

Kode : C ++(Python) , Dato : 18.12.2019 , Emne : Fys3150 , Prosjekt : 5 (g)

Navn : Roshan Azam , Erlend Akre.

Partielle differensialligninger; Diffusjonsligningen

1. Abstrakt

I dette prosjektet har vi tatt for oss et geofysisk problem, vi har sett på litosfæren utenfor norskekysten der under et fenomen i en suduksjonssone, blir mantelen blir beriket med radioaktive stoffer. Dette medfører en økning av varmeproduksjonen i dette området. Vi ønsker å finne ut om det vil være mulig å finne bevis, spor eller tegn på at et slikt fenomen har skjedd for over et giga år siden. Derfor har vi sett på utviklingen av temperatur distribusjonen over et giga år.

For å gjøre disse simulasjonene har vi brukt partiselle diffrensial likninger i både (1+1) og (2+1) dimensjoner. For å løse disse partiselle diffrensial likningene har vi analysert den eksplisitte metoden Forward Euler og de implisitte metodene Backward Euler og Crank Nicolson. For å ta for oss hvem av disse som er best egnet til å finne grensebetingelsene for simulasjonen.

I dette prosjektet har vi kommet frem til at Crank Nicolson er den beste metoden når det kommer til presisjon, men når det kommer til tidsforbruk vil Forward Euler være best. Videre har vi utviklet en 2 dimensjonal algoritme som gir oss fornuftige løsninger for kjente analytiske løsninger. Under simuleringene av litosfæren med lokal radioaktiv berikelse holder en (2 + 1) dimensjonal løsning på grunn av symmetri, dette gjør at denne metoden passer svært godt til å simulere denne problemstillingen med.

Resultatene vi får fra simulasjonene ser veldig fornuftige og realistiske ut, og bygger meget godt på hverandre, selv om selve simulasjonstiden ble relativt lang. Resultatene tyder på at det vil være tydelige spor eller tegn på at en slik hendelse har funnet sted.

2. Introduksjon

Geofysisk problemstilling.

I dette prosjektet ønsker vi å ta for oss temperatur distribusjonen i litosfæren utenfor norskekysten, ettersom geologer foreslår at det har vært en subduksjonssone der for litt over et giga år siden. En slik sone vil medføre at matriale vil bli tilført mantelen, dermed skal mantelen ha blitt tilført mer radioaktivt matriale enn vanlig i dette området. Vi er ute etter å finne ut om det mulig for geologer å finne bevis, tegn, spor eller antydninger til en slik hendelse i dag, altså ett giga år senere.

For å finne svar på dette forsøker vi å simulere temperatur distribusjonen i litosfæren først på generell basis, slik at vi får en intuisjon på hva som vil være normalt. Deretter ser vi på hvordan distribusjonen når radioaktivt matriale blir tilført og videre hvordan det vil utvikle seg med hensyn på tid, med hva vi vet om radioaktive stoffer på generell basis. Dette bør gi oss en pekepinne på hvordan temperatur distubisjonen vil se ut i dag, et giga år senere. Hvis temperatur distribusjonen fortsatt ser karakteristisk ut bør geologene kunne finne bevis, spor eller tegn på en slik hendelse.

Oppsett av beregninger.

For å foreta oss en simulasjon av en slik temperatur distribusjon gjennom tid ser vi på diffusjonslikningen, som er en generell form for varmelikningen. Diffusjon er spredningen av noe i et stoff, som for eksempel varme i en metallplate og hvordan varmen sprer seg, eller som vi prøver å simulere varmen i litosfæren. Hvordan spredningen oppfører seg avhenger av initialbetingelsene og grensetilstandene til systemet, og stoffets egenskaper. Så vi må være nøyne når vi skal sette disse, siden gode initial- og grense-betingelser gir mer nøyaktige og bedre svar.

Diffusjonslikningen er en type partiell differensialligning, derfor har vi i dette prosjektet bestemt oss for å fordype oss i forskjellige metoder for å løse partielle diffrensiallikninger, målet med dette er avgjøre hvilke av disse som egner seg best for videre bruk av selve simulasjonen.

Algoritmer i (1 + 1) dimensjon.

Vi tar for oss tre forskjellige metoder for å løse diffusjonslikningen i (1+1) dimensjon som vi videre kaller for en dimensjon. Algoritmene vi studerer er Forward Euler, Backwards Euler og Crank-Nicolson algoritmen. Forward Euler er en eksplisitt metode som vi kan utvikle rett frem, men Backwards Euler og Crank-Nicolson er implisitte metoder som krever litt mer jobb.

For å finne ut hvem av disse metodene som passer best til vårt bruk, tester vi dem med eksempler som har kjente analytiske løsninger. Slik kan vi "benchmark" metodene sin presisjon og se om de er implementert riktig. Videre kan vi også se på effektiviteten deres, og gjøre en vurdering av hvilken vi tror vil passe best videre.

(2 + 1) dimensjon.

Vi antar at å løse diffusjonslikningen i en dimensjon gir oss et godt estimat for temperatur distribusjonen for den generelle litosfæren, men når vi ser på en radioaktiv berikning i et begrenset område kan vi ikke lengre anta én symmetri i alle retninger unntatt dybden. Dette gjør at vi også trenger å utvikle en metode for å løse partielle differensialligninger i 2 dimensjoner.

Dette kan også gjøres, enten på en eksplisitt fremgangsmåte eller på en implisitt måte. Vi har valgt utvikle én implisitt metode, ettersom vi da ikke trenger å ta hensyn til et stabilitets prinsipp. Her har vi også testet metoden med kjente løsninger og analytiske beregninger for andre 2 dimensjonale diffusjoneksempler. Dette gjør at vi har en god pekepinne på om vår implementasjon har even til å gi oss et godt estimat, når vi simulerer for en helt

ukjent løsning.

3.Formalisme

Vi begynner med å utlede metodene vi har studert :

Algoritmer

Forward Euler

For Forward Euler er algoritmen ganské rett fram, siden det er en eksplisitt metode:

```
In [ ]: 1 //Initialiserer vektorene
2 //Og setter initialbetingelser
3 vec u(n+1);
4 u.zeros();
5
6 vec unew(n+1);
7 unew.zeros();
8
9 //Grensebetingelser
10 u(0) = unew(0) = 0;
11 u(n) = unew(n) = 1;
12
13 //Loop over tid
14 for(int t = 1; t<=tsteps; t++){
15     for(int i = 1; i<n; i++){
16         unew(i) = alpha*u(i-1) + (1-2*alpha)*u(i) + alpha*u(i+1);
17     }
18     u = unew;
19 }
```

Backward Euler

For Backward Euler må vi bruke en tridiagonal løser og ha med matrisekoeffisienter. Vi bruker Thomas Algoritmen for å løse den likningene fra den tridiagonale likningen:

```
In [ ]: 1 //Initialbetingelser
2 for (int i = 1; i<n; i++){
3     r(i) = u(i) = 0;
4
5 //Grensebetingelser
6 r(0) = u(0) = 0.0;
7 r(n) = u(n) = 1;
8
9 //Koeffisienter
10 a = c = -alpha;
11 b = 1+2*alpha;
12
13 //Loop over tid
14 for(int t = 1; t <= tsteps; t++){
15     //Tridiagonale løseren
16     tridiag(a,b,c,r,u,n);
17     for(int i =0; i<n; i++){
18         r(i) = u(i);
19     }
20 }
```

Crank-Nicolson

For Crank-Nicolson gjør vi omtrent det samme som i Backward Euler

In []:

```

1 a = c = -alpha;
2 b = 2 + 2*alpha;
3
4 for( int t = 1; t < tsteps; t++){
5     for(int i=1; i<n; i++){
6         r(i) = alpha*u(i-1) + (2-2*alpha)*u(i) + alpha*u(i+1);
7     }
8     r(0) = 0;
9     r(n) = 1;
10    tridiag(a,b,c,r,u,n);
11    u(0) = 0;
12    u(n) = 1;
13 }
14
15

```

Matrise for Backward Euler

Backward Euler er en implisitt metode for å løse partiell differanse likninger. Vi kan sette det opp på matriseform ved :

$$u_t \approx \frac{u(x_i, t_j) - u(x_i, t_j + \Delta t)}{\Delta t}$$

Og :

$$u_{xx} \approx \frac{u(x_i + \Delta x, t_j) - 2u(x_i, t_j) + u(x_i - \Delta x, t_j)}{\Delta x^2}$$

Vi løser dette ved å sette $u_t = u_{xx}$ og sette alt som beveger seg i tid på en side :

Har likningen :

$$\frac{u(x_i, t_j) - u(x_i, t_j + \Delta t)}{\Delta t} = \frac{u(x_i + \Delta x, t_j) - 2u(x_i, t_j) + u(x_i - \Delta x, t_j)}{\Delta x^2}$$

Vi ganger på begge sider med Δt , og vi lar $\alpha = \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$. I tillegg til dette flytter vi $u(x_i, t_j)$ til den andre siden slik at vi har alt med hensyn på tid på en side.

$$-u(x_i, t_j + \Delta t) = -u(x_i, t_j) + \alpha \cdot (u(x_i + \Delta x, t_j) - 2u(x_i, t_j) + u(x_i - \Delta x, t_j))$$

Vi ganger så med -1 på begge sider og får :

$$u(x_i, t_j + \Delta t) = u(x_i, t_j) + \cdot (-\alpha u(x_i + \Delta x, t_j) + 2\alpha u(x_i, t_j) - \alpha u(x_i - \Delta x, t_j))$$

