Явный

$$y_{n+1} = y_n + h f(x_n, y_n)$$

Неявный.

$$y_{n+1} = y_n + h f(x_{n+1}, y_{n+1})$$

Рунге-Кутта

$$y_{n+1} = y_n + h\left[(1-\alpha) f(x_n, y_n) + \alpha f\left(x_n + \frac{h}{2\alpha}, y_n + \frac{h}{2\alpha} f(x_n, y_n)\right)\right]$$

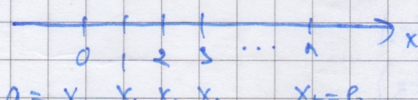
$\alpha = 1$

$\alpha = \frac{1}{2}$

Задача Коши ОДУ

Методы Рунге-Кутта

Констр. общее представление:



$[a, b]$ $\omega_h = \{x_i : a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots x_n = b\}$

$h = \frac{b-a}{n}$, $\omega_h \{x_i : x_i = a + ih\}$

$u'(x) = f(x, u)$

$u(x)$ - точное решение

y - сеточная ф-ция

$y(x_i) = y_i \quad y_i \neq u(x_i)$

В числ. методах важное значение имеет понятие сходимости приближённого решения к точному.

$x = x_i = a + ih$

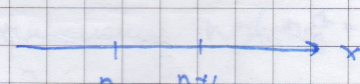
$h \to 0 \quad (i \to \infty)$

$|y_i - u(x_i)| \to 0, \ h \to 0$

Численный метод имеет p-ый порядок точности, если модуль этой разности порядка точности $O(h^p)$

$$|y_i - u(x_i)| = O(h^p)$$

Общий подход.



$$u_{n+1} = u_n + \frac{h}{1!} u'_n + \frac{h^2}{2!} u''_n + \frac{h^3}{3!} u'''_n + \dots + \frac{h^p}{p!} u_n^{(p)}(\xi), \quad x_n \le \xi \le x_{n+1}$$

$u'_n = f(x_n, u_n)$ обозн: $u'_n \equiv u'(x_n)$

$$u''_n = [f(x_n, u_n)]'_n = (f'_x + f'_u u'_x)_n = (f'_x + f'_u \cdot f)_n$$

$$u_{n+1} = u_n + h f(x_n, u_n) + \frac{h^2}{2!}(f'_x + f'_u \cdot f)_n + \dots$$

Формула Эйлера (явная)

$y_{n+1} = y_n + h f(x_n, y_n) \quad y_n \neq u_n$