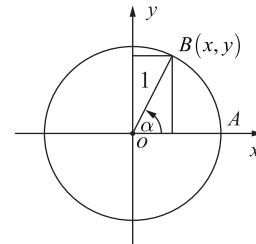
тэмдгээс хамаарна.

I ба IV мөчид $x > 0$ учир $\cos \alpha > 0$

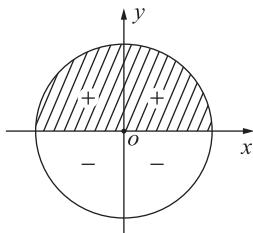
II ба III мөчид $x < 0$ учир $\cos \alpha < 0$

$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x}$ байх учраас $\operatorname{tg} \alpha$ -ийн утгын тэмдэг y ба x -ийн

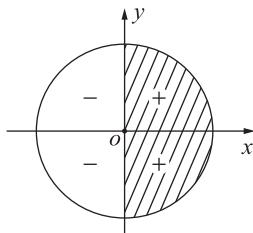
тэмдгээс хамаарна.



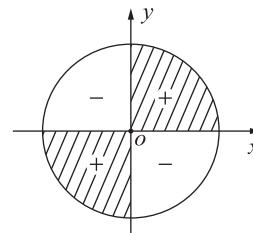
Синусын тэмдэг



Косинусын тэмдэг



Тангенсын тэмдэг



Жишээ 3. а. Хэрэв $\alpha = 310^\circ$ б. $\alpha = -210^\circ$ бол $\sin \alpha, \cos \alpha, \operatorname{tg} \alpha$ нь ямар тэмдэгтэй байх вэ?

Бодолт. а. $\alpha = 310^\circ$ нь IV мөчид орших өнцөг учраас

$$\sin 310^\circ < 0, \cos 310^\circ > 0, \operatorname{tg} 310^\circ < 0$$

б. $\alpha = -210^\circ$ нь цагийн зүүний дагуу эргэж үүсгэсэн II мөчийн өнцөг учраас
 $\sin(-210^\circ) > 0, \cos(-210^\circ) < 0, \operatorname{tg}(-210^\circ) < 0$ байна.

13. Дараах өнцгийн хувьд $\sin \alpha, \cos \alpha, \operatorname{tg} \alpha$ -ийн тэмдгийг ол.

- а. 340° б. 210° в. 40° г. 130°

14. Дараах тооны тэмдгийг тодорхойл.

- а. $\sin 240^\circ$ б. $\cos 110^\circ$ в. $\operatorname{tg} 40^\circ$ г. $\sin(-125^\circ)$
 д. $\sin 2050^\circ$ е. $\cos(-250^\circ)$ ё. $\operatorname{tg}(-160^\circ)$ ж. $\operatorname{tg} 220^\circ$

15. Дараах нөхцөлийг хангах α өнцөг аль мөчид орших вэ?

- а. $\sin \alpha < 0$ ба $\cos \alpha > 0$ б. $\sin \alpha > 0$ ба $\cos \alpha > 0$
 в. $\sin \alpha > 0$ ба $\cos \alpha < 0$ г. $\sin \alpha < 0$ ба $\cos \alpha < 0$
 д. $\sin \alpha > 0$ ба $\operatorname{tg} \alpha > 0$ е. $\operatorname{tg} \alpha < 0$ ба $\cos \alpha > 0$

16. а. синус ба косинус б. синус ба тангенс в. косинус
 ба тангенс аль мөчид ижил тэмдэгтэй байх вэ?

17. а. синус ба косинус б. синус ба тангенс в. косинус
 ба тангенс аль мөчид эсрэг тэмдэгтэй байх вэ?

18. Илэрхийлэл ямар тэмдэгтэй байх вэ?

- а. $\sin 240^\circ \cdot \cos 110^\circ$ б. $\cos 170^\circ \cdot \operatorname{tg} 220^\circ$
 в. $\operatorname{tg}(-40^\circ) \cdot \sin 20^\circ$ г. $\operatorname{tg}(-160^\circ) \cdot \cos(-150^\circ)$
 д. $\sin 156^\circ \cdot \cos(-10^\circ)$ е. $\sin(-266^\circ) \cdot \cos(-190^\circ)$

6.2 ТРИГОНОМЕТР ФУНКЦИЙН ЗАРИМ УТГА

Өмнөх ангиудад хурц өнцгийн тригонометр харьцааны утгуудыг хэрхэн олдог талаар судалсан. Одоо эдгээр утгуудыг тригонометр функцийн утгаар хэрхэн илэрхийлэхийг судалъяа.

Жишээ 1. $30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ -ын утгад харгалзах синус, косинус, тангенс функцийн утгыг ол

Бодолт. Координатын эх дээр төвтэй нэгж радиустай тойрог дээрх эхлэл радиус OA -г $30^\circ, 60^\circ, 45^\circ$ -аар эргүүлбэл OB радиуст шилжинэ.

а. $\alpha = 30^\circ$ үед OCB тэгш өнцөгт гурвалжнаас BC нь

30° -ын эсрэг орших катет учраас $BC = \frac{1}{2}$ болно. Иймд

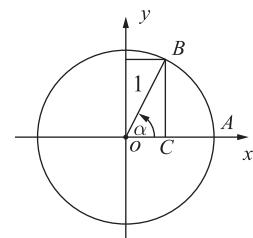
тодорхойлолт ёсоор $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}, \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$ болно.

б. $\alpha = 60^\circ$ үед хэрхэн олж болох вэ?

Тухайлбал: $\angle OBC = 30^\circ$ учраас $OC = \frac{1}{2}$. Иймд Пифагорын

теоремоор

$BC = \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ байна. Тодорхойлолт ёсоор $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$,



$\operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}$ болно.

в. $\alpha = 45^\circ$ үед гипотенуз нь 1, $OC = BC$ байх адил хажуут тэгш өнцөгт гурвалжинд Пифагорын теорем бичээд $OC = BC = \frac{1}{\sqrt{2}}$ гэж олно. Эндээс $\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$ болно.

I мөчийн өнцгийн утгыг ашиглан бусад мөчийн тригонометр функцийн утгыг хэрхэн олж болох вэ?

Жишээ 2. 150° -ын өнцгийн синус, косинус, тангенсын утгыг ол.

Бодолт. Нэгж тойргийн эхлэл радиус OA -г 60° , 150° -аар эргүүлбэл харгалзан OB, OK радиусуудад шилжинэ. (Зурагт үзүүлэв)

B цэгийн абсцисс нь OA

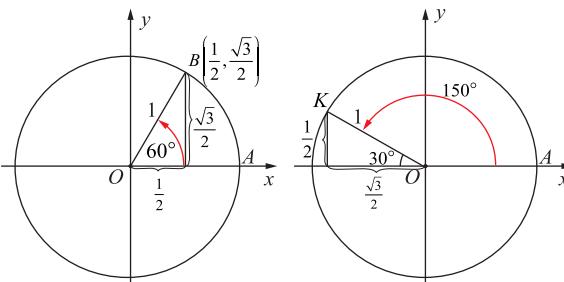
радиусын хагас болох учраас $\frac{1}{2}$,
ординат нь AOB гэсэн зөв
гурвалжны өндөр учраас

$$h = \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ болно.}$$

Тодорхойлолт ёсоор B болон K
цэгийн ординат нь $60^\circ, 150^\circ$
өнцгийн синус байна. Өөрөөр хэлбэл

$$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \sin 150^\circ = \frac{1}{2} \text{ байна. Үүнтэй адилаар } \cos 60^\circ = \frac{1}{2}, \cos 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}, \operatorname{tg} 150^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}} \text{ болно.}$$



Жишээ 3. $135^\circ, -135^\circ$ өнцгийн синус, косинус, тангенс функцийн утгыг ол.

Бодолт. Зурагт $135^\circ, -135^\circ$ өнцгүүдийг дүрслэв. Тэгш өнцөгт OCB гурвалжны өнцөгт $\angle BOC = \angle CBO = 45^\circ$ учраас $OC = BC$ байх адил хажуут тэгш өнцөгт гурвалжин болно. Уг гурвалжны хувьд Пифагорын теорем бичвэл

$$OC^2 + OC^2 = 1, 2OC^2 = 1$$

$$\text{буюу } OC = BC = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

болно. Иймд

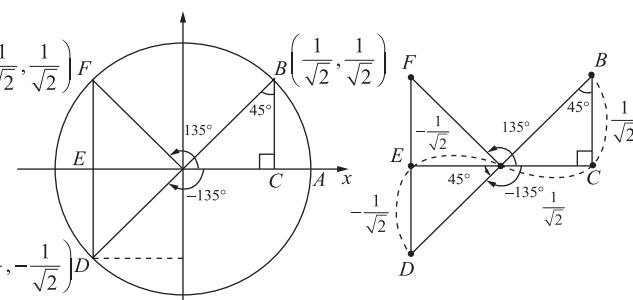
$$\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}, \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\operatorname{tg} 45^\circ = 1 \text{ болно.}$$

Эндээс $\angle COF = 135^\circ$,

$$\angle COD = -135^\circ \text{ учир } \sin 135^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}, \cos 135^\circ = -\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ болох ба үүнтэй адилаар}$$

$$\sin(-135^\circ) = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \cos(-135^\circ) = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \operatorname{tg} 135^\circ = -1, \operatorname{tg}(-135^\circ) = 1 \text{ болно.}$$



Жишээ 4. а. $\alpha = 1125^\circ$ б. $\alpha = -1500^\circ$ бол өнцгийн синус, косинус, тангенс функцийн утгыг ол.

Бодолт. а. 1125° нь нэгж тойргийн дагуу ээрэг чиглэлд 360° -аар гурван удаа бүтэн тойроод Ox тэнхлэгтэй 45° үүсгэж I мөчид оршино.

Өөрөөр хэлбэл $1125^\circ = 3 \cdot 360^\circ + 45^\circ$ байна. I мөчид синус, косинус, тангенс нь бүгд нэмэх тэмдэгтэй.

Иймд $\sin 1125^\circ = \sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos 1125^\circ = \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\operatorname{tg} 1125^\circ = \operatorname{tg} 45^\circ = 1$ болно.

б. -1500° нь нэгж тойргийн дагуу сөрөг чиглэлд 360° -аар дөрвөн удаа бүтэн тойроод, Ox тэнхлэгтэй 60° -ын өнцөг үүсгэж IV мөчид оршино. Өөрөөр хэлбэл $1500^\circ = 4 \cdot 360^\circ + 60^\circ$ байна. Иймд синус, тангенс хасах тэмдэгтэй, косинус нэмэх тэмдэгтэй байна. Иймд $\sin(-1500^\circ) = -\sin 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos(-1500^\circ) = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$, $\operatorname{tg}(-1500^\circ) = -\sqrt{3}$ болно.

19. Зураг дахь \square -ний оронд тохирох тоог олж бич.

- 20.** α нь а. $\sin 39^\circ$ б. $\cos 54^\circ$ в. $\operatorname{tg} 42^\circ$
 г. $\sin 72^\circ$ д. $\cos 40^\circ$ е. $\operatorname{tg} 63^\circ$ бол
 $\sin \alpha, \cos \alpha, \operatorname{tg} \alpha$ -ийн утгыг тооны машинаар ол.

21. Эхлэл радиусыг а. $\alpha = 470^\circ$ б. $\alpha = 2205^\circ$ в. $\alpha = -580^\circ$

-аар эргүүлэхэд энэ өнцөгтэй давхцах 0° -ээс 360° -ын хооронд орших α өнцгийг ол.

22. α өнцгийн синус, косинус, тангенсын утгыг ол.

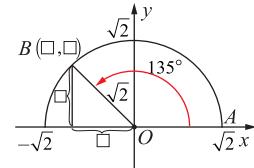
- | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| а. $\alpha = 1470^\circ$ | б. $\alpha = 2205^\circ$ | в. $\alpha = 1170^\circ$ | г. $\alpha = 2565^\circ$ |
| д. $\alpha = 495^\circ$ | е. $\alpha = 750^\circ$ | ё. $\alpha = 1380^\circ$ | ж. $\alpha = 1950^\circ$ |
| з. $\alpha = 600^\circ$ | и. $\alpha = 2295^\circ$ | й. $\alpha = 1830^\circ$ | к. $\alpha = 1770^\circ$ |

23. Утгыг ол.

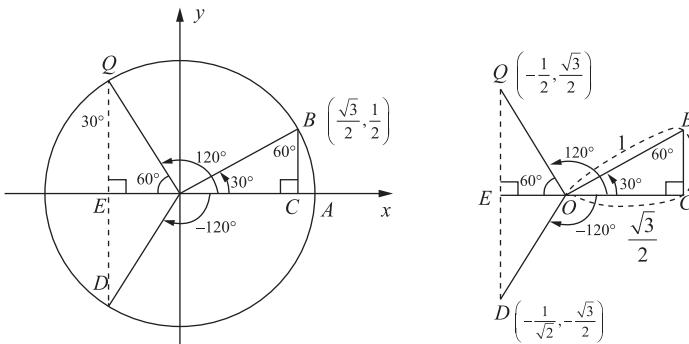
- | | | | |
|-----------------------|----------------------------------|------------------------------------|------------------------|
| а. $\sin 390^\circ$ | б. $\cos 540^\circ$ | в. $\operatorname{tg} 420^\circ$ | г. $\sin 720^\circ$ |
| д. $\cos 405^\circ$ | е. $\operatorname{tg} 630^\circ$ | ё. $\cos 720^\circ$ | ж. $\sin 405^\circ$ |
| з. $\sin(-510^\circ)$ | и. $\cos(1350^\circ)$ | й. $\operatorname{tg}(-660^\circ)$ | к. $\cos(1260^\circ)$ |
| л. $\sin(1650^\circ)$ | м. $\sin(2100^\circ)$ | н. $\operatorname{tg}(2310^\circ)$ | о. $\cos(-1650^\circ)$ |

24. Илэрхийллийн утгыг ол.

- | | |
|---|---|
| а. $4\sin 0^\circ + 5\cos 0^\circ + 3\operatorname{tg} 180^\circ$ | б. $\operatorname{tg} 360^\circ - \sin 270^\circ - \cos 180^\circ$ |
| в. $\operatorname{tg} 120^\circ \cdot \cos 120^\circ$ | г. $\sin 150^\circ - \cos 150^\circ + \operatorname{tg} 150^\circ$ |
| д. $2\sin 30^\circ + 6\cos 60^\circ - \frac{1}{4\operatorname{tg} 450^\circ}$ | е. $4\operatorname{tg} 60^\circ \cdot \sin 60^\circ$ |
| ё. $4\cos 60^\circ + \sqrt{3}\cos 30^\circ$ | ж. $5\sin 30^\circ - \operatorname{tg} 45^\circ$ |
| и. $\sqrt{3}\operatorname{tg}(30^\circ) + \sqrt{2}\cos(-45^\circ)$ | й. $\operatorname{tg}(120^\circ) \cdot \cos(60^\circ)$ |
| к. $5\sin(60^\circ) - 9\operatorname{tg}(150^\circ)$ | л. $\operatorname{tg}(-660^\circ) + \cos(495^\circ) - \sin(-510^\circ)$ |



25. Зурагт дүрсэлсэн $30^\circ, 60^\circ, 120^\circ, -120^\circ$ -ын утга бүрд харгалзах синус, косинус, тангенс функцийн утгыг олоод, дараах хүснэгтийг дэвтэр дээрээ зурж, нөх.



α	0°	30°	-30°	60°	-60°	120°	-120°
$\sin \alpha$							
$\cos \alpha$							
$\operatorname{tg} \alpha$							

26. Хэрэв а. $\alpha = 0^\circ$ б. $\alpha = 45^\circ$ в. $\alpha = 90^\circ$ г. $\alpha = 180^\circ$ д $\alpha = 30^\circ$ е $\alpha = -30^\circ$ бол $(\sin \alpha + \cos \alpha)$ -ын утгыг ол.

27. а. $\alpha = 15^\circ$ б. $\alpha = 30^\circ$ в. $\alpha = 90^\circ$ г. $\alpha = 60^\circ$ бол $2\sin 2\alpha - 3\cos 4\alpha \cdot 6\operatorname{tg} 4\alpha$ илэрхийллийн утгыг ол.

28. Синусын утга а. $\frac{1}{\sqrt{2}}$ б. $-\frac{1}{2}$ в. $\sqrt{3}$ г. $\frac{6}{5}$ д. $-\frac{\sqrt{15}}{4}$ е. -6.2 ё. $\frac{1-\sqrt{3}}{2}$ ж. $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$

байж болох уу? Учрыг тайлбарла.

29. $\cos \alpha$ -ийн утга а. $\frac{1}{\sqrt{2}}$ б. $-\frac{1}{2}$ в. $\sqrt{3}$ г. $\frac{6}{5}$ д. $-\frac{\sqrt{15}}{4}$ е. -6.2 ё. $\frac{1-\sqrt{3}}{2}$ ж. $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$

байж болох уу? Учрыг тайлбарла.

30. Илэрхийллийн хамгийн их ба хамгийн бага утгуудыг ол.

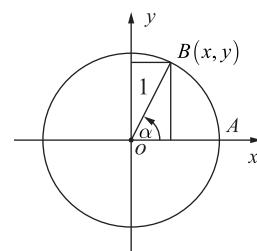
а. $1 + \sin \alpha$ б. $1 - \sin \alpha$ в. $2 + \cos \alpha$ г. $2 - \cos \alpha$

6.3 ТРИГОНОМЕТР АДИЛТГАЛУУД

OA нэгж радиус O цэгийг тойрч дурын α өнцгөөр эргээд OB байрлалд шилжсэн байж.

Тодорхойлолт ёсоор $y = \sin \alpha$, $x = \cos \alpha$ болно.

$B(x, y)$ цэг координатын эх дээр төвтэй, 1 радиустай тойрог дээр оршиж байгаа учраас $x^2 + y^2 = 1^2$ тэгшитгэлийг хангана. Иймд энэ тэгшитгэлийн x, y хувьсагчийн оронд $y = \sin \alpha$, $x = \cos \alpha$ -ийг орлуулбал $(\cos \alpha)^2 + (\sin \alpha)^2 = 1^2$ буюу $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ гарна.



Тригонометр функцийн үндсэн адилтгал

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

Үндсэн адилтгал болон тодорхойлолт ашиглан дараах тригонометрийн адилтгалуудыг гаргаж болно. Тодорхойлолтоор $\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$, тул $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ болно. Энэ тэнцэтгэл $\cos \alpha \neq 0$ байх бүх α өнцгийн хувьд биелнэ.

$\cos \alpha \neq 0$ үед $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ адилтгал болон дээрх томъёог ашиглавал

$$\cos^2 \alpha = \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha} = \frac{1}{\frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} + 1} = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} \text{ буюу } \cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} \text{ гэсэн}$$

адилтгал гарна.

$\sin \alpha \neq 0$ үед $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ адилтгал болон дээрх томъёог ашиглавал

$$\sin^2 \alpha = \frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha} = \frac{\frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}}{\frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} + 1} = \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} \text{ буюу } \sin^2 \alpha = \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} \text{ гэсэн}$$

адилтгал гарна. Мөн $\sin \alpha \neq 0$, $\cos \alpha \neq 0$ үед $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ томъёоноос $\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$ гэсэн адилтгал гарна.

Жишээ 1. $\frac{\cos \alpha}{1 - \sin^2 \alpha}$ илэрхийллийг хялбарчил.

$$\text{Бодолт. } \frac{\cos \alpha}{1 - \sin^2 \alpha} = \frac{\cos \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos \alpha}$$

Жишээ 2. Хэрэв $\sin \alpha = \frac{1}{2}$, $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ бол $\cos \alpha, \operatorname{tg} \alpha$ -ийн утгыг ол.

Бодолт. α II мөчид орших учраас косинус сөрөг байна. Иймд

$$\cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \frac{1}{4}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{1}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \text{ байна.}$$

Жишээ 3. Хэрэв $x = 2\cos \alpha$, $y = 3\sin \alpha$ бол x, y -ийн хамаарлыг ол.

Бодолт. $\cos \alpha, \sin \alpha$ -ийг олбол $\cos \alpha = \frac{x}{2}$, $\sin \alpha = \frac{y}{3}$ болох бөгөөд

$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ адилтгалыг хэрэглэн $\cos \alpha = \frac{x}{2}$, $\sin \alpha = \frac{y}{3}$ -ийн хоёр талыг квадрат зэрэгт дэвшүүлээд, хооронд нь нэмэхэд

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{3}\right)^2 = 1 \text{ буюу } 9x^2 + 4y^2 = 36 \text{ болно.}$$

31. Илэрхийллийг хялбарчил.

$$\text{а. } 1 - \sin^2 \alpha \quad \text{б. } \cos^2 \alpha - 1 \quad \text{в. } \cos^2 \alpha + (1 - \cos^2 \alpha)$$

- г. $\cos^2\alpha + 2\sin^2\alpha - 1$ д. $(1 - \cos\alpha)(1 + \cos\alpha)$ е. $(\sin\alpha - 1)(1 + \sin\alpha)$
 ё. $\sin^2\alpha + 2\cos^2\alpha - 1$ ж. $(1 - \tg\alpha)(1 + \tg\alpha)$ з. $1 + \tg^2\alpha$

32. $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ үед дараах функцийн утгыг ол.
 а. Хэрэв $\cos\alpha = -0.6$ бол $\tg\alpha, \sin\alpha$ -ийн утгыг ол.
 б. Хэрэв $\sin\alpha = \frac{5}{13}$ бол $\cos\alpha, \tg\alpha$ -ийн утгыг ол.
 в. Хэрэв $\tg\alpha = -2$ бол $\cos\alpha, \sin\alpha$ -ийн утгыг ол

33. Дараах нөхцөлийг хангах ямар нэгэн α өнцөг олдох уу?

а. $\cos\alpha = \frac{40}{41}, \sin\alpha = \frac{9}{41}$ б. $\sin\alpha = \frac{3}{4}, \cos\alpha = \frac{1}{4}$

34. Сурагч ямар нэгэн α өнцгийн синус, косинусын утгыг $\sin\alpha \approx 0.33$, $\cos\alpha \approx 0.63$ гэж олжээ. Сурагч алдаа гаргасан уу? Яагаад?

35. Илэрхийллийг хялбарчил.

а. $1 - \frac{1}{\cos^2\alpha}$ б. $1 - \frac{1}{\sin^2\alpha}$ в. $1 - \frac{\cos\alpha \sin\alpha}{\tg\alpha}$ г. $\frac{(1 + \tg\alpha)^2 - \tg^2\alpha}{1 + 2\tg\alpha}$

36. Дараах илэрхийллийг хялбарчил.

а. $\frac{1 + 2\cos\alpha \sin\alpha}{(\sin\alpha + \cos\alpha)^2}$ б. $\frac{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha + 1}{\sin^2\alpha}$ в. $\frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha - 1}{\sin^2\alpha}$

37. Илэрхийллийн хамгийн их утгыг ол.

а. $1 - (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)$ б. $1 - \cos\alpha \sin\alpha \tg\alpha$
 в. $\cos^2\alpha \tg^2\alpha + 5\cos^2\alpha - 1$ г. $\sin\alpha + 3\sin^2\alpha + 3\cos^2\alpha$

38. Хэрэв $\sin\alpha + \cos\alpha = 0.8$ бол $\sin\alpha \cos\alpha$ -ийн утгыг ол.

39. Адилтгалыг батал.

а. $(2 + \sin\alpha)(2 - \sin\alpha) + (2 - \cos\alpha)(2 + \cos\alpha) = 7$
 б. $\frac{1 - 2\cos\alpha \sin\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha} = \sin\alpha - \cos\alpha$ в. $\frac{1 - 2\cos\alpha \sin\alpha}{(\sin\alpha - \cos\alpha)^2} = 1$

40. Илэрхийллийг хялбарчил.

а. $\sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha + \sin^4\alpha + \cos^2\alpha$ б. $\sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha + \sin^2\alpha + \cos^4\alpha$

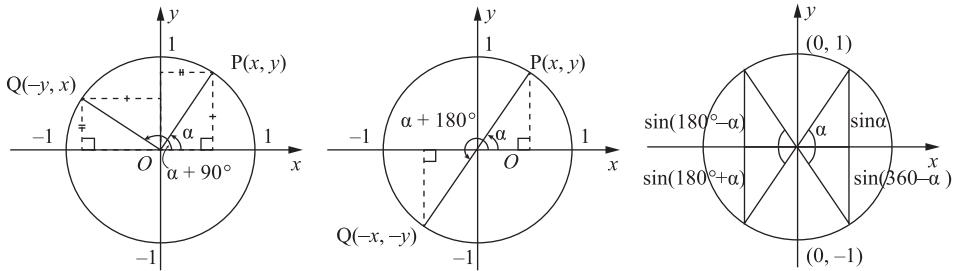
БҮЛГИЙН НЭМЭЛТ ДААЛГАВАР

- Хэрэв $\alpha = 45^\circ$ бол а. $\sin\alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha$ б. $\cos\alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha$
 в. $\tg\alpha + \tg 2\alpha + \tg 3\alpha$ илэрхийллийн утгыг ол.
- Хэрэв $\alpha = 90^\circ$ бол $\tg \frac{\alpha}{2} + \tg \frac{\alpha}{3}$ илэрхийллийн утгыг ол.
- Нэгж тойргийн 120° хэмжээтэй төв өнцөгт харгалзах нумын уртыг ол.
- Нэгж тойргийн 300° хэмжээтэй төв өнцөгт харгалзах секторын талбайг ол.
- Тригонометрийн функцийн утгыг хамгийн бага эерэг өнцгөөр илэрхийлж утгыг ол.
 а. $\sin(-2025)^\circ$ б. $\cos 1890^\circ$ в. $\tg 600^\circ$ г. $\tg 1470^\circ$

6. Хүснэгтийг нөх.

α	540°	-420°	450°	-750°	1980°	-390°
$\sin \alpha$						
$\cos \alpha$						
$\operatorname{tg} \alpha$						

7. Хэрэв $\operatorname{tg} \alpha = 2$, $0 < \alpha < 90^\circ$ бол $\cos \alpha$, $\sin \alpha$ -ийн утгыг ол.
8. Хэрэв $\sin \alpha = -\frac{1}{2}$, $180^\circ < \alpha < 270^\circ$ бол $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$ -ийн утгыг ол.
9. Тэнцэтгэл биелэх α өнцгийн гурван утгыг ол.
- a. $\sin \alpha = \frac{1}{2}$ b. $\sin \alpha = 1$ v. $\sin \alpha = 0$ g. $\sin \alpha = -1$ д. $\cos \alpha = -\frac{1}{2}$
e. $\cos \alpha = 1$ ё. $\cos \alpha = 0$ ж. $\cos \alpha = -1$ з. $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{3}$ и. $\operatorname{tg} \alpha = 1$
й. $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$ к. $\operatorname{tg} \alpha = 0$ л. $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ м. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ н. $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
10. Зургийг ажиглаад



$$\sin(\alpha + 180^\circ) = -\sin \alpha$$

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\sin(\alpha + 90^\circ) = \cos \alpha$$

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$$

боловыг үндэслэ.

$$\cos(\alpha + 180^\circ) = -\cos \alpha$$

$$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\cos(\alpha + 90^\circ) = -\sin \alpha$$

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$$

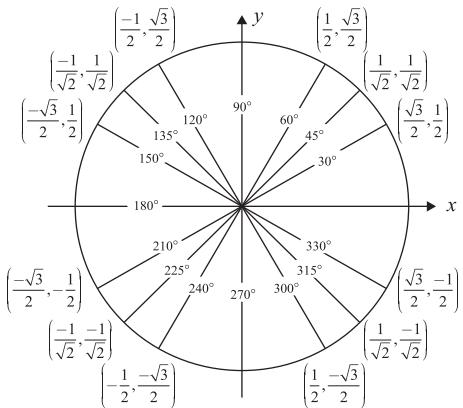
$$\operatorname{tg}(\alpha + 180^\circ) = \operatorname{tg} \alpha$$

$$\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + 90^\circ) = -\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$$

$$\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$$

11. Зургийг ашиглан дараах хүснэгтийг нөх.



α	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°
$\sin \alpha$															
$\cos \alpha$															
$\operatorname{tg} \alpha$															

12. Хэрэв $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{3}{4}$, $180^\circ < \alpha < 270^\circ$ бол $\cos \alpha, \operatorname{tg} \alpha$ -ийн утгыг ол.

13. Хэрэв тэгш өндөгт гурвалжны $AC = 1$ бол

а. BC талын уртыг ол.

б. $\operatorname{tg} 15^\circ, \sin 15^\circ, \cos 15^\circ$ -ийн утгыг ол.

14. Дараах адилтгалыг батал.

а. $1 - \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha$

в. $\frac{1}{\sin^2 \alpha} - \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = 1$

д. $\frac{\sin^2 \alpha - 3 \cos^2 \alpha + 1}{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha} = 2$

е. $\operatorname{tg} \alpha + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha}$

з. $\frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = 1 - 2 \sin^2 \alpha$

й. $\frac{\sin \alpha}{1 - \sin \alpha} - \frac{\sin \alpha}{1 + \sin \alpha} = 2 \operatorname{tg}^2 \alpha$

б. $(1 - \sin^2 \alpha) \operatorname{tg} \alpha = \sin \alpha \cos \alpha$

г. $\frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1 = \operatorname{tg}^2 \alpha$

е. $\frac{1}{\cos^2 \alpha} + \frac{1}{\sin^2 \alpha} = \frac{1}{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}$

ж. $\frac{1}{1 + \sin \alpha} + \frac{1}{1 - \sin \alpha} = \frac{2}{\cos^2 \alpha}$

и. $\frac{1 + \sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{1 + \sin \alpha} = \frac{2}{\cos \alpha}$

к. $(1 - \cos \alpha) \left(1 + \frac{1}{\cos \alpha} \right) = \sin \alpha \operatorname{tg} \alpha$

15. Илэрхийллийг хялбарчил.

а. $\frac{2 \sin^2 \alpha}{\operatorname{tg} \alpha (1 - 2 \sin^2 \alpha)}$

б. $\frac{2 \cos^2 \alpha \operatorname{tg} \alpha}{2 \cos^2 \alpha - 1}$

в. $(1 - \sin^2 \alpha)(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)$

г. $\sin^2 \alpha - (1 - \cos^2 \alpha)$

д. $\frac{1}{\cos \alpha} - \sin \alpha \operatorname{tg} \alpha$

е. $\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} + \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}$

ё. $\frac{\sin^2 \alpha (1 - \cos^2 \alpha)}{\cos^2 \alpha (1 - \sin^2 \alpha)}$

ж. $\frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}$

з. $\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$

и. $\frac{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}$

й. $\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\cos \alpha \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}$

к. $\frac{\sin \alpha \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$

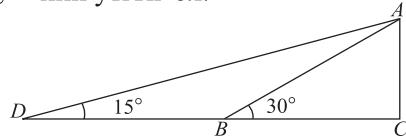
16*. Хэрэв $\operatorname{tg} \alpha = 2$ бол $\frac{\sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha}{3 \cos \alpha - \sin \alpha}$ илэрхийллийн утгыг ол.

17*. Дараах илэрхийллийн утгыг ол.

а. Хэрэв $\sin \alpha + \cos \alpha = a$ бол $\sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha, \sin^3 \alpha \cos^3 \alpha$

б. Хэрэв $\sin \alpha - \cos \alpha = 1.2$ бол $\cos^3 \alpha - \sin^3 \alpha, \sin^3 \alpha \cos^3 \alpha$

в. Хэрэв $\sin \alpha + \cos \alpha = 0.8$ бол $\sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha, \sin^3 \alpha \cos^3 \alpha$



г. Хэрэв $\sin \alpha - \cos \alpha = m$ бол $\cos^3 \alpha - \sin^3 \alpha$, $\sin^3 \alpha \cos^3 \alpha$

18. а. Хэрэв $-90^\circ < \alpha < 0$ ба $\sin \alpha = -0.6$

б. Хэрэв $180^\circ < \alpha < 270^\circ$ ба $\sin \alpha = -\frac{5}{13}$ в. Хэрэв $270^\circ < \alpha < 360^\circ$ ба $\cos \alpha = \frac{15}{17}$ бол үл мэдэгдэх $\sin \alpha, \cos \alpha, \operatorname{tg} \alpha$ -ийг ол.

19. а. $\alpha = 750^\circ$ б. $\alpha = 1260^\circ$ в. $\alpha = 810^\circ$ г. $\alpha = 225^\circ$ д. $\alpha = -210^\circ$ бол $\sin \alpha, \cos \alpha, \operatorname{tg} \alpha$ -ийг ол.

20. Илэрхийллийг хялбарчил

$$\text{а. } \frac{(1-\operatorname{tg} \alpha)^2 + \operatorname{tg}^2 \alpha}{1-2\operatorname{tg} \alpha} \quad \text{б. } \frac{\operatorname{tg} \alpha \cos \alpha}{\operatorname{tg} \alpha + \sin \alpha} \quad \text{в. } \frac{1+\cos \alpha}{\sin \alpha} + \frac{\sin \alpha}{1+\cos \alpha} \quad \text{г. } \frac{1-\cos^2 \alpha}{2\sin \alpha}$$

21. Адилтгалыг батал.

$$\text{а. } \frac{1+\cos \alpha}{\sin \alpha} + \frac{\sin \alpha}{1+\cos \alpha} = \frac{2}{\sin \alpha}$$

$$\text{в. } \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} + \frac{\sin \alpha}{1+\cos \alpha} = \frac{1}{\sin \alpha}$$

$$\text{д. } \frac{\sin \alpha}{1+\cos \alpha} + \frac{\sin \alpha}{1-\cos \alpha} = \frac{2}{\sin \alpha}$$

$$\text{б. } \frac{1+\sin \alpha}{1-\sin \alpha} = \left(\frac{1}{\cos \alpha} + \operatorname{tg} \alpha \right)^2$$

$$\text{г. } \frac{\cos \alpha}{1+\sin \alpha} + \frac{\cos \alpha}{1-\sin \alpha} = \frac{2}{\cos \alpha}$$

$$\text{е. } \operatorname{tg} \alpha + \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha}$$

22. Илэрхийллийн утгыг ол.

$$\text{а. } 2\sin 0^\circ - 4\cos 0^\circ + 5\operatorname{tg} 0^\circ$$

$$\text{в. } 2\sin 30^\circ - 4\cos 60^\circ + 5\operatorname{tg} 45^\circ$$

$$\text{б. } \cos 180^\circ \operatorname{tg} 45^\circ + \sin 90^\circ \sin 60^\circ$$

$$\text{г. } \cos 270^\circ \operatorname{tg} 45^\circ + \sin 450^\circ \sin 60^\circ$$

23. Өгсөн интервалд, өгсөн функцийн утгаар бусад функцийн утгыг ол.

$$\text{а. } 270^\circ < \alpha < 360^\circ \text{ ба } \operatorname{tg} \alpha = -0.6$$

$$\text{б. } 180^\circ < \alpha < 270^\circ \text{ ба } \operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4}$$

24*. Хэрэв а. $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{1}{2}$ бол $\sin \alpha \cos \alpha, \sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha$ б. $\sin \alpha - \cos \alpha = -\frac{1}{3}$ бол $\sin \alpha \cos \alpha, \sin^3 \alpha - \cos^3 \alpha$ илэрхийллийн утгыг ол.

25. Илэрхийллийг хялбарчил

$$\text{а. } \frac{(\sin \alpha + \cos \alpha)(1 - \sin \alpha \cos \alpha)}{\sin \alpha \operatorname{tg} \alpha + \cos \alpha \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}}$$

$$\text{б. } \frac{\cos \alpha \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} - \sin \alpha \operatorname{tg} \alpha}{1 + \sin \alpha \cos \alpha}$$

26*. Хэрэв $\sin \alpha \cos \alpha = -0.5$ бол $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha, \sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha$ илэрхийллийн утгыг ол.

27*. Хэрэв $\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = 2$ бол $\frac{3\sin \alpha + \cos \alpha}{\cos^3 \alpha - \sin^3 \alpha}$ -ийн утгыг ол.

28. а. Хэрэв $\cos \alpha = \frac{1}{4}, \sin \alpha < \cos \alpha$ бол $\operatorname{tg} \alpha$ б. Хэрэв $\sin \alpha = \frac{3}{5}, \sin \alpha > \cos \alpha$ бол $\operatorname{tg} \alpha$ -ийн утгыг тус тус ол.

29. Тэгш өнцөгт гурвалжны талууд геометр прогресс үүсгэнэ. Хэрэв α нь их хурц өнцөг бол $\cos \alpha, \sin \alpha, \operatorname{tg} \alpha$ -ийн утгыг ол.

VII БҮЛЭГ. ОГТОРГУЙ ДАХЬ ВЕКТОР

Энэ бүлэг сэдвийг судалснаар дараах мэдлэг, чадварыг эзэмшинэ.

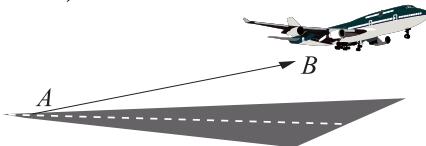
- Векторын стандарт тэмдэглэгээг хэрэглэх
- Огторгуй дахь векторуудын нэмэх, хасах, тоогоор үржсүүлэх үйлдлийг гүйцэтгэх, тэдгээрийн геометр тайлбар хийх
- Огторгуйн координатын систем дэх суурь вектор, векторын координат, тэнцүү векторууд, хоёр векторын параллел байх нөхцөлийг мэдэх
- Векторын уртыг олох
- Векторын скаляр үржсвэрийг ойлгох, хэрэглэх

7.1 ОГТОРГУЙ ДАХЬ ВЕКТОРЫН ТУХАЙ УХАГДАХУУН

Онгоцны явсан шилжилтийг хавтгайд вектороор дүрслэх боломжгүй байна.

Энэ шилжилтийг огторгуйд A цэгт эхлэлтэй, B цэгт төгсгөлтэй, чиглэлтэй хэрчмээр төсөөлөн дүрсэлж болох юм.

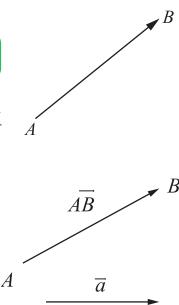
Огторгуйд A , B хоёр цэг сонгон авч хэрчмээр холбоё. Энэ хэрчим дээр хоёр янзаар чиглэл тогтоож болох бөгөөд аль нэг чиглэлийг хэрчим дээр сумаар тэмдэглэе.



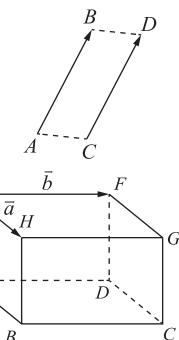
Тодорхойлолт. Огторгуй дахь чиглэлтэй хэрчмийг **вектор** гэнэ.

A цэгийг векторын эхлэл, B цэгийг векторын төгсгөл гэж нэрлэх бөгөөд векторыг \overrightarrow{AB} эсвэл латин цагаан толгойн жижиг үсгээр \vec{a} , \vec{b} ... гэж тэмдэглэдэг. Эхлэл төгсгөл нь давхацсан векторыг **тэг вектор** гэнэ.

Векторыг дүрсэлж байгаа хэрчмийн уртыг **векторын урт** гээд $|\overrightarrow{AB}|$ эсвэл $|\vec{a}|$ гэж тэмдэглэнэ.



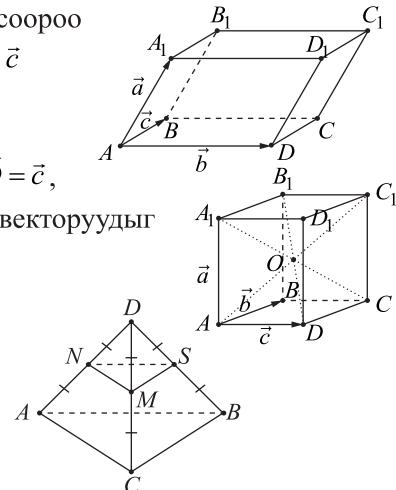
Тодорхойлолт. Огторгуйд нэг шулуун эсвэл параллел шулуунууд дээр орших, ижил чиглэлтэй, тэнцүү урттай векторуудыг **тэнцүү векторууд** гэнэ.



Жишээ 1. Зурагт өгсөн тэгш өнцөгт параллелепипед дээр $\overrightarrow{EH} = \vec{a}$, $\overrightarrow{EF} = \vec{b}$, $\overrightarrow{EA} = \vec{c}$ векторыг авав. Тэнцүү хос векторыг бич.

Бодолт. Параллелепипедийн эсрэг талсууд хос хосоороо параллел, ирмэгүүд нь тэнцүү тул $\vec{a} = \overrightarrow{FG} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, $\vec{b} = \overrightarrow{HG} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$, $\vec{c} = \overrightarrow{HB} = \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{FD}$ байна.

1. Кубийн ирмэгүүд дээр хэчинээн ялгаатай вектор дүрсэлж болох вэ?
2. Зурагт өгсөн биетийн эсрэг талсууд нь хос хосоороо параллел ба түүн дээр $\overrightarrow{AA_1} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{c}$ векторуудыг авав. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ вектортой тэнцүү векторуудыг ол.
3. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ куб дээр $\overrightarrow{AA_1} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{c}$, $\overrightarrow{AO} = \vec{d}$ вектор авав. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ вектортой тэнцүү векторуудыг бич.
4. $ABCD$ тетраэдрийн AD, BD, CD ирмэгүүдийн дундажийг харгалзан N, S, M гэж тэмдэглэжээ.
 - \overrightarrow{DN} вектортой тэнцүү векторыг нэрлэ.
 - \overrightarrow{BS} вектортой тэнцүү векторыг нэрлэ.
 - \overrightarrow{MS} вектортой тэнцүү векторыг нэрлэ.



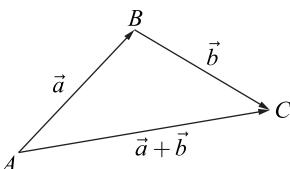
7.2 ОГТОРГҮЙ ДАХЬ ВЕКТОРЫН ҮЙЛДЭЛ

Бид өмнөх ангиудад хавтгай дахь векторуудыг нэмэх, тоогоор үржүүлэх үйлдэл болон скаляр үржвэрийн талаар судалсан билээ. Үйлдлийн чанарууд нь огторгуй дахь векторын хувьд нэгэн адил биелнэ.

Нэмэх үйлдэл

Огторгуйд \vec{a}, \vec{b} хоёр вектор өгөв. \vec{a} векторын төгсгөл дээр эхлэлтэй \vec{b} вектортой тэнцүү векторыг байгуулья.

Тэгвэл \vec{a} векторын эхлэл дээр эхлэлтэй \vec{b} векторын төгсгөл дээр төгсгөлтэй векторыг \vec{a}, \vec{b} хоёр **векторын нийлбэр** гээд $\vec{a} + \vec{b}$ гэж тэмдэглэдэг.



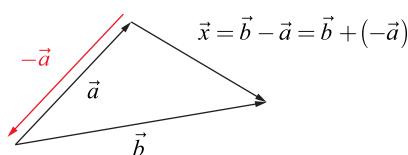
Огторгуй дахь аливаа A, B, C гурван цэгийн хувьд $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ байна. Үүнийг векторыг нэмэх **гурвалжны дүрэм** гэнэ.

Чанар 1.

1. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (байр солих)
2. $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ (бүлэглэх)
3. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{a}$ байх \vec{b} вектор цор ганц олдох ба түүнийг тэг вектор гээд $\vec{0}$ гэж тэмдэглэнэ.
4. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{0}$ байх \vec{b} векторыг \vec{a} векторын **эсрэг вектор** гээд $\vec{b} = -\vec{a}$ гэж тэмдэглэнэ.

Хасах үйлдэл

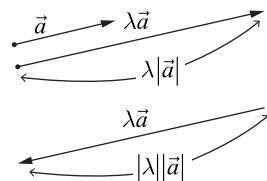
Огторгуй дахь \vec{a}, \vec{b} хоёр векторын хувьд \vec{b} вектор дээр \vec{a} векторын эсрэг векторыг нэмэхэд гарах векторыг \vec{b} ба \vec{a} векторын ялгавар вектор гээд $\vec{b} + (-\vec{a}) = \vec{b} - \vec{a}$ гэж тэмдэглэнэ.



Векторыг тоогоор уржуулэх үйлдэл

Огторгуйд $\vec{a} \neq \vec{0}$ байх \vec{a} вектор ба λ дурын бодит тоо байг. \vec{a} векторыг λ тоогоор үржүүлэхэд вектор гарах ба $\lambda\vec{a}$ гэж тэмдэглэнэ. Уг вектор нь:

1. $\lambda > 0$ үед \vec{a} вектортой ижил чиглэлтэй, урт нь $\lambda|\vec{a}|$ байх вектор байна.
 2. $\lambda < 0$ үед \vec{a} вектортой эсрэг чиглэлтэй, урт нь $-\lambda|\vec{a}|$ байх вектор байна.



Чанаар 2.

Дүрын \vec{a} ба \vec{b} вектор x, y бодит тооны хувьд:

- $(xy)\vec{a} = x(y\vec{a})$
 - $(x+y)\vec{a} = x\vec{a} + y\vec{a}$
 - $x(\vec{a} + \vec{b}) = x\vec{a} + x\vec{b}$ чанар биелнэ.

Жишээ 1. Зурагт өгсөн тэгш өнцөгт параллелепипед дээр $\overrightarrow{EH} = \vec{a}$, $\overrightarrow{EF} = \vec{b}$, $\overrightarrow{EA} = \vec{c}$ вектор авав.

$$\text{Бодолт. 1) } \vec{a} = -\overrightarrow{GF} = -\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{CD},$$

$$\vec{b} = -\overrightarrow{GH} = -\overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{DA}, \quad \vec{b} = -\overrightarrow{HG} = -\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{AD}$$

- 2) a. $\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{EH} + \overrightarrow{HG} = \vec{a} + \vec{b}$
 b. $\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{EG} + \overrightarrow{GC} = (\overrightarrow{EH} + \overrightarrow{HG}) + \overrightarrow{GC} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$
 b. $\overrightarrow{FB} = \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{AB} = (\overrightarrow{EA} - \overrightarrow{EF}) + \overrightarrow{AB} = \vec{c} - \vec{b} + \vec{a}$

Жишээ 2. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ куб дээр $\overrightarrow{AA_1} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{c}$ векторыг авав.

Дараах векторыг $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ вектороор илэрхийл.

- a. $\overrightarrow{DA_1}$ б. $\overrightarrow{B_1D}$ в. \overrightarrow{AO}

г. Хэрэв D_1C_1 ирмэгийн дундаж M бол \overrightarrow{AM} векторыг $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ вектороор илэрхийл.

Бололт: а) $\overrightarrow{DA_1} = \overrightarrow{AA_1} - \overrightarrow{AD} = \vec{a} - \vec{c}$

$$6. \overrightarrow{B_1D} = \overrightarrow{B_1B} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{B_1B} + (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) = -\vec{a} + (\vec{c} - \vec{b})$$

$$\text{B. } \overrightarrow{AO} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AC_1} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CC_1}) = \frac{1}{2} (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CC_1}) = \frac{1}{2} (\vec{c} + \vec{b} + \vec{a})$$

г. DC талын дундаж цэгийг N гэе. Тэгвэл $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{NM}$ болно. \overrightarrow{AN} ба \overrightarrow{NM} векторуудыг $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ векторуудаар илэрхийлбэл $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN} = \vec{c} + \frac{1}{2}\vec{b}$,

$\overline{NM} = \overline{AA_1} = \vec{a}$ байна. Иймд $\overline{AM} = \overline{AN} + \overline{NM} = \vec{c} + \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{a}$ гэж гарна.

Жишээ 3. $ABCD$ гурвалжин пирамидын хувьд $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}$ болохыг батал.

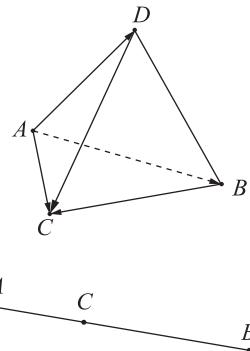
Бодолт. ABC гурвалжны хувьд $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ байдаг.

ADC гурвалжны хувьд $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC}$ болох тул $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}$ болж батлагддаг.

Жишээ 4. С цэгийг AB хэрчим дээр $AC:CB=1:2$ байхаар авав. а. \overrightarrow{AC} векторыг \overrightarrow{AB} , б. \overrightarrow{AB} векторыг \overrightarrow{CB} , в. \overrightarrow{CB} векторыг \overrightarrow{AC} вектороор илэрхийл.

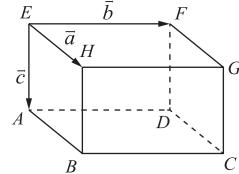
Бодолт. а. AB хэрчмийн урт нь AC хэрчмийн уртаас гурав дахин их байна. Иймд $\overrightarrow{AB} = 3 \cdot \overrightarrow{AC}$ байна. Эндээс

$$\overrightarrow{AC} = \frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{AB} \text{ болно.} \quad \text{б. } \overrightarrow{AB} = \frac{3}{2} \cdot \overrightarrow{CB} \quad \text{в. } \overrightarrow{CB} = 2 \cdot \overrightarrow{AC}$$



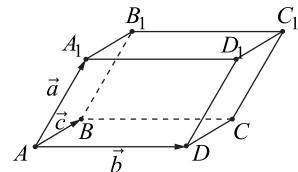
5. Зурагт өгсөн тэгш өнцөгт параллелепипедийн хувьд дараах векторыг $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ вектороор илэрхийл.

- | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| а. \overrightarrow{FG} | б. \overrightarrow{ED} | в. \overrightarrow{EB} |
| г. \overrightarrow{AC} | д. \overrightarrow{EG} | е. \overrightarrow{EC} |
| ё. \overrightarrow{HD} | ж. \overrightarrow{HF} | з. \overrightarrow{GA} |



6. Зурагт өгсөн биетийн эсрэг талсууд нь хос хосоороо параллел бол дараах векторыг $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ вектороор илэрхийл.

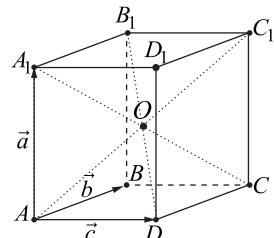
- | | | |
|----------------------------|----------------------------|------------------------------|
| а. \overrightarrow{DC} | б. \overrightarrow{AC} | в. $\overrightarrow{A_1C_1}$ |
| г. $\overrightarrow{AD_1}$ | д. $\overrightarrow{BC_1}$ | е. $\overrightarrow{AC_1}$ |
| ё. $\overrightarrow{C_1A}$ | ж. \overrightarrow{BD} | з. $\overrightarrow{B_1D}$ |



7. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубийн диагоналиуд O цэгт огтлолцоно.

1) Дараах векторыг $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ вектороор илэрхийл.

- | | | |
|----------------------------|----------------------------|------------------------------|
| а. \overrightarrow{DC} | б. \overrightarrow{AC} | в. $\overrightarrow{A_1C_1}$ |
| г. $\overrightarrow{AD_1}$ | д. $\overrightarrow{AB_1}$ | е. $\overrightarrow{AC_1}$ |
| ё. $\overrightarrow{B_1D}$ | ж. \overrightarrow{AO} | з. \overrightarrow{OC} |



2) Өгсөн нөхцөлийг хангах k тоог ол.

- | | | |
|---|---|---|
| а. $\overrightarrow{CD} = k\overrightarrow{BA}$ | б. $\overrightarrow{AD} = k\overrightarrow{CB}$ | в. $\overrightarrow{AC_1} = k\overrightarrow{C_1O}$ |
|---|---|---|

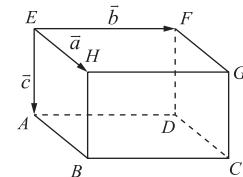
8. С цэгийг BD хэрчим дээр $BC : CD = 2 : 3$ байхаар авав.

- | |
|---|
| а. \overrightarrow{CD} векторыг \overrightarrow{CB} , |
| б. \overrightarrow{BD} векторыг \overrightarrow{CD} , |
| в. \overrightarrow{CD} векторыг \overrightarrow{BC} вектороор тус тус илэрхийл. |

9. С цэгийг AB хэрчим дээр $AC : CB = 4 : 3$ байхаар авав.

- | |
|---|
| а. \overrightarrow{AB} векторыг \overrightarrow{CB} , |
| б. \overrightarrow{AC} векторыг \overrightarrow{BC} вектороор тус тус илэрхийл. |

10. A ба B цэгийг CD хэрчим дээр $CA:AB:BD=1:2:3$ байхаар авав.
- \overrightarrow{CD} векторыг \overrightarrow{CB} ,
 - \overrightarrow{BD} векторыг \overrightarrow{AB} ,
 - \overrightarrow{AD} векторыг \overrightarrow{BC} ,
 - \overrightarrow{CD} векторыг \overrightarrow{AB} вектороор илэрхийл.
11. $ABCD$ квадрат өгөгдөв. Огторгуйн дурын O цэгийн хувьд
- $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD}$
 - $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{DA}$ болохыг батал.
12. $OABC$ пирамидын хувьд $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CO}$ нийлбэр векторыг ол.
13. $ABCD$ параллелограммын AB, BC талын дунджийг харгалзан M, N гэе.
- Огторгуйн дурын O цэгийн хувьд $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC}$ векторыг \overrightarrow{MN} вектороор илэрхийл.
14. $ABCDEHGF$ тэгш өнцөгт параллелепипедийн HG, AE, CD талын дунджийг харгалзан M, N, S гэж авав. $\overrightarrow{EH} = \vec{a}, \overrightarrow{EF} = \vec{b}, \overrightarrow{EA} = \vec{c}$ вектороор $\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{NS}$ векторыг илэрхийл.
15. Дараах векторын нийлбэрийг ол.
- $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$
 - $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}$
 - $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{EF}$
 - $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FA}$
 - $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EF}$
 - $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$
 - $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC}$
 - $\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{NL} + \overrightarrow{LP}$



7.3 ОГТОРГҮЙ ДАХЬ ВЕКТОРЫН КООРДИНАТ

Тодорхойлолт. Огторгуйн тэгш өнцөгт координатын системд өгсөн цэгийн хувьд координатын эх дээр эхлэлтэй уг цэг дээр төгсгөлтэй векторыг өгсөн цэгийн радиус вектор гэнэ.

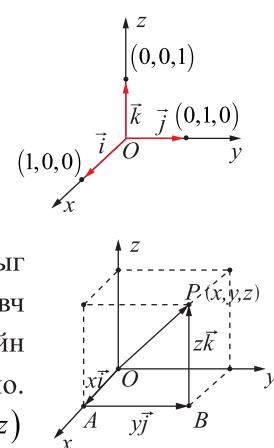
Суурь нэгж векторууд

Огторгуйн тэгш өнцөгт координатын систем дэх чиглэл нь Ox тэнхлэгийн эерэг чиглэлтэй ижил байх нэгж урттай векторыг \vec{i} , чиглэл нь Oy тэнхлэгийн эерэг чиглэлтэй ижил байх нэгж урттай векторыг \vec{j} , чиглэл нь

Oz тэнхлэгийн эерэг чиглэлтэй ижил байх нэгж урттай векторыг \vec{k} гэж тус тус тэмдэглээ. $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ векторыг **суурь нэгж вектор** гэж нэрлэнэ.

Иймд эдгээр векторыг радиус вектор болгон дүрсэлбэл тэдгээрийн төгсгөлийн цэгийн координат нь $(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)$ байна.

Хэрэв P цэгийн координат (x, y, z) бол \overrightarrow{OP} радиус векторыг хэрхэн $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ суурь нэгж вектороор илэрхийлэх талаар авч үзье. Зургаас \overrightarrow{OP} вектор нь тэгш өнцөгт параллелепипедийн гол диагональ тул $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BP}$ болно. Эндээс $\overrightarrow{OP} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ болно. Иймд \overrightarrow{OP} векторт (x, y, z)

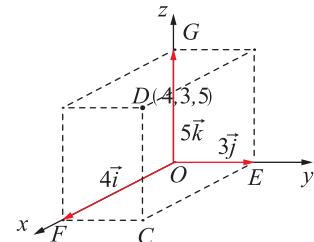


гурвалыг харгалзуулж болж байна. Буцаагаад (x, y, z) гурвалд $x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ векторыг харгалзуулж болно. Өөрөөр хэлбэл огторгуйн дурын \vec{a} векторт түүний координат гэж нэрлэгдэх (x, y, z) гурвалыг төлөөлүүлж болох ба $\vec{a} = (x, y, z)$

эсвэл $\vec{a} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ гэж тэмдэглэдэг.

Жишээ 1. Координатын эхийг $D(4, 3, 5)$ цэгтэй холбоод үүссэн векторыг $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ суурь нэгж вектороор илэрхийл.

Бодолт. \overrightarrow{OD} векторын координатын тэнхлэгүүд дээрх проекц нь Ox тэнхлэгийн эерэг чиглэлд 4 нэгж $\overrightarrow{OF} = 4\vec{i}$, Oy тэнхлэгийн эерэг чиглэлд 3 нэгж $\overrightarrow{OE} = 3\vec{j}$, Oz тэнхлэгийн эерэг чиглэлд 5 нэгж $\overrightarrow{OG} = 5\vec{k}$ болох бөгөөд $OECF$ тэгш өнцөгтийн хувьд параллелограммын дүрэм ашиглавал $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OF} + \overrightarrow{OE} = 4\vec{i} + 3\vec{j}$ болно. $OCDG$ тэгш өнцөгтийн хувьд уг дүрмийг ашиглавал $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OG} = 4\vec{i} + 3\vec{j} + 5\vec{k}$ байна.



Жишээ 2. ABC гурвалжны оройн цэгийн координат $A(1, -1, 3), B(-2, 4, 1), C(5, -1, 3)$ өгчээ. $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}$ векторуудыг $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ суурь нэгж вектороор илэрхийл.

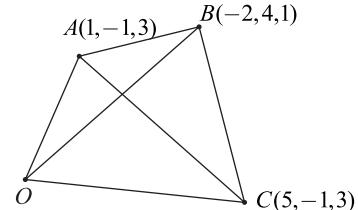
Бодолт. A, B, C цэгийн радиус векторыг $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ -аар илэрхийлье. $\overrightarrow{OA} = \vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$, $\overrightarrow{OB} = -2\vec{i} + 4\vec{j} + \vec{k}$,

$\overrightarrow{OC} = 5\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$ байна. Эдгээр векторыг ашиглан $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}$ векторыг $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ илэрхийлье.

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$ гэдгээс $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = -3\vec{i} + 5\vec{j} - 2\vec{k}$

$\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC}$ гэдгээс $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = 7\vec{i} - 5\vec{j} + 2\vec{k}$

болно.



\overrightarrow{OP} векторын урт нь O, P хоёр цэгийн хоорондох зайдай тэнцүү байна. Иймд хоёр цэгийн хоорондох зайд олох томьёо ёсоор $|\overrightarrow{OP}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$ болно.

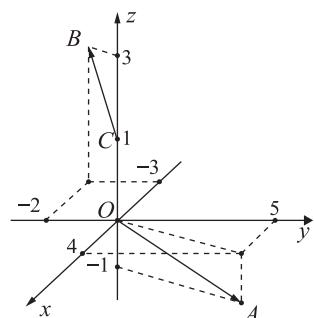
Жишээ 3. Зургийг ажиглан, өгсөн цэгийн радиус векторын координатыг бич.

Бодолт. 1. A цэгийн координат $(4, 5, -1)$ тул

$\overrightarrow{OA} = (4, 5, -1)$ байна.

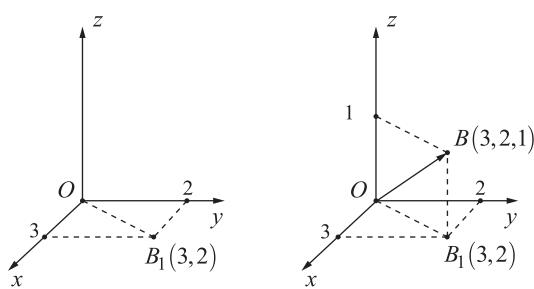
2. \overrightarrow{CB} вектортой тэнцүү векторыг координатын эх O цэг дээр эхлэлтэйгээр байгуулахад уг векторын координат нь z тэнхлэгийн сөрөг чиглэлд нэг нэгж шилжиж x, y координат нь өөрчлөгдөхгүй байна.