Og står igjen med:

$$u(x_i, t_j + \Delta t) = -\alpha u(x_i + \Delta x, t_j) + (1 + 2\alpha)u(x_i, t_j) - \alpha u(x_i - \Delta x, t_j)$$

Nå som vi har utrykket kan vi sette opp en tridiagonal matrise. Lar vi f.eks $i = 1$ og $j=1$ så vil utrykket gi oss:

$$u(x_1, t_2) = -\alpha u(x_2, t_1) + (1 + 2\alpha)u(x_1, t_1) - \alpha u(x_0, t_1)$$

Gjør vi dette helt opp til n , får vi da:

$$A = \begin{bmatrix} 1 + 2\alpha & -\alpha & 0 & 0 & \dots \\ -\alpha & 1 + 2\alpha & -\alpha & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & -\alpha \\ 0 & 0 & \dots & -\alpha & 1 + 2\alpha \end{bmatrix}$$

Matrise for Crank-Nicolson

Crank-Nicolson er også en implisitt metode for å løse PDE, vi bruker samme metode til å sette opp en tridiagonal matrise. For Crank-Nicolson har vi utrykkene :

$$u_t \approx \frac{u(x_i, t_j + \Delta t) - u(x_i, t_j)}{\Delta t}$$

Og :

$$u_{xx} \approx \frac{1}{2} \left(\frac{u(x_i + \Delta x, t_j) - 2u(x_i, t_j) + u(x_i - \Delta x, t_j)}{\Delta x^2} + \frac{u(x_i + \Delta x, t_j + \Delta t) - 2u(x_i, t_j + \Delta t) + u(x_i - \Delta x, t_j + \Delta t)}{\Delta x^2} \right)$$

Vi setter så opp likningen :

$$\frac{u(x_i, t_j + \Delta t) - u(x_i, t_j)}{\Delta t} = \frac{1}{2} \left(\frac{u(x_i + \Delta x, t_j) - 2u(x_i, t_j) + u(x_i - \Delta x, t_j)}{\Delta x^2} + \frac{u(x_i + \Delta x, t_j + \Delta t) - 2u(x_i, t_j + \Delta t) + u(x_i - \Delta x, t_j + \Delta t)}{\Delta x^2} \right)$$

Setter vi inn at $\alpha = \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$, kan vi skrive dette om som :

$$-\alpha u(x_i - \Delta x, t_j) + (2 + 2\alpha) u(x_i, t_j) - \alpha u(x_i + \Delta x, t_j) = \alpha u(x_i - \Delta x, t_j - \Delta t) + (2 - 2\alpha) u(x_i, t_j - \Delta t) + \alpha u(x_i + \Delta x, t_j + \Delta t)$$

Dette kan skrives om til :

$$(2\hat{I} + \alpha\hat{B}) V_j = (2\hat{I} - \alpha\hat{B}) V_{j-1}$$

Der $B =$

$$\hat{B} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \dots \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & -1 \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Etter dette kan vi skrive om på formelen vår :

$$V_j = (2\hat{I} + \alpha\hat{B})^{-1} (2\hat{I} - \alpha\hat{B}) V_{j-1}.$$

Om vi ganger matrisen :

$$\tilde{V}_{j-1} = (2\hat{I} - \alpha\hat{B}) V_{j-1}$$

Med V_{j-1} , som er den forrige forrige vektoren vår, ved hjelp av matrise-vektor multiplikasjons algoritmen vår. Etter dette kan vi løse likningen :

$$(2\hat{I} + \alpha\hat{B}) V_j = \tilde{V}_{j-1}.$$

Dette kan vi da løse på samme måte som vi løser Backwards Euler, med omtrent samme algoritme.

Stabilitet for implisitte metoder

Crank-Nicolson og Backward Euler er stabile for alle Δt og Δx . Dette er fordi de er implisitte metodene den spektrale radiusen $\rho(A) < 1$. Dette er fordi matrisene er positiv definit, som betyr at alle egenverdiene er større enn 0. Vi ser fra $A = I + \alpha B$ at vi har egenverdiene $\lambda_i = 1 + \alpha(2 - 2\cos(\theta))$ som tilfredstiller $\lambda_i > 1$. Vi har da $\rho(A^{-1}) < 1$ som gjør metoden stabil for alle kombinasjoner av Δt og Δx .

Vi kan utlede stabiliteten til Crank Nicolson. Egenverdiene for $(2\hat{I} + \alpha\hat{B})$ og $(2\hat{I} - \alpha\hat{B})$ kan vi finne. Vi definerer egenverdiene som μ_i , og vi har :

$$b_{ij} = 2\delta_{ij} - \delta_{i+1j} - \delta_{i-1j},$$

Som betyr at vi har et sett med egenverdi likninger for komponentene i :

$$(\hat{B}\hat{x})_i = \mu_i x_i,$$

Som gir oss :

$$(\hat{B}\hat{x})_i = \sum_{j=1}^n (2\delta_{ij} - \delta_{i+1j} - \delta_{i-1j}) x_j = 2x_i - x_{i+1} - x_{i-1} = \mu_i x_i.$$

Hvis vi antar at x kan bli ekspandert i en basis av $x = (\sin(\theta), \sin(2\theta), \dots, \sin(n\theta))$ der $\theta = l\pi/n + 1$, der vi har endepunktene gitt ved $x_0 = 0$ og $x_{n+1} = 0$ kan vi omskrive den forrige likningen vår som :

$$2 \sin(i\theta) - \sin((i+1)\theta) - \sin((i-1)\theta) = \mu_i \sin(i\theta)$$

Som kan skrives om som :

$$2(1 - \cos(\theta)) x_i = \mu_i x_i.$$

Dette gir oss egenverdiene $\mu_i = 2 - 2\cos(\theta)$.

Nå som vi vet egenverdiene har vi at spektral funksjonen vår må tilfredsstille :

$$\rho((2\hat{I} + \alpha\hat{B})^{-1} (2\hat{I} - \alpha\hat{B})) < 1$$

Som betyr at :

$$|(2 + \alpha\mu_i)^{-1} (2 - \alpha\mu_i)| < 1,$$

Og siden vi vet hva μ_i er, kan vi også se at $0 < \mu_i < 4$. Ut fra dette skal vi kunne vise at CN algoritmen er stabil for alle Δx og Δt .

Stabilitet for Forward Euler

Forward Euler er bare stabil når $\Delta t = \frac{1}{2} \Delta x^2$. Dette kan vi utlede ved å kreve at løsningen vår går mot en endelig verdi etter et vist antall steg i tid. Da må vi også kreve at spektral radiusen $\rho(\mathbf{A})$ for matrisen vår A tilfredstiller $\rho(\mathbf{A}) < 1$. Spektral radius defineres ved :

$$\rho(\mathbf{A}) = \max \{ |\lambda| : \det(\mathbf{A} - \lambda \hat{\mathbf{I}}) = 0 \}$$

Som kan beskrives som det minste tallet slik at en sirkel med radius sentrert i origo i et komplekst plan inneholder alle egenverdiene for A . Hvis matrisen er positiv definit vil dette alltid være sant.

Vi kan finne utrykk for egenverdiene til A , for å gjøre dette skriver vi om på matrisen $\mathbf{A} = \hat{\mathbf{I}} - \alpha \hat{\mathbf{B}}$ der :

$$\hat{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \dots \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & -1 \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Egenverdiene for A er $\lambda_i = 1 - \alpha \mu_i$, der μ_i er egenverdiene for $\hat{\mathbf{B}}$ matrisen. Dette har vi vist da vi viste stabiliteten til Crank Nicolson. Ut fra kriteriet vårt om at $\rho(\mathbf{A}) < 1$ får vi da:

$$-1 < 1 - \alpha 2(1 - \cos(\theta)) < 1$$

Som bare er tilfredstilt om $\alpha < (1 - \cos(\theta))^{-1}$ som resulterer i $\alpha \leq 1/2$, og siden $\alpha = \Delta t / \Delta x^2$, har vi da stabilitetskriteriet: $\Delta t / \Delta x^2 \leq 1/2$.

Analytisk løsning i 1D

Vi vil løse likningen vår analytisk fordi det alltid er nyttig å ha et analytisk utrykk å sammenlikne med.

Starter med likningen :

$$\nabla^2 u(x, t) = \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}$$

Med initialbetingelsene $u(x, 0) = 0$, for $0 < x < L$ der $L=1$.

Grensetilstandene er :

$$u(0, t) = 0, t \leq 0, \quad u(L, t) = 0, t \leq 1$$

Vi antar at vi har en løsning på formen $u(x, t) = a(x, t) + F(x)G(t)$. Dette kan vi skrive om til $u(x, t) = a(x, t) + v(x, t)$, der $v(x, t)$ er løsningen med grensetilstandene $v(0, t) = 0$ og $v(1, t) = 0$. Vi starter da med å finne den generelle løsningen for $v(x, t)$, vi starter da med :

$$\frac{F''}{F} = \frac{G'}{G}$$

Der vi dervierer med hensyn på x på venstre side og t på høyre siden. Dette uttrykket skal holde for alle x og t . Vi må la høyre og venstre side være lik konstanter. Vi kaller denne konstanten $-\lambda^2$. Dette gir to differensielllikninger :

$$F'' + \lambda^2 F = 0; \quad G' = -\lambda^2 G$$

Med generelle løsninger :

$$F(x) = A \sin(\lambda x) + B \cos(\lambda x); \quad G(t) = C e^{-\lambda^2 t}.$$

For å tilfredstille grensetilstandene til $v(x, t)$ lar vi $B = 0$ og $\lambda = \frac{n\pi}{L}$. Dette gjør at vi kan finne en løsning :

$$v(x, t) = A_n \sin(n\pi x/L) e^{-n^2\pi^2 t/L^2}.$$

Siden vi har uendelig mange n betyr det at vi kan finne uendelig mange løsninger.

