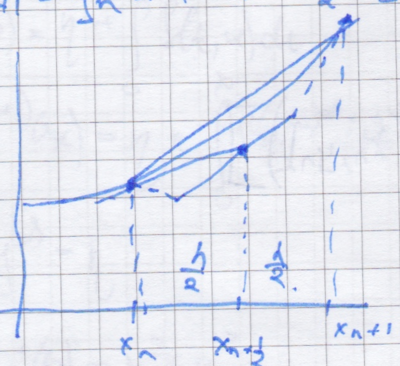
Метод Рунге–Кутта:

$$y_{n+1} = y_n + h\left[(1-\alpha) f(x_n, y_n) + \alpha f\left(x_n + \frac{h}{2\alpha}, y_n + \frac{h}{2\alpha} f(x_n, y_n)\right)\right] + O(h^2)$$

$\alpha = 1$

$$y_{n+1} = y_n + h f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} f(x_n, y_n)\right)$$



1) $y_{n+\frac{1}{2}} = y_n + \frac{h}{2} f(x_n, y_n)$

2) $y'_{n+\frac{1}{2}} = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_{n+\frac{1}{2}}\right)$

3) $y_{n+1} = y_n + h y'_{n+\frac{1}{2}}$

Если $\alpha = \frac{1}{2}$, то будут получены производные в y_n и y_{n+1} и строим прямую по этим „средним производным".

Метод Рунге–Кутта 4-го порядка:

$u'(x) = f(x, y)$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) + O(h^4), \text{ где}$$

$k_1 = f(x_n, y_n)$

$k_2 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} k_1\right)$

$k_3 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} k_2\right)$

$k_4 = f(x_n + h, y_n + h k_3)$

$$\begin{cases} u'(x) = f(x, u, v) & u(\xi) = \eta_1 \\ v'(x) = \varphi(x, u, v) & v(\xi) = \eta_2 \end{cases}$$

$u \to y$

$v \to z$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$z_{n+1} = z_n + \frac{h}{6}(q_1 + 2q_2 + 2q_3 + q_4)$$

$k_1 = f(x_n, y_n, z_n)$, $\quad q_1 = \varphi(x_n, y_n, z_n)$.

$k_2 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} k_1, z_n + \frac{h}{2} q_1\right)$ $\quad q_2 = \varphi\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} k_1, z_n + \frac{h}{2} q_1\right)$.

$k_3 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} k_2, z_n + \frac{h}{2} q_2\right)$ $\quad q_3 = \varphi\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} k_2, z_n + \frac{h}{2} q_2\right)$

$k_4 = f(x_n + h, y_n + h k_3, z_n + h q_3)$ $\quad q_4 = \varphi(x_n + h, y_n + h k_3, z_n + h q_3)$

Замечания по схемам Рунге–Кутта

- Все схемы явные
- Схемы достаточно точные
- По одним и тем же формулам

$u = f(x)$

Кстати: Это по факту метод Симпсона:

$$y_{n+1} = y_n + \int_{y_n}^{y_{n+1}} f(x)\,dx = \left(\frac{h}{2}\right)\frac{1}{3}\left[f(x_n) + 4 f\left(x_{n+\frac{1}{2}}\right) + f(x_{n+1})\right] \qquad R = \frac{h^4}{2880} f^{(IV)}(\xi)$$