

Понятие модели и моделирования. Общая классификация моделей. Требования к моделям.	
Примеры из конкретных предметных областей.	4
Схема вычислительного эксперимента.	6
Понятие математической модели. Функции моделей. Источники погрешностей при построении модели, алгоритмизации и программировании.....	7
Понятие корректности постановки задач. Привести примеры некорректно поставленных и слабо обусловленных задач и неустойчивых алгоритмов.	8
Общая классификация методов построения математических моделей.	10
Построение математических моделей на основе законов природы. Привести примеры.	11
Построение математических моделей на основе вариационных принципов. Привести примеры. 12	
Построение математических моделей выстраиванием иерархии сверху - вниз и снизу - вверх.	
Привести примеры.....	14
Построение математических моделей методом аналогий. Привести примеры.	15
Понятие ОДУ. Сведение ОДУ произвольного порядка к системе ОДУ первого порядка. Привести примеры.....	17
Постановка задачи Коши для системы ОДУ первого порядка.....	17
Постановка краевой задачи для ОДУ.	18
Задача Коши для ОДУ. Метод Пикара при решении ОДУ. Привести пример.	19
Задача Коши для ОДУ. Метод Рунге - Кутты 2-го порядка точности. Оценка точности.	20
Задача Коши для ОДУ. Метод Рунге - Кутты 4-го порядка точности. Оценка точности.	23
Задача Коши для ОДУ. Метод Адамса.....	24
Задача Коши для ОДУ. Неявные численные методы (Эйлера, трапеций, Гира).	25
Краевая задача для ОДУ. Метод коллокаций. Привести пример.....	27
Краевая задача для ОДУ. Интегральный метод наименьших квадратов. Привести пример.	29
Краевая задача для ОДУ. Дискретный метод наименьших квадратов. Привести пример.....	31
Краевая задача для ОДУ. Метод Галеркина. Привести пример.	32
Краевая задача для ОДУ. Сходимость разностного решения к точному на примере линейного уравнения 2-го порядка.	34
Краевая задача для ОДУ. Получение интегро- интерполяционным методом разностной схемы для уравнения 2-го порядка с краевыми условиями 3-го рода.....	38
Краевая задача для ОДУ. Наилучшая разностная схема для уравнения 2-го порядка с краевыми условиями 3-го рода в цилиндрических координатах.....	42
Метод прогонки для реализации разностных схем с краевыми условиями 3-го рода.	46
Краевая задача для ОДУ. Методы решения квазилинейных разностных схем для уравнений 2-го порядка.....	47
Уравнения в частных производных. Области применения. Классификация уравнений второго порядка. Общие понятия о методах решения.....	49

Уравнения в частных производных. Постановка задач Коши, краевых и смешанных краевых задач. Привести примеры с краевыми условиями 1-го, 2-го и 3-го родов.....	51
Уравнения в частных производных с постоянными коэффициентами. Основные понятия метода конечных разностей. Понятие о явных и неявных схемах.	53
Квазилинейные уравнения в частных производных. Получение разностной схемы для одномерного параболического уравнения с краевыми условиями 3-го рода интегро-интерполяционным методом.....	57
Решение разностных схем для квазилинейных уравнений в частных производных- метод простых итераций и метод Ньютона.....	59
Методы повышения порядка аппроксимации краевых условий 2-го и 3-го родов (интегро-интерполяционная процедура, разложение в ряд Тейлора, введение фиктивного узла).	62
Понятие невязки для разностных схем. Привести пример вычисления невязки для неявной схемы.	63
Свойство аппроксимации разностных схем для уравнений в частных производных.....	65
Понятие устойчивости разностных схем по начальным данным и правой части. На основе принципа максимума исследовать устойчивость явной и неявной схем для уравнения параболического типа.....	66
На основе метода разделения переменных исследовать устойчивость четырехточечных явной и неявной разностных схем для уравнения параболического типа.	68
На основе метода разделения переменных исследовать устойчивость шести-точечной разностной схемы для уравнения параболического типа.....	70
Уравнения в частных производных. Сходимость разностных схем. Теорема о сходимости разностного решения к точному.....	73
Метод продольно-поперечной прогонки для решения многомерных уравнений в частных производных.	75
Локально-одномерный метод для решения многомерных уравнений в частных производных....	78
Вероятностный метод для решения многомерных уравнений в частных производных.....	78

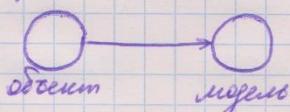
Понятие модели и моделирования. Общая классификация моделей. Требования к моделям. Примеры из конкретных предметных областей.