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\pi x/L) e^{-n^2\pi^2 t/L^2}.$$

Nå som vi har en generell løsning for $v(x, t)$, har vi :

$$u(x, t) = a(x, t) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-\frac{n^2\pi^2 t}{L^2}}$$

Ut fra dette skal vi kunne finne den analytiske løsningen vår. Vi finner ut at $a(x, t) = \frac{x}{L}$. Etter dette kan vi bruke at :

$$u(x, 0) = \frac{x}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = 0$$

Etter dette tar vi indreprodukt med en sinus, dette vil også påvirke det linære leddet vårt som er der vi vil få bidrag. Dette vil gi at vi får koeffisientene :

$$A_n = (-1)^n 2/n\pi$$

Det analytiske utrykket som vi står igjen med nå er da :

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-\frac{n^2\pi^2 t}{L^2}}$$

Truncation error, Euler metodene

For de forskjellige metodene vil få truncation errors. Dette er på grunn av metodene som vi bruker, som kommer ut fra Taylor ekspansjoner. Dette gjør slik at vi får feil, siden vi approksimerer uendelig ved hjelp av et endelig tall.

For Forward Euler har vi Taylor ekspansjonene :

$$\begin{aligned} u(x + \Delta x, t) &= u(x, t) + \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial^2 u(x, t)}{2\partial x^2} \Delta x^2 + \mathcal{O}(\Delta x^3) \\ u(x - \Delta x, t) &= u(x, t) - \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial^2 u(x, t)}{2\partial x^2} \Delta x^2 + \mathcal{O}(\Delta x^3) \\ u(x, t + \Delta t) &= u(x, t) + \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \Delta t + \mathcal{O}(\Delta t^2) \end{aligned}$$

Vi kan så sette dette inn i :

$$u_t \approx \frac{u(x_i, t_j + \Delta t) - u(x_i, t_j)}{\Delta t}$$

Der u_t er en approksimasjon av $\frac{\partial u(x, t)}{\partial t}$. Setter vi inn får vi altså :

$$\left[\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right]_{\text{approx}} = \frac{u(x, t) + \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \Delta t + \mathcal{O}(\Delta t^2) - u(x, t)}{\Delta t},$$

Ut fra dette får vi altså :

$$\left[\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right]_{\text{approx}} = \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + \mathcal{O}(\Delta t),$$

Vi kan gjøre det samme for den partiell deriverte med hensyn på x. Setter vi inn utrykkene våre i approksimasjonen:

$$u_{xx} \approx \frac{u(x_i + \Delta x, t_j) - 2u(x_i, t_j) + u(x_i - \Delta x, t_j)}{\Delta x^2}$$

får vi:

$$\left[\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \right]_{\text{approx}} \approx \frac{u(x, t) + \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial^2 u(x, t)}{2\partial x^2} \Delta x^2 + \mathcal{O}(\Delta x^3) - 2u(x_i, t_j) + u(x, t) - \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial^2 u(x, t)}{2\partial x^2} \Delta x^2 + \mathcal{O}(\Delta x^3)}{\Delta x^2}$$

Dette skal gi oss:

$$\left[\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \right]_{\text{approx}} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + \mathcal{O}(\Delta x^2),$$

Etter at vi har regnet ut.

Vi kan gjøre det samme for Backwards Euler, da ser vi at feilen blir det samme som her, altså: $\mathcal{O}(\Delta x^2)$ og $\mathcal{O}(\Delta t)$.

Truncation error, Crank Nicolson metoden

For Crank Nicolson må vi ta noen ekstra steg, siden vi må også Taylor ekspandere $u(x + \Delta x, t + \Delta t)$, $u(x - \Delta x, t + \Delta t)$ rundt $t' = t + \Delta t/2$ som senter. Dette gir oss :

$$\begin{aligned}
u(x + \Delta x, t + \Delta t) &= u(x, t') + \frac{\partial u(x, t')}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u(x, t')}{\partial t} \frac{\Delta t}{2} + \frac{\partial^2 u(x, t')}{2 \partial x^2} \Delta x^2 + \frac{\partial^2 u(x, t')}{2 \partial t^2} \frac{\Delta t^2}{4} + \\
&\quad \frac{\partial^2 u(x, t')}{\partial x \partial t} \frac{\Delta t}{2} \Delta x + \mathcal{O}(\Delta t^3) \\
u(x - \Delta x, t + \Delta t) &= u(x, t') - \frac{\partial u(x, t')}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u(x, t')}{\partial t} \frac{\Delta t}{2} + \frac{\partial^2 u(x, t')}{2 \partial x^2} \Delta x^2 + \frac{\partial^2 u(x, t')}{2 \partial t^2} \frac{\Delta t^2}{4} - \\
&\quad \frac{\partial^2 u(x, t')}{\partial x \partial t} \frac{\Delta t}{2} \Delta x + \mathcal{O}(\Delta t^3) \\
u(x + \Delta x, t) &= u(x, t') + \frac{\partial u(x, t')}{\partial x} \Delta x - \frac{\partial u(x, t')}{\partial t} \frac{\Delta t}{2} + \frac{\partial^2 u(x, t')}{2 \partial x^2} \Delta x^2 + \frac{\partial^2 u(x, t')}{2 \partial t^2} \frac{\Delta t^2}{4} - \\
&\quad \frac{\partial^2 u(x, t')}{\partial x \partial t} \frac{\Delta t}{2} \Delta x + \mathcal{O}(\Delta t^3) \\
u(x - \Delta x, t) &= u(x, t') - \frac{\partial u(x, t')}{\partial x} \Delta x - \frac{\partial u(x, t')}{\partial t} \frac{\Delta t}{2} + \frac{\partial^2 u(x, t')}{2 \partial x^2} \Delta x^2 + \frac{\partial^2 u(x, t')}{2 \partial t^2} \frac{\Delta t^2}{4} + \\
&\quad \frac{\partial^2 u(x, t')}{\partial x \partial t} \frac{\Delta t}{2} \Delta x + \mathcal{O}(\Delta t^3) \\
u(x, t + \Delta t) &= u(x, t') + \frac{\partial u(x, t')}{\partial t} \frac{\Delta t}{2} + \frac{\partial^2 u(x, t')}{2 \partial t^2} \Delta t^2 + \mathcal{O}(\Delta t^3) \\
u(x, t) &= u(x, t') - \frac{\partial u(x, t')}{\partial t} \frac{\Delta t}{2} + \frac{\partial^2 u(x, t')}{2 \partial t^2} \Delta t^2 + \mathcal{O}(\Delta t^3)
\end{aligned}$$

Dette gir oss approksimasjonene:

$$\begin{aligned}
\left[\frac{\partial u(x, t')}{\partial t} \right]_{\text{approx}} &= \frac{\partial u(x, t')}{\partial t} + \mathcal{O}(\Delta t^2), \\
\left[\frac{\partial^2 u(x, t')}{\partial x^2} \right]_{\text{approx}} &= \frac{\partial^2 u(x, t')}{\partial x^2} + \mathcal{O}(\Delta x^2).
\end{aligned}$$

Vi ser da at feilen i Crank Nicolsen er gitt som: $\mathcal{O}(\Delta t^2)$ og $\mathcal{O}(\Delta x^2)$.

Altså er feilein i både Forward og Backward Euler gitt som $\mathcal{O}(\Delta t)$ og $\mathcal{O}(\Delta x^2)$, og Crank Nicolson gir $\mathcal{O}(\Delta t^2)$ og $\mathcal{O}(\Delta x^2)$.

2D Løsning av Diffusjon

For å løse diffusjonslikningen i 2D bruker vi Jacobi algoritmen. I 2D vil diffusjonslikningen se ut som :

$$\frac{\partial u(x, y, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial y^2}, \quad t > 0, x, y \in [0, 1]$$

Vi antar at vi har et kvadratisk gitter L med like mange meshpoints i x og y retning. Vi bruker at $u_{xx} = \partial^2 u / \partial x^2$ og så videre for de annenderiverte. Vi bruker også $u_t = \partial u / \partial t$ for dne deriverte av tid. Med initialverdiene og grenseverdiene våre har vi :

$$\begin{aligned}
u_t &= u_{xx} + u_{yy} & x, y \in (0, L), t > 0 \\
u(x, y, 0) &= g(x, y) & x, y \in (0, L) \\
u(0, y, t) &= u(L, y, t) = u(x, 0, t) = u(x, L, t) = 0 & t > 0
\end{aligned}$$

Vi kan diskretisere tid og posisjon, bruker vi følgende approksimasjon for den andre deriverte :

$$u_{xx} \approx \frac{u(x + h, y, t) - 2u(x, y, t) + u(x - h, y, t)}{h^2}$$

Som vi kan diskretisere til å være:

$$u_{xx} \approx \frac{u_{i+1,j}^l - 2u_{i,j}^l + u_{i-1,j}^l}{h^2}$$

Der $x_i = x_0 + ih$, $y_j = y_0 + jh$, og $t_l = t_0 + l\Delta t$, med $h = L/(n + 1)$ og Δt er tidssteg.

For de diskretiserte versjonene av de deriverte av y og t har vi :

$$u_{yy} \approx \frac{u_{i,j+1}^l - 2u_{i,j}^l + u_{i,j-1}^l}{h^2}$$

Og

$$u_t \approx \frac{u_{i,j}^{l+1} - u_{i,j}^l}{\Delta t}$$

Dette gir oss da:

$$u_{i,j}^{l+1} = u_{i,j}^l + \alpha [u_{i+1,j}^l + u_{i-1,j}^l + u_{i,j+1}^l + u_{i,j-1}^l - 4u_{i,j}^l]$$

Der venstre side er den eneste ukjente, siden denne inneholder løsningen for det neste tidssteget, siden vi står i initialbetingelsene våre og dette gjør at vi kan bestemme høyre side ut fra dette. Vi har $\alpha = \Delta t/h^2$.