Иймд $(-3, -2, 3 - 1)$ буюу $\overrightarrow{OB} = (-3, -2, 2)$ байна.



Жишээ 4. Огторгуйн тэгш өнцөгт координатын системд $\overrightarrow{OB} = (3, 2, 1)$ векторыг дүрсэл.

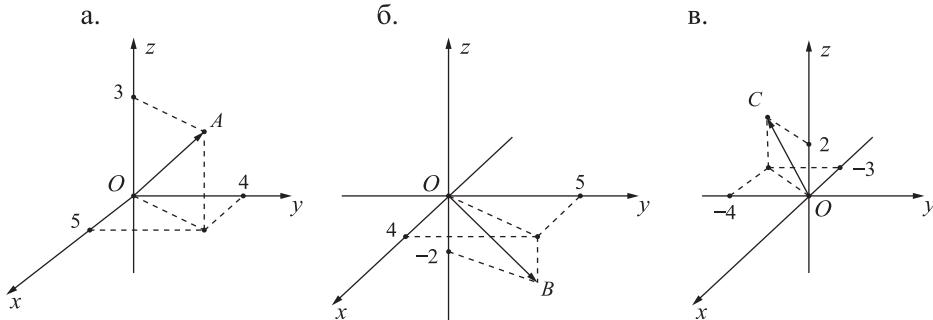
Бодолт. Oxy хавтгайд $B_1(3, 2)$ цэгийг байгуульяа. B_1 цэгээс Oz тэнхлэгтэй параллел шулуун татяа. Уг шулууун дээр B_1 цэгээс эерэг чиглэлд 1 нэгж зайд орших цэгийг B гэе. O цэгийг B цэгтэй холбож \overrightarrow{OB} векторыг байгуулж болно.



Жишээ 5. $\overrightarrow{OA} = (4, 5, -1)$ векторын уртыг ол.

Бодолт. $|\overrightarrow{OA}| = \sqrt{4^2 + 5^2 + (-1)^2} = \sqrt{42}$.

16. Огторгуйн тэгш өнцөгт координатын системд байгуулсан A, B, C цэгийн радиус векторын координатыг бич.



17. Огторгуйн тэгш өнцөгт координатын системд векторыг дүрсэл.

a. $\overrightarrow{OA} = (2, 1, 3)$ b. $\overrightarrow{OB} = (-1, 2, 4)$ v. $\overrightarrow{OC} = (1, -2, 2)$ g. $\overrightarrow{OD} = (-2, -3, 1)$

18. Векторын уртыг ол.

a. $\vec{a} = (2, -4, 3)$ b. $\vec{b} = (1, 2, 4)$ v. $\vec{c} = (1, -2, 1.5)$ g. $\vec{d} = (-2, -4, -8)$

19. Хэрэв $\overrightarrow{OA} = (3, x, -2)$ векторын урт 5 бол x -ийг ол.

Чанар 3. Хэрэв $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ хоёр вектор тэнцүү бол $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$, $a_3 = b_3$ байна. Урвуугаар хэрэв хоёр векторын координат нь харгалзан тэнцүү бол уг хоёр вектор тэнцүү байна. Мөн \vec{a} векторын эсрэг векторын координат $\vec{-a} = (-a_1, -a_2, -a_3)$ байна.

Координатаараа өгсөн векторын үйлдэл

$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ хоёр вектор координатаараа өгсөн байг. Эдгээр

векторыг суурь нэгж вектороор задалж бичвэл $\vec{a} = a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k}$,
 $\vec{b} = b_1 \vec{i} + b_2 \vec{j} + b_3 \vec{k}$ болно.

а. Векторын нийлбэр нь

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k}) + (b_1 \vec{i} + b_2 \vec{j} + b_3 \vec{k}) = (a_1 \vec{i} + b_1 \vec{i}) + (a_2 \vec{j} + b_2 \vec{j}) + (a_3 \vec{k} + b_3 \vec{k}) = (a_1 + b_1) \vec{i} + (a_2 + b_2) \vec{j} + (a_3 + b_3) \vec{k} \text{ болно. Иймд } \vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3) \text{ байна.}$$

б. Нийлбэртэй адилаар \vec{a} , \vec{b} хоёр векторын ялгавар нь

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}) = (a_1 + (-b_1), a_2 + (-b_2), a_3 + (-b_3)) \text{ болно.}$$

Иймд $\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3)$ байна.

в. Векторыг тоогоор үржүүлэх үйлдэл нь $\lambda \vec{a} = (\lambda a_1) \vec{i} + (\lambda a_2) \vec{j} + (\lambda a_3) \vec{k}$ байна.

Иймд $\lambda \vec{a} = \lambda(a_1, a_2, a_3) = (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ байна.

Жишээ 6. $\vec{a} = (2, -4, 3)$ ба $\vec{b} = (1, 2, 4)$ вектор өгөв. Дараах векторын координатыг ол.

а. $\vec{a} + \vec{b}$ б. $\vec{a} - \vec{b}$ в. $4 \vec{a}$

Бодолт. а. $\vec{a} + \vec{b} = (2+1, -4+2, 3+4) = (3, -2, 7)$

б. $\vec{a} - \vec{b} = (2-1, -4-2, 3-4) = (1, -6, -1)$ в. $4 \cdot \vec{a} = 4 \cdot (2, -4, 3) = (8, -16, 12)$

20. Дараах векторыг $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ суурь нэгж вектороор задал.

а. $\overrightarrow{OA} = (4, 3, 2)$ б. $\overrightarrow{OB} = (1, 3, 2)$ в. $\overrightarrow{OC} = (-1, -3, 2)$ г. $\overrightarrow{OD} = (-2, -3, -2)$

21. Дараах векторуудын координатыг бич.

а. $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 4\vec{k}$ б. $\vec{b} = -\vec{i} + 2\vec{j} - 8\vec{k}$ в. $\vec{c} = -2\vec{i} - 3\vec{j} - 9\vec{k}$ г. $\vec{d} = -5\vec{i} - 4\vec{j} + 3\vec{k}$

22. Дараах векторыг байгуул.

а. $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ б. $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ в. $\vec{c} = -\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$ г. $\vec{d} = 2\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$

23. Хэрэв $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{c} = 3\vec{i} + \vec{j} - 7\vec{k}$ вектор өгсөн бол дараах үйлдлийг гүйцэтгэ.

а. $\vec{a} + \vec{c}$	б. $2\vec{a} + 3\vec{c}$	в. $3\vec{a} - 2\vec{c}$	г. $\vec{a} - \vec{c}$	д. $3\vec{a} - 2\vec{c}$
е. $2(\vec{a} + \vec{c})$	ё. $3(\vec{a} + \vec{c}) - 2(\vec{a} - \vec{c})$	ж. $-2(3\vec{a} + \vec{c}) + 3(\vec{a} - 2\vec{c})$		
з. $4(2\vec{a} + 3\vec{c}) - 2(3\vec{a} - 2\vec{c})$		и. $4(3\vec{a} + 4\vec{c}) - 2(\vec{a} - 5\vec{c})$		

24. Хэрэв $\vec{a} = (3, 2, -1)$, $\vec{b} = (3, 6, -1)$ вектор өгсөн бол дараах үйлдлийг гүйцэтгэ.

а. $-3(\vec{a} + \vec{b})$ б. $3(\vec{a} + \vec{b}) - 2(\vec{a} - 5\vec{b})$ в. $(2\vec{a} + \vec{b}) - 3(\vec{a} - 2\vec{b})$

25. Дараах векторуудын уртыг ол.

а. $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 4\vec{k}$	б. $\vec{b} = -\vec{i} + 2\vec{j} - 8\vec{k}$	в. $\vec{c} = -2\vec{i} - 3\vec{j} - 9\vec{k}$
г. $\vec{d} = -5\vec{i} - 4\vec{j} + 3\vec{k}$	д. $\vec{b} = -2\vec{i} + 3\vec{j} - 5\vec{k}$	е. $\vec{c} = 12\vec{i} + 5\vec{j} - 4\vec{k}$

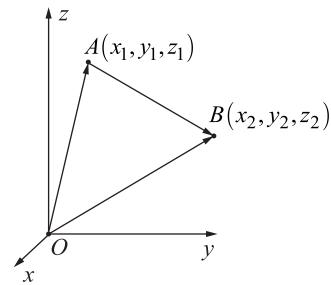
26. \vec{a} ба \vec{b} вектор хоорондоо тэнцүү бол x -ийн утгыг ол.

а. $\vec{a} = (3, 2, -1)$, $\vec{b} = (3, x, -1)$ б. $\vec{a} = (5, -3, -3)$, $\vec{b} = (5, -3, x)$

Векторын координатыг эхлэл, төгсгөлийн цэгийн координатаар илэрхийлэх

\overrightarrow{AB} векторын координатыг түүний эхлэл $A(x_1, y_1, z_1)$ цэг болон төгсгөл $B(x_2, y_2, z_2)$ цэгийн координатаар илэрхийлье. \overrightarrow{OA} ба \overrightarrow{OB} радиус векторын координатууд нь харгалзан $\overrightarrow{OA} = (x_1, y_1, z_1)$, $\overrightarrow{OB} = (x_2, y_2, z_2)$ болно.

\overrightarrow{AB} векторыг \overrightarrow{OA} ба \overrightarrow{OB} вектороор илэрхийлье. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ болох тул $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ байна. Иймд аливаа векторын координатыг векторын төгсгөлийн цэгийн координат ба эхлэлийн цэгийн координатын ялгавраар $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ илэрхийлж бичиж болно. Векторын урт нь түүний координатаар тодорхойлогддог тул $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$ болно.



Жишээ 7. $C(3, 2, -1)$ ба $D(1, -1, 2)$ цэгүүдийн хувьд \overrightarrow{CD} векторын координатыг ол.

Бодолт. $\overrightarrow{CD} = (1 - 3, -1 - 2, 2 - (-1)) = (-2, -3, 3)$ болно.

Жишээ 8. $A(x_1, y_1, z_1)$ ба $B(x_2, y_2, z_2)$ цэгийн дундаж C цэгийн координатыг ол.

Бодолт. C цэгийн координатыг (x, y, z) гэе. $\overrightarrow{OA} = (x_1, y_1, z_1)$, $\overrightarrow{OC} = (x, y, z)$,

$\overrightarrow{OB} = (x_2, y_2, z_2)$ бөгөөд $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC}$ болно. Эндээс

\overrightarrow{AC} векторын координатыг эхлэл ба төгсгөлийн

цэгийн координатаар илэрхийлбэл

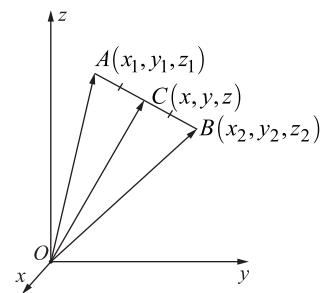
$\overrightarrow{AC} = (x - x_1, y - y_1, z - z_1)$ гарна. Түүнчлэн

$\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{OB}$ болох тул $\overrightarrow{CB} = (x_2 - x, y_2 - y, z_2 - z)$

болно. $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$ тул $x - x_1 = x_2 - x$, $y - y_1 = y_2 - y$,

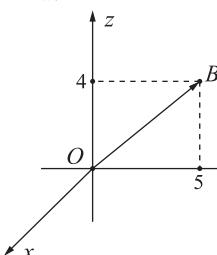
$z - z_1 = z_2 - z$ болох ба эндээс $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$, $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$,

$z = \frac{z_1 + z_2}{2}$ байна.

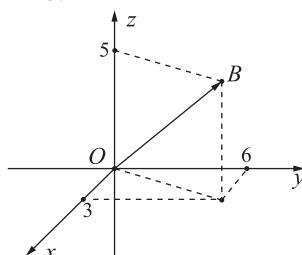


27. Зурагт өгсөн \overrightarrow{OB} векторыг $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ вектороор задал.

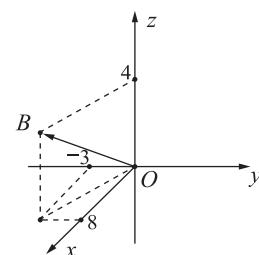
а.



б.



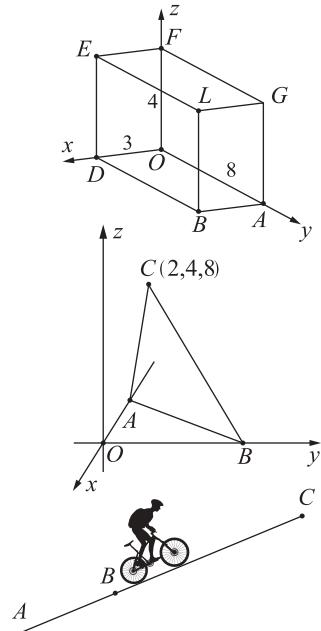
в.



28. Өгсөн векторын координатыг бич.

$$\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 3\vec{k}, \quad \vec{b} = -\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}, \quad \vec{c} = 2\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}, \quad \vec{d} = -2\vec{i} - 4\vec{j} + \vec{k}$$

- 29.** Дараах векторыг байгуул.
- а. $\overrightarrow{OA} = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ б. $\overrightarrow{OB} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ в. $\overrightarrow{OC} = 2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$
- 30.** Хэрэв $\overrightarrow{OA} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 4\vec{k}$, $\overrightarrow{OB} = -2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$ вектор өгсөн бол \overrightarrow{AB} векторын уртыг ол.
- 31.** Хэрэв A ба B цэгийн радиус вектор
- а. $\overrightarrow{OA} = \vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$, $\overrightarrow{OB} = -2\vec{i} + 5\vec{j} - 3\vec{k}$ б. $\overrightarrow{OA} = 3\vec{i} - 3\vec{j} - 4\vec{k}$, $\overrightarrow{OB} = 2\vec{i} - 3\vec{j} - \vec{k}$
болов \overrightarrow{AB} вектор болон AB хэрчмийн уртыг ол.
- 32.** Хэрэв $\vec{a} = (-3, 2, -1)$, $\vec{b} = (-2, -3, 4)$ хоёр вектор өгсөн бол дараах үйлдлийг гүйцэтгэ.
- а. $\vec{a} + \vec{b}$ б. $\vec{a} - \vec{b}$ в. $4\vec{a}$ г. $|\vec{a} + \vec{b}|$ д. $2\vec{a} - \vec{b}$
- 33.** Хэрэв $\vec{a} = -2\vec{i} + 5\vec{j} - 3\vec{k}$, $\vec{c} = 4\vec{i} + 2\vec{j} - 8\vec{k}$ хоёр вектор өгсөн бол дараах үйлдлийг гүйцэтгэ.
- а. $\vec{a} + \vec{b}$ б. $\vec{a} - \vec{b}$ в. $4\vec{a}$ г. $|\vec{a} + 2\vec{b}|$ д. $2\vec{a} + \vec{b}$
- 34.** Хэрэв $\vec{a} = (-1, 2, 4)$, $\vec{b} = (4, -2, 3)$ бол дараах үйлдлийг гүйцэтгэ.
- а. $\vec{a} + \vec{b}$ б. $\vec{a} - \vec{b}$ в. $2\vec{a}$ г. $|\vec{a} - \vec{b}|$ д. $2\vec{a} + \vec{b}$
- 35.** Хэрэв $\vec{a} = (2, -3, -1)$, $\vec{b} = (-4, -1, 3)$ бол дараах үйлдлийг гүйцэтгэ.
- а. $\vec{a} + \vec{b}$ б. $\vec{a} + 2\vec{b}$ в. $4\vec{a} - 2\vec{b}$ г. $2\vec{a} - 3(\vec{a} + 2\vec{b})$
- 36.** \vec{b} ба \vec{c} векторын координатыг ол.
- а. $\vec{b} + \vec{c} = (1, -4, 3)$ ба $2\vec{b} + \vec{c} = (-2, 4, -4)$
б. $\vec{b} - \vec{c} = (-2, 4, -1)$ ба $\vec{b} + \vec{c} = (-3, -6, 5)$
- 37.** AB хэрчмийг C ба D цэгүүдээр тэнцүү хэсгүүдэд хуваажээ. A ба B цэгийн координатууд харгалзан $A(1, 3, 3)$, $B(1, -3, 3)$ бол
- а. \overrightarrow{AD} б. \overrightarrow{AB} в. B ба C цэгийн координатыг ол.
- 38.** Зурагт үзүүлсэн тэгш өнцөгт параллелепипедийн ирмэгүүд харгалзан 3, 8, 4 болно.
- а. \overrightarrow{OF} , \overrightarrow{OA} б. $\overrightarrow{OE}, \overrightarrow{OG}, \overrightarrow{OB}$
в. \overrightarrow{LB} , \overrightarrow{OL} г. $|\overrightarrow{OL}|$
- д. EL хэрчмийн дунджийг A цэгтэй холбох векторын координатыг ол.
- 39.** Хэрэв AB суурьтай ABC адил хажуут гурвалжны хажуу тал 9 нэгж бол.
- а. A ба B цэгийн координатыг ол.
б. \overrightarrow{AB} векторыг ол. в. $|\overrightarrow{AB}|$ векторын уртыг ол.
г. D нь AB хэрчмийн дундаж цэг бол \overrightarrow{CD} векторыг ол.
- 40.** Дугуйчин налуу өөд жигд хурдаар явжээ.
Дугуйчны хөдлөж эхлэх цэгийн координат $B(1, -3, 3)$ байв. 5 минут явсны дараах координат

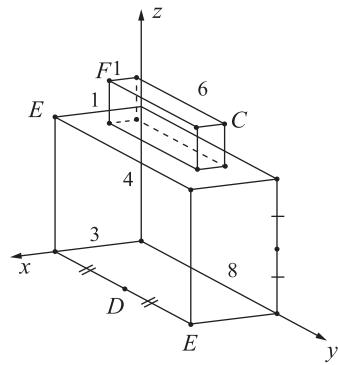


$B(4,1,8)$ бол уг хурдаар дахин 10 минут явсны дараах C цэгийн координатыг ол.

41. 3, 8, 4 ирмэгүүдтэй тэгш өнцөгт параллелепипедийн дээд талд 1, 1, 6 ирмэгтэй тэгш өнцөгт параллелепипедийг зурагт үзүүлснээр байрлуулжээ.
 а. Тэмдэглэсэн цэгүүдийн координатыг ол.
 б. $\vec{GF}, \vec{FD}, \vec{EC}, \vec{CG}$ векторын координатыг ол.

Хоёр векторын параллел байх нохцол

Огторгуйд нэг шулуун эсвэл параллел шулуун дээр орших хоёр векторыг **параллел вектор** гэнэ. \vec{a} ба \vec{b} векторууд параллел бол $\vec{a} \parallel \vec{b}$ гэж тэмдэглэнэ. Параллел байх \vec{a} ба \vec{b} векторууд ижил чиглэлтэй бол $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$, эсрэг чиглэлтэй бол $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$ гэж тэмдэглэнэ.



Чанар 4. Хэрэв тэгээс ялгаатай \vec{a} , \vec{b} хоёр вектор параллел бол $\vec{b} = k\vec{a}$ байх k тоо олдоно. Тухайлбал, $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ вектор параллел бол $b_1 = ka_1, b_2 = ka_2, b_3 = ka_3$ нөхцөл биелнэ. Урвуугаар $\vec{b} = k\vec{a}$ бол \vec{a}, \vec{b} хоёр вектор параллел байна.

Жишээ 9. $\vec{a} = (2, -3, -1)$, $\vec{b} = (-4, x, y)$ векторууд параллел бол x, y -ийг ол.

Бодолт. $\vec{b} = k\vec{a}$ тул $(-4, x, y) = k(2, -3, -1) = (2k, -3k, -k)$

$$\begin{cases} 2k = -4 \\ -3k = x \\ -k = y \end{cases}$$

тэгшигтгэлийн системээс $k = -2$ болох бөгөөд $x = (-3) \cdot (-2) = 6$, $y = -(-2) = 2$ болно.

Жишээ 10. Дараах векторуудаас $\vec{a} = 4\vec{i} + 8\vec{j} - 6\vec{k}$ вектортой тэнцүү, параллел векторыг ол.

а. $\vec{b} = 2\vec{i} + 4\vec{j} - 3\vec{k}$

б. $\vec{c} = \vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}$

в. $\vec{d} = -4\vec{i} - 8\vec{j} + 6\vec{k}$

г. $\vec{d} = \frac{1}{4}(16\vec{i} + 32\vec{j} - 24\vec{k})$

Бодолт.

а. $\vec{a} = 4\vec{i} + 8\vec{j} - 6\vec{k} = 2(2\vec{i} + 4\vec{j} - 3\vec{k}) = 2\vec{b} \Rightarrow \vec{a} = 2\vec{b}$ гэдгээс тэнцүү биш, $\vec{a} \parallel \vec{b}$ байна.

б. $\vec{a} = 4\vec{i} + 8\vec{j} - 6\vec{k}$ ба $\vec{c} = \vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}$ векторууд тэнцүү биш, параллел биш байна.

в. $\vec{d} = -4\vec{i} - 8\vec{j} + 6\vec{k} = -(4\vec{i} + 8\vec{j} - 6\vec{k}) = -\vec{a}$ тул $\vec{d} = -\vec{a}$ эсрэг вектор тэнцүү биш, параллел байна.

г. $\vec{d} = \frac{1}{4}(16\vec{i} + 32\vec{j} - 24\vec{k}) = 4\vec{i} + 8\vec{j} - 6\vec{k} = \vec{a}$ тул \vec{d} вектор \vec{a} -тай тэнцүү байна.

42. Векторууд хоорондоо параллел эсэхийг шалга.

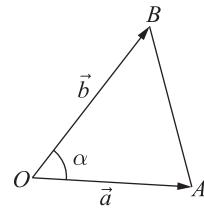
а. $\vec{a} = (1, 3, -1), \vec{b} = (-4, 4, 3)$

б. $\vec{a} = (3, -2, -1), \vec{b} = (6, -4, -2)$

- в. $\vec{a} = (2, -3, -1)$, $\vec{b} = (-2, 3, 1)$ г. $\vec{a} = (2, -1, 8)$, $\vec{b} = (-4, 2, -3)$
43. Хэрэв $\vec{c} = (-5, 4, -2)$, $\vec{d} = (-2, x, y)$ векторууд хоорондоо параллел бол x, y -ийг ол.
44. $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$ вектортой тэнцүү, параллел векторыг ол.
- а. $\vec{b} = 2\vec{i} + 4\vec{j} - 6\vec{k}$ б. $\vec{c} = -\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$
 в. $\vec{d} = 3\vec{i} + 6\vec{j} - 9\vec{k}$ г. $\vec{e} = \frac{1}{3}(3\vec{i} + 6\vec{j} - 9\vec{k})$

7.4 ХОЁР ВЕКТОРЫН СКАЛЯР ҮРЖВЭР

Тэгээс ялгаатай \vec{a}, \vec{b} векторууд өгсөн байг. Огторгуйд аливаа O цэг авч $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ байх $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ вектор байгуульяа. Тэгвэл AOB гурвалжны $\angle BOA$ өнцгийг \vec{a}, \vec{b} хоёр векторын хоорондох өнцөг гэнэ. \vec{a}, \vec{b} хоёр векторын хоорондох өнцгийг $\vec{a} \wedge \vec{b}$ гэж тэмдэглэдэг.



Санамж $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ үед $\alpha = 0^\circ$, $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$ үед $\alpha = 180^\circ$ байна.

Тодорхойлолт. \vec{a}, \vec{b} хоёр векторын уртын үржвэрийг хоорондох өнцгийн косинусаар үржүүлсэн үржвэрийг уг хоёр векторын **скаляр үржвэр** гэж нэрлээд $\vec{a} \cdot \vec{b}$ гэж тэмдэглэнэ. Өөрөөр хэлбэл $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \alpha$ байна.

$\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$, $\vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$ векторуудын хоорондох өнцөг α -г ольё.

AOB гурвалжны хувьд косинусын теорем ёсоор $\cos \alpha = \frac{OA^2 + OB^2 - AB^2}{2 \cdot OA \cdot OB}$ болно.

Гурвалжны OA, OB, AB талуудын урт нь харгалзан $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{AB}$ векторын урттай тэнцүү байна. Иймд эдгээр векторын уртыг олбол

$$|\overrightarrow{OA}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}, |\overrightarrow{OB}| = \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2} \text{ ба } \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} =$$

$$= (x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}) - (x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}) = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k} \text{ болно.}$$

Эндээс $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$ байна. Эдгээр

илэрхийллийг $\cos \alpha = \frac{OA^2 + OB^2 - AB^2}{2 \cdot OA \cdot OB}$ тэнцэтгэлд орлуулж эмхэтгэвэл

$$\cos \alpha = \frac{2x_1x_2 + 2y_1y_2 + 2z_1z_2}{2 \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \text{ болно.}$$

Чанар 5. $\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$, $\vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$ векторын скаляр үржвэр $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1y_1 + x_2y_2 + z_1z_2$ байна.

Жишээ 1. $\vec{a} = (3, 4, -1)$, $\vec{b} = (-2, 8, 2)$ бол \vec{a} ба \vec{b} векторын скаляр үржвэрийг ол.

Бодолт. $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1y_1 + x_2y_2 + z_1z_2 = 3 \cdot (-2) + 4 \cdot 8 + 2 \cdot (-1) = 24$

Жишээ 2. $\vec{a} = 4\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{b} = x\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$ векторын скаляр үржвэр 24 байх x -ийн утгыг ол.

Бодолт. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 4 \cdot x + 3 \cdot 2 + (-1) \cdot (-2) = 24$ болно. Эндээс $x = 4$ болно.

45. Векторын скаляр үржвэрийг ол.

а. $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 3\vec{k}$, $\vec{b} = -\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$ б. $\vec{a} = -2\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$, $\vec{b} = -3\vec{i} + 5\vec{j} - \vec{k}$

в. $\vec{a} = 8\vec{i} + 2\vec{j} - 7\vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} + \vec{j} - 6\vec{k}$ г. $\vec{a} = 4\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$, $\vec{b} = -\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$

46. $A(4, -3, 4)$, $B(-3, 2, 5)$, $C(1, -7, 2)$ цэгүүд өгөгдөв. \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{BC} векторын скаляр үржвэрийг ол.

47. ABC гурвалжны оройн цэгийн координат $A(4, -2, 3)$, $B(-2, 1, 3)$, $C(4, -1, 3)$ өгчээ.

а. \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{BC} , \overrightarrow{CA} векторуудыг \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} суурь нэгж вектороор илэрхийл.

б. ABC гурвалжны периметрийг ол.

в. \overrightarrow{BC} , \overrightarrow{CA} векторын скаляр үржвэрийг ол.

48. ABC гурвалжны оройн цэгийн координат $A(1, -1, 3)$, $B(-2, 4, 1)$, $C(5, -1, 3)$ өгчээ.

а. \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{BC} , \overrightarrow{CA} векторуудыг \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} суурь нэгж вектороор илэрхийл.

б. \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{BC} векторын скаляр үржвэрийг ол.

в. \overrightarrow{BC} , \overrightarrow{CA} векторын скаляр үржвэрийг ол.

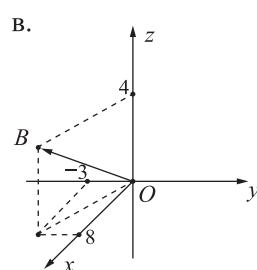
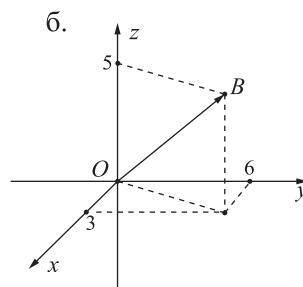
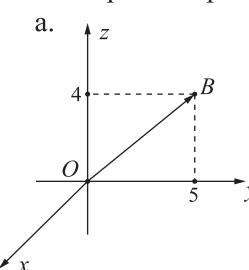
г. \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AC} векторын скаляр үржвэрийг ол.

БҮЛГИЙН НЭМЭЛТ ДААЛГАВАР

1. Дараах векторуудыг \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} вектороор задал.

а. $\overrightarrow{OA} = (-4, 4, 3)$ б. $\overrightarrow{OB} = (-1, 2, -2)$ в. $\overrightarrow{OC} = (4, -1, 2)$ г. $\overrightarrow{OD} = (4, -4, 0)$

2. \overrightarrow{OB} векторын координатыг бич.



3. Дараах векторын координатыг бич.

а. $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$

б. $\vec{d} = \vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$

в. $\vec{b} = -\vec{i} + 4\vec{j} - 3\vec{k}$

г. $\vec{a} = 4\vec{i} + 6\vec{j} - \vec{k}$

д. $\vec{d} = 3\vec{i} - 7\vec{j} + 3\vec{k}$

е. $\vec{b} = 7\vec{i} + 5\vec{j} - 4\vec{k}$

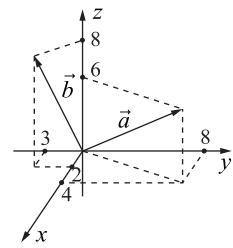
4. Дараах векторыг байгуул.

а. $\overrightarrow{OA} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$

б. $\overrightarrow{OB} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$

в. $\overrightarrow{OC} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$

5. $\overrightarrow{OA} = \vec{i} + \vec{j} - 4\vec{k}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$ векторууд өгсөн бол \overrightarrow{AB} векторын уртыг ол.
6. Дараах векторыг дүрсэл.
- а. $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ б. $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$
 в. $\vec{e} = \vec{b} - \vec{a}$ г. $\vec{g} = -\vec{a} - \vec{b}$
7. Хэрэв $\vec{a} = (3, 4, -1)$, $\vec{b} = (-2, 8, 3)$ бол $\vec{a} + \vec{b}$ болон уртыг ол.
8. $\vec{a} = (2, -3, -1)$, $\vec{b} = (-4, -1, 3)$ бол дараах нийлбэрийг ол.
- а. $\vec{a} + \vec{b}$ б. $\vec{a} + 2\vec{b}$ в. $4\vec{a} - 2\vec{b}$ г. $2\vec{a} - 3(\vec{a} + 2\vec{b})$
9. \vec{b} ба \vec{c} векторын координатыг ол.
- а. $\vec{b} + \vec{c} = (1, 4, 3)$ ба $2\vec{b} + \vec{c} = (-2, 4, -4)$ б. $\vec{b} - \vec{c} = (-2, 4, -1)$ ба $\vec{b} + \vec{c} = (-3, -6, 5)$
10. $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{b} = 3\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$ векторуудыг хоорондоо перпендикуляр гэж батал.
11. $\vec{a} = (2, 3, x)$, $\vec{b} = (-2, 1, 3)$ векторын хувьд $\vec{a} - \vec{b}$ ба $\vec{a} + \vec{b}$ нь хоорондоо перпендикуляр байх x -ийн утгыг ол.
12. AB хэрчмийг 2:1 харьцаагаар хуваах $C(7, -2, -3)$ цэг өгсөн байг. $A(2, 2, -3)$ бол B цэгийн координатыг ол.
13. Дэвтрийн дөрвөлжин нүд ашиглан өгсөн координаттай векторыг зур.
- а. $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ б. $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ в. $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$ г. $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ д. $\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$
14. $\vec{a} = (2, -4, 3)$, $\vec{b} = (1, 2, 4)$, $\vec{c} = (1, -2, 1.5)$, $\vec{d} = (-2, -4, -8)$ вектор өгчээ.
- Параллел хос векторуудыг ол.
15. \vec{c} векторын координатыг ол.
- а. $\vec{a} = (-4, 3, -2)$, $\vec{b} = (-1, -8, 7)$ ба $\vec{c} = -2\vec{a} + 3\vec{b}$
 б. $\vec{a} = (5, 12, -8)$, $\vec{b} = (-8, -1, -3)$, $\vec{d} = (2, -3, -1)$ ба $\vec{c} = -\vec{a} + 3\vec{b} + 3\vec{d}$
 в. $\vec{a} = (-2, 7, -3)$, $\vec{b} = (3, -9, 2)$, $\vec{d} = (-4, 5, -5)$ ба $\vec{c} = -2\vec{a} + \vec{b} - 3\vec{d}$
 г. $\vec{a} = (2, -1, -1)$, $\vec{b} = (-3, -1, -2)$, $\vec{d} = (0, -3, -5)$ ба $\vec{c} = -3(\vec{a} + 3\vec{b}) - 3(\vec{d} - 5\vec{a})$
16. $\vec{a} = (-1, 4, -2)$, $\vec{b} = (-3, -3, -7)$, $\vec{d} = (8, 0, -1)$ вектор өгчээ. Дараах векторын уртыг ол.
- а. $-2\vec{a} + \vec{b}$ б. $-\vec{a} + \vec{b} - \vec{d}$ в. $-2\vec{a} + 3\vec{b} - \vec{d}$ г. $2(\vec{a} + \vec{b}) - 3(\vec{d} - \vec{a})$
17. Дараах цэгүүдээр зохиогдох векторууд параллел болохыг батал. B цэг AC хэрчмийг ямар харьцаагаар хуваах вэ?
- а. $A(-5, 6, -5)$, $B(7, -2, -1)$, $C(10, -4, 0)$ б. $A(2, 2, 3)$, $B(4, 4, 1)$, $C(5, 5, 0)$
18. AB хэрчмийг 2:1 харьцаатай хуваах C цэгийн координатыг ол.
- а. $A(-2, -6, -5)$, $B(7, -2, 12)$ б. $A(4, -2, 6)$, $B(-4, 8, -10)$
 в. $A(12, -8, 4)$, $B(-4, 7, -7)$ г. $A(-5, -1, -4)$, $B(-3, -4, 9)$
19. Хэрэв $ABCD$ параллограммын оройн цэгийн координатууд $A(1, 3, 3)$, $B(4, -2, -2)$, $C(3, 1, 1)$ бол а. D цэгийн координатыг ол. б. \overrightarrow{AC}



- векторын уртыг ол.
- в. \overrightarrow{AC} хэрчмийг 5:1 харьцаатай хуваах E цэгийн координатыг ол.
- г. \overrightarrow{DE} векторын координат болон уртыг ол.
- д. $\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}$ векторын координатыг ол.
- е. $\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}$ векторуудын хоорондох өнцгийн хэмжээг ол.
- 20.** Хэрэв $\vec{a} = (2, -5, 1)$, $\vec{b} = (3, x, 3)$ хоёр вектор параллел бол x -ийн утгыг ол.
- 21.** $\vec{a} = (x, 1, 3)$, $\vec{b} = (4, x, 1)$ хоёр вектор параллел байх x -ийн утгыг ол.
- 22.** $\vec{a} = (4, -3, 2)$ векторын уртыг ол.
- 23.** Хэрэв $A(2, 3, -1)$ ба $B(-2, 2, -3)$ цэг өгсөн бол \overrightarrow{AB} векторын координат, уртыг ол.
- 24.** Хэрэв $\vec{b} = (2, x, -1)$ векторын урт $\sqrt{20}$ бол x -ийг ол.
- 25.** Хэрэв $A(3, 4, -1)$ ба $C(-1, -2, 3)$ бол а. \overrightarrow{AC} векторыг ол. б. \overrightarrow{AC} векторын уртыг ол.
- 26.** $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ вектор $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{b} = -\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$, $\vec{c} = 4\vec{j} - 2\vec{k}$ хэлбэртэйгээр өгсөн байг.
- а. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ векторын харгалзах координатыг бич.
- б. $\vec{a} - 2\vec{b} + 3\vec{c}$ илэрхийллийг $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ суурь вектороор вектороор илэрхийл.
- в. $|\vec{a} - 2\vec{b} + 3\vec{c}|$ утгыг ол.
- 27.** Хэрэв $\vec{i} + 4\vec{j} + \vec{k}$ ба $3\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ векторуудад $a\vec{i} + b\vec{j} + \vec{k}$ вектор перпендикуляр бол a, b -ийн утгыг ол.
- 28.** Хэрэв A ба B цэгийн радиус вектор нь харгалзан $\overrightarrow{OA} = \vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$, $\overrightarrow{OB} = -2\vec{i} + 5\vec{j} - 3\vec{k}$ бол а. \overrightarrow{AB} векторыг ол. б. AB хэрчмийн уртыг ол.
- 29.** $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ векторууд $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{c} = -\vec{j} + \vec{k}$ гэж өгсөн байг.
- а. $\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$ тооцоол. б. Дээрх хариултад үндэслэн \vec{a} ба $\vec{b} + \vec{c}$ векторууд хоорондоо ямар хамааралтайг тайлбарла.
- 30.** $A(-5, 6, -5), B(7, -2, -1), C(10, -4, 0)$ цэгийн хувьд
- а. \overrightarrow{AB} ба \overrightarrow{BC} векторууд параллел болохыг тогтоо.
- б. B цэг нь AC хэрчмийг ямар харьцаагаар хуваах вэ?
- 31.** $A(-5, 6, -5), B(7, 2, 1)$ цэгийн хувьд AB хэрчмийг 1:5 харьцаагаар хуваах C цэгийг координатыг ол.
- 32.** Хэрэв $A(4, 4, 10), B(-2, -4, 12), C(-8, 0, 10)$ нь тэгш өнцөгт гурвалжны оройн цэгүүд бол аль өнцөг нь тэгш өнцөг вэ?
- 33.** Хэрэв $ABCD$ параллелограммын $A(1, 3, 3), B(4, -2, -2), C(3, 1, 1)$ оройн цэгийн координат өгсөн бол
- а. D цэгийн координатыг ол.
- б. CD хэрчмийн дундаж E цэгийн координатыг ол.
- в. AE хэрчмийг 1:2 харьцаагаар хуваах F цэгийн координатыг ол.
- 34.** AB хэрчмийг C, D хоёр цэгээр тэнцүү хэсгүүдэд хуваажээ. Хэрэв $A(1, 3, 3)$,

$D(3,4,-8)$ бол а. \overrightarrow{AD} вектор б. \overrightarrow{AB} вектор в. B ба C цэгийн координатыг тус тус ол.

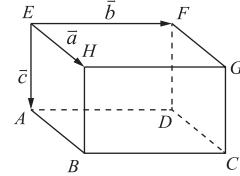
35. Хэрэв радиус векторын координат $\overrightarrow{OA} = (1, 2, 3)$ бол уртыг ол.

36. Хэрэв $A(3,4,-1)$ ба $B(-1,-2,3)$ бол $\frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{BA}}$ харьцааг ол.

37. Хэрэв $A(3,4,-1)$ ба $B(-1,-2,3)$ бол $\frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}} = 1$ бол C цэгийн координатыг ол.

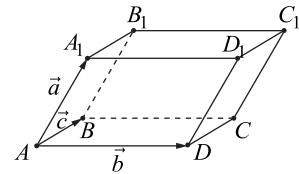
38. Зурагт өгсөн тэгш өнцөгт параллелепипедийн хувьд дараах векторыг $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ вектороор илэрхийл.

- | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| а. \overrightarrow{GF} | б. \overrightarrow{DE} | в. \overrightarrow{BE} |
| г. \overrightarrow{CA} | д. \overrightarrow{GE} | е. \overrightarrow{CE} |
| ё. \overrightarrow{DH} | ж. \overrightarrow{FH} | з. \overrightarrow{AG} |



39. Биетийн эсрэг талсууд нь хос хосоороо параллел бол дараах векторыг $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ вектороор илэрхийл.

- | | | |
|----------------------------|----------------------------|------------------------------|
| а. \overrightarrow{CD} | б. \overrightarrow{CA} | в. $\overrightarrow{C_1A_1}$ |
| г. $\overrightarrow{D_1A}$ | д. $\overrightarrow{C_1B}$ | е. $\overrightarrow{C_1A}$ |
| ё. $\overrightarrow{C_1D}$ | ж. \overrightarrow{DB} | з. $\overrightarrow{DB_1}$ |



40. Дараах векторыг байгуул.

- а. $\overrightarrow{OA} = (4, 3, 2)$ б. $\overrightarrow{OB} = (1, 3, -2)$ в. $\overrightarrow{OC} = (-1, -3, 2)$ г. $\overrightarrow{OD} = (-2, -3, -2)$

41. $A(0, 1, 0), B(1, 0, 0), C(1, 2, 0), D(2, 1, 0)$ цэг өгчээ. $\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{DC}$ хоёр вектор тэнцүү болохыг батал.

42. $A(1, 1, 0), B(-1, 0, 0), C(0, 1, 0)$ цэгүүд өгчээ. $\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{DC}$ хоёр вектор тэнцүү байх $D(x, y, z)$ цэгийг ол.

43. \vec{a} ба \vec{b} векторын скаляр үржвэрийг ол.

- а. $\vec{a} = (3, 4, 3), \vec{b} = (-2, 8, -1)$ б. $\vec{a} = (-3, 5, 1), \vec{b} = (2, -3, -5)$

44. $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 4, \vec{a}, \vec{b}$ хоёр векторын хоорондох өнцөг

- а. 60° б. 45° в. 90° г. 120° бол $\vec{a} \cdot \vec{b}$ ол.

45. \vec{a}, \vec{b} хоёр векторын хоорондох өнцгийн хэмжээг ол.

- а. $\vec{a} = (2, 3, -3), \vec{b} = (2, 1, -1)$ б. $\vec{a} = (-2, 1, -2), \vec{b} = (-2, 1, -3)$

46. \vec{a} ба \vec{b} векторын хоорондох өнцгийн хэмжээг ол.

- а. $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 3, \vec{a} \cdot \vec{b} = 3$ б. $|\vec{a}| = 4, |\vec{b}| = 3, \vec{a} \cdot \vec{b} = 6\sqrt{2}$

47. $ABCD A_1B_1C_1D_1$ кубийн хувьд дараах векторын скаляр үржвэрийг ол.

- а. $\overrightarrow{A_1D} \cdot \overrightarrow{A_1D_1}$ б. $\overrightarrow{A_1D} \cdot \overrightarrow{A_1C}$ в. $\overrightarrow{A_1B} \cdot \overrightarrow{A_1C_1}$ г. $\overrightarrow{D_1A} \cdot \overrightarrow{D_1C}$

48. $A(4, -1, 3), B(8, 3, -1), C(0, 4, 3), D(-4, 0, 8)$ нь $ABCD$ параллелограммын оройн цэгийн координат бол

- а. AB хэрчмийн дундаж E цэгийн координатыг ол.

- б. CE хэрчмийг 2:1 харьцаагаар хуваах F цэгийн координатыг ол.

в. \overrightarrow{BF} , \overrightarrow{FD} векторууд параллел болохыг тогтоо. F цэг нь BD хэрчмийг ямар харьцаагаар хуваах вэ?

49. С цэгийг BD хэрчим дээр $BC:CD=4:3$ байхаар авав.

- а. \overrightarrow{CD} векторыг \overrightarrow{CB} ,
- б. \overrightarrow{BD} векторыг \overrightarrow{CD} ,
- в. \overrightarrow{CD} векторыг \overrightarrow{BC} вектороор илэрхийл.

50. A ба B цэгийг CD хэрчим дээр $CA:AB:BD=2:2:1$ байхаар авав.

- а. \overrightarrow{CD} векторыг \overrightarrow{CB} ,
- б. \overrightarrow{BD} векторыг \overrightarrow{AB} ,
- в. \overrightarrow{AD} векторыг \overrightarrow{BC} ,
- г. \overrightarrow{CD} векторыг \overrightarrow{AB} вектороор тус тус илэрхийл.

51. Зурагт өгсөн тэгш өнцөгт параллелепипедийн ирмэгүүд харгалзан 4, 10, 5 болно.

- а. \overrightarrow{OF} , \overrightarrow{OA}
- б. $\overrightarrow{OE}, \overrightarrow{OG}, \overrightarrow{OB}$
- в. \overrightarrow{LB} , \overrightarrow{OL}
- г. $|\overrightarrow{OL}|$

д. EL хэрчмийн дундажийг A цэгтэй холбох векторын координатыг ол.

52. Ирмэгүүд нь 5, 10, 6 байх тэгш өнцөгт параллелепипедийн дээд талд 1, 1, 6 ирмэгтэй параллелепипедийг зурагт үзүүлснээр байрлуулжээ.

- а. Тэмдэглэгдсэн цэгүүдийн координатыг ол.
- б. $\overrightarrow{GF}, \overrightarrow{FD}, \overrightarrow{EC}, \overrightarrow{CG}$ векторын координатыг ол.

53. Хэрэв ABC гурвалжны оройн цэгүүд

$A(2, -1, 3)$, $B(3, 6, 5)$, $C(6, 6, -2)$ бол

- а. $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC}$ векторын координатыг бич.

б. Хэрэв BC талын дундаж D цэг бол \overrightarrow{AD} векторын координатыг ол.

в. Хэрэв гурвалжны медиануудын огтлолцлын цэг O бол \overrightarrow{BO} векторын координатыг ол.

г. $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC}$ векторын уртыг ол.

д. $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ векторын скаляр үржвэрийг ол.

е. $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ векторын хоорондох өнцгийн хэмжээг ол.

54. Зурагт өгсөн пирамидын суурь квадрат бөгөөд талын урт нь 6 нэгж болно.

Хэрэв A цэгийн координат $(6, 0, 0)$, D цэгийн координат $(3, 3, 8)$ ба C цэг у тэнхлэг дээр оршдог бол

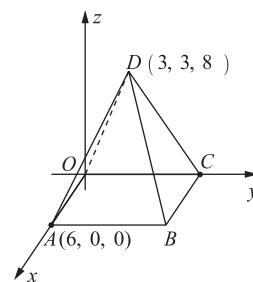
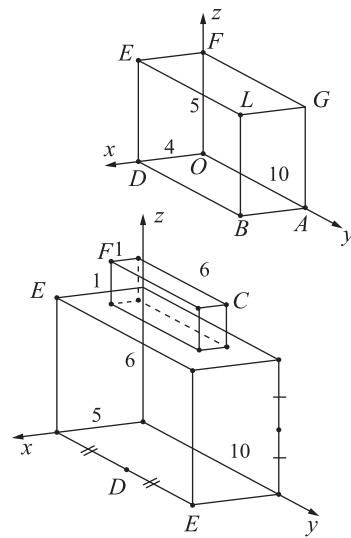
- а. B, C цэгийн координатыг ол.
- б. $\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}$ векторын координатыг ол.

в. ADB өнцгийн хэмжээг ол.

г. AC болон OB хэрчмийн огтлолцлын цэгийн координатыг ол.

д. Пирамидын өндрийг ол.

е. $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC}$ векторын хоорондох өнцгийн хэмжээг ол.



VIII БҮЛЭГ. УЛАМЖЛАЛ

Энэ бүлэг сэдвийг судалснаар дараах мэдлэг, чадварыг эзэмшинэ.

- Функцийн графикийн өгсөн цэгт татсан шүргэгч шулууны наалт
- Уламжлал, дифференциалчлах уйлдэл
- Уламжлалын тэмдэглэгээ
- Зэрэгт функцийн уламжлалыг олох
- Нийлбэр, ялгавар ба тоогоор үржүүлсэн функцийн уламжлалын дүрэм
- Давхар функцийн уламжлалыг олох
- Уламжлал ашиглан
 - a. Функцийн графикийн өгсөн цэг дээрх наалтых олох, шүргэгч ба нормал шулууны тэгшигтгэлийг олох
 - b. Функцийн өсөх, буурах завсрлыг олох
 - c. Функцийн өөрчлөлтийн хурдыг олох
- Функцийн экстремум цэг олох (максимум, минимум цэг)
- Функцийн график байгуулахад экстремум цэгийг ашиглах

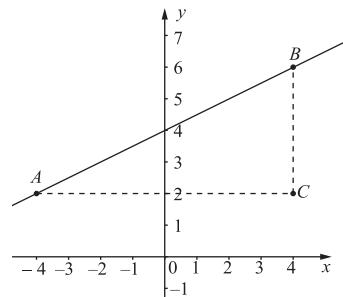
8.1. ФУНКЦИЙН ГРАФИКИЙН ӨГСӨН ЦЭГ ДЭЭРХ ШҮРГЭГЧ ШУЛУУНЫ НАЛАЛТ

Шулууны наалтых олохдоо уг шулуун дээрх аливаа хоёр цэгийн ординатуудын ялгаврыг абсциссуудын ялгаварт хуваадаг.

Жишээлбэл: $A(-4, 2)$, $B(4, 6)$ цэгүүдийг дайрсан шулууны наалт нь уг хоёр цэгийн ординатуудын ялгаврыг абсциссуудынх нь ялгаварт харьцуулсан харьцаа учир зурагт үзүүлснээр $\frac{BC}{AC} = \frac{6-2}{4-(-4)} = \frac{1}{2}$

гэж олдоно.

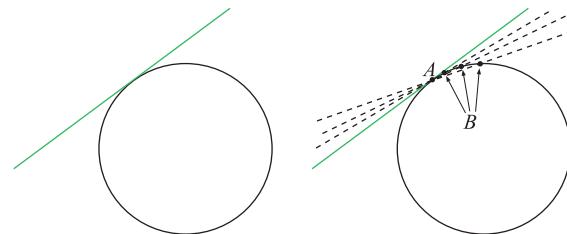
Аливаа муруйн хувьд түүн дээр $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ цэгүүдийг авч AB шулууныг байгуульяа. Тэгвэл AB шулууны наалт нь $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ -тэй тэнцүү байна. Бид цаашид абсциссуудын ялгавар $x_2 - x_1$ -ийг Δx , харин ординатуудын ялгавар $y_2 - y_1$ -ийг Δy гэж тэмдэглэнэ. Иймд шулууны наалт нь $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ болно.



Санамж $\Delta x, \Delta y$ нь эерэг, сөрөг аль нь ч байж болдог ба Δ -ийг дельта гэж уншина. Хэрэв өгсөн муруй нь $y = f(x)$ функцийн график бол Δy -ийг бас Δf гэж тэмдэглэж болно.

Шүргэгч шулуун

Бид өмнө тойргийг хоёр цэгээр огтлох шулууныг тойргийн огтлогч, харин тойротой цор ганц ерөнхий цэгтэй шулууныг тойргийн шүргэгч шулуун гэдгийг мэдсэн. Тойрог дээр орших A цэсэн бэхлэгдсэн цэгээс ялгаатай B цэгийг тойрог дээр авч AB огтлогч шулууныг байгуульяа. Одоо B цэгийг A цэг рүү тойрог дээгүүр ойртуулбал AB огтлогч нь A цэгт татсан шүргэгч шулуунд ойртсоор B цэг A цэгтэй давхцах үед шүргэгч шулуунтай давхацна.



Үүнтэй төстэйгөөр муруйн шүргэгч шулууныг тодорхойльё.

Өгсөн муруй дээр A цэг бэхэлсэн байг. Уг муруй дээр орших B цэг авч AB огтлогч шулуун татъя. B цэгийг A цэг рүү муруйгаар ойртуулсаар түүнтэй давхцах үед AB шулуун өөрчлөгдсөөр хүрч очих шулуун нь тухайн муруйн A цэг дээрх **шүргэгч шулуун** болно.

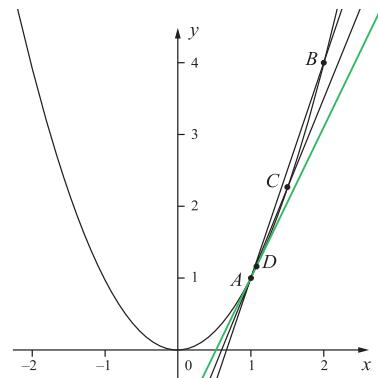
Санамж Бид энэ ангид зөвхөн цэг бүрдээ шүргэгч татаж болдог муруйг судлах ба ерөнхий тохиолдолд муруйн цэг болгон дээр шүргэгч татаж болдог байх албагүй.

Тодорхойлолт. Муруйн өгсөн цэгт татсан шүргэгч шулууны наалалтыг уг муруйн тухайн цэг дээрх наалалт гэнэ.

Өөрөөр хэлбэл, хэрэв муруйн B цэгийг A цэг рүү ойртуулбал уг хоёр цэгийг холбосон шулууны наалалт нь A цэг дээрх шүргэгч шулууны наалалт руу дөхнө.

Жишээ 1. $y = x^2$ функцийн графикийн $A(1,1)$ цэг дээрх наалалтыг ол.

Бодолт. $B(2,4)$ гэсэн цэгийг функцийн график дээр авч AB огтлогчийн наалалтыг олбол $\frac{4-1}{2-1} = 3$ гэж гарна. Одоо A цэг рүү илүү ойртуулж $C(1.5, 2.25)$ гэсэн цэгийг авч AC огтлогчийн наалалтыг нь олбол $\frac{2.25-1}{1.5-1} = 2.5$ болох бөгөөд дахин илүү ойртуулж $D(1.1, 1.21)$ гэсэн цэг авч AD огтлогчийн наалалтыг олбол $\frac{1.21-1}{1.1-1} = 2.1$ болно.



Ийнхүү A цэгт ойрхон цэгүүд сонгон авч харгалзах наалалтыг бодож хүснэгтээр үзүүлэв.

x	0.8	0.9	0.99	0.999	\rightarrow	1	\leftarrow	1.001	1.01	1.1	1.5	2
наалалт	1.6	1.9	1.99	1.999	\rightarrow	?	\leftarrow	2.001	2.01	2.1	2.5	3

Ийм замаар шинээр авах цэгээ A цэг рүү ойртуулахад байгуулагдаж байгаа огтлогч шүргэгч шулуунд ойртоно. Энэ байгуулагдаж байгаа огтлогчуудын

налалт нь хүснэгтэд харснаар 2 руу ойртож, шүргэгч шулууны налалт 2-той ойролцоогоор тэнцүү гэж харж болж байна. Иймд $y = x^2$ функцийн графикийн $A(1,1)$ цэг дээрх налалт 2 болно.

Одоо $y = x^2$ функцийн графикийн аливаа $A(x_0, x_0^2)$ гэсэн цэг дээрх налалтыг тооцоольё. Үүний тулд B цэгийг A цэгт ойрхон байхаар функцийн график дээрээ сонгон AB огтлогчийн налалтыг ольё. Хэрэв бид B цэгийн абсциссыг A цэгийн абсциссаас Δx -ээр их буюу $x_0 + \Delta x$ гэж авбал B цэгийн ординат $(x_0 + \Delta x)^2$ болно. Иймд AB огтлогчийн налалт нь $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x} = \frac{2x_0\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x$ болно. Одоо B цэгийг A цэг рүү улам ойртуулбал AB огтлогч шулуун A цэгт татсан шүргэгчид дөхөх бөгөөд Δx -ийн утга нь тэг рүү ойртоно. Иймд функцийн графикийн A цэг дээрх налалт нь $2x_0$ болно.

Эндээс $y = x^2$ функцийн графикийн аливаа (x, x^2) цэг дээрх налалтыг олоход энэ нь уг цэгийн абсциссаас хамаарсан $g(x) = 2x$ гэсэн функц гарч байна.

Жишээ 2. $y = 2x^2 - x$ функцийн графикийн x_0 абсцисстай цэг дээрх налалтыг ол.

Бодолт. $A(x_0, 2x_0^2 - x_0)$ цэгт ойрхон байхаар $B(x_0 - \Delta x, 2(x_0 - \Delta x)^2 - (x_0 - \Delta x))$ гэсэн цэгийг функцийн график дээрээ сонгон авч AB огтлогчийн налалтыг ольё. AB огтлогчийн налалт нь

$$\begin{aligned}\frac{\Delta y}{(x_0 - \Delta x) - x} &= \frac{(2(x_0 - \Delta x)^2 - (x_0 - \Delta x)) - (2x_0^2 - x_0)}{-\Delta x} = \\ &= \frac{-4x_0\Delta x + 2\Delta x^2 + \Delta x}{-\Delta x} = 4x_0 - 1 - 2\Delta x\end{aligned}$$

болно. Одоо B цэгийг A цэг рүү улам ойртуулбал AB огтлогч A цэгт татсан шүргэгчид дөхөж Δx нь тэг рүү ойртоно. Иймд функцийн графикийн A цэг дээрх налалт нь $4x_0 - 1$ болно. Эндээс налалт нь уг цэгийн абсциссаас хамаарсан $4x - 1$ гэсэн функц болж байна.

Жишээ 3. $f(x) = x^2 - x + 2$ функцийн $x_0 = 2$ цэг дээрх налалтын ойролцоо утгыг $\Delta x = 0.1$ үед ол.

Бодолт. Функцийн $x_0 = 2$ цэг дээрх утгыг бодвол $f(x_0) = 2^2 - 2 + 2 = 4$ болно.

Харин $f(x_0 + \Delta x) = f(2.1) = 2.1^2 - 2.1 + 2 = 4.31$ болох ба эндээс

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{4.31 - 4}{0.1} = 3.1 \text{ болно.}$$

- Хэрэв $f(x) = 2x^2 + 3x$ бол $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ -ийг $x_0 = -1$ цэг дээр Δx -ийг 0.5, 0.1, 0.01 байхад тооцоол.
- Хэрэв $f(x) = \frac{x^2}{2} - 2x$ бол $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ -ийг $x_0 = 2$ цэг дээр Δx -ийг 0.5, 0.1, 0.01 байхад тооцоол.

3. Тооны машин ашиглан дараах хүснэгтийг нөх. Налалтыг бүхлээр тоймло.

$f(x)$	x_0	Δx	$f(x_0)$	$f(x_0 + \Delta x)$	$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$	Налалтын ойролцоо утга
$2x^2 - 3x$	1	0.01				
$x^2 - x + 2$	2	0.01				
$x^3 + x$	-1	0.01				
$x^3 + 2x - 3$	0	0.01				
$\frac{x^2 + 4x}{x^3}$	-2	0.01				
$\frac{x+4\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$	4	0.41				

4. Дараах функцийн x_0 цэг дээрх налалтыг ол.

a. $y = 3x^2 + 2x - 4$, $x_0 = 1$, $x_0 = -1$, $x_0 = 3$

б. $y = 2(x-3)(x+1)$, $x_0 = -2$, $x_0 = 1$, $x_0 = 2$

5. Дараах функцийн харгалзах цэг дээрх налалтыг ол.

а. $y = 3x^2$, $x_0 = 1$

б. $y = (x-2)(x-1)$, $x_0 = 2$

в. $y = \sqrt{3}x^2 + 4x$, $x = x_0$

г. $y = (x+1)(x-2)$, $x = x_0$

д. $y = 2x^2 - 2x - 1$, $x_0 = 2$

е. $y = 3x^2 - 24x + 6$, $x_0 = 2$

ё. $y = \frac{x^2}{3} - 5x + 8$, $x_0 = -2$

ж. $y = -6x^2 - 15x + 6$, $x_0 = 3$

з. $y = \frac{x^2}{4} - 3x + 12$, $x_0 = 1$

и. $y = (9x-1)(x+2) - x$, $x_0 = 0$

й. $y = \left(\frac{x}{2} - 2\right)(2x+6) - 2x$, $x_0 = 1$

к. $y = (\sqrt{2}x-1)(\sqrt{3}x-2) - 2x$, $x_0 = -1$

8.2. УЛАМЖЛАЛ БА ДИФФЕРЕНЦИАЛЧЛАХ ҮЙЛДЭЛ

Өмнөх сэдвийн хүрээнд зарим хялбар функцийн графикийн аливаа цэг дээрх налалтыг бодож олсон ба уг налалт нь абсциссаас хамаарсан функц болж байгааг харсан.

Өөрөөр хэлбэл $y = f(x)$ функцийн хувьд түүний график дээрх аливаа $A(x_0, f(x_0))$ цэгийн хувьд түүнд ойр $B(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$ цэг авъя. Тэгвэл AB

огтлогч шулууны налалт $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ нь Δx нь 0-рүү улам ойртоход

уг муруйн $A(x_0, f(x_0))$ цэг дээр татсан шүргэгч шулууны налалтад ойртох ба уг налалт нь абсциссаас хамаарсан функц болно.