Моделирование

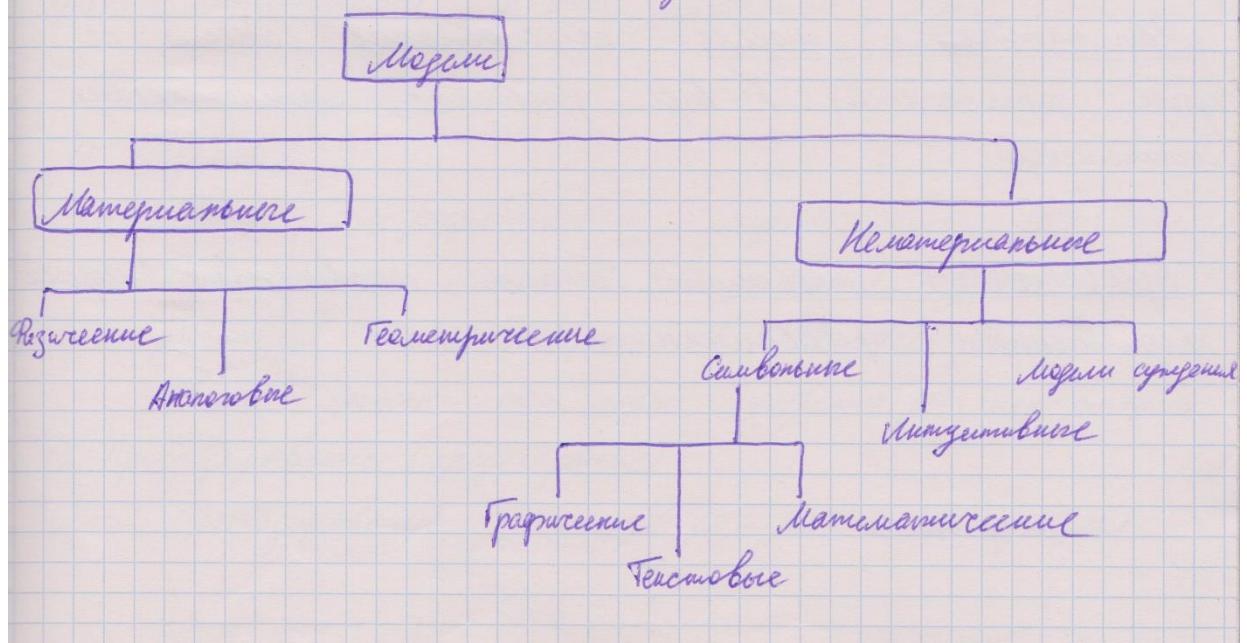
1. Понятие модели и моделирования. Общая классификация моделей. Требования к моделям. Примеры из конкретных предметных областей.

Модель - это представление объекта (системы, процесса, ситуации) в виде, отражающем один и способа его функционирования (существование).

Моделирование - метод научного исследования, основанный на анализе реального объекта (системы, процесса) модели и исследовании в дальнейшем конкретной модели.



Общая классификация моделей



Геометрические модели - линейки
Ризие модели - беспроизводное представление человека
функционирования объектов (например, модель самолёта
в аэротрубе)

Аналоговые - один процесс заменяется другим
(например, существующий процесс передачи消息. Результат
заменяется протеканием электрического тока. Сформированный
электрический импульс и определяет появление消息а)

Модели сущности - мировоззрение
Инициативные - например, в модели протекания процессов,
протодирующие исходя из определённой ситуации, когда человек
переступил порог).