Siden høyre side er bestemt ut av initialverdiene og grenseverdiene våre så betyr dette at vi må iterere. Vi kan skrive likningen vår på en mer kompakt form :

$$u_{i,j}^l = \frac{1}{1+4\alpha} [\alpha \Delta_{ij}^l + u_{i,j}^{l-1}]$$

Der $\Delta_{ij}^l = [u_{i,j+1}^l + u_{i,j-1}^l + u_{i+1,j}^l + u_{i-1,j}^l]$. Dette kan vi skrive om til en matrise og løse på samme måte som vi løste de implisitte metodene våre.

Analytisk løsning i 2D

Vi lager en closed form løsning for diffusjonslikningen i 2D med følgende grenseverdier og initialbetingelser. Vi starter igjen med :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x,y,t)}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial y^2} & x, y \in (0, L), t > 0 \\ u(x, y, 0) &= f(x, y) = \sin(\frac{\pi x}{L}) \sin(\frac{\pi y}{L}) \\ u(0, y, t) &= u(L, y, t) = u(x, 0, t) = u(x, L, t) = 0 \end{aligned}$$

Vi antar en løsning på formen :

$$u(x, y, t) = F(x, y)G(t)$$

Som resulterer i likningnen :

$$FG_t = (F_{xx}G + F_{yy}G) = -\lambda^2$$

Eller

$$\frac{G_t}{G} = \frac{1}{F}(F_{xx} + F_{yy}) = -\lambda^2$$

Som er analogt til det vi fikk for 1D hvis vi ser nærmere på utrykket.

Høyre og venstre side vil være uavhengig av hverandre, dette gjør slik at vi får to forskjellige differensiallikninger.

$$(F_{xx} + F_{yy}) + v^2 F = 0$$

Og

$$G_t + Gv^2 = 0,$$

For tidslikningen har vi samme løsning som i 1D, altså:

$$G(t) = Ce^{-\lambda^2 t}$$

Der $\lambda^2 = \pi^2(n^2 + m^2)^2$

Vi gjør en ansats for likningen som avhenger av x og y :

$$F(x, y) = H(x)Q(y)$$

Kan sette inn dette i den diffusjonslikningen vår som vi gjorde da vi fant likningene for G og F , dette vil resultere i :

$$\frac{1}{H}H_{xx} = -\frac{1}{Q}(Q_{yy} + Qv^2) = -\kappa^2.$$

Siden høyre og venstre side igjen er uavhengig av hverandre kan vi løse dette hver for seg to likninger, en for x og en for y :

$$H_{xx} + \kappa^2 H = 0,$$

Og

$$Q_{yy} + \rho^2 Q = 0$$

Der $\rho^2 = v^2 - \kappa^2$.

Vi antar så en løsning av disse likningene på formene :

$$H(x) = A \cos(\kappa x) + B \sin(\kappa x)$$

Og

$$Q(y) = C \cos(\rho y) + D \sin(\rho y).$$

Vi bruker grensebetingelsene våre, altså :

$$H(0) = H(L) = Q(0) = Q(L) = 0,$$

Da får vi ut :

$$H_m(x) = \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \quad Q_n(y) = \sin\left(\frac{n\pi y}{L}\right),$$

Som betyr at vi har løsningen for $F(x)$:

$$F_{mn}(x, y) = \sum_{mn=1}^{\infty} A_{m,n} \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{L}\right).$$

Finner koeffisientene ut fra initialbetingelsen :

$$\int_0^L \int_0^L f(x, y) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{L}\right) dx dy = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{m,n} \frac{L^4}{4} \delta_x \delta_y$$

Dette gir :

$$\frac{L^2}{4} \delta_x \delta_y = \frac{L^2}{4} A_{m,n}$$

Den generelle løsningen er på formen :

$$u(x, y, t) = \sum_{mn=1}^{\infty} u_{mn}(x, y, t) = \sum_{mn=1}^{\infty} F_{mn}(x, y) G_{mn}(t) = \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{L}\right) e^{-\pi^2(n^2+m^2)^2 t}$$

Selv simulasjonen.

Geofysisk problemstilling

Nå som vi har gjort rede for metodene vi kan bruke tar vi for oss dét geofysiske problemet. Vi begynner som beskrevet kort tidligere med å finne temperatur distribusjonen ned i litosfæren for et generelt område utenfor norske kysten. Her antar vi at vi har en uniform temperatur distribusjonen bortsett fra i dybde retningen. I havbunnen er gjennomsnittsgraden 8° Celsius og vi får oppgit av geofysikkere at temperaturen ved 120 Kilometers dyp i litosfæren er 1300° Celsius, med andre ord har vi grensebetingelsene oppgit.

Generell temperatur distribusjon i litosfæren.

Hvis dette hadde vært tilfelle får vi en temperatur distribusjonen som ved likevekt hadde vært linær, fra overflaten 0 Kilometer og 8° Celsius til 120 Kilometer og temperaturen 1300° Celsius. Geofysikerne gir oss én generell varmeproduksjons funksjon for de forskjellige delene av litosfæren.

$$Q(X) = \begin{cases} 1,4 \mu W m^3 & 0 \text{ Kilometer} \leq X \leq 20 \text{ Kilometer} \\ 0,35 \mu W m^3 & 20 \text{ Kilometer} < X \leq 40 \text{ Kilometer} \\ 0,05 \mu W m^3 & 40 \text{ Kilometer} < X \leq 120 \text{ Kilometer} \end{cases}$$

Altså øvre del av skorpen gir en varmeproduksjon på $1,4 \mu W m^3$, nedre del av skorpen gir varmeproduksjon på $0,35 \mu W m^3$ og selve mantelen har kun en varmeproduksjon på $0,05 \mu W m^3$, dette betyr at vi også må ta hensyn til varme produksjonen under simuleringene. Vi antar at varmeproduksjonen også er symmetrisk i alle retninger med unntak av dybden. I tillegg må vi også ta hensyn til litosfærens fysikalske egenskaper, vi antar en universal konstant tetthet på $3,510^3 \text{ Kg/m}^3$, en konstant varmekapasitet på $1000 \text{ J/Kg}^\circ \text{C}^{-1}$ og en konstant termisk konduktivitet på $2.5 \text{ W/m}^\circ \text{C}$.

Diffusjonslikningen til systemet kan uttrykkes ved ;

$$\vec{\nabla}(k \vec{\nabla} T) + Q = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} T \vec{\nabla} k + k \vec{\nabla} \vec{\nabla} T + Q = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t}$$

Siden vi antar at vi har konstant termisk konduktivitet gir dette oss at :

$$\vec{\nabla} T \vec{\nabla} k = 0$$

Dermed :

$$k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + Q = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t}$$

$$\frac{k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + Q}{\rho c_p} = \frac{\partial T}{\partial t}$$

Temperatur distribusjon i område med konstant radioaktivt varmebidrag.

Vi forventer fortsatt noe som minner litt om en lineær temperatur distribusjon så for å raskest mulig oppnå et equilibrium stadie, så setter vi initialbetingelsene til en lineær temperatur distribusjon fra overflaten 0 Kilometer og 8° Celsius til 120 Kilometer og temperaturen 1300° Celsius. Equilibriumstilstanden lagrer vi og tar med oss videre som grensebetingelsene i simulasjonene videre ettersom de representerer temperatur distribusjonen utenfor et begrenset radioaktivt beriket område.

Når vi nå tar for oss et område så tar vi for oss en (2 + 1) dimensjonal simulering, ser vi fortsatt på den samme dybde på 120 Kilometer, men det radioaktive området strekker seg på et område på 150 Kilometer. I dette prosjektet antar vi at det radioaktive området sprer seg langs hele sprekken mellom kontinentalplatene, og dermed har en lengde som er mye lengre enn Norges lengde på 1790 Kilometer, ergo at vi antar vi har en symetri langs med sprekken og ikke trenger å se nærmere på (3 + 1) for å finne spor på en slik hendelse. Dette betyr at :

$$\vec{\nabla}T\vec{\nabla}k + k\vec{\nabla}\vec{\nabla}T + Q = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t}$$

Vi antar at den termiske konduktiviteten fortsatt er symmetrisk, dette gjør at :

$$\vec{\nabla}T\vec{\nabla}k = 0$$

Og dermed at :

$$k\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right) + Q = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t}$$

$$\frac{k\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right) + Q}{\rho c_p} = \frac{\partial T}{\partial t}$$

Spor av radioaktiv berikning av mantelen, i dag.

I følge geologene skal den radioaktive varmebidraget i mantelen for ett giga år siden være på $0,5 \mu W m^{-3}$. Vi bruker temperatur distribusjonen for litosfæren generelt som grensebetingelser, også for å nå equilibrium raskest mulig med konstant radioaktivt varmebidrag, så setter vi også denne temperatur distribusjonen som initialbetingelsene. Ved equilibrium stadiet der vil vi få temperatur distribusjonen for ett giga år siden.

Noe som betyr at vi har nå har både grensene i form av temperatur distribusjonen til litosfæren generelt, og initialbetingelsene for temperatur distribusjonen for et giga år siden. Alt vi mangler er å ta hensyn til den radioaktive nedbrytningsprosessen.

