

ISIMA - Théorie Des Jeux

TP1 de Théorie Des Jeux

Decembre 2025

Erkin Tunc BOYA

1 Ex1

Il y a deux joueurs A et B . Chacun possède trois jetons : un rouge, un blanc et un bleu. C'est un jeu à deux joueurs, à somme nulle (si la valeur est > 0 , c'est un gain pour A et une perte pour B). Pour commencer, les joueurs sélectionnent chacun un de leurs jetons et les exhibent simultanément. Ils déterminent alors leur gain :

Lien entre couleurs	gain
rouge bat blanc	50
blanc bat bleu	40
bleu bat rouge	30
même couleur	0

1.1 Modélisation du jeu

On considère les stratégies pures suivantes pour chaque joueur (ordre dans lequel il utilise ses jetons) :

1.1.1 Les stratégies

- 1 = (rouge, blanc, bleu)
- 2 = (rouge, bleu, blanc)
- 3 = (blanc, rouge, bleu)
- 4 = (blanc, bleu, rouge)
- 5 = (bleu, rouge, blanc)
- 6 = (bleu, blanc, rouge)

La matrice de gains (pour le joueur A) est alors :

	1	2	3	4	5	6
1	0	0	0	120	-120	0
2	0	0	120	0	0	-120
3	0	-120	0	0	0	120
4	-120	0	0	0	120	0
5	120	0	0	-120	0	0
6	0	120	-120	0	0	0

1.2 Stratégie pure

On calcule d'abord les bornes classiques :

$$V^- = \max_i \min_j a_{ij}, \quad V^+ = \min_j \max_i a_{ij}.$$

Comme tous les minima des lignes valent -120 , on obtient :

$$V^- = \max(-120, -120, -120, -120, -120, -120) = -120.$$

Comme tous les maxima des colonnes valent 120 , on obtient :

$$V^+ = \min(120, 120, 120, 120, 120, 120) = 120.$$

Ainsi,

$$V^- \neq V^+ \implies \text{pas de point selle et pas de solution en stratégies pures.}$$

1.3 Stratégies mixtes

Une stratégie mixte est un vecteur de probabilités.

Pour le joueur A :

$$X = (x_1, \dots, x_6), \quad x_i \geq 0 \text{ pour tout } i = 1, \dots, 6, \quad \sum_{i=1}^6 x_i = 1.$$

Pour le joueur B :

$$Y = (y_1, \dots, y_6), \quad y_j \geq 0 \text{ pour tout } j = 1, \dots, 6, \quad \sum_{j=1}^6 y_j = 1.$$

Dans notre modélisation, il n'existe pas de point selle puisque

$$V^- \neq V^+.$$

Nous cherchons donc des stratégies mixtes X^* et Y^* telles que l'espérance de gain du joueur A soit maximisée et celle de B minimisée.

Le système d'inégalités correspondant est :

$$E(X, Y) \begin{cases} y_1(-120x_4 + 120x_5) \geq g, \\ y_2(-120x_3 + 120x_6) \geq g, \\ y_3(120x_2 - 120x_6) \geq g, \\ y_4(120x_1 - 120x_5) \geq g, \\ y_5(-120x_1 + 120x_4) \geq g, \\ y_6(-120x_2 + 120x_3) \geq g. \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 1 \end{cases}$$

2 Ex2

2.1 Modelisation

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$