ISIMA - Théorie Des Jeux

TP1 de Théorie Des Jeux

Decembre 2025

Erkin Tunc BOYA , Raed HAFSOUNI

Exercice 1 – Jeu des jetons colorés

(a) Jeu à somme nulle

À chaque coup, l'un des deux joueurs gagne et l'autre perd le même montant (50, 40, 30 ou 0). Le gain total d'une partie est la somme des gains sur les trois coups, et pour chaque issue la somme des gains de A et B est nulle. Le jeu est donc à somme nulle.

(b) Matrice de gains

Chaque joueur possède les trois jetons *rouge, blanc, bleu* et doit choisir un ordre d'utilisation de ces jetons sur trois coups. On numérote les stratégies pures (permutations) comme suit :

$$\begin{aligned}
1 &= (\text{rouge}, \text{blanc}, \text{bleu}),\\
2 &= (\text{rouge}, \text{bleu}, \text{blanc}),\\
3 &= (\text{blanc}, \text{rouge}, \text{bleu}),\\
4 &= (\text{blanc}, \text{bleu}, \text{rouge}),\\
5 &= (\text{bleu}, \text{rouge}, \text{blanc}),\\
6 &= (\text{bleu}, \text{blanc}, \text{rouge}).
\end{aligned}$$

En appliquant les règles (rouge bat blanc : +50, blanc bat bleu : +40, bleu bat rouge : +30, même couleur : 0), on obtient la matrice de gain (pour A) :

$$A = \begin{array}{c|cccccc}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\
\hline
1 & 0 & 0 & 0 & 120 & -120 & 0 \\
2 & 0 & 0 & 120 & 0 & 0 & -120 \\
3 & 0 & -120 & 0 & 0 & 0 & 120 \\
4 & -120 & 0 & 0 & 0 & 120 & 0 \\
5 & 120 & 0 & 0 & -120 & 0 & 0 \\
6 & 0 & 120 & -120 & 0 & 0 & 0
\end{array}$$

Pour chaque ligne i, le joueur B peut forcer un résultat -120 pour A, donc

$$\min_j a_{ij} = -120 \quad \Rightarrow \quad V^- = \max_i \min_j a_{ij} = -120.$$

Pour chaque colonne j, le joueur A peut forcer un résultat $+120$, donc

$$\max_i a_{ij} = 120 \quad \Rightarrow \quad V^+ = \min_j \max_i a_{ij} = 120.$$

Comme

$$V^- \neq V^+,$$

il n'y a pas de point selle et pas de solution en stratégies pures.

(c) Stratégies mixtes et résolution par PL

On introduit une stratégie mixte pour A :

$$X = (x_1, \dots, x_6), \qquad x_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{6} x_i = 1,$$

et une valeur garantie g. Le programme linéaire du joueur A est :

$$\max g$$

sous les contraintes

$$E(X, j) = \sum_{i=1}^{6} a_{ij} x_i \ \geq \ g, \quad j = 1, \dots, 6,$$

et

$$\sum_{i=1}^{6} x_i = 1, \quad x_i \geq 0.$$

La résolution numérique avec OPL donne

$$g^* = 0, \qquad x_1^* = x_4^* = x_5^* = \frac{1}{3}, \qquad x_2^* = x_3^* = x_6^* = 0.$$

Donc la stratégie optimale de A est

$$X^* = \left(\frac{1}{3},\ 0,\ 0,\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ 0\right), \qquad v = 0.$$

Par symétrie et par résolution analogue du programme du joueur B, on obtient une stratégie optimale de même forme pour B, et la valeur du jeu est également 0 pour lui (jeu équilibré).

(d) Lien avec les trois combinaisons proposées

Dans l'énoncé, on propose au joueur maximisateur de jouer aussi souvent les trois combinaisons suivantes :

— Bleu – Rouge – Blanc,
— Blanc – Bleu – Rouge,
— Rouge – Blanc – Bleu.

Dans notre numérotation, cela correspond exactement aux stratégies

$$5 = (\text{bleu}, \text{rouge}, \text{blanc}), \quad 4 = (\text{blanc}, \text{bleu}, \text{rouge}), \quad 1 = (\text{rouge}, \text{blanc}, \text{bleu}).$$

Jouer chacune de ces trois stratégies avec probabilité $\frac{1}{3}$ revient donc à utiliser la stratégie mixte

$$X = \left(\frac{1}{3},\ 0,\ 0,\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ 0\right),$$

qui est exactement la solution optimale X^* trouvée par le programme linéaire.