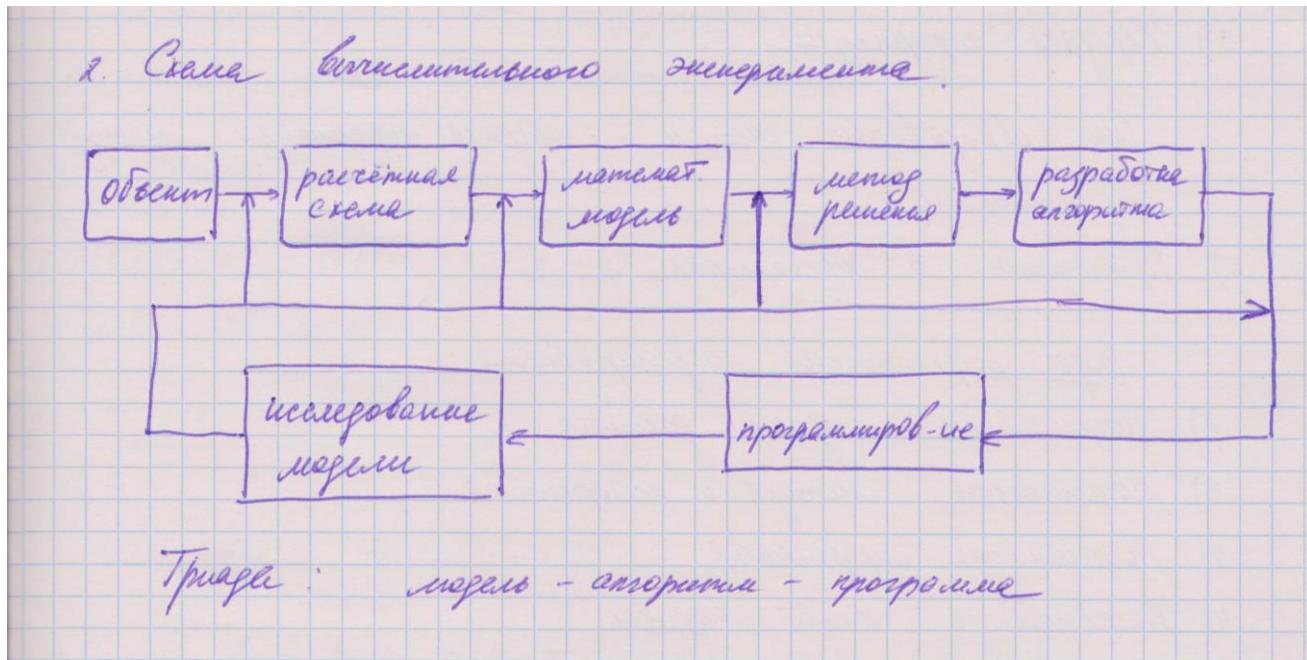
Графические - рисунки, диаграммы, схемы

Программные - программы

Математические модели - представление объекта на
基础上 математики в виде уравнений, математических
сообщений.

Адекватность модели - степень соответствия модели
представлением предъявляемым.

Схема вычислительного эксперимента.



Понятие математической модели. Функции моделей. Источники погрешностей при построении модели, алгоритмизации и программировании.

3. Понятие математической модели. Понятие модели, методами построения при построении модели, алгоритмизация и программирование.

Математическая модель - это представление объекта на языке математики в виде уравнений, мат. соотношений

Понятие модели:

1) Познание

Чтобы, тем разрабатывать модели, нужно получать информационное описание (математическое изображение) расстояний или из экспериментов. Чем более детально описывается процесс - тем больше проблем для инженеров.

2) Прогнозирование (преподавание)

Прогнозирование используется для оптимизации.

3) Перехода информации

При образовании систем - перехода информации между подсистемами.

4) Применение в перспективах.