Geofysikerne hevder at 40% av varmen kommer fra Uran, som har en halveringstid på 4,47 giga år. 40 % kommer fra Thorium, som har en halveringstid på 14,0 giga år. Siste 20 % kommer fra Kalium som har en halveringstid på 1,25 giga år. Dette betyr at varmeproduksjonen nå er gitt som :

$$Q(X, T) = \begin{cases} 1,4 \mu W m^{-3} & 0 \text{ Kilometer} \leq X \leq 20 \text{ Kilometer} \\ 0,35 \mu W m^{-3} & 20 \text{ Kilometer} < X \leq 40 \text{ Kilometer} \\ (0,05 + (U + Th + K)) \mu W m^{-3} & 40 \text{ Kilometer} < X \leq 120 \text{ Kilometer} \end{cases}$$

Der U, Th og K er gitt som :

$$U(T) = 0,5 \cdot 40\% \cdot \frac{1}{2^{\frac{T}{4,47 \cdot 10^9 \text{ år}}}}$$

$$Th(T) = 0,5 \cdot 40\% \cdot \frac{1}{2^{\frac{T}{14,0 \cdot 10^9 \text{ år}}}}$$

$$K(T) = 0,5 \cdot 20\% \cdot \frac{1}{2^{\frac{T}{1,25 \cdot 10^9 \text{ år}}}}$$

Hvis vi simulerer over et giga år så bør vi kunne gi et estimat om hvordan dette bør se ut i dag. Hvis vi kommer frem til en fornuftig temperatur distribusjonen kan vi se etter målinger som har samme karakteristikk som denne, og kalle dette svært gode tegn til at hendelsen fant sted.

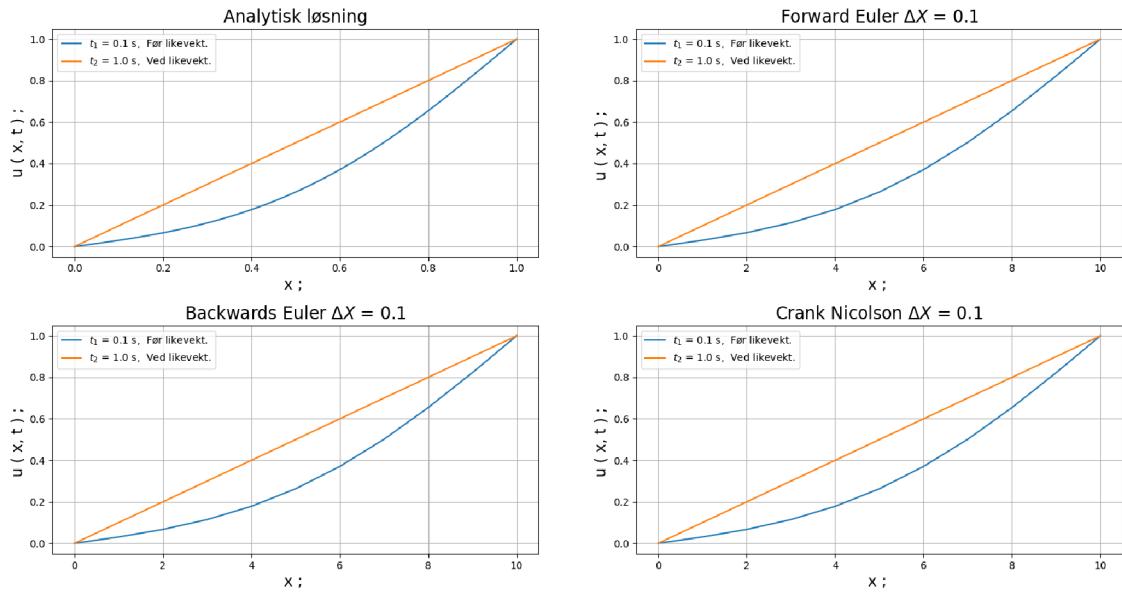
Om koden.

I dette prosjektet har vi utviklet koden slik at den skal i størst mulig grad vise oss at den er implementert riktig, derfor har vi tatt for oss eksempler, som vi i (1 + 1) dimensjonalt har sammenlignet direkte med den analytiske løsningen i unittests og som vi manuelt analyserer grafiskt.

For det (2 + 1) har vi kun en metode å sammenligne, derfor har vi tatt for oss 2 eksempler for å sjekke om den fungerer som den skal, vi har tatt for oss eksempelet fra formalismen, ettersom denne har en veldig enkel analytisk løsning, som vi kontrollerer i unittestene våre for å passe på at denne metoden er implementert riktig. Dette eksempelet er dessverre ikke så grafisk tilfredstillende som andre eksempler, så vi har sett på tilfellet hvor initialbetingelsene er 0 og grensebetingelsene er 0, bortsett fra den ene siden av grensebetingelsene som vi setter til å være 1. Dette burde gi en intuitivt og karakteristisk løsning som forhåpentligvis vil være lett å gjenkjenne.

