1) Разностная схема устойчива по нач. данным, если вып. условие $(1+C\tau)|a_0| \geq \sum_{k\neq 0}|a_k| + \sum_{p}|b_p|$, это достаточное условие устойчивости (4) по правой части
$C = const$ (небольшая)

2) РС устойчива по правой части если вып. 1. (т.е. (4)) и выполняется условие
$|a_0| - \sum_{k\neq 0}|a_k| \geq \frac{D}{\tau}$, $D = const$ (тоже небольшая).

Пример:
Проверим устойчивость неявной разн. схемы
$$\frac{\hat{y}_n - y_n}{\tau} = a\frac{\hat{y}_{n-1} - 2\hat{y}_n + \hat{y}_{n+1}}{h^2} + \varphi_n(t).$$

$$|a_0| = \left|\frac{2a}{h^2} + \frac{1}{\tau}\right| \quad |a_{-1}| = |a_{+1}| = \left|\frac{a}{h^2}\right| \quad |b_0| = \left|\frac{1}{\tau}\right|$$

Гр. усл. $\hat{y}_0 = \mu_1(t_{n+1})$. Усл. (4) вып. во всех узлах
$a_0 = 1$ а (5) вып. во всех внутр. узлах

Для явной схемы принцип максимума вып. для любых соотн. τ и h, а только при определенном значении сетки

Метод разделения переменных

φ_n – фиксирован. Представим наше решение в виде
$y_n = \tilde{y}_n + z_n$. В силу линейности уравнения наш. схемы
$\hat{y}_n = \hat{\tilde{y}}_n + \hat{z}_n$ погрешность z_n будет также удовлетворять
однородн. этой разностной схеме
Т.о. для этой схемы, например, (3) будем иметь
$$\frac{\hat{z}_n - z_n}{\tau} = a\frac{z_{n-1} - 2z_n + z_{n+1}}{h^2} \text{ – решение этого уравнения}$$
ищем методом разделения переменных

$z(x_n, t_m) \equiv z_n = \rho_q^m e^{i\pi q x_n/l}$ ρ_q – множитель роста гармоники
$q = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

$z(x_n, t_{m+1}) \equiv \hat{z}_n = \rho_q^{m+1} e^{i\pi q x_n/l} = \rho_q \cdot z_n \Rightarrow \rho_q$ определяет изм. погрешности
решения в след. момент времени.

Условие устойчивости.
Разностная схема устойчива если для всех гармоник q, $|\rho_q| \leq 1 + C\tau$
$c = const$, обычно $c = 0$, т.е. $|\rho_q| \leq 1$ (6)