Виды погрешностей моделирования:

- 1) Погрешность исходных данных
- 2) Погрешность метода и алгоритмов
- 3) Погрешность вычисления
- 4) Погрешность самой модели

Понятие корректности постановки задач. Привести примеры некорректно поставленных и слабо обусловленных задач и неустойчивых алгоритмов.

4. Понятие корректности постановки задач. Привести примеры некорректно поставленных и слабо обусловленных задач и неустойчивых алгоритмов.

Задача называется корректно поставленной, если решение существенно, единствено и непрерывно зависит от начального замысла.

Пример некорректно поставленной задачи.

$$y = Ax \quad \delta x \rightarrow \delta y \quad \delta x \rightarrow 0, \delta y \rightarrow 0, \text{ если } \lim_{\delta x \rightarrow 0} \frac{\delta y}{\delta x}$$

Если $\delta x \rightarrow 0$, а δy бесконечное, то это некорректно поставленная задача.

$\delta y = c \delta x$, если c - большое, то задача называется алгебраической.

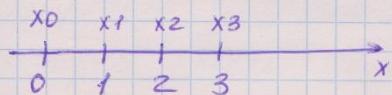
Помимо непрерывной дифференцированной саюой задачи, алгоритм ее решения может быть менее непрерывным

Пример:

$$u'(x) = -\alpha u, \quad \alpha > 0$$

$$u(x) = u_0 e^{-\alpha x}$$

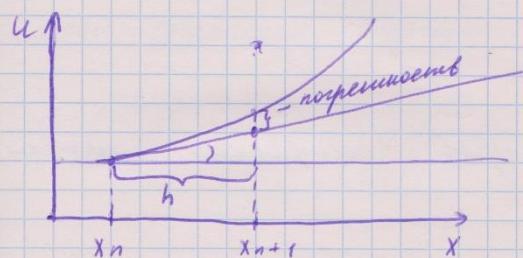
$$\begin{aligned} du/dx &= -Lu \\ du/u &= -Ldx \\ \ln(u) &= -Lx + C \\ u &= C \cdot \exp(-Lx) \end{aligned}$$



$$\text{т.к. } u(0) = u_0 \\ u_0 = C \cdot [\exp(-L \cdot 0) \text{ стремится к } 1]$$

$$u(x) \rightarrow y, \quad u(x_i) \rightarrow y_i$$

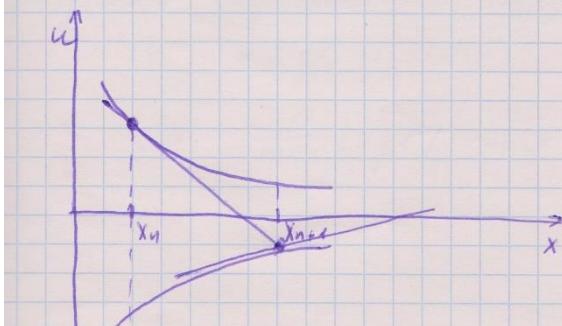
$$y_{n+1} = y_n + h u_n' = y_n + h (-\alpha y_n) = y_n (1 - h\alpha)$$



Если $(1 - h\alpha) < 0$ возникает "выход за пределы" решения.

Чтобы этого избежать, необходимо ограничение на h

$$1 - h\alpha > 0 \iff h < \frac{1}{\alpha}. \quad \text{Получим односторонне} \\ \text{устойчивое решение}$$

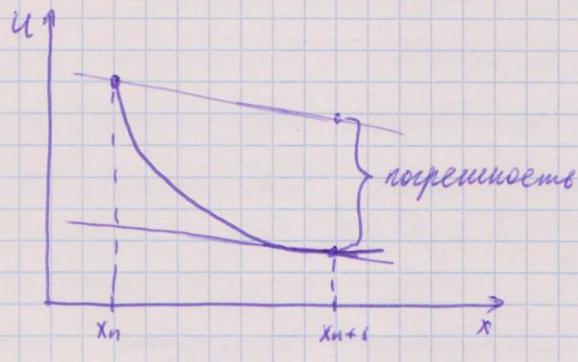


$$y_{n+1} = y_n + h u'_{n+1} = y_n + h (-\alpha y_{n+1})$$

$$y_{n+1} (1 + \alpha h) = y_n$$

$y_{n+1} = \frac{y_n}{1 + \alpha h}$ — глубокое решение, но циклическое решение не обнаружим

Схема абсолютного устойчивости:



Общая классификация методов построения математических моделей.

