Projet de mathématiques financières

Mars 2025

1 Description

Un investisseur a la possibilité de placer un capital sur une période de temps $T = [\![0, n]\!]$. Il dispose de m placements possibles, $P_k, 1 \leq k \leq m$, caractérisés par une date de dépôt d_k, une date de disponibilité f_k et un taux τ_k applicable sur l'intervalle $[d_k, f_k] \subseteq [0, n]$. Un taux de base τ_0, valable sur tous les intervalles $[t, t+1], 0 \leq t \leq n-1$ est aussi donné. L'objectif est de déterminer la meilleure politique de placements sur la période T.

2 Modélisation

Un graphe orienté $D = (V, A)$ est associé à la situation précédente. L'ensemble des sommets V est l'ensemble des $n+1$ dates $0, 1 \ldots n$ et l'ensemble des arcs A comprend les arcs de la forme $(t, t+1), 0 \leq t \leq n-1$, de coefficient $c(t, t+1) = 1+\tau_0$, et les arcs de la forme (d_k, f_k) de coefficient $c(d_k, f_k) = 1+\tau_k$ correspondants aux m placements disponibles.

Notons $\mathcal{P}(t', t)$ l'ensemble des chemins de t' à t sur le sous-graphe de D engendré par les sommets $[\![t', t]\!] \subseteq [0, n]$. Un chemin P de $\mathcal{P}(0, n)$ [1] est associé à une politique d'investissements sur la période T. Le capital initial est en effet multiplié par $C(P) = \prod_{a \in P} c(a)$. L'objectif est donc de trouver $P^* \in \mathcal{P}(0, n)$ tel que

$$C(P^*) = \max_{P \in \mathcal{P}(0,n)} C(P).$$

On pose $\text{Coef}(t) = \max_{P \in \mathcal{P}(0,t)} C(P)$ pour tout $t \in [\![1, n]\!]$ avec $\text{Coef}(0) = 1$.

3 Exemple

A la date 0, un capital C peut être placé pendant $n = 7$ périodes au taux de $\tau_0 = 0.9\%$ par période. Les opportunités de le placer à diverses échéances sont indiquées dans la table suivante :

Taux d'intérêt en %	1.9	2.0	3.0	3.0	2.8
date début	0	1	2	3	4
date fin	2	3	5	6	7

Question 3.1.

3.1.1. Tracer le graphe D.

3.1.2. Énumérer les chemins de $\mathcal{P}(0, 7)$.

3.1.3. Trouver la meilleure politique de placement.

1. P est une suite d'arcs de A, le premier arc de P a pour origine 0 et le dernier arc de P est d'extrémité n.

L'énumération de tous les chemins de $\mathcal{P}(0,n)$ n'est pas un algorithme efficace. En effet, si le graphe D contient tous les arcs $(t',t), 0 \leq t' < t \leq n$, le nombre de chemins de $\mathcal{P}(0,n)$ dépend exponentiellement de n.

Question 3.2. Déterminer la cardinalité de $\mathcal{P}(0,n)$ dans ce dernier cas.

4 Recherche de la solution optimale

Soit $N^-(t) = \{k \in [\![1,m]\!], f_k = t\}$ pour $t \geq 2$.

Question 4.1. Écrire une équation qui relie $\mathrm{Coef}(t)$ et, pour $k \in N^-(t)$, $\mathrm{Coef}(d_k)$, $c(d_k, f_k)$, τ_0 et $\mathrm{Coef}(t-1)$. Quelle est la propriété de D qui assure qu'elle a toujours une solution ?

5 Algorithmique

Les données numériques à utiliser dans cette partie sont dans le fichier associé à votre groupe.

Le travail demandé consiste à programmer la recherche du meilleur $\mathrm{Coef}(n)$, à partir d'un tableau décrivant les différentes possibilités d'investissement. La meilleure politique de placements sera aussi donnée. Le langage préconisé est python, ou VBA (pour ceux qui manipulent EXCEL). On propose, à titre indicatif, les schémas algorithmiques ci-dessous.

Le fichier rapport, au format pdf, nommé *groupe_num_XX*, contiendra la partie théorique, la description algorithmique des procédures programmées et le résultat obtenu sur les données.

Algorithm 1 Procédure lecture_donnees

Require: un fichier où se trouvent la description de toutes les caractéristiques des placements
Ensure: n, l'horizon de l'étude, le taux de base τ_0, le tableau des (τ_k, d_k, f_k), pour $k = 1, \ldots m$.
▷ A écrire !

Algorithm 2 Fonction optimiz_coef

Require: n, les (τ_k, d_k, f_k), pour $k = 1, \ldots m$, $t \geq 1$, une date t, tous les $\mathrm{Coef}(t'), 0 \leq t' < t$.
Ensure: la valeur de $\mathrm{Coef}(t)$.
▷ A écrire !

Algorithm 3 Procédure principale

Ensure: Détermination de $\mathrm{Coef}(n)$
Initialisation
Lecture des données
Optimisation séquentielle : calcul des $\mathrm{Coef}(t), 2 \leq t \leq n$, avec $\mathrm{Coef}(0) = 1$ et $\mathrm{Coef}(1) = 1 + \tau_0$
Affichage des résultats
▷ A écrire !