问题：

$Fib(n)$是最接近$\phi^n/\sqrt{5}$的整数，其中$\phi=(1+\sqrt{5})/2$。另外假设$\varphi=(1-\sqrt{5})/2$。使用递归和斐波那契数的定义来证明$Fib(n)=(\phi^n-\varphi^n)/\sqrt{5}$

答案：

斐波那契数列的定义如下

$$Fib(n)=\begin{cases}1, & n=1\\ 1, & n=2\\ Fib(n-1)+Fib(n-2), & n\geq 3\end{cases}$$

这是一个递归关系，我们可以加一个恒等式 $Fib(n-1)=Fib(n-1)$。然后，将这个数列写成矩阵的形式。

$$\begin{bmatrix}Fib(n)\\ Fib(n-1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}Fib(n-1)\\ Fib(n-2)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}^{n-2}\times\begin{bmatrix}Fib(2)\\ Fib(1)\end{bmatrix}$$

矩阵$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$实际上代表了斐波那契数列的迭代关系。

$$\begin{bmatrix}Fib(n)\\ Fib(n-1)\end{bmatrix}=\mathbf{A}^{n-2}\times\begin{bmatrix}Fib(2)\\ Fib(1)\end{bmatrix}$$

我们可以求得这个矩阵的特征值λ，特征值的意思就是面对任何一个向量$\vec{x}$，都有$\mathbf{A}\vec{x}=\lambda\vec{x}$。继续化简，可得

$$(\mathbf{A}-\lambda)\times\vec{x}=\vec{0}$$

$$\begin{bmatrix}1-\lambda & 1\\ 1 & -\lambda\end{bmatrix}\vec{x}=\vec{0}$$

这个关系必须对任何的$\vec{x}$都成立。则唯一的解释是$\begin{bmatrix}1-\lambda & 1\\ 1 & -\lambda\end{bmatrix}$是奇异矩阵,就是说$\begin{vmatrix}1-\lambda & 1\\ 1 & -\lambda\end{vmatrix}=0$。可以得到$(1-\lambda)\times\lambda-1=0$，解得$\lambda_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$和$\lambda_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$。

其实矩阵$\mathbf{A}$是可以被分解为$Q\Lambda Q^{-1}$的，这种分解被称为雅各布分解，Λ是$\mathbf{A}$的特征值矩阵，可以得到$\mathbf{A}^n=Q\Lambda^nQ^{-1}$。我们不清楚$Q$的具体取值，但是，我们可以确定在$\mathbf{A}^n$是$\lambda_1^n$和$\lambda_2^n$的线性组合。就是说，$Fib(n)=x_1\times\lambda_1^n+x_2\times\lambda_2^n$，再考虑$Fib(1)=1$、$Fib(2)=1$

$$Fib(1)=x_1\times\lambda_1+x_2\times\lambda_2=1$$

$$Fib(2)=x_1\times\lambda_1^2+x_2\times\lambda_2^2=1$$

就是说

$$\begin{bmatrix}\lambda_1 & \lambda_2\\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$$

可以解得$x_1=\sqrt{5}/5$，$x_2=-\sqrt{5}/5$。

OK！那么，我们就得到了

$$Fib(n) = \frac{\phi^n - \varphi^n}{\sqrt{5}}$$