5. Общая классификация методов построения математических моделей.

Классификация: Метод:

- 1) На основе фундаментальных законов природы
- 2) Из барьерного принципа (их использования. Принцип Гамильтона, принцип Вернера)
- 3) Восстравивание иерархии моделей (струйки пресла, замену дифференциал)
- и) метод аналогии.

Построение математических моделей на основе законов природы.
Привести примеры.

6. Построение математических моделей на основе законов природы. Привести примеры.

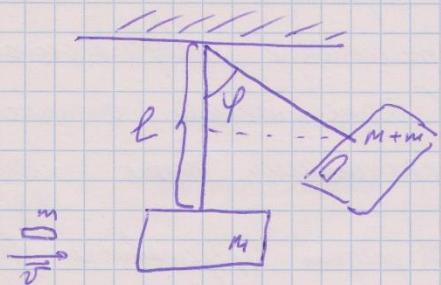
Базируется на хорошо проверенных законах. Есть уверенность, что это не ошибки \notin на данном этапе.

(Пример: падающее в брусья)
Пример: Падающий массой m листок со скоростью v и застревает в брусье массой M . Найти скорость бруса с которой падеет спущенное брусье

Запись сохранения импульса:

$$m v = (m+M) V, \text{ замена}$$

Запись сохранения энергии



$$\frac{m+M}{2} V^2 = (M+m) g l (1 - \cos \varphi)$$

к примеру, предложенное начали стрелять пушки.

$V = \sqrt{\frac{2(M+m) g l (1 - \cos \varphi)}{m}}$, однако, эта формула не учитывает потери энергии на разогрев пули + заряда, преодоление сопротивлением воздуха

$$V = \sqrt{2 g l (1 - \cos \varphi)}$$

$$V = \frac{m+M}{m} \sqrt{2 g l (1 - \cos \varphi)}$$

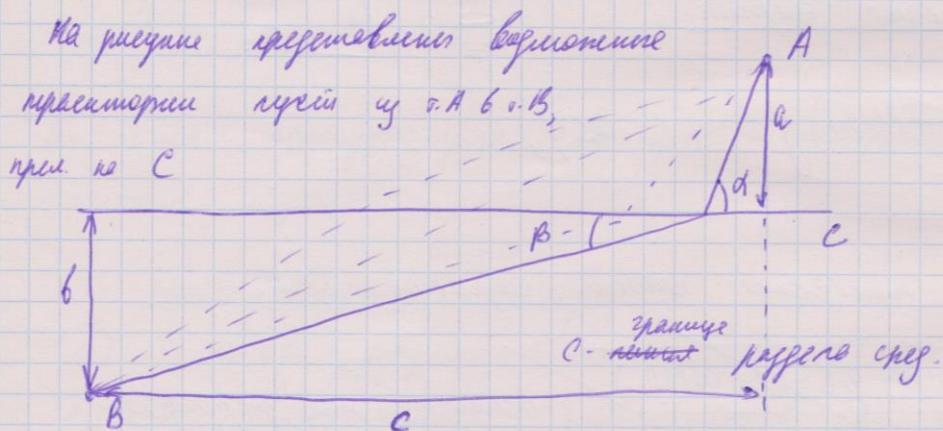
Построение математических моделей на основе вариационных принципов. Привести примеры.

7. Построение математических моделей на основе вариационных принципов. Привести примеры.

Несколько замечаний с руку. Запомнили.
Вариационное принципо предполагает собой однине утверждение об обеих и энзах, что из всех возможных вариантов есть коечно единичный, при котором удовлетворяют определенному условию.

