ISIMA - Théorie Des Jeux

TP2 de Théorie Des Jeux

Decembre 2025

Erkin Tunc BOYA , Raed HAFSOUNI

Exercice 1 – Équilibres de Nash en stratégies pures

On considère deux joueurs et deux matrices de gains A et B, où :
- $A[i][j]$ représente le gain du joueur I,
- $B[i][j]$ représente le gain du joueur II,

lorsque le joueur I joue la stratégie i et le joueur II joue la stratégie j.

Méthode de résolution (meilleure réponse). Un couple de stratégies (i, j) est un équilibre de Nash en stratégies pures si :

$$i \in \arg\max_{i'} A[i'][j] \quad \text{et} \quad j \in \arg\max_{j'} B[i][j'].$$

Autrement dit, aucun joueur n'a intérêt à dévier unilatéralement de sa stratégie.

La méthode utilisée consiste à :

1. déterminer, pour chaque stratégie de l'adversaire, l'ensemble des meilleures réponses,
2. identifier les couples de stratégies qui sont simultanément des meilleures réponses pour les deux joueurs.

Résultats de TD3 .
- **Exercice 1 :** l'algorithme met en évidence deux équilibres de Nash en stratégies pures :

$$(0, 0) \quad \text{et} \quad (1, 1).$$

- **Exercice 2 :** l'algorithme met en évidence deux équilibres de Nash en stratégies pures :

$$(0, 1) \quad \text{et} \quad (1, 0).$$

Remarque. Les indices sont donnés en base 0, conformément à la convention informatique utilisée. Pour une écriture mathématique standard, il suffit d'ajouter 1 à chaque indice.

Exercice 2

0.1 Jeu Gauche – Droite – Haut – Bas

On considère un jeu à deux joueurs étudié sous forme extensive et sous forme normale.

Forme extensive. Le joueur 1 joue en premier et choisit entre **Haut (H)** et **Bas (B)**. Le joueur 2 observe ce choix et décide ensuite entre **Gauche (G)** et **Droite (D)**. Les gains associés aux issues sont donnés par l'arbre du jeu.

Forme normale. Une stratégie du joueur 2 est un plan complet indiquant son action après chaque choix possible du joueur 1. Ainsi :

$$S_1 = \{H, B\}, \qquad S_2 = \{GG, GD, DG, DD\}.$$

La matrice des gains correspondante est :

	GG	GD	DG	DD
H	$(2,1)$	$(2,1)$	$(3,-2)$	$(3,-2)$
B	$(-6,2)$	$(-1,4)$	$(-6,2)$	$(-1,4)$

Équilibres. À l'aide de Gambit, on obtient plusieurs équilibres de Nash en forme normale. En revanche, l'unique équilibre parfait en sous-jeux est :

$$(H, GD),$$

ce qui conduit à l'issue (H, G) avec gains $(2, 1)$.

0.2 Jeu de production (entrée sur le marché)

Forme normale. La forme normale du jeu est donnée par la matrice suivante, où le premier gain est celui de la firme A et le second celui de la firme B :

	Entrer	Ne pas entrer
Accepter	$(3,2)$	$(4,0)$
Refuser	$(-2,-3)$	$(4,0)$

Équilibres en forme normale. À l'aide de Gambit, on obtient les équilibres de Nash suivants :
- un équilibre pur : (Accepter, Entrer) ;
- un équilibre pur : (Refuser, Ne pas entrer) ;
- un équilibre mixte dans lequel la firme A joue Accepter avec la probabilité $3/5$ et la firme B choisit Ne pas entrer.

Forme extensive et équilibre parfait en sous-jeux. Le jeu est naturellement séquentiel : la firme B décide d'abord d'entrer ou non sur le marché. En cas d'entrée, la firme A choisit entre accepter ou refuser.

Par raisonnement à rebours, si la firme B entre, la firme A préfère accepter l'entrée (car $3 > -2$). Anticipant ce comportement, la firme B choisit d'entrer.

L'unique équilibre parfait en sous-jeux est donc :

$$(\text{Entrer, Accepter}),$$

avec des gains $(3, 2)$.

L'équilibre (Refuser, Ne pas entrer) est un équilibre de Nash en forme normale, mais il n'est pas parfait en sous-jeux car la menace de refus n'est pas crédible.

Exercice 3

1. Probabilité de gain du joueur I. Pour chaque choix initial du joueur I, le joueur II choisit rationnellement la roue restante qui minimise la probabilité de gain du joueur I.
- Si le joueur I choisit la roue 1, sa probabilité de gain est $\frac{4}{9}$.
- S'il choisit la roue 2, sa probabilité de gain est également $\frac{4}{9}$.
- S'il choisit la roue 3, sa probabilité de gain est $\frac{1}{3}$.

Ainsi, face à un adversaire rationnel, le joueur I maximise sa probabilité de gain en choisissant la roue 1 ou la roue 2.

2. Forme extensive. Le jeu est séquentiel et à information parfaite. Le joueur I choisit d'abord une roue parmi $R1, R2, R3$. Après observation de ce choix, le joueur II choisit l'une des deux roues restantes. Les gains aux feuilles de l'arbre correspondent aux espérances de gain calculées à la question 1.

3. Forme normale. La forme normale est obtenue à partir de la forme extensive à l'aide de Gambit. Le joueur I dispose de trois stratégies pures :

$$S_1 = \{R1, R2, R3\}.$$

Une stratégie du joueur II est un plan complet indiquant la roue choisie après chaque choix possible du joueur I, ce qui conduit à $2^3 = 8$ stratégies pures.

4. Équilibres de Nash. À l'aide de Gambit, on obtient des équilibres de Nash en stratégies pures. Dans ces équilibres, le joueur II choisit, pour chaque roue du joueur I, la roue restante qui minimise son espérance de gain.

Le joueur I joue alors indifféremment la roue 1 ou la roue 2, chacune conduisant à un gain espéré de $-\frac{1}{9}$. La roue 3 n'apparaît dans aucun équilibre de Nash car elle conduit à un gain espéré strictement plus faible.

Ces équilibres sont également des équilibres parfaits en sous-jeux.