ISIMA - Théorie Des Jeux

TP1 de Théorie Des Jeux

Decembre 2025

Erkin Tunc BOYA

1 Ex1

Il y a deux joueurs A et B. Chacun possède trois jetons : un rouge, un blanc et un bleu. C'est un jeu à deux joueurs, à somme nulle : si la valeur est > 0, c'est un gain pour A et une perte du même montant pour B, et réciproquement. Pour chaque issue, la somme des gains des deux joueurs est donc toujours égale à 0. Pour commencer, les joueurs sélectionnent chacun un de leurs jetons et les exhibent simultanément.

Ils déterminent alors leur gain :

Lien entre couleurs	**gain**
rouge bat blanc	50
blanc bat bleu	40
bleu bat rouge	30
même couleur	0

1.1 Modélisation du jeu

On considère les stratégies pures suivantes pour chaque joueur (ordre dans lequel il utilise ses jetons) :

1.1.1 Les stratégies

1 = (rouge, blanc, bleu)
2 = (rouge, bleu, blanc)
3 = (blanc, rouge, bleu)
4 = (blanc, bleu, rouge)
5 = (bleu, rouge, blanc)
6 = (bleu, blanc, rouge)

La matrice de gains (pour le joueur A) est alors :

	1	2	3	4	5	6
1	0	0	0	120	−120	0
2	0	0	120	0	0	−120
3	0	−120	0	0	0	120
4	−120	0	0	0	120	0
5	120	0	0	−120	0	0
6	0	120	−120	0	0	0

Exemple : case $i = 1$, $j = 4$.
La stratégie 1 du joueur A est (rouge, blanc, bleu), la stratégie 4 du joueur B est (blanc, bleu, rouge).

— Coup 1 : rouge (A) contre blanc (B) → rouge bat blanc → +50.
— Coup 2 : blanc (A) contre bleu (B) → blanc bat bleu → +40.
— Coup 3 : bleu (A) contre rouge (B) → bleu bat rouge → +30.

Ainsi, le gain total du joueur A est

$$50 + 40 + 30 = 120,$$

d'où $a_{1,4} = 120$.

1.2 Stratégie pure

On calcule d'abord les bornes classiques :

$$V^- = \max_i \min_j a_{ij}, \qquad V^+ = \min_j \max_i a_{ij}.$$

Pour chaque stratégie pure i de A, le joueur B peut toujours choisir une colonne qui donne à A une perte de -120. Ainsi, pour chaque ligne i, on a

$$\min_j a_{ij} = -120.$$

On en déduit :

$$V^- = \max_i \min_j a_{ij} = -120.$$

De même, pour chaque stratégie pure j de B, le joueur A peut choisir une ligne qui lui garantit un gain de 120. Par conséquent,

$$\max_i a_{ij} = 120 \quad \text{pour chaque colonne } j.$$

D'où :

$$V^+ = \min_j \max_i a_{ij} = 120.$$

Ainsi,

$$V^- \neq V^+ \qquad \Longrightarrow \qquad \text{pas de point selle et pas de solution en stratégies pures.}$$

1.3 Stratégies mixtes

Une stratégie mixte est un vecteur de probabilités.
Pour le joueur A :

$$X = (x_1, \ldots, x_6), \qquad x_i \geq 0 \text{ pour tout } i = 1, \ldots, 6, \qquad \sum_{i=1}^{6} x_i = 1.$$

Pour le joueur B :

$$Y = (y_1, \ldots, y_6), \qquad y_j \geq 0 \text{ pour tout } j = 1, \ldots, 6, \qquad \sum_{j=1}^{6} y_j = 1.$$

Dans notre modélisation, il n'existe pas de point selle puisque

$$V^- \neq V^+.$$

Nous cherchons donc des stratégies mixtes X^* et Y^* telles que l'espérance de gain du joueur A soit maximisée et celle de B minimisée.

Programme du joueur A (maximiseur, en ligne). On cherche une stratégie mixte

$$X = (x_1, \dots, x_6)$$

et une valeur garantie g. Pour que X soit acceptable pour le joueur A, il faut que, contre chaque stratégie pure j du joueur B, l'espérance de gain de A soit au moins égale à g :

$$E(X, j) = \sum_{i=1}^{6} a_{ij} x_i \geq g.$$

En utilisant successivement les colonnes de la matrice de gains, on obtient les six contraintes suivantes :

$$\begin{cases} -120\, x_4 + 120\, x_5 \geq g, \\ -120\, x_3 + 120\, x_6 \geq g, \\ 120\, x_2 - 120\, x_6 \geq g, \\ 120\, x_1 - 120\, x_5 \geq g, \\ -120\, x_1 + 120\, x_4 \geq g, \\ -120\, x_2 + 120\, x_3 \geq g, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 1, \\ x_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, 6. \end{cases}$$

L'objectif du joueur A est

$$\max g$$

sous ces contraintes.