Пример:

применение вариационного принципа Ферма (поступление в геометрической форме, согласно которому свет выбирает прямой путь между двумя точками)



Если d - дист. пад. луча, а $\beta(d)$ - дист. его преломления
то время прохожд. из $A B C$ равно

$$f(\alpha) = \frac{a}{\sqrt{a} \sin \alpha} + \frac{b}{\sqrt{b} \sin(\alpha)}$$

Числовые минимумы функции $f(\alpha)$ вблизи нуля.

$$\frac{a \cos \alpha}{\sqrt{a} \sin \alpha} + \frac{b \cos \alpha}{\sqrt{b} \sin(\alpha)} \frac{d\beta}{d\alpha} = 0$$

Числовое значение производной $f'(\alpha)$ вблизи нуля, это

$$\frac{df(\alpha)}{d\alpha} \Big|_{\alpha=0} \neq 0$$

или

$$\frac{a \cos \alpha}{\sqrt{a} \sin^2 \alpha} + \frac{b \cos \beta(\alpha)}{\sqrt{b} \sin^2 \beta(\alpha)} \frac{d\beta}{d\alpha} = 0 \quad (1)$$

т.к. $\forall \alpha$ справедливо $c = \frac{a}{f(\alpha)} + \frac{b}{f(\beta(\alpha))}$, получаем

результат и получаем:

$$\frac{a}{\sin^2 \alpha} + \frac{b}{\sin^2 \beta(\alpha)} \frac{d\beta}{d\alpha} = 0 \quad (2)$$

(2) сокращено с (1) получаем, что

$$\frac{\cos \alpha}{\sqrt{a}} = \frac{\cos \beta(\alpha)}{\sqrt{b}} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\sqrt{a}} = \frac{\cos \alpha}{\cos \beta(\alpha)}$$

Причины гармоничности

$$Q = \int_{t_1}^{t_2} L(g, \dot{g}) dt$$

Q - закон малых колебаний

Конечно гармоники возможны

если функция L имеет гладкие производные (Q - мин).

Напоминание

$$L = T - U = \frac{m \dot{x}^2}{2} - k \frac{x^2}{2}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad \text{уравнение Эйлера}$$

Получим закон Q :

$$\ddot{x} = -kx \quad m\ddot{x} = -kx \quad m\ddot{x} = -kx$$

Построение математических моделей выстраиванием иерархии сверху - вниз и снизу - вверх. Привести примеры.

8. Построение математической модели спиралью иерархии сверху - вниз и снизу - вверх. Привести примеры.

Лишь в редких случаях удобно и правильно построение мат. модели во всей целиком, с учетом всех существующих для изучения факторов. Естественно из-за "отчленения" вспомогательной части изучения после изучения изучаемой оси осенью моделью модели. При этом верхушка иерархии моделей, например из цепочек обобщает предыдущие.

Пример:

Построение модели многоступенчатого ракеты.

Пусть m_i - общая масса i -го ступени.

λm_i - соответствующее спускогорное масса $((1-\lambda)m_i)$ - масса = m_p - масса полезной нагрузки

Число ступеней 3

$m_0 = m_p + m_1 + m_2 + m_3$ - общ. масса ракеты.

Рассл. момент, когда масса. вся попадет 1-ой ступени

$$\hat{m}_0 = m_p + \lambda m_1 + m_2 + m_3$$

Тогда максимальная скорость по прошлой формуле (с небольшими изменениями) равна:

$$v_t = u \ln \left(\frac{m_0}{m_p + \lambda m_1 + m_2 + m_3} \right), \text{ где } u - \text{скорость выброса}$$

После достижения \hat{m}_0 для отработавшей и вышедшей второй ступени m_2 , начнёт с этого момента, где момента

точного вторичного колеса второго ступеня, иначе не смыслило использовать две конструкции модели. Тогда выражение для момента передачи так:

$$d_2 = d_1 + \ln \left(\frac{m_p + m_2 + m_3}{m_p + \lambda m_2 + m_3} \right)$$