Pour cette stratégie, l'espérance de gain de A contre chaque stratégie pure de B est nulle :

$$E(X, j) = 0, \quad \forall j = 1, \dots, 6,$$

et le joueur A garantit donc la valeur du jeu

$$v = 0.$$

Exercice 2 – Jeu de Domino

(a) Jeu à somme nulle

On considère une grille 2×3 (6 cases blanches) et les 7 configurations possibles d'un domino couvrant deux cases. Le joueur X choisit une configuration, le joueur Y choisit simultanément une case parmi les 6.

— Si la case choisie par Y est recouverte par la configuration de X, alors Y gagne.

— Sinon, X gagne.

On code le gain de X par

$$\text{gain}(X) = \begin{cases} +1 & \text{si } X \text{ gagne,} \\ -1 & \text{si } Y \text{ gagne.} \end{cases}$$

Dans tous les cas, le gain de Y vaut $-\text{gain}(X)$, donc la somme des gains est toujours nulle. Le jeu est donc bien un jeu à somme nulle.

(b) Matrice de gains

Les 7 configurations possibles de placement du domino (numérotées de 1 à 7) sont les stratégies pures de X. Les 6 cases de la grille (numérotées de 1 à 6) sont les stratégies pures de Y.

On note a_{ij} le gain de X lorsque X joue la configuration i et Y annonce la case j. On obtient la matrice de gains suivante (gain pour X) :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pour chaque stratégie pure i de X, Y peut toujours choisir une colonne qui donne -1 à X, donc

$$\min_j a_{ij} = -1 \quad \Rightarrow \quad V^- = \max_i \min_j a_{ij} = -1.$$

Pour chaque stratégie pure j de Y, X peut choisir une ligne avec un gain $+1$, donc

$$\max_i a_{ij} = 1 \quad \Rightarrow \quad V^+ = \min_j \max_i a_{ij} = 1.$$

Comme

$$V^- \neq V^+,$$

il n'y a pas de point selle en stratégies pures, donc pas de solution en stratégies pures.

(c) Stratégies mixtes et résolution par PL

On introduit une stratégie mixte pour X :

$$X = (x_1, \ldots, x_7), \qquad x_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{7} x_i = 1.$$

L'espérance de gain de X contre la stratégie pure j de Y est

$$E(X, j) = \sum_{i=1}^{7} a_{ij} x_i.$$

Pour que X se garantisse au moins un gain g, il faut

$$E(X, j) \geq g, \qquad j = 1, \ldots, 6.$$

Le programme linéaire du joueur X est donc :

$$\max g$$

sous les contraintes

$$\sum_{i=1}^{7} a_{ij} x_i \ \geq \ g, \qquad j = 1, \ldots, 6,$$

$$\sum_{i=1}^{7} x_i = 1, \qquad x_i \geq 0.$$

Ce modèle est exactement celui codé dans le fichier `Ex2.txt` (une contrainte par colonne de la matrice A).

La résolution numérique avec OPL donne :

$$g^* = \frac{1}{3} \approx 0.3333,$$

et la solution optimale

$$x_1^* = x_4^* = x_6^* = \frac{1}{3}, \qquad x_2^* = x_3^* = x_5^* = x_7^* = 0.$$

Ainsi, une stratégie optimale pour le joueur X est

$$X^* = \left(\frac{1}{3},\ 0,\ 0,\ \frac{1}{3},\ 0,\ \frac{1}{3},\ 0\right).$$

Dans cette stratégie, seules les configurations 1, 4 et 6 sont utilisées, chacune avec probabilité 1/3. On vérifie que, pour chaque case j choisie par Y,

$$E(X^*, j) = \frac{1}{3},$$

donc X se garantit un gain espéré de 1/3 quelle que soit la stratégie pure de Y.

Par symétrie et via le programme linéaire dual pour Y, on obtient une stratégie mixte optimale Y^* telle que la valeur du jeu soit également 1/3 pour X.

Conclusion : valeur du jeu et joueur avantagé

La valeur du jeu (gain pour X) est

$$v = g^* = \frac{1}{3} > 0.$$

Le joueur X (qui choisit la configuration de dominos) est donc avantagé : il peut garantir un gain espéré strictement positif, tandis que Y ne peut faire mieux que limiter ce gain à 1/3.