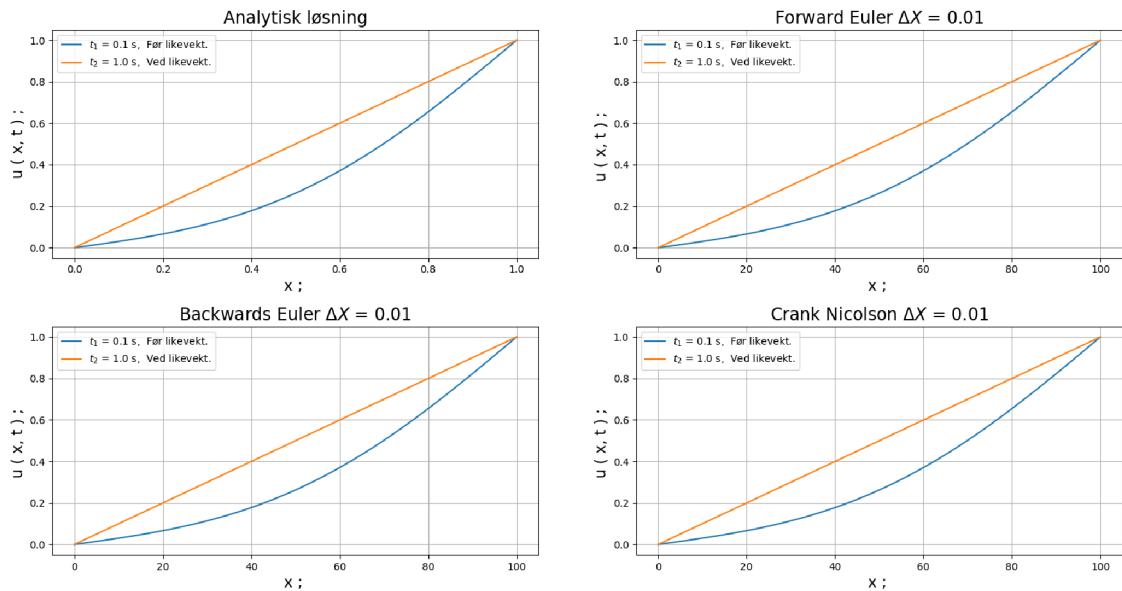
Resultater

1D simulasjon



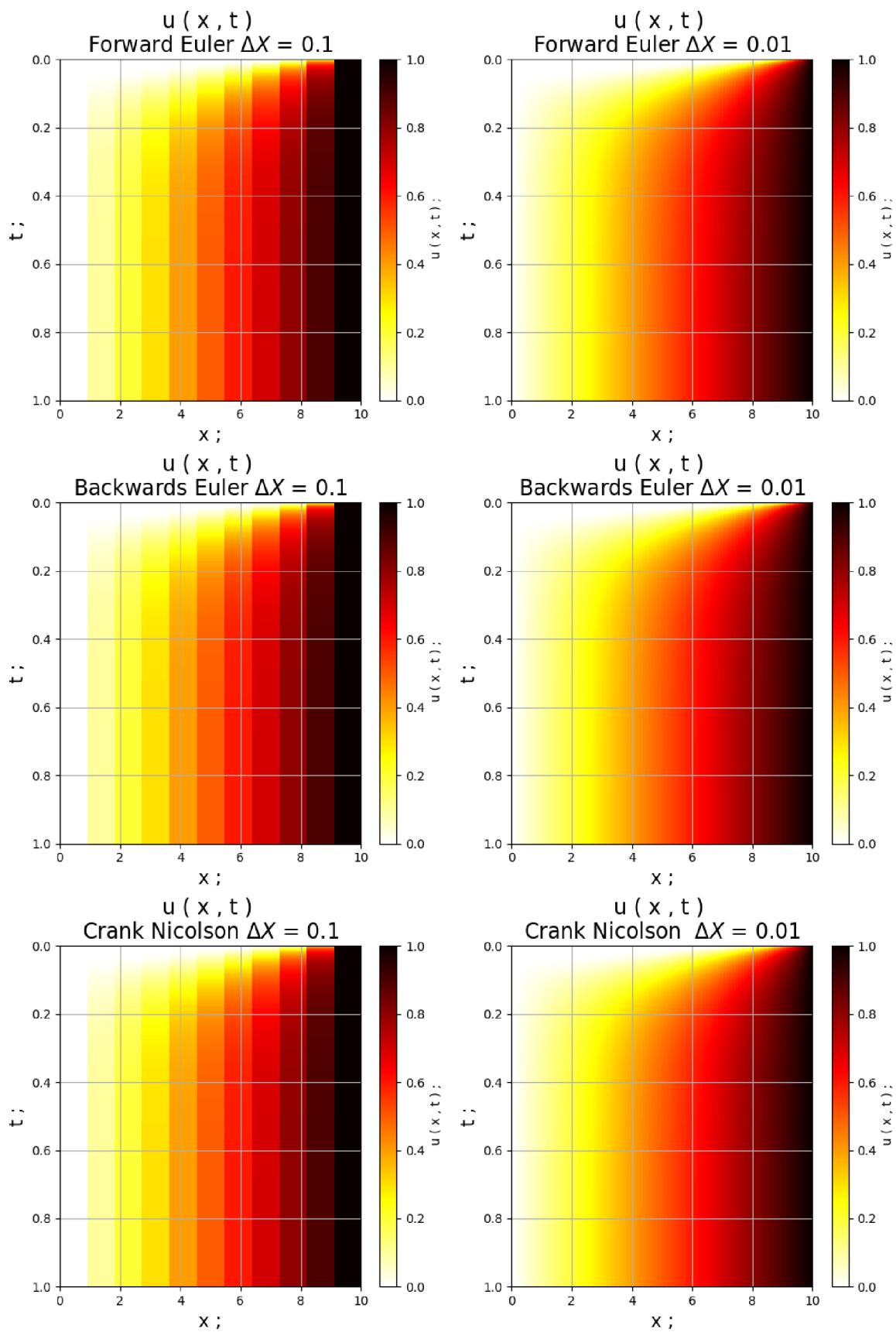
Plott 1

Plott av løsning av diffusjonslikningen med de tre metodene, Forward Euler, Backward Euler og Crank Nicolson for to forskjellige tider, $t_1=0.1\text{s}$ og $t_2=1$. X verdier på x aksen og $u(x,t)$ verdier på y-aksen, simulert med $\Delta x=0.1$.



Plott 2

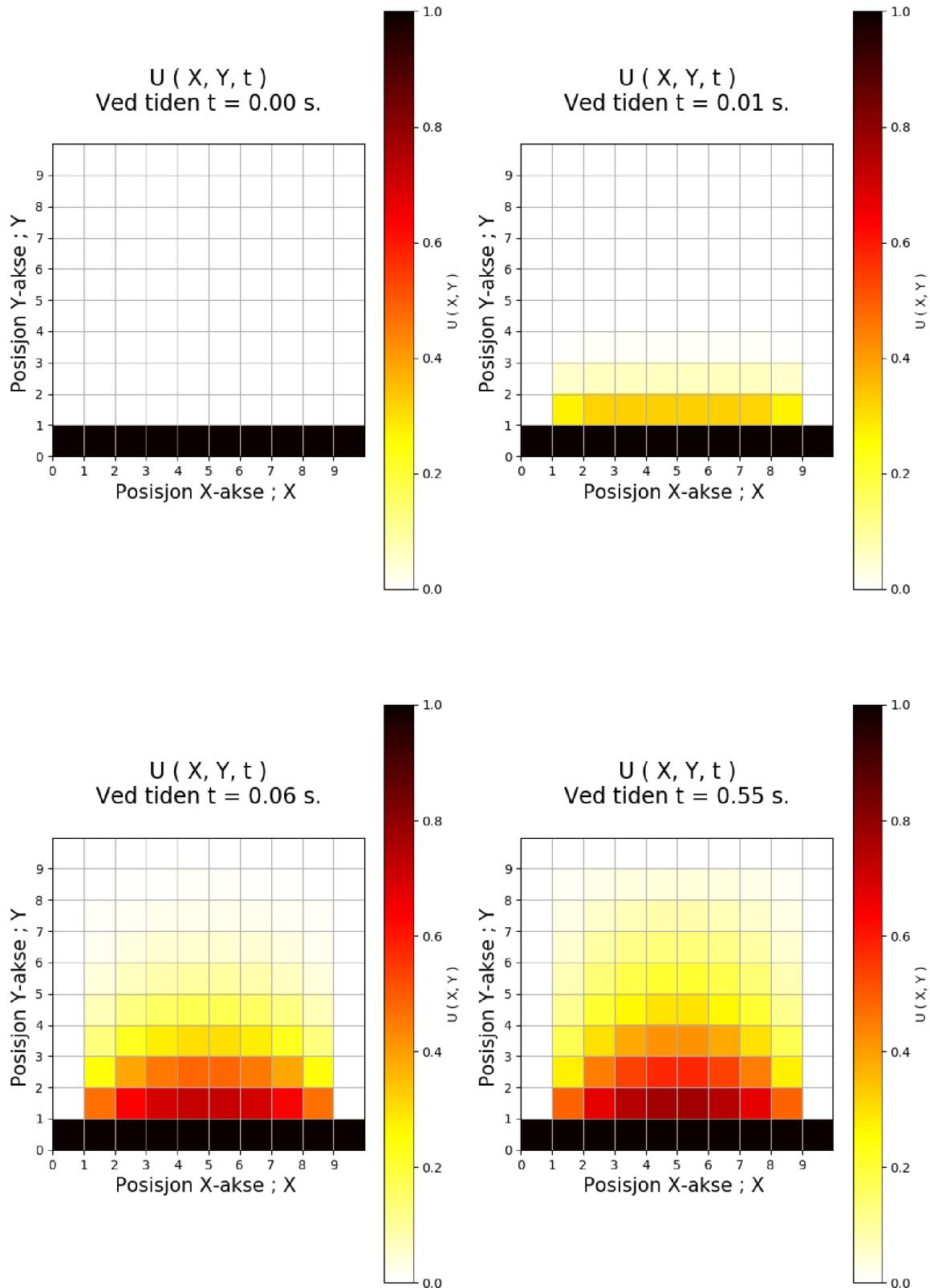
Plott av løsning av diffusjonslikningen med de tre metodene, Forward Euler, Backward Euler og Crank Nicolson for to forskjellige tider, $t_1=0.1\text{s}$ og $t_2=1$. X verdier på x aksen og $u(x,t)$ verdier på y-aksen, simulert med $\Delta x=0.01$.



Plott 3

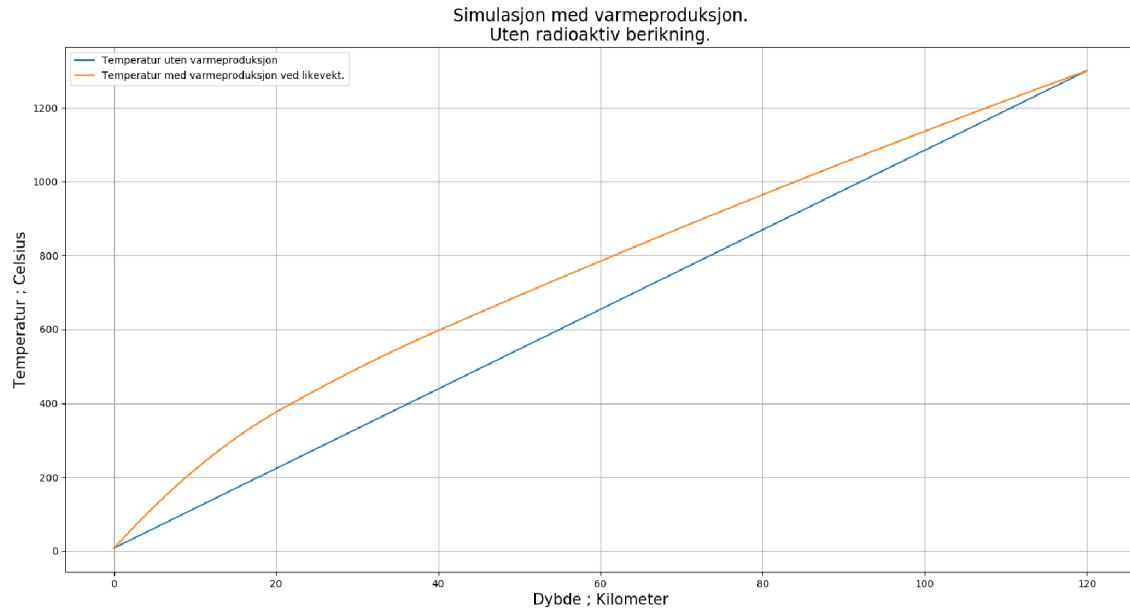
Plott av 1 dimensjonal simulasjon med fargeskala. X verdier på x aksen, tid på y aksen og fargeskala som viser $u(x,t)$. Plottet for de tre forskjellige metodene våre med $dx = 0.1$ og $dx = 0.01$.