Эту зависимость можно представить в виде

В случае $n=3$

$$\frac{d_3}{n} = \ln \left(\left(\frac{m_0}{m_p + \lambda m_1 + m_2 + m_3} \right) \cdot \left(\frac{m_p + m_2 + m_3}{m_p + \lambda m_2 + m_3} \right) \cdot \left(\frac{m_p + m_3}{m_p + \lambda m_3} \right) \right)$$

$$\text{Если известно } d_1 = \frac{m_0}{m_p + m_2 + m_3}, d_2 = \frac{m_p + m_2 + m_3}{m_p + m_3}, d_3 = \frac{m_p + m_3}{m_p},$$

то

$$\frac{d_3}{n} = \ln \left(\left(\frac{d_1}{1 + \lambda(d_1 - 1)} \right) \left(\frac{d_2}{1 + \lambda(d_2 - 1)} \right) \left(\frac{d_3}{1 + \lambda(d_3 - 1)} \right) \right)$$

Максимальное значение при $d_1 = d_2 = d_3 = d$, где

$$\text{для } 3 \quad d = \frac{1-\lambda}{P-\lambda}, \quad P = e^{-\frac{d_3}{n}}$$

$$d^3 = \frac{m_0}{m_p} = \left(\frac{1-\lambda}{P-\lambda} \right)^3$$

Построение цепочки моделей подвело к таким выводам. В маш. моделировании обычно применяется метод «от момента к приводу» (сверху-вниз)

Построение математических моделей методом аналогий. Привести примеры.

9. Построение математических моделей методом аналогий. Привести примеры.

В огромном количестве случаев при построении математических моделей нового - либо обобщение либо изограниченное применение заимствованного ранее или вариационные принципы, которые он подразумевает, либо

с м.з. наших симметричных задач заслуживает бросить
Одним из интереснейших направлений в решении подобных
задач является использование методов с учетом уп-
руких анизотропий.

Пример:

Мы хотим, например, как изменяется концентрация
вещей.

$n(t, x)$ — конц. вещей, x — бирюса.

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial n}{\partial x} = -d(x)n \quad d(x) — \text{коэф. смертности.}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{или } \frac{\partial n}{\partial t} = dn, \quad d — \text{коэф. рождества} \\ n(t) = n_0 e^{at} \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial n}{\partial t} = -\beta n - \cancel{\text{переходы}} \text{распад} \end{array} \right\}$$

Краевое условие задано: $x=0, n(0, b) = \int_{x_1}^{x_2} \beta(0, x) n(0, x) dx$

Это уравнение передает изменение численности населения.

Приложение этого метода.

Понятие ОДУ. Сведение ОДУ произвольного порядка к системе ОДУ первого порядка. Привести примеры.

10. Понятие ОДУ. Сведение ОДУ произвольного порядка к системе ОДУ первого порядка. Привести примеры.

Однинственное ОДУ содержит одно неизвестное первичное. Порядок уравнения определяется порядком производной.

ОДУ - ОДУ для функции от одно переменной.

$$u^{(n)}(x) = f(x, u, u', u'', \dots, u^{(n-1)})$$

Задано первичных можно составить уравнение $n-20$ порядка и с-ти др-ий 1-го порядка

$$u^{(k)} = u_k$$

$$u_k' = (u^{(k)})' = u^{(k+1)} = u_{k+1}$$

$$\begin{cases} u_k' = u_{k+1} \\ u_{k+1}' = u_{k+2} \\ \vdots \\ u_{n-1}' = f(x, u_0, u_1, \dots, u_{n-2}) \end{cases}, \quad 0 \leq k \leq n-2 \quad u(x) = u_0(x)$$

Все ур-я 1-го порядка

Постановка задачи Коши для системы ОДУ первого порядка.

11. Постановка задачи Коши для системы ОДУ 1-го порядка

В общем случае систем ОДУ 1-го порядка единственное

решение:

$$u_k'(x) = f_k(x, u_0, u_1, \dots, u_{k-1})$$

$$k = 1, n$$

Задача Коши:

Из системы общих решений системы ОДУ выделяется единственное решение. В задаче Коши все же должно

для выражения частного решения ставится в однородные.

$$u_k(\xi) = \eta_k, k = \overline{1, n}$$

Постановка краевой задачи для ОДУ.