Тодорхойлолт. Графикийн нь аливаа цэг дээр нь шүргэгч татаж болдог $y = f(x)$ функцийн хувьд түүний $(x_0, f(x_0))$ цэг дээрх наалалтыг өгсөн функцийн x_0 цэг дээрх **уламжлал** гэдэг.

Өөрөөр хэлбэл $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ илэрхийллийн Δx нь тэг рүү ойртоход

гараг тоог x_0 цэг дээрх $y = f(x)$ функцийн уламжлал гэнэ.

$y = f(x)$ функцийн уламжлалыг $f'(x)$ эсвэл y' гэж тэмдэглэдэг. Мөн $y = f(x)$ функцийн уламжлалын $x = x_0$ цэг дээрх утгыг $f'(x_0)$ эсвэл $y'(x_0)$ гэж тэмдэглээд, уламжлалын $x = x_0$ цэг дээрх утга гэдэг.

Үүнийг

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x_0) \text{ эсвэл } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0)$$

гэж бичдэг.

Энд $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$ тэмдэглэгээ нь Δx тэг рүү дөхөх үед $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ илэрхийллийн утга $f'(x)$ утга руу дөхнө гэсэн утгыг илэрхийлдэг.

$y = x^2$ функцийн уламжлал нь дээр бодож гаргасанчлан $2x$ юм. Иймд $y' = (x^2)' = 2x$ болно. Энэхүү уламжлалыг олж байгаа үйлдлийг **дифференциалчлах** гэдэг. Тухайлбал: $y = x^2$ функцийг дифференциалчлахад $2x$ гарна. $x = x_0$ цэг дээр уламжлал нь оршин байдаг функцийг уг цэг дээр дифференциалчлагддаг функц гэнэ. Хэрэв функц $[a, b]$ завсрын бүх цэг дээр дифференциалчлагддаг бол уг функцийг $[a, b]$ завсарт дифференциалчлагддаг функц гэнэ.

Жишээ 4. $y = \frac{x^2}{2} + x$ функцийн $x = 0$ цэг дээрх уламжлалыг ол.

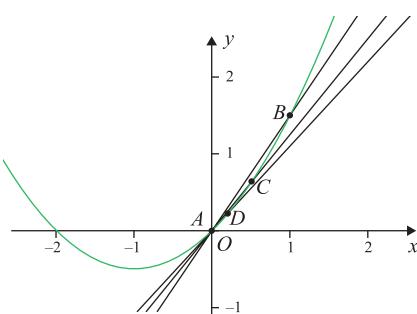
Бодолт. $x = 0$ абсцисстай цэгийг A гэвэл түүний ординат нь $y = 0$ болж A цэг $(0, 0)$ гэсэн координаттай болно. $B(1, 1.5)$ гэсэн цэгийг функцийн график дээр авч AB огтлогчийн наалалтыг олбол $\frac{1.5 - 0}{1 - 0} = 1.5$ гэж гарна. Одоо A цэг рүү илүү

ойртуулж $C(0.5, 0.625)$ цэгийг авч AC шулууны наалалтыг нь олбол $\frac{0.625 - 0}{0.5 - 0} = 1.25$ болох бөгөөд дахин илүү

ойртуулж $D(0.2, 0.22)$ гэсэн цэг авч AD

шулууны наалалтыг олбол $\frac{0.22 - 0}{0.2 - 0} = 1.1$ бол-

но. Ийм маягаар сонгож байгаа цэгээ A цэг рүү ойртуулбал байгуулагдаж байгаа шулуунуудын наалалт 1-д ойртох ба эндээс уг цэг дээрх наалалт нь 1 буюу $y'(0) = 1$ болно.



Энэ жишээг ашиглан дурын цэг дээрх уламжлалыг бодьё.

$A\left(x, \frac{x^2}{2} + x\right)$ цэгт ойрхон байхаар $B\left(x + \Delta x, \frac{(x + \Delta x)^2}{2} + x + \Delta x\right)$ гэсэн цэгийг

функцийн график дээрээ сонгон авч, AB шулууны налалтыг олбол

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\left(\frac{(x + \Delta x)^2}{2} + x + \Delta x\right) - \left(\frac{x^2}{2} + x\right)}{\Delta x} = \frac{x\Delta x + \frac{\Delta x^2}{2} + \Delta x}{\Delta x} = x + 1 + \frac{\Delta x}{2}$$

боловно. Одоо B цэгийг A цэг рүү улам бүр ойртуулбал AB шулуун A цэгт татсан шүргэгчид дөхөж Δx нь тэг рүү ойртоно. Иймд функцийн уламжлал $y'(x) = x + 1$ болно. Энд $x = 0$ гэж орлуулбал $y'(0) = 1$ болно.

6. Дараах дасгалыг эхний жишээтэй адилаар бодож нөх.

Загвар: $f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^2 + 2(x + \Delta x) - 3$

$$f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^2 + 2(x + \Delta x) - 3 - (x^2 + 2x - 3)$$

$$= x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 + 2x + 2\Delta x - 3 - x^2 - 2x + 3 = 2x\Delta x + \Delta x^2 + 2\Delta x$$

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{2x\Delta x + \Delta x^2 + 2\Delta x}{\Delta x} = \frac{(2x + \Delta x + 2)\Delta x}{\Delta x} = 2x + \Delta x + 2 = 2x + 2 + \Delta x$$

$f'(x)$	$f(x + \Delta x)$	$f(x + \Delta x) - f(x)$	$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$	$f'(x)$
$x^2 + 2x - 3$	$(x + \Delta x)^2 + 2(x + \Delta x) - 3$	$2x\Delta x + \Delta x^2 + 2\Delta x$	$2x + 2 + \Delta x$	$2x + 2$
$2x - 9$				
$8 - 9x$				
$2x^2 - 3x$				
$x^2 - x + 2$				
$-x^2 + x$				
$-x^2 + x - 3$				

7. Дараах функцийн өгсөн цэг дээрх уламжлалыг ол.

a. $y = -3x^2 + 5x$, $x_0 = 1$

b. $y = (x + 2)(x + 3)$, $x_0 = -1$

b. $y = \sqrt{2}x^2 - x$, $x_0 = 2$

c. $y = (x - 1)(x - 3) - 2x$, $x_0 = 1$

d. $y = 3x^2 + 2x - 1$, $x_0 = 2$

e. $y = 5x^2 - 2x + 6$, $x_0 = -2$

Уламжлалын тэмдэглээ

$y = f(x)$ функцийн график болох муруйн хувьд түүний аливаа $(x, f(x))$ цэг дээрх налалт буюу уг функцийн уламжлалыг $\frac{dy}{dx}$, y' эсвэл $f'(x)$ гэж тэмдэглэдэг ба түүнийг нэгдүгээр эрэмбийн уламжлал гэж бас нэрлэдэг. Тухайлбал $y = x^2$ функцийн хувьд $y' = \frac{dy}{dx} = 2x$ эсвэл $f(x) = x^2$ функцийн хувьд $f'(x) = 2x$ байна.

Бид аливаа шулууны наалт нь тогтмол тоо байдгийг мэднэ. Өөрөөр хэлбэл $y = kx + b$ гэсэн шулууны наалт нь k байдаг. Үүнийг дээрх аргаар бодож харуулья. Функцийн график дээр $A(x, kx + b)$ цэг авч түүнд ойрхон байхаар $B(x + \Delta x, k(x + \Delta x) + b)$ гэсэн цэгийг мөн функцийн график дээрээ сонгон аваад AB шулууны наалтыг олбол

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(k(x + \Delta x) + b) - (kx + b)}{\Delta x} = \frac{k\Delta x}{\Delta x} = k$$

болно.

Иймд $y' = (kx + b)' = k$ болно. Эндээс $k = 1, b = 0$ үед $x' = 1$ болох ба харин $k = 0$ үед тогтмол тооны уламжлал 0 буюу $b' = 0$ болох нь мөрдөн гарна.

Нэгэнт функцийн уламжлал нь функц гарч байгаа тул уг уламжлал функцийнхээ графикийн наалтыг олох замаар уламжлал функцийн уламжлалыг олж болно. Энэ үйлдлээр гарсан функцийг анхны функцийн хоёрдугаар эрэмбийн уламжлал гээд $f''(x)$ эсвэл $\frac{d^2y}{dx^2}$ гэж тэмдэглэдэг. Тухайлбал: $y = x^2$ функцийн хувьд $\frac{d^2y}{dx^2} = 2$ болохыг шалгаж болно. Үүний тулд бид $y' = g(x) = 2x$ функцийн уламжлалыг бodoх хэрэгтэй. Үүнийг өмнө үзсэн аргаараа бодвол

$$\frac{\Delta g}{\Delta x} = \frac{2(x + \Delta x) - 2x}{x + \Delta x - x} = \frac{2\Delta x}{\Delta x} = 2$$

бoloх учир $y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = (y')' = g'(x) = 2$ болов.

Жишээ 5. Хэрэв $y = 2x^2 - x$ бол y'' -ийг ол.

Бодолт.

Тодорхойлолт ёсоор $y'' = (2x^2 - x)''$ болох ба Жишээ 4-ийг ашиглавал

$$y'' = (2x^2 - x)'' = \left((2x^2 - x)' \right)' = (4x - 1)' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(4(x + \Delta x) - 1) - (4x - 1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{4\Delta x}{\Delta x} = 4$$

болно.

8. Дараах функцийн нэг ба хоёрдугаар эрэмбийн уламжлалуудыг ол.

- а. $y = -2x^2$ б. $y = x^2 - 3x + 2$ в. $y = 3x^2 - 7x$ г. $y = x - 5$ д. $y = 5x^2 + 2x - 7$

8.3 $y = x^n$ ФУНКЦИЙН УЛАМЖЛАЛ

$y = x^3$ функцийн графикийн дурын $A(x, y)$ гэсэн цэг дээрх наалтыг тооцоольё.

Үүний тулд $B(x + \Delta x, (x + \Delta x)^3)$ гэсэн $A(x, y)$ цэгт ойр цэг авья (Δx нь 0-д ойрхон тоо). Тэгвэл наалт буюу функцийн өөрчлөлт, аргументын өөрчлөлтийн харьцаа

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x + \Delta x)^3 - x^3}{x + \Delta x - x} = \frac{3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3}{\Delta x} = 3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2$$

болно. Δx тэг рүү ойртох үед $A(x, y)$ цэг дээрх наалт буюу уламжлал

$\frac{dy}{dx} = 3x^2$ болно. Иймд бид дараах хүснэгтийг бичиж болно.

Функц	Уламжлал
$y = x^0$	0
$y = x^1$	1
$y = x^2$	$2x$
$y = x^3$	$3x^2$

Эндээс бид $y = x^n$, $n \in \mathbb{N}$ буюу натурал тоон илтгэгчтэй функцийн хувьд

$\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}$ байна гэсэн дүгнэлт гаргаж болно.

Мөн $y = x^{-1} = \frac{1}{x}$ функцийн хувьд налалт ашиглан уламжлалыг нь олбол

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{1}{x + \Delta x} - \frac{1}{x}}{\Delta x} = \frac{x - (x + \Delta x)}{x \Delta x (x + \Delta x)} = \frac{-1}{x(x + \Delta x)}$$

болов ба эндээс $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2} = -x^{-2}$ гэж гарна. Үүнтэй ижил аргаар $y = x^{-2} = \frac{1}{x^2}$

функцийн уламжлалыг олбол $\frac{dy}{dx} = -\frac{2}{x^3} = -2x^{-3}$ гэж гарах бөгөөд $y = x^n$, $n \in \mathbb{Z}$

буюу бүхэл тоон илтгэгчтэй функцийн хувьд бас $\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}$ байна гэсэн дүгнэлт гаргаж болно.

Одоо $y = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$ функцийн хувьд налалт ашиглан уламжлалыг олбол

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{x + \Delta x - x} = \frac{(\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x})(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})}{\Delta x(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})} = \frac{(x + \Delta x) - x}{\Delta x(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} \end{aligned}$$

болов ба эндээс Δx -ийг 0 рүү ойртуулбал $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$ гэж гарна.

Энэ бүхнээс дүгнэвэл $y = x^n$, $n \in \mathbb{Q}$ үед уг функцийн уламжлал нь мөн $\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}$ байна.

Жишээ 6. $y = \sqrt{x^3}$ бол уг функцийн уламжлалыг ольё.

Бодолт. Энэ нь $y = x^{\frac{3}{2}}$ гэсэн функц тул дээрх томьёо ёсоор $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1} = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$ болно.

9. Дараах функцийн уламжлалыг ол.

- | | | | | | | |
|----------|-------------|----------------------|------------------|-------------|--------------------|-----------------|
| а. x^5 | б. x^{-3} | в. $x^{\frac{4}{3}}$ | г. $\frac{1}{x}$ | д. x^{10} | е. $\frac{1}{x^2}$ | ë. $\sqrt{x^3}$ |
|----------|-------------|----------------------|------------------|-------------|--------------------|-----------------|

ж. $x^{-\frac{1}{2}}$	з. $\frac{1}{x^{-4}}$	и. $x^{\frac{1}{3}}$	й. $x^{-\frac{1}{4}}$	к. $x^{\frac{2}{5}}$	л. $\sqrt{x^7}$	м. $\frac{1}{x^7}$
н. $x^{\frac{1}{7}}$	о. $\sqrt[3]{(x^2)^3}$	ө. $\sqrt[3]{x^4}$	п. $\sqrt[3]{(x^2)^5}$	р. $\sqrt[4]{(x^2)^3}$	с. $\sqrt[5]{(x^3)^4}$	т. $\sqrt[6]{(x^2)^5}$

10. Сурагч дараах бодолтыг хийхдээ заримыг алджаа. Сурагчийн алдаатай бодсон бодлогын зөв хариуг ол.

а. $\frac{dx^3}{dx} = \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}$	б. $\frac{dx^7}{dx} = \frac{3}{7}x^{-\frac{4}{7}}$	в. $\frac{dx^{-5}}{dx} = -\frac{2}{5}x^{-\frac{3}{5}}$
г. $\frac{dx^{-6}}{dx} = -\frac{7}{6}x^{-\frac{13}{6}}$	д. $\frac{dx^{\frac{3}{4}}}{dx} = \frac{3}{4}x^{\frac{1}{4}}$	е. $\frac{dx^{11}}{dx} = \frac{6}{11}x^{-\frac{5}{11}}$

11. Дараах функцийн хоёрдугаар эрэмбийн уламжлалыг ол.

а. $f(x) = x^5$	б. $f(x) = x^{-3}$	в. $y = x^2 + 5x - 3$	г. $y = \frac{1}{x^2}$
д. $f(x) = -4.5\sqrt[3]{x}$	е. $y = -20x - 12$	ё. $y = x - 5$	ж. $y = x^{\frac{1}{2}}$

8.4. НИЙЛБЭР, ЯЛГАВАР, ТОГТМОЛ ТООН ҮРЖИГДЭХҮҮНТЭЙ ФУНКЦИЙН УЛАМЖЛАЛЫГ ОЛОХ

Бидэнд уламжлал нь олддог $f(x), g(x)$ гэсэн функцүүд өгсөн байг. Тэгвэл $f(x) \pm g(x)$ гэсэн функцийн уламжлал нь функцийн болон аргументын өөрчлөлтийн харьцаа гэдгийг ашиглан бичвэл

$$\frac{(f(x + \Delta x) \pm g(x + \Delta x)) - (f(x) \pm g(x))}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \pm \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x}$$

болно. Энэ адилтгалд Δx нь 0-д ойртоход

$$\frac{(f(x + \Delta x) \pm g(x + \Delta x)) - (f(x) \pm g(x))}{\Delta x}$$

нь $(f(x) \pm g(x))'$ рүү, $\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ нь $f'(x)$ рүү, $\frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x}$ нь $g'(x)$ рүү ойртох тул

$$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$$

гэсэн дүрэм мөрдөн гарна.

Мөн $\frac{cf(x + \Delta x) - cf(x)}{\Delta x} = c \cdot \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ гэсэн адилтгалаас дээрхтэй адиллаар Δx -ийг 0-д ойртуулахад

$$(cf(x))' = cf'(x)$$

гэсэн дүрэм гарна. Өөрөөр хэлбэл тогтмол тоон үржигдэхүүнийг уламжлалаас гаргаж болно.

Жишиээ 1. а. $y = x^3 + x$ б. $y = x^3 - x^{\frac{3}{2}}$ в. $y = 2x^3$ г. $y = 7x^2$ д. $y = -4x^{\frac{3}{4}}$ е. $y = 3x^{-\frac{1}{2}}$ функцийн уламжлалыг ол.

Бодолт.

$$\text{а. } y' = (x^3 + x)' = (x^3)' + (x)' = 3x^2 + 1$$

$$\text{б. } y' = \left(x^{-3} - x^{\frac{3}{2}}\right)' = \left(x^{-3}\right)' - \left(x^{\frac{3}{2}}\right)' = -3x^{-4} - \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{в. } y' = (2x^3)' = 2 \cdot (x^3)' = 6x^2 \quad \text{г. } y' = (7x^2)' = 7 \cdot (x^2)' = 14x$$

$$\text{д. } y' = \left(-4x^{\frac{3}{4}}\right)' = -4 \cdot \left(x^{\frac{3}{4}}\right)' = -3x^{-\frac{1}{4}} \quad \text{е. } y' = \left(3x^{-\frac{1}{2}}\right)' = 3 \cdot \left(x^{-\frac{1}{2}}\right)' = -\frac{3}{2}x^{-\frac{3}{2}}$$

Жишиээ 2. $y = 5x^4 + 2x - \frac{3}{x}$ гэсэн функцийн уламжлалыг ол.

Бодолт. Уг функцийн уламжлал $y' = \left(5x^4 + 2x - \frac{3}{x}\right)'$ нь дээрх дүрэм ёсоор

$$\begin{aligned} y' &= \left(5x^4 + 2x - \frac{3}{x}\right)' = (5x^4)' + (2x)' - \left(\frac{3}{x}\right)' = 5(x^4)' + 2(x)' - 3(x^{-1})' = \\ &= 5 \cdot 4x^3 + 2 - 3 \cdot (-1)x^{-2} = 20x^3 + 2 + \frac{3}{x^2} \end{aligned}$$

Жишиээ 3. $y = 2x^3 - 3x + \sqrt{x}$ функцийн хоёрдугаар эрэмбийн уламжлалыг ол.

Бодолт. Уг функцийн уламжлал

$$y' = (2x^3 - 3x + \sqrt{x})' = (2x^3)' - (3x)' + (\sqrt{x})' = 2 \cdot 3x^2 - 3 + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$$

болно. Эндээс

$$y'' = \left(2 \cdot 3x^2 - 3 + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right)' = (6x^2)' - 3' + \left(\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right)' = 12x - 0 + \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{3}{2}} = 12x - \frac{x^{-\frac{3}{2}}}{4}$$

болно.

12. Дараах функцийн уламжлалыг ол.

$$\text{а. } y = 2x^4 - 3x^3 + x - 2 \quad \text{б. } y = x^2 + 5 - \frac{2}{x} \quad \text{в. } y = -5x^3 + 2x^2 - 3x + 20$$

$$\text{г. } y = \frac{3}{2}x^2 - 2\sqrt{x} \quad \text{д. } y = x^{\frac{5}{2}} - 4x^{\frac{3}{2}} \quad \text{е. } y = 2x^{\frac{5}{2}} - 4x^{\frac{3}{2}} + 6x^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{ё. } y = x^{\frac{2}{5}} - x^{\frac{1}{4}} \quad \text{ж. } y = \sqrt{x^3} - \frac{2}{\sqrt{x}} \quad \text{з. } y = 2\sqrt{x^7} + \frac{\sqrt{x^3}}{3} - 3x$$

13. Дараах функцийн нэг ба хоёрдугаар эрэмбийн уламжлалыг ол.

$$\text{а. } y = 3x^3 - \frac{x^2}{2} + x - 15 \quad \text{б. } y = x^4 + \frac{x^3}{6} - x^2 - 5x \quad \text{в. } y = 2x^4 - \frac{x^3}{3} + 2x - 5$$

$$\text{г. } y = x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^{\frac{2}{3}}}{3} + x \quad \text{д. } y = \sqrt{x^3} - \frac{2}{x} \quad \text{е. } y = x^{\frac{5}{2}} - \frac{x^2}{2} + \sqrt{x} - 3$$

8.5. ДАВХАР ФУНКЦИЙН УЛАМЖЛАЛ

Уламжлал нь олддог $f(x)$, $g(x)$ хоёр функц өгсөн байг. f функцийн дүр g функцийн тодорхойлогдох мужийн дэд олонлог болж байх үед $f(g(x))$ давхар функцийг тодорхойлж болно. (III бүлэгт судалсан). Түүний уламжлалыг $\frac{df}{dx} = (f(g(x)))'$ гэж тэмдэглэе.

$f(x)$ функцийн уламжлал $f'(x)$ нь мөн функц болох учир $g(x)$ -ийн тодорхойлогдох муж $f'(x)$ -ийн дүрийг агуулж байх үед $f'(x)$ ба $g(x)$ функцуудийн давхар функцийг тодорхойлж болно. Түүнийг $\frac{df}{dg} = f'(g(x))$ гэж тэмдэглэе.

Жишээ 1. $f(x) = x^2 - 6x$, $g(x) = 2x - 1$ функцууд өгсөн байг.

а. $f(g(x))$ функцийг тодорхойл. б. $f'(g(x))$ функцийг тодорхойл.

Бодолт.

$$f(5) = 5^2 - 6 \cdot 5 = -5 \text{ гэсэн утга гарна.}$$

Харин x -ийн оронд $g(x)$ -ийг орлуулж давхар функц үүсгэе.

$$\text{а. } f(g(x)) = g(x)^2 - 6 \cdot g(x) \text{ болох ба } g(x)-\text{ийн оронд } 2x - 1 \text{ гэж орлуулбал}$$

$$f(g(x)) = (2x - 1)^2 - 6 \cdot (2x - 1) = 4x^2 - 4x + 1 - 12x + 6 = 4x^2 - 16x + 7 \text{ гэж гарав.}$$

б. $f(x)$ функцийн уламжлал нь $f'(x) = 2x - 6$ тул, x -ийн оронд $g(x)$ -ийг орлуулбал $f'(g(x)) = 2g(x) - 6$ болох ба $g(x)$ -ийн оронд $2x - 1$ гэж орлуулбал $f'(g(x)) = 2(2x - 1) - 6 = 4x - 2 - 6 = 4x - 8$ гэсэн функц болно.

Жишээ 2. Хэрэв $f(x) = x^2 - x + 1$, $g(x) = x^3$ функц өгсөн бол

а. $(f(g(x)))'$ -ийг ол. б. $f'(g(x)) \cdot g'(x)$ -ийг ол.

Бодолт.

а. $f(x)$ функцийн x -ийн оронд $g(x)$ -ийг орлуулбал

$$f(g(x)) = (x^3)^2 - x^3 + 1 = x^6 - x^3 + 1 \text{ ба уламжлал нь } (f(g(x)))' = 6x^5 - 3x^2$$

болно.

б. $f'(x) = 2x - 1$ гэж гарах ба x -ийн оронд $g(x)$ -ийг орлуулбал

$$f'(g(x)) = 2g(x) - 1 = 2x^3 - 1 \text{ ба } g'(x) = 3x^2 \text{ тул}$$

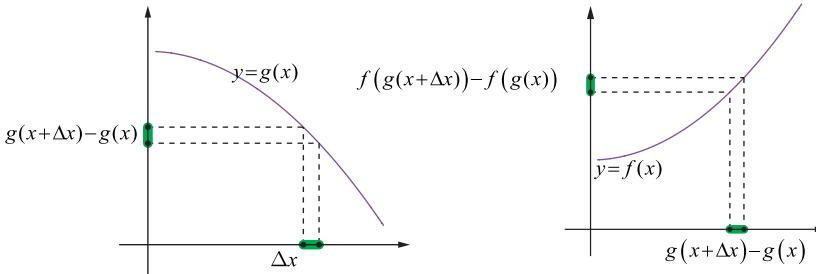
$$f'(g(x)) \cdot g'(x) = (2x^3 - 1) \cdot 3x^2 = 6x^5 - 3x^2$$

Ерөнхий тохиолдолд $f(g(x))$ гэсэн давхар функцийн уламжлал $(f(g(x)))'$ -ийг хэрхэн олох талаар авч үзье.

$y = f(g(x))$ гэсэн функцийн уламжлал нь тодорхойлолт ёсоор Δx нь 0-д ойртох үеийн $\frac{f(g(x + \Delta x)) - f(g(x))}{\Delta x}$ харьцааны ойртох утга юм. Энэ харьцааг 0-ээс ялгаатай $g(x + \Delta x) - g(x)$ илэрхийллээр үржүүлж, хуваавал

$$\frac{f(g(x + \Delta x)) - f(g(x))}{\Delta x} = \frac{f(g(x + \Delta x)) - f(g(x))}{g(x + \Delta x) - g(x)} \cdot \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x}$$

гэсэн адилтгал биелнэ. $g(x)$ функцийн уламжлал оршин байдаг гэсэн тул Δx нь 0 рүү ойртох үед $g(x + \Delta x) - g(x)$ илэрхийлэл ч 0 рүү ойртоно.



Иймд энэ адилтгалын

$\frac{f(g(x + \Delta x)) - f(g(x))}{\Delta x}$, $\frac{f(g(x + \Delta x)) - f(g(x))}{g(x + \Delta x) - g(x)}$, $\frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x}$ харьцаанууд харгалзан $(f(g(x)))'$, $f'(g(x))$, $g'(x)$ -д ойртоно. Иймээс

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

адилтгал биелнэ. Үүнийг давхар функцийн уламжлал олох дүрэм гэдэг. Мөн энэ дүрмийг $\frac{df}{dx} = \frac{df}{dg} \cdot \frac{dg}{dx}$ гэж бичиж болно.

Жишээ 3. Хэрэв $f(x) = 2x - 1$, $g(x) = x^2 - 3x$ функцүүд өгсөн бол $f(g(x))$ функцийн уламжлалыг ол.

Бодолт.

Нэгдүгээр бодолт. $f(g(x))$ функцийг x -ээр илэрхийлээд уламжлалыг ольё.

$f(g(x)) = 2(x^2 - 3x) - 1 = 2x^2 - 6x - 1$ эндээс уламжлалыг олбол

$$(f(g(x)))' = 4x - 6 \text{ болно}$$

Хоёрдугаар бодолт. Давхар функцийн уламжлал олох дүрмээр бодьё. Томьёоны тэнцүүгийн тэмдгийн баруун талд байгаа үргиждэхүүн тус бүрийг бодвол:

$f'(x) = 2$ буюу тогтмол функц байна. Иймээс $f'(g(x)) = 2$ болно

$g'(x) = 2x - 3$ гэж гарна.

Энэ хоёрыг үржүүлээд $f'(g(x))g'(x) = 2(2x - 3) = 4x - 6$ болно.

Жишээ 4. $y = \sqrt{x^2 + x}$ функцийн уламжлалыг ол.

Бодолт. $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x^2 + x$ гэж авбал $y = \sqrt{x^2 + x}$ функц нь $y = f(g(x))$ давхар функц болно. Давхар функцийн уламжлал олох дүрэмд байгаа $f'(g(x))$, $g'(x)$ үргиждэхүүн тус бүрийг ольё.

$$f'(x) = (\sqrt{x})' = \left(x^{\frac{1}{2}} \right)' = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \text{ гэж гарав. Энэ томьёоны } x \text{-ийн оронд}$$

$g(x)$ -ийг орлуулбал $f'(g(x)) = \frac{1}{2\sqrt{g(x)}} = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + x}}$ гэж гарна. Одоо $g(x)$ -ийн уламжлалыг олбол

$g'(x) = (x^2 + x)' = 2x + 1$ болно. Давхар функцийн уламжлал олох дүрмээр

$$y' = (\sqrt{x^2 + x})' = (f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + x}}(2x + 1) = \frac{2x + 1}{2\sqrt{x^2 + x}}$$

болно.

Жишээ 5. $y = \sqrt{x+2}(x^2 + x - 1)$ функцийн уламжлалыг ол.

Бодолт. Функцийг давхар функц хэлбэрээр бичье

$$y = \sqrt{x+2}(x^2 + 4x + 4 - 3x - 6 + 1) = (x+2)^{\frac{1}{2}}((x+2)^2 - 3(x+2) + 1)$$

$$= (x+2)^{\frac{5}{2}} - 3(x+2)^{\frac{3}{2}} + (x+2)^{\frac{1}{2}}$$

болно.

$f(x) = x^{\frac{5}{2}} - 3x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{1}{2}}$, $g(x) = x + 2$ гэж үзвэл $y = f(g(x))$ болно.

$y' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$ тул $f'(g(x))$ ба $g'(x)$ -ийг ольё.

$$f'(x) = \frac{5}{2} \cdot x^{\frac{3}{2}} - \frac{9}{2}x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$$

учраас $f'(g(x)) = \frac{5}{2}(x+2)^{\frac{3}{2}} - \frac{9}{2}(x+2)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2(x+2)^{\frac{1}{2}}}$

болно.

$$g'(x) = 1 \text{ тул } y' = f'(g(x)) \cdot g'(x) = \frac{5}{2}(x+2)^{\frac{3}{2}} - \frac{9}{2}(x+2)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2(x+2)^{\frac{1}{2}}} =$$

$$\frac{5(x+2)^2 - 9(x+2) + 1}{2\sqrt{x+2}} = \frac{5x^2 + 20x + 20 - 9x - 18 + 1}{2\sqrt{x+2}} = \frac{5x^2 + 11x + 3}{2\sqrt{x+2}}$$

14. Хэрэв $f(x) = x^2 + x$, $g(x) = 2x$ хоёр функц өгсөн бол

- | | |
|---|--------------------------------------|
| a. $f(g(x))$ функцийн томьёог ол. | b. $f(g(x))$ функцийн уламжлалыг ол. |
| v. $f'(x)$ ба $f'(g(x))$ -ийг ол. | g. $g'(x)$ -ийг ол. |
| d. $f'(g(x)) \cdot g'(x)$ үржвэрийг ол. | e. б ба д-ийн үр дүнг жишиж үз. |

15. $f(x)$, $g(x)$ функц өгөв. Өмнөх дасгалын заавраар $f(g(x))$ функцийн томьёог бичээд уламжлалыг олж, дараа нь давхар функцийн уламжлал олох дүрмээр ол.

a. $f(x) = 3x$, $g(x) = x^2 - 1$ b. $f(x) = 2x^2 + 3$, $g(x) = 5x - 1$

v. $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = 5x - 6$, энд $x \geq \frac{6}{5}$ g. $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$, $g(x) = x^3$

d. $f(x) = 2x^2 + 1$, $g(x) = \sqrt{x-1}$, энд $x > 1$ e. $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$, $g(x) = x^{-\frac{3}{2}}$, энд $x > 0$

ë. $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = x^2 + 1$ ж. $f(x) = x^{-\frac{2}{3}}$, $g(x) = x^{\frac{3}{2}}$,

16. Хэрэв дараах функц $f(g(x))$ давхар функц болох бол $f(x)$ ба $g(x)$ -ийг

олж, давхар функцийн томьёо бичиж, уламжлалыг ол

- | | | |
|---|------------------------|-------------------------|
| a. $(x-1)^2 + x - 1$ | б. $(x+2)^2 - x$ | в. $3 - 5(3 - 5x)$ |
| г. $x - \sqrt{x} + 1 = (\sqrt{x})^2 - \sqrt{x} + 1$ | д. $x - 2\sqrt{x} + 3$ | е. $\sqrt[3]{(3x-2)^2}$ |
| ё. $x - 2\sqrt{x+1} + 3$ | ж. $x + \frac{1}{x+1}$ | з. $x - \frac{1}{x+1}$ |

17. Давхар функцийн уламжлалыг ол.

- | | | |
|--|---------------------------|-------------------------------|
| a. $(\sqrt{x} + 1)^2$ | б. $\sqrt{x^5 - 3x}$ | в. $\sqrt{1 + 5x^2}$ |
| г. $(1 - 2x)^2 + 1 - 2x + 5$ | д. $\sqrt{2x^5 + 4x - 2}$ | е. $(5x^2 - 1)^{\frac{2}{3}}$ |
| ё. $3x^{\frac{2}{3}} - 2x^{\frac{1}{3}} + 4$ | ж. $(x^3 + 2)^4$ | з. $(4x^2 - 3x)^4$ |

18. Дараах функцийг дифференциалчил.

- | | | |
|-------------------------------|--|---|
| a. $f(x) = (1 - 2x)^{-1}$ | б. $f(x) = \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^3$ | в. $f(x) = \left(x - \frac{1}{x}\right)^4$ |
| г. $f(x) = (x - x^3 + x^5)^3$ | д. $f(t) = (t^{-1} + t^{-2})^2$ | е. $f(x) = \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + \frac{x}{1}\right)^{-1}$ |

19. $\frac{dy}{dx}$ -г ол.

- | | |
|--|---|
| а. $y = u^3 + 1$, $u = (2x-1)^2$ | б. $y = u^2 + u$, $u = (x-1)^2$ |
| в. $y = u^{\frac{2}{3}} + u^{\frac{1}{3}}$, $u = (x+1)^3$ | г. $y = u^3 - u$, $u = x^{-2} + x^{-1}$ |
| д. $y = \sqrt{u} + \frac{1}{\sqrt{u}}$, $u = (x^2 + 2)^2$ | е. $y = u + \frac{1}{u}$, $u = (3x+1)^4$ |

20. Дараах функцүүдийг давхар функц хэлбэрт бичээд, уламжлалыг ол.

- | | | |
|-------------------------------|-------------------------------|----------------------------------|
| а. $\sqrt{x+1}(x^2 + 2x - 3)$ | б. $\sqrt{x-1}(x^2 + 2x - 3)$ | в. $x\sqrt{x-2}$ |
| г. $x\sqrt{x^2 - 2x + 1}$ | д. $(2x-1)\sqrt[3]{2x-1}$ | е. $\frac{2x-1}{\sqrt[3]{2x-1}}$ |

21. $f(x) = 5x - 3$, $g(x) = \sqrt{x}$, $h(x) = f(g(x))$ гэж өгөв. $h'(x) = 0.5$ тэгшитгэлийг бод.

8.6. ФУНКЦИЙН ГРАФИКИЙН ӨГСӨН ЦЭГ ДЭЭРХ НАЛАЛТ, ШҮРГЭГЧ БА НОРМАЛ ШУЛУУНЫ ТЭГШИТГЭЛ

Функцийн ямар нэг цэг дээрх налалт нь тухайн цэг дээрх уламжлалын утгатай тэнцүү байдаг. Өөрөөр хэлбэл $y = f(x)$ функцийн x_0 цэг дээрх налалтыг k гэвэл $k = f'(x_0)$ болно. Өгсөн (x_0, y_0) цэгийг дайрсан, өгсөн k налалт бүхий шулууны тэгшитгэл $y - y_0 = k(x - x_0)$ байдаг. Иймээс $y = f(x)$ функцийн графикийн (x_0, y_0) цэгт татсан шүргэгч шулууны тэгшитгэл нь

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

Тодорхойлолт. Функцийн графикийн өгсөн цэгт татсан шүргэгч шулууунд перпендикуляр, уг цэгийг дайрсан шулууныг функцийн графикийн тухайн цэг дээрх **нормал шулуун** гэдэг.

Харилцан перпендикуляр шулуунуудын наалтуудын үржвэр -1 байдаг тул $y = f(x)$ функцийн графикийн (x_0, y_0) цэгт татсан **нормал шулууны тэгшитгэл** нь

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$

болно.

Жишээ 1. $y = 2x^2 + x$ функцийн $x_0 = 1$ цэг дээрх наалтыг ол.

Бодолт. Уламжлалыг нь олбол $y' = 2(2x) + 1 = 4x + 1$ болох ба $x = 1$ утгыг орлуулбал наалт нь $k = 4 \cdot 1 + 1 = 5$ гэж гарна.

Жишээ 2. $y = 2x^2 + x$ функцийн $x_0 = 1$ абсцисстай цэгт татсан шүргэгч шулууны тэгшитгэл зохио.

Бодолт. Өмнөх жишээгээр $k = 5$ гэж олсон. Энд $x_0 = 1$ гэж өгсөн тул түүний ординат y_0 -ийг $y_0 = f(x_0) = 2x_0^2 + x_0 = 2 \cdot 1^2 + 1 = 3$ гэж олно. Эдгээрийг $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$ тэгшитгэлд орлуулбал $y - 3 = 5(x - 1)$ болох ба хаалт задалж, y -ийг олж бичвэл $y = 5x - 5 + 3$ буюу $y = 5x - 2$ болно.

Жишээ 3. $y = 2x^2 + x$ функцийн $x_0 = 1$ абсцисстай цэгт татсан нормал шулууны тэгшитгэл бич.

Бодолт. $x_0 = 1$ гэж өгсөн. Өмнөх жишээнүүдээр $y_0 = 3$,

$k = 5$ гэж бид олсон. Эдгээрийг $y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$

тэгшитгэлд орлуулж хялбарчилбал нормал шулууны

тэгшитгэл $y = -\frac{1}{5}(x - 1) + 3 = -\frac{x}{5} + \frac{16}{5}$ гэж гарна. (Зураг)

Жишээ 4. Хэрэв $y = f(x)$ функцийн графикийн $x_0 = 2$ координаттай цэгт татсан нормал шулууны тэгшитгэл $y = 3x - 5$ гэж өгсөн бол

а. Функцийн график дээрх (x_0, y_0) цэгийг ол.

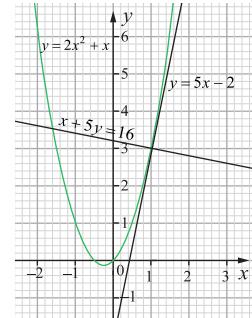
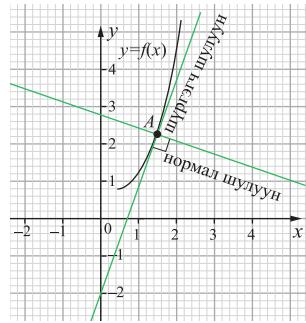
б. $f(x)$ функцийн (x_0, y_0) цэг дээрх уламжлал $f'(x_0)$ -ыг ол.

в. (x_0, y_0) цэгт татсан шүргэгч шулууны тэгшитгэл бич.

Бодолт. а. $y = 3x - 5$ тэгшитгэлд $x_0 = 2$ -ыг орлуулбал $y_0 = 1$ гэж гарна. Иймд $(x_0, y_0) = (2, 1)$ болно.

б. Нормал шулууны наалт нь $k = 3$ гэдгээс x_0 цэгт татсан шүргэгч шулууны наалт нь $-\frac{1}{3}$ болох тул $f'(x_0) = -\frac{1}{3}$ болно.

в. Эндээс шүргэгч шулууны тэгшитгэл $y - 1 = -\frac{1}{3}(x - 2)$ буюу $3y + x = 5$ болно.

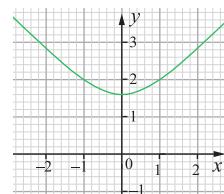
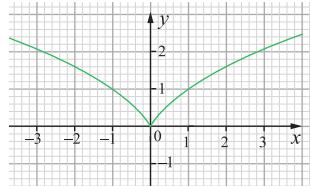


Дүгнэлт.

Функцийн	$y = f(x)$
Функцийн x_0 цэг дээрх утга	$y_0 = f(x_0)$
Уламжлал	$y' = f'(x)$
Уламжлалын x_0 цэг дээрх утга	$k = f'(x_0)$
Графикийн (x_0, y_0) цэг дээрх наалт	$k = f'(x_0)$
(x_0, y_0) цэгт татсан шургэгч шулууны тэгшитгэл	$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$
(x_0, y_0) цэгт татсан нормал шулууны тэгшитгэл	$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$

22. Функцийн графикийн x_0 цэг дээрх наалтыг ол.
- а. $y = 3x - 2$, $x_0 = 5$ б. $y = x^2 - x + 1$, $x_0 = -1$
 в. $y = -1 - x^2$, $x_0 = -2$ г. $y = x^3 - 3x^2 + 3$, $x_0 = -3$
 д. $y = x^3 + 6x^2 + 9x$, $x_0 = -2$ е. $y = -x^3 + x$, $x_0 = \sqrt{3}$
23. $f(x)$ функцийн графикийн x_0 цэгт татсан шургэгч ба нормал шулууны тэгшитгэл бич. Ямар ялгаатай вэ?
- а. $f(x) = 2x^2 - 3x + 5$, $x_0 = -1$ б. $f(x) = 5 - 3x - x^2$, $x_0 = 2$
24. Функцийн графикийн x_0 цэгт татсан шургэгч шулууны тэгшитгэл бич.
- а. $y = -x^2 + 5$, $x_0 = -2$ б. $y = -x^3 + 3x^2 - 3x + 5$, $x_0 = 1$
 в. $y = x^3 - 3x^2$, $x_0 = 1$ г. $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$, $x_0 = 1$
 д. $y = 4x - 6$, $x_0 = 5$ е. $y = 5x^2 - x$, $x_0 = -1$
25. $f(x)$ функцийн графикийн (x_0, y_0) цэгт татсан шургэгч шулууны тэгшитгэл бич.
- а. $f(x) = x^2 + 3x - 2$, $(-4, 2)$ б. $f(x) = 2x^2 + 3x - 2$, $(1, 3)$
 в. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 8x - 5$, $(6, 7)$ г. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 8x - 5$, $(3, 1)$
 д. $f(x) = -\frac{1}{2}x^3 - x^2 + 2x + 2$, $(0, 2)$ е. $f(x) = -x^2 + x - 1$, $(1, -1)$
 ё. $f(x) = (x^3 - 2x + 1)(4x - 5)$, $(2, \dots)$ ж. $f(x) = (x^2 - 3)(5x - x^3)$, $(1, \dots)$
 з. $f(x) = x^2 - \frac{10}{x}$, $(-2, \dots)$ и. $f(x) = x^2 + \frac{10}{x}$, $(2, \dots)$
26. $f(x)$ функцийн графикийн (x_0, y_0) цэгт татсан нормал шулууны тэгшитгэл бич.
- а. $f(x) = -2x^2 + 4x + 3$, $(2, 3)$ б. $f(x) = x^2 + 4x + 3$, $(-1, 0)$
 в. $f(x) = -x^3 + 2x^2 + 2x + 1$, $(2, 5)$ г. $f(x) = -2x^3 + 3x^2 + 3x - 1$, $(-1, 1)$
 д. $f(x) = x^3 + 4x^2 - 2$, $(0, -2)$ е. $f(x) = -x^3 - 2x^2 - 2$, $(-1, -3)$

- 27.** Зурагт $y = \sqrt[3]{x^2}$ функцийн график дүрслэгджээ.
- $x_0 = 1$ цэгт татсан нормал шулууны тэгшитгэл бич.
 - Графикийн $(-1, 1)$ цэг дээрх шүргэгчийн наалалтыг ол.
- 28.** $y = f(x)$ функцийн графикийн x_0 абсцисстай цэгт татсан шүргэгч шулууны тэгшитгэл өгсөн байхад шүргэлтийн цэгт татсан нормал шулууны тэгшитгэлийг бич.
- $x_0 = 2, y = 3x - 1$
 - $x_0 = 3, y = x - 5$
 - $x_0 = -1, y = -2x + 1$
- 29.** $y = f(x)$ функцийн графикийн x_0 абсцисстай цэгт татсан нормал шулууны тэгшитгэл өгсөн бол уул цэгт татсан шүргэгч шулууны тэгшитгэл бич.
- $x_0 = -2, 4y - x - 2 = 0$
 - $x_0 = 3, y = 2x + 1$
 - $x_0 = -1, y + 3x + 2 = 0$
- 30.** Функци $f(x) = 2x^2 - x - 3$ ба $x_0 = 3$ цэг өгөв.
- Функцийн графикийн x_0 абсцисстай цэгийн ординат y_0 -ыг ол.
 - Функцийн уламжлалыг ол.
 - Функцийн графикийн (x_0, y_0) цэг дээрх наалалтыг ол.
 - Функцийн графикийн (x_0, y_0) цэгт татсан шүргэгч шулууны тэгшитгэл бич.
- 31.** $f(x)$ функци ба x_0 утга өгөв. Өмнөх дасгалын заавраар ажилла.
- $f(x) = -2x^2 + 7x + 1, x_0 = -1$
 - $f(x) = x^2 + 3x + 4, x_0 = 2$
 - $f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x + 3, x_0 = 3$
 - $f(x) = x^3 + 3x^2 - 1, x_0 = -2$
 - $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1 x_0 = 1$
 - $f(x) = x^2 - 5x x_0 = 4$
- 32.** Хэрэв $y = f(x)$ функцийн графикийн x_0 абсцисстай цэгт татсан нормал шулууны тэгшитгэл өгсөн бол (x_0, y_0) цэгийг ол. Уг цэг дээрх $y = f(x)$ функцийн уламжлалыг ол. Мөн цэг дээрх шүргэгч шулууны тэгшитгэл бич.
- $x_0 = 1, x + 3y = 10$
 - $x_0 = 3, 3x + 2y = 17$
 - $x_0 = -1, 3x - y = -7$
 - $x_0 = 2, x - y = -3$
 - $x_0 = 4, x + 3y = 13$
 - $x_0 = 3, 3x + 5y = 19$
- 33.** $f(x) = \frac{x^2}{4} + 1$ ба $g(x) = -\frac{x^2}{4} - 1$ муруй бүрийн $x_0 = -2$ ба $x_1 = 2$ координатай цэгүүдэд татсан шүргэгч ба нормал шулууны тэгшитгэлийг бичиж, уул шулуунуудыг координатын нэг хавтгай дээр зур.
- 34.** $y = x^2 - 4$ параболын координатын тэнхлэгүүдтэй огтлонцон цэгт татсан шүргэгч шулуунуудын тэгшитгэл бич.
- 35.** $f(x) = -0.2x^2 + x + 2$ функцийн $x_0 = 5$ цэгт татсан шүргэгч шулуун абсцисс тэнхлэгийг ямар цэгээр огтлох вэ?
- 36.** $y = 4x^2 - 6x + 3$ функцийн графикийн ямар цэгт татсан шүргэгч шулуун $y = 2x$ шулуунтай параллел байх вэ?
- 37.** Зурагт $y = \sqrt{1+x^2} + 2 - \sqrt{2}$ функцийн график дүрслэгджээ.



а. Графикийн ямар цэгт татсан шүргэгч шулуун $y = \frac{x}{\sqrt{2}}$ шулуунтай параллел байх вэ?

б. Гарсан үр дүнгээ ашиглаад $(-1, 2)$ цэгт татсан шүргэгч шулууны наалалтыг бич.

38. Функцийн абсцисс тэнхлэгтэй параллел шүргэгч шулууны тэгшитгэл бич.

а. $f(x) = (x - 2)(x^2 - x - 11)$

б. $f(x) = x^2 - \frac{16}{x}$

в. $f(x) = (x + 2)(x^2 - 2x - 8)$

г. $f(x) = x - \frac{16}{x}$

39. $y = x^2 - 7x + 3$ параболд татсан шүргэгч шулуун $5x + y - 3 = 0$ шулуунтай параллел бол уг шүргэгч шулууны тэгшитгэл бич.

40. $y = x - x^2$ муруйн $x = 1$ абцисстай цэгт татсан шүргэгч шулуун абсцисс тэнхлэгтэй үүсгэх өнцгийг ол.

8.7. ФУНКЦИЙН ӨСӨХ, БУУРАХ ЗАВСАР, ФУНКЦИЙН ӨӨРЧЛӨЛТИЙН ХУРД

Функцийн осох, буурах завсар

Чанар. $y = f(x)$ функци $[a, b]$ завсарт өсдөг бол завсрын бүх цэг дээр уламжлал нь эерэг байна. $[a, b]$ завсрын бүх цэг дээр уламжлал эерэг утгатай байвал $y = f(x)$ функци энэ завсарт өснө.

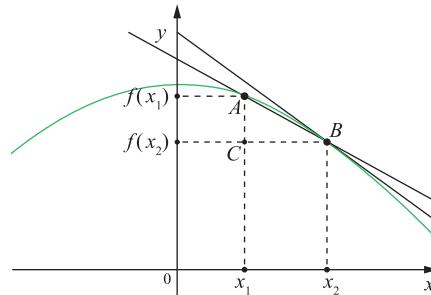
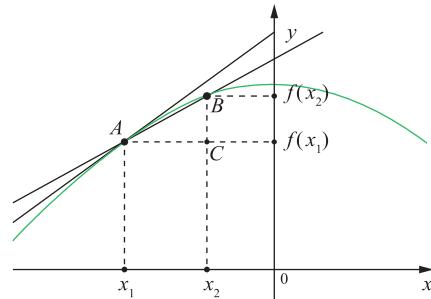
Баталгаа. $[a, b]$ завсрын дурын x тоо ба $x + \Delta x \in [a, b]$ байхаар 0-ээс их Δx гэсэн тоо авьяа. $y = f(x)$ нь өсөх функци ба $x + \Delta x > x$ учир $f(x + \Delta x) > f(x)$ байна. Тэгвэл $\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} > 0$ болно. Δx нь 0 рүү ойртоход $\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ харьцаа $f'(x)$ -д ойртох тул $f'(x) > 0$ байна.

Төсөөтэйгөөр $y = f(x)$ функци $[a, b]$ завсарт буурдаг бол завсрын бүх цэг дээр уламжлал сөрөг байна.

Уламжлал нь 0-тэй тэнцүү байх цэгийг **тогтвортжилтын цэг** гэнэ. Тогтвортжилтын цэг дээр функцийн графикт татсан шүргэгч шулууун нь хэвтээ тэнхлэгтэй параллел байна.

Жишээ 1. $y = x^3 - 3x$ функцийн өсөх буурах завсар болон тогтвортжилтын цэгийг ол.

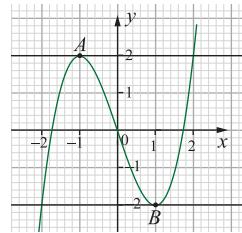
Бодолт. $y = x^3 - 3x$ функцийн уламжлалыг олбол $y' = 3x^2 - 3$ болох ба



$3x^2 - 3 > 0$ тэнцэтгэл бишийг бодьё. 3-д хуваагаад $x^2 - 1 > 0$, уржидэхүүнд задалбал $(x-1)(x+1) > 0$ болно.

Шийд нь $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$ завсар гарах бөгөөд энэ завсарт функц өснө. Харин $]-1, 1[$ завсарт уламжлал тэгээс бага байх тул функц буурна. $3x^2 - 3 = 0$ тэгшитгэлийг бодоход гарах $x = -1$ ба $x = 1$ утгууд дээр функцийн уламжлал нь тэг байх учир $A(-1, 2)$ болон $B(1, -2)$ цэгүүд нь функцийн тогтворталтын цэгүүд болно. Зураг дээр A, B цэгт татсан шүргэгч шулууныг дүрсэлсэн бөгөөд абсцисс тэнхлэгтэй параллел байна.

Жишээ 2. $y = \frac{1}{4}x^4 - x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 3x$ функцийн өсөх, буурах завсрыйг ол.



Бодолт. Функцийн тодорхойлогдох муж нь тоон шулуун байна. Уламжлал нь $y' = x^3 - 3x^2 - x + 3$ -тэй тэнцүү байх ба хялбар хувиргалт хийвэл $(x-3)x^2 - x + 3 = (x-3)(x^2 - 1) = (x-3)(x-1)(x+1)$ болно.

Уламжлалын 0-тэй тэнцэх $x = -1, x = 1, x = 3$ тоонууд функцийн тодорхойлогдох мужийг $]-\infty, -1[,]-1, 1[,]1, 3[,]3, +\infty[$ гэсэн дөрвөн завсарт хуваана. Завсруудын алинд ч уламжлал функц тэмдгээ өөрчлөхгүй тул завсар бүрээс нэг тоо сонгон авч орлуулах замаар $y' > 0$, $y' < 0$ тэнцэтгэл бишүүдийн шийдийн олонлогийг олж болно.

Тухайлбал: $]-\infty, -1[$ завсраас -2 -ыг, $]-1, 1[$ завсраас 0 -ийг, $]1, 3[$ завсраас 2 -ыг, $]3, +\infty[$ завсраас 4 -ийг тус тус сонгон авч, $y' = (x-3)(x-1)(x+1)$ илэрхийлэлд орлуулбал харгалзан сөрөг, эерэг, сөрөг, эерэг тоонууд гарна. (Хэдтэй тэнцүү байх нь чухал биш). Өөрөөр хэлбэл уламжлал функц нь дээрх завсруудад эерэг сөрөг ямар утгатай байхыг мэдлээ. Иймээс $]-\infty, -1[,]1, 3[$ завсар дээр функц буурна, $]-1, 1[,]3, +\infty[$ завсар дээр функц өснө. Бүдүүвч зураглалаар харуулбал

Аргумент	x	-1	1	3	
Уламжлал	y'	-	0	+	0
Функц	y	↗	↘	↗	↘

Функцийн өөрчлөлтийн хурд

Функцийн аргумент нь хугацаа (t) байх тохиолдолд $\frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}$ харьцаа нь нэг талаас функцийн t цэгийн орчин дахь өөрчлөлтийн хурд болно. Нөгөө талаас Δt -г 0-д ойртоход дээрх харьцаа нь уламжлалын тодорхойлолт ёсоор $f'(t)$ -д ойртоно.

Иймээс $y = f(t)$ функцийн өөрчлөлтийн t цэг дээрх хурд $f'(t)$ -тэй тэнцүү байна. Функцийн өөрчлөлтийн хурд эерэг байвал функц өснө, сөрөг байвал функц буурна. Тогтворталтын цэг дээр функцийн өөрчлөлтийн хурд 0-тэй тэнцүү байна.

Бие t хугацаанаас хамаарч $s = s(t)$ зам явсан байг. Хугацааны $[t, t + \Delta t]$ завсарт бие $s(t)$ зам явсан байсанaa $s(t + \Delta t)$ зам явна. Явсан замын ялгаврыг хугацааны ялгаварт харьцуулсан харьцаа

$$\frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{(t + \Delta t) - t} = \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t} \text{ нь тухайн } [t, t + \Delta t] \text{ завсар дахь дундаж хурд}$$

байна. Δt -г 0-д ойртуулахад энэ харьцаа $s(t)$ функцийн t цэг дээрх уламжлал болдог. Ийм учир хурд бол замаас хугацаагаар авсан уламжлал байна.

$$v(t) = s'(t) \text{ буюу } v = \frac{ds}{dt}$$

Төсөөтэйгөөр хурдаас хугацаагаар авсан уламжлал нь хурдатгал болно. Тэгвэл хурдатгал нь замаас хугацаагаар авсан хоёрдугаар эрэмбийн уламжлал юм.

$$a(t) = v'(t) = s''(t) \text{ буюу } a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$$

Жишээ 3. Хэрэв $y = x^2 + 3x - 4$ функцийн аргумент хугацаанаас $x = 2t - 1$ гэсэн хамааралтайгаар өөрчлөгдөж байсан бол хугацаа тоолж эхлэнээс хойш 5 дахь секундэд функц ямар хурдтай өөрчлөгдөх вэ?

Бодолт. Аргументын уламжлал $\frac{dx}{dt} = 2$ тул хугацааны аль ч эгшинд 2 хурдтай өөрчлөгдөнө. Харин функцийн өөрчлөлтийн хурд $V(t) = \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$ -тай тэнцүү. Гэтэл $\frac{dy}{dx}$ нь $2x + 3$ -тай тэнцүү учир түүнийг t -ээр илэрхийлбэл

$\frac{dy}{dx} = 2x + 3 = 2(2t - 1) + 3 = 4t + 1$ болно. Орлуулбал $\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = (4t + 1) \cdot 2 = 8t + 2$ буюу $V(t) = 8t + 2$ болов. $t = 5$ -ийг орлуулахад функц $V(5) = 8 \cdot 5 + 2 = 42$ нэгж/сек хурдтай өөрчлөгдөнө.

Жишээ 4. Хэрэв материал цэг хугацаанаас хамаарч $s(t) = 85 - 20t - 5t^2$ хуулиар хөдөлж байсан бол хугацаа тоолж эхлэхээс 1 секундийн өмнө ямар хурдтай байсан бэ? Цэгийн хурдатгалыг ол.

Бодолт. Хугацаа тоолж эхлэхээс нэг секундийн өмнө гэсэн учир $t_0 = -1$ секунд гэж авна. $s(t)$ -ийн уламжлал нь

$$v(t) = s'(t) = -20 - 10t \text{ гэж гарах ба } t_0 = -1 \text{ секундийг орлуулбал}$$

$v(-1) = s'(-1) = -20 - 10 \cdot (-1) = -20 + 10 = -10$ м/с гэж сөрөг тоо гарсан нь хөдөлгөөний чиглэлийн эсрэг чиглэлд явж байсныг харуулж байна.

$v(t)$ -ийн уламжлал буюу $s(t)$ -ийн хоёрдугаар эрэмбийн уламжлал нь

$a(t) = v'(t) = s''(t) = -10$ м/с² гэж тогтмол функц гарч байгаа тул энэ хөдөлгөөн нь шулуун замын жигд хувьсах хөдөлгөөн байна.

Жишээ 5. Сунадаг материалаар хийсэн битүү давчанд x эзлэхүүнтэй хий шахахад давны багтаамж y болж байсан ба харгалзах тоон утгууд нь $y = x^{\frac{2}{3}}$ гэсэн хамааралтай байв. Хэрэв секунд бүр 0.001 хэмжээтэй хийг шахаж байсан бол шахаж эхлэнээс хойш 8 дахь секундэд давны эзлэхүүн ямар хурдтай нэмэгдэх вэ?

Бодолт. 8 секундийн дараа шахсан хийн эзлэхүүн $x = 8 \cdot 0.001 = 0.008$ болно.

$y = x^{\frac{2}{3}}$ -оос t хугацаагаар уламжлал авбал $\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt} \left(x^{\frac{2}{3}} \right) = \frac{2}{3} \cdot x^{-\frac{1}{3}} \frac{dx}{dt} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \frac{dx}{dt}$

болно. Бодлогын нөхцөлөөр $\frac{dx}{dt}$ нь тогтмол 0.001-тэй тэнцүү тул орлуулбал

$$\frac{dy}{dt} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \frac{dx}{dt} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{0.008}} \cdot 0.001 = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{0.2} \cdot 0.001 = \frac{0.01}{3} = \frac{1}{300} = 0.00(3)$$

Дүгнэлт. Функцийн уламжлал нь түүний налалт, шүргэгчийн налалт, өөрчлөлтийн хурдыг илэрхийлдэг функци юм.

Функци $y = f(x)$	Өсөх	Тогтворталтын цэг	Буурах
Уламжлал $y' = f'(x)$	$y' = f'(x) > 0$	$y' = f'(x) = 0$	$y' = f'(x) < 0$

41. Функцийн өсөх завсрыйг ол.

- | | | |
|--------------------------------|--------------------------|------------------------------|
| a. $y = x^2 - 5x + 6$ | б. $y = x^2 + 6x - 4$ | в. $y = 7 - 3x - x^2$ |
| г. $y = 7 - 4x - 3x^2$ | д. $y = 3x^2 - 5x + 7$ | е. $y = 5x^2 + 3x - 2$ |
| ё. $y = x^3 - 9x^2 + 24x - 19$ | ж. $y = -x^3 + 3x^2 - 3$ | з. $y = -x^3 + x^2 - 4x + 3$ |
| и. $y = x^3 - x^2 + 3x$ | й. $y = 3x - 5$ | к. $y = -5x + 3$ |

42. Хэрэв $f(x) = x^3 + kx^2 + 12x$ функци тоон шулуун дээр өсдөг бол k коэффициентийг үнэл.

43. Функцийн буурах завсрыйг ол.