Exercice 3

a) Les 3 stratégies possibles pour chaque entreprise

1. **Simultané (S)** : L'entreprise améliore les deux produits en même temps. Les deux seront prêts au bout de 12 mois.
2. **Produit 1 puis produit 2 (P12)** : L'entreprise commence par améliorer le produit 1 qui sort au bout de 9 ou 10 mois, puis le produit 2 **9 mois après le premier**.
3. **Produit 2 puis produit 1 (P21)** : L'entreprise commence par améliorer le produit 2 qui sort au bout de 9 ou 10 mois, puis le produit 1 **9 mois après le premier**.

b) Matrices des gains par produit

En utilisant les règles de l'énoncé :
— Gain de 8 % si A et B sortent simultanément.
— Gain de 20, 30, 40 % si A est en avance de 2, 6 ou 8 mois.
— Perte de 4, 10, 12, 14 % si B est en avance de 1, 3, 7 ou 10 mois.

On peut alors construire les deux matrices de gains pour l'entreprise A, une pour chaque produit, en fonction des stratégies choisies par A et B (S, P12, P21).

Produit 1 – Gains de A

Stratégie A Stratégie B	S	P12	P21
S	0,08	0,20	0,30
P12	0,20	-0,04	0,40
P21	-0,12	-0,14	-0,04

Table 1 – Matrice des gains de l'entreprise A pour le Produit 1

Produit 2 – Gains de A

Stratégie A Stratégie B	S	P12	P21
S	0,08	0,30	-0,10
P12	-0,12	-0,04	-0,14
P21	0,20	0,40	-0,04

Table 2 – Matrice des gains de l'entreprise A pour le Produit 2

> En s'appuyant sur l'énoncé : Pour chaque type de produit, si les deux entreprises proposent leur modèle amélioré simultanément, A augmente son offre des ventes totales futures dans ce produit de 8% (c'est-à-dire que sa part passe de 25% à 33%). De la même manière, A augmente son offre de 20, 30 et 40% du total si le produit est disponible respectivement 2, 6 et 8 mois plus tôt que B. D'autre part, A perd 4, 10, 12 et 14% du total si B propose le produit respectivement 1, 3, 7 et 10 mois plus tôt.

On a donc deux entreprises, A et B, qui se partagent le marché.
Si l'entreprise A gagne une part, B la perd exactement et inversement.

Stratégie A Stratégie B	S	12	21
S	$0{,}08 \cdot Q_1 + 0{,}08 \cdot Q_2$	$-0{,}10 \cdot Q_1 + 0{,}30 \cdot Q_2$	$0{,}30 \cdot Q_1 - 0{,}10 \cdot Q_2$
12	$0{,}20 \cdot Q_1 - 0{,}12 \cdot Q_2$	$-0{,}04 \cdot (Q_1 + Q_2)$	$0{,}40 \cdot Q_1 - 0{,}14 \cdot Q_2$
21	$-0{,}12 \cdot Q_1 + 0{,}20 \cdot Q_2$	$-0{,}14 \cdot Q_1 + 0{,}40 \cdot Q_2$	$-0{,}04 \cdot (Q_1 + Q_2)$

d) Existence d'un point selle

Pour savoir si une stratégie stable existe pour A et B, on cherche un **point selle**. Un point selle correspond à une situation où aucun joueur ne peut améliorer son gain en changeant de stratégie, tant que l'autre reste sur la sienne.

Cas 1 : $Q_1 = Q_2 = x$

Si les deux produits ont la même quantité, on remplace Q_1 et Q_2 par x dans la matrice des gains de l'entreprise A :

Stratégie A	**Stratégie B**	S	12	21
S		0,16x	0,20x	0,20x
12		0,08x	-0,08x	0,26x
21		0,08x	0,26x	-0,08x

Table 3 – Matrice des gains de l'entreprise A pour $Q_1 = Q_2 = x$

Les bornes du jeu sont :

$$V^+ = \min_j \max_i a_{ij} = 0,16x, \quad V^- = \max_i \min_j a_{ij} = 0,16x$$

Comme $V^+ = V^-$, il existe un **point selle**. La stratégie stable est que **les deux entreprises choisissent S (simultané)**.

Cas 2 : $Q_1 = Q_2/2 = x$

Si le produit 1 représente la moitié du produit 2, on remplace $Q_1 = x$ et $Q_2 = 2x$. La matrice devient :

Stratégie A	**Stratégie B**	S	12	21
S		0,12x	0,05x	0,25x
12		0,14x	-0,06x	0,33x
21		-0,02x	0,06x	-0,06x

Table 4 – Matrice des gains de l'entreprise A pour $Q_1 = Q_2/2 = x$

Calcul des bornes :

$$V^+ = \min_j \max_i a_{ij} = 0,06x, \quad V^- = \max_i \min_j a_{ij} = 0,05x$$

Ici $V^+ \neq V^-$, donc **il n'existe pas de point selle**. Aucune stratégie pure n'est stable dans ce cas.