Пример

$u'' + (1+x^2)u + 1 = 0$

$u(-1) = 0, \quad u(+1) = 0$

Выбираем

$u_i(x) = x^{2i-2}(1-x^2), \quad i = 1, 2, \ldots n$

$x_1 = 0, \quad x_2 = \frac{1}{2}$ — точки коллокации

$y(x) = c_1(1-x^2) + c_2(x^2 - x^4)$

$y'(x) = -2x c_1 + 2(x - 2x^3) c_2$

$y''(x) = -2c_1 + 2(1-6x^2) c_2$

$R(x, c_1, c_2) = -2c_1 + 2(1-6x^2)c_2 + (1+x^2)\cdot(c_1(1-x^2) + c_2(x^2-x^4)) + 1 =$

$= \langle \; \rangle = 1 - (1+x^4)c_1 + (2 - 11x^2 - x^6)c_2$

$$\left.\begin{aligned} &x_1 = 0 \\ &R(x_1, c_1, c_2) = 1 - c_1 + 2c_2 = 0. \\ &x_2 = \tfrac{1}{2} \\ &R(x_2, c_1, c_2) = 1 - \tfrac{17}{16}c_1 + \tfrac{49}{64}c_2 = 0, \end{aligned}\right\} \to \begin{aligned} &c_1 = 0{,}957 \\ &c_2 = -0{,}022. \end{aligned}$$

Итак, $y(x) \approx 0{,}957(1-x^2) - 0{,}022(x^2 - x^4)$

Метод наименьших квадратов.

В предыдущем примере (метод коллокации) невязка приравнивалась к нулю в нескольких точках. Этот метод имеет минимум квадрата на всём отрезке

$$\int_a^b R^2(x, \bar{c})\,dx \to \min = I(c_1, c_2, \ldots, c_n)$$

Условие минимума: $\frac{\partial I}{\partial c_i} = 0 \quad i = \overline{1,n}$. Имеем $\frac{\partial I}{\partial c_i} = 2\int_a^b R(x, \bar{c}) \frac{\partial R}{\partial c_i}\,dx = 0$

Пример.

$u'' + (1+x^2)u + 1 = 0$

$u(-1) = 0, \quad u(+1) = 0$

$u_1(x) = 1 - x^2, \quad u_2(x) = x^2 - x^4$ (базис ф-ции такие же, как в предыдущем примере)

$y(x) = c_1(1-x^2) + c_2(x^2 - x^4)$

$R(x, c_1, c_2) = 1 - (1+x^4)c_1 + (2 - 11x^2 - x^6)c_2$ (до этого места всё в точности совпадает с методом коллокации)