- | | |
|------------------------------|-------------------------------|
| a. $y = 4x - 9$ | б. $y = 2x^2 - 8x + 7$ |
| в. $y = -3x - 5$ | г. $y = 4 + 7x - 2x^2$ |
| д. $y = 5 - 3x + x^2$ | е. $y = 3 - 5x - 7x^2$ |
| ё. $y = x^3 + 6x^2 + 9x + 1$ | ж. $y = -x^3 + 6x^2 - 9x + 3$ |
| з. $y = -x^3 + x^2 - x$ | и. $y = x^3 - x^2 + 2x + 1$ |

44. $f(x) = -x^3 + 3x^2 + kx$ функци тоон шулуун дээр буурдаг бол k коэффициентийг үнэл.

45. Функцийн өсөх, буурах завсрыйг ол.

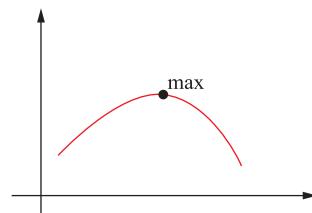
- | | |
|---------------------------------|-------------------------------|
| a. $y = 3 + 8x + \frac{x^4}{4}$ | б. $y = x^3 + 9x^2 + 24x - 8$ |
| в. $y = x^3 + 6x^2 + 9x - 8$ | г. $y = x^3 + 3x^2 + 5$ |
| д. $y = -x^3 + 3x + 1$ | е. $y = -x^3 + 3x^2 - 2$ |
| ё. $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 3$ | ж. $y = x^3 - 9x^2 + 24x - 9$ |
| з. $y = x^3 - 12x^2 + 45x + 6$ | и. $y = -3x^4 + 4x^3 + 12x^2$ |
| й. $y = x + \frac{1}{x}$ | к. $y = x^2 + \frac{1}{x^2}$ |
| л. $y = x^3 + \frac{1}{x^3}$ | м. $y = x^2 - \frac{1}{x^2}$ |

- 46.** Хэрэв хурдаа хасаж яваа машины явсан зам хугацаанаас хамаарч $s(t) = 85 - 20t - 5t^2$ хуулиар өөрчлөгдсөн бол $t = 1$ секундийн дараа ямар хурдтай болох вэ? Машины хурдатгал тогтмол байхыг харуул.
- 47.** Хэрэв хурдаа хасаж яваа машины явсан зам хугацаанаас хамаарч $s(t) = 20 + 6t - t^2$ хуулиар өөрчлөгдж байсан бол ямар хугацааны дараа зогсох вэ? Энэ машины хурдатгалыг ол.
- 48.** Хэрэв $h_0 = 2$ м өндөрөөс эгц дээш шидэгдсэн бөмбөг $h(t) = 2 - 3t - 5t^2$ хуулиар хөөрсөн бол газарт ямар хурдтай унах вэ?
- 49.** Агаарын бөмбөлгийг жигд үлээхэд радиус нь $r = 0.62\sqrt[3]{t}$ хуулиар өөрчлөгддөг байна. Хугацаа $t = 0.125, 1, 8$ секунд байх үед радиус r ямар хурдтай өөрчлөгдөх вэ?
- 50.** Заасан цэг дээр аргументын өөрчлөлтийн хурд өгсөн бол функцийн өөрчлөлтийн хурдыг ол.
- а. $x = 1$ үед 3 м/с $y = 3x - 5$
 б. $x = -1$ үед -2 м/с $y = 4x - 9$
 в. $x = -3$ үед 1 м/с $y = -2x^2 - 7x + 5$
 г. $x = 2$ үед -3 м/с $y = 3 - 5x - x^2$
 д. $x = -2$ үед -1 м/с $y = 3 - 5x - 6x^2$
 е. $x = 1$ үед 2 м/с $y = 2x^3 - 6x^2 + 9x + 1$
 ё. $x = 0$ үед 4 м/с $y = -2x^3 + 6x^2 - 9x + 3$
 ж. $x = 3$ үед 2 м/с $y = x^4 - 4x^3$
- 51.** $x = 3$ цэг дээр f, g хоёр функцийн аль нь их хурдтай өөрчлөгдөх вэ?
- а. $f(x) = -3x + 7$, $g(x) = -5x + 7$
 б. $f(x) = 5x^2 - 3x + 7$, $g(x) = 3x^2 - 5x + 7$
 в. $f(x) = x^3 - 5x^2 - 3x + 7$, $g(x) = x^3 - x^2 - 5x + 7$

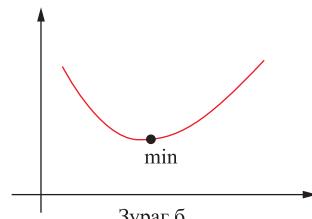
8.8 ФУНКЦИЙН ЭКСТРЕМУМ (МАКСИМУМ, МИНИМУМ)-ЫН ЦЭГ

Амьдрал ахуй, үйлдвэр, техники, эдийн засгийн хэмнэлтийн асуудлуудыг шийдвэрлэхэд уламжлалыг өргөн хэрэглэдэг. Жишээлбэл: 80 м² шалны талбайтай байшин барих болов. Шалны периметрийг хамгийн бага байлгахын тулд урт, өргөнийг хэдэн метр байхаар авах хэрэгтэй вэ?

Хэрэв функц өсөж байснаа буурч эхлэх тэр цэг дээрээ угтгатай бол уул цэгийг **максимумын цэг** гэнэ. (Зураг а.) Функц буурч байснаа өсөж эхлэх тэр цэг дээрээ угтгатай бол уул цэгийг **минимумын цэг** гэнэ. (Зураг б.) Максимум, минимумын цэгүүдийг **экстремумын цэг** гэнэ.



Зураг а.



Зураг б.

Чанар. Уламжлал нь олддог экстремумын цэг нь тогтвржилтын цэг болно.

Функцийн өсөлт, бууралт нь уламжлалын тэмдгээр тодорхойлогдох тул экстремумын цэгүүдийг дараах байдлаар олно. Хэрэв уламжлал нь тогтвржилтын цэгийн зүүн талд эерэг, баруун талд сөрөг байвал уг цэг максимумын цэг байна. Хэрэв уламжлал нь тогтвржилтын цэгийн зүүн талд сөрөг, баруун талд эерэг байвал тэр цэг минимумын цэг болно.

Харин уламжлал нь 0-тэй тэнцүү (togtvrjiltyn цэг) боловч максимум ч, минимум ч болдоггүй цэг байж болно. Түүнийг **нуугаралтын цэг** гэнэ.

Функц утгатай боловч уламжлал нь тодорхойлогдоггүй цэг байж болно.

Жишээлбэл: $y = 1 + \sqrt{x-1}$ функц $x = 1$ цэг дээр $y = 1$ гэсэн утгатай байхад уламжлал $y' = \frac{1}{2\sqrt{x-1}}$ нь $x = 1$ цэг дээр тодорхойлогдохгүй.

Функцийн уламжлал 0-тэй тэнцүү байх, мөн уламжлал нь оршин байдаггүй цэгүүдийг **сэжигтэй цэгүүд** гэнэ.

Функцийн максимум ба минимумын цэгийг хэрхэн олохыг жишээгээр үзүүльье.

Жишээ 1. $y = x^3 + 1.5x^2 - 6x - 2$ функцийн сэжигтэй цэгийг олж, максимум буюу минимумын цэгийн аль нь болохыг тогтоо.

Бодолт.

I. Функцийн уламжлалыг олно. $y' = (x^3 + 1.5x^2 - 6x - 2)' = 3x^2 + 3x - 6$

II. $y' = 0$ тэгшитгэл бодно.

$3x^2 + 3x - 6 = 0$ тэгшитгэлийг бодоход $x_1 = -2$, $x_2 = 1$ гэсэн хоёр шийд гарлаа.

Тус бүрийг $y = x^3 + 1.5x^2 - 6x - 2$ -д орлуулахад $y_1 = 8$, $y_2 = -5.5$ болох тул сэжигтэй цэгүүд нь $(-2, 8)$ ба $(1, -5.5)$ болно.

III. $y' > 0$ тэнцэтгэл биш бодно.

$3x^2 + 3x - 6 > 0$ тэнцэтгэл бишийн шийдийн олонлог нь $]-\infty; -2[\cup]1; +\infty[$ тул функц энэ завсар дээр өснө.

IV. $y' < 0$ тэнцэтгэл биш бодно.

$3x^2 + 3x - 6 < 0$ тэнцэтгэл бишийн шийдийн олонлог нь $]-2; 1[$ тул энэ завсар нь функцийн буурах завсар болно.

V. Функцийн график $(-2, 8)$ цэгийн зүүн талд өсөөд, энэ цэг дээр тогтвржиж, баруун талд нь буурч байгаа тул Аргумент x ——————
энэ нь максимумын цэг болно.

График $(1, -5.5)$ цэгийн зүүн талд Уламжлал y' + 0 - 0 +
буураад, энэ цэг дээр тогтвржиж, Функц y ↗ 8 ↘ -5.5 ↗
баруун талд нь өсөж байгаа тул энэ max min

нь минимумын цэг болно. Бүдүүвч зураглалыг хар

Санамж $y' = 0$ тэгшитгэлийн -2 ба 1 гэсэн хоёр шийд тодорхойлогдох мужийг турван завсар болгон хуваана. Завсар тус бүрээс нэг тоо сонгон авч, уламжлалд орлуулан шалгаад $y' < 0$, $y' > 0$ хоёрын аль нь үнэн болохыг тогтоо замаар III, IV алхмыг хялбаршуулах боломжтой.

Дүгнэлт.

	Максимумын цэг			Минимумын цэг		
Уlamжлалын тэмдэг	эерэг	0	серэг	серэг	0	эерэг
Шүргэгчийн наалт	/	—	\	\	—	/
Функц	өснө	тогтвржино	буурна	буурна	тогтвржино	өснө

Жишээ 2. $y = x^3$ функцийн сэжигтэй цэгийг олж, максимум, минимумын аль нь болохыг тогтоо.

Бодолт. Уlamжлалыг олбол $y' = 3x^2$ болох ба $x = 0$ абсцисстай цэг сэжигтэй цэг болно. Гэхдээ $x = 0$ абсцисстай цэгийн зүүн ба баруун талд функцийн уlamжлал нь эерэг байх тул өсөх функц болно. Иймээс $x = 0$ цэг нь максимум, минимумын аль нь ч биш, нугаралтын цэг болно.

Жишээ 3. $f(x) = 0.5x^2 - 2x + 1$ функцийн $[-2, 4]$ завсар дээрх хамгийн их ба бага утгыг ол.

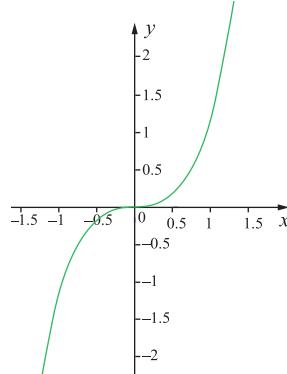
Бодолт. Завсралтад хамгийн бага утга нь багасгахад олж болно.

$$x = -2 \text{ үед } f(-2) = 0.5 \cdot (-2)^2 - 2 \cdot (-2) + 1 = 2 + 4 + 1 = 7$$

$$x = 4 \text{ үед } f(4) = 0.5 \cdot 4^2 - 2 \cdot 4 + 1 = 8 - 8 + 1 = 1$$

$f(x)$ функцийн тогтвржилтын цэгийг олъё. $f'(x) = x - 2$ тул $x - 2 = 0$ тэгшитгэлийн шийд $x = 2$ ба $f(2) = 0.5 \cdot 2^2 - 2 \cdot 2 + 1 = 2 - 4 + 1 = -1$ болж байна.

Эндээс харвал $f(x)$ функцийн $[-2, 4]$ завсар дээрх хамгийн их утга 7, хамгийн бага утга -1 болно.



Жишээ 4. Тэгш өнцөгт хэлбэртэй гөлмөн төмрийн урт 8 см, өргөн 5 см байв. Дөрвөн булангаас нь адилхан жижиг квадрат таслаад (Зураг хар) үлдсэн хэсгийг тасархай зураасны дагуу тэгш өнцөг үүсгэн нутгалж, хайрцаг болгожээ. Хайрцгийн эзлэхүүний хамгийн их утгыг ол.

Бодолт. Тасалсан жижиг квадратын талын уртыг x -ээр тэмдэглээ.

Хайрцгийн урт $8 - 2x$, өргөн $5 - 2x$, өндөр x ба

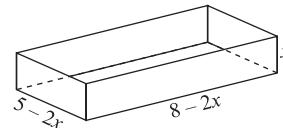
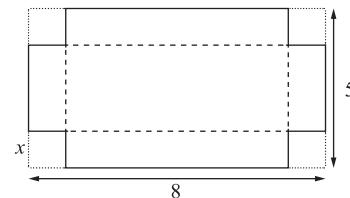
$8 - 2x > 0$, $5 - 2x > 0$, $x > 0$ байх ёстой учир

$0 < x < 2.5$ нөхцөлийг хангана.

Эзлэхүүн нь тэдгээрийн үржвэртэй тэнцүү $V(x) = (8 - 2x)(5 - 2x)x$ ба x хувьсагчаас хамаарсан функц болно. Бодлого нь $V(x) = (8 - 2x)(5 - 2x)x$ функцийн $0 < x < 2.5$ завсар дээрх хамгийн их утгыг олох бодлогод шилжиж байна. Хаалт задалж хялбарчилбал $V(x) = 4x^3 - 26x^2 + 40x$. Уlamжлалыг олбол

$$V'(x) = 12x^2 - 52x + 40 \text{ болно. Уlamжлал } 0 \text{-тэй тэнцэх } x \text{-ийн утга нь}$$

$$3x^2 - 13x + 10 = 0 \text{ тэгшитгэлийн шийд байна. Квадрат тэгшитгэлийг бодвол}$$



$x_1 = 1$, $x_2 = \frac{10}{3}$ шийд гарлаа. $x_2 = \frac{10}{3}$ нь $x < 2.5$ нөхцөл хангахгүй тул орхиж

$x = 1$ гэсэн шийд авч үзнэ. Энэ шийдийг $V(x)$ -ийн томъёонд орлуулбал

$$V(1) = (8 - 2 \cdot 1)(5 - 2 \cdot 1) \cdot 1 = 6 \cdot 3 = 18 \text{ болж } (1, 18) \text{ цэг олов.}$$

$3x^2 - 13x + 10$ турван гишүүнт 1-ийн зүүн талд эзэрэг, баруун талд сөрөг утгатай тул олсон $(1, 18)$ цэг нь функцийн максимумын цэг болно. Өөрөөр хэлбэл $8\text{ см} \times 5\text{ см}$ хэмжээтэй гөлмөн төмрөөр хамгийн ихдээ 18 см^3 эзлэхүүнтэй хайрцаг хийж болно.

Жишээ 5. Үйлдвэр долоо хоногт 25 бүтээгдэхүүн үйлдвэрлэх хүчин чадалтай. Хэрэв n бүтээгдэхүүний үйлдвэрлэлийн зардал $n^2 + 10n + 600$ төгрөг, нэг бүтээгдэхүүнийг борлуулах үнэ нь $p = 110 - 2n$ төгрөг бол долоо хоногт хэдэн бүтээгдэхүүн үйлдвэрлэхэд хамгийн их ашигтай ажиллах вэ?

Бодолт. Ашгийн хэмжээ n -ээс хамаарсан $A(n)$ функц байна.

$A(n) = \text{орлого-зарлага} = pn - (n^2 + 10n + 600)$ байх ба p -ийн оронд $110 - 2n$ -ийг орлуулбал $A(n) = (110 - 2n)n - (n^2 + 10n + 600)$ хаалт задалж хялбарчлахад

$A(n) = -600 + 100n - 3n^2$ болно. Уламжлалыг олбол $A'(n) = 100 - 6n$, уламжлалыг 0-тэй тэнцүүлэхэд гарсан $100 - 6n = 0$ тэгшитгэлийн шийд $n = \frac{100}{6} = 16\frac{2}{3}$ гэж гарав. $16\frac{2}{3}$ -ын зүүн талд функц өсөж, баруун талд буурч байгаа тул энэ нь максимумын цэг мөн. Гэтэл үйлдвэрлэх бүтээгдэхүүний тоо n нь бүхэл тоо байх ёстой тул $16\frac{2}{3}$ -ийн хоёр талд орших хоёр бүхэл тооны аль нэг нь бодлогын шийд байна.

$$n = 16 \text{ үед } A(16) = 100 \cdot 16 - 600 - 3 \cdot 16^2 = 255232$$

$n = 17$ үед $A(17) = 100 \cdot 17 - 600 - 3 \cdot 17^2 = 317033$ хоёр тооны $A(17)$ нь их тул долоо хоногт 17 бүтээгдэхүүн үйлдвэрлэвэл хамгийн их ашигтай ажиллана.

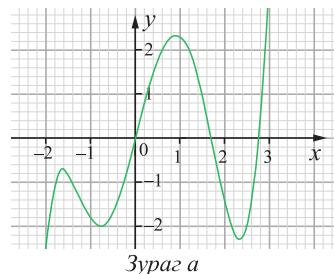
52. Зураг а-д $y = f(x)$ функцийн график өгчээ.

Графикаас

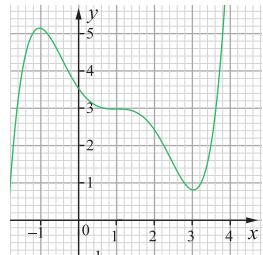
- Максимум, минимумын цэгүүдийн координатыг ойролцоогоор ол.
- Функцийн өсөх, буурах завсрлыг ол.
- Функцийн уламжлал сөрөг байх завсрлыг ол.
- Функцийн уламжлал хамгийн бага утгаа авах цэгийн абсциссыг ойролцоогоор ол.

53. Зураг б-д $y = f(x)$ функцийн график өгчээ.

- Сэжигтэй цэгүүдийг ол.
- Экстремумын цэгүүдийг ол.
- Максимум, минимумын цэгийн координатыг ол.
- Функцийн өсөх завсрлыг ол.
- Функцийн буурах завсрлыг ол.



Зураг а



Зураг б

е. Функцийн өөрчлөлтийн хурд 0-тэй тэнцүү байх цэгүүдийг ол.

ё. Функцийн өөрчлөлтийн хурд $x = -2, x = 2$ хоёрын аль цэг дээр нь их вэ?

54. Функцийн тогтворталтын цэгийн тоог ол.

а. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x$

б. $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 - x^2 + x - 1$

в. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + x + 1$

г. $f(x) = -x^3 + 2x^2 - 2x - 2$

д. $f(x) = \frac{-x^3 + 3x^2 - 3x - 11}{6}$

е. $y = x^3 + 2x^2 - 2$

ё. $y = x^2 - 2$

ж. $g(x) = x^5$

55. Функцийн экстремумын утгыг ол.

а. $y = 2x^2 - 8x + 6$

б. $y = x^3 + 7x$

в. $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 6x - 3$

г. $y = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$

д. $y = 2 - 7x$

е. $y = (x - 4)^2 \cdot x^2$

ё. $f(x) = x^2 - 4\sqrt{x}$

ж. $y = x^4$

56. $f(x) = -0.5x^4 + 2x^3$ функцийн максимумын утгыг ол.

57. Дараах функцийн экстремумын утгыг олж, максимум, минимумын аль нь болохыг тогтоо.

а. $y = x^2 - 6x$

б. $y = 2x^2 - 16x + 5$

в. $y = -3x^2 - 12x - 5$

г. $y = -5x^2 + 60x - 190$

д. $y = x^3 + 3x^2 - 3$

е. $y = -\frac{1}{3}x^3 + x^2 - x + \frac{7}{3}$

ё. $y = -x^3 + 3x^2 - 4x + 1$

ж. $y = x^3 - 3x - 1$

з. $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$

и. $y = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2$

й. $y = -\frac{1}{3}x^3 + x^2 - x + \frac{7}{3}$

к. $y = x + \frac{1}{x}$

л. $y = x + \frac{1}{x+2}$

м. $y = x^2 + \frac{1}{x^2}$

н. $y = x^3 + \frac{1}{x^3}$

о. $y = x^4 + 1$

58. $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 3$ функцийн экстремумын цэгүүдийг ол.

59. $f(x) = x^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{1}{2}} + 2x^{-\frac{1}{2}}$ функцийн экстремумын цэгүүдийг ол.

60. Функцийн экстремумын цэгийг ол.

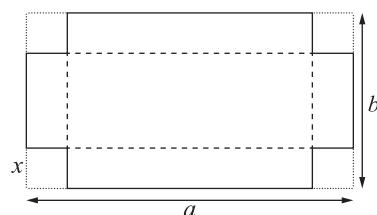
а. $f(x) = 3x^4 - 4x^3$

б. $f(x) = x^3 \left(1 + \frac{x}{4}\right)$

61. Суурийн диаметр, өндөр хоёрын нийлбэр тогтмол 3 см байх цилиндрийн суурийн радиус x см байв.

а. Цилиндрийн эзлэхүүнийг олох $V = \pi r^2 h$ томьёо ашиглаад, эзлэхүүн нь

- x -ээс хамаарсан ($x \in [0, 3]$) $V(x) = \pi(3x^2 - 2x^3)$ функц болохыг харуул.
- б. $y = 3x^2 - 2x^3$ функцийн $[0, 3]$ завсар дахь хамгийн их утгыг ол.
 в. Цилиндрийн эзлэхүүн $V(x)$ -ийн $[0, 3]$ завсар дахь хамгийн их утгыг ол.
62. $f(x)$ функцийн $[a, b]$ завсар дахь хамгийн их ба бага утгыг ол.
- а. $f(x) = \frac{3}{4}x^2 - 3x + 4$, $a = 1$, $b = 4$ б. $f(x) = \frac{3}{4}x^2 - 3x + 6$, $a = 0$, $b = 2$
 в. $f(x) = -2x^2 + 12x - 18$, $a = 2$, $b = 4$ г. $y = \frac{x}{3} + \frac{3}{x}$, $a = -5$, $b = -1$
 д. $f(x) = x^4 - 2x^2 + 5$, $a = -1.1$, $b = 1.1$ е. $y = x^2 + 4x - 1$, $a = -3$, $b = 1$,
63. $f(x) = -(x+1)(x-5)(x-1)-6$ функц $[1, 3]$ завсрыг ямар завсарт буулгах вэ?
64. $f(x) = -(x-2)^2(x-5)-6$ функц $[1.5, 4.5]$ завсрыг ямар завсарт буулгах вэ?
65. Хэрэв хоёр тооны нийлбэр 40-тэй тэнцүү бол үржвэрийн хамгийн их утгыг ол.
66. Хэрэв хоёр тооны үржвэр 40-тэй тэнцүү бол нийлбэрийн хамгийн бага утгыг ол.
67. Хэрэв тэгш өнцөгийн периметр 48 бол талбайн хамгийн их утгыг ол.
68. Барилгын ханын материал хэмнэх бодлого. Шалны талбай нь 80 m^2 байх байшин барих болов. Шалны периметрийг хамгийн бага байлгахын тулд урт, өргөнийг хэдэн метр байхаар авах хэрэгтэй вэ?
69. 20 см периметртэй тэгш өнцөгийн талбайн хамгийн их утгыг ол. Энэ үед талууд нь хэд байх вэ?
70. Гурвалжны дундааж шугам. ABC гурвалжны AC тал дээр B' цэг авч түүнийг дайруулан BC ба AB хоёр талтай параллел шулуун татахад эдгээр талыг харгалзан A' ба C' цэгээр огтолно. Хэрэв $BC = 12$ см бол $A'B$ хэрчмийн уртын ямар утгад $A'B'C'B$ параллелограммын талбай хамгийн их байх вэ?
71. Өвсөн овоохой барихын тулд адил 3 метр урттай шургаагаар зурагт үзүүлсэнтэй адилаар яс мод зангидах болов. Яс модны газарт тулах A, B хоёр цэгийн хоорондох зайд x -ийн ямар утгад овоохойн эзлэхүүн хамгийн их байх вэ?
 Заавар. Зурагт үзүүлсэн яс мод нь 3, 3, x талтай адил хажуут гурвалжин суурьтай 3 метр өндөртэй гурвалжин призмийн байна гэдгийг ажигла. Призмийн өндөр тогтмол учир эзлэхүүн нь зөвхөн суурийн гурвалжны талбайгаас шууд хамаарна. Иймээс овоохойн нүүрэн талын гурвалжны талбайн хамгийн их утгыг олоход болно.
72. Тэгш өнцөгт хэлбэртэй гөлмөн төмрийн урт a , өргөн b байв. Үүнд:
- а. $a = 6$, $b = 6$ б. $a = 12$, $b = 12$
 в. $a = 18$, $b = 18$ г. $a = 15$, $b = 7$
 д. $a = 24$, $b = 9$ е. $a = 16$, $b = 10$
 ё. $a = 21$, $b = 16$ ж. $a = 24$, $b = 15$
- Дөрвөн булангаас нь адилхан жижиг квадрат таслаад (Зураг хар) үлдсэн хэсгийг тасархай

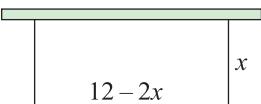


зураасны дагуу тэгш өнцөг үүсгэн нугалж, хайрцаг болгожээ. Хайрцгийн эзлэхүүний хамгийн их утгыг ол.

73. Хажуу талс бүрийн периметр 24 см байх зөв дөрвөн өнцөгт призмийн эзлэхүүний хамгийн их утгыг ол.

74. Цилиндрийн эзлэхүүнийг $V = \pi r^2 h$ томьёогоор бодно. Энд r нь суурин радиус, h нь өндөр. Хэрэв $r + h = 6$ бол эзлэхүүний хамгийн их, хамгийн бага утгыг ол.

75. Хөнгөн цагаан хавтангаар 2π нэгж.куб эзлэхүүнтэй цилиндр хийх болжээ. Суурин радиусыг ямар урттай авбал хамгийн бага материал орох вэ?

76. Хэрэв хангалттай урт бетон хашаанд тулган барьсан  (Зураг хар) гурван тал төрөн хашааны нийт урт 12 м бол хашсан хэсгийн талбайн хамгийн их утгыг ол.

77. Үсчин нэг хүний үсийг 3000 төгрөгөөр засахад үйлчлүүлэгчийн тоо өдөрт дунджаар 100 болж, ачааллаа даахгүйд хүрэв. Үс засах үнийг 1000 төгрөгөөр нэмэгдүүлэх бүрд үйлчлүүлэгчийн тоо дунджаар 10 хүнээр цөөрч байгааг тэр ажигласан байна.

а. Нэг хүний үсийг хэдэн төгрөгөөр засвал орлого хамгийн их байх вэ?

б. Орлого хэдэн төгрөг байснаа хэдэн төгрөг болж өсөх вэ?

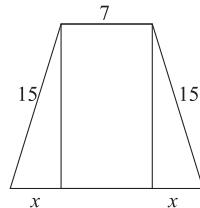
в. Энэ үед үйлчлүүлэгчийн тоо хэд болж буурах вэ?

Заавар. 1000 төгрөгийг x удаа нэмсэн гэж үзвэл нэгжийн үнэ нэмэгдэж $3000 + 1000x$, харин үйлчлүүлэгчийн тоо буурч $100 - 10x$ болно. Энэ үед орлогын хэмжээ x -ээс хамаарсан $f(x) = (3000 + 1000x)(100 - 10x)$ функц болно. Энэ функцийн экстремумын утгыг ол.

78. Адил хажуут трапецын бага суурь 7, хажуу тал 15 байв. Их суурь, бага суурин ялгаврын хагас x -ийн ямар утгад трапецын талбай хамгийн их утгаа авах вэ? Тэр хамгийн их утгыг ол.

79. Хэрэв машин v км/ц хурдтай явбал нэг литр шатахуунаар

$$s = 5 + \frac{1}{5}v - \frac{1}{800}v^2$$
 зам явна. Шатахууныг хамгийн хэмнэлттэй зарцуулах хурдыг ол.



8.9. УЛАМЖЛАЛ АШИГЛАН ФУНКЦИЙН ГРАФИК БАЙГУУЛАХ

Уламжлал ашиглан функцийн графикийг тоймлон байгуулах

Функцийн өсөх буурах завсар, экстремумын цэгүүдийг мэдсэнээр графикийн хэлбэрийг төсөөлж, тойм байдлаар байгуулж болдог. Графикийг байгуулахдаа:

I. Функцийн тодорхойлогох муж ба дүрийг олно.

II. Функцийн тэгш, сондгой эсэхийг тогтооно.

III. Боломжтой бол абсцисс, ординат тэнхлэгтэй огтлолцох цэгүүдийг олно.

IV. Функцийн сэжигтэй цэгийг олно.

V. Функцийн өсөх, буурах завсар, экстремумын цэгийг олж, максимум, минимумын аль нь болохыг тогтооно.

VI. Графикийг тоймлон байгуулна.

Жишээ 1. $y = x^3 + 1.5x^2 - 6x - 2$ функцийн графикийг байгуул.

Бодолт.

- I. $y = x^3 + 1.5x^2 - 6x - 2$ функцийн тодорхойлгдох муж нь $(-\infty; +\infty)$
 II. $y(-x) = -x^3 + 1.5x^2 + 6x - 2$ учир функц тэгш ч биш, сондгой ч биш юм.
 III. Абсцисс тэнхлэгийг огтлох цэгийг олохын тулд $y = 0$ буюу

$x^3 + 1.5x^2 - 6x - 2 = 0$ тэгшитгэл болно. Тэгшитгэлийг уржи

$$x^3 + 1.5x^2 - 6x - 2 = (x-2)(x^2 + 3.5x + 1) = 0 \text{ буюу}$$

$x = -2$ и $x = -3.18$, $x \approx -0.21$ болно. Иймэдээг функцийн график.

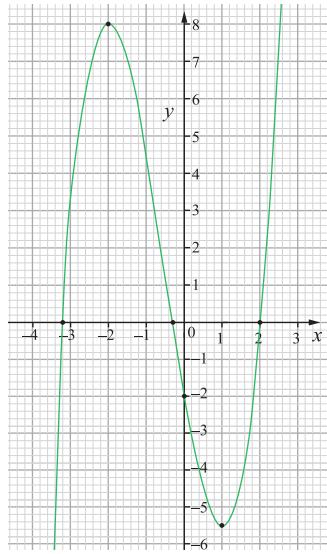
$x_1 = z$, $x_2 \approx -3.18$, $x_3 \approx -0.51$ болно. Иймд энэ функцийн график аосцисс тэнхлэгийг гурван цэгээр огтолно.

Ординат тэнхлэгийг огтлоо цэгийг олохын тулд функцийн томьёонд $x = 0$ гэж орлуулаад y -ийг олно. $y = 0^3 + 1.5 \cdot 0^2 - 6 \cdot 0 - 2 = -2$ учир ординат тэнхлэгийг $y = -2$ цэгээр огтолно.

- IV. Өсөх завсар нь $(-\infty; -2) \cup (1; +\infty)$, буурах завсар $(-2; 1)$ болно. 8.8-ын жишээ 1-д бодсон.

- V. Максимумын цэг $(-2,8)$, минимумын цэг $(1,-5.5)$ болно. 8.8-ын жишээ 1-д бодсон. Дээрх дүгнэлтүүдээ бүдүүвч зураглалаар харуулна.

Аргумент	x	-2	1	\rightarrow
Уламжлал	y'	+	0	-
Функци	y	↗ 8	↘ -5.5	↗



VI. Бүдүүвч зураглалаа ашиглан, функцийн графикийг байгуулна.

Жишээ 2. $f(x) = -x^4 + 4x^2$ функцийн график байгуул.

Бодолт.

- I. Функцийн тодорхойлогдох муж нь $(-\infty; +\infty)$
 - II. $f(-x) = -(-x)^4 + 4(-x)^2 = -x^4 + 4x^2 = f(x)$ учир функц тэгш функц юм.
Иймээс функцийн графикийн нэг салааг $[0, +\infty[$ завсарт байгуулаад, түүнийгээ ординат тэнхлэгийн хувьд тэгш хэмтэйгээр хувиргаж нөгөө салааг байгуулна.
 - III. $f(x) = 0$ буюу $-x^4 + 4x^2 = 0$ тэгшигэл бодвол шийд $x_1 = 0$, $x_2 = 2$ болно.
Иймд энэ функцийн график абсцисс тэнхлэгийг $(0,0)$, $(2,0)$ хоёр цэгээр огтолно.
 - IV. Сэжигтэй цэгийг олохын тулд функцийн уламжлал $f'(x) = -4x^3 + 8x$ болно. Түүнийг 0-тэй тэнцүүлж $-4x^3 + 8x = 0$ тэгшигэлийг бодоход $x_1 = 0$, $x_2 = \sqrt{2} \approx 1.41$ гэж гарав. Функцийн харгалзах утгуудыг олбол
 $f(0) = 0$, $f(\sqrt{2}) = -(\sqrt{2})^4 + 4(\sqrt{2})^2 = -4 + 8 = 4$ учир $(0, 0)$, $(1.41, 4)$ гэсэн хоёр сэжигтэй цэг байна. Будуувч зураглалыг дараах байдлаар зурж эхэнэ.

Функцийн аргумент	x	0	1.41	
Функцийн уламжлал	y'	0	0	
Функци	y	0	4	

V. Өсөх буурах завсар

$x_1=0$, $x_2=\sqrt{2} \approx 1.41$ цэгүүд тодорхойлогдох мужийн эерэг цацрагийг $]0, 1.41[$, $]1.41, +\infty[$ гэсэн хоёр завсар болгон хуваана.

$]0, 1.41[$ завсраас $x=1$ гэсэн тоо авбал $f'(1)=-4+8=4>0$ учир уламжлал $]0, 1.41[$ завсарт эерэг байна.

$]1.41, +\infty[$ завсраас $x=2$ -ыг авбал $f(2)=-4 \cdot 2^3 + 8 \cdot 2 = -32 + 16 = -16 < 0$ учир уламжлал $]1.41, +\infty[$ завсарт сөрөг байна.

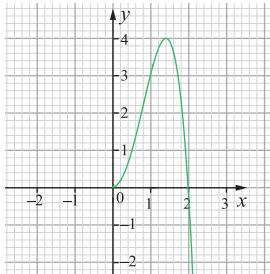
Ийм учраас функци $]0, 1.41[$ завсарт өсөж, $]1.41, +\infty[$ завсарт буурна.

(1.41, 4) цэг нь функцийн максимумын цэг болно. Бүдүүч зураглалаа гүйцээвэл

Функцийн аргумент	x	0	1.41	
Функцийн уламжлал	y'	0	+	0
Функци	y	0	↗	4

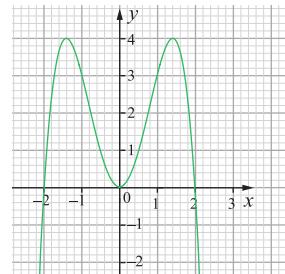
max

VI. Бүдүүчийг ашиглан функцийн графикийг байгуулбал:



Ординат тэнхлэгийн хувьд тэгш хэмтэйгээр хувиргавал график бүтэн болно.

Санамж Хэрэв функци сондгой бол графикийн координатын эхийн хувьд тэгш хэмтэй хувиргана.



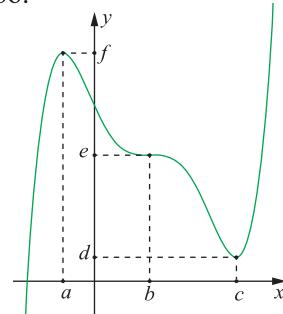
80. Зурагт функцийн график өгчээ.

- Функцийн уламжлал эерэг, сөрөг байх завсрыг тогтоо.
- Функцийн өсөх, буурах завсрыг тогтоо.
- Шүргэгч шулууны тэгшитгэл нь абсцисс тэнхлэгтэй параллел байх цэгүүдийг заа.
- Функцийн уламжлал 0-тэй тэнцүү байх цэгүүдийг координатаар нь бич.
- Функцийн сэжигтэй цэгүүд аль нь вэ?
- Функцийн тогтворталтын цэгүүд аль нь вэ?
- Функцийн экстремумын цэгүүд аль нь вэ?
- Функцийн максимумын цэг аль нь вэ?
- Функцийн минимумын цэг аль нь вэ?

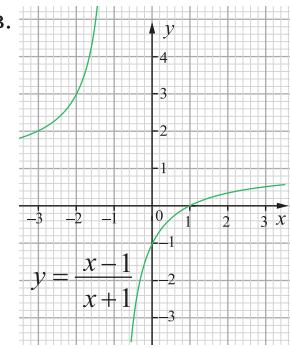
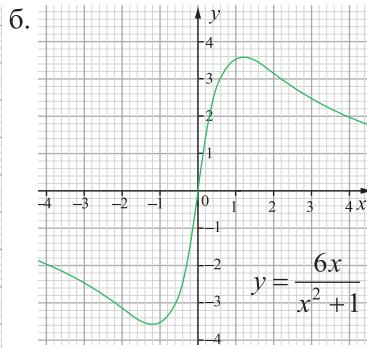
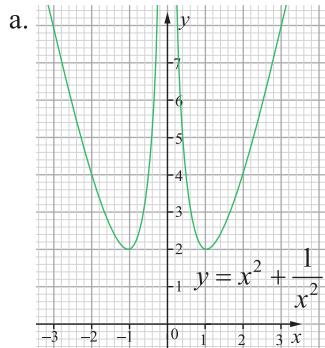
81. Функцийн графикийг зурагт харуулжээ.

Графикийг ашиглаж дараах даалгаврыг гүйцэтгэ.

- Функцийн тодорхойлогдох муж ба дүрийг ол.

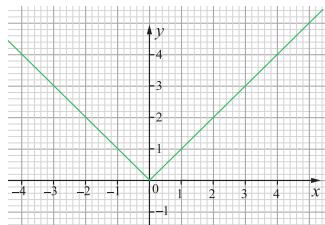


2. Функцийн тэгш, сондгой эсэхийг тогтоо.
3. Абсцисс, ординат тэнхлэгтэй огтлолгох цэгүүдийг ол.
4. Функцийн өсөх, буурах завсрлыг ол.
5. Функцийн экстремумын цэгийг олж, максимум, минимумын аль нь болохыг тогтоо.

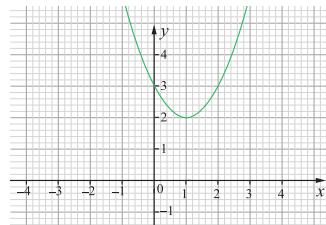


82. Функцийн томьёо ба графикийг харуулжээ. Тус бүрийн өсөх буурах завсар, сэжигтэй цэгийг графикаас ол. Эдгээр цэгийг уламжлалаар олж, хариугаа шалга.

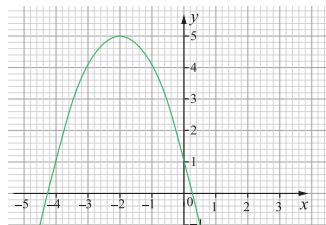
a. $y = \sqrt{x^2}$



б. $y = x^2 - 2x + 3$

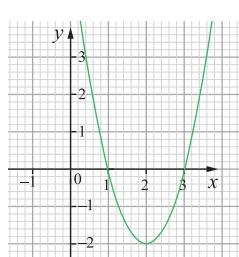


в. $y = -x^2 - 4x + 1$

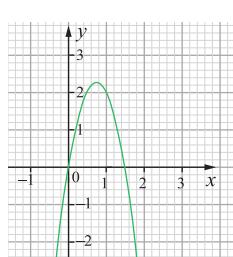


83. Функцийн томьёо ба график өгчээ. Экстремумын цэг, өсөх буурах завсрлыг графикаас болон уламжлалын тусламжтайгаар ол.

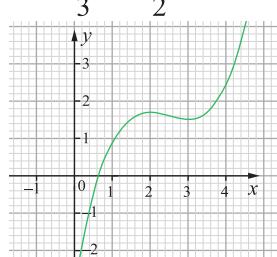
a. $y = 2x^2 - 8x + 6$



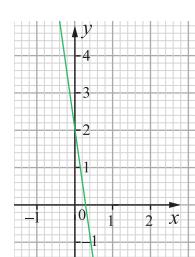
б. $y = 6x - 4x^2$



в. $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 6x - 3$



г. $y = 2 - 7x$



84. Функцийн томьёо ба графикийг зөв харгалзуул.

a. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 8x - 5$

б. $f(x) = x^3 - 4x^2 + 6x - 2$

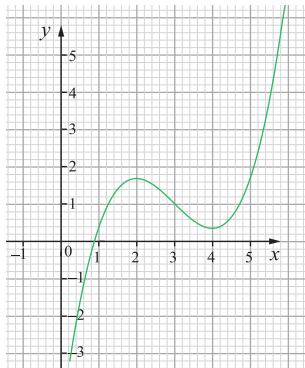
в. $f(x) = x^3 - 9x^2 + 27x - 25$

г. $f(x) = -x^3 - 3x^2 + 2$

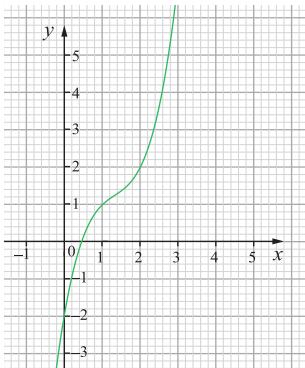
д. $f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 - 24x - 1}{27}$

е. $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 3x^2 - 9x + 8$

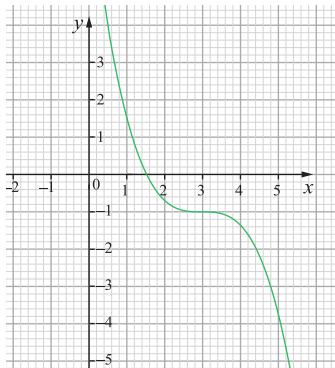
I.



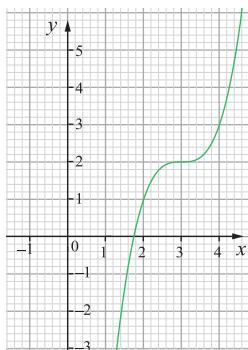
II.



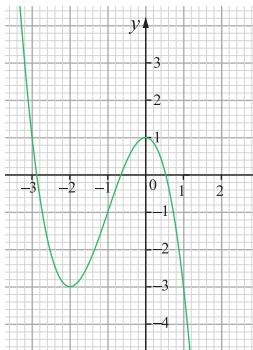
III.



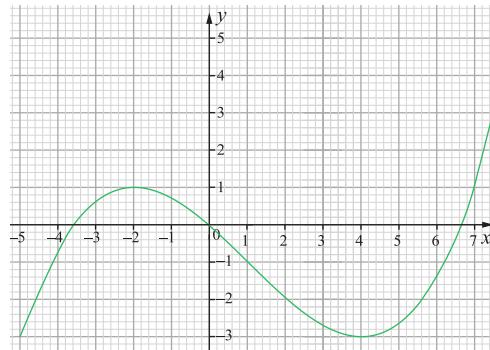
IV.



V.



VI.



85. Функцийг уламжлалаар шинжилж графикийг байгуул.

а. $y = \frac{1}{2}x^2 - 2$

б. $y = -\frac{4}{9}x^2 + \frac{8}{9}$

в. $y = \frac{1}{27}x^3 - x$

г. $y = -\frac{3}{16}x^2 + \frac{9}{4}x$

д. $y = \frac{4}{81}x^4 - \frac{8}{9}x^2$

е. $y = -\frac{1}{16}x^4 + \frac{1}{2}x^2$

ё. $y = \frac{3}{2}x^3 - \frac{9}{2}x$

ж. $y = 2x^4 - 4x^2$

з. $y = x^4 + 2x^3 + 1$

и. $y = -x^4 + 2x^3 + 1$

й. $y = -x^4 + 2x^2$

к. $y = x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 6x + 2$

л. $y = x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 6x + 1$

м. $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 2$

н. $y = -x^3 + 3x$

о. $y = \frac{-3x^3 + 36x}{16}$

БҮЛГИЙН НЭМЭЛТ ДААЛГАВАР

- 1.** Функцийн уламжлалыг $\left(-\frac{1}{2}x^{\frac{6}{5}}\right)' = -\frac{1}{2} \cdot \frac{6}{5}x^{\frac{6-1}{5}} = -\frac{3}{5}x^{\frac{1}{5}}$ загвараар бод.
- а. $\left(\frac{1}{2}x^{\frac{2}{3}}\right)'$ б. $\left(\frac{1}{3}x^{\frac{1}{2}}\right)'$ в. $\left(-\frac{2}{3}x^{-\frac{3}{2}}\right)'$
 г. $\left(\frac{3}{2}x^{\frac{5}{6}}\right)'$ д. $\left(\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)'$ е. $\left(\frac{5}{7}x^{\frac{7}{3}}\right)'$
- 2.** Функцийн уламжлал $\frac{dg(x)}{dx}$ -ыг олжээ. Алдаатай хоёр хариу аль нь болохыг тогтоо.
- | | | | |
|-------------------------|----------------------------------|-------------------------|----------------------------------|
| а. $g(x) = -2.02x^{-6}$ | $\frac{dg(x)}{dx} = 12.12x^{-7}$ | б. $g(x) = 6.39x^3$ | $\frac{dg(x)}{dx} = 19.17x^2$ |
| в. $g(x) = 4.52x^{-5}$ | $\frac{dg(x)}{dx} = -22.6x^{-6}$ | г. $g(x) = -3.81x^{-7}$ | $\frac{dg(x)}{dx} = 26.67x^{-8}$ |
| д. $g(x) = 1.66x^5$ | $\frac{dg(x)}{dx} = 8.3x^4$ | е. $g(x) = 2.28x^{-8}$ | $\frac{dg(x)}{dx} = -1.82x^{-9}$ |
| ё. $g(x) = 3.36x^2$ | $\frac{dg(x)}{dx} = 6.72x$ | ж. $g(x) = -6.05x^7$ | $\frac{dg(x)}{dx} = -42.35x^6$ |
| з. $g(x) = 6.35x^{-4}$ | $\frac{dg(x)}{dx} = 25.4x^{-5}$ | и. $g(x) = 1.5x^{1.5}$ | $\frac{dg(x)}{dx} = 2.25x^{0.5}$ |
- 3.** Функцийн харгалзах цэг дээрх налалтыг ол.
- | | | | |
|--------------------------------|-----------|---|------------|
| а. $y = x^3 + 3x^2 - 24x + 6$ | $x_0 = 2$ | б. $y = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 5x + 8$ | $x_0 = -2$ |
| в. $y = -x^3 + 6x^2 + 15x + 6$ | $x_0 = 3$ | г. $y = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 - 2$ | $x_0 = 1$ |
| д. $y = x^3 + 9x^2 - 1$ | $x_0 = 0$ | е. $y = x^4 - x^3$, | $x_0 = -1$ |
- 4.** Функцийн уламжлалыг ол.
- | | |
|---|-------------------------------|
| а. $y = \frac{1}{3}x^3 - 6x^2 + 27x + 8$ | б. $y = x^3 - 3x^2 - 24x - 4$ |
| в. $y = -\frac{1}{3}x^3 + 4x^2 - 7x + 2$ | г. $y = -x^3 + 15x^2 - 48x$ |
| д. $f(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - \frac{x}{1}$ | е. $f(x) = -\frac{1}{x^2}$ |
- 5.** Функцийн y' , y'' уламжлалыг ол.
- | | | |
|--------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|
| а. $y = -4x + 2$ | $y = 3$ | б. $y = -4x + 6$ |
| г. $y = -3x + 6$ | д. $y = 7x - 4$ | е. $y = 5x^2 - 7x - 7$ |
| ё. $y = -9x^2 + 8x - 3$ | ж. $y = 9x^2 + x - 2$ | з. $y = -9x^2 - 5x + 2$ |
| и. $y = -6x^2 - 2x + 7$ | й. $y = -9x^2 - 3x + 5$ | к. $y = 5x^2 + 5x + 4$ |
| л. $y = -3x^3 + 6x^2 - 9x + 7$ | м. $y = -x^3 + 8x^2 + 9x + 5$ | н. $y = -x^3 - 2x^2 - 6x - 2$ |

о. $y = 2x^3 + x^2 + 4x - 6$ ө. $y = x^3 + 9x^2 + 7x - 4$ п. $y = 8x^2 + 2x - 1$
 п. $y = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + x^0 - x^{-1} - \frac{x^{-2}}{2} - \frac{x^{-3}}{3}$ ө. $y = 2\sqrt{x^3} - 3\sqrt[3]{x^2}$ с. $y = 2\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x}$
 т. $y = \frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{3}{\sqrt[3]{x}}$ ү. $y = 2\sqrt{x^3} - 3\sqrt[3]{x^2}$ ү. $y = \frac{2}{\sqrt{x^3}} - \frac{3}{\sqrt[3]{x^2}}$

6. I. $f(x)$ функцийн томьёо ба x_0 цэг өгсөн бол $\frac{df(x_0)}{dx}$ -ийг ол.
- | | | | |
|---------------------------|------------|---------------------------|------------|
| а. $4x - 3$ | $x_0 = 6$ | б. $-7x - 6$ | $x_0 = -8$ |
| в. $7x + 5$ | $x_0 = 1$ | г. $-9x + 9$ | $x_0 = 3$ |
| д. $-4x + 7$ | $x_0 = 4$ | е. $-x - 5$ | $x_0 = -9$ |
| ё. $3x^2 - x - 5$ | $x_0 = -1$ | ж. $-3x^2 + 6x - 3$ | $x_0 = 0$ |
| з. $-2x^2 - 3x - 2$ | $x_0 = 1$ | и. $4x + 9$ | $x_0 = 1$ |
| й. $-x^3 - 7x^2 + 2x + 5$ | $x_0 = -5$ | к. $-x^3 - 3x^2 - 6x - 3$ | $x_0 = -1$ |
- II. x_0 цэгт төгссөн шүргэгч ба нормал шулууны тэгшигтгэл бич
- | | | | |
|----------------------------|-----------|--------------------------|-----------|
| а. $6x^2 - 4x$ | $x_0 = 1$ | б. $2x^2 + x$ | $x_0 = 2$ |
| в. $2x^3 + 3x^2 + 4x - 1$ | $x_0 = 0$ | г. $x^3 - 7x^2 + 7x - 4$ | $x_0 = 2$ |
| д. $-3x^3 + 8x^2 - 5x - 7$ | $x_0 = 2$ | е. $x^3 - x^2 + 8x + 2$ | $x_0 = 0$ |
| ё. $3x^3 + 2x^2 - 8x$ | $x_0 = 1$ | ж. $x^5 - x^4 + x^3$ | $x_0 = 1$ |

7. Дараах функцуудийг нийлбэрт шилжүүлээд уламжлалыг ол.
- | | | |
|--|---|---|
| а. $y = x(x - 1)$ | б. $y = x(x^2 - 4x + 1)$ | в. $y = x^3(3x - 1)$ |
| г. $y = x^3(x^2 - 8x + 2)$ | д. $y = (x^3 - 2x)(2x + 5)$ | |
| е. $y = x(x^2 - 8x + 2) - x^2(x - 3) + 5$ | | |
| ё. $y = \sqrt{x}(x^2 + 2x - 3)$ | ж. $y = \sqrt{x}(8x\sqrt{x} - 3\sqrt{x})$ | з. $y = \sqrt{x}(x - \sqrt{x})$ |
| и. $y = \sqrt[3]{x}\left(x^2 - \sqrt[3]{x^2}\right)$ | й. $y = \frac{2x - 3}{x}$ | к. $y = \frac{2x^3 - 3}{x^4}$ |
| л. $\frac{x^4 - 16}{x^2}$ | м. $\frac{2x^2 - 3x + 1}{x}$ | н. $\frac{x^4 - 2x^2 + 1}{x^3}$ |
| о. $\frac{1 - \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ | ө. $\frac{x - \sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}}$ | п. $\frac{x^2\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x}}$ |
| п. $\frac{2x + 1}{x - 2}$ | с. $\frac{x^2 + 1}{x - 2}$ | т. $\frac{3x^2 + 2x + 1}{x - 1}$ |

8. Функцийг шинжилж, график байгуул.

а. $x^3 - x^2 + 5x - 6$	б. $3x^2 + 7 - \frac{4}{x}$	в. $\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$
г. $2x^4 - 4x^2$	д. $x^3 - 2x^2 - 8x$	е. $x^2 + 5\sqrt{x}$
ё. $x^{-\frac{3}{4}} - x^{\frac{3}{4}} + x$	ж. $3x^3 - 4x^2 + 9x - 10$	з. $x^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}$
и. $\sqrt{x} + \sqrt{x^3}$	й. $\frac{2}{3}\sqrt{x^3} + \sqrt{x}$	к. $\frac{2}{3}\sqrt{x^3} - 2\sqrt{x}$

9. $f(x) = 10x^3 - 13x^2 + 6x$, $g(x) = 11x^3 - 15x^2 - 3$ бол $f'(x) \geq g'(x)$ тэнцэтгэл бишийг бод.

10. $f(x) = 5 - 3x + 2\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3$, $g(x) = 3x - 7$ бол $f'(x) \leq g'(x)$ тэнцэтгэл бишийг бод.

11. f ба u функцууд өгөв. $\frac{df}{dx}$ -ийг ол.

a. $f(u) = (u+1)^3$, $u = x^2 - 1$

b. $f(u) = \frac{1}{u}$, $u = (2x-1)^2$

v. $f(u) = \sqrt{u}$, $u = \sqrt[3]{4x}$

g. $f(u) = u - \frac{1}{u}$, $u = \sqrt{2-3x}$

d. $f(u) = \sqrt{u} + \frac{1}{\sqrt{u}}$, $u = (2x-3)^2$

e. $f(u) = \frac{\sqrt{u^3} - 16\sqrt{u} + 8}{3}$, $u = (x+2)^2$

12. $y = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x - \frac{7}{3}$ функц өгөв. Дараах даалгаврыг гүйцэтгэх явцдаа хариуг графиктай тулгаж шалга.

а. Функцийн уламжлалыг ол.

б. Функцийн максимумын цэгийг ол.

в. Функцийн минимумын цэгийг ол.

г. Өсөх завсрлыг ол.

д. Буурах завсрлыг ол.

е. Абсцисс тэнхлэгтэй параллел шүргэгч хэд байх вэ? Тус бүрийн тэгшитгэлийг бич.

ё. Функцийн график абсцисс тэнхлэгтэй огтлолцох цэгийн координатыг ол.

ж. Функцийн графикийн $x_0 = -2$ абсцисстай A цэгийг ол.

з. A цэгийг дайруулан графикт татсан шүргэгч шулууны тэгшитгэлийг бичиж, уул шүргэгчийг тат. Шүргэгч шулууны абсцисстай огтлолцох цэгийг ол.

и. A цэгийг дайруулан графикт татсан нормал шулууны тэгшитгэлийг бичиж, уг шулууныг тат.

й. Функцийн графикийг тоймлон зур.

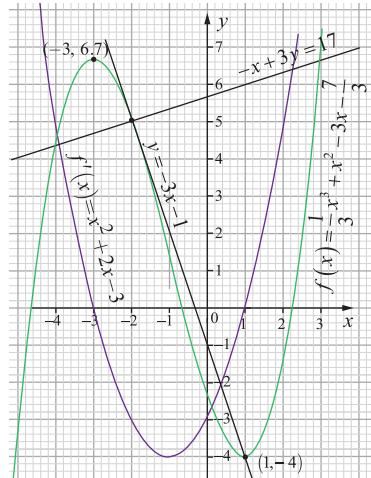
к. $x_1 = -4$ ба $x_2 = 2$ абсцисстай цэг дээрх функцийн өөрчлөлтийн хурдыг ол. Аль цэг дээр нь их хурдтай өсөх вэ?

л. Функцийн $[-1, 2]$ завсар дахь хамгийн их ба бага утгыг ол.

13. $f(x)$ функц, x_0, x_1, x_2 тоонууд, $[a, b]$ завсар өгөв. Өмнөх бодлогын заавраар бод.

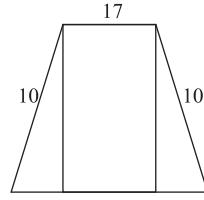
a. $f(x) = -0.5x^2 + 3x + 1$, $x_0 = 6$, $x_1 = 4$, $x_2 = 5$, $[a, b] = [0, 7]$

b. $f(x) = 0.25x^2 - 2x + 3$, $x_0 = 8$, $x_1 = 6$, $x_2 = 8$, $[a, b] = [2, 6]$



- в. $f(x) = \frac{x^3}{2} - x^2 - 2x$, $x_0 = 0$, $x_1 = -2$, $x_2 = 4$, $[a, b] = [-1, 3]$
 г. $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 5$, $x_0 = 0$, $x_1 = -3$, $x_2 = 0$, $[a, b] = [-2, 3]$
 д. $f(x) = -x^3 + 3x^2 - x + 2$, $x_0 = 1$, $x_1 = -1$, $x_2 = 3$, $[a, b] = [0, 2]$

14. Нэг метр урттай утсан гогцоогоор хамгийн их талбай хашихаар тэгш өнцөгт үүсгэв. Түүний талуудыг ол.
15. Адил хажуут трапецын бага суурь 17, хажуу тал 10 байв. Их суурь, бага суурийн ялгаврын хагас x -ийн ямар утгад трапецын талбай хамгийн их утгаа авах вэ?
16. $f(x) = -x^3 - 3x^2 + 2$ функцийн өсөх буурах завсар болон максимум, минимумын цэгийг ол
17. Эгц дээш шидсэн бөмбөг t хугацаанаас хамаарч $h = 20t - 5t^2$ метр өндөрт хөөрч байсан бол хөөрөх өндрийн дээд хэмжээг ол.
18. Цэг $x(t) = 2t^3 - 3t$ хуулиар хөдөлж байв. Хугацааны $t = 1$ эгшинд ямар хурдтай байх вэ?
19. Гурван тооны бага нь сөрөг тоо ба хоёр дахь нь түүнээс 3-аар, гурав дахь нь 8-аар илүү байв. Гурван тооны үржвэрийн хамгийн их утвыг ол.
20. 2000m^2 тэгш өнцөгт хэлбэртэй газрыг хаших хэрэгтэй болжээ. Нүүрэн тал, ар тал хоёрыг 1 метр нь 10 мянган төгрөг, хоёр хажуу талыг 1 метр нь 8 мянган төгрөгийн үнэтэй материалыар барина. Хашааны өргтийг хамгийн бага байлгахын тулд нүүрэн талыг ямар урттай барих вэ?
21. Үйлдвэрийн хашаанд тулгаж, тэгш өнцөгт хэлбэртэй 90m^2 талбайтай гурван тал хашаа барих болов. Хашаатай параллел нэг талыг чулуугаар, хоёр хажуу талыг модоор барина. 1м чулуун хашааны үнэ 10 мянга, модон хашааны үнэ 8 мянган төгрөгийн үнэтэй байв. Хашааны өртөг хамгийн бага байх урт, өргөнийг ол.
22. Номын хуудас дээр текст хэвлэгдэх талбай 192cm^2 байх шаардлагатай байв. Хэрэв дээд, доод зайд 4cm , баруун зүүн захын зайд 3cm байх ёстой бол цаасыг хамгийн хэмнэлттэй зарцуулахын тулд хуудсыг ямар хэмжээтэй авах вэ?
 Заавар. Цаасыг хэмнэлттэй зарцуулна гэдэг нь талбайг хамгийн бага байхыг эрмэлзэнэ гэсэн үг. Цаасны өргөнийг x -ээр тэмдэглэвэл уламжлал авахад төвөгтэй функц гарна. Иймээс текст хэвлэх талбайн өргөнийг x -ээр тэмдэглэх хэрэгтэй. Тэгвэл мөн талбайн урт $\frac{192}{x}$ болох бөгөөд цаасны талбай $S(x) = 8 \cdot \left(x + \frac{144}{x} \right) + 240$ гарна. Энэ функцийн экстремумын утвыг ол.
23. 400 m^2 талбайтай газар ногоо тарих болов. Тарьсан ногоо нарны тусгалаас хамаарч хашаанаас 2, 3, 5, 3 метрээс доошгүй зайд байрлах ёстой. Талбайг тойруулан тэгш өнцөгт хэлбэртэй хашаа барихад хамгийн багадаа хэдэн метр урт хашаа болох вэ?
24. Квадрат ёроолтой тэгш өнцөгт параллелепипед хэлбэртэй задгай усан сан $V = 32\text{ m}^3$ эзлэхүүнтэй байх хэрэгтэй байв. Усан сангийн доторх гадаргуугийн



талбайг хамгийн бага байхаар хэмжээсийг яаж сонгох вэ?