2D simulasjon

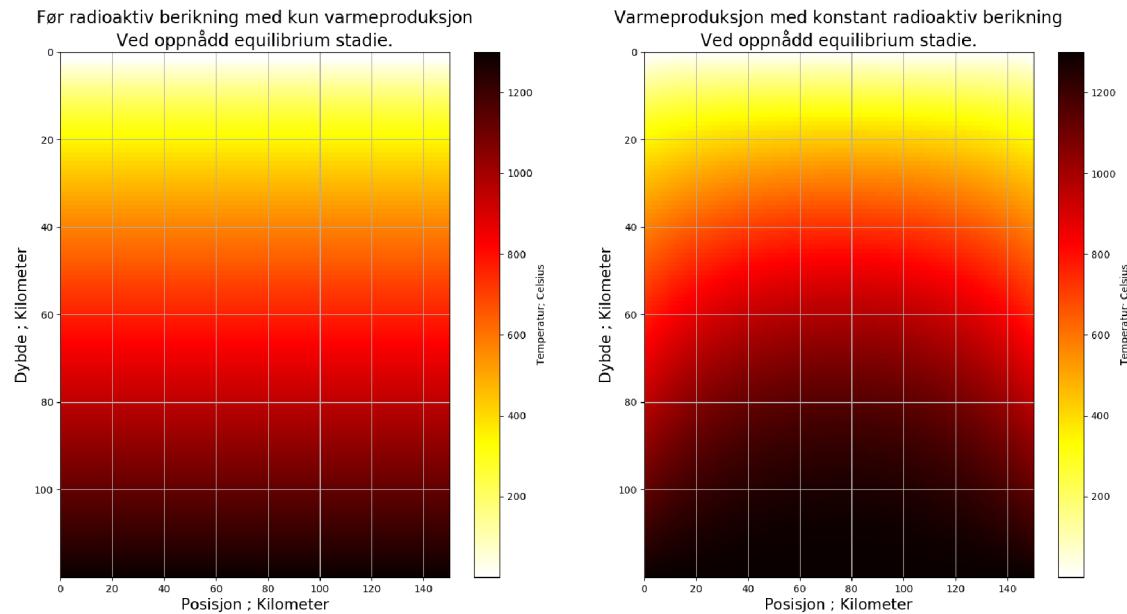


Plott 4

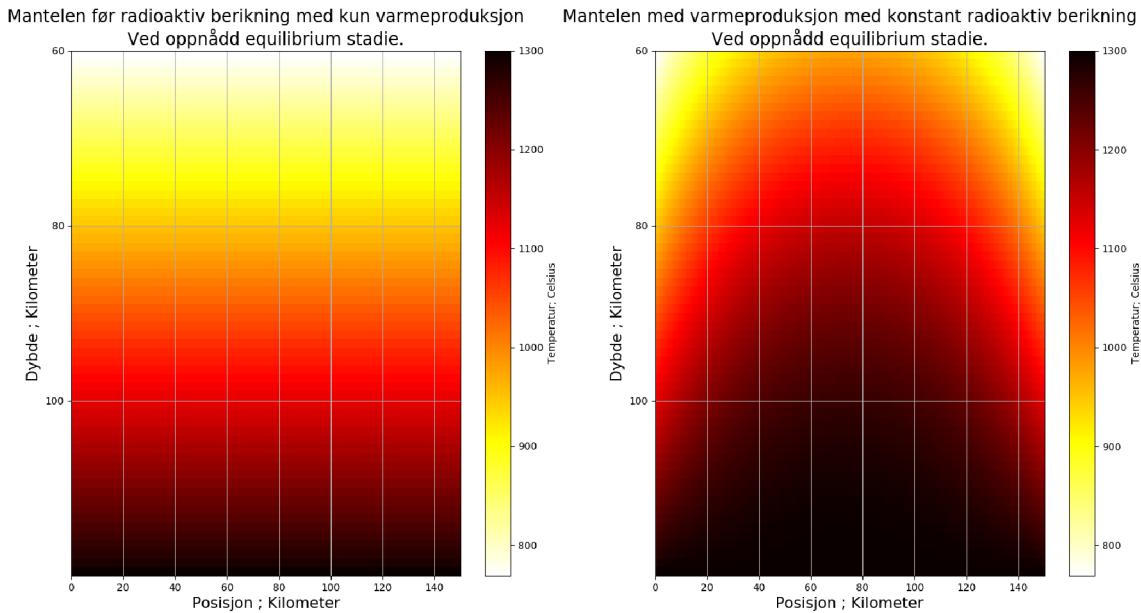
Plott av løsning av diffusjonslikning i 2 dimensjoner, x og y, med fargeskala som viser $u(x,y)$. Plottet for fire forskjellige tider.

Hovedsimulasjon**Plott 5**

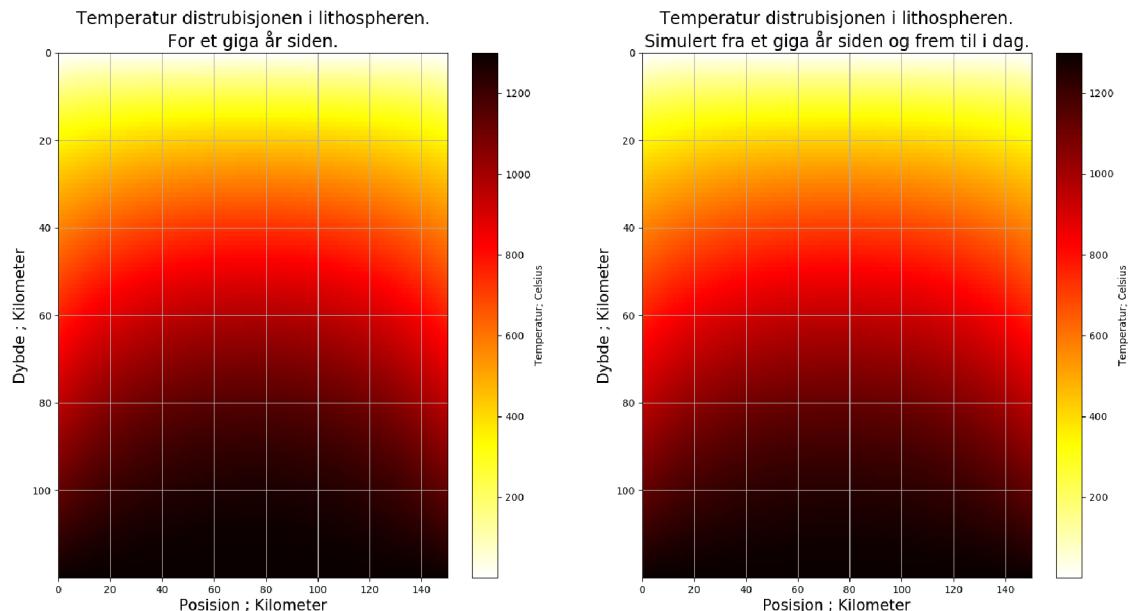
Temperatur distribusjonen ned gjennom litosfæren, både med og uten ekstra varmeproduksjon. Temperaturen i overflaten til skorpen er 8° Celsius og temperaturen nederst i mantelen er på 1300° Celcius.

**Plott 6**

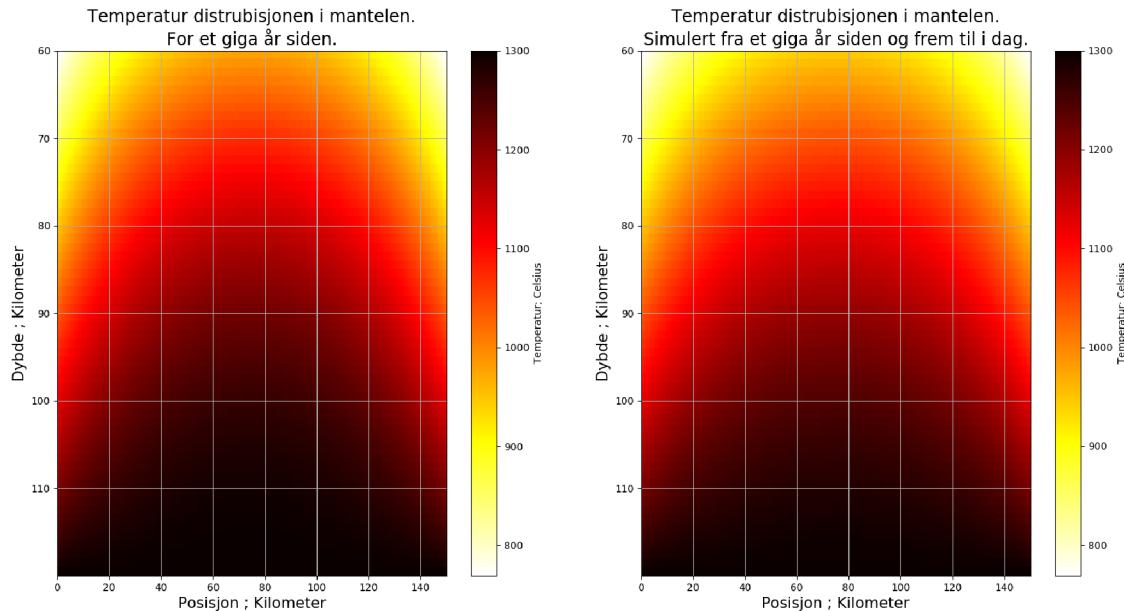
Temperatur distribusjonen ned gjennom litosfæren over et område på 150 Kilometer. Hvor vi ser på et område med kun varme produksjon og et et område som er blitt beriket med radioaktive stoffer i mantelen som bidrar til økt varme produksjon. Bidraget gleder kun over et begrenset område, og dermed grenser mot en temperaturdistubisjon med kun varmeproduksjon, altså uten radioaktiv varme bidrag. Samme grenser som tidligere i overflaten og nederst i mantelen.

**Plott 6.5**

For å se på detaljene nærmere på detaljene ser vi nærmere på temperatur distribusjonen i mantelen, slik at lokale forskjeller blir tydeligere fremstilt.

**Plot 7**

Så ser vi på selve simulasjonen i projektet, hvor vi har simulert fra temperatur distribusjonen i litosfæren fra ét giga år siden, og frem til idag, når vi tar hensyn til at den radioaktive berikelsen i området blir nedbrutt over tid.

**Plott 7.5**

Igjen, for å se på detaljene nærmere på detaljene ser vi nærmere på temperatur distribusjonen i mantelen, slik at lokale forskjeller blir tydeligere fremstilt.

Error analyse

Metode	Forward Euler	Backwards Euler	Crank Nicolson
Error	0.00266231	0.00347253	0.00135885

Tabell 1

Tabell av error sammenliknet med det analytiske svaret for de tre forskjellige metodene for $dx = 0.1$ og $dt = 0.001$.

I 2 dimensjoner får vi en feil på 0.0176 sammenliknet med det analytiske svaret.

