ISIMA - Théorie Des Jeux

TP2 de Théorie Des Jeux

Decembre 2025

Erkin Tunc BOYA , Raed HAFSOUNI

Exercice 1 – Équilibres de Nash en stratégies pures

On considère deux joueurs et deux matrices de gains A et B, où :
— $A[i][j]$ représente le gain du joueur I,
— $B[i][j]$ représente le gain du joueur II,
lorsque le joueur I joue la stratégie i et le joueur II joue la stratégie j.

Méthode de résolution (meilleure réponse). Un couple de stratégies (i, j) est un équilibre de Nash en stratégies pures si :

$$i \in \arg\max_{i'} A[i'][j] \quad \text{et} \quad j \in \arg\max_{j'} B[i][j'].$$

Autrement dit, aucun joueur n'a intérêt à dévier unilatéralement de sa stratégie.

La méthode utilisée consiste à :

1. déterminer, pour chaque stratégie de l'adversaire, l'ensemble des meilleures réponses,
2. identifier les couples de stratégies qui sont simultanément des meilleures réponses pour les deux joueurs.

Résultats de TD3 .
— **Exercice 1 :** l'algorithme met en évidence deux équilibres de Nash en stratégies pures :

$$(0, 0) \quad \text{et} \quad (1, 1).$$

— **Exercice 2 :** l'algorithme met en évidence deux équilibres de Nash en stratégies pures :

$$(0, 1) \quad \text{et} \quad (1, 0).$$

Remarque. Les indices sont donnés en base 0, conformément à la convention informatique utilisée. Pour une écriture mathématique standard, il suffit d'ajouter 1 à chaque indice.

Exercice 2

0.1 Jeu Gauche – Droite – Haut – Bas

On considère un jeu à deux joueurs étudié sous forme extensive et sous forme normale.

Forme extensive. Le joueur 1 joue en premier et choisit entre **Haut (H)** et **Bas (B)**. Le joueur 2 observe ce choix et décide ensuite entre **Gauche (G)** et **Droite (D)**. Les gains associés aux issues sont donnés par l'arbre du jeu.

Forme normale. Une stratégie du joueur 2 est un plan complet indiquant son action après chaque choix possible du joueur 1. Ainsi :

$$S_1 = \{H, B\}, \qquad S_2 = \{GG, GD, DG, DD\}.$$

La matrice des gains correspondante est :

	GG	GD	DG	DD
H	$(2,1)$	$(2,1)$	$(3,-2)$	$(3,-2)$
B	$(-6,2)$	$(-1,4)$	$(-6,2)$	$(-1,4)$

Équilibres. À l'aide de Gambit, on obtient plusieurs équilibres de Nash en forme normale. En revanche, l'unique équilibre parfait en sous-jeux est :

$$(H, GD),$$

ce qui conduit à l'issue (H, G) avec gains $(2, 1)$.

0.2 Jeu de production (entrée sur le marché)

Forme normale. La forme normale du jeu est donnée par la matrice suivante, où le premier gain est celui de la firme A et le second celui de la firme B :

	Entrer	Ne pas entrer
Accepter	$(3,2)$	$(4,0)$
Refuser	$(-2,-3)$	$(4,0)$

Équilibres en forme normale. À l'aide de Gambit, on obtient les équilibres de Nash suivants :
- un équilibre pur : (Accepter, Entrer) ;
- un équilibre pur : (Refuser, Ne pas entrer) ;
- un équilibre mixte dans lequel la firme A joue Accepter avec la probabilité $3/5$ et la firme B choisit Ne pas entrer.

Forme extensive et équilibre parfait en sous-jeux. Le jeu est naturellement séquentiel : la firme B décide d'abord d'entrer ou non sur le marché. En cas d'entrée, la firme A choisit entre accepter ou refuser.

Par raisonnement à rebours, si la firme B entre, la firme A préfère accepter l'entrée (car $3 > -2$). Anticipant ce comportement, la firme B choisit d'entrer.

L'unique équilibre parfait en sous-jeux est donc :

$$(\text{Entrer, Accepter}),$$

avec des gains $(3, 2)$.

L'équilibre (Refuser, Ne pas entrer) est un équilibre de Nash en forme normale, mais il n'est pas parfait en sous-jeux car la menace de refus n'est pas crédible.