La résolution (par exemple via OPL) donne :

$$g^* = 0, \qquad x_1^* = x_4^* = x_5^* = \frac{1}{3}, \qquad x_2^* = x_3^* = x_6^* = 0.$$

Ainsi, la stratégie optimale du joueur A est

$$x^* = \left(\frac{1}{3},\ 0,\ 0,\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ 0 \right)^T, \qquad v = g^* = 0.$$

Vérification. Pour cette stratégie X^*, on vérifie que, pour chaque colonne j,

$$E(X^*, j) = 0 = g^*.$$

Chaque contrainte est donc satisfaite ou saturée, ce qui confirme que X^* est optimale.

Programme du joueur B (minimiseur, en colonne). Le joueur B cherche une stratégie mixte

$$Y = (y_1, \dots, y_6)$$

et une valeur h telles que, pour chaque stratégie pure i de A, l'espérance de gain de A ne dépasse pas h :

$$E(i, Y) = \sum_{j=1}^{6} a_{ij} y_j \leq h.$$

En utilisant les lignes de la matrice de gains, on obtient les six contraintes :

$$\begin{cases} 120\,y_4 - 120\,y_5 \le h, \\ 120\,y_3 - 120\,y_6 \le h, \\ -120\,y_2 + 120\,y_6 \le h, \\ -120\,y_1 + 120\,y_5 \le h, \\ 120\,y_1 - 120\,y_4 \le h, \\ 120\,y_2 - 120\,y_3 \le h, \\ y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 = 1, \\ y_j \ge 0, \quad j = 1, \dots, 6. \end{cases}$$

L'objectif du joueur B est :

$$\min h.$$

En résolvant ce programme linéaire, on obtient :

$$h^* = 0.$$

Une solution optimale pour le joueur B est :

$$y_1^* = y_4^* = y_5^* = \frac{1}{3}, \qquad y_2^* = y_3^* = y_6^* = 0.$$

Justification. On vérifie que, pour chaque ligne i,

$$E(i, Y^*) = 0 = h^*.$$

Toutes les contraintes sont satisfaites ou saturées, ce qui confirme que Y^* est optimale. De plus, la matrice du jeu est antisymétrique (chaque gain non nul apparaît avec son opposé), ce qui explique que les stratégies optimales de A et B coïncident.

Question (c). Dans l'énoncé, on suppose que le joueur maximisateur utilise aussi souvent les trois combinaisons suivantes :

(i) Bleu – Rouge – Blanc,
(ii) Blanc – Bleu – Rouge,
(iii) Rouge – Blanc – Bleu.

Dans notre numérotation des stratégies pures, ces combinaisons correspondent respectivement aux stratégies 5, 4 et 1. Ainsi, jouer chacune de ces trois stratégies avec probabilité $1/3$ revient à jouer la stratégie mixte :

$$X = \left(\frac{1}{3}, 0, 0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0\right).$$

Or, cette stratégie est exactement la solution optimale obtenue dans le programme linéaire du joueur A :

$$x_1^* = x_4^* = x_5^* = \frac{1}{3}, \qquad x_2^* = x_3^* = x_6^* = 0.$$

De plus, pour cette stratégie, l'espérance de gain contre chacune des stratégies pures du joueur B vaut :

$$E(X, j) = 0, \qquad \forall j = 1, \dots, 6.$$

C'est donc bien la meilleure valeur que le joueur A peut garantir, c'est-à-dire

$$v = 0.$$

Ainsi, le fait de jouer les trois combinaisons proposées avec la même fréquence assure au joueur A un gain espéré maximal, égal à la valeur du jeu.

2 Ex2 Jeu de Domino

Le joueur X choisit une configuration de dominos parmi les 7 possibles sur une grille 2×3 (cases blanches). Le joueur Y choisit simultanément une case parmi les 6 cases de la grille.

Si la configuration choisie par X recouvre la case annoncée par Y, alors Y gagne ; sinon, c'est X qui gagne.

C'est un jeu à somme nulle : si la valeur est > 0, c'est un gain pour X et une perte du même montant pour Y, et réciproquement. On code par exemple :

$$\text{gain de } X = \begin{cases} +1 & \text{si } X \text{ gagne,} \\ -1 & \text{si } Y \text{ gagne.} \end{cases}$$

2.1 Modélisation

Il y a 7 configurations différentes possibles pour X, donc 7 lignes dans la matrice de jeu. Les 6 colonnes correspondent aux 6 cases que le joueur Y peut annoncer (numérotées de 1 à 6).