Заавар. Усан сангийн урт, өргөн тэнцүү тул x -ээр тэмдэглэвэл гүн нь $\frac{V}{x^2}$ -тай тэнцүү. Тэгвэл хажуу ханануудын талбай $4x \cdot \frac{V}{x^2} = \frac{4V}{x}$, ёроолын квадратын талбай x^2 болно. Эндээс гадаргуугийн талбайг x -ээс хамаарсан функц мэтээр тодорхойлж болно.

25. Хүнс нөөцлөх, цилиндр хэлбэртэй 0.5 литр багтаамжтай лааз хийх болов. Хамгийн бага материал орсон байхын тулд хэмжээсийг хэрхэн сонгох вэ? Заавар. 0.5 литр = 0.5 см^3 болохыг сана. Лаазны суурийн радиусыг r -ээр тэмдэглэвэл өндөр $h = \frac{1}{2\pi r^2}$ болно. Суурийн хоёр дугуйн талбай $2\pi r^2$, хажуу гадаргуугийн талбай $2\pi r h$ -тай тэнцүү, бүтэн гадаргуугийн талбай $S(r) = 2\pi r^2 + \frac{1}{r}$ болно. Энэ функцийн экстремумын утгыг ол.
26. Өгсөн периметртэй тэгш өнцөгтүүд дотроос хамгийн бага диагональтай тэгш өнцөгтийг ол. Заавар. Тэгш өнцөгтийн периметрийг P -ээр тэмдэглээд энэ тоог тогтмол гэж үзнэ. Нэг талыг x -ээр тэмдэглээд нөгөө талыг P ба x -ээр илэрхийл. Диагональ d -г Пифагорын теоремоор олно. Диагоналийн хамгийн бага утгыг олохын тулд түүний квадратын хамгийн бага утгыг олоод язгуур гаргаж болно. Ингэвэл хялбар бодогдоно.
27. Гар үйлдвэр n ширхэг жижиг хивс нэхэхэд $n^2 - 2n + 200$ төгрөгийн зардал гарч, нэг хивсийг $70 - 2n$ төгрөгөөр борлуулна. Жилд хэдэн хивс нэхвэл ашигтай вэ?
28. Цаг уурын судалгаанд зориулсан агаарын бөмбөлгийг хийлэхэд эзлэхүүн нь секунд тутамд 0.1 м^3 -ээр нэмэгдэж байв. (Бөмбөрцгийн эзлэхүүнийг $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ томьёогоор олдог.) Бөмбөлөг 1 метр радиустай болох үед радиус ямар хурдтай ихсэх вэ? Заавар. $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ -ын хоёр талаас t -ээр уламжлал аваад $\frac{dV}{dt}$ нь тогтмол 0.1 м^3 гэдгийг ашигла.
29. Сансрыйн орон зайд тус бүр 1000 кг масстай хоёр биет $F = 6.67 \cdot 10^{-5} \cdot \frac{1}{r^2}$ хүчээр таталцдаг байна. Энд F -таталцлын хүч (ньютоноор), r -хоёр биетийн хоорондох зайд (метрээр). Хэрэв уул хоёр биет 100 м/с хурдтай ойртож байгаа бол хоорондох зайд нь 100 м болох эгшинд таталцлын хүч нь ямар хурдтай нэмэгдэх вэ?
30. Дэлгүүрт нэгэн төрлийн барааны нэгж бүрийг 15 мянган төгрөгөөр худалдаж, өдөрт 60 нэгж бараа борлуулдаг байв. Нэгжийн үнэ өргөөс нь хэт өндөр байсан тул үйлдвэрээс нийлүүлж байгаа бараа агуулахад багтахгүйд хүрчээ. Хэрэв нэгжийн үнийг 1 мянган төгрөгөөр бууруулах бүрд өдрийн борлуулалт 10 нэгжээр нэмэгдэж байсан бол нэгж барааг хэдэн төгрөгөөр худалдаад өдрийн орлого хамгийн их байх вэ?

IX БҮЛЭГ. ИНТЕГРАЛ

Энэ бүлэг сэдвийг судалснаар дараах мэдлэг, чадварыг эзэмшинэ.

- Дифференциаллахын урвуу үйлдэл нь интеграллах болохыг мэдэх, ойлгох, дифференциал тэгшигэл, ерөнхий ба тухайн шийдийн талаар анхны ойлголтой болох
- x^n функцийг интеграллах (n - рационал тоо)
- $(ax + b)^n$ функцийг интеграллах (энд $n \neq -1$ рационал тоо)
- Интегралын чанаруудыг хэрэглэх (тогтолцоон үржигдэхүүн, нийлбэр, ялгавар)
- Интегралын тогтолцыг үнэлэх тухай бодлого бодох, Тухайлбал: $\frac{dy}{dx} = 2x + 1$ ба $(1, -2)$ цэгийг дайрсан муруйн тэгшигэл олох
- Тодорхой интеграл бодох (зэрэгт функц байх тохиолдолд)
- Тодорхой интеграл ашиглан талбай олох. Үүнд :
 - а) Муруй ба координатын тэнхлэгүүдтэй параллел шулзуунаар хязгаарлагдсан дүрсийн талбай
 - б) Хоёр муруйгаар хязгаарлагдсан дүрсийн талбай

9.1 ДИФФЕРЕНЦИАЛЧЛАХЫН УРВУУ ҮЙЛДЭЛ ИНТЕГРАЛЧЛАХ ҮЙЛДЭЛ

Өгсөн функцийн уламжлалыг олох тухай өмнө нь үзсэн. Тэгвэл функцийн уламжлал нь мэдэгдэж байвал уг функцийг олох шаардлага амьдралд олонтоо тохиолддог.

Физикт хугацаанаас хамаарсан биеийн хөдөлгөөний хууль болох функцээс хугацаагаар авсан уламжлал нь уг биеийн тухайн агшин дахь хурдыг илэрхийлдэг. Хөдөлгөөний хурд өгснөөр хөдөлгөөний хуулийг сэргээх бодлого нь уламжлал олох бодлогын урвуу бодлого болон тавигдана.

Жишээ 1. Материал цэг шулуун замаар хугацааны t агшинд $u(t) = gt$ хурдтай хөдөлж байгаа бол түүний хөдөлгөөний хууль буюу хугацаанаас хамаарсан замын томьёог ол.

Бодолт. Ийм бодлогыг бодоход дифференциаллахын урвуу үйлдэл болох **интегралчлах** үйлдлийг хэрэглэдэг. Хөдөлгөөний хуулийг $S = S(t)$ гэж тэмдэглэвэл $S'(t) = u(t) = gt$ нөхцөлийг хангах шаардлагатай. Өөрөөр хэлбэл уламжлал нь gt функцтэй тэнцүү байх $S(t)$ функцийг олно гэсэн үг. Уламжлалын дүрэм ёсоор энэ функц $S(t) = \frac{gt^2}{2}$ болохыг шалгаж болно.

$$S'(t) = \left(\frac{gt^2}{2} \right)' = \frac{g}{2} \cdot 2t = gt$$

Бид бодлогыг бодож зөвхөн нэг шийд оллоо. Харин бүх шийдийг нь олоогүй.

Учир нь $S(t) = \frac{gt^2}{2} + 5$, $S(t) = \frac{gt^2}{2} + \sqrt{3}$, $S(t) = \frac{gt^2}{2} - 0.6$ гэх мэт шийд төгсгөл-

гүй олон олдоно. Иймд бүх шийдийг $S(t) = \frac{gt^2}{2} + C$ хэлбэртэй бичнэ. Энд C ямар нэг тогтмол тоо.

Хэрэв хугацааны $t = 0$ агшинд $S(0) = S_0$ тэнцүү гэвэл $S(t) = \frac{gt^2}{2} + C$

хөдөлгөөний хуулиас $S(0) = 0 + C = S_0$ буюу $C = S_0$ байна. Иймд $S(t) = \frac{gt^2}{2} + S_0$ болно.

Жишээ 2. Ямар функцээс уламжлал авбал $2x$ функц гарах вэ?

Бодолт. $\frac{dy}{dx} = 2x$ бол y нь x^2 -ийг агуулах ёстай. Учир нь уламжлал авахад зэрэг

нь нэгээр багасдаг. Иймд x^2 -ыг дифференциалчилбал $(x^2)' = 2x$ гарах тул

$\frac{dy}{dx} = 2x$ бол $y = x^2$ болж байна. Үүнээс тогтмол тоогоор ялгаатай төгсгөлгүй

олон функц байна. Тухайлбал: $y = x^2 + 2$, $y = x^2 - 2.5$ байх ба уламжлал нь мөн

$2x$ гарна. Иймд функцийг $y = x^2 + C$ хэлбэртэй бичнэ. Энд C ямар нэг тогтмол

тоо.

$$S'(t) = gt \text{ ба } \frac{dy}{dx} = 2x \text{ хэлбэрийн тэгшитгэлийг дифференциал тэгшитгэл гэнэ.}$$

$$S(t) = \frac{gt^2}{2} + C, \quad y = x^2 + C, \quad (\text{Энд } C \text{ ямар нэг тогтмол тоо}) \text{ эдгээрийг}$$

тэгшитгэлийн ерөнхий шийд гэнэ. Харин $S(t) = \frac{gt^2}{2} + 5$, $S(t) = \frac{gt^2}{2} + \sqrt{3}$,

$$S(t) = \frac{gt^2}{2} + S_0, \quad y = x^2 - 2.5 \text{ гэх мэт шийдийг тухайн шийд гэнэ.}$$

Тодорхойлолт. Хэрвээ D мужийн бүх x -ийн хувьд $F'(x) = f(x)$ тэнцэтгэл

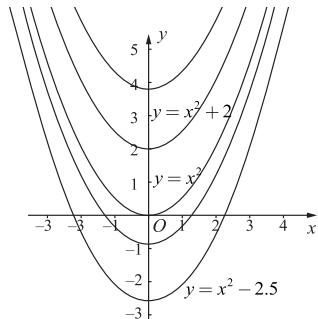
биелж байвал $F(x)$ функцийг $f(x)$ функцийн D муж дээрх эх функц гэнэ.

Жишээлбэл: $f(x) = 2x$ функцийн эх функц нь $F(x) = x^2 + 2$, $F(x) = x^2 - 2.5$,

$F(x) = x^2 + \sqrt{3}$, $F(x) = x^2 + C$ функц болно.

Чанар. Хэрэв D муж дээрх $f(x)$ функцийн эх функц $F(x)$, C тогтмол тоо бол $F(x) + C$ функц бас $f(x)$ функцийн эх функц болно.

Энд ямар нэг мужид тодорхойлогдсон функцийн эх функц нь бие биесээ зөвхөн тогтмол тоогоор ялгаатай байна. Иймд $f(x)$ функцийн дурын эх функцийн графикийг Оу тэнхлэгийн дагуу параллел зөөж бүх эх функцийн графикийг гаргаж болно.



Жишээ 3. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ функцийн $x \in]0, +\infty[$ завсар дээрх эх функц нь

$F(x) = 2\sqrt{x} + C$ болохыг үзүүл.

$$\text{Бодолт. } f(x) = F'(x) = \left(2\sqrt{x} + C\right)' = \left(2x^{\frac{1}{2}} + C\right)' = 2 \cdot \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} + C' = x^{-\frac{1}{2}} + 0 = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

Жишээ 4. Хэрэв $f(x) = 2x - 6$ функцийн эх функцийн график нь $(2, -2)$ цэгийг дайрч байвал эх функцийг ол.

Бодолт. $f(x) = 2x - 6$ функцийн эх функцийг ольё. Түүний уламжлал нь $2x - 6$ байх тул $F(x) = x^2 - 6x + C$ болно. Энэ функцийн график нь $(2, -2)$ цэгийг дайрна гэдгээс $F(2) = 2^2 - 6 \cdot 2 + C = -2$ болох ба эндээс C тогтмолыг олбол $C = 6$ гэж гарна. Иймд $F(x) = x^2 - 6x + 6$ болох ба энэ эх функцийн график нь $(2, -2)$ цэгийг дайрна.

Энэ бодолтоос эх функцийн тогтмол тоо нь тодорхой нэмэлт нөхцөлийг хангасан эх функц олох бодлогын шийд болох нь харагдаж байна.

Уламжлалын чанараас эх функцийг олох дараах чанарыг гаргаж болно.

Чанар 1. Хэрэв $f(x)$, $g(x)$ функцийн эх функц нь харгалзан $F(x)$, $G(x)$ бол $f(x) \pm g(x)$ функцийн эх функц нь $F(x) \pm G(x)$ байна.

Баталгаа. Эх функцийн тодорхойлолт ёсоор $F'(x) = f(x)$ ба $G'(x) = g(x)$ тул $(F(x) \pm G(x))' = F'(x) \pm G'(x) = f(x) \pm g(x)$ байна.

Чанар 2. Хэрэв $f(x)$ функцийн эх функц нь $F(x)$ ба k тогтмол тоо бол $kf(x)$ функцийн эх функц нь $kF(x)$ байна.

Баталгаа. Эх функцийн тодорхойлолт ёсоор $F'(x) = f(x)$ тул $(kF(x))' = kF'(x) = kf(x)$ байна.

Чанар 3. Хэрэв a, b тогтмол тоо ба $f(x)$ функцийн эх функц нь $F(x)$ бол $f(ax + b)$ функцийн эх функц нь $\frac{1}{a}F(ax + b)$ байна.

Баталгаа. $F'(x) = f(x)$ тул давхар функцийн уламжлалын дүрэм ёсоор

$$\left[\frac{1}{a}F(ax + b) \right]' = \frac{1}{a}f(ax + b) \cdot (ax + b)' = \frac{1}{a}f(ax + b) \cdot a = f(ax + b) \text{ болно.}$$

Функцийн эх функцийг олох үйлдлийг **интегралчлах** үйлдэл гэнэ.

Тодорхойлолт. Хэрэв D муж дээр тодорхойлогдсон $f(x)$ функцийн эх функц нь $F(x)$ бол түүний аливаа эх функц $F(x) + C$ -г $f(x)$ функцийн тодорхойгүй интеграл гээд $\int f(x)dx = F(x) + C$ гэж тэмдэглэнэ. ($\int f(x)dx$ -ийг “интеграл эф икс дэ икс” гэж уншдаг.)

$\int f(x)dx = F(x) + C$ бичлэг дэх “ \int ” тэмдгийг интегралын тэмдэг, $f(x)dx$ -ийг интегралын доорх илэрхийлэл, $f(x)$ -ийг интегралын доорх функц гэх ба dx нь тухайн интегралын хувьсагч нь x болохыг илтгэдэг.

\int тэмдэглээг математикт анх XVII зууны сүүлд Германы математикч Готфрид Лейбниц хэрэглэсэн бөгөөд энэ тэмдэглээгээ нь S үсгээс үүдэлтэй юм.

Харин dx тэмдгийн тухайд бид Δx маш бага үед $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ харьцааг $f(x)$ функцийн уламжлал гээд $\frac{df}{dx} = f'(x)$ гэж тэмдэглэдэг тухай үзсэн. Эндээс $df = f'(x)dx$ гэж бичиж болно. Иймд $\int \frac{df}{dx} dx = \int df = \int f'(x)dx = f(x) + C$ болно.

Жишээ 5. $\int (3x^2 - 4x + 5)dx$ интегралыг бод.

Бодолт. Энэ интегралыг бодно гэдэг нь $f(x) = 3x^2 - 4x + 5$ функцийн бүх эх функцийг олно гэсэн үг. Эх функцийн нэгдүгээр чанараар

$$\begin{aligned}\int (3x^2 - 4x + 5)dx &= \int 3x^2 dx - \int 4x dx + \int 5 dx = x^3 + C_1 - 2x^2 + C_2 + 5x + C_3 = \\ &= x^3 - 2x^2 + 5x + C,\end{aligned}$$

Энд $C_1 + C_2 + C_3 = C$ - тогтмол тоо.

1. Θгсөн муж дээрх $f(x)$ функцийн эх функц нь $F(x)$ болохыг шалга.

- | | |
|-------------------------------------|---|
| a. $F(x) = 2x^2 + x - 1,$ | $f(x) = 4x + 1, x$ -бүх бодит тоо |
| b. $F(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + 1,$ | $f(x) = x - 1, x$ -бүх бодит тоо |
| v. $F(x) = \sqrt{x} + 1,$ | $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, x$ -бүх эерэг бодит тоо |
| г. $F(x) = 3 - 2\sqrt{x},$ | $f(x) = -\frac{1}{\sqrt{x}}, x$ -бүх эерэг бодит тоо |
| d. $F(x) = \sqrt{2x - 3},$ | $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x - 3}}, x \in \left[\frac{3}{2}; +\infty\right]$ |
| e. $F(x) = \sqrt{2 - 3x},$ | $f(x) = -\frac{3}{2\sqrt{2 - 3x}}, x \in \left[-\infty; \frac{2}{3}\right]$ |

2. Хэрэв $F(x)$ эх функц нь байх $f(x)$ функцийг ол.

- | | |
|---|---|
| a. $F(x) = \frac{1}{5}x^5 - x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x + C$ | 6. $F(x) = \frac{4}{3}x^3 - 2x^2 + x + C$ |
| b. $F(x) = 2x - 3x^{-4} + C$ | г. $F(x) = \frac{8}{x^4} - 1$ |
| д. $F(x) = 3\sqrt{2x - 3} + 7$ | е. $F(x) = (4x + 1)^{\frac{3}{4}} + C$ |

3. Функцийн эх функцийг ол.

- | | | |
|--------------------------|----------------------------|--|
| a. $f(x) = 1 - 2x$ | 6. $f(x) = x^3 - 2x^2 + x$ | в. $f(x) = 2x + 3$ |
| г. $f(x) = 3x^2 + x - 1$ | д. $f(x) = 5 - 2x + 3x^2$ | е. $f(x) = x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}$ |

4. $f'(x) = -x^2 + 4x - 3$ байх $f(x)$ функцийг ол.
5. $y = y(x)$ функцийг ол.
- a. $\frac{dy}{dx} = -11$ б. $\frac{dy}{dx} = 3x$ в. $\frac{dy}{dx} = 15 - 2x$
- г. $\frac{dy}{dx} = 4x - 12$ д. $y' = 7 - x^2 - 2x$ е. $y' = 3x^2 + 2x - 1$
6. x цэг бүр дээрээ $3x^2 - 2$ наалттай байх бүх боломжит функцийг ол.
7. $f'(x) = 3$ байх $f(x)$ функцийг олж, графикийг нь тоймлон зур.

9.2 x^n ХЭЛБЭРИЙН ФУНКЦИЙН ИНТЕГРАЛ

$y = x^n$ функцийн уламжлал нь $\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}$ байдаг. Энэ томьёогоор

$y = x^{n+1}$ функцийн уламжлал нь $\frac{dy}{dx} = (n+1)x^n$ болно. Үүнтэй адил аар

$y = \frac{1}{n+1}x^{n+1}$ функцийн уламжлал нь $\frac{dy}{dx} = x^n$ болно. Урвуугаар x^n функцийн эх функц нь $\frac{1}{n+1}x^{n+1}$ болно. Өөрөөр хэлбэл бүх эх функцийг олболов

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C \quad (*) \text{ байна.}$$

Тухайн тохиолдолд $x' = 1$ гэдгээс $\int 1 dx = \int x^0 dx = \frac{x^{0+1}}{0+1} = x + C$ гэж гарна.

$n = -1$ үед $\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C$ интеграл тодорхойлогдох уу?

Дээрх интегралын баруун гар талд байрлах $\frac{1}{n+1} x^{n+1}$ илэрхийлэл $n = -1$ үед $\frac{1}{n+1}$ бутархайн хуваарь тэгтэй тэнцэх тул бодит тоо биш болно. Иймд $n \neq -1$ үед энэ томьёог хэрэглэнэ.

Өмнө үзсэн эх функцийг олох дүрмийг тодорхойгүй интеграл бодох дүрэм болгон томьёолж болно.

1. Нийлбэр (ялгавар) функцийн интеграл нь тэдгээр функцийн интегралуудын нийлбэр (ялгавар)-тэй тэнцүү.

$$\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$$

2. Тогтмол тоон үргиждэхүүнийг интегралын тэмдгийн өмнө гаргаж болно.

$$\int kf(x) dx = k \int f(x) dx, \quad k\text{-тогтмол тоо}$$

3. Хэрэв $f(x)$ функцийн эх функц нь $F(x)$ бол $\int f(ax+b) dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C$ байна. a, b тогтмол тоонууд.

Жишиг 1. $\int (x^2 - 4x + 3) dx$ интегралыг бод.

Бодолт. Эх функц олох дүрэм ёсоор $x^2 - 4x + 3$ функцийн эх функц нь $\frac{x^3}{3} - 4 \cdot \frac{x^2}{2} + 3x + C$ болно. Эсвэл нэгдүгээр дүрмээр

$$\int (x^2 - 4x + 3) dx = \int x^2 dx - \int 4x dx + \int 3 dx = \int x^2 dx - 4 \int x dx + 3 \int dx = \frac{x^{2+1}}{2+1} - \\ - 4 \cdot \frac{x^{1+1}}{1+1} + 3 \cdot x + C = \frac{x^3}{3} - 4 \cdot \frac{x^2}{2} + 3x + C \text{ болно.}$$

Хэрэв n бодит тоо бол $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$ зэрэгт функцийн интегралыг

$$\int \frac{1}{x^n} dx = \int x^{-n} dx = \frac{x^{1-n}}{1-n} + C, \text{ мөн } n, k \text{ бүхэл тоо бол } \sqrt[n]{x^k} = x^{\frac{k}{n}} \text{ энэ функцийн интегралыг } \int \sqrt[n]{x^k} dx = \int x^{\frac{k}{n}} dx = \frac{x^{\frac{k}{n}+1}}{\frac{k}{n}+1} + C \text{ гэж (**)} \text{ томьёогоор олно.}$$

Жишээ 2. Эх функцийг ол. а. $f(x) = \frac{1}{x^5}$ б. $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$

Бодолт. а. $F(x) = \int \frac{1}{x^5} dx = \int x^{-5} dx = \frac{1}{-5+1} x^{-5+1} + C = -\frac{1}{4} x^{-4} + C = -\frac{1}{4x^4} + C$

б. $F(x) = \int \sqrt[3]{x^2} dx = \int x^{\frac{2}{3}} dx = \frac{1}{\frac{2}{3}+1} x^{\frac{2}{3}+1} + C = \frac{3}{5} x^{\frac{5}{3}} + C$

Жишээ 3. Уламжлал нь $\frac{dy}{dx} = 3x^2 + 4x + 3$ байх $y = y(x)$ функц өгөв.

а. $y = y(x)$ функцийг ол.

б. график нь $(1, 10)$ цэгийг дайрах $y = y(x)$ функцийг ол.

Бодолт. а. Уламжлалын урвуу үйлдэл болох интегралыг нь бодно.

$$y = 3 \cdot \frac{x^3}{3} + 4 \cdot \frac{x^2}{2} + 3x + C = x^3 + 2x^2 + 3x + C, (\text{Энд } C \text{ нь тогтмол тоо})$$

б. $(1, 10)$ цэгийн координатыг $y = y(x)$ функцэд орлуулж C тогтмол тоог олно.

$$10 = 1^3 + 2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + C, C = 4. \text{ Иймд } y = x^3 + 2x^2 + 3x + 4 \text{ гэж гарна.}$$

8. Функцийн эх функцийг ол.

а. $f(x) = 2$

б. $f(x) = 4x^3$

в. $f(x) = 10x^{-3}$

г. $f(x) = x^{10}$

д. $f(x) = \frac{5}{x^3}$

е. $f(x) = 3\sqrt{x^3}$

ё. $f(x) = \sqrt[5]{4x^3}$

ж. $f(x) = \frac{1}{4}$

з. $f(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{1}{3}}$

и. $f(x) = 3\sqrt[3]{x}$

й. $f(x) = 5\sqrt[4]{x^3}$

к. $f(x) = \frac{3}{\sqrt[3]{x^2}}$

9. $y = f(x)$ функцийг ол.

- | | | |
|--|--------------------------------|---|
| a. $f'(x) = 4x^3$ | b. $f'(x) = 3x^2 - 4x^5$ | c. $f'(x) = 9x^8 + 7x^6 + 1$ |
| г. $f'(x) = -10x^9 + 8x^7 - 2x$ | д. $f'(x) = 2x - 4x^3 + 7$ | е. $f'(x) = 7x^6 - 6x^5 + 5x^4$ |
| ё. $f'(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{4}$ | ж. $f'(x) = 6x^{-4} - 4x^{-3}$ | з. $f'(x) = 3x^4 - 8x^{-\frac{4}{3}} + 2$ |

10. $y = y(x)$ функцийг ол.

- | | | |
|---|---|---|
| a. $\frac{dy}{dx} = x^3 + x^2 + 2$ | b. $\frac{dy}{dx} = 4x^2 + x - 5$ | c. $\frac{dy}{dx} = \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{2}$ |
| г. $\frac{dy}{dx} = x^3 + x^2 + x + 1$ | д. $\frac{dy}{dx} = 2\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x}$ | е. $\frac{dy}{dx} = \frac{4}{\sqrt[3]{x}}$ |
| ё. $\frac{dy}{dx} = \frac{x+6}{\sqrt{x}}$ | | |

11. Интегралыг бод.

- | | | |
|---|--|--|
| a. $\int (5 - 2x) dx$ | b. $\int (3x^2 + 2x + 1) dx$ | c. $\int (6x^2 + 4x) dx$ |
| г. $\int (2x - 3x^{-4}) dx$ | д. $\int \left(\frac{1}{x^4} - 1 \right) dx$ | е. $\int (3x^{-2} + 2x) dx$ |
| ё. $\int \left(\sqrt{x} - \frac{1}{2} \right) dx$ | ж. $\int \left(2x^4 - \frac{4}{x^2} \right) dx$ | з. $\int \left(12x^{\frac{1}{2}} - x^5 \right) dx$ |
| и. $\int \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx$ | й. $\int \left(\frac{x^3 - 2x^2 + x}{x} \right) dx$ | к. $\int \left(\frac{x^2 + 3x + 4}{x^4} \right) dx$ |
| л. $\int 5x^2 \sqrt[3]{x} dx$ | м. $\int \frac{(x-3)^2}{\sqrt{x}} dx$ | н. $\int \frac{(\sqrt{x}-4)^2}{\sqrt{x}} dx$ |

12. $y = y(x)$ функцийг ол.

- | | | |
|---|--|---|
| a. $\frac{dy}{dx} = 3x(x-2)$ | b. $\frac{dy}{dx} = (2x+3)(x-2)$ | c. $\frac{dy}{dx} = (\sqrt{x}-4)^2$ |
| г. $\frac{dy}{dx} = \frac{5}{x^2} - \frac{1}{3}\sqrt[3]{x^2}$ | д. $\frac{dy}{dx} = \frac{x^3 + x^2 + x}{x}$ | е. $\frac{dy}{dx} = \frac{(2x-1)^2}{2\sqrt{x}}$ |

13. Хэрэв $f'(x) = 2x - 1$, $f(3) = 35$ бол $f(0)$ утгыг ол.

9.3 $(ax+b)^n$ ХЭЛБЭРИЙН ФУНКЦИЙН ИНТЕГРАЛ ($n \neq -1$ рационал тоо)

$y = (ax+b)^{n+1}$ функцийн уламжлал нь $\frac{d(ax+b)^{n+1}}{dx} = a(n+1)(ax+b)^n$ болно.

Урвуугаар, $a(n+1)(ax+b)^n$ функцийн эх функц нь $(ax+b)^{n+1}$ тэй тэнцүү байна. Иймд бүх эх функцийг олбол

$\int a(n+1)(ax+b)^n dx = (ax+b)^{n+1} + C$ болно. Энд $a(n+1)$ нь тогтмол тоо учир интегралын тэмдгийн өмнө гарах ба тэнцэтгэлийн хоёр талыг энэ тоонд хуваавал

$(ax+b)^n$ функцийн эх функц олдоно. Иймд $(ax+b)^n$ функцийн интеграл

$$\int (ax+b)^n dx = \frac{1}{a(n+1)} (ax+b)^{n+1} + C, \quad (***)$$

(Энд $a, b, n \neq -1, C$ нь тогтмол тоо)

гэж гарна.

Жишээ 1. $\int (3x-4)^4 dx$ интегралыг бод.

$$\text{Бодолт. } \int (3x-4)^4 dx = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} (3x-4)^5 + C = \frac{1}{15} (3x-4)^5 + C$$

Жишээ 2. $\int \frac{3}{\sqrt{5-2x}} dx$ интегралыг бод.

$$\text{Бодолт. } \frac{3}{\sqrt{5-2x}} = 3(5-2x)^{-\frac{1}{2}} \text{ тул } (***)$$

тому ёо ёсоор

$$\int \frac{3}{\sqrt{5-2x}} dx = \int 3(5-2x)^{-\frac{1}{2}} dx = 3 \cdot \frac{1}{-2 \cdot \left(-\frac{1}{2} + 1\right)} (5-2x)^{-\frac{1}{2}+1} = -3(5-2x)^{\frac{1}{2}} + C,$$

(Энд C нь тогтмол тоо) болно.

Жишээ 3. $\int \sqrt{2x-9} dx$ интегралыг бод.

$$\text{Бодолт. } \int \sqrt{2x-9} dx = \int (2x-9)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{2 \left(\frac{1}{2} + 1\right)} (2x-9)^{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{1}{3} (2x-9)^{\frac{3}{2}} + C,$$

14. Интегралыг бод.

а. $\int (x-2)^2 dx$

б. $\int (2x+1)^3 dx$

в. $\int (6x+1)^5 dx$

г. $\int 4(2x-3)^6 dx$

д. $\int \left(\frac{6}{(2x-1)^4} \right) dx$

е. $\int 5(3+2x)^4 dx$

ë. $\int (\sqrt{4x-5}) dx$

ж. $\int (2\sqrt{1-8x}) dx$

з. $\int \left(\frac{-4}{\sqrt{1-8x}} \right) dx$

и. $\int \left(\frac{3}{\sqrt{2x-1}} \right) dx$

й. $\int \left(\frac{2x^2+x}{x} \right)^5 dx$

к. $\int (4\sqrt[3]{1-3x}) dx$

15. Функцийн интегралыг ол.

а. $\sqrt{5+2x}$

б. $(4x-1)^3$

в. $\frac{1}{(3-2x)^2}$

г. $\left(-\frac{1}{2}x + 1 \right)^2$

д. $(5x-2)^{-3}$

е. $\frac{1}{\sqrt{2x+1}}$

ë. $\left(\frac{1}{2}x - 2 \right)^{\frac{2}{3}}$

ж. $\frac{12}{\sqrt[4]{2-6x}}$

16. $y = 25 - (2x-1)^2$ функцийн эх функцийг ол.

17. $\int (2x+4) dx = 5$ нөхцөлийг хангах x -ийн утгыг $C = 0$ үед ол.

9.4 ИНТЕГРАЛЫН ЧАНАРУУД

Бид өмнөх сэдэвт тодорхойгүй интегралын чанаруудыг үзсэн.

Тодорхойгүй интегралын чанар.

$$1. \int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

$$2. \int (f(x) - g(x)) dx = \int f(x) dx - \int g(x) dx$$

$$3. k \text{ тогтмол тоо бол } \int kf(x) dx = k \int f(x) dx.$$

Интегралын тэмдгийн өмнө гаргаж болно.” гэж хэлж болно.

1 дүгээр чанарын баталгаа. $\int f(x) dx = F(x) + C$ ба $\int g(x) dx = G(x) + C$ гэж

тэмдэглээ. Энд C нь бүх бодит тоог төлөөлнө. Уламжлалын чанар ёсоор

$$\left(\int f(x) dx + \int g(x) dx \right)' = \left(\int f(x) dx \right)' + \left(\int g(x) dx \right)' = (F(x) + C)' + (G(x) + C)' =$$

$$= f(x) + g(x) \text{ тул } \int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx \text{ болох нь батлагдав.}$$

3 дугаар чанарын баталгаа. $\int f(x) dx = F(x) + C$ гэе.

$$\left(k \int f(x) dx \right)' = k \left(\int f(x) dx \right)' = k(F(x) + C)' = kf(x) \text{ болж}$$

$\int kf(x) dx = k \int f(x) dx$ болох нь батлагдав. Хоёрдугаар чанарыг бие дааж батлаарай. Эдгээр чанаруудыг хоёроос олон нэмэгдэхүүний хувьд хэрэглэж болно.

Жишээ 1.

$$\int (5x^4 + 3x^5 - 7x^6) dx = \int 5x^4 dx + \int 3x^5 dx - \int 7x^6 dx = 5 \int x^4 dx + 3 \int x^5 dx - 7 \int x^6 dx =$$

$$= 5 \cdot \frac{1}{5} x^5 + 3 \cdot \frac{1}{6} x^6 - 7 \cdot \frac{1}{7} x^7 + C = x^5 + \frac{1}{2} x^6 - x^7 + C.$$

$$\text{Жишээ 2. } \int \left(3\sqrt{x} - \frac{2}{x^2} \right) dx = \int 3\sqrt{x} dx - \int \frac{2}{x^2} dx = \frac{3}{2\sqrt{x}} + \frac{2}{x} + C.$$

18. Тодорхойгүй интегралыг бод

a. $\int \frac{2x - 3\sqrt{x} + 5x^2}{x} dx$ б. $\int (3x^2 - x^3 + 6x^5) dx$ в. $\int \left(\frac{2}{3}x + x^{-2} + 2x^{-3} \right) dx$

г. $\int \left(\frac{1}{x^2} + \frac{4}{x^3} - \frac{3}{x^4} \right) dx$ д. $\int \left(x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{3}} - 6 \right) dx$ е. $\int (2x - 3x^2 + 4x^3) dx$

19. Интегралын чанар ашиглан бод

a. $\int (x+11)^2 dx$ б. $\int (x^2 - 2)^2 dx$ в. $\int \left(\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3} \right)^2 dx$

г. $\int (x^2 + x)^2 dx$ д. $\int (x^2 + 1)^2 dx$ е. $\int (\sqrt{x} - \sqrt[3]{x})^2 dx$

20. $x^4 - 1 = (x-1)(x+1)(x^2 + 1)$ болохыг харуулж, тодорхойгүй интегралыг бод.

a. $\int \frac{x^4 - 1}{x+1} dx$ б. $\int \frac{x^4 - 1}{x-1} dx$ в. $\int \frac{x^4 - 1}{x^2 + 1} dx$

21. Гишүүнчлэн хувааж, интегралын доорх илэрхийллийг нийлбэрт шилжүүлж бод

a. $\int \frac{2x - 3\sqrt{x} + 5x^2}{x} dx$ б. $\int \frac{(x-1)(2x-1)}{\sqrt{x}} dx$ в. $\int \frac{(x-2)^2}{\sqrt{x}} dx$

22. Тодорхойгүй интегралыг бод

a. $\int \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} \right) dx$ б. $\int \left(\frac{1}{(7x-3)^2} - \frac{1}{(6x+1)^2} \right) dx$ в. $\int (x^{15} - x^{16} + x^{17}) dx$
 г. $\int \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + 2 \right) dx$ д. $\int \left(\frac{1}{\sqrt{2x-1}} + \frac{1}{\sqrt{2x+1}} \right) dx$ е. $\int \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - x + 1 \right) dx$

9.5 ӨГСӨН ЦЭГИЙГ ДАЙРСАН МУРУЙН ТЭГШИТГЭЛ БА ИНТЕГРАЛ АШИГЛАН БОДОХ БОДЛОГУУД

Функцийн тодорхойгүй интеграл нь C тогтмол тоогоор ялгагдах төгсгөлгүй олон функцийн байдийг бид мэднэ. Тэдгээр функцийн график нь Oy тэнхлэгийн дагуу параллел зөвлөөр бие биедээ шилжих төгсгөлгүй олон муруй байна. Харин эх функцийн график дээр орших тодорхой цэг өгсөн үед интегралын тогтмол C тодорхой тоо болох ба түүнийг хэрхэн олдгийг саная.

Жишээ 1. $\frac{dy}{dx} = 2x - 1$, график нь $(1, -3)$ цэгийг дайрах $y = y(x)$ функцийн томъёог гарга.

Бодолт. $y = \int (2x - 1) dx = x^2 - x + C$ болох ба өгсөн цэгийн координатыг энэ тэгшитгэлд орлуулбал $-3 = 1^2 - 1 + C = C$ буюу $C = -3$ гэж гарна. Иймд муруйн тэгшитгэл нь $y = x^2 - x - 3$ байна.

Жишээ 2. Хэрэв $\frac{df}{dx} = 6x^2 - 4x$ ба $f(2) = 5$ гэж мэдэгдэж байвал $f(x)$ -ийг ол.

Бодолт. $f(x) = \int (6x^2 - 4x) dx = 2x^3 - 2x^2 + C$ ба $f(2) = 5$ гэдгээс

$5 = 2 \cdot 2^3 - 2 \cdot 2^2 + C$ болно. Эндээс $5 = 8 + C$ буюу $C = -3$ болно. Иймд

$f(x) = 2x^3 - 2x^2 - 3$ байна.

Жишээ 3. $\frac{df}{dx} = 2x + a$ байх $f(x)$ функцийн график $(1, 1)$ ба $(2, 3)$ цэгийг дайрна. $f(x)$ -ийн томъёог ол.

Бодолт. $f(x) = \int (2x + a) dx = x^2 + ax + C$ болох ба графикийн дайрах цэгийн координатыг орлуулбал $\begin{cases} 1 + a + C = 1 \\ 4 + 2a + C = 3 \end{cases}$ тэгшитгэлийн систем үүснэ. Эхний тэгшитгэлийг хувиргавал $C = -a$ болох ба үүнийг хоёрдугаар тэгшитгэлд орлуулбал $4 + 2a - a = 3$ тэгшитгэл үүснэ. Эндээс $a = -1$ гэж гарна. Иймд $C = 1$ юм. Иймд

$f(x)$ -ийн томьёо нь $f(x) = x^2 - x + 1$ байна.

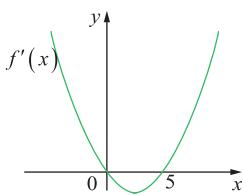
23. $y = f(x)$ функцийн график координатын эхийг дайрах ба $f'(x) = 6x - 3$ байв. $f(x)$ -ийн томьёог гарга.

24. $y = f(x)$ функцийн график $(2, 3)$ цэгийг дайрах ба $\frac{dy}{dx} = 3x^2 + 1$ нөхцөл биелж байв. $f(x)$ -ийн томьёог гарга.

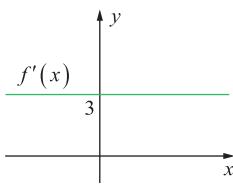
25. $f'(x) = 18x^2 - 4x - 2$ ба $f(2) = 0$ гэж өгчээ. $f(x)$ -ийн томьёог гарга.

26. Зураг дээр функцийн уламжлал $f'(x)$ -ийн графикийг харуулсан байна. $f(x)$ -ийн нэг боломжит графикийг тоймлон зур.

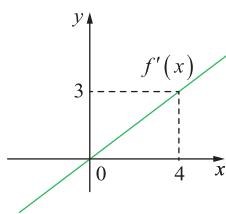
а.



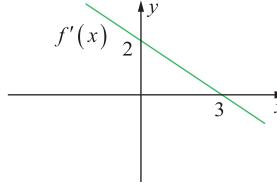
б.



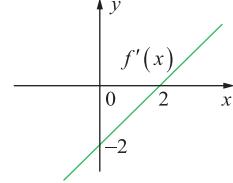
в.



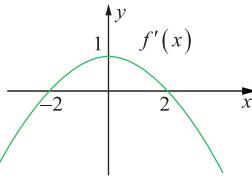
г.



д.



е.



Заавар: $f'(x) > 0$ байх завсарт функц өснө, $f'(x) < 0$ байх завсарт функц буурна гэдгийг ашигла.

27. $y = f(x)$ функцийн график $\left(\frac{1}{3}, 6\right)$ цэгийг дайрах ба $f'(x) = \frac{4}{x^2}$ нөхцөлийг хангана. Функцийн томьёог гарга.

Зам, хурд, хурдатгал ба хугацаа

Механикт зам (s), хурд (v), хурдатгал (a) ба хугацаа (t) нь $v = \frac{ds}{dt}$, $a = \frac{dv}{dt}$ гэсэн хамаарлтай байдгийг бид мэднэ. Өөрөөр хэлбэл, замаас хугацаагаар уламжлал авбал хурд, хурдаас хугацаагаар уламжлал авбал хурдатгал гардаг. Иймд хурд ба хурдатгальг хугацаагаар интегралчилбал харгалзан зам ба хурд гарна. $s = \int v dt$ ба $v = \int a dt$.

Жишээ 4. Уулчин ууланд авирч байна. Дээшлэх тусам зам хэцүү болж, ядарч хурд нь улам багасна. Авируч эхэлснээс t минутын дараа түүний хурд $\frac{3}{\sqrt{t}}$ м/мин байв. Тэр эхний 60 метр замыг ямар хугацаанд туулах вэ?

Бодолт. Уулчны t минутын дараа туулах замыг S гэж тэмдэглэе. Тэгвэл түүний авирах хурдыг $\frac{dS}{dt}$ уламжлалаар тодорхойлно. Нөхцөл ёсоор $v = \frac{dS}{dt} = 3t^{-\frac{1}{2}}$ юм.

$$t\text{-ээр интегралчилж } S\text{-ийг олболов } S = \int 3t^{-\frac{1}{2}} dt = 3 \left(\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} \right) + C = 6\sqrt{t} + C \text{ болно.}$$

Уулчин авирч эхлэх үед $t = 0$, $S = 0$ байх тул $0 = 3\sqrt{0} + C$, эндээс $C = 0$ болно. Иймд $S = 6\sqrt{t}$ болов. Энд $S = 60$ гэж өгсөн тул $60 = 6\sqrt{t}$ буюу $\sqrt{t} = 10$ болно. Эндээс $t = 100$ мин гэж гарна. Өөрөөр хэлбэл уулчин 60 метр замыг 1 цаг 40 мин туулах ажээ.

- 28.** Модны өндөр нь түүнийг суулгаснаас хойш t жилийн дараа жилд $\frac{30}{\sqrt[3]{t}}$ см

хурдтайгаар нэмэгдэж байв. Мод анх ($t = 0$ үед) 5 см өндөр байсан.

а. 4 жилийн дараа мод ямар өндөртэй болох вэ?

б. Хэдэн жилийн дараа мод 4.1 метр өндөр болох вэ?

- 29.** 72 км/ц хурдтай явж байсан машины жолооч 50 м зайд байгаа зам дээрх саадыг хараад хурдаа огцом хасав. Хэрэв машины хурд -10 м/с^2 хурдатгалтай багассан бол

а. Машины анхны хурдыг м/с-ээр илэрхийл

б. Хурдаа хасаж эхэлснээс хэдэн секундийн дараа машин зогсох вэ?

в. Машинаа саадад хүргэлгүйгээр зогсоож чадах уу? Заавар. Машин зогсох хүртлээ туулах замыг ол.

- 30.** Зурагт $y = f(x)$ муруйн $x > 0$ хэсгийг дүрсэлжээ.

Муруй дээрх A нь минимум цэг. Хэрэв $\frac{dy}{dx} = 2x - \frac{2}{x^3}$ гэж

өгсөн ба муруй $\left(4, \frac{189}{16}\right)$ цэгийг дайрдаг бол

а. A цэгийн абсциссыг ол.

б. $f(x)$ -ийг ол.

- 31.** Галт тэрэг шулуун замаар 30 км/ц хурдтай явж байв. Машинч хурдаа галт тэрэгний хурдатгал t секундийн дараа $k\sqrt{16-t}$ м/с² байхаар удаашруулав. Галт тэрэг 15 секундийн дараа зогжээ. k -г олж, галт тэрэг зогсох хүртлээ туулах замыг тооцоол.

- 32.** Кранаар ачааг эгц дээш нь өргөж байв. Ачаа эхлээд газар дээр байсан бөгөөд t секундийн дараа v м/с хурдтай дээш өргөгдөж байжээ. Хурд нь $0 \leq t \leq 5$

үед $v = \frac{4}{5}t(t-4)(t-5)$ хуулиар өөрчлөгдөж байсан бол

а. Ачааны хөдөлгөөний хурд – хугацааны графикийг байгуул

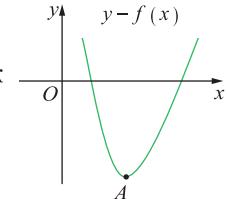
б. Хурдатгал хамгийн их байх агшиг зааж, тэрхүү хамгийн их хурдатгалыг ол.

в. Ачаа хамгийн өндөр цэгт гарсан байх агшин дахь хурдатгалыг ол.

г. $t = 4$ ба $t = 5$ байх үед ачаа газраас ямар өндөрт байх вэ?

д. $0 \leq t \leq 5$ үед ачааны өндрийг харуулсан графикийг тоймлон зур.

е. Ачааны туулах нийт замыг ол.



9.6 ТОДОРХОЙ ИНТЕГРАЛ

$y = f(x)$ муруй, Oy ба Ox тэнхлэг, Ox тэнхлэгийн дурын цэгийг дайрсан Oy тэнхлэгтэй параллел шулууны хооронд хязгаарлагдсан дүрсийг муруй шугаман трапец гэнэ. (Зураг 1) Муруй шугаман трапецын талбайг S гэвэл S нь x -ээс хамаарсан $S = S(x)$ функц болно. Түүн дээр ΔS талбай нэмье. Зураг 2-оос харвал $\Delta S \approx \Delta x \cdot f(x)$ ба Δx маш бага болох үед хар өнгөөр будсан хэсгийн талбай тэг рүү дөхөх тул хэрэг-сэхгүй байж болно. Иймд $\frac{\Delta S}{\Delta x} \approx f(x)$ буюу Δx -ийн утга тэг рүү ойртоход $\frac{dS}{dx} = f(x)$ болно. Иймд $f(x)$ нь $S(x)$ -ийн уламжлал байна.

Тэгвэл $S(x)$ нь $f(x)$ -ийн интеграл болно.

$f(x)$ -ийн нэг эх функцийг $F(x)$ гэвэл

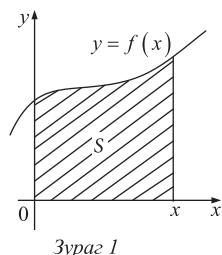
$$S(x) = \int f(x) dx = F(x) + C \text{ болох ба } x = 0 \text{ үед}$$

$$0 = F(0) + C \text{ тул } C = -F(0) \text{ буюу } S(x) = F(x) - F(0)$$

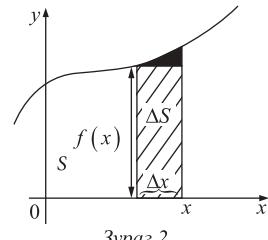
болно. Эндээс $0 < a < b$ байх бодит тоонуудын хувьд $x = a$, $x = b$, $y = 0$ шулуунуудын хооронд орших муруй шугаман

трапецын талбай нь $x = a$ үед $S(a) = F(a) - F(0)$, $x = b$

үед $S(b) = F(b) - F(0)$ байх тул $S = S(b) - S(a) = F(b) - F(a)$ гэж олдоно. Мөн $a < 0$ үед мөн $S = F(b) - F(a)$ томьёо биелнэ.



Зураг 1



Зураг 2

Тодорхойлолт. $y = f(x)$ нь $[a, b]$ завсарт эерэг утгатай, эх функц олдлог функц байг. $x = a$, $x = b$ шулуунууд, Ox тэнхлэг, $y = f(x)$ функцийн графикийн хооронд орших муруй шугаман трапецын талбайг $\int_a^b f(x) dx$ гэж тэмдэглэдэг. (“Интеграл a -аас b эх икс дэ икс” гэж уншина.)

Үүнийг **тодорхой интеграл** гэж нэрлэдэг.

$$\text{Иймд } \int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a) \quad (*) \text{ байна.}$$

Үүнийг **Ньютон-Лейбницийн** томьёо гэнэ. a ба b -г харгалзан интегралын доод ба дээд хил гэнэ. Энд $F(x)$ нь $f(x)$ -ийн нэг эх функц.

Санамж (*) томьёог $[a, b]$ завсарт $f(x) < 0$ байх функцийн хувьд хэрэглэвэл утга нь сөрөг тоо гарна.

Жишээ 1. Тодорхой интегралыг бод $\int_0^4 (2x+1) dx$. Интегралын утгыг дүрсийн талбай ашиглан тайлбарла.

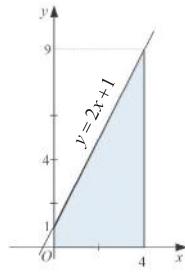
$$\text{Бодолт. } \int_0^4 (2x+1) dx = \left(x^2 + x \right) \Big|_0^4 = (4^2 + 4) - (0^2 + 0) = 20.$$

Энэ интегралын утга нь зураг дээрх $y = 2x + 1$ шулуун, Ox ба Oy тэнхлэг, $x = 0$ ба $x = 4$ шулуунаар зааглагдсан дүрсийн талбайтай тэнцүү.

Энэ дүрс нь 4 нэгж өндөртэй, 1 ба 9 нэгж сууриудтай тэгш өнцөгт трапеций байна. Түүний талбай нь трапецийн талбай олох томъёогоор $S = \frac{1+9}{2} \cdot 4 = 5 \cdot 4 = 20$ гэж гарна.

Жишээ 2.

$$\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} (x^3 - 2x) dx = \left(\frac{1}{4} x^4 - x^2 \right) \Big|_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} = \left(\frac{1}{4} (\sqrt{3})^4 - (\sqrt{3})^2 \right) - \left(\frac{1}{4} (\sqrt{2})^4 - (\sqrt{2})^2 \right) = \\ = \left(\frac{9}{4} - 3 \right) - \left(\frac{4}{4} - 2 \right) = -\frac{3}{4} + 1 = \frac{1}{4}.$$



Жишээ 3. $\int_{0.2}^{1.3} \sqrt{x} dx$ тодорхой интегралын утгыг тооны машин ашиглан, 0.001 нарийвчлалтай тоймлон ол.

Бодолт. $\int_{0.2}^{1.3} \sqrt{x} dx = \left(\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right) \Big|_{0.2}^{1.3} = \frac{2}{3} (1.3^{1.5} - 0.2^{1.5}) \approx \frac{2}{3} (1.482 - 0.089) \approx 0.929$

Жишээ 4. $\int_1^a \sqrt{x} dx = 42$ тэгшигтгэлийг a хувьсагчийн хувьд бод.

Бодолт. $\int_1^a \sqrt{x} dx = \left(\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right) \Big|_1^a = \frac{2}{3} \left(a^{\frac{3}{2}} - 1 \right) = 42$, эндээс $a^{\frac{3}{2}} = 64$ буюу $a = 64^{\frac{2}{3}} = 16$.

33. Тодорхой интегралыг бодож хариугаа геометр аргаар шалга

a. $\int_0^1 x dx$

б. $\int_1^2 (x-1) dx$

в. $\int_{-2}^2 (2-x) dx$

34. Тодорхой интегралыг бод

a. $\int_2^4 (x^3 - 2x) dx$

б. $\int_1^3 \frac{1}{x^2} dx$

в. $\int_1^2 (3x-2)^2 dx$

г. $\int_2^4 \sqrt{x^3} dx$

д. $\int_2^5 \left(\frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^2} \right) dx$

е. $\int_1^2 (x + \sqrt{x}) dx$

35. Тодорхой интегралыг бод

a. $\int_{-2}^1 (2x - 3x^2) dx$

б. $\int_{-2}^1 x(x-2) dx$

в. $\int_0^2 (x+1)(x-2) dx$

г. $\int_2^3 (3x^2 + 2x) dx$

д. $\int_{-1}^{-2} (x^2 - 1)^2 dx$

е. $\int_{-\frac{1}{2}}^1 \sqrt{2x+1} dx$

Тодорхой интегралын чанарууд

Тодорхой интегралын хувьд тодорхойгүй интегралтай адил дараах чанарууд биелнэ.

$$1. \int_a^b (f(x) \pm g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$$

$$2. \text{Хэрэв } k \text{ дурын бодит тоо бол } \int_a^b kf(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$$

Мөн Ньютоон-Лейбницийн томъёо ашиглан дараах чанаруудыг баталж болно.

$$3. \text{Хэрэв } a \leq b \leq c \text{ бол } \int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx$$

$$4. \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx \text{ (Интегралын доод ба дээд хилийн байрыг солиход интегралын тэмдэг эсрэгээр өөрчлөгднө)}$$

Жишээ 5. $\int_{0.25}^4 \left(x^2 - \frac{3}{x^4} - \frac{5}{x\sqrt{x}} \right) dx$ интегралыг бод.

$$\text{Бодолт. (1), (2) чанараар } \int_{0.25}^4 \left(x^2 - \frac{3}{x^4} - \frac{5}{x\sqrt{x}} \right) dx = \int_{0.25}^4 x^2 dx - 3 \int_{0.25}^4 x^{-4} dx - 5 \int_{0.25}^4 x^{-\frac{3}{2}} dx =$$

$$\left. \frac{x^3}{3} \right|_{0.25}^4 - 3 \cdot \left. \frac{x^{-3}}{-3} \right|_{0.25}^4 - 5 \cdot \left. \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} \right|_{0.25}^4 = \frac{4^3}{3} - \frac{1}{3 \cdot 4^3} + 4^{-3} - \left(\frac{1}{4} \right)^{-3} + 10 \cdot 4^{-\frac{1}{2}} - 10 \cdot \left(\frac{1}{4} \right)^{-\frac{1}{2}} =$$

$$-\frac{2}{3} \cdot 4^3 + \frac{2}{3 \cdot 4^3} - 15 = -22 \frac{49}{64}.$$

Жишээ 6. $\int_{-2}^1 x dx - \int_1^2 (-x) dx$ ялгаврыг тооцоол.

Бодолт. (2) ба (3) чанарыг дараалан хэрэглэвэл

$$\int_{-2}^1 x dx - \int_1^2 (-x) dx = \int_{-2}^1 x dx + \int_1^2 x dx = \int_{-2}^2 x dx = \left. \frac{1}{2} x^2 \right|_{-2}^2 = \frac{1}{2} (2^2 - (-2)^2) = \frac{1}{2} \cdot 0 = 0$$

Жишээ 7. $\int_1^3 |x-2| dx$ тодорхой интегралыг бод.

Бодолт. Модулын тодорхойлолт ёсоор

Хэрэв $2 \leq x \leq 3$ бол $|x-2| = x-2$, хэрэв $1 < x < 2$ бол $|x-2| = 2-x$ байна.

$$\text{Иймд } \int_1^3 |x-2| dx = \int_1^2 (2-x) dx + \int_2^3 (x-2) dx = \left(2x - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_1^2 + \left(\frac{x^2}{2} - 2x \right) \Big|_2^3 =$$

$$= (4 - 2) - \left(2 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{9}{2} - 6\right) - (2 - 4) = 2 - 1.5 - 1.5 + 2 = 1.$$

36. $y = |x - 2|$ функцийн графикийг $1 \leq x \leq 3$ завсарт зурж Жишээ 7-ийн хариуг геометр аргаар гарга.

37. Тодорхой интегралыг бод.

a. $\int_{-2}^1 x^3 dx + \int_1^3 x^3 dx$

б. $\int_{-1}^2 (3x^2 + 2x + 1) dx + \int_2^4 (3x^2 + 2x + 1) dx$

в. $\int_{-1}^1 |x| dx$

г. $\int_0^4 |x^2 - 7x + 10| dx$

д. $\int_1^3 |x^2 - 4| dx$

38. Тэгшитгэлийг бод

a. $\int_{\frac{1}{4}}^x \frac{dt}{t^2} = x$

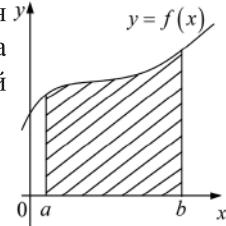
б. $\int_0^x \frac{1}{\sqrt{2t+4}} dt = 2$

в. $\int_1^4 \frac{x \cdot \sqrt[5]{x^2}}{\sqrt[10]{x^9}} dx = x^2 - 1$

9.7 ТОДОРХОЙ ИНТЕГРАЛ БА ДҮРСИЙН ТАЛБАЙ

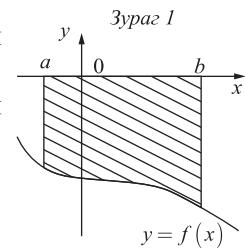
1. Бид $y = f(x)$ нь $[a, b]$ хэрчим дээр интеграл нь оршин y байдаг, эерэг утгатай функц бол энэ функцийн график ба $x = a, x = b$ шулуун, Ox тэнхлэгээр зааглагдсан муруй шугаман трапецын талбайг (Зураг 1)

$$S = \int_a^b f(x) dx \quad (1) \text{ томъёогоор олдгийг өмнөх сэдэвт судалсан.}$$

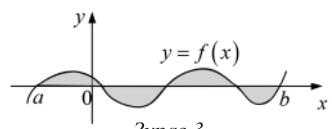


2. Хэрэв $y = f(x)$ функц $[a, b]$ хэрчим дээр сөрөг утгатай бол энэ функцийн график ба $x = a, x = b$ шулуун, Ox тэнхлэгээр зааглагдсан муруй шугаман трапецын талбайг (Зураг 2)

$$S = - \int_a^b f(x) dx \quad (2) \text{ томъёогоор олдог.}$$



3. Хэрэв $y = f(x)$ функцийн график $[a, b]$ хэрчим дээр Ox тэнхлэгийг хэд хэдэн удаа огтолсон буюу эерэг сөрөг утгыг энэ хэрчим дээр хэд хэдэн удаа авч байвал энэ функцийн график ба $x = a, x = b$ шулуун, Ox тэнхлэгээр зааглагдсан дүрсийн талбайг олохдоо, $f(x)$ функцийн утга эерэг байх завсар дээр (1) томъёог, сөрөг байх завсар дээр (2) томъёог ашиглан бодож, үр дүнг нэмнэ. (Зураг 3)



Жишээ 7. $y = x^2 - 4$ функцийн график, Ox ба Oy тэнхлэг, $x = 4$ шулуунаар хязгаарлагдсан дүрсийн талбайг ол. (Зураг 4)

Бодолт. Зургаас харвал олох дүрсийн талбай хоёр хэсгээс тогтох байна. Эхний

$[0, 2]$ завсарт функц сөрөг утгатай тул энэ хэсгийн талбай нь

$$S_1 = - \int_0^2 (x^2 - 4) dx = - \left(\frac{x^3}{3} - 4x \right) \Big|_0^2 = \frac{16}{3}.$$

Хоёр дахь завсарт функц эерэг утгатай байна. Иймд талбай нь

$$S_2 = \int_2^4 (x^2 - 4) dx = \left(\frac{x^3}{3} - 4x \right) \Big|_2^4 = \frac{32}{3}.$$

Иймд нийт талбай $S = S_1 + S_2 = \frac{16}{3} + \frac{32}{3} = \frac{48}{3} = 16$ гэж гарна.

4. $[a, b]$ завсарт $f(x) \geq g(x)$ байх интеграл нь оршин байдаг

$$y = f(x)$$
 ба

$y = g(x)$ функцийн график ба $x = a, x = b$ шулуунаар хязгаарлагдсан дүрсийн талбайг $S = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$ (3) томьёогоор олно.