Tidsanalyse

Metode	Forward Euler	Backwards Euler	Crank Nicolson
Simulasjonstid	1.872s	2.007s	1.991s

Tabell 2

Tabell av simulasjonstid for de forskjellige metodene. For $dx=0.01$ og $dt = 5e^5$.

Diskusjon

1D tilfellet

Når vi ser på den analytiske plottet har vi valgt to tider, $t1 = 0.1s$ og $t2=1s$. Vi har valgt en tid der grafen er helt linær og en tid der den har en kurve, når grafen er linær burde vi være i equilibrium, slik at alle tider etter dette skal gi en linær graf. Vi ser fra figur 3 at vi får et equilibrium ved omtrent $t=0.3s$, dette betyr at vi kan øke tiden så mye vi vil uten å få en forskjell, og derfor vil det være det samme om vi hadde valgt den linære linjen vår fra $t=0.3s$ eller $t=1s$, eller mer. Ut fra plott 1 og plott 2 ser vi at alle metodene ser veldig like ut, og stemmer godt med det analytiske plottet som vi har.

Vi ser at når vi minker dx blir grafene mindre hakkete, dette er forventet siden vi har mindre steg mellom hvert resultat som gir et finere plott. Dette ser vi veldig godt på plott 3, der vi får en mye "smoother" overgang mellom temperaturene. Vi ser på $u(x,t)$ som en temperaturfordeling, selv om diffusjonslikningen gjelder alle ting som kan spre seg over et materiale. Vi må passe på at Forward Euler's stabilitetskriterie er oppfylt slik at vi ikke får noen problemer ved valg av dt og dx , men dette skal ikke være noe problem siden vi velger mye mindre verdier for dt enn for dx slik at vi akkurat oppfyller stabilitetskravet.

Ut fra det vi vet fra koden, kan vi allerede forvente at tiden som Crank Nicolson og Backwards Euler bruker kommer til å være større enn Forward Euler. Dette er fordi de implisitte metodene bruker en tridiagonal løser og på grunn av dette tar det lengere tid i forhold til Forward Euler som kan sees på som en "brute force" metode som bare løser problemet eksplisitt. Hvis vi sammenlikner tidene fra tabell 2 ser vi at dette skal stemme. Det

kan også nevnes at tiden vil forandre seg avhengi av om maskinen holder på med andre ting imens vi simulerer. Ut fra analysen vår av truncation errors skal Backward Euler og Forward Euler ha omtrent samme feil, og Crank Nicolson skal ha mindre feil enn de to metodene. Dette ser vi ut fra tabell 1 at stemmer ganske godt.

Ut fra de tre metodene ser vi at det er Crank Nicolson som er mest nøyaktig. Vi ser at feilen er mindre på denne enn de to andre, og den bruker like lang simuleringstid som Backwards Euler. Backwards Euler er den værste metoden generelt, siden den bruker omtrent like lang tid som Crank Nicolson, men har ikke like nøyaktige resultater. Forward Euler er raskere enn Crank Nicolson og Backwards Euler, men ikke like nøyaktig som Crank Nicolson og Backward Euler.

2D tilfellet

For simulasjon i 2D har vi plottet for 4 forskjellige tider, som vi ser ut fra plott 4. Her ser vi hvordan varmen sprer seg fra et varmt materiale når tiden blir høyere. Vi har valgt tid 0s, 0.01s, 0.06s og 0.55s. Vi har valgt $t=0.55s$ siden det er her vi oppnår equilibrium med en toleranse på 10^{-8} . Vi har valgt flere tider for å best mulig vise hvordan modellen utvikler seg over tid. Når det kommer til stabiliteten til metoden vår vil den være stabil for alle Δx og Δt , dette er fordi implisitte metoder alltid er stabile.

Når vi simulerer for 2D har vi valgt å se på et eksempel med grensebetingelsene på den ene siden lik 1, og resten av sidene lik 0. Vi har også satt initialbetingelsene til å være 0. Vi ser at plottet som vi får er veldig naturlig, dette eksempelet kunne beskrevet temperatur distribusjonen i f.eks et bål. Dette er fordi det er varmest ved kilden og varmen sprer seg oppover.

Vi har sammenliknet den 2 dimensjonale metoden vår med en analytisk løsning og grensebetingelsene/initialbetingelsene vi tok for oss i formalismen, som gir oss feilen på 0.0176. Dette tyder på at metoden vår fungerer som den skal, og er klar for videre bruk i hovedsimulasjonen.

Hoved simulasjon

Når vi ser på plot 5 ser vi at simulasjonen har vært veldig velykket, vi har fått en svært intuitiv temperatur distribusjonen for litosfæren generelt. Som forventet ser vi at den har en litt bølge-aktig form på seg, som en bølge som slår ned i grunnt vann. Dette kommer av at vi har en relativt stor varmeproduksjon ved øvre del av litosfæren, men samtidig blir holdt relativt streng igjen av grensebetingelsene, siden varmeproduksjonen er relativt liten i mantelen ser vi at den der nærmer seg en lineær temperatur distribusjon. I tillegg ser vi at grensebetingelsene er bevart og at grensebetingelsene som forventet også er ekstremal verdiene til systemet.

Fra plot 6 og 6.5 leser vi også svært positive og intuitive resultater, vi ser at grensene her har holdt seg og har påvirket systemet som forventet. Varmen fra den radioaktive berikelsen i mantelen har sammen med grensebetingelsene skapt en tydelig markert og karakteristisk temperatur normaldistribusjon. Vi ser også at hovedsimulasjonen på plot 7 og 7.5 over ett giga år ser svært fornuftig ut, vi kjerner tydelig igjen formene i temperatur distribusjonen fra initial betingelsene, men vi ser også at temperaturen har falt generelet i hele lithosfæren, men spesielt i mantelen som forventet.

Dette gir oss endelig muligheten til å svare på oppgaven i dette prosjektet, en slik radioaktiv berikelse vil få en temperatur distribusjonen med form som en normalfordeling, noe som ved måling burde være enkelt og karakteristisk å gjennomskue. Selv etter et helt giga år etter en slik radioaktiv berikelse, så vil temperatur distribusjonen fortsatt være svært gjennomskuelig selv om den ikke er like tydelig nå som det den var den gang. Så hvis man skulle finne like spor i dag så ville dette være tydelige tegn på at noe slikt kan ha skjedd.

Konklusjon

I dette prosjeket har vi tatt for oss et geofysisk problem, om vi kan finne bevis, tegn, spor eller antydninger til at mantelen har blitt beriket med radioaktivt stoff, og i følge både beregninger burde vi kunne se tydelige spor eller tegn etter en slik hendelse.

For å kunne komme frem til denne konklusjonen har vi nøyde analysert temperatur distribusjonen gjennom diffusjons likningen og sett på tre numeriske løsere for partielle diffrensiallikninger. For å simulere diffusjonslikningen i 1 dimensjon, alle metodene har gitt gode og fornuftige resultater. Vi har kommet frem til at Crank Nicolson er den beste metoden, men om vi ønsker resultater forttere kan vi bruke Forward Euler isteden. Vi kom også frem til at Backwards Euler var den dårligste metoden. Vi har sett at implisitte metoder er bedre for stabilitet, siden de alltid er stabile, men på bekostning av simulasjonstid.

I 2D tilfelle har vi brukt en implisitt metode for å løse problemet slik at vi slipper å ta hensyn til stabiliteten. Vi får ut et fornuftig svar som gir grønt lys til å bruke denne metoden i hovedsimulasjonen.

Alt i alt har dette vært et svært vellykket prosjekt, som har vært veldig intressant, spennende og lærerikt. Vi har hatt enkelte enkelte vanskigheter underveis, men som vi har fått oppklart og lært av. Vi er meget fornøyde med resultatene vi har fått og eksemplene vi har valgt.

Hvis vi hadde hatt litt ekstra tid hadde det vært veldig interessant å implementert parallelisering av koden, og eventuelt å implementere Crank Nicolson i selve simulasjonen, selv om Backward Euler gir tilstrekkelig gode resultater. Ikke minst kunne vi sett nærmere på flere metoder og algoritmer for å simulere i (2 + 1) dimensjon, og analysert disse på samme måte som vi har gjort med de (1 + 1) dimensjonale. Dermed også teste for andre eksempler, altså med andre betingelser enn det vi har rukket å se på til nå.

Referanser

- Ascher, U. M., Ruuth, S. J., & Spiteri, R. J. (1997). Implicit-explicit runge-kutta methods for time-dependent partial differential equations. *Applied Numerical Mathematics, 25*(2-3), 151–167.
- Čermák, V., Bodri, L., & Rybach, L. (1991). Radioactive heat production in the continental crust and its depth dependence. In *Terrestrial heat flow and the lithosphere structure* (pp. 23–69). Springer.
- Kevorkian, J. (1990). *Partial differential equations: Analytical solution techniques (texts)* (Vol. 89871). Springer.
- Le, K. Q., Godoy-Rubio, R., Bienstman, P., & Hadley, G. R. (2008). The complex jacobi iterative method for three-dimensional wide-angle beam propagation. *Optics express, 16*(21), 17021–17030.
- Puwal, S., & Roth, B. J. (2007). Forward euler stability of the bidomain model of cardiac tissue. *IEEE transactions on biomedical engineering, 54*(5), 951–953.
- Sun, C., & Trueman, C. (2003). Unconditionally stable crank-nicolson scheme for solving two-dimensional maxwell's equations. *Electronics Letters, 39*(7), 595–597.
- Usadel, K. D. (1970). Generalized diffusion equation for superconducting alloys. *Physical Review Letters, 25*(8), 507.