Pour chaque configuration i et chaque case j, on définit le gain de X par

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si la configuration } i \text{ recouvre la case } j, \\ -1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Cela conduit à la matrice de gains suivante (pour le joueur X) :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.2 Stratégie pure

On calcule d'abord les bornes classiques :

$$V^- = \max_i \min_j a_{ij}, \qquad V^+ = \min_j \max_i a_{ij}.$$

Pour chaque ligne du joueur X, on remarque que la configuration choisie ne recouvre pas au moins une case proposée par Y, ce qui donne toujours une issue défavorable de -1. Ainsi :

$$\min_j a_{ij} = -1 \qquad \text{pour chaque } i = 1, \dots, 7.$$

D'où :

$$V^- = \max(-1, -1, -1, -1, -1, -1, -1) = -1.$$

De même, pour chaque colonne j, il existe toujours au moins une configuration de X qui recouvre cette case, ce qui donne un gain de $+1$. Autrement dit :

$$\max_i a_{ij} = 1 \qquad \text{pour chaque } j = 1, \dots, 6.$$

On en déduit :

$$V^+ = \min(1, 1, 1, 1, 1, 1) = 1.$$

On a donc :

$$V^- \neq V^+ \qquad \Longrightarrow \qquad \text{pas de point selle et pas de solution en stratégies pures.}$$

2.3 Stratégies mixtes et résolution du jeu

Comme il n'existe pas de point selle en stratégies pures, on étudie le jeu en stratégies mixtes.
Le joueur X choisit une distribution

$$X = (x_1, \ldots, x_7), \qquad x_i \geq 0, \; \sum_{i=1}^{7} x_i = 1,$$

et le joueur Y choisit

$$Y = (y_1, \ldots, y_6), \qquad y_j \geq 0, \; \sum_{j=1}^{6} y_j = 1.$$

L'espérance de gain pour X est

$$E(X, Y) = XAY^T.$$

Nous cherchons des stratégies mixtes optimales X^* et Y^* ainsi que la valeur du jeu v telles que

$$\max_X \min_Y E(X, Y) = \min_Y \max_X E(X, Y) = v.$$

Résolution numérique

En résolvant les programmes linéaires correspondants (par exemple avec OPL), on obtient la valeur du jeu :

$$v = 0.333333333$$

Autrement dit, aucun des deux joueurs ne peut garantir un gain strictement positif en jouant de manière optimale.

Une solution optimale pour le joueur X est :

$$X^* = \left(0, \; \frac{1}{3}, \; 0, \; \frac{1}{3}, \; 0, \; \frac{1}{3}\right).$$

Une solution optimale pour le joueur Y est :

$$Y^* = \left(0, \; \frac{1}{3}, \; 0, \; \frac{1}{3}, \; 0, \; \frac{1}{3}\right).$$

La résolution (par exemple via OPL) donne :

$$g^* = 0.333333333, \qquad x_2^* = x_4^* = x_6^* = \frac{1}{3}, \qquad x_1^* = x_3^* = x_5^* = 0.$$

Interprétation

Les deux joueurs n'utilisent pas toutes leurs stratégies de manière uniforme. Chacun joue uniquement les stratégies du support optimal $\{2, 4, 6\}$ avec probabilité $1/3$ chacune.

La résolution numérique donne la valeur du jeu :

$$v = \frac{1}{3}.$$

Comme $v > 0$, le jeu avantage le joueur X : il peut garantir une espérance de gain de $1/3$ contre toute stratégie du joueur Y, tandis que Y ne peut pas réduire cette espérance en dessous de $1/3$.

Les stratégies mixtes optimales sont :

$$X^* = \left(0, \; \frac{1}{3}, \; 0, \; \frac{1}{3}, \; 0, \; \frac{1}{3}\right), \qquad Y^* = \left(0, \; \frac{1}{3}, \; 0, \; \frac{1}{3}, \; 0, \; \frac{1}{3}\right).$$

Ces stratégies constituent un point selle en stratégies mixtes, et la valeur du jeu est $v = \frac{1}{3}$.