Баталгаа. Хэрвээ $y = f(x)$, $y = g(x)$ хоёр функц хоёулаа эерэг утгатай бол (Зураг 5а) хоёр графикийн хоорондох талбай нь харгалзах муруй шугаман трапецийн талбайн ялгавартай тэнцүү тул тодорхой интегралын нэгдүгээр чанараар

$$S = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx \text{ болно.}$$

Хэрэв хоёр функцийн ядаж нэг нь сөрөг утгатай байвал (Зураг 5б) график тус бүрийг $k > 0$ нэгжээр Oy тэнхлэгийн дагуу дээш нь параллел зөөж $f(x) + k \geq g(x) + k > 0$ байх $y = f(x) + k$ ба $y = g(x) + k$ функцуудийн график, $x = a, x = b$ шулуунуудын хооронд хязгаарлагдсан дүрсийн талбайг олбол тэр нь бидний олох талбайтай тэнцүү байх нь ойлгомжтой. Иймд

$$S = \int_a^b ((f(x) + k) - (g(x) + k)) dx = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$$

байна.

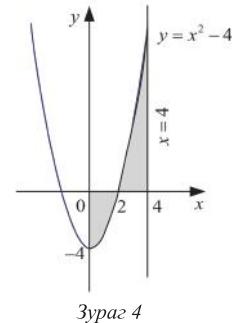
Жишээ 9. $y = (x+1)^2$ ба $y = 1-x$ функцийн графикаар хязгаарлагдсан дүрсийн талбайг ол.

Бодолт. Функцийн графикийн огтлолцлын цэгийн абсциссыг ольё.

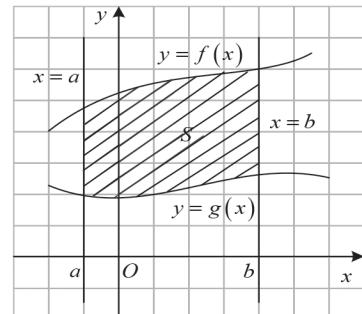
$$(x+1)^2 = 1-x \text{ эндээс } x^2 + 3x = 0 \text{ буюу}$$

$x = 0, x = -3$ болно. Дүрсийн талбайг (3)

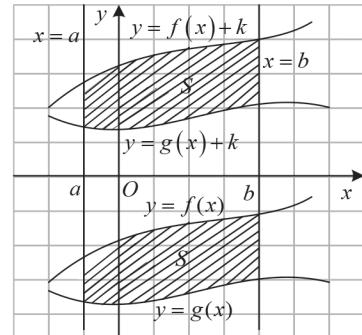
$$\text{тому ёогоор олбол } S = \int_{-3}^0 (1-x - (x+1)^2) dx = \frac{9}{2} \text{ гэж гарна.}$$



Зураг 4

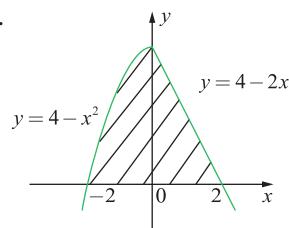
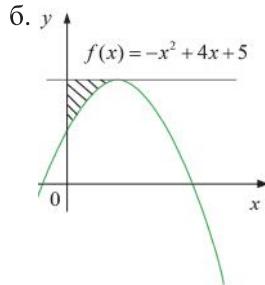
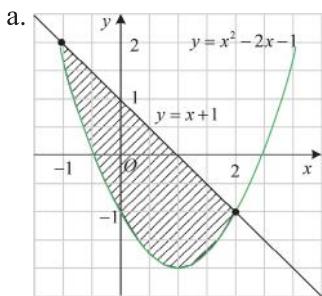


Зураг 5а.



Зураг 5б.

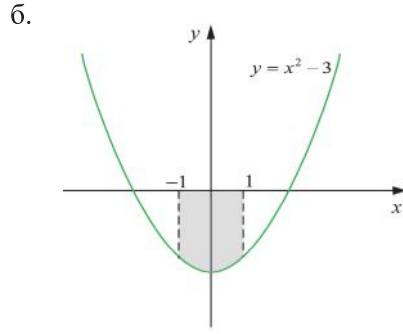
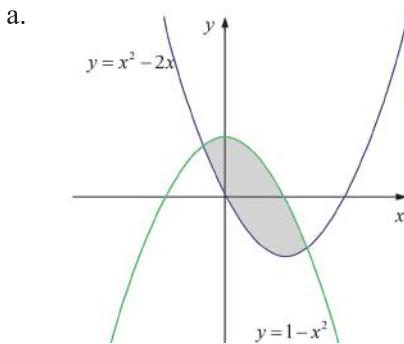
39. Зураг дээрх зураасласан дүрсийн талбайг ол.



40. $y = x^2$, $x = 2$, $x = 4$, $y = 0$ шугамаар хязгаарлагдсан дүрсийн талбайг ол.

41. $y = 1 - 2x$ ба $y = x^2 + 3x + 5$ функцийн графикаар хязгаарлагдсан дүрсийн талбайг ол.

42. Будсан дүрсийн талбайг ол.



43. $y = x^2$ ба $y = mx$ функцийн графикаар хязгаарлагдсан дүрсийн талбай $10\frac{2}{3}$ -той тэнцүү бол m -ийн утгыг ол.

44. Дараах функцийн графикаар хязгаарлагдсан дүрсийн талбайг ол.

- | | |
|--------------------------------------|--|
| а. $y = x^2 - x + 1$ ба $y = 2x - 1$ | б. $y = x^2 - 6x + 3$ ба $y = -x^2 + 4x - 9$ |
| в. $y = 5 - x^2$ ба $y = 2 - 2x$ | г. $y = 4x - x^2$ ба $y = 0$ |
| д. $y = 2 - x^2$ ба $y = x$ | е. $y = x^2 - 5$ ба $y = 4$ |

45. $y = 3x^2 - 15x + 12$ парабол, Ox тэнхлэгээр хязгаарлагдсан дүрсийн талбайг ол.

46. $y = x^2 + 3x + 4$, $y = -2x^2 + 15x - 5$ хоёр параболаар хязгаарлагдсан дүрсийн талбайг ол.

47. $y = 2x^2$ функцийн график ба графикийн $a = -1$, $b = 3$ абсцисстай цэгүүдэд татсан шүргэгчээр хязгаарлагдсан дүрсийн талбайг ол.

48. а. $y = x(x-1)(x-2)$ функцийн графикийг тоймлон зур.
б. Энэ функцийн $x = 0$ -оос $x = 2$ -ийн хоорондох график ба Ox тэнхлэгээр хязгаарлагдсан дүрсийн талбайг ол.

- в. $\int_0^2 |x(x-1)(x-2)| dx$ тодорхой интегралын утгыг ол.

49. $y = x^3 - 4x^2 + 3x$ функцийн график ба абсцисс тэнхлэгээр хязгаарлагдсан дүрсийн талбайг ол.
50. $y = x^2 - 4$ ба $y = x + 2$ функцийн графикийг нэг координатын системд байгуулж, энэ графикаар хязгаарлагдсан талбайн цэвэр утгыг ол.
51. $y^2 = 4x$ парабол ба $y = 2x - 4$ шулуунаар хязгаарлагдсан дүрсийн талбайг ол.
52. а. $\int_a^b (x-a)(x-b)dx = -\frac{1}{6}(b-a)^3$ тэнцэтгэлийг батал.
Дээрх тэнцэтгэлийн ашиглан дараах тодорхой интегралыг бод.
- б. $\int_{-3}^1 (x+3)(x-1)dx$ в. $\int_{1-\sqrt{3}}^{1+\sqrt{3}} (x^2 - 2x - 2)dx$ г. $\int_2^3 (x^2 - 5x + 6)dx$
53. Дараах шугамаар хязгаарлагдсан дүрсийн талбайг ол.
а. $y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt{4-3x}$, $y = 0$ б. $y = x^2 + 2|x| - 8$, $y = 4 - x^2$
54. $y = kx$ шулуун k -ийн ямар утгад $y = 2x - x^2$, $y = 0$ шугамаар хязгаарлагдсан дүрсийг хэм чацуу хоёр хэсэгт хуваах вэ?

БҮЛГИЙН НЭМЭЛТ ДААЛГАВАР

1. Дараах өгсөн завсралтад дээрх $f(x)$ функцийн эх функц нь $F(x)$ болохыг шалга.
- а. $F(x) = \frac{3}{4}x^4 + \frac{4}{3}x^3 - 9x + 15$, $f(x) = 3x^3 + 4x^2 - 9$, $x \in R$.
 б. $F(x) = \frac{2}{5}x^5 - \frac{3}{2}x^2 - 7x - 11$, $f(x) = 2x^4 - 3x - 7$, $x \in R$
 в. $F(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{5}{3}x^3 + 4x + 8$, $f(x) = x^3 - 5x^2 + 4$, $x \in R$
 г. $F(x) = \frac{1}{x} + 3x - 11$, $f(x) = -\frac{1}{x^2} + 3$, $(x \neq 0)$
 д. $F(x) = \frac{3}{x^2} - 5x - \sqrt{7}$, $f(x) = -\frac{6}{x^3} - 5$, $(x \neq 0)$
 е. $F(x) = \sqrt{2-7x}$, $f(x) = -\frac{7}{2\sqrt{2-7x}}$, $x \in \left] -\infty, \frac{2}{7} \right[$
2. Дараах функцийн эх функцийг ол.
- а. $f(x) = 3x^3 + 4x^2 - 2x + 7$ б. $f(x) = 3x^4 - 2x^3 - 6x^2 + \frac{2}{3}x - 1$
 в. $f(x) = -\frac{6}{x^3} - 5$, $(x \neq 0)$ г. $f(x) = -\frac{1}{x^2} + 3$, $(x \neq 0)$
 д. $f(x) = -\frac{4}{\sqrt{2-3x}}$, $x \in \left] -\infty, \frac{2}{3} \right[$ е. $f(x) = -\frac{8}{\sqrt{3x-5}}$, $x \in \left] \frac{5}{3}, \infty \right[$
 ё. $f(x) = -x^{\frac{4}{5}} - \sqrt{x} - \frac{1}{x^2}$, $(x > 0)$ ж. $f(x) = \sqrt{3x} - x^{\frac{3}{4}} + \frac{5}{x^2}$, $(x > 0)$

3. Интегралыг бод.

а. $\int (6x + 7) dx$

б. $\int \left(6x^2 + \frac{2}{3}x - 1\right) dx$

в. $\int \left(\frac{6}{x^3} - 5\right) dx$

г. $\int \left(3 - \frac{1}{x^2}\right) dx$

д. $\int (2x + 5)(x - 4) dx$

е. $\int x(x + 2)(x - 2) dx$

ж. $\int (1 - 7x)^3 dx$

и. $\int \frac{1}{\sqrt{2-3x}} dx$

з. $\int \sqrt{10x+1} dx$

к. $\int \left(\sqrt{3x} - x^{\frac{3}{4}} + \frac{5}{x^2}\right) dx$

4. Тодорхойгүй интегралыг бод

а. $\int (5x^4 + 4x^3) dx$

б. $\int (2\sqrt{x} + 4\sqrt[3]{x}) dx$

в. $\int \frac{dx}{x^3}$

г. $\int \sqrt[4]{x^3} dx$

д. $\int \frac{x^2 - 3x}{x} dx$

е. $\int \frac{x - \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}{x} dx$

ж. $\int (3x - 5)^2 dx$

з. $\int (x - 2)^3 dx$

и. $\int (\sqrt{x} + 1)^2 dx$

5. Тодорхой интегралыг бод.

а. $\int_2^4 (5x - 4) dx$

б. $\int_{-3}^4 (6x^2 + 2x + 3) dx$

в. $\int_0^1 (2x + 1)(x + 3) dx$

г. $\int_1^5 (2x - 1)^3 dx$

д. $\int_1^2 \left(\frac{8}{x^3} + x^3\right) dx$

е. $\int_4^9 \left(\frac{2\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x}}\right) dx$

ж. $\int_1^5 \sqrt{2x - 1} dx$

з. $\int_1^3 \frac{1}{(x + 2)^2} dx$

и. $\int_{-2}^0 \frac{1}{\sqrt{2-3x}} dx$

6. Дараах шугамаар хязгаарлагдсан дүрсийн талбайг ол.

а. $y = x^2 + 3, x = 0, x = 2, y = 0$

б. $y = 2x + 2, y = x^2 - 1$

в. $y = x^2, y = 4 - x^2$

г. $y = x - 2, y = \sqrt{x}, y = 0$

д. $y = 2x^2 - 5x + 1, y = x - 3$

е. $y = |x - 3|, x = 2, x = 5, y = 0$

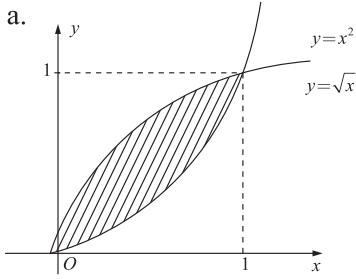
7. Өгсөн муруй ба абсцисс тэнхлэгээр хязгаарлагдсан дүрсийн талбайг ол.

а. $y = (x - 2)(x + 3)$

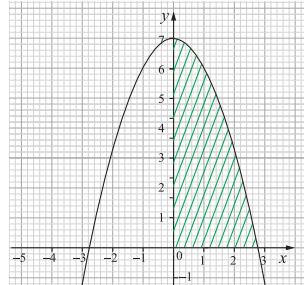
б. $y = 4x - x^2$

в. $y = (3x - 2)^2 - 16$

8. Зураг дээрх зураасласан дүрсийн талбайг ол.



б.



9. Муруйн тэгшитгэл нь $y = f(x)$ ба $\frac{df}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x+6}} + \frac{6}{x^2}$, $f(3) = 1$ гэж мэдэгдэж байвал муруйн тэгшитгэлийг ол.

10. $y = y(x)$ функцийг ол.

a. $\frac{dy}{dx} = \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}$

б. $\frac{dy}{dx} = x^4 - \frac{1}{x^2}$

в. $\frac{dy}{dx} = (x^2 - 1)(2x + 1)$

г. $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + 3x + 4}{x^4}$

д. $\frac{dy}{dx} = \frac{3}{\sqrt{2x-3}}$

е. $\frac{dy}{dx} = \frac{(x-1)^2}{\sqrt{x}}$

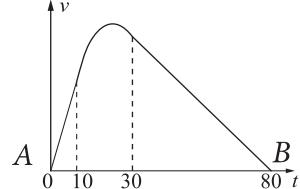
ё. $\frac{dy}{dx} = \left(-\frac{1}{3}x + 5\right)^3$

ж. $\frac{dy}{dx} = \left(\frac{5x^2 + 9x}{x}\right)^7$

з. $\frac{dy}{dx} = \frac{20}{(5x+1)^7}$

11. Биет A -аас B -д 80 секундийн хугацаанд очжээ. Зураг дээр биетийн A -аас гарснаас хойших хурд-хугацааны графикийг дүрсэлжээ. Энд хурд м/с, хугацаа секундээр хэмжигдэнэ. График нь $0 \leq t \leq 10$ ба $30 \leq t \leq 80$ үед шулуун, $10 \leq t \leq 30$ үед $v = -0.01t^2 + 0.5t - 1$

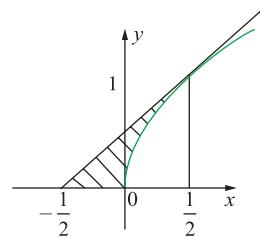
тэгшитгэлтэй муруйгаас тогтоно. Тэгвэл биетийн хамгийн их хурдыг ол. Мөн A -аас B хүртэлх зайд ол.



12. $y = \sqrt{2x}$ функцийн график, энэ муруйн $x_0 = 0.5$

абсцисстай цэгт татсан шүргэгч шулуун ба $y = 0$

шулуунаар хязгаарлагдсан дурсийн талбайг ол. (Зураг хар)



13. Тодорхой интегралыг бод

а. $\int_{-8}^8 \frac{dx}{\sqrt{5 + \frac{x}{2}}}$

б. $\int_3^{18} \sqrt[3]{2 + \frac{x}{3}} dx$

в. $\int_0^1 (\sqrt[3]{x} - 1)^2 dx$

14. $y = x^3 - 3x$ функцийн график ба түүний $x = -1$ абсцисстай цэгт татсан шүргэгч шулуунаар хязгаарлагдсан дурсийн талбайг ол.

15. Тодорхойгүй интегралыг бод

а. $\int \frac{x^8 - 1}{x^2 + 1} dx$

б. $\int \frac{x^6 - 1}{x^3 - 1} dx$

в. $\int \frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}{x - 1} dx$

16. $y^2 = 4x$ парабол ба $y = 2x - 4$ шулуунаар хязгаарлагдсан дурсийн талбайг ол.

17. $y = 2 - x^2$ ба $y = x^2$ мурийг нэг координатын системд байгуулж, тэдгээрээр хязгаарлагдсан дурсийн талбайг ол.

18. $y = \frac{x^2}{2} + 1$ парабол ба $y = x + 3$ шугамуудаар хязгаарлагдсан дурсийн талбайг ол.

19. $y = x^2 + 6x + 9$ мурий ба түүнд координатын эхийг дайруулан татсан шүргэгч шулуунуудаар хязгаарлагдсан дурсийн талбайг ол.

20. $y = (x + 2)^2$, $y = 0, x = 0$ шугамуудаар хязгаарлагдсан дурсийн талбайг ол.

Х БҮЛЭГ. ӨГӨГДЛИЙН ШИНЖИЛГЭЭ

Энэ бүлэг сэдвийг судалснаар дараах мэдлэг, чадварыг эзэмшинэ.

- *Иш-навчийн диаграмм, гистограмм, хуримтлагдсан давтамжийн график, хайрцган диаграммыг тайлбарлах, байгуулах*
- *Статистик өгөгдлүүдийг дүрслэх тохиromжстой хэлбэрийг сонгох, дүрслэлийн давуу болон дутагдалтай талуудыг тайлбарлах*
- *Дундааж (арифметик дундааж, медиан, моод) ба хазайлт (далайц, квартил, дисперс, стандарт хазайлт) гэсэн статистик үзүүлэлтүүдийг ойлгох, хэрэглэх. Тухайлбал: Хоёр түүврийг харьцуулахад ашиглах*
- *Хуримтлагдсан давтамжийн график ашиглан өгөгдлийн медиан, квартил, квартил хоорондын далайц тооцоолох*
- *Бүлэглэсэн өгөгдлийн арифметик дундааж, стандарт хазайлтыг тооцоолох*

10.1 ӨГӨГДЛИЙН ШИНЖИЛГЭЭ

Иш-навчийн диаграмм

Өгөгдлийг дүрслэх олон арга байдгийг бид өмнөх ангиудад судалсан. Жишээлбэл: Хүснэгт ба баганан диаграмм, дугуй диаграмм, гистограмм, цэгэн диаграмм гэх мэт олон төрлийн өгөгдлийг дүрсэлдэг график, диаграмм байдаг. Эдгээрийг ашиглан өгөгдлийг дүрслэхэд анхны өгөгдлийн зарим мэдээлэл устаж алга болох тохиолдол байдааг.

Харин өгөгдлийг иш-навчийн диаграммаар дүрслэх нь анхны өгөгдлийн мэдээллийг бүрэн гүйцэд хадгалдагаараа давуу юм.

Жишээ 1. 20 сургчийн англи хэлний шалгалтын дүн өгчээ.

84	17	38	45	53	76	54	75	32	41
66	65	55	54	51	44	39	19	54	72

Дээрх өгөгдлийг иш-навчийн диаграммаар дүрслэхдээ дараах хоёр зарчмыг баримтлана.

I. Иш-навчийн диаграммын бүх интервал тэнцүү байх ёстой. Энэ өгөгдөл интервалыг $10 - 19$, $20 - 29$, $30 - 39$, ..., $80 - 89$ байхаар сонгон авъя.

II. Иш дээр аравтын орны цифр, навчин дээр нэгжийн орны цифрийг тэмдэглэе. Иш-навчийн диаграмм нь өгөгдлийг интервалд бүлэглэх аргуудаас анхны өгөгдлийг хадгалж үлддэг онцлогтой.

Одоо энэ өгөгдлийг иш-навчийн диаграмм дээр дүрсэлбэл дараах хэлбэртэй болно.

Иш (Аравтын)	Навч (Нэгжийн)	Давтамж
1	7 9	(2)
2		(0)
3	8 2 9	(3)
4	5 1 4	(3)
5	3 4 5 4 1 4	(6)
6	6 5	(2)
7	6 5 2	(3)
8	4	(1)

Нийт: 20

Иш-навчийн диаграммын навч дээрх утгуудыг багаас их рүү эрэмбэлж бичнэ.

1	7 9	Санамж Иш-навчийн диаграмм ашиглан өгөгдлийг дүрсэлж байгаа үед иш болон навчийн холбоо хамаарлыг заавал түлхүүрээр тайлбарладаг.
2		
3	2 8 9	
4	1 4 5	
5	1 3 4 4 4 5	
6	5 6	
7	2 5 6	
8	4	

Түлхүүр: 1|7 нь 17. Энд иш нь аравтын орон, навч нь нэгжийн орныг зааж байна.

Иш-навчийн диаграммаас өгөгдлийн хамгийн бага, хамгийн их утга, далайц, медиан болон моодыг олоход хялбар байдал.

Энд Хамгийн бага утга нь = 17

Хамгийн их утга нь = 84

Далайц = 67

Моод = 54

Медиан = 53.5 болно.

Жишээ 2. Биеийн тамирын хичээл дээр 18 сурагчийн өндрийг (м) хэмжин тэмдэглэжээ.

1.78	1.87	1.89	1.72	1.68	1.96	1.76	1.90	1.73
1.78	1.61	1.78	1.77	1.85	1.65	1.89	1.95	1.83

a. Дээрх өгөгдлийг иш-навчийн диаграмм дээр дүрсэл.

b. Мод, медиан, далайцыг ол.

Бодолт.

a. Иш-навчийг хэрхэн сонгон авах нь өгөгдлөөсөө хамаардаггүй боловч ихэвчлэн навчийг өгөгдлийн сүүлийн орноор сонгон авах нь тохиромжтой байдаг.

Өндөр

16	1 5 8
17	2 3 6 7 8 8 8
18	3 5 7 9 9
19	0 5 6

Түлхүүр: 17|3 нь 173 см = 1.73 м гэсэн үг

b. Мод = 1.78 м Медиан = 1.78 м болно.

Далайц = хамгийн их утга – хамгийн бага утга = 1.96 – 1.61 = 0.35 м

Хоёр талтай иш-навчийн диаграмм ашигласнаар өгөгдлүүдийг хооронд нь харьцуулж чадна.

Жишээ 3. Сургуулийн А, Б хоёр бүлэг тус бүрээс 10 сургач сонгон авч минутын уншлага авсан үр дүнг үзүүлжээ.

А бүлэг	155	149	161	142	142	160	155	137	179	152
Б бүлэг	180	165	174	159	179	192	183	174	160	157

а. Өгөгдлийг хоёр талтай иш-навчийн диаграммаар дүрсэл.

б. Хоёр ангийн өгөгдлийг харьцуул.

Бодолт. а. А бүлэг Б бүлэг Түлхүүр:

				A	B
7	13				
2 2 9	14				
2 5 5	15	7	9	1 16 0	энэ нь
0 1	16	0	5		
9	17	4	4	9	А бүлгийн нэг сургач минутад 161 үг
	18	0	6		Б бүлгийн нэг сургач минутад 160 үг уншсан
	19	2			гэдгийг харуулна.

б.

	Хамгийн бага утга	Хамгийн их утга	Далайц	Моод	Медиан	Арифметик дундаж
A	137	179	42	155	153.5	153.2
B	157	192	35	174	174	173.2

Хоёр талтай иш-навчийн диаграммыг харьцуулсан хүснэгт байгуулан шинжлэхэд хялбар байдаг.

Энэ хүснэгтээс дараах дүгнэлтүүдийг хийж болно.

- Хамгийн бага утга нь А бүлэгт 137, Б бүлэгт 157 байна. Энэ нь А бүлгийн хамгийн удаан уншдаг хүүхдээс Б бүлгийн хамгийн удаан уншдаг хүүхэд илүү хурдан уншдагийг харж болно.
- Далайц нь А бүлгийн хувьд 42 Б бүлгийн хувьд 35 байна. Эндээс Б бүлгийн сургачид А бүлгийн сургачдаас илүү жигд хурдан уншдаг. А бүлгийн моод нь 155, медиан нь 153.5, арифметик дундаж нь 153.2 байна. Эдгээр үзүүлэлтүүд нь Б бүлгийн хамгийн бага үг уншдаг хүүхдээс бага гарсан байна.

Эцэст нь дүгнэхэд Б бүлгийн сургачид А бүлгийн сургачдаас илүү хурдан уншдаг гэсэн дүгнэлтийг хийж болно.

1. 30 эрэгтэй сургачийн жинг кг-аар илэрхийлэн үзүүлжээ.

74	52	67	68	71	76	86	81	73	68
64	75	71	61	63	57	67	57	59	72
79	64	70	74	77	79	65	68	76	83

а. Өгөгдлийг иш-навчийн диаграммаар дүрсэл.

б. Моод, медиан, далайцыг ол.

2. Хоёр сургуулийн багш нарын насны мэдээллийг өгчээ.

Сургууль A	51,	45,	33,	37,	37,	27,	28,	54,	54,	61,
34,	31,	39,	23,	53,	59,	40,	46,	48,	48,	39,
31,	48,	40,	53,	51,	46,	45,	45,	48,	39,	23,

Сургууль Б 59, 56, 40, 43, 46, 38, 29, 52, 54, 34, 23, 41, 42, 52, 50, 58, 60, 45, 45, 56, 59, 49, 44, 36, 38, 25, 56, 36, 42, 47, 50, 54, 59, 47, 58, 57.

Өгөгдлийг хоёр талтай иш-навчийн диаграммаар дүрсэлж, харьцуулсан дүгнэлтийг хий.

3. Дараах иш-навчийн диаграммаар нэг наст 15 ургамлын өндрийг дүрсэлжээ.

4	3	(1)
5	4 0 7 3 9	(5) Түлхүүр: $7 6$ гэдэг бол 7.6 см
6	3 1 2 4	(4) а. Диаграммыг ашиглан нэг наст ургамлын өндрийг
7	6 1 6	(3) өсөх эрэмбээр бич.
8		(0)
9	3 2	(2) б. Өгөгдлийн моод, медиан, арифметик дундгийг ол.

Гистограмм

Зарим тохиолдолд иш-навчийн диаграмм, баганан диаграмм болон бусад диаграммаар дүрслэхэд хүндрэлтэй их хэмжээний өгөгдлийг дүрслэх шаардлага гардаг. Энэ тохиолдолд өгөгдлийг бүлэглэн, гистограмм гэдэг диаграммаар дүрсэлж болдог.

Гистограмм нь аливаа тасралтгүй өгөгдлийн тархалтын хэлбэрийг харуулдаг. Тасралтгүй өгөгдлийн давтамжийн хүснэгтийг ашиглан гистограммыг байгуулах нь тохиромжтой байдаг.

Гистограмм нь баганан диаграммтай ижил төстэй боловч хоёр ялгаатай.

- Багана хооронд ямар ч зайлгүй байна.
- Баганын талбай нь давтамжийг илэрхийлнэ.

Тодорхойлолт. Баганын өндрийг давтамжийн нягт гэнэ.

Давтамжийн нягтыг олоходоо давтамжийн тоог, интервалын уртад хуваана.

Өөрөөр хэлбэл

$$\text{Давтамжийн нягт} = \frac{\text{Давтамж}}{\text{Интервалын урт}}$$

болно.

Баганын талбай = Давтамжийн нягт \times Интервалын урт = Давтамж

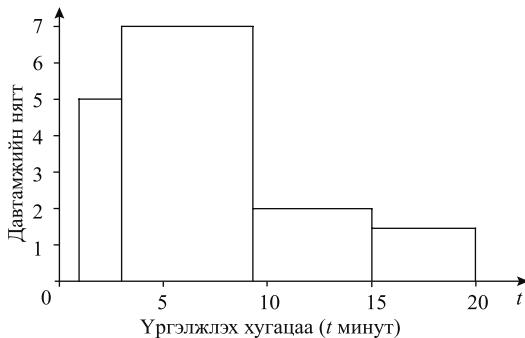
Жишээ 4. Дараах хүснэгтэд нэгэн байгууллагын ажилчдын нэг өдрийн турш утсаар ярьсан хугацааг бүртгэжээ.

Үргэлжлэх хугацаа (t минут)	$1 \leq t < 3$	$3 \leq t < 9$	$9 \leq t < 15$	$15 \leq t < 20$
Дуудлагын тоо	10	42	12	7

Өгөгдлийг гистограммаар дүрсэль. Интервал бүрийн дээд, доод хил, интервалын урт болон давтамжийн нягтыг тооцооль ѿ.

Үргэлжлэх хугацаа (t минут)	Хил		Интервалын урт	Давтамж	Давтамжийн нягт
	Дээд	Доод			
$1 \leq t < 3$	1	3	2	10	$10 : 2 = 5$
$3 \leq t < 9$	3	9	6	42	$42 : 6 = 7$
$9 \leq t < 15$	9	15	6	12	$12 : 6 = 2$
$15 \leq t < 20$	15	20	5	7	$7 : 5 = 1.4$

Гистограмм



Тодорхойлолт. Өгөгдлийн хамгийн их давтамжийн нягттай интервалыг моод бүлэг гэнэ.

Өөрөөр хэлбэл, гистограммын хамгийн өндөр баганыг агуулсан интервал болно. Дээрх жишээнд $3 \leq t < 9$ интервалын багана хамгийн өндөр нь тул энэ интервал моод бүлэг болно. Эндээс байгууллагын ажилчид ихэнхдээ 3-аас 9 минут утсаар ярьдаг гэсэн дүгнэлт хийж болно. Давтамжийн нягт ба давтамж нь ялгаатай хэмжигдэхүүнүүд юм. Уг интервал дээрх давтамжийн нягт нь 7, харин давтамж нь 42 байна.

Жишээ 5. Зоогийн газрын үйлчлүүлэгчид явсны дараа ширээн дээр үлдээсэн аягатай усны хэмжээг хэмжиж мл -ээр ойролцоолон тэмдэглэв.

Эзлэхүүн (мл)	0 – 19	20 – 39	40 – 89	90 – 189
Давтамж	10	8	12	20

- a. Интервал бүрийн дээд, доод хил болон давтамжийн нягтыг олж, гистограммыг байгуул.
б. Мод бүлгийг ол.

Бодолт. а. $0 – 19$, $20 – 39$, ... эдгээр интервалууд хоорондоо зйтай тул тасралтгүй интервал болгох шаардлагатай. Үүний тулд

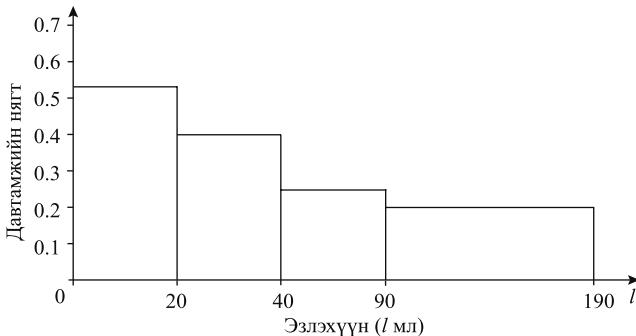
$0 – 19$ интервалыг $0 \text{ мл} \leq \text{эзлэхүүн} < 19.5 \text{ мл}$ гэж болгох ба

$20 – 39$ интервалыг $19.5 \text{ мл} \leq \text{эзлэхүүн} < 39.5 \text{ мл}$ болгох гэх мэтээр бүх интервалыг хоорондоо зйтгүй болгоно.

Дараах хүснэгтэд интервалын дээд, доод хил, интервалын урт болон давтамжийн нягтыг үзүүлэв.

Эзлэхүүн (мл)	Тасралтгүй интервал (I)	Хил		Интервалын урт	Давтамж	Давтамжийн нягт
		Дээд	Доод			
0 – 19	$0 \leq I < 19.5$	0	19.5	19.5	10	$10 : 19.5 = 0.51$
20 – 39	$19.5 \leq I < 39.5$	19.5	39.5	20	8	$8 : 20 = 0.4$
40 – 89	$39.5 \leq I < 89.5$	39.5	89.5	50	12	$12 : 50 = 0.24$
90 – 189	$89.5 \leq I < 189.5$	89.5	189.5	100	20	$20 : 100 = 0.2$

Гистограмм



б. Мood бүлэг нь 0 – 19 байна.

Санамж Давтамж нь тухайн интервалд харгалзах баганын талбайтай тэнцүү байна. Давтамжийн нягтыг олохдоо давтамжийг интервалын уртад хуваана.

4. 200 эрэгтэй сурагчийн жинг хэмжсэн өгөгдөл дараах хүснэгтэд өгөгджээ.

Жин (кг)	41 – 50	51 – 55	56 – 60	61 – 70	71 – 75
Давтамж	21	62	55	50	12

а. 41 – 50 интервалын дээд, доод хилийг ол.

б. 61 – 70 интервалын уртыг ол.

в. Өгөгдлийг гистограммаар дүрсэл.

5. Музейгээр үйлчлүүлсэн хүний тоог нэг сарын турш бүртгэсэн мэдээллийг хүснэгтэд өгчээ.

Нэг өдөрт үйлчлүүлсэн хүний тоо	30 – 69	70 – 149	150 – 199	200 – 299
Давтамж	1	14	10	6

а. 30 – 69 интервалын дээд, доод хилийг ол.

б. Өгөгдлийг гистограммаар дүрсэл.

6. Санамсаргүйгээр 50 алимын жинг граммаар хэмжиж бичжээ.

86	101	114	118	87	92	93	116	105	102
97	93	101	111	96	117	100	106	118	101
107	96	101	102	104	92	99	107	98	105
113	100	103	108	92	109	95	100	103	110
113	99	106	116	101	105	86	88	108	92

а. Бүх интервал нь тэнцүү 85 – 89, 90 – 94,... байхаар давтамжийн хүснэгтийг байгуул.

б. 90 – 94 интервалын доод хил хэд вэ?

в. Өгөгдлийг иш-навчийн диаграммаар дүрсэлж, moodыг ол.

г. Өгөгдлийг гистограммаар дүрсэлж, mood бүлгийг ол.

Хуримтлагдсан давтамж

Хуримтлагдсан давтамжийг мэдсэнээр медиан болон квартилуудыг олоход хялбар болдог.

Бүлэглээгүй өгөгдлийн хувьд хуримтлагдсан давтамжийн хүснэгтийг байгуульяа. 99 жолоочийн замын хөдөлгөөний дүрмийн тестэд алдсан тоог хүснэгтэд өгчээ.

Алдсан оноо	0	1	2	3	4	5	Нийт
Давтамж	32	42	13	6	4	2	99

Бүх өгөгдлийг эрэмбэлж, дараа нь медиан болон квартилуудыг ольё. 0, 0, 0, ..., 0, 1, 1, ..., 2, ..., 5, 5

Ингэж бодох нь төвөгтэй. Үүнийг хуримтлагдсан давтамжийн хүснэгт ашиглан медиан болон квартилуудыг хялбар олж болно.

Хуримтлагдсан давтамжийн хүснэгт

Алдсан тоо	0	≤ 1	≤ 2	≤ 3	≤ 4	≤ 5
Хуримтлагдсан давтамж	32	74	87	93	97	99
	$32 + 42$	$32 + 42 + 13$				
			Нийт хүний эсвэл 74 + 13 тоо			

Медиан: Нийт 99 хүний өгөгдөл байна гэж үзвэл медиан нь $\frac{1}{2}(99+1) = 50$ дүгээр утга болно. Хуримтлагдсан давтамжийн хүснэгтээс харвал эхний 32 утга 0, түүнээс хойш 74 дүгээр утга хүртэл бүх утга 1 байна. Иймд медиан нь 1 болно. Өөрөөр хэлбэл $Q_2 = 1$ байна.

Квартилууд: Доод квартилийг олохдоо медиан (Q_2)-оос өмнөх 49 утгын медианыг олно. Иймд Q_1 нь $\frac{1}{2}(49+1) = 25$ дугаар утга болно. Эндээс доод квартил $Q_1 = 0$ байна.

Дээд квартилийг олохдоо медиан (Q_3)-оос хойш 49 утгын медианыг олно. Иймд Q_3 нь $\frac{1}{2}(49+1) = 25$ дугаар утга болно. Иймд анхны өгөгдлийн хувьд 75 дугаар утга гэсэн уг. Эндээс дээд квартил $Q_3 = 2$ байна.

Квартил хоорондын далайц = $Q_3 - Q_1 = 2 - 0 = 2$ байна.

7. 11 сурагчийн шалгалтын дүнг өгчээ.

52 61 78 49 47 79 54 85 92 73 72

а. Медианыг ол.

б. Квартил хоорондын далайцыг ол.

8. Дараах өгөгдлийн медиан болон квартирил хоорондын далайцыг ол.

а. 4, 6, 18, 25, 9, 16, 22, 5, 20, 4, 8, 15, 9, 13, 10

б. 192, 217, 189, 210, 214, 204

в. 1267, 1896, 895, 3457, 2164, 2347, 2347, 2045

г. 0.7, 0.4, 0.65, 0.78, 0.45, 0.32, 1.9, 0.0078, 0.54, 1.32

д. 0.3, -1.5, -3.5, -3.05, 1.4, -2.6, -0.02

9. Шоог 60 удаа орхиход буусан тооны үр дүнг давтамжийн хүснэгтэд өгчээ.

Буусан тоо	1	2	3	4	5	6
Давтамж	12	9	8	13	9	9

а. Медианыг ол.

б. Квартил хоорондын далайцыг ол.

10. Доор үзүүлсэн иш-навчийн диаграммаас өгөгдлийн медиан болон квартил хоорондын далайцыг ол.

а. Иш Навч

1	0	5	(2)
2	3	4	4
3	2	8	8
4	1	5	6
5	2	3	3
6	5	7	8
7	2	4	(2)
8	0		(1)

б. Иш Навч

12	3	4	5	9
13	2	2	3	4
14	0	3	4	4
15	1	2		

Түлхүүр: $5|2$ нь 5.2 гэсэн үг

Түлхүүр: $12|3$ нь 0.123 гэсэн үг

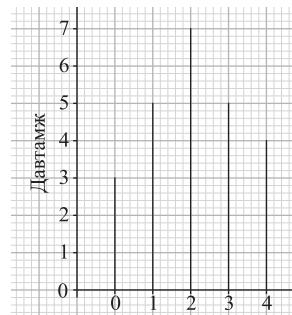
11. Доор өгсөн давтамжийн хүснэгтээс хуримтлагдсан давтамжийн хүснэгтийг байгуулж, медиан болон квартил хоорондын далайцыг ол.

x	5	6	7	8	9	10
f	6	11	15	18	6	5

12. Хөл бөмбөгийн багийн сүүлийн улирлын 24 тогтолцоог оруулсан гоолыг баганан диаграммаар үзүүлжээ. Баганан диаграммыг ашиглан хуримтлагдсан давтамжийн хүснэгтийг байгуулж, дараах асуултад хариул.

а. Өгөгдлийн медианыг ол.

б. Квартил хоорондын далайцыг ол.



13. Нэг ангийн 32 сурагчийн хичээлд суугаагүй өдрийн тоог дараах хуримтлагдсан давтамжийн хүснэгтэд үзүүлжээ.

Хичээлд суугаагүй өдрийн тоо	0	≤ 1	≤ 2	≤ 3	≤ 4	≤ 5	≤ 6	≤ 7
Хуримтлагдсан давтамж	5	11	20	23	27	28	31	32

а. Хичээлд суугаагүй өдрийн тооны медианыг ол.

б. Квартил хоорондын далайцыг ол.

в. Дараах давтамжийн хүснэгтийг нөх.

Хичээлд суугаагүй өдрийн тоо	0	1	2	3	4	5	6	7
Давтамж								

г. Дунджаар нэг сурагчийн хувьд хичээлд суугаагүй өдрийн тоог ол.

14. Доор өгсөн иш-навчийн диаграммаас

0	0	1	5	6
1	1	3	5	6
2	1	1	2	3
3	4	4	4	4
4	8	9		
	x			
	2	5	6	7
				9

Түлхүүр: 1|6 гэдэг бол 16

а. Медиан болон доод квартилийг ол.

б. Квартил хоорондын далайц 19 бол x -ийг ол.

Бүлэглэсэн өгөгдлийн хуримтлагдсан давтамж, түүний график

Жишээ 6. Тасалгааны нэгэн төрлийн 30 цэцэг тарьж, зургаан долоо хоногийн дараа өндрийг нь хэмжсэн өгөгдлийг хүснэгтэд өгчээ.

Өндөр (x см)	$3 \leq x < 6$	$6 \leq x < 9$	$9 \leq x < 12$	$12 \leq x < 15$	$15 \leq x < 18$	$18 \leq x < 21$	Нийт
Давтамж	1	2	11	10	5	1	30

Бүлэглэсэн өгөгдлөөс хуримтлагдсан давтамжийн хүснэгтийг байгуулахдаа интервалын дээд хилүүд болон эхний интервалын доод хилийг олно.

Энд интервалын дээд хилүүд нь 6, 9, 12, 15, 18, 21 байна.

Мөн эхний интервалын хувьд доод хил нь 3 болно. Эндээс дараах хуримтлагдсан давтамжийн хүснэгтийг бичье.

Хуримтлагдсан давтамжийн хүснэгт

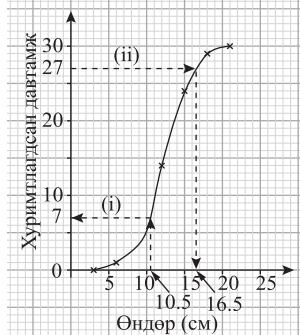
Өндөр (x см)	<3	<6	<9	<12	<15	<18	<21
Хуримтлагдсан давтамж	0	1	3	14	24	29	30

$$1+2 \quad 1+2+11$$

Мөн хуримтлагдсан давтамжийн хүснэгтээр өгсөн өгөгдлийг графикаар дүрсэлж болно.

Хуримтлагдсан давтамжийн графикийг байгуулахдаа интервалын дээд хил, болон түүнд харгалзах давтамж хоёроор абсцисс, ординатаа хийсэн цэгүүдийг координатын хавтгай дээр тэмдэглээд, дараа нь тэдгээр цэгүүдийг муруйгаар холбоно.

30 цэцгийн өндрийн хуримтлагдсан давтамжийн графикийг байгуулья.

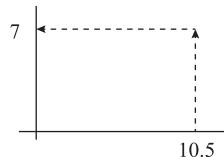


Графикаас зарим чухал утгын талаар дүгнэлт хийж болно.

Жишээлбэл:

- I. 10.5 см-аас бага өндөртэй хэдэн цэцэг байна вэ? гэдэгт хариуљя.

- Абсцисс тэнхлэгийн 10.5 цэгээс босоо шугам татаж хуримтлагдсан давтамжийн графиктай огтлоулна.

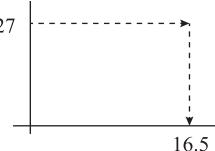


- Огтлолцлын цэгээс ординат тэнхлэг рүү перпендикуляр буулгаж ямар тоон дээр очихыг тэмдэглэнэ.

Графикаас 10.5 см-ээс бага өндөртэй 7 цэцэг байна гэдгийг хялбар харж болж байна.

II. Хэрэв x см-ээс их өндөртэй цэцэг нийт цэцгийн 10% байсан бол x -ийг ол.

- 30-ийн 10% гэдэг бол 3 болно. x см-ээс их өндөртэй 3²⁷ цэцэг байна. Иймд 27 цэцэг x см-ээс бага өндөртэй гэсэн үг.
 - Ординат тэнхлэгийн 27 цэгээс хэвтээ шугам татаж хуримтлагдсан давтамжийн графиктай огтлолцуулья.
 - Огтлолцлын цэгийг абсцисс тэнхлэг рүү перпендикуляр буулгаж ямар тоон дээр очихыг тэмдэглэнэ.



Графикаас 16.5 см-ээс их өндөртэй цэцэг нийт цэцгийн 10% -ийг эзэлж байгааг хялбар харах боломжтой юм.

Жишиг 7. Мөнхөө цагаан сарын баярт зориулж 500 еэвэн хийжээ. Хүснэгтэд өвөрхангайгийн жинг граммаар өгсөн байна.

Жин (грамм)	60 – 69	70 – 74	75 – 79	80 – 84	85 – 89
Давтамж	30	90	130	210	40

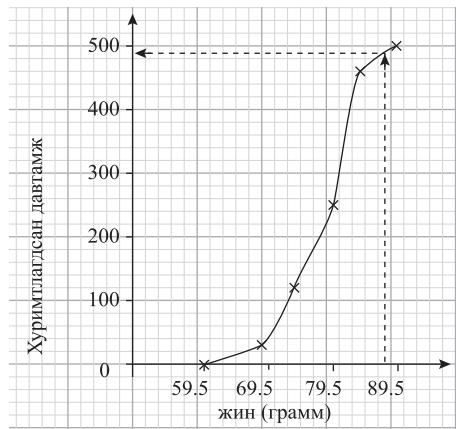
- a. Өгөгдлийн хуримтлагдсан давтамжийн хүснэгт болон хуримтлагдсан давтамжийн графикийг байгуул.
 - б. 64.5 граммаас 87.5 граммын хооронд жинтэй еэвэн бүх еэвэнгийн хэдэн хувь болохыг ол.

Бодолт. а. Эхлээд интервал бүрийн дээд хилийг олбол 69.5, 74.5, 79.5, 84.5, 89.5 байна. Эхний интервалын доод хил 59.5 байна. Улмаар хуримтлагдсан давтамжийн хүснэгтийг байгуулж, дараа нь графикийг нь байгуулья.

Хуримтлагдсан давтамжийн хүснэгт

Жин (грамм)	<59.5	<69.5	<74.5	<79.5	<84.5	<89.5
Хуримтлагдсан давтамж	0	30	120	250	460	500

Хуримтлагдсан давтамжийн графики



6. Абсцисс тэнхлэгийн 64.5 цэгээс босоо шугам татаж хуримтлагдсан давтамжийн графиктай огтлолцуулж огтлолцлын цэгээс ординат тэнхлэг рүү перпендикуляр буулгана. Мөн 87.5 гэсэн тооны хувьд дээрх үйлдлийг хийнэ. Эндээс 64.5 граммаас бага жинтэй нийт 15 еэвэн байна,

87.5 граммаас бага жинтэй нийт 485 еэвэн байна гэсэн дүгнэлт хийж болно.

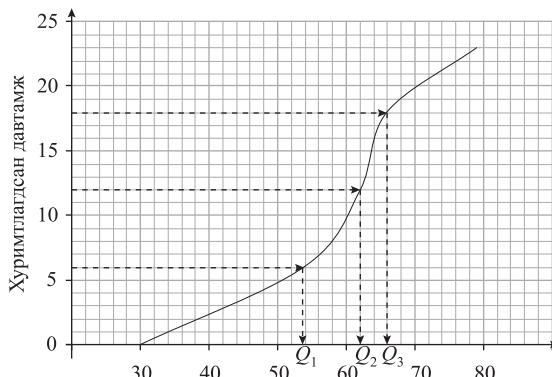
Эцэст нь $485 - 15 = 470$ учраас 64.5 граммаас 87.5 грамм жинтэй еэвэн бүх

$$\text{еэвэнгийн } \frac{470}{500} \times 100 = 94\% \text{ байна.}$$

Бүлэглэсэн өгөгдлийн медиан болон квартил

Өгөгдлийг бүлэглэсэн үед анхны мэдээлэл нь алдагддаг. Иймд медиан болон квартилуудыг олоход төвөгтэй болдог. Харин энэ үед хуримтлагдсан давтамжийн график ашиглаж, медиан болон квартилуудыг бодит хэмжээнд ойр утгаар олох боломжтой байдаг.

Доор 23 сурагчийн нэг даалгаврыг гүйцэтгэхэд зарцуулсан хугацааг хуримтлагдсан давтамжийн график ашиглан минутаар өгчээ. Өгөгдлийн медиан болон квартилуудыг ольё.



Энд 23 сурагчийн мэдээлэл байна. Иймээс медиан Q_2 нь $\frac{1}{2}(23+1)=12$ дугаар утга болно.

Q_1 бол медианаас өмнөх 11 утгын медиантай тэнцүү байна. Иймд Q_1 нь 6 дугаар утга байна.

Q_3 бол медианаас хойш 11 утгын медиантай тэнцүү байна. Иймд Q_3 нь $12 + 6 = 18$ дугаар утга байна.

Графикаас харахад,

Медиан $Q_2 = 62$ минут

Доод квартил $Q_1 = 54$ минут

Дээд квартил $Q_3 = 66$ минут болж байна.

Хэрэв 100 туршилтын үр дүн өгсөн гэвэл медианы дугаар нь 50.5 гэж гарна. Энэ тохиолдолд 50.5 болон 50 дугаар утгын хооронд их зөрөө гарахгүй. Иймд 50

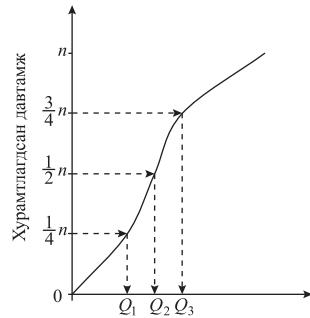
дугаар элементийн утгыг медиан болгон авч болно. Эндээс, n их тоо байхад бүлэглэсэн өгөгдлийн хувьд

Медиан $Q_2 = \frac{1}{2}n$ дүгээр утга

Доод квартил $Q_1 = \frac{1}{4}n$ дүгээр утга

Дээд квартил $Q_3 = \frac{3}{4}n$ дүгээр утгыг авахад

судалгааны үр дүнд өөрчлөлт гарахгүй.



Жишээ 8. Санамсаргүй сонгон авсан 400 сургчийн өндрийг хэмжсэн өгөгдлийг хуримтлагдсан давтамжийн хүснэгтээр өгчээ.

Өндөр, x см	< 100	< 110	< 120	< 130	< 140	< 150	< 160	< 170
Хуримтлагдсан давтамж	0	27	85	215	320	370	395	400

а. Хуримтлагдсан давтамжийн графикийг байгуул.

б. Графикаас өгөгдлийн медианыг ол.

в. Квартил хоорондын далайцыг ол.

Бодолт.

а. Сургчийн өндрийн хуримтлагдсан давтамжийн график байгуулъя. Энд их хэмжээний өгөгдөл өгсөн тул өмнөх үзсэн дурмийг ашиглана.

б. Медиан Q_2 нь $\frac{1}{2}n = \frac{1}{2} \cdot 400 = 200$

дугаар утга буюу $Q_2 = 129$ см.

в. Доод квартил Q_1 нь $\frac{1}{4}n = \frac{1}{4} \cdot 400 = 100$

дугаар утга буюу $Q_1 = 121.5$ см.

Дээд квартил Q_3 нь $\frac{3}{4}n = \frac{3}{4} \cdot 400 = 300$

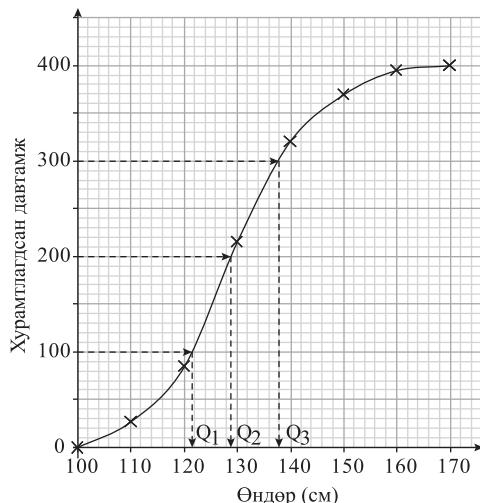
дугаар утга буюу $Q_3 = 137.5$ см.

Квартил хоорондын далайц

$$= Q_3 - Q_1 = 137.5 - 121.5 = 16 \text{ см.}$$

Жишээ 9. Долоо хоногийн турш хичээлдээ хоцорч ирсэн 204 сургчийн хоцорсон минутыг хүснэгтэд өгчээ.

Хоцорсон минут, t	$-2 \leq t < 0$	$0 \leq t < 2$	$2 \leq t < 4$	$4 \leq t < 6$	$6 \leq t < 10$
Хоцорсон сургчийн тоо	43	51	69	22	19

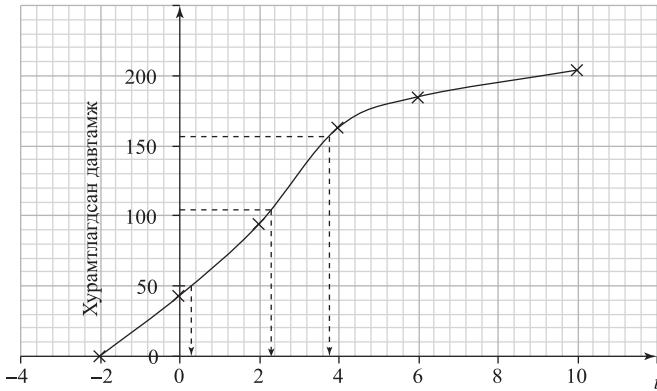


Хуримтлагдсан давтамжийн графикийг байгуулж, графикаас өгөгдлийн медиан болон квартил хоорондын далайцыг ол.

Бодолт. Эхлээд хуримтлагдсан давтамжийн хүснэгтийг байгуульяа.

Хоцорсон минут, t	$t = -2$	$t < 0$	$t < 2$	$t < 4$	$t < 6$	$t < 10$
Хуримтлагдсан давтамж	0	43	94	163	185	204

Хуримтлагдсан давтамжийн график



Медиан Q_2 нь $\frac{1}{2}n = \frac{1}{2} \cdot 204 = 102$ дугаар утга буюу $Q_2 = 4.2$ минут байна.

Доод квартил Q_1 нь $\frac{1}{4}n = \frac{1}{4} \cdot 204 = 51$ дүгээр утга буюу $Q_1 = 2.3$ минут байна.

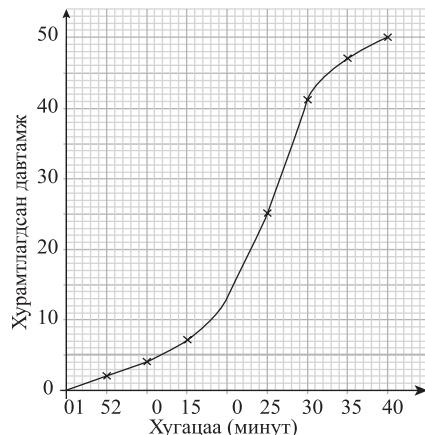
Дээд квартил Q_3 нь $\frac{3}{4}n = \frac{3}{4} \cdot 204 = 153$ дугаар утга буюу $Q_3 = 5.6$ минут байна.

Квартил хоорондын далайц = $Q_3 - Q_1 = 5.6 - 2.3 = 3.3$ минут байна.

15. 50 эмэгтэй хүнээс өдөрт дунджаар ямар хугацаанд дэлгүүрээр үйлчлүүлдэг талаар судалгаа авсан өгөгдлийг доор хуримтлагдсан давтамжийн графикаар өгчээ.

- а. 17 – 27 минут зарцуулдаг хүний тоо нийт судалгаанд хамрагдсан хүний хэдэн хувийг эзэлж байгааг ол.
- б. t минутаас бага хугацаа зарцуулдаг хүний тоо нийт судалгаанд хамрагдсан хүний 60% бол t -г ол.
- в. s минутаас их хугацааг зарцуулдаг хүний тоо нийт судалгаанд хамрагдсан хүний 60% бол s -ийг ол.
- г. Өгөгдлийн медианыг ол.
- д. Квартил хоорондын далайцыг ол.

16. Тахианы фермийн өндөгний жингийн бүлэглэсэн өгөгдлийг дараах хүснэгтэд өгчээ.



Жин, x грамм	$46 - 49$	$50 - 53$	$54 - 57$	$58 - 61$	$62 - 65$	$66 - 69$	$70 - 73$
Давтамж	6	4	10	24	20	12	4

а. Хуримтлагдсан давтамжийн хүснэгт болон хуримтлагдсан давтамжийн графикийг байгуул.

б. Өгөгдлийн медианыг ол.

в. Хэрэв бүх өндөгний жингийн $\frac{3}{4}$ нь m граммаас бага бол m -ийг ол.

17. Хэсэг хүмүүсээр тодорхой нэг даалгаврыг гүйцэтгүүлэн хугацааг тэмдэглэжээ. Нийт даалгаврыг тэдний 20% нь 30 минутаас бага хугацаанд, 40% нь 38 минутаас бага хугацаанд, 60% нь 45 минутаас бага хугацаанд, 80% нь 53 минутаас бага хугацаанд тус тус гүйцэтгэжээ. Хамгийн бага хугацаа нь 10 минут, хамгийн их хугацаа нь 69 минут байсан бол

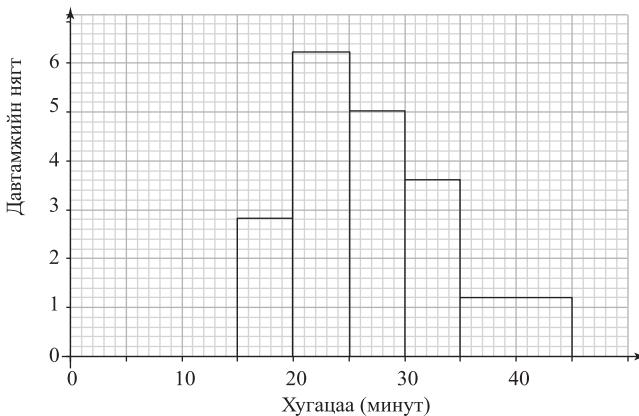
а. Өгөгдлийн хуримтлагдсан давтамжийн графикийг байгуул.

б. Хугацааны медианыг ол.

в. 50 минутаас бага хугацаанд нийт даалгаврыг гүйцэтгэсэн хүмүүсийн эзлэх хувийг ол.

г. Квартил хоорондын далайцыг ол.

18. Хэсэг жолоочийн замын хөдөлгөөний дүрмийн тестийг гүйцэтгэж дуусахад зарцуулсан нийт хугацааг гистограммаар өгчээ.



а. Давтамжийн хүснэгтийг нөх.

Хугацаа (x минут)	$15 \leq x < 20$	$20 \leq x < 25$	$25 \leq x < 30$	$30 \leq x < 35$	$35 \leq x < 45$
Давтамж		31			

б. Медиан аль интервалд агуулагдаж байна вэ?

в. Хуримтлагдсан давтамжийн графикийг байгуул.

г. Графикийг ашиглан медиан болон квартил хоорондын далайцыг ол.

19. 200 эрэгтэй тамирчны өдөрт гүйдэг зайл дараах давтамжийн хүснэгтээр өгчээ.

Зайл (x км)	$0 \leq x < 4$	$4 \leq x < 10$	$10 \leq x < 20$	$20 \leq x < 35$	$35 \leq x < 60$
Давтамж	5	10	39	95	51

- a. I. Хуримтлагдсан давтамжийн хүснэгт болон графикийг байгуул.
 II. График ашиглан өгөгдлийн медианыг ол.
 III. Квартил хоорондын далайцыг ол.
 IV. 30 км болон түүнээс их км зайд гүйдэг тамирчны эзлэх хувийг ол.
- b. I. Өгөгдлийг гистограммаар дүрсэл.
 II. Өгөгдлийн арифметик дунджийг ол.
20. 120 сурагч нэг сэдвээр эсээ бичжээ. Сурагчдын эсээ бичсэн хугацааг давтамжийн хүснэгтээр өгчээ.

Хугацаа, (минут)	40 – 44	45 – 49	50 – 54	55 – 59	60 – 64
Давтамж	8	24	32	30	26

- a. Хуримтлагдсан давтамжийн хүснэгт болон графикийг байгуул.
 б. Графикийг ашиглан медиан болон доод квартилийг ол.
 Дараа нь өөр 40 сурагчийн эсээ бичсэн хугацааг өгөгдөл дээр нэмж өгчээ.
 Эдгээр сурагчид эсээг 1 цагас илүү хугацаанд бичсэн бол
 в. Бүх 160 сурагчийн эсээ бичсэн хугацааны доод квартилийг графикаас ол.
 г. Бүх 160 сурагчийн хувьд график ашиглан, квартил хоорондын далайцыг олох боломжгүй болохыг тайлбарла.

