ISIMA - Théorie Des Jeux

TP1 de Théorie Des Jeux

Decembre 2025

Erkin Tunc BOYA

1 Ex1

Il y a deux joueurs A et B. Chacun possède trois jetons : un rouge, un blanc et un bleu. C'est un jeu à deux joueurs, à somme nulle (si la valeur est > 0, c'est un gain pour A et une perte pour B). Pour commencer, les joueurs sélectionnent chacun un de leurs jetons et les exhibent simultanément. Ils déterminent alors leur gain :

Lien entre couleurs	**gain**
rouge bat blanc	50
blanc bat bleu	40
bleu bat rouge	30
même couleur	0

1.1 Modélisation du jeu

On considère les stratégies pures suivantes pour chaque joueur (ordre dans lequel il utilise ses jetons) :

1.1.1 Les stratégies

1 = (rouge, blanc, bleu)
2 = (rouge, bleu, blanc)
3 = (blanc, rouge, bleu)
4 = (blanc, bleu, rouge)
5 = (bleu, rouge, blanc)
6 = (bleu, blanc, rouge)

La matrice de gains (pour le joueur A) est alors :

	1	2	3	4	5	6
1	0	0	0	120	−120	0
2	0	0	120	0	0	−120
3	0	−120	0	0	0	120
4	−120	0	0	0	120	0
5	120	0	0	−120	0	0
6	0	120	−120	0	0	0

1.2 Stratégie pure

On calcule d'abord les bornes classiques :

$$V^- = \max_i \min_j a_{ij}, \qquad V^+ = \min_j \max_i a_{ij}.$$

Comme tous les minima des lignes valent -120, on obtient :

$$V^- = \max(-120, -120, -120, -120, -120, -120) = -120.$$

Comme tous les maxima des colonnes valent 120, on obtient :

$$V^+ = \min(120, 120, 120, 120, 120, 120) = 120.$$

Ainsi,

$$V^- \neq V^+ \qquad \Longrightarrow \qquad \text{pas de point selle et pas de solution en stratégies pures.}$$

1.3 Stratégies mixtes

Une stratégie mixte est un vecteur de probabilités.
Pour le joueur A :

$$X = (x_1, \dots, x_6), \qquad x_i \geq 0 \text{ pour tout } i = 1, \dots, 6, \qquad \sum_{i=1}^{6} x_i = 1.$$

Pour le joueur B :

$$Y = (y_1, \dots, y_6), \qquad y_j \geq 0 \text{ pour tout } j = 1, \dots, 6, \qquad \sum_{j=1}^{6} y_j = 1.$$

Dans notre modélisation, il n'existe pas de point selle puisque

$$V^- \neq V^+.$$

Nous cherchons donc des stratégies mixtes X^* et Y^* telles que l'espérance de gain du joueur A soit maximisée et celle de B minimisée.

Programme du joueur A (maximiseur, en ligne). On cherche une stratégie mixte $X = (x_1, \dots, x_6)$ et une valeur g telles que, pour chaque stratégie pure j de B,

$$E(X, j) = \sum_{i=1}^{6} a_{ij} x_i \;\geq\; g.$$

Le système d'inégalités correspondant, pour notre matrice de jeu, est :

$$\begin{cases} -120\,x_4 + 120\,x_5 \geq g, \\ -120\,x_3 + 120\,x_6 \geq g, \\ 120\,x_2 - 120\,x_6 \geq g, \\ 120\,x_1 - 120\,x_5 \geq g, \\ -120\,x_1 + 120\,x_4 \geq g, \\ -120\,x_2 + 120\,x_3 \geq g, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 1, \\ x_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, 6. \end{cases}$$

L'objectif du joueur A est de

$$\max g$$

sous ces contraintes.

2 Ex2 Jeu de Domino

Le joueur X choisit une configuration et le joueur Y propose (simultanément) une case parmi les 6.

Si la configuration recouvre cette case Y gagne sinon X gagne.

C'est un jeu somme nulle (si la valeur est > 0, c'est un gain pour X et une perte pour Y) docn si Jouur X gagne $+1$ point joeur Y perdre -1 point. Le somme de points gagnent et points de perdre est toujours pareils.

2.1 Modelisation

Il y a 7 strategies different pour X donc il y a 7 ligne.

Le premier 3 collone represante 1ier ligne de jeu. Le dernier 3 collone represante 2ieme ligne de jeu

Les cases cohisi par le X ont une valuer 1.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

2.2 Stratégie pure

On calcule d'abord les bornes classiques :

$$V^- = \max_i \min_j a_{ij}, \qquad V^+ = \min_j \max_i a_{ij}.$$

Comme tous les minima des lignes valent -1, on obtient :

$$V^- = \max(-1, -1, -1, -1, -1, -1) = -1.$$

Comme tous les maxima des colonnes valent 1, on obtient :

$$V^+ = \min(1, 1, 1, 1, 1, 1) = 1.$$

Ainsi,

$$V^- \neq V^+ \qquad \Longrightarrow \qquad \text{pas de point selle et pas de solution en stratégies pures.}$$