Exercice 3

a) Les 3 stratégies possibles pour chaque entreprise

1. **Simultané (S)** : L'entreprise améliore les deux produits en même temps. Les deux seront prêts au bout de 12 mois.
2. **Produit 1 puis produit 2 (P12)** : L'entreprise commence par améliorer le produit 1 qui sort au bout de 9 ou 10 mois, puis le produit 2 **9 mois après le premier**.
3. **Produit 2 puis produit 1 (P21)** : L'entreprise commence par améliorer le produit 2 qui sort au bout de 9 ou 10 mois, puis le produit 1 **9 mois après le premier**.

b) Matrices des gains par produit

En utilisant les règles de l'énoncé :
— Gain de 8 % si A et B sortent simultanément.
— Gain de 20, 30, 40 % si A est en avance de 2, 6 ou 8 mois.
— Perte de 4, 10, 12, 14 % si B est en avance de 1, 3, 7 ou 10 mois.
On peut alors construire les deux matrices de gains pour l'entreprise A, une pour chaque produit, en fonction des stratégies choisies par A et B (S, P12, P21).

Produit 1 – Gains de A

Stratégie A Stratégie B	S	P12	P21
S	0,08	0,20	0,30
P12	0,20	-0,04	0,40
P21	-0,12	-0,14	-0,04

Table 1 – Matrice des gains de l'entreprise A pour le Produit 1

Produit 2 – Gains de A

Stratégie A Stratégie B	S	P12	P21
S	0,08	0,30	-0,10
P12	-0,12	-0,04	-0,14
P21	0,20	0,40	-0,04

Table 2 – Matrice des gains de l'entreprise A pour le Produit 2

> En s'appuyant sur l'énoncé : Pour chaque type de produit, si les deux entreprises proposent leur modèle amélioré simultanément, A augmente son offre des ventes totales futures dans ce produit de 8% (c'est-à-dire que sa part passe de 25% à 33%). De la même manière, A augmente son offre de 20, 30 et 40% du total si le produit est disponible respectivement 2, 6 et 8 mois plus tôt que B. D'autre part, A perd 4, 10, 12 et 14% du total si B propose le produit respectivement 1, 3, 7 et 10 mois plus tôt.

On a donc deux entreprises, A et B, qui se partagent le marché.
Si l'entreprise A gagne une part, B la perd exactement et inversement.

Stratégie A Stratégie B	S	12	21
S	$0{,}08 \cdot Q_1 + 0{,}08 \cdot Q_2$	$-0{,}10 \cdot Q_1 + 0{,}30 \cdot Q_2$	$0{,}30 \cdot Q_1 - 0{,}10 \cdot Q_2$
12	$0{,}20 \cdot Q_1 - 0{,}12 \cdot Q_2$	$-0{,}04 \cdot (Q_1 + Q_2)$	$0{,}40 \cdot Q_1 - 0{,}14 \cdot Q_2$
21	$-0{,}12 \cdot Q_1 + 0{,}20 \cdot Q_2$	$-0{,}14 \cdot Q_1 + 0{,}40 \cdot Q_2$	$-0{,}04 \cdot (Q_1 + Q_2)$

d) Existence d'un point selle

Pour savoir si une stratégie stable existe pour A et B, on cherche un **point selle**. Un point selle correspond à une situation où aucun joueur ne peut améliorer son gain en changeant de stratégie, tant que l'autre reste sur la sienne.

Cas 1 : $Q_1 = Q_2 = x$

Si les deux produits ont la même quantité, on remplace Q_1 et Q_2 par x dans la matrice des gains de l'entreprise A :

Stratégie A Stratégie B	S	12	21
S	0,16x	0,20x	0,20x
12	0,08x	-0,08x	0,26x
21	0,08x	0,26x	-0,08x

TABLE 3 – Matrice des gains de l'entreprise A pour $Q_1 = Q_2 = x$

Les bornes du jeu sont :

$$V^+ = \min_j \max_i a_{ij} = 0,16x, \quad V^- = \max_i \min_j a_{ij} = 0,16x$$

Comme $V^+ = V^-$, il existe un **point selle**. La stratégie stable est que **les deux entreprises choisissent S (simultané)**.

Cas 2 : $Q_1 = Q_2/2 = x$

Si le produit 1 représente la moitié du produit 2, on remplace $Q_1 = x$ et $Q_2 = 2x$. La matrice devient :

Stratégie A Stratégie B	S	12	21
S	0,12x	0,05x	0,25x
12	0,14x	-0,06x	0,33x
21	-0,02x	0,06x	-0,06x

TABLE 4 – Matrice des gains de l'entreprise A pour $Q_1 = Q_2/2 = x$

Calcul des bornes :

$$V^+ = \min_j \max_i a_{ij} = 0,06x, \quad V^- = \max_i \min_j a_{ij} = 0,05x$$

Ici $V^+ \neq V^-$, donc **il n'existe pas de point selle**. Aucune stratégie pure n'est stable dans ce cas.