Хайрцган диаграмм

Өгөгдлийн хамгийн бага утга болон хамгийн их утга нь тухайн өгөгдлийн тархцыг харуулдаг. Энэ хоёр утга дангаараа өгөгдлийн бусад шинж чанацуудын талаар сайн мэдээлүүдийг өгч чадахгүй. Харин тэдгээрийг өгөгдлийн квартилууд болон медиантай хамт ашиглавал өгөгдлийн талаар хангалттай их мэдээллийг мэдэх боломжтой болдог.

Эдгээр тоогоор хайрцган диаграмм гэж нэрлэх диаграммыг байгуулж болдог. Хайрцган диаграмм нь өгөгдлийн хамгийн бага, хамгийн их утгууд, медиан болон квартилуудыг дүрсэлж үзүүлдэг. Хайрцган диаграммаар 2 болон түүнээс олон өгөгдлийн тархалтыг харах, тэдгээрийг хооронд нь харьцуулж дүгнэлт хийхэд хялбар байдаг.

Доор 15 настай эмэгтэй сурагчийн өндрийн талаар статистик хэмжигдэхүүн өгчээ.

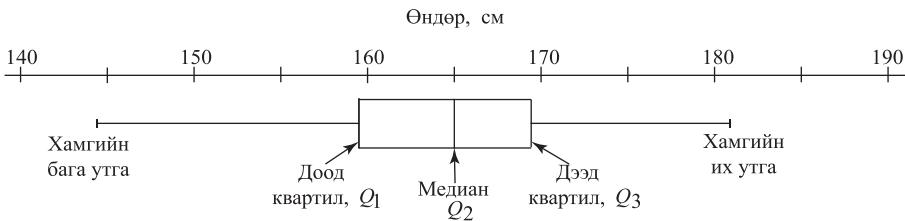
Хамгийн намхан	144 см
Доод квартил	159 см
Медиан	165 см
Дээд квартил	169 см
Хамгийн өндөр	181 см

Энэ өгөгдлийг хайрцган диаграммаар дурсэль. Хайрцган диаграммыг байгуулахдаа хамгийн бага, хамгийн их утгыг хайрцгийн гадна байрлуулна.

Хайрцгийн хоёр захыг доод, дээд квартилийн утгуудаар, медианыг хайрцгийн дотор зурна.

Хайрцгийн урт квартил хоорондын далайцтай тэнцүү байх ба хайрцган диаграммын нийт урт нь өгөгдлийн далайцтай тэнцүү байна.

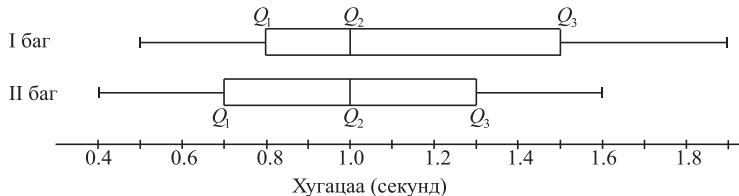
15 настай эмэгтэй сурагчдын өндрийн өгөгдлийг хайрцган диаграммаар дүрсэлбэл



Жишээ 10. Хэсэг хүмүүс хоёр баг болон компьютер тоглоом тоглож байхад нь гарын товчлуурыг хэр хурдан дарж байгааг судалжээ. Тэдний компьютерын товчлуурыг дараах хугацааг секундийн 0.1-ээр ойролцоолон хэмжихэд гарсан өгөгдлийг дараах хүснэгтэд өгчээ.

	Хамгийн бага утга	Доод квартил Q_1	Медиан Q_2	Дээд квартил Q_3	Хамгийн их утга
Баг 1	0.6	0.8	1.0	1.5	1.9
Баг 2	0.4	0.7	1.0	1.3	1.6

Дээрх хоёр өгөгдлийг хайрцган диаграммаар дүрсэль.



Хоёр өгөгдлийн медиан 1 секунд байна. I багийн хугацааны далайц II багийн хугацааны далайцаас их байна.

I багийн хугацааны хэлбэлзэл хамгийн их байна. Эндээс II багийн хүмүүс компьютерын гарын товчлуурыг илүү хурдан дардаг нь харагдаж байна. Хайрцган диаграммаас өөр ямар дүгнэлт хийж болох талаар ярилц.

Жишээ 12. Хэсэг хүмүүсээс гэрээсээ ажил руу, ажлаасаа гэр лүү явахдаа дунджаар ямар хугацаа зарцуулдаг талаар судалгаа авчээ. Тэдний зарцуулдаг хугацааны медиан нь 3 цаг 36 минут, дээд квартил нь 4 цаг 42 минут ба квартил хоорондын далайц нь 3 цаг 48 минут байв. Мөн хамгийн их хугацаа нь 5 цаг 12 минут ба хамгийн бага хугацаа нь 30 минут гэсэн судалгаа гарчээ.

а. Доод квартилийг ол.

б. Өгөгдлийг хайрцган диаграммаар дүрсэл.

Бодолт. а. Квартил хоорондын далайц = дээд квартил – доод квартил

Эндээс 3 цаг 48 минут = 4 цаг 42 минут – доод квартил

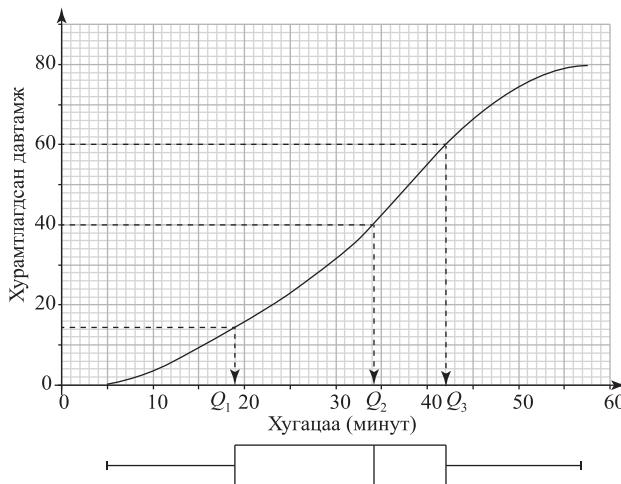
Доод квартил = 4 цаг 42 минут – 3 цаг 48 минут = 54 минут

б. Хайрцган диаграммыг нарийвчлал сайтай цэвэрхэн зурж, дүгнэлт гарга.

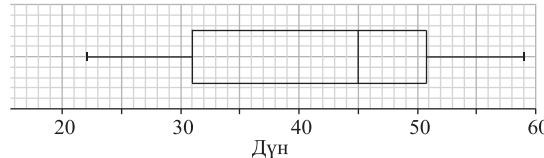
Хуримтлагдсан давтамжийн графикаас хайрцган диаграммыг зурахад хялбар байдаг.

Жишээлбэл: 80 ажилчны гэрээс ажилдаа ирэхэд зарцуулдаг хугацааны хуримтлагдсан давтамжийн графикийг үзүүлжээ.

График дээр медиан Q_2 болон квартилуудыг Q_1, Q_3 ээр харгалзан тэмдэглээ. Хэрэв өгөгдлийн хамгийн бага хугацаа нь 8 минут ба хамгийн их хугацаа 57 минут бол хайрцган диаграммыг дүрсэльье.



21. Сурагчдын бодсон тестийн хариуг хайрцган диаграммаар дүрсэлжээ.



а. Дээд болон доод квартилуудыг ол.

б. Медианыг ол.

в. Нийт өгөгдлийн далайцыг ол.

г. Квартил хоорондын далайцыг ол.

22. Дараах тоон өгөгдлийг хайрцган диаграммаар дүрсэл.

а. 3, 5, 10, 11, 12, 16, 17, 17, 19, 20, 22

б. 96, 105, 123, 151, 167, 178, 185, 200, 202, 220, 238, 246, 252, 269

в. -7, -5, -4, -4, -3, -3, -2, -1, 0, 1, 4, 6, 8, 9

23. Дараах хүснэгтэд өгсөн өгөгдлийг хайрцган диаграммаар дүрсэл.

x	0	1	2	3	4
Давтамж, f	4	6	8	6	1

24. Сургуулийн багш нарын өрөөнд байрлах утаснаас гарсан 50 дуудлагын үргэлжилсэн хугацааг хүснэгтэд өгчээ.

Дуудлагын үргэлжлэх хугацаа (x минут)	$0 < x \leq 2$	$2 < x \leq 5$	$5 < x \leq 8$	$8 < x \leq 15$
Давтамж	10	23	11	6

- а. Хуримтлагдсан давтамжийн графикийг байгуул.
- б. Хуримтлагдсан давтамжийн графикийг ашиглан медиан болон квартилуудыг ол.
- в. Хэрэв хамгийн бага ярьсан хугацаа нь 1 минут, хамгийн их ярьсан хугацаа нь 14 минут бол хайрцган диаграммыг байгуул.

25. Хэсэг мэргэжлийн бус хүмүүс болон мэргэжлийн тамирчдын 100 метр зайд гүйсэн хугацааг иш-навчийн диаграммаар дүрсэлжээ.

Mэргэжлийн бус хүмүүс	Mэргэжлийн тамирчид
(1) 8	2 7 9 (2)
(2) 9 4 4	3 0 2 3 6 (4)
(3) 7 1 0 6	3 5 6 8 9 9 (6)
(5) 8 7 4 2 1 7	1 3 5 7 7 (5)
(5) 9 9 9 5 3 8	0 2 4 4 (4)
(3) 6 4 0 9	3 5 8 (3)
(4) 9 7 7 4 10	1 1 5 (3)
(2) 8 5 11	2 6 (2)
(2) 1 0 12	
(1) 3 13	

Түлхүүр:

$9 | 4 |$ - мэргэжлийн бус хүн 100 метр замыг 49 секундэд туулсан.

$| 4 | 3$ - мэргэжлийн тамирчин 100 метр замыг 43 секундэд туулсан.

- а. Мэргэжлийн тамирчдын үр дүнгийн медиан болон квартилуудыг ол.
- б. Мэргэжлийн бус хүмүүсийн үр дүнгийн медиан болон квартилуудыг ол.
- в. Хоёр өгөгдлийг хайрцган диаграммаар дүрсэлж, өгөгдлүүдийг харьцуулсан дүгнэлт хий.

Өгөгдлийг дүрслэх диаграмм, графикийн давуу ба сүл тал

№	Дүрслэл	Давуу тал	Сүл тал
1	Баганан диаграмм	Өгөгдлийн моодыг харуулах, хэд хэдэн ялгаатай өгөгдлүүдийг харьцуулах	Зөвхөн чанарын өгөгдлийг дүрслэх
2	Дугуй диаграмм	Өгөгдөл бүрийн эзлэх хувийг харуулдаг.	Давтамжийг харуулдаггүй. Тоон өгөгдлийн хэмжээ хязгаарлагдмал

3	Босоо шугаман график	Өгөгдлийн моодыг сайн харуулдаг, тархалтын муруйн чиг хандлагыг харуулдаг.	Цөөн тоон үзүүлэлт дээр дүрсэлж үзүүлдэг.
4	Иш-навчийн диаграмм	Анхны өгөгдлийг хадгалж үлддэг. Тархалтын муруйг харуулах, мод, медиан болон квартилуудыг олоход хялбар. Хоёр өгөгдлийг харьцуулахад хялбар байдаг.	Их хэмжээний өгөгдөл тохиромжтой биш
5	Гистограмм	Ялгаатай мужид өгөгдлүүдийг бүлэглэж харуулдаг. Тархалтын муруйг харуулдаг. Гистограммаас өгөгдлийн арифметик дундаж болон стандарт хазайлтыг тооцоолх боломжтой.	Хоёр өөр тархалтыг нэг диаграмм дээр үзүүлж чадахгүй.
6	Хуримтлагдсан давтамжийн график	Графикаас өгөгдлийн арифметик дундаж болон квартилуудыг тооцоолж болно.	Ялгаатай нэгжүүдийг хэрэглэдэг.
7	Хайрцган диаграмм	Өгөгдлийн тархалтын муруйн хэлбэрийг, өгөгдлийн далайц болон квартил хоорондын далайцыг хялбархан харна. Нэг диаграмм дээр хэд хэдэн ялгаатай өгөгдлийг харьцуулах боломжтой.	Өгөгдлийн давтамжийг харуулдаггүй.
8	Цэгэн диаграмм	Хоёр өгөгдлийн хамаарал буюу корреляцыг харуулдаг. Бүх утгыг харуулдаг.	
9	Хандлагын шулуун	Хоёр өгөгдлийн хамаарал буюу корреляцыг харуулдаг.	Ерөнхий хандлагыг харуулдаг.

10.2 ДУНДАЖ

Өгөгдлийн мод, медиан, арифметик дундаж гэсэн төвийн хандлагатай статистик хэмжигдэхүүнүүдийг өгөгдлийн дундаж гэдэг.

Арифметик дундаж

Тодорхойлолт. Өгөгдлийн бүх утгын нийлбэрийг утгын тоонд хуваасан ногдворыг **арифметик дундаж** гэнэ. Өөрөөр хэлбэл, x_1, x_2, \dots, x_n гэсэн n ширхэг утга өгсөн бол

$$\text{Арифметик дундаж} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

болно.

Арифметик дунджийг цаашид бид \bar{x} гэж тэмдэглээ. n ширхэг хэмжилтийн

$$\text{дундаж } \bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \text{ байна.}$$

Цаашид $x_1 + x_2 + \dots + x_n = \sum_{i=1}^n x_i$ гэдгийг хялбарчлан $\sum x$ бичнэ. Тэгвэл $\bar{x} = \frac{\sum x}{n}$ байна.

\sum тэмдэглэгээ нь Грек цагаан толгойн том *сигма* усэг юм. Нийлбэрийг тэмдэглэх энэ тэмдэглэгээг анх 1755 онд Математик Леонард Эйлер хэрэглэжээ.

Жишээ 1. Найрал хөгжимчдөөс хэдэн хөгжмийн зэмсэг тоглож чаддаг талаар судалгаа авчээ. Судалгааны үр дүнг доор харуулав.

2	5	2	4	1	1	1	2	1	3	3	2	1	2	1
1	2	4	3	2	1	2	3	1	4	2	3	1	1	2

Дунджаар нэг хөгжимчин хэдэн хөгжмийн зэмсэг тоглож чаддаг вэ?

Бодолт. Нийт 30 хүн судалгаанд хамрагдсан байна. Эндээс $n = 30$.

$$\sum x = 2 + 5 + 2 + \dots + 1 + 1 + 2 = 63$$

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{63}{30} = 2.1$$

Санамж Дунджийг ойролцоолж бүхэл тоо рүү тоймлохгүй.

Дээрх жишээний давтамжийн тархалтыг байгуулж арифметик дунджийг ольё.

Хөгжмийн зэмсгийн тоо (x)	1	2	3	4	5
Давтамж (f)	11	10	5	3	1

Давтамжийн тархалтаас арифметик дундаж олохдоо дараах хүснэгтийг хийнэ.

x	f	$x \cdot f$
1	11	11
2	10	20
3	5	15
4	3	12
5	1	5
	$\sum f = 30$	$\sum xf = 63$

$$\bar{x} = \frac{\text{Нийт хөгжмийн зэмсэг}}{\text{Нийт хүний тоо}}$$

$$= \frac{\sum xf}{\sum f} = \frac{63}{30} = 2.1$$

Нийт хүний тоо Нийт хөгжмийн зэмсэг

Өгөгдлийн давтамжийн тархалтын хүснэгт өгсөн үед арифметик дунджийг олох-

$$\text{доо } \bar{x} = \frac{\sum xf}{\sum f} \text{ томъёогоор бодно.}$$

Жишээ 2. Сумын төвийг дайран гарсан 120 тээврийн хэрэгслийн хурдыг хүснэгтэд өгчээ.

Хурд (x км/цаг)	21 – 25	26 – 30	31 – 35	36 – 45	46 – 60
Давтамж (f)	22	48	25	16	9

Эдгэр тээврийн хэрэгслийн хурдны арифметик дунджийг ол.

Бодолт. Бүлэглэсэн давтамжийн тархалтын дунджийг тооцоолохдоо эхлээд интервалын дундаж утгыг тооцоолно.

Жишээлбэл: Эхний интервал буюу $21 - 25$ интервалын дундаж утгыг олбол,

$$\text{Дээд хил} = 20.5 \quad \text{Доод хил} = 25.5$$

$$\text{Интервалын дундаж утга} = \frac{1}{2} (\text{Дээд хил} + \text{Доод хил}) = \frac{1}{2} (20.5 + 25.5) = 23 \text{ болно.}$$

Хурд (км/цаг)	Интервалын дундаж утга (x)	Давтамж (f)	$x \cdot f$
21 – 25	23	22	506
26 – 30	28	48	1344
31 – 35	33	25	825
36 – 45	40.5	16	648
46 – 60	53	9	477
		$\sum f = 120$	$\sum xf = 3800$

Энэ баганын утгуудын нийлбэрийг олохгүй

$$\bar{x} = \frac{\sum xf}{\sum f} = \frac{3800}{120} = 31.7 \text{ км/цаг}$$

Жишээ 3. Хэсэг сурагчийн гэрээсээ сургуульдаа ирэхэд зарцуулдаг хугацааг хуримтлагдсан давтамжийн хүснэгтэд үзүүлжээ.

Хугацаа (минут)	<10	<15	<20	<30	<45
Хуримтлагдсан давтамж	35	79	157	350	400

Энэ өгөгдлийн хувьд $0 \leq t < 10$, $10 \leq t < 15$, $15 \leq t < 20$, $20 \leq t < 30$, $30 \leq t < 45$ гэсэн интервалуудад харгалзах давтамжийг олж, сурагчийн гэрээсээ сургуульдаа ирэхэд зарцуулдаг хугацааны дунджийг ол.

Бодолт. Интервал тус бурийн давтамжийг ольё.

$$0 \leq t < 10 \text{ интервал дээр давтамж нь} = 35$$

$$10 \leq t < 15 \text{ интервал дээр давтамж нь} = 79 - 35 = 44$$

$$15 \leq t < 20 \text{ интервал дээр давтамж нь} = 157 - 79 = 78$$

$$20 \leq t < 30 \text{ интервал дээр давтамж нь} = 350 - 157 = 193$$

$$30 \leq t < 45 \text{ интервал дээр давтамж нь} = 400 - 350 = 50$$

Өгөгдлийг давтамжийн хүснэгтэд бичиж, арифметик дунджийг ольё. Энд интервалуудын дундаж утгуудыг олно.

Хугацаа (t минут)	Интервалын дундаж утга, x	Давтамж n	Дундаж зарцуулах хугацаа $x \cdot n$
$0 \leq t < 10$	5	35	175
$10 \leq t < 15$	12.5	44	550
$15 \leq t < 20$	17.5	78	1365
$20 \leq t < 30$	25	193	4825
$30 \leq t < 45$	37.5	50	1875
		$\sum n = 400$	$\sum xn = 8790$

$\bar{x} = \frac{\sum xn}{\sum n} = \frac{8790}{400} = 21.975 = 22$ минут. Энд $\sum n$ -ээр давтамжуудын, $\sum xn$ -ээр дундаж зарцуулах хугацааны нийлбэрийг тэмдэглэв.

Жишээ 4. Хэсэг хүмүүсээс өдөрт зурагт үзэхдээ хэдэн цаг зарцуулдаг талаар судалгаа авсан үр дүнг доор хүснэгтээр өгчээ.

Өдөрт зарцуулдаг цаг(t цаг)	$0 \leq t < 1$	$1 \leq t < 2$	$2 \leq t < 4$	$4 \leq t < 8$
Хүний тоо	10	18	f	4

Судалгааны үр дүнд өдөрт дунджаар 2 цаг зарцуулдаг гэж гарчээ. Тэгвэл f -ийг ол. Нийт хэдэн хүн судалгаанд хамрагдсан бэ?

Бодлолт. Эхлээд интервалын дундаж утгыг ольё. Интервалын дундаж утгууд 0.5, 1.5, 3, 6 байна.

$$\text{Нийт зарцуулсан цаг} = (0.5 \cdot 10) + (1.5 \cdot 18) + (3 \cdot f) + (6 \cdot 4) = 56 + 3f$$

$$\text{Нийт хүний тоо} = 10 + 18 + f + 4 = 32 + f$$

Эндээс арифметик дунджийг олох томьёо ёсоор

$$\bar{x} = \frac{\text{Нийт зарцуулсан цаг}}{\text{Нийт хүний тоо}} = \frac{56 + 3f}{32 + f}$$

Бодлогын нөхцөлд өгснөөр $\bar{x} = 2$ учраас $2 = \frac{56 + 3f}{32 + f}$ болно. Эндээс

$56 + 3f = 72 + 2f$ буюу $f = 16$ болно. Иймд нийт 48 хүн судалгаанд хамрагдсан.

26. Дараах өгөгдлийн арифметик дунджийг тооцоол.

а. 5, 6, 6, 8, 8, 9, 11, 13, 14, 17

б. 148, 153, 156, 157, 160

в. 44, 47, 48, 51, 52, 54, 55, 56

г. 1769, 1771, 1772, 1775, 1778, 1781, 1784

д. 0.85, 0.88, 0.89, 0.93, 0.94, 0.96

27. Иш-навчийн диаграммаар дүрсэлсэн өгөгдлийн арифметик дунджийг тооцоол.

1	2	8
2	1	4 4 6
3	0	0 2 3 5 5 5
4	3	3 6 7
5	3	6 9

Түлхүүр: 1|2 гэдэг бол 12 грамм

28. Өгсөн найман тооны арифметик дундаж нь 15 байжээ. Хэрэв эдгээр тоон дээр x , $2x$ гэсэн хоёр тоог нэмж арифметик дунджийг олоход 13.2 гарсан бол x -ийг ол.

29. Сумын оршин суугчдын насны тархалтыг хүснэгтэд өгчээ. Дундаж насыг тооцоол.

Нас	Хүний тоо
$0 < x < 15$	54
$15 \leq x < 30$	78
$30 \leq x < 50$	120
$50 \leq x < 70$	88
$70 \leq x < 100$	60

30. Номын сангийн тавиур дээрх номын тоог хүснэгтэд өгчээ. Тавиур дээрх номын тооны арифметик дунднийг ол.

Нэг тавиур дээрх номын тоо	Тавиурын тоо
31 – 35	4
36 – 40	6
41 – 45	10
46 – 50	13
51 – 55	5
56 – 60	2

31. Хүснэгтэд өгсөн давтамжийн тархалтын дундаж нь 3.66 байх a -г ол.

x	1	2	3	4	5	6
f	3	9	a	11	8	7

32. Уутанд 1 – 5 хүртэл дугаарласан бөмбөг байв. Нэг бөмбөг санамсаргүйгээр сугалан авч дугаарыг бүртгэн буцааж хийх туршилт хийв. Энэ туршилтыг 50 удаа хийсэн үр дүнг хүснэгтэд үзүүлжээ. Хэрэв үр дүнгийн арифметик дундаж нь 2.7 бол x , y -ийг ол.

Тоо	1	2	3	4	5
Давтамж	x	11	y	8	9

33. Хэрэв дөрвөн тооны арифметик дундаж нь 5 ба өөр гурван тооны арифметик дундаж нь 12 бол эдгээр долоон тооны арифметик дунднийг ол.

10.3 ХАЗАЙЛТ

Зөвхөн дунджаар өгөгдлийг судлахад учир дутагдалтай. Өгөгдлийн утгууд хэр зэрэг өргөн хүрээнд тархсаныг судлахад далайц, квартил хоорондын далайц, дисперс болон стандарт хазайлт гэсэн статистикийн хэмжигдэхүүнийг хэрэглэдэг. Эдгээр хэмжигдэхүүнүүдийг хазайлт эсвэл хэлбэлзлийн хэмжигдэхүүнүүд гэж нэрлэдэг.

Арифметик дундаж нь 7 байх гурван тооны өгөгдлийг харьцуулья.

$$A = \{7, 7, 7, 7, 7\}, \quad B = \{4, 6, 6.5, 7.2, 11.3\}, \quad C = \{-193, -46, 28, 69, 177\}$$

Дээрх өгөгдлийн арифметик дундаж нь ижилхэн ч хэлбэлзэл нь өөр өөр байна.

A өгөгдөл ямар ч хэлбэлзэлгүй, харин B өгөгдөл тодорхой хэмжээний хэлбэлзэлтэй байна. C өгөгдөл A, B өгөгдлөөс илүү хэлбэлзэлтэй байна.

Тархалтын хэлбэлзлийг хэмжих олон арга бий. Энэ бүлэгт эдгээр аргаас далайц болон стандарт хазайлтыг үзнэ.

Өгөгдлийн утгуудын хамгийн их утгаас хамгийн бага утгыг нь хассан ялгаврыг өгөгдлийн далайц гэнэ. Өөрөөр хэлбэл,

$$\text{Далайц} = \text{Хамгийн их утга} - \text{Хамгийн бага утга}$$

Өмнө авсан гурван өгөгдлийн хувьд:

$$A \text{ өгөгдлийн далайц} = 7 - 7 = 0$$

$$B \text{ өгөгдлийн далайц} = 13.3 - 4 = 7.3$$

$$C \text{ өгөгдлийн далайц} = 177 - (-193) = 370$$

Стандарт хазайлт

Стандарт хазайлт нь хэлбэлзлийн хэмжигдэхүүнүүдээс хамгийн чухал нь юм. Тархалтын арифметик дунджаас өгөгдлийн хэлбэлзлийн хэмжигдэхүүнүүд хамаарна. Стандарт хазайлтыг дараах дарааллаар олдог.

I. Бүх x -ийн утгууд арифметик дунджаас хэр хол байгааг олно. Өөрөөр хэлбэл бүх утгуудаас арифметик дундгийг хассан ялгаврыг олно ($x - \bar{x}$).

Үүнийг арифметик дунджаас хазайх хазайлт гэж нэрлэдэг.

II. x -ийн утгууд арифметик дунджаасаа их, бага байхаас хамаарч ($x - \bar{x}$)-ийн утгууд ээрэг эсвэл сөрөг байж болно. Иймээс $(x - \bar{x})^2 \geq 0$ болгож тооцоолбол илүү үр дүнтэй байдаг. Иймд арифметик дунджаас хазайх хазайлтуудын квадрат ($x - \bar{x}$)²-ийг олно.

III. Олсон квадратуудын арифметик дундаж буюу өөрөөр хэлбэл, $\frac{\sum(x - \bar{x})^2}{n}$

-ийг олно. Ийнхүү энэ арифметик дундгийг **дисперс** гэж нэрлэдэг.

IV. Дисперсийн квадрат язгуурыг өгөгдлийн **стандарт хазайлт** гэнэ. Стандарт хазайлтыг $C.X$ гэж товчлон тэмдэглээ.

$$\text{Тэгвэл } C.X = \sqrt{\frac{\sum(x - \bar{x})^2}{n}} \quad (1) \text{ болно.}$$

Санамж Стандарт хазайлт ямагт зэрэг тоо байна.

Сэдвийн эхэнд авсан 3 өгөгдлийн стандарт хазайлтыг тооцоольё. Эдгээр өгөгдлийн арифметик дундаж нь $\bar{x} = 7$ байна.

A өгөгдөл: Бүх утгууд нь 7-той тэнцүү тул стандарт хазайлт нь 0-тэй тэнцэнэ.

B өгөгдөл: 4, 6, 6.5, 7.2, 11.3

$$\sum(x - \bar{x})^2 = (4 - 7)^2 + (6 - 7)^2 + (6.5 - 7)^2 + (7.2 - 7)^2 + (11.3 - 7)^2 = 28.78$$

$$\text{Эндээс } C.X = \sqrt{\frac{\sum(x - \bar{x})^2}{n}} = \sqrt{\frac{28.78}{5}} \approx 2.4 \text{ болно.}$$

C өгөгдөл: -193, -46, 28, 69, 177

$$\sum(x - \bar{x})^2 = (-193 - 7)^2 + (-46 - 7)^2 + (28 - 7)^2 + (69 - 7)^2 + (177 - 7)^2 = 75994$$

$$\text{Эндээс } C.X = \sqrt{\frac{\sum(x - \bar{x})^2}{n}} = \sqrt{\frac{75994}{5}} \approx 123.3 \text{ болно.}$$

C өгөгдөл B өгөгдлөөс их стандарт хазайлттай байна.

A өгөгдлийн хувьд стандарт хазайлт 0 гэдгээс A хэлбэлзэлгүй өгөгдөл болно.

B өгөгдлийн стандарт хазайлт 2.4 гэдгээс B өгөгдлийн утгууд дунджид ойрхон хэлбэлзэлтэй болно. C өгөгдлийн стандарт хазайлт 123.3 гэдгээс энэ өгөгдлийн утгууд дунджаас хол хэлбэлзэлтэй байна.

Стандарт хазайлт тархалтуудыг харьцуулахад хэрэглэгддэг. Мөн стандарт хазайлтыг дараах томьёогоор олж болно.

$$\text{Стандарт хазайлт} \quad C.X = \sqrt{\frac{\sum x^2}{n} - \bar{x}^2} \quad (2)$$

Баталгаа.

$$\begin{aligned} C.X &= \sqrt{\frac{\sum(x - \bar{x})^2}{n}} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum(x^2 - 2x \cdot \bar{x} + \bar{x}^2)} = \sqrt{\frac{1}{n} (\sum x^2 - 2\bar{x} \sum x + \sum \bar{x}^2)} \\ &= \sqrt{\frac{1}{n} (\sum x^2 - 2\bar{x}n\bar{x} + n\bar{x}^2)} = \sqrt{\frac{1}{n} (\sum x^2 - n\bar{x}^2)} = \sqrt{\frac{\sum x^2}{n} - \bar{x}^2} \end{aligned}$$

болно.

Жишээ 1. Хэрэв 2, 3, 5, 6, 8 тоонуудын арифметик дундаж нь 4.8 бол стандарт хазайлтыг тооцоол.

Бодолт. Өгөгдлийн арифметик дундаж нь 4.8 байна.

(1) томъёо

x	$x - 4.8$	$(x - 4.8)^2$
2	-2.8	7.84
3	-1.8	3.24
5	0.2	0.04
6	1.2	1.44
8	3.2	10.24
		$\sum(x - \bar{x})^2 = 22.8$

(2) томъёо

x	x^2
2	4
3	9
5	25
6	36
8	64
	$\sum x^2 = 138$

$$C.X. = \sqrt{\frac{\sum(x - \bar{x})^2}{n}} = \sqrt{\frac{22.8}{5}} \approx 2.14 \quad C.X. = \sqrt{\frac{\sum x^2}{n} - \bar{x}^2} = \sqrt{\frac{138}{5} - 4.8^2} \approx 2.14$$

Давтамжийн хүснэгт өгсөн байхад стандарт хазайлтыг ольё.

Өгөгдөл давтамжийн тархалтаар өгсөн уед стандарт хазайлтыг дараах томъёо-гоор олно.

$$C.X. = \sqrt{\frac{\sum(x - \bar{x})^2 f}{\sum f}} \quad C.X. = \sqrt{\frac{\sum x^2 f}{\sum f} - \bar{x}^2} \quad \text{Энд } \bar{x} = \frac{\sum x f}{\sum f}$$

Жишээ 2. 20 өрхийн хүүхдийн тооны тархалтыг доор үзүүлжээ. Нэг өрхийн хүүхдийн тоо дунджаар 2.9 бол

- а. Далайцыг ол.
- б. Стандарт хазайлтыг ол.

Нэг өрхийн хүүхдийн тоо (x)	1	2	3	4	5
Өрхийн тоо (f)	3	4	8	2	3

Бодолт.

- а. Далайц = Хамгийн их утга – Хамгийн бага утга = $5 - 1 = 4$.
- б. Хэрэв стандарт хазайлтыг (2) томъёо ашиглан олбол

x	x^2	f	$x^2 f$
1	1	3	3
2	4	4	16
3	9	8	72
4	16	2	32
5	25	3	75
		$\sum f = 20$	$\sum x^2 f = 198$

$$\begin{aligned} C.X. &= \sqrt{\frac{\sum x^2 f}{\sum f} - \bar{x}^2} \\ &= \sqrt{\frac{198}{20} - 2.9^2} \\ &= \sqrt{1.49} = 1.22 \quad \text{болно.} \end{aligned}$$

Бүлэглэсэн өгөгдлийн стандарт хазайлтыг олохдоо интервалын дундаж утгыг олно.

Жишээ 3. 115 сурагчаас онлайн тэстийн шалгалт авчээ. Компьютероор сурагчдын асуулт бүрд зарцуулсан хугацааг бүртгэнэ. Дараах хүснэгтэд сурагчид сүүлийн асуултад хариулж дуусахад зарцуулсан нийт хугацааг үзүүлжээ.

Хугацаа (t минут)	$1 \leq t < 2$	$2 \leq t < 3$	$3 \leq t < 5$	$5 \leq t < 10$
Давтамж	16	32	42	25

Сүүлийн асуултад хариулж дуусахад зарцуулсан хугацааны стандарт хазайлтыг ол.

Бодолт.

Хугацаа (t минут)	Интервалын дундаж утга (x)	f	xf	$x^2 f$
$1 \leq t < 2$	1.5	16	24	36
$2 \leq t < 3$	2.5	32	80	200
$3 \leq t < 5$	4	42	168	672
$5 \leq t < 10$	7.5	25	187.5	1406.25
		$\sum f = 115$	$\sum xf = 459.5$	$\sum x^2 f = 2314.25$

$$\bar{x} = \frac{\sum xf}{\sum f} \approx 3.995 \approx 4.00 \text{ минут}$$

$$C.X. = \sqrt{\frac{\sum x^2 f}{\sum f} - \bar{x}^2} \approx \sqrt{\frac{2314.25}{115} - (3.995)^2} \approx 2.039... \approx 2.04 \text{ болно.}$$

Энэ бүлгийн хүрээнд мэдэж авсан томьёонуудаа эргэн саная.

$$\text{Арифметик дундаж : } \bar{x} = \frac{\sum x}{n},$$

$$\text{Стандарт хазайлт: } C.X. = \sqrt{\frac{\sum (x - \bar{x})^2}{n}} = \sqrt{\frac{\sum x^2}{n} - \bar{x}^2}$$

Давтамжийн хүснэгтэд өгсөн өгөгдөл.

$$\text{Арифметик дундаж : } \bar{x} = \frac{\sum xf}{\sum f},$$

$$\text{Стандарт хазайлт: } C.X. = \sqrt{\frac{\sum(x-\bar{x})^2 f}{\sum f}} = \sqrt{\frac{\sum x^2 f}{\sum f} - \bar{x}^2}$$

Жишээ 3. Нэг төрлийн 24 удаагийн туршилтын үр дүнг $\sum(x-a) = -73.2$ ба $\sum(x-a)^2 = 2115$ байдлаар өгчээ. Хэрэв x туршилтын арифметик дундаж 8.95 бол

- a. a тогтмол тоог ол.
б. x -ийн стандарт хазайлтыг ол.

Бодолт. а. $n = 24$ ба арифметик дундаж нь 8.95 гэдгээс $8.95 = \frac{\sum(x-a)}{24} + a$ буюу $8.95 = \frac{-73.2}{24} + a$ болно. Иймд $a = 8.95 + 3.05 = 12$ болно.

- б. Эхлээд $(x-a)$ өгөгдлийн стандарт хазайлтыг ольё.

$$C.X. = \sqrt{\frac{\sum(x-a)^2}{24} - (-3.05)^2} = \sqrt{\frac{2115}{24} - 3.05^2} = 8.8782\dots \text{ болно.}$$

Иймд x -ийн стандарт хазайлт $= (x-a)$ -ийн стандарт хазайлт $= 8.88$

34. 10 сурагчийн 100 метрт гүйсэн хугацааг иш-навчийн диаграммаар өгчээ.

12	8			
13	4 6 6 8	Tүлхүүр:	12 8	гэдэг бол 12.8 секунд
14	7 9			
15	0 7			
16	4			

Хугацааны арифметик дундаж болон стандарт хазайлтыг ол.

35. 20 сурагчийн тоглоомын онооны үр дүнг дараах давтамжийг хүснэгтэд өгчээ.

Оноо	1	2	4	x
Давтамж	2	5	7	6

Онооны арифметик дундаж 5 байхад

- а. x -ийг ол.
б. Стандарт хазайлтыг ол.

36. 60 сурагчийн IQ тестийн оноог дараах хүснэгтэд өгчээ. Энэ өгөгдлийн арифметик дундаж болон стандарт хазайлтыг ол.

Оноо	100 – 106	107 – 113	114 – 120	121 – 127	128 – 136
Давтамж	8	13	24	11	4

37. Санамсаргүй сонгон авсан сургуулийн сурагчдын наасны мэдээллийг хүснэгтэд өгчээ. Өгөгдлийн дундаж нас болон стандарт хазайлтыг ол.

Нас, (x жил)	$5 \leq x < 7$	$7 \leq x < 11$	$11 \leq x < 16$	$16 \leq x < 18$
Давтамж	127	350	576	398

- 38.** 21 хүн хэмжээгээрээ ижил модыг хөрөөдөхөд зарцуулсан хугацаа өгчээ.

11	53	72	48	49	39	87
73	23	120	24	61	36	66
67	144	78	70	42	53	133

а. Өгөгдлийн арифметик дундгийг ол.

б. Өгөгдлийн стандарт хазайлтыг ол.

БҮЛГИЙН НЭМЭЛТ ДААЛГАВАР

- 1.** Багш 30 сурагчид тус бүр 20 ширхэг бодлого бодох даалгавар өгчээ. Сурагч бүрийн бодсон бодлогын тоог доор харуулав.

0, 3, 4, 5, 5, 5, 7, 8, 9, 9, 10, 10, 11, 11, 12, 12, 12, 13, 13, 14, 14, 14, 15, 16, 16, 17, 17, 17, 18, 19

а. Өгөгдлийг иш-навчийн диаграммаар дүрсэл.

б. Өгөгдлийн моод, медиан, арифметик дундгийг ол.

в. Өгөгдлийн давтамжийн хүснэгтийг байгуулж, гистограммыг зур.

- 2.** Дараах иш-навчийн диаграммаар нэг наст 30 хус модны жинг дүрсэлжээ.

132	2 9	(2)	
133	2 6 8 9	(4)	
134	1 1 2 2 2 4 5 6 7 7 7 8 9	(13)	Түлхүүр: $135 0$ гэдэг бол 1.350
135	0 1 1 3 3 3 4 4 6	(9)	килограмм
136	2	(2)	
137	0	(1)	

а. Диаграммыг ашиглан өгөгдлийг өсөх эрэмбээр бич.

б. Өгөгдлийн моод, медиан, арифметик дундгийг ол.

- 3.** Дараах өгөгдөл бүрийн хувьд хайрцган диаграммыг байгуул.

а. Хөл бөмбөгийн баг 15 удаа тоглож дараах оноо авчээ.

1, 0, 2, 4, 0, 1, 1, 2, 5, 3, 0, 1, 2, 2

б. Хоёр шоо орхиход буусан нүдний нийлбэрийн мэдээлэл өгөв.

7, 4, 5, 7, 3, 2, 8, 6, 8, 7, 6, 5, 11, 9, 7, 3, 8, 7, 6, 5

в. Сурагч 100 метрт гүйх хугацаа өгөв

14.0, 14.3, 14.1, 14.3, 14.2, 14.0, 13.9, 13.8, 13.9, 13.8, 13.7, 13.8, 13.8, 13.8

г. Нэг сарын хугацаанд ангид хэдэн хүүхэд хичээллэснийг ирцийн бүртгэлээс түүвэрлэвэл:

28, 24, 25, 28, 23, 28, 27, 26, 27, 25, 28, 28, 28, 26, 25, 26, 28, 27, 28, 25, 27, 26

- 4.** Нийслэлийн 63 оршин суугчаас өглөө ажилдаа ирэхдээ зарцуулдаг хугацааны судалгаа хийжээ. Үр дүнг дараах хуримтлагдсан давтамжийн хүснэгтэд нэгтгэн үзүүлэв.

Хугацаа (минут)	≤ 10	≤ 25	≤ 45	≤ 60	≤ 80
Хуримтлагдсан давтамж	0	18	50	59	63

а. Хуримтлагдсан давтамжийн графикийг байгуулж, өгөгдлийн медиан, квартилийг ол. Хайрцган диаграммыг байгуул.

б. Ажилдаа ирэхдээ 25 минутаас 45 минут зарцуулдаг нийт хэдэн хүн байна вэ? Гистограмм байгуул.

- в. Ажилдаа ирэхэд зарцуулдаг дундаж хугацааг ол.
5. А, Б үйлдвэрт үйлдвэрлэсэн бүтээгдэхүүний дээжийг жинлэж, үр дүнг доор килограммаар үзүүлэв.
- | | | | | | | | |
|-----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| А үйлдвэр | 0.049 | 0.050 | 0.053 | 0.054 | 0.057 | 0.058 | 0.058 |
| | 0.059 | 0.061 | 0.061 | 0.061 | 0.063 | 0.065 | |
| Б үйлдвэр | 0.031 | 0.056 | 0.049 | 0.044 | 0.038 | 0.048 | 0.051 |
| | 0.064 | 0.035 | 0.042 | 0.047 | 0.054 | 0.058 | |
- а. Өгөгдлийг хоёр талт иш-навчийн диаграммаар дурсэл.
 б. Б үйлдвэрийн бүтээгдэхүүний медиан болон квартил хоорондын далайцыг ол.
 в. Дундаж болон хазайлтыг олж, хоёр үйлдвэрийн бүтээгдэхүүнийг харьцуулж дүгнэлт хий.
6. Наадмын бэлтгэлд гарсан хоёр бөхийн галын бөхчүүдийн жинг хүснэгтэд өгчээ.
- | | | | | | | | | | | | | | | | |
|-------|----|----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|----|-----|-----|----|-----|----|
| А гал | 97 | 98 | 104 | 84 | 100 | 109 | 115 | 99 | 122 | 82 | 116 | 96 | 84 | 107 | 91 |
| Б гал | 75 | 79 | 94 | 101 | 96 | 77 | 111 | 108 | 83 | 84 | 86 | 115 | 82 | 113 | 95 |
- а. Б галд шинэ бөх ирэхэд галын бөхчүүдийн дундаж жин 93.9 кг болов.
 Шинээр ирсэн бөхийн жинг ол.
 б. Өгөгдлийг хоёр талт иш-навчийн диаграмм, хайрцган диаграммаар дурсэл.
 в. Дундаж болон хазайлт ол.
7. Хүснэгтэд 60 охин, 60 хөвгүүний өндрийг хэмжихэд гарсан үр дүнг өгчээ.
- | Охидын өндөр (см) | $140 < h \leq 150$ | $150 < h \leq 160$ | $160 < h \leq 170$ | $170 < h \leq 180$ | $180 < h \leq 190$ |
|-------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| Давтамж | 12 | 21 | 17 | 10 | 0 |
- | Хөвгүүд өндөр (см) | $140 < h \leq 150$ | $150 < h \leq 160$ | $160 < h \leq 170$ | $170 < h \leq 180$ | $180 < h \leq 190$ |
|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| Давтамж | 0 | 20 | 23 | 12 | 5 |
- а. Хоёр өгөгдлийн хуримтлагдсан давтамжийн графикийг байгуулж, уг графикийг ашиглан хайрцган диаграммыг байгуул.
 б. Дундаж болон хазайлтыг ол.
8. 30 сурагчаас тест авчээ. Тэдний авсан оноог x гэвэл арифметик дундаж нь 60 ба стандарт хазайлт нь 20 байв.
- а. $\sum x^2 = 120000$ бол $\sum x$ -ийг ол.
 б. Өөр 20 сурагчаас мөн адил тест авчээ. Тэдний авсан оноо у гэвэл $\sum y = 1400$ ба $\sum y^2 = 100000$ байв.
 Эдгээр 50 сурагчийн онооны арифметик дунджийг ол.
 в. Мөн 50 сурагчийн онооны стандарт хазайлтыг ол.
9. Хэрэв $3, 6, 7, a, 14$ тоонуудын дундаж нь 8 бол эдгээр тоонуудын стандарт хазайлтыг ол.
10. Хэрэв $\sum (x - \bar{x})^2 = 234$ байх 9 тоо өгсөн бол эдгээр тоонуудын стандарт

хазайлтыг ол.

11. Хэрэв $\sum(x - \bar{x})^2 = 60$ ба $\sum x^2 = 285$ байх 12 тоо өгсөн бол эдгээр тооны арифметик дундаж ба стандарт хазайлтыг ол.

12. Хэрэв $\sum f = 20$, $\sum x^2 f = 16143$, $\sum xf = 563$ бол стандарт хазайлтыг ол.

13. $n=100$, $\sum(x - 50) = 123.5$ ба $\sum(x - 50)^2 = 238.5$ байх өгөгдлийн арифметик дундаж болон стандарт хазайлтыг ол.

14. 18 хүний насны мэдээлэл дараах байдлаар өгчээ. $\sum x = 745$, $\sum x^2 = 33951$

а. Уг 18 хүний насны арифметик дундаж болон стандарт хазайлтыг ол.

б. Уг 18 хүнээс нэг хүнийг хасахад үлдсэн 17 хүний насны дундаж 41 болов. Тэгвэл хасагдсан хүний нас болон үлдсэн 17 хүний насны стандарт хазайлтыг ол.

15. 100 туршилтын арифметик дундаж 25 байв. Тэгвэл дараах илэрхийллийн утгыг ол.

а. $\sum x$ б. $\sum(x - 20)$ в. $\sum(x - 27)$

Хэрэв дээрх туршилтын стандарт хазайлт нь 3 бол дараах илэрхийллийн утгыг ол.

г. $\sum x^2$ д. $\sum(x - 20)^2$ е. $\sum(x - 27)^2$

16. Дараах хүснэгтэд 20 эрэгтэй, 30 эмэгтэй сурагчийн өндрийн дундаж болон стандарт хазайлтыг үзүүлжээ. Нийт 50 сурагчийн өндрийн арифметик дундаж болон стандарт хазайлтыг ол.

	Дундаж өндөр	Стандарт хазайлт
Эрэгтэй сурагчид	160 см	4 см
Эмэгтэй сурагчид	155 см	3.5 см

17. Чихрийн үйлдвэрийн нэг чихрийн хэвийн жин нь 75 грамм байдаг. Санамсаргүйгээр сонгон авсан 10 чихрийг хэмжиж, мэдээллийг граммаар өгчээ.

76.0 74.2 75.1 73.7 72.0 74.3 75.4 74.0 73.1 72.8

а. Өгөгдлийн арифметик дундаж болон стандарт хазайлтыг ол.

б. Хэмжилт хийсний дараа 10 чихрийг хэмжихдээ 3.2 грамм алдаж хэмжсэнээ мэджээ. Зөв жингийн хувьд арифметик дундаж болон стандарт хазайлтыг ол.

18. Сурагч Доржийн 20 судоку нөхөхөд зарцуулсан хугацааны мэдээллийг $\sum(x - 30) = -50$, $\sum(x - 30)^2 = 562$ томьёогоор өгчээ. Тэгвэл түүний судоку нөхөхөд зарцуулсан хугацааны дундаж болон стандарт хазайлтыг ол.

19. 30 сурагчийг тестээр шалгахад тэдний авсан онооны арифметик дундаж нь 60 ба стандарт хазайлт нь 20 байв.

а. $\sum x^2 = 120000$ бол $\sum x$ -ийг ол.

б. Дахин өөр 20 сурагчаас адил тест авахад $\sum y = 1400$ ба $\sum y^2 = 100000$ байв.

Эдгээр 50 сурагчийн онооны арифметик дунджийг ол.

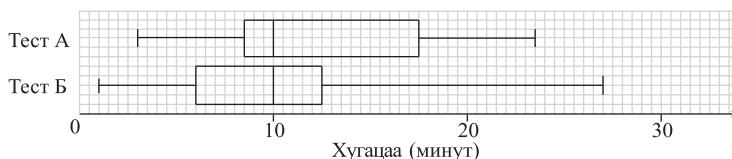
в. Мөн 50 сургачийн онооны стандарт хазайлтыг ол.

20. $n=100$, $\sum(x-50)=123.5$ ба $\sum(x-50)^2=238.5$ байх x өгөгдлийн арифметик дундаж болон стандарт хазайлтыг ол.

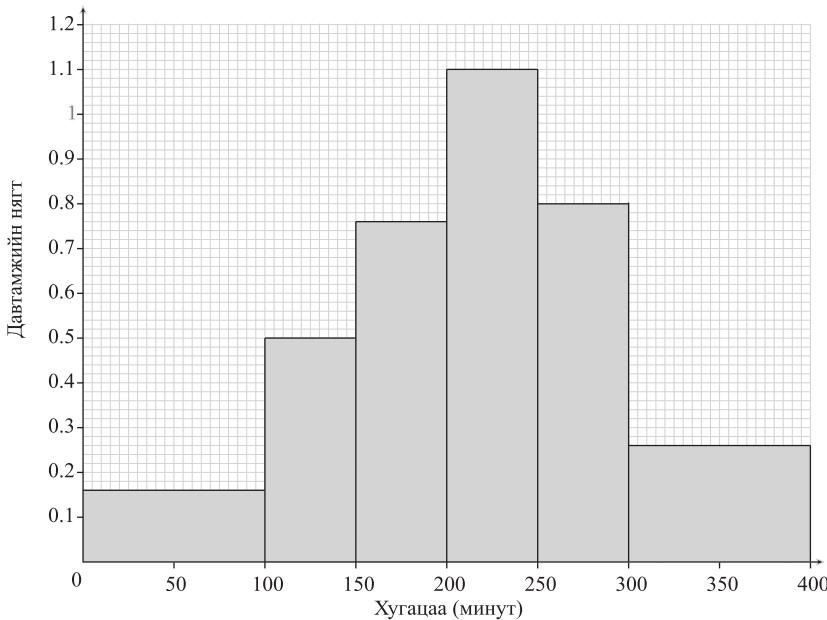
21. Дараах хүснэгтийн орхигдсон нүдийг нөх.

	n	$\sum x$	$\sum x^2$	\bar{x}	Стандарт хазайлт
а	63	7623	924800		
б		152.6		10.9	1.7
в	52		57300	33	
г	18			57	4

22. Сургчид математикийн хоёр тестийг бодоход зарцуулсан хугацааг доор хайрцган диаграммаар өгчээ. Хоёр өгөгдлийг харьцуулж, дүгнэлт хий.



23. Гистограммаар 200 машины зогсоолд зогссон хугацааг үзүүлжээ.

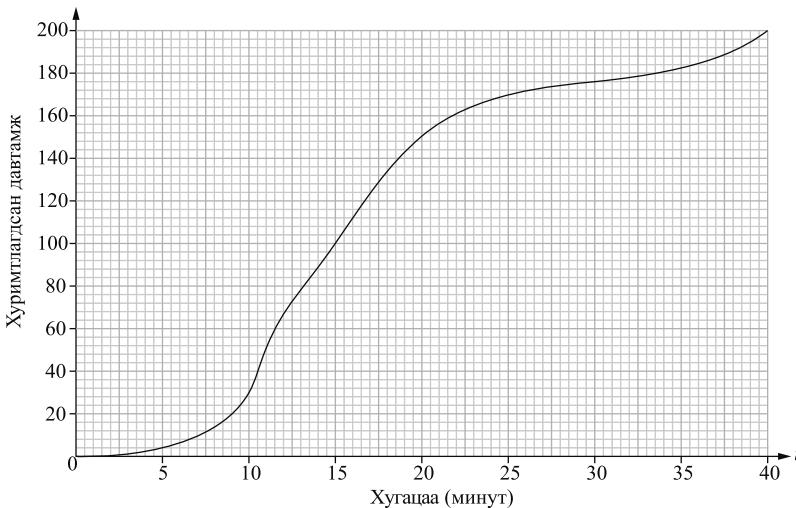


а. Өгөгдлийн давтамжийн хүснэгтийг байгуул.

б. Өгөгдлийн дундаж болон хазайлтуудыг ол.

в. Хуримтлагдсан давтамжийн график байгуулж, өгөгдлийн хайрцган диаграммыг байгуул.

24. Дараах хуримтлагдсан давтамжийн графикт 200 сургачийн гэрээсээ сургуульдаа ирэхэд зарцуулдаг хугацааг үзүүлжээ.



- а. Графикийг ашиглан өгөгдлийн хайрцган диаграммыг байгуул.
- б. $1 < t \leq 5$, $5 < t \leq 10$, ..., интервалын урт нь 4, 5, 5, 10, 5, 10 байхаар давтамжийн хүснэгтийг байгуулж, гистограммыг зур.
- в. Өгөгдлийн дундаж, хазайлтуудыг ол.
- 25.** “Улаанбаатар марафон” олон улсын бүх нийтийн гүйлтийн 10 км-ийн зайд гүйсэн 200 тамирчны хугацааг дараах хүснэгтэд өгчээ.

Хугацаа (t минут)	$30 < t \leq 40$	$40 < t \leq 45$	$45 < t \leq 50$	$50 < t \leq 55$	$55 < t \leq 60$	$60 < t \leq 80$
Давтамж	8	22	95	55	14	6

- а. Өгөгдлийн дундаж, хазайлтыг ол.
- б. Өгөгдлийг гистограммаар дүрсэл.
- в. Хуримтлагдсан давтамжийн хүснэгт болон графикийг байгуулж, хайрцган диаграммыг зур.
- 26.** Нэгдүгээр ангийн 120 сурагчаас 50 үгтэй эхийг уншуулж, гарсан үр дүнг дараах хүснэгтэд өгөв.

Хугацаа (секунд)	1-25	26-35	36-45	46-55	56-90
Сурагчийн тоо	4	24	38	34	20

- Өгөгдлийн арифметик дундаж, стандарт хазайлтыг ол.
- 27.** Шинээр мэндэлсэн 70 нярайн жинг дараах хуримтлагдсан давтамжийн хүснэгтэд өгчээ.

Жин (кг)	≤ 3.0	≤ 3.2	≤ 3.5	≤ 3.8	≤ 4.0	≤ 4.5
Хуримтлагдсан давтамж	0	6	18	41	62	70

- а. Өгөгдлийн хуримтлагдсан давтамжийн графикийг байгуул.
- б. 4.4 кг -аас дээш жинтэй нярай нийт нярайн хэдэн хувийг эзлэх вэ?
- в. Хуримтлагдсан давтамжаас давтамжийн хүснэгтийг байгуулж, гистограммыг зур.
- г. Шинээр мэндэлсэн 70 нярайн дундаж жин, стандарт хазайлтыг ол.

ХАРИУ

І БҮЛЭГ. КВАДРАТ ТЭГШИТГЭЛ БА ТЭНЦЭТГЭЛ БИШ.

5. б. $t = \frac{1}{2}$ в. $t < \frac{1}{2}$ **6.** в. $p = 0.2$ **8.** в. $0,2$ **9.** в. $0.4, 2.6$ **10.** в. $-4,1$ **12.** в. Ox тэнхлэгийг огтлохгүй **13.** $\mathcal{Q}(-3) = \mathcal{Q}(3)$, $\mathcal{Q}(\sqrt{3}) = \mathcal{Q}(-\sqrt{3})$ **17.** б. $\frac{-3 \pm \sqrt{2}}{7}$ **18.** д. \emptyset е. $x = \pm 8$ **19.** д. \emptyset е. $5, -2$ з. $1,6$ **20.** б. $5, -5$ **21.** а. $-1.8, 0.3$ в. ± 1.7 г. $8.5, 0.5$

д. $6.7, 0.3$ е. $-0.5, 7.5$ **22.** а. $1,2$ б. $\frac{-3 \pm \sqrt{13}}{2}, -3.3, 0.3$ **23.** а. \emptyset ё. $-1,2$ ж. $\sqrt[3]{-4}, \sqrt[3]{3}$

з. $9,25$ **24.** г. $-4, -3, 4$ **25.** $(-10, -6), (4, 8)$ **27.** а. 12 см б. 9.6 м^2 **28.** $10 \text{ км/ц}, 6 \text{ км/ц}$

29. 14 цаг 00 минут **30.** $4\sqrt{13}$ км/ц **31.** 20 км/ц **32.** 10 см **33.** а. $\sqrt{2}-1, \sqrt{2}+1$ в. 1 м^2

34. а. $x = 9$ **35.** $2\sqrt{15}$ **36.** 44 м **37.** $(8.5-4\sqrt{2}) \text{ см}$ **38.** а. $3\sqrt{5}$ б. $\frac{15-3\sqrt{5}}{4}$

39. б. 1.1 с **41.** г. $]-\infty, -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}, \infty[$ **42.** в. $]-\infty, -3[\cup \left] \frac{1}{3}, \infty \right]$ **43.** е. $]-4-\sqrt{3}, -4+\sqrt{3}[$

44. ё. $]-\infty, -3[\cup]2, \infty[$ **45.** $]3-\sqrt{10}, 3+\sqrt{10}[$ **46.** б. $]-2.5, 2.5[$ **47.** г. $]-2, \frac{4}{3}[$

48. б. $[-3, 0] \cup [2, \infty[$ **49.** а. $x > 5$ б. $49 < 55$ биелнэ **51.** в. $]-0.2, 3[$ **52.** г. $[-1.6, 1.6]$
ж. $]-1-\sqrt{13}, -1+\sqrt{13}[$ з. $]-\infty; 1[\cup]5; +\infty[$ **53.** а. $]-\infty, \infty[,$ д. \emptyset **55.** в. $2(x+1)^2 + 3 > 0$ **56.** г.
 $]-\infty, -0.2[\cup]1, \infty[$ д. $[-0.8, 1]$ **57.** б. $[-2, 2]$ г. $f(x) = -x^2 + 4$

Бүлгийн ишмэлт даалгавар.

3. а. $a=1$ б. $a < 1$ **5.** в. $-2.32, 4.32$ **7.** а. $1.37, -4.37$ **10.** г. $-0.5, 1.5$ **12.** б. $-2, 4$

13. в. $-4.7, 0.7$ **14.** в. $0.6, 2.4$ **15.** $(10, 15)$ ба $(-3, 2)$ **17.** 18 км/ц **18.** 4 км/ц **19.** 40

20. $x = 12.36$ **21.** $5 \text{ км/ц}, 15 \text{ км/ц}$ **22.** а. $x = 1$ б. 116 см^2 в. 80 см^3 **25.** в. $[-0.5, 3]$

27. в. $]-\infty, \infty[$ **31.** а. $]-\infty, 1] \cup [3, \infty[$ г. $f(x) = 2x^2 - 8x + 6$

II БҮЛЭГ. ТЭГШИТГЭЛИЙН СИСТЕМ

5. $(2, 3), (1, 6)$ **6.** а. $(3, 4), (4, 3)$ б. $(5, 2), (-1, -4)$ г. $(6, 1.5)$ **11.** $c = -4$ **12.** а. $(-3, -3), (1, 1)$

б. $(3, -2), (-2, 3)$ в. $(3, 6), (-2, 1)$ **13.** а. болно, б. болохгүй, в. болохгүй, г. болохгүй;

14. а. $x = \frac{7-3x}{2}, y = \frac{7-2x}{3}$ б. $x = \frac{1+5y}{3}, y = \frac{3x-1}{5}$, в. $x = \frac{10}{y+1}, y = \frac{10-x}{x}$, г. $x = \frac{y+1}{y-2}, y = \frac{2x+1}{x-1}$;

15. а. үгүй б. тийм, в. тийм, г. үгүй; **16.** а. тийм, б. үгүй, в. тийм, г. тийм; **18.** а. $(3, 1), (5, 3)$,

б. $(6.5, 1.5)$, в. $(16, 3)$, г. $(2, 1), (-\frac{2}{3}, -6)$, д. $(8, 6), (-\frac{32}{13}, \frac{126}{13})$ е. \emptyset , ё. $(2, \frac{1}{3})$, ж. $(3, 3), (-3, -3)$;

19. а. $(3, 1), (-3, -2)$, б. $(3, -5), (5, -8)$, в. $(-1, 1), (-3, 2)$; **20.** а. 12 ба 8 , б. -27 ба 30 ; **21.** а. 21 ба

20 б. 12 ба 16 ; **22.** 20 минут, 30 минут; **23.** $4:3$; **24.** $60\%, 40\%$; **26.** а. $x = -\frac{11}{7}, y = \frac{1}{7}$,

б. $x = -1, y = 1$; **27.** а. $p \neq 6$, б. $p \neq \pm 3$, в. $p \neq 1$, г. $p \neq -1$; **28.** а. $\left(7, -\frac{7}{2}\right)$, б. $(1, -1)$, в. $(3, -1)$ г. $(1, 1)$, д. $(2, 1)$, е. шийдгүй; **30.** а. $(-2, -3, -1)$, б. $(-14, -1, 3)$, в. $(-13, 9, 4)$, г. $(86, 16, -3)$;

31. Г; **32.** а. $(8a-11, 8-4a, a)$, $a \in \mathbb{R}$, б. $\left(\frac{4a+50}{11}, \frac{5a-9}{11}, a\right)$, $a \in \mathbb{R}$; **33.** а. $45^\circ, 130^\circ, 5^\circ$; б. $(3, 7, 11)$;

34. $(-1, -5, 6)$; **35.** $3x^2 - 2x + 1$; **37.** а. $(-3, 2, -1)$, б. $(2, 3, 1)$, в. $(2, -4, 1)$, г. \emptyset , д. $\left(-\frac{2}{11}, -3, -\frac{14}{11}\right)$,

е. $(-7c - 20, 4c + 10, c)$, $c \in \mathbb{R}$;

Бүлгийн нэмэлт даалгавар

5. а. $x = \frac{12-2y}{5}$, $y = \frac{12-5x}{2}$, б. $x = \frac{6+3y}{20}$, $y = \frac{6+3y}{20}$, в. $x = \frac{12-y}{y}$, $y = \frac{12}{x+1}$,

г. $x = \frac{3y-3}{y-1}$, $y = \frac{3-x}{3-x}$; 6. а. тийм, б. тийм, в. тийм, г. үгүй; 7. а. тийм, б. тийм;

8. а. $(5,4)$, $(-3,-4)$, б. $(4,1), \left(-\frac{14}{5}, -\frac{12}{5}\right)$, в. $(4,1), \left(-\frac{3}{2}, -\frac{5}{6}\right)$, г. $(1,1), \left(-\frac{5}{14}, -\frac{12}{7}\right)$; 9. а. $(1,1)$,

б. $(1,1)$, в. $(2,-1)$ г. $(2,2)$, д. $(1,-1)$, е. $(-2,3)$; 10. $(72, 35, 43)$; 12. а. $(7-3a, 2a-3, a)$, $a \in \mathbb{R}$, б. $(3,-2,1)$, в. $(1,-2,2)$; 13. $p = 1, (2-4a)$; $a \in \mathbb{R}$; 14. Зөв хариу В; 15. 6/7 цаг; 16. 12 га;

III БҮЛЭГ. ФУНКЦ БА ГРАФИК

1. $a = 1$, $b = 2$ 2.2 3. Үгүй $x \neq 2$ үед адилтгал тэнцүү байна 5. Ё. $y = 0.81x + 7000$

Энд x - үндсэн цалин, y - гар дээр ирэх мөнгө, нэг нэгжид 100000Т-харгалзана. Хөдөлмөрийн хөлслний доод хэмжээ 198000 төгрөг тул $x \geq 198000$ байна.

6. $y = 114.73x + 2200$ Энд x нь хэрэглэсэн цахилгааны хэмжээ бөгөөд киловаттаар хэмжигдэнэ (нэг нэгжид 10 киловатт харгалзана). y нь сарын нийт төлбөр бөгөөд төгрөгөөр хэмжигдэнэ (нэг нэгжид 1000 төгрөг харгалзана).

7. $V = 2\sqrt{3}(x^3 - 12x^2 + 36x)$. 8. $y = x^3 - 12x^2 + 36x$. Энд x нь трапецын нөгөө хоёр оройн (парабол дээр орших) абсцисс ба $0 < x < 3$ байна. y нь трапецын талбайг илэрхийлнэ.

9. $S = 4(4 - x^2)$. Энд x нь тэгш өнцөгтийн нөгөө тал параболтой огтголлох цэгийн абсцисс ба $0 < x \leq 4$ байна. 10. а, в, д 11. $a = 2$, $b = 5$ 12. $c = -5$ 13. $a = 27$, $b = 6$ тул $a+b = 27+6 = 33$ гарна. 14. Нийт функцийн тоо 256, харилцан нэг утгатай функцийн тоо 24 байна. 15. 4, 8 16. а. $f(g(x)) = 2x^2 - 4$ б. $g(f(x)) = 4x^2 + 8x + 1$ в. $f(f(x)) = 4x + 6$

г. $g(g(x)) = x^4 - 6x^2 + 6$ 17. $-\frac{5}{3}, \frac{1}{3}$ 18. $k = 0$ 19. а. $f(g(x)) = x^{\frac{1}{3}} + 1$, $D = \mathbb{R}$

б. $f(h(x)) = \frac{2}{x} + 1$, $x \neq 0$ в. $g(f(x)) = (2x+1)^{\frac{1}{3}}$, $D = \mathbb{R}$ г. $g(g(x)) = x^{\frac{5}{9}}$, $D = \mathbb{R}$,

д. $f(f(x)) = 4x + 3$ 20. а. $x, [0, +\infty[$ б. $x^{\frac{5}{2}},]-\infty, 0]$ в. $x^6, [0, +\infty[$ г. тодорхойлогдохгүй д. \sqrt{x} ,

[0, +\infty[е. тодорхойлогдохгүй ё. $|x|,]-\infty, +\infty[$ ж. тодорхойлогдохгүй з. тодорхойлогдохгүй и. тодорхойлогдохгүй ѹ. $x^6,]-\infty, +\infty[$ к. $x^{\frac{3}{2}},]-\infty, +\infty[$ 22. $a = 1$, $b = 0$ 23. $x = 1, 2, 4, 5, 7, 8, 10$

24. $f(2) = 4$, $g(4) = 2$, $f(4) = 1$ 25. $f(1) = -1$ 26. 0 27. $f(3) = c$ 28. $f(2) = 2$,

$f(-2) = 0$ 30. а, в, г, 31. $f(2) = c$, $f^{-1}(c) = 2$, $f(f^{-1}(2)) = 2$, $f^{-1}(f(c)) = c$ 32. 6 33. а.

$y = -3x + 6$ б. $y = \sqrt{x+2}$ 34. а. $f^{-1}(x) = \frac{x-5}{2}$ б. $g^{-1}(x) = \frac{-x-1}{3}$ в. $(gf)^{-1}(x) = \frac{-x-16}{6}$

г. $(fg)^{-1}(x) = \frac{-x+3}{6}$ д. $g^{-1}(f^{-1}(x)) = \frac{-x+3}{6}$ е. $f^{-1}(g^{-1}(x)) = \frac{-x-16}{6}$ 35. 4 36. $-\frac{3}{7}$

37. $a = \frac{1}{5}$, $b = -\frac{2}{5}$ 38. 0 39. 7 40. Бодлого 34-ийн в, г, д, е-тэй адил бодолт хийж батална уу.

41. $a = -3$, $b = 0$ тул нийлбэр нь -3 байна 42. $a+b$ 43. -8 44. а. $y = \sqrt{x-2} + 2$ б. $(2, 2)$,

$(3, 3)$, $\sqrt{2}$ 45. $a \leq \frac{1}{2}$ 46. 6 47. с 50. $b = 2, c = 54$ 51. $a = 3$, $b = 6$ 52. $a = -4, b = -12, c = -4$

тул үржвэр нь -192 гарна. **53.** $a = 2, b = -6, c = 6$ **54.** $a = -2, b = -8, c = -6$

55. $-2\sqrt{2} \leq y \leq 2$ **56.** $-\frac{1}{8} \leq y < 0$ **57.** а. тэгш ч биш, сондгой ч биш б. тэгш ч биш, сондгой ч биш в. тэгш ч биш, сондгой ч биш г. тэгш д. тэгш е. сондгой **58.** а. тэгш б. тэгш в. сондгой г. тэгш ч биш, сондгой ч биш д. сондгой е. тэгш ч биш, сондгой ч биш **59.** 0

60. $b = 0, c = 5$ **61.** $a = 1, b = 0, c = -3$ **62.** $b = 0$ **63.** a тэгээс ялгаатай бодит тоо, $b = 0$

БҮЛГИЙН НЭМЭЛТ ДААЛГАВАР

2. $x \in [0, +\infty[$ **3.** а. $]-\infty, +\infty[$, **3.** $[3, +\infty[$, биш б. $]-\infty, +\infty[$, **3.** мөн в. $]-\infty, +\infty[$,

4. а. $\sqrt{x-4}$ б. $\sqrt{x+2}$ в. $\frac{1}{x-3}$ г. $\sqrt{|x-3|}$ д. $(16-x^2)^{\frac{1}{4}}$ е. $\frac{1}{\sqrt{-x-2}}$

5. а. $y = f(h(x))$ б. $y = f(g(x))$ в. $y = h(h(x))$ г. $y = h(g(x))$ д. $y = h(f(x))$

е. $y = g(f(h(x)))$ ё. $y = h(f(g(x)))$ **6.** $a_1 = 4.5, b_1 = 10, a_2 = 4, b_2 = 11$ **7.** $a + 4b = 1$

10. а. $\frac{x+1}{5}$ б. $3(x-5)$ в. $\sqrt[3]{x-1}$ г. $\frac{4x+7}{3}$

IV БҮЛЭГ. ПРОГРЕСС БА БИНОМ ЗАДАРГАА

2. а. $a_n = 5$, б. $a_n = 3^{n-1}$, в. $x_n = (-1)^{n-1} \cdot 3$, **3.** 8, **7.** а. $a_n = 10n - 8$, в. $a_n = 12n - 195$,

г. $a_n = -3n + 100$, **8.** а. $\frac{1}{3}$, б. $a_{38} = 22$, г. $a_n = \frac{n+28}{3}$, **9.** а. $\frac{a_{23}-a_1}{22}$, г. $\frac{a_n-a_{15}}{n-15}$,

10. а. $-20n + 27$, б. $\frac{3n-1}{2}$, **12.** а. 3, б. $-\frac{10}{11}$, в. $-6, 5$, г. $4, -3$, **13.** 3.5, **14.** $-3, 16$. а. $3n - 10$,

б. $-2n + 8.5, -2n + 5$ в. $-2n + 7, -2n + 5$ г. $3n, 15n - 48$, **17.** 8.5, 2, **18.** -296 , **19.** а. 14 ба 16, б. 312,

20. а. 1575, б. 541.5, в. -1144 , **21.** а. 12742, б. 210600, в. -4575 , г. 1512, **22.** а. $\sum_{k=1}^5 (-2k + 11)$,

б. $\sum_{k=20}^{42} 3k$, в. $\sum_{k=1}^n (24n - 14)$, **23.** а. 4, б. 1701, **24.** а. $3n^2 + 7n + 4$, б. $3n^2 - 7n$, в. $-0.2n^2 + 15.8n$,

г. $4.5n^2 + 2.5n - 48$, д. 51.2, **25.** а. 728, б. 741, **26.** а. x^{-206} , б. $x^{0.5n-0.5n^2}$, **28.** 837, **29.** 155,

30. а. 14, б. 50 см, **31.** $\frac{4n-1}{8n-1}$, **37.** а. $2 \cdot 5^{n-1}$, в. $3 \cdot \left(\frac{8}{3}\right)^{n-1}$, **38.** а. $32 \cdot \left(\pm \frac{3}{2}\right)^{n-1}$, в. $-3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-12}$,

39. г. $12 \cdot \left(\pm \frac{3}{2}\right)^{n-8}$, **40.** а. $\frac{b_2}{b_1}$, б. $\sqrt[7]{\frac{b_{20}}{b_{13}}}$, в. $\pm \sqrt[12]{\frac{b_{29}}{b_{17}}}$, **42.** $x = \pm \sqrt{ab}$, **43.** $q = \pm \sqrt[3]{256}$, $x = \pm \sqrt[3]{16}$,

44. ± 3 , **45.** $2^{11} \cdot 3^9$, **47.** а. $2 \cdot 3^{n-2}, (-2)^{6-n}$ б. $b_n = 3^{\frac{n+2}{3}}$, в. 2^{2n-1} , **48.** $2^{2n-1}, 2^{-2n+7}$,

49. а. $\sum_{k=1}^4 6 \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$, б. $\sum_{k=1}^{35} 3^{\frac{k+1}{2}}$, в. $\sum_{k=5}^{17} 5 \cdot 2^{k-5}$, г. $\sum_{i=1}^m -(-2)^{i-4}$, **50.** а. $\frac{8}{3} \left(\left(\frac{7}{4}\right)^{13} - 1 \right)$,

в. $243 \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{13} \right)$, **51.** а. 255, б. 1093, в. 547, г. $\frac{1}{3} \cdot \frac{2047}{2048}$, ё. $\frac{1}{9} \left(1 - \frac{1}{10^{18}} \right)$, **52.** а. $\sum_{k=1}^8 2^{k-1}$,

б. $\sum_{i=1}^7 3^{i-1}$, в. $\sum_{i=1}^7 (-3)^{i-1}$, д. $\sum_{k=1}^8 3^{6-k}$, е. $\sum_{k=1}^8 37 \cdot 10^{2-k}$, ё. $\sum_{k=1}^{18} 10^{-k}$, ж. $\sum_{k=1}^{34} 10^{5-k}$, **53.** а. $2^n - 1$,

б. $2^{n+2} - 1$, в. $\frac{3^n - 1}{4}$, г. $\frac{729}{32} \left(\left(\frac{3}{2}\right)^{n-4} - 1 \right)$, е. $\frac{1}{9} \left(1 - \frac{1}{10^n} \right)$, **54.** 6 ба 5 $\cdot 6^{11}$,

55. а. $b_1 = \pm \frac{1024}{3}$, $b_3 = \pm 192$, $b_5 = \pm 108$, б. $b_1 = \sqrt{18}$, $b_3 = 6\sqrt{3}$, $b_5 = 36\sqrt{3}$, **57.** а. $\frac{a^3 + 1}{a - 1}$,

6. $a^7 + 1$, в. $x^5 - 1$, г. $\frac{1}{x+1}$, 58. 2, 4, 8 эсвэл -6, 12, -24, 59. $x = 3$, $n = 8$, 60. 2, 5, 8,

61. 9600, 2550, 62. $\frac{2025}{128}$, 63. $\left(\frac{113}{100}\right)^{10} \cdot a$, 64. а. 5 дахь савлалт, б. $300 - \frac{3^{21}}{10^8}$,

Бүлгийн нэмэлт даалгавар

1. $3n - 9$, 2. $54 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{n-4}$, 3. а. 3441, б. $\frac{45}{2} \left(1 - \frac{1}{3^{12}}\right)$, 4. а. 21, б. 126 км, 6. 2, 4, 8 эсвэл 8, 4, 2,

7. $3 \cdot 2^{n-1}$ эсвэл $3 \cdot 2^{3-n}$, 8. а. $\frac{n^2 + n + 6}{2}$, б. $\frac{7n^2 + 3n - 124}{2}$, в. $8 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{28} - \frac{16}{3}$, 9. а. 1210000 төгрөг

б. 20 сая 7 зуун 60 мянга, 10. а. $\frac{6}{5}$ ба $\frac{18}{25}$ б. $\frac{3}{5}$, в. $4 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^{2n}$, г. $\frac{9}{4} \cdot \left(1 - \left(\frac{3}{5}\right)^{2n}\right)$

11. $\frac{4(8^{n+1} - 1)}{21}$, 12. 160 м, 13. -2:1:4, 14. $\frac{465}{32}$, 15. $m = 15$, 16. 50, 17. 36, 18. а. $a = 3$

ба $b_1 = 4$ б. 1053, 19. а. $a = 3$ ба $b_1 = \frac{20}{3}$, б. $\frac{290}{3}$, 20. 12, 5, -2 эсвэл -2, 5, 12, 23.
 $a_{30}, a_{31}, a_{32}, a_{33}, a_{34}$ 24. а. 23 б. 2208 в. 15936

В БҮЛЭГ. КООРДИНАТЫН АРГА

1. а. Нэг шулуун дээр оршино. б. Нэг шулуун дээр оршихгүй. в. Нэг шулуун дээр оршино. г. Нэг шулуун дээр оршихгүй. д. Нэг шулуун дээр оршино. е. Нэг шулуун дээр оршино. 2. а. аль нь ч биш. б. перпендикуляр в. параллел г. перпендикуляр 3. $k = \frac{11}{7}$

4. $k = 4$ 5. $k = \frac{26}{3}$ 6. $k = \frac{3}{2}$ 7. а. $k = -9$ б. $k = 30$ 9. а. $P(9, 0)$ б. $K(0, 17)$ 10. $M(2, 1)$

11. 1 12. а = 1 13. $k = 1.5, |MC| = \frac{3\sqrt{5}}{2}$ 17. а. квадрат б. трапец в. тэгш өнцөгт

г. параллограмм 18. параллограмм 19. а. биш б. мөн в. биш г. мөн

20. а. $y - 5x + 16 = 0$ б. $y = \frac{2}{3}x$ в. $3y - 40x + 68 = 0$ г. $4y - 12x + 11 = 0$ д. $y = 2x - 2$

е. $6y - x - 27 = 0$ 21. а. $3y + x + 4 = 0$ б. $y - 5x + 3 = 0$ в. $y - 6x = 16$ г. $18y + 2x + 71 = 0$

д. $10y + 2x = 13$ е. $5y - x = 16$ 22. а. $3y - 4x - 11 = 0$ б. $2y - 3x - 8 = 0$ в. $5y - 12x = 29$

23. а. $13y - 4x + 64 = 0$ б. $y - 8x - 28 = 0$ в. $8y - 17x + 83 = 0$

24. $y + 6x + 7 = 0, y = 1, \left(-\frac{4}{3}, 1\right)$ 25. $2y - 5x - 13 = 0$ 26. $y - x - 7 = 0, x = 4, (4, 11)$

27. $(-1, 2), (2, 2), (-1, -4), S = 9$ н.кв 28. $4y + x - 19 = 0, y - x - 1 = 0, D(3, 4)$ 29.

$11y + 4x - 47 = 0$ 30. $(5, -1), (-1, -2), (-3, 5)$ 31. $m = -\frac{1}{3}, 3y + x - 1 = 0$ 32. а. Oxz хавтгай дээр б. Oz тэнхлэг дээр в. Oyz хавтгай дээр г. Ox тэнхлэг дээр д. Oxy хавтгай дээр е.

Oy тэнхлэг дээр 36. а. $D(4, -4, 0), C_1(0, -4, -4), A_1(4, 0, -4), D_1(4, -4, -4)$

б. $B(-2, 0, 0), A_1(0, 0, -2), B_1(-2, 0, -2), D_1(0, -2, -2)$

37. а. $C(1, 3, 0), B_1(1, 0, 2), C_1(1, 3, 2), D_1(0, 3, 2)$

б. $D(-2, -5, 0), A_1(-2, 0, 1), C_1(0, -5, 1), D_1(-2, -5, 1)$

38. $A_1(4, 0, 0), O(0, 0, 0), C_1(0, 5, 0), A(4, 0, 6), B(0, 0, 6), C(0, 5, 6), D(4, 5, 6)$

39. $A_1(4, -2, 0), B_1(0, -2, 0), C_1(0, 2, 0), A(4, -2, 4), B(0, -2, 4), C(0, 2, 4), D(4, 2, 4)$
40. 4 хувилбартай. $(0, 0, 1)$ оройн доод орой $(0, 0, -1)$ байна. Дээд талсын оройнууд $(-2, 0, 1), (-2, -2, 1), (0, -2, 1)$. Доод талсын оройнууд $(-2, 0, -1), (-2, -2, -1), (0, -2, -1)$. Бусад 3 хувилбарыг өөрсдөө ол. 41. 8 хувилбартай. Учир нь мөч бүрд нэг куб оршино. I хувилбар $(0, 0, 0), (0, 3, 0), (-3, 3, 0), (-3, 0, 0), (3, 0, 0), (0, 3, 3), (3, 3, 3), (-3, 0, 3)$ 42. $(3, 0, 0)$
43. Ox тэнхлэгт перпендикуляр цэгийн координат $(3, 0, 0)$, Oy тэнхлэгт перпендикуляр цэгийн координат $(0, -3, 0)$, Oz тэнхлэгт перпендикуляр цэгийн координат $(0, 0, 4)$, Oxy хавтгайд перпендикуляр цэгийн координат $(3, -3, 0)$, Oyz хавтгайд перпендикуляр цэгийн координат $(0, -3, 4)$, Oxz хавтгайд перпендикуляр цэгийн координат $(3, 0, 4)$
44. а. $A_1(-1, 2, 6), B_1(3, -5, -7), C_1(2, 4, 1)$ б. $A_2(-1, -2, -6), B_2(3, 5, 7), C_2(2, -4, -1)$
 в. $A_3(1, 2, -6), B_3(-3, -5, 7), C_3(-2, 4, -1)$ 45. а. $A_1(3, -2, 5), B_1(4, 1, 1), C_1(-2, -4, -3)$
 б. $A_2(-3, 2, -5), B_2(-4, -1, 1), C_2(2, 4, -3)$ в. $A_3(-3, -2, -5), B_3(-4, 1, -1), C_3(2, -4, 3)$
47. а. $\sqrt{33}, \left(1, -4, \frac{3}{2}\right)$ б. $2\sqrt{3}, (3, -3, 0)$ в. $3\sqrt{10}, \left(-\frac{1}{2}, -3, \frac{1}{2}\right)$ г. $5\sqrt{5}, \left(1, -\frac{1}{2}, 3\right)$ 48. а. C цэг координатын эхэд хамгийн ойр оршино. б. C цэг Oy тэнхлэгт хамгийн ойр оршино.
 в. A цэг Oxz хавтгайд хамгийн ойр оршино. 49. а. $(4, 0, 0)$ б. $(0, 20, 0)$ в. $(0, 0, 5)$
50. а. $\left(-\frac{39}{10}, \frac{57}{20}, 0\right)$ б. $\left(0, \frac{21}{32}, \frac{39}{16}\right)$ в. $\left(\frac{7}{6}, 0, \frac{19}{6}\right)$ 51. $(8, 0, 0), (-2, 0, 0)$ 52. $(0, 3, 0), (0, -5, 0)$
 53. $C(-3, 6, 1), D(-4, 11, 0)$ 54. $A(2, -11, 14), D(2, 4, -13)$ 55. $3\sqrt{2}$ 57. $P = 6 + \sqrt{2}$
 58. $(\frac{9}{4}, -\frac{9}{4}, \frac{3}{2})$ 59. а. $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$ б. $\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{5}{4}\right)$ в. $\left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{5}{4}\right)$ 63. а. $(2, 2, 0)$ б. $(12, -3, 7)$
- Бүлгийн нэмэлт даалгавар**
1. а. $k = -3, k = 3$ б. $k = -3 - \sqrt{3}, k = -3 + \sqrt{3}$ 2. $k = 3$ 4. $y - 2x - 3 = 0$ 5. $y + 2x - 5 = 0$
 6. $4y - x + 11 = 0$ 7. BC талыг агуулсан шулууны тэгшитгэл $y + 2x - 40 = 0$, DC талыг агуулсан шулууны тэгшитгэл $2y - x - 15 = 0$, $C(13, 14), |CD| = \sqrt{80}$ 8. $2y - x + 6 = 0$
 9. AP өндрийг агуулсан шулууны тэгшитгэл $y + 2x - 7 = 0$, $P(2, 3), S = 5$ н.кв., BH өндрийг агуулсан шулууны тэгшитгэл $y + 7x - 32 = 0$ 10. $z_1 = 2, z_2 = -4$ 11. $B(0, 5, 3)$
 13. $(6, -1, 2)$ 14. AD, AB талыг агуулсан шулууны тэгшитгэл $y + x = 0, y - x - 4 = 0, B(1, 5)$

VI БҮЛЭГ. ТРИГОНОМЕТР

2. 405° I мөч, бүгд нэмэх; 240° III мөч, синус, косинус хасах, тангенс нэмэх; -210° II мөч, синус нэмэх, косинус, тангенс хасах 3. а.I б.III в.II г.IV д. II 6. а. 115° б. 475°
 в. 835° г. 1195° д. 1555° 7. $0^\circ + 360^\circ k; 45^\circ + 360^\circ k; -45^\circ + 360^\circ k; 90^\circ + 360^\circ k$; 8. а. 90° б. 210°
 в. 330° г. 270° 9. 135° 10. $\frac{8}{3}$ 11. 52.3 12. 26.2 13. а. синус, тангенс хасах, косинус нэмэх б. синус, косинус хасах, тангенс нэмэх 14. а. -б.- в. + г.- д.- е.- ё.+ ж.- 15. а.IV б.I в.II
 г.III д. I е. IV 16. а.I ба III б. I ба IV в.I ба II 18. а. + б.- в. - г.- д. + е. + 21. а. 110° б. 45°
 в. -220° 22. а. $\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{\sqrt{3}}$ б. $\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1$ 24. а. 5 б. 2 в. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ г. $\frac{3+\sqrt{3}}{6}$ д. 4 е. 2
 ё. 3.5 ж. 1.5 26. а. 1 б. $\sqrt{2}$ в. 1 г.-1 27. а. $1 - 9\sqrt{3}$ б. $-8\sqrt{3}$ в. 0 28. а, б, д, ё болно
 29. в, г, е, ж болохгүй 30. а. 2; 1 б. 1; 0 в. 3; 2 г. 2; 1 31. а. $\cos^2 \alpha$ б. $-\sin^2 \alpha$ в. 1 г. $\sin^2 \alpha$

- д. $\sin^2 \alpha$ е. $-\cos^2 \alpha$ 32. а. $\sin \alpha = 0.8$, $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{4}{3}$ б. $\cos \alpha = -\frac{12}{13}$, $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{5}{12}$ в. $\cos \alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$,
 $\sin \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$ 33. а. олдоно б. олдохгүй 34. Алдаа гаргасан. 35. а. $-\operatorname{tg}^2 \alpha$ б. $-\frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha}$ в. $\sin^2 \alpha$
36. а. 1 б. 2 37. а. 0 б. 1 в. 4 г. 4 38. -0.18 40. а. 1 б. 1

VII БҮЛЭГ. ОГТОРГҮЙ ДАХЬ ВЕКТОР

2. $\vec{a} = \overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{DD_1}$ 4. а. $\overrightarrow{DN} = \overrightarrow{NA}$ б. $\overrightarrow{BS} = \overrightarrow{SD}$ в. \overrightarrow{MS} вектортой тэнцүү вектор олдохгүй.

5. е. $\overrightarrow{EC} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ ё. $\overrightarrow{HD} = -\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$ 7. 1) ж. $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$ ё. $\overrightarrow{B_1D} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$ 2) а. $k = 1$

б. $k = -1$ 8. а. $\overrightarrow{CD} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{CB}$ 12. 0 14. $\overrightarrow{MN} = -\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$ 15. а. \overrightarrow{AC} б. 0 в. \overrightarrow{EF} 16. а. $\overrightarrow{OA} = (5, 4, 3)$

18. а. $|\vec{a}| = \sqrt{29}$ 19. $x = \pm 2\sqrt{3}$ 20. а. $\overrightarrow{OA} = 4\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$ 21. а. $\vec{a} = (2, 3, -4)$ 30. $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{69}$ 32. а.

$\vec{a} + \vec{b} = (-5, -1, 3)$ 34. а. $\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$ 36. а. $\vec{b} = (-3, 8, -7), \vec{c} = (4, -12, 10)$ 37. а. $\overrightarrow{AD} = (0, -4, 0)$

38. а. $\overrightarrow{OF} = (0, 0, 4), \overrightarrow{OA} = (0, 8, 0)$ б. $\overrightarrow{OE} = (3, 0, 4)$ в. $\overrightarrow{LB} = (0, 0, -4)$ 39. а. $A(1, 0, 0), A(3, 0, 0)$

$B(0, 4 + \sqrt{13}, 0), B(0, 4 - \sqrt{13}, 0)$ 42. б болон дэх векторууд коллинеар байна. 43. $x = 1.6, y = -0.8$

44. $\vec{a} = \vec{e}$, $\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}$ векторууд коллинеар байна. 45. а. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 10$ 46. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -76$

VIII БҮЛЭГ. УЛАМЖЛАЛ

1. а. 0 б. $-\frac{4}{5}$ в. $-\frac{49}{50}$ 5. а. 6 б. 1 в. $2\sqrt{3}x_0 + 4$ г. $2x_0 - 1$ д. 6 е. -12 ё. $-\frac{19}{3}$ ж. -51 з. -2.5

и. -16 ю. -1 к. $-2\sqrt{6} - 2\sqrt{2} - \sqrt{3} - 2$ 8. а. $y' = -4x, y'' = -4$ б. $y' = 2x - 3, y'' = 2$

в. $y' = 6x - 7, y'' = 6$ г. $y' = 1, y'' = 0$ д. $y' = 10x + 2, y'' = 10$ 11. а. $20x^3$ б. $12x^{-5}$ в. 2 г. $\frac{6}{x^4}$

д. $x^{-\frac{5}{3}}$ е. 0 ё. 0 ж. $-\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}$ 13. а. $y' = 9x^2 - x + 1, y'' = 18x - 1$

б. $y' = 4x^3 + \frac{x^2}{2} - 2x - 5, y'' = 12x^2 + x - 2$ в. $y' = 8x^3 - x^2 + 2, y'' = 24x^2 - 2x$

г. $y' = \frac{3x^{\frac{1}{2}}}{2} - \frac{2x^{-\frac{1}{3}}}{9} + 1, y'' = \frac{3x^{-\frac{1}{2}}}{4} + \frac{2x^{-\frac{4}{3}}}{27}$ д. $y' = \frac{3x^{\frac{1}{2}}}{2} + \frac{2}{x^2}, y'' = \frac{3x^{-\frac{1}{2}}}{4} - \frac{4}{x^3}$

е. $y' = \frac{5x^{\frac{3}{2}}}{2} - x + \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}}, y'' = \frac{15x^{\frac{1}{2}}}{4} - 1 - \frac{1}{4x^{\frac{3}{2}}}$ 14. а. $f(g(x)) = (2x)^2 + 2x = 4x^2 + 2x$

б. $(f(g(x)))' = 8x + 2$ в. $f'(x) = 2x + 1, f'(g(x)) = 2(2x) + 1 = 4x + 1$ г. $g'(x) = 2$

д. $f'(g(x))g'(x) = (4x + 1)2 = 8x + 2$ е. $(f(g(x)))' = 8x + 2 = f'(g(x))g'(x)$

17. а. $\frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}}$ б. $\frac{5x^4 - 3}{2\sqrt{x^5 - 3x}}$ в. $\frac{5x}{\sqrt{1+5x^2}}$ г. $8x - 6$ д. $\frac{5x^4 + 2}{\sqrt{2x^5 + 4x - 2}}$ е. $\frac{20x}{3\sqrt[3]{5x^2 - 1}}$

ё. $\frac{2}{\sqrt[3]{x}} - \frac{2}{3\sqrt[3]{x^2}}$ ж. $12x^2(x^3 + 2)^3$ 18. а. $2(1 - 2x)^{-2}$ б. $3\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 \left(2x - \frac{2}{x^3}\right)$

в. $4\left(x - \frac{1}{x}\right)^3 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$ г. $3(x - x^3 + x^5)^2 (1 - 3x^2 + 5x^4)$ д. $-2(t^{-1} + t^{-2})(t^{-2} + 2t^{-3})$

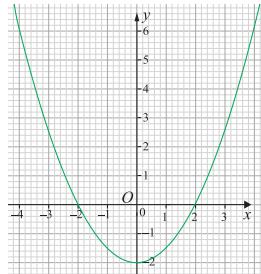
е. $-\left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + \frac{x}{1}\right)^{-2} (x^2 + x + 1)$ 19. а. $12(2x - 1)^5$ б. $2(2(x - 1)^2 + 1)(x - 1)$

- в. $2x+3$ г. $\left(3(x^{-2}+x^{-1})^2-1\right)(-2x^{-3}-x^{-2})$ д. $2x-\frac{2x}{(x^2+2)^2}$
- е. $12(3x+1)^3-\frac{12}{(3x+1)^5}$ 21. $x=25$ 22. а. 3 б. -3 в. 4 г. 45 д. -3 е. -8
23. а. $y+7x-3=0$, $7y-x-71=0$ б. $y=-7x+9$, $7y-x+37=0$ 24. а. $y=4x+9$
б. $y=4$ в. $y=-3x+1$ г. $y=3$ д. $y=4x-6$ е. $y+11x+5=0$ 25. а. $y=-5x-18$
б. $y=7x-4$ в. $y=8x-41$ г. $y=-x+4$ д. $y=2x+2$ е. $y=-x$ 26. а. $-x+4y=10$
б. $x+2y+1=0$ в. $x-2y+8=0$ г. $x-9y+10=0$ д. $x=0$ е. $x+y+4=0$
27. а. $y=-1.5x+2.5$ б. $-\frac{2}{3}$ 28. а. $3y+x-17=0$ б. $y+x-1=0$ в. $2y-x-7=0$
29. а. $y+4x+8=0$ б. $2y+x-17=0$ в. $3y-x-4=0$ 30. а. 12 б. $4x-1$ в. 11
г. $y=11x-21$ д. $11y+x=135$ 31. а. -8, $y'=-4x+7$, 11, $y=11x+3$, $11y+x+89=0$
б. 14, $y'=2x+3$, 7, $y=7x$, $x+7y=100$
- в. $111, y'=3x^2+12x+9$, 72, $y=72x-105$, $72y+x-7995=0$
г. 3, $y'=3x^2+6x$, 0, $y=3$, $x=-2$ д. -1, $y'=3x^2-6x$, -3, $y=-3x+2$, $3y-x=-4$
32. а. $(1,3), 3, y=3x$ б. $(3,4), \frac{2}{3}, -2x+3y=6$ в. $(-1,4), -\frac{1}{3}, x+3y=11$
г. $(2,5), -1, x+y=7$ д. $(4,3), 3, 3x-y=9$ е. $(3,2), \frac{5}{3}, 5x-3y=9$
33. Шүргэгч $y=x$, $y=-x$, нормаль $x+y=4$, $x-y=4$, $x+y=-4$, $x-y=-4$,
34. $y=-4x-8$, $y=4x-8$, $y=-4$ 35. $(7,0)$ 36. $(1,1)$ 37. а. $(1, 2)$, б. $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ 38. а. $y=27$,
 $y=-5$ б. $y=12$ в. $y=0$, $y=-32$ 39. $y=-5x+2$ 40. 135° 41. а. $]2.5, +\infty[$ б. $]6, +\infty[$
в. $]-\infty, -1.5[$ г. $]-\infty, -\frac{2}{3}[$ д. $]\frac{5}{6}, +\infty[$ е. $]-0.3, +\infty[$ ё. $x < 2$ буюу $4 < x$ ж. $0 < x < 2$
42. $-4 < k < 4$ 43. а. буурах завсар байхгүй б. $x < 2$ в. $-\infty < x < +\infty$ г. $x > 1.75$
д. $x < 1.5$ е. $x > -\frac{5}{14}$ ё. $-3 < x < -1$ ж. $x < 1$ буюу $3 < x$ 44. $k < -3$ 45. а. ёсөх завсар
 $x > -2$, буурах завсар $x < -2$ б. ёсөх завсар $x < -4$ буюу $-2 < x$ буурах завсар
 $-4 < x < -2$ в. ёсөх завсар $x < -3$ буюу $-1 < x$ буурах завсар $-3 < x < -1$ г. ёсөх завсар
 $x < -2$ буюу $0 < x$ буурах завсар $-2 < x < 0$ д. ёсөх завсар $-1 < x < 1$ буурах завсар $x < -1$
буую $1 < x$ е. ёсөх завсар $0 < x < 2$ буурах завсар $x < 0$ буюу $2 < x$ ё. ёсөх завсар $x < 1$
буую $3 < x$ буурах завсар $1 < x < 3$ ж. ёсөх завсар $x < 2$ буюу $4 < x$ буурах завсар
 $2 < x < 4$ з. ёсөх завсар $x < 3$ буюу $5 < x$ буурах завсар $3 < x < 5$ 46. $v = -30 \text{ м/c}$, $a = -10 \text{ м/c}^2$
47. 3 с, $a = -2 \text{ м/c}^2$ 48. -7 м/c 49. 0.84, 0.21, 0.05 54. а. 0 б. 2 в. 1 г. 0
- д. 1 е. 2 ё. 1 55. а. $(2, -2)$ б. экстремумгүй в. $(2, 5/3)$, $(3, 1.5)$ г. экстремумгүй д.
экстремумгүй е. $\min x=0$, $x=4$, $\max x=2$ ё. $\min (1, -3)$ 56. $(3, 13.5)$ 57. а. $\min (3, -9)$
б. $\min (4, -27)$ в. $\max (-2, 7)$ г. $\max (6, -10)$ д. $\max (-2, 1)$ $\min (0, -3)$ е. сэжигтэй цэг (1,
2) боловч экстремум болохгүй ё. сэжигтэй цэг байхгүй ж. $\max (-1, 1)$ $\min (1, -3)$ з. $\max (1, 0)$ $\min (3, -4)$ 58. $\max (0, 3)$ $\min (-2, -1)$, $(2, -1)$ 59. $\min (1, 2)$ 60. а. үүнээс $(1, -1)$ нь
- минимумын цэг. б. $\left(-3, -6\frac{3}{4}\right)$ нь минимум цэг. 61. б. 1 в. π 62. а. ХИУ=4, ХБУ=1
б. ХИУ=6, ХБУ=3 в. ХИУ=0, ХБУ=-2 г. ХИУ= $y(-3)=-2$, ХБУ= $y(-1)=-\frac{10}{3}$

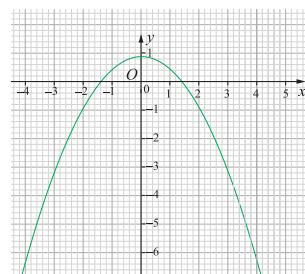
д. ХИУ = $f(0) = 5$ ХБУ = $f(-1) = 4, f(1) = 4$, 63. $[-6, 10]$ 64. $[-6, -2]$ 65. 400 66. $4\sqrt{10}$
 67. 144 68. $\sqrt{80} \approx 9$ 69. $5 \cdot 5 = 25$ 70. 6 71. $3\sqrt{2}$ 72. а. 16 б. 128 в. 432 г. 72 д. 200 е. 144 ё.
 450 ж. 486 73. 256 74. 32π , 0 75. $r = 1$ 76. $18m^2$ 77. 6500 төгрөгөөр үнэлбэл үйлчлүүлэгчийн тоо дунджаар 100 байснаа 65 болж буурах боловч, орлого $100 \cdot 3000 = 300000$ төгрөг байснаа $65 \cdot 6500$ төгрөг = 422500 төгрөг болж өснө. 78. 9, 192 79. 80км/ц

85.

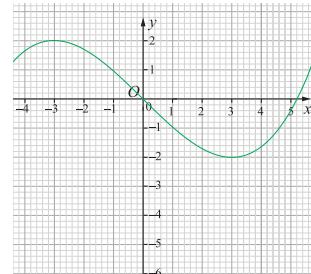
а.



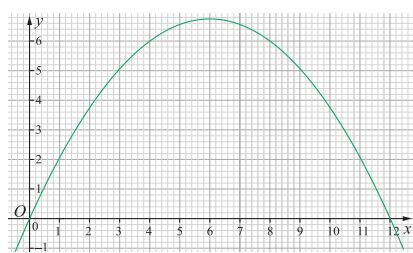
б.



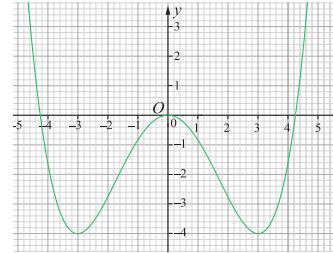
в.



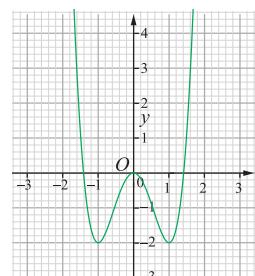
г.



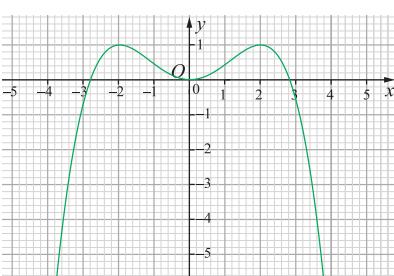
д.



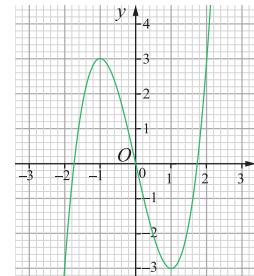
ж.



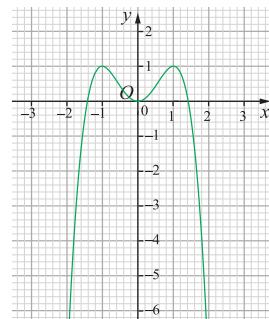
е.



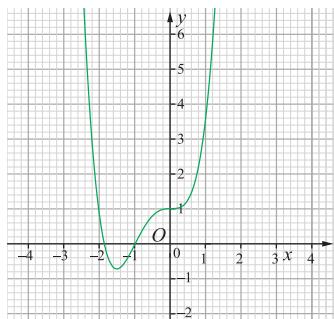
ё.



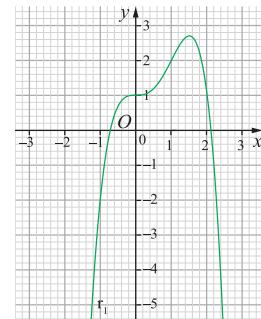
к.



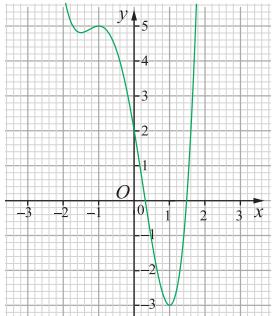
з.



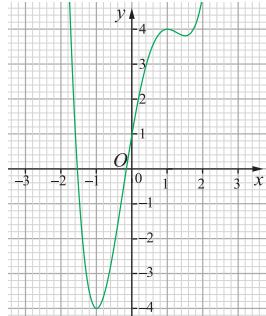
и.



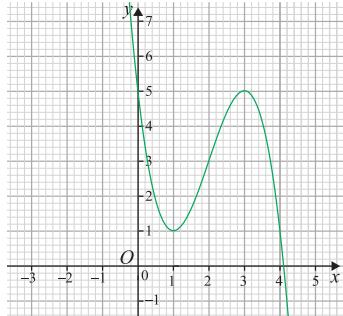
Л.



М.



Н.

**Бүлгийн иэмэлт даалгавар**

3. а. 0 б. -9 в. 24 г. -5 д. 0 5. а. -4 б. 0 в. -4 г. -3 д. 7 е. $10x - 7$ ё. $-18x + 8$ ж. $18x + 1$
 3. $-18x - 5$ и. $-12x - 2$ ѹ. $-18x - 3$ к. $10x + 5$ л. $-9x^2 + 12x - 9$ м. $-3x^2 + 16x + 9$
 н. $-3x^2 - 4x - 6$ о. $3x^2 + 18x + 7$ ё. $3x^2 + 18x + 7$ т. $16x + 2$ п. $x^2 + x + 1 + x^{-2} + x^{-3} + x^{-4}$
 с. $x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{2}{3}}$ т. $-x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{4}{3}}$ ў. $3x^{\frac{1}{2}} - 2x^{\frac{1}{3}}$ ў. $-3x^{\frac{5}{2}} + 2x^{\frac{5}{3}}$ 6. а. -4 б. -7 в. 7 г. -9 д. -4
 е. -1 ё. -7 ж. 6 з. -7 и. 4 ѹ. -3 к. -3 л. 8 м. 9 н. 4 о. -9 ё. -9 п. 8 р. 5 9. $-1 < x < 2$ 10. $x < 2$,
 $3 < x$ 14. 0.25 метр 15. 4 20. 40 м 21. 12 м, 7.5 м 24. тал 4 м, гүн 2 м 25. $r = \frac{1}{\sqrt[3]{4\pi}}$, $h = \frac{2}{\sqrt[3]{4\pi}}$
 26. $5\sqrt{5}$ 27. 12 28. $8 \text{мм}/\text{с}$ 29. $1.33 \cdot 10^{-8}$ 30. 4.5 мянган төгрөг

IX БҮЛЭГ. ИНТЕГРАЛ

- 2.а. $f(x) = x^4 - 4x^3 + x^2 - 3x + 2$ в. $f(x) = 2 + 12x^{-5}$ д. $f(x) = \frac{3}{\sqrt{2x-3}}$ 3.а. $F(x) = x - x^2 + C$
 в. $F(x) = x^2 + 3x + C$ 4. $f(x) = -\frac{x^3}{3} + 2x^2 - 3x + C$ 5.а. $y = -11x + C$ в. $y = 15x - x^2 + C$
 д. $y = 7x - \frac{x^3}{3} - x^2 + C$ 6. $y = x^3 - 2x + C$ 7. $f(x) = 3x + C$ 8.а. $F(x) = 2x + C$
 в. $F(x) = -5x^{-2} + C$ д. $F(x) = -\frac{5}{2}x^{-2} + C$ ё. $F(x) = \frac{5\sqrt[5]{4}}{8}x^{\frac{8}{5}} + C$ 3. $F(x) = \frac{1}{2}x^{\frac{4}{3}} + C$
 ў. $F(x) = 2\frac{6}{7}x^{\frac{7}{4}} + C$ 9.а. $f(x) = x^4 + C$ в. $f(x) = x^9 + x^7 + x + C$ д. $f(x) = x^2 - x^4 + 7x + C$
 ё. $f(x) = \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{9} + \frac{x}{4} + C$ 3. $f(x) = \frac{3}{5}x^5 + 24x^{-\frac{1}{3}} + 2x + C$ 10.а. $y = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + 2x + C$
 в. $y = \frac{1}{6}x^4 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{2}x + C$ д. $y = \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{9}{4}x^{\frac{4}{3}} + C$ 11.а. $5x - x^2 + C$ в. $2x^3 + 2x^2 + C$
 д. $-\frac{1}{3x^3} - x + C$ ё. $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}x + C$ 3. $8x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^6}{6} + C$ ў. $y = \frac{x^3}{3} - x^2 + x + C$ л. $\frac{3}{2}x^{\frac{10}{3}} + C$
 12.а. $y = x^3 - 3x^2 + C$ в. $\frac{x^2}{2} - \frac{16}{3}x^{\frac{3}{2}} + 16x + C$ 13. $f(0) = 29$ 14.а. $\frac{(x-2)^3}{3} + C$
 в. $\frac{(6x+1)^6}{36} + C$ д. $\frac{-1}{(2x-1)^3} + C$ ё. $\frac{(4x-5)^{\frac{3}{2}}}{6} + C$ 3. $\sqrt{1-8x} + C$ ў. $\frac{(2x+1)^6}{12} + C$
 15.а. $\frac{(5+2x)^{\frac{3}{2}}}{3} + C$ в. $\frac{1}{2(3-2x)} + C$ д. $-\frac{1}{10(5x-2)^2} + C$ ё. $\frac{6}{5}\left(\frac{1}{2}x-2\right)^{\frac{5}{3}} + C$

- 16.** $25x - \frac{(2x-1)^3}{6} + C$ **17.** $x_1 = -5, x_2 = 1$ **18.** а. $\frac{5}{2}x^2 + 2x - 6x^{\frac{1}{2}} + C$ в. $\frac{1}{3}x^2 - x^{-1} - x^{-2} + C$
 г. $-\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3} + C$. **19.** а. $\frac{x^3}{3} + 11x^2 + 121x + C$ б. $\frac{x^5}{5} - \frac{4x^3}{3} + 4x + C$ в. $-\frac{1}{3x^3} + \frac{1}{x^4} - \frac{4}{5x^4} + C$
 е. $\frac{1}{2}x^2 - \frac{12}{11}x^{\frac{11}{6}} + \frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}} + C$ **20.** а. $\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - x + C$ в. $\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + C$
21. а. $2x - 9x^{\frac{1}{3}} + \frac{5x^2}{2} + C$ в. $\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} - \frac{8}{3}x^{\frac{3}{2}} + 8x^{\frac{1}{2}} + C$ **23.** $f(x) = 3x^2 - 3x$
25. $f(x) = 6x^3 - 2x^2 - 2x - 36$ **28.** а. ≈ 118 см б. 27 **29.** а. 20 м/с б. 2 с в. 20 м **30.** а. $x = 1$ б.
 $f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2} - \frac{17}{4}$ **31.** $k = -\frac{25}{126}$, 54.1 м **32.** б. $t = 0$, $a = 16$ м/с² в. $t = 4$ үед $a = -3.2$ м/с²
 г. 25.6 м, 25 м д. 26.2 м **33.** а. $\frac{1}{2}$ в. 8 **34.** а. 48 в. 7 д. $-\frac{39}{200}$ **35.** а. -12 в. $-\frac{7}{6}$ д. $1\frac{1}{15}$ **37.** а.
 $\frac{65}{4}$ в. 1 д. 4. **38.** а. $2 \pm \sqrt{3}$ б. 6 в. $\sqrt{\frac{17}{3}}$ **39.** а. 4.5 б. $2\frac{2}{3}$ в. $9\frac{1}{3}$ **40.** $18\frac{2}{3}$ 41. 4.5
42. а. $\sqrt{3}$ б. $5\frac{1}{3}$ **43.** 4 **44.** а. $\frac{13\sqrt{13}}{6}$ б. $\frac{13\sqrt{13}}{3}$ в. $10\frac{2}{3}$ г. $10\frac{2}{3}$ д. 4.5 е. 36 **45.** 13.5 **46.**
 $1\frac{1}{3}$ **47.** $10\frac{2}{3}$ **48.** б. 0.5 **49.** $3\frac{1}{12}$ **50.** $20\frac{5}{6}$ **51.** 9 **52.** б. $-10\frac{2}{3}$ в. $-4\sqrt{3}$ **53.** а. $\frac{8}{9}$ б. $29\frac{1}{3}$ **54.**
 $2 - \sqrt[3]{4}$, заавар: 52.а бодлогыг ашигла.

Бүлгийн нэмэлт даалгавар

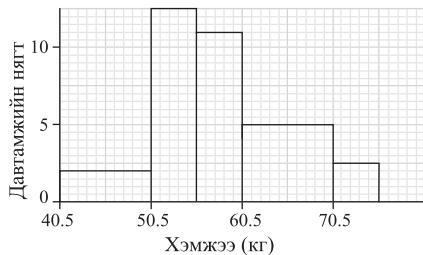
- 2.** а. $F(x) = \frac{3}{4}x^4 + \frac{4}{3}x^3 - x^2 + 7x + C$ в. $F(x) = 3x^{-2} - 5x + C$ д. $F(x) = \frac{8}{3}\sqrt{2-3x} + C$
 ё. $F(x) = -\frac{5}{9}x^{\frac{9}{5}} - \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{x} + C$ ж. $F(x) = \frac{2\sqrt{3}}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{7}x^{\frac{7}{4}} - \frac{5}{x} + C$ 3. а. $3x^2 + 7x + C$.
 в. $-3x^{-2} - 5x + C$ д. $\frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 20x + C$ ё. $\frac{(3x-5)^5}{15} + C$ 3. $\frac{(10x+1)^3}{15} + C$
 и. $\frac{-2(2-3x)^{\frac{1}{2}}}{3} + C$ к. $\frac{2\sqrt{3}}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{7}x^{\frac{7}{4}} - \frac{5}{x} + C$ 4. а. $x^5 + x^4 + C$ в. $-\frac{1}{2x^2} + C$ д. $\frac{x^2}{2} - 3x + C$
 ё. $\frac{(3x-5)^3}{9} + C$ 3. $\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + \frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}} + 2x^{\frac{1}{2}} + x + C$ 5. а. 22 в. $\frac{43}{6}$ д. $\frac{27}{4}$ ё. 820 з. $\frac{2}{15}$ 6. а. $\frac{26}{3}$
 в. $\frac{16\sqrt{2}}{3}$ д. $\frac{1}{3}$ 7. а. $20\frac{5}{6}$ б. $\frac{32}{3}$ в. $\frac{256}{9}$ 8. а. $\frac{1}{3}$ б. $\frac{14\sqrt{7}}{3}$ 9. $f(x) = 2\sqrt{x+6} - \frac{6}{x} - 3$ **10.**
 а. $\frac{2}{3}(x-3)\sqrt{x} + C$. б. $\frac{x^5}{5} + \frac{1}{x} + C$ в. $\frac{x^4}{2} + \frac{x^3}{3} - x^2 - x + C$ г. $-\frac{6x^2 + 9x + 8}{6x^3} + C$
 д. $3\sqrt{2x-3} + C$ е. $\frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5} - \frac{4x^{\frac{3}{2}}}{3} + 2\sqrt{x} + C$ ё. $-\frac{1}{108}(x-15)^4 + C$ ж. $\frac{1}{40}(5x+9)^8 + C$
 з. $-\frac{2}{3(5x+1)^6} + C$ **11.** хурд нь 5.25, $|AB| = 233\frac{1}{3}$ **12.** $1\frac{1}{6}$ **13.** а. 8 б. $9\left(\frac{1}{4} - \sqrt[3]{4}\right)$ в. $\frac{1}{10}$
14. $6\frac{3}{4}$ **15.** а. $\frac{x^7}{7} - \frac{x^5}{5} + \frac{x^3}{3} - x + C$ в. $\frac{x^3}{3} - x^2 + x + C$ **16.** 9 **17.** $\frac{8}{3}$ **18.** $\frac{10\sqrt{5}}{3}$ **19.** 18 **20.** $\frac{8}{3}$

Х БҮЛЭГ. ӨГӨГДЛИЙН ШИНЖИЛГЭЭ

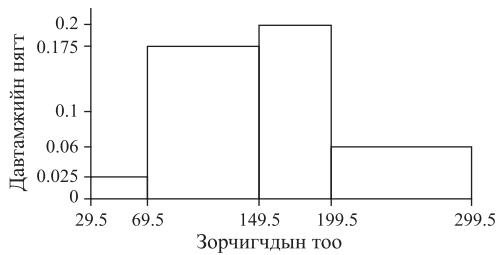
1. а.

5	2	7	7	9
6	1	3	4	4
7	0	1	1	2
8	1	3	6	

б. Далайц 34, моод 68, медиан 70.5

3. а. $40.5 \leq \text{жин} < 50.5$ б. 10 в.

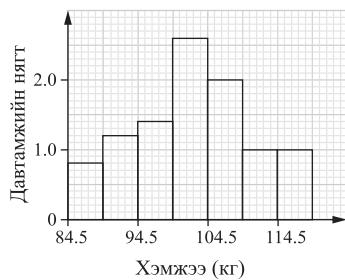
4. а. 29.5, 69.5 б.



5. а.

Жин	Давтамж	Давтамжийн нягт
85-89	4	0.8
90-94	6	1.2
95-99	7	1.4
100-104	13	2.6
105-109	10	2
110-114	5	1
115-119	5	1

б. 89.5 в. моод бүлэг нь 100-104



6. а. 61 б. 21 7. а. 10, 12 б. 207, 22 в. 2104.5,

65.5 г. 0.595, 0.38 д. -1.5 , 3.35

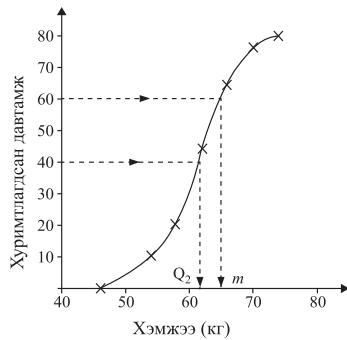
8. 3а. 4 б. 3 9. а. 4.6, 3.5 б. 0.138, 0.012 10. а. 8 б. 7 в. 7.36

11. а. 4 б. 3 12. а. 2 б. 2 13. а. 2 б. 3 б. 5 14. а. 22 б. 26 в. 23 г. 25 мин д. 9 мин

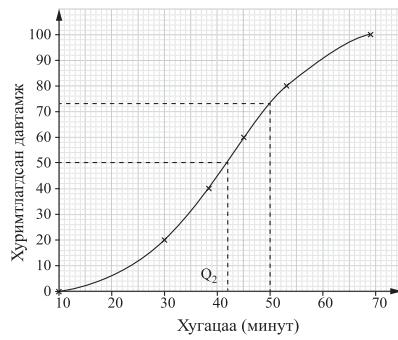
15. а. б. 62 в. 65

Жин	<50	<54	<58	<62	<66	<70	<74
Хүримтлагдсан давтамж	6	10	20	44	64	76	80

17. а.



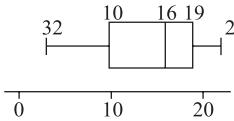
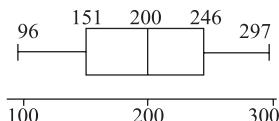
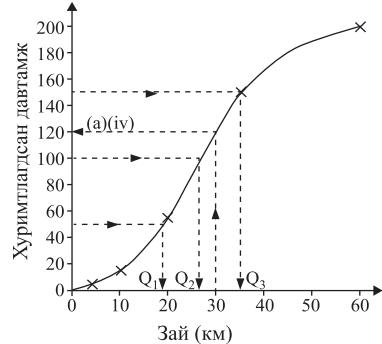
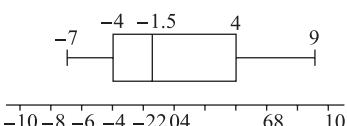
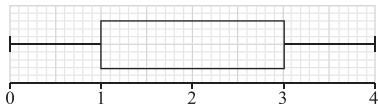
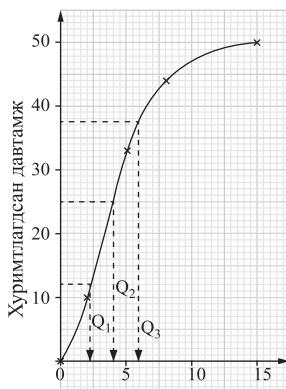
б. 41.5 мин в. 73%



18. а.

Зай	<4	<10	<20	<35	<60
Хүримтлагдсан дамтамж	5	15	54	159	200

б. 27.5 км в. 17 км г. 40%

21. а.**б.****в.****22.****23. а.**

б. 4, 2.1, 6

24. а. 55, 44, 74 б. 89, 71, 107 25. а. 9.7 б. 154.8 в. $50.875 \frac{5}{7}$ д. 0.90831. $x=15$, $y=7$ 26. 35.05 28. 43.35 29. 44.875 30. $a=12$ 27. 4 32. 8 33. 14.39, 1.08

34. а. 10 б. 3.42 35. 115.8, 7.58

МАТЕМАТИК XI

Ерөнхий боловсролын 12 жилийн сургуулийн
11 дүгээр ангийн суралчилсан бичиг

Зохиогчийн баг

Ахлагч:

Б.Баяржаргал

Гишүүд:

Э.Азжаргал

Д.Анхтуяа

Ж.Батболд

М.Бат-Эрдэнэ

Д.Даваасүрэн

Ж.Дэнсмаа

А.Наранхүү

Д.Түвшинжаргал

Д.Түмэнбаяр

Н.Цогзолмаа

Э.Чойсүрэн

Б.Энхболд

Редактор:

Д.Пүрэвсүрэн

Техник редактор:

Д.Пүрэвдорж

Хэвлэлийн эх бэлтгэгч:

Д.Пүрэвсүрэн

Засварласан баг:

Б.Баяржаргал

Д.Түмэнбаяр

Хэвлэлийн дизайнер:

А.Мөнхмагнай

Формат 70x100/16

Офсет хэвлэл. Офсет хэвлэлийн цаас. 80 гр/м²

Хэвлэлийн хуудас 18 х.х

Хэвлэлийн эхийг “Адмон принт” ХХК-д бэлтгэж,
“Мөнхийн Үсэг” ХХК-д 21000 хувь хэвлэв.