12. Постановка краевой задачи для ОДУ.

Общий вид систем ОДУ 1-го порядка.

$$u'_k(x) = f(x, u_1, u_2, \dots, u_n), k = \overline{1, n}$$

$$u' = u_1, u'' = u_2 \leftarrow \text{пример.}$$

||
V

$$a(x) u'_2(x) + b(x) u_2(x) + c(x) u_1(x) + d(x) u(x) = f(x)$$

Две ОДУ сужают 2 постепенные задачи.

1) Задача Коши (или II)

2) Краевая задача:

Доп. условия ставятся более, чем в 2 \sqrt{n} шагах.

М. б. постепенное для ур. и более, чем 1-го порядка, либо для систем 1-го порядка.

Краевая задача — задача о нахождении решения ОДУ, удовлетворяющей краевым условиям в концах интервала или на границе области.

Задача Коши для ОДУ. Метод Пикара при решении ОДУ. Привести пример.

13. Задача Коши для ОДУ. Метод Пикара при решении ОДУ. Привести пример.

By Задача Коши: an n.

Метод Пикара является приближенным аналитическим методом.

Дана задача Коши, проинтегрировав, получаем уравнение

$$u'(x) = f(x, u)$$

$$u(y) = u(0) + \int_0^x f(t, u(t)) dt$$

Итерац.-схема Пикара — задача нал. уравн.,
перемещающая в прямую траекторию итерации
 $\left. \begin{array}{l} u - \text{аналитич.} \\ y - \text{приблжн.} \end{array} \right\}$ S - итерация

$$y^{(s)}(x) = u(0) + \int_0^x f(t, y^{(s-1)}(t)) dt ; y^{(0)}(t) = u(0)$$

Метод сходится и это можно доказать.
Численно смотрят:

$$\begin{aligned} a < x < b \\ c \leq u \leq d \end{aligned} \quad \int \text{здесь ограничена}$$

Ф-ия $f(x, u(t))$ по 2-ому арг-му уравн. должно липшица

$$|f(x_1, u_1) - f(x_2, u_2)| \leq L |u_1 - u_2|$$

нешестятое липшица

$$Z^{(s)}(x) = |u(x) - y^{(s)}(x)| - \text{погрешность}$$

$$\text{при } s \rightarrow \infty \quad Z^{(s)} \rightarrow 0.$$

Пример!

$$u'(x) = x^2 + u^2$$

$$u(0) = 0$$

$$y^{(1)}(x) = 0 + \int_0^x t^2 dt = \frac{x^3}{3}$$

$$y^{(2)}(x) = 0 + \int_0^x \left(t^2 + \left[\frac{t^3}{3} \right]^2 \right) dt = \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{9 \cdot 7}$$

$$y^{(3)}(x) = 0 + \int_0^x \left(t^2 + \left[\frac{t^3}{3} + \frac{t^7}{9 \cdot 7} \right]^2 \right) dt = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{21}x^7 + \frac{2}{693}x^{11}$$

Задача Коши для ОДУ. Метод Рунге - Кутты 2-го порядка точности.
Оценка точности.

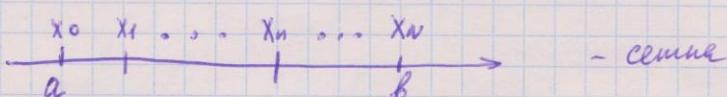
14. Задача Коши для ОДУ. Метод Рунге - Кутты 2-го порядка точности. Оценка точности.

Задача Коши для ОДУ: см II.

Ищем:

$$\int u'(x) = f(x, u)$$

$$u(\xi) = \eta$$



$$W = \{ a = x_0 < x_1 < \dots < x_n < x_{n+1} < \dots < x_N = b \}$$

$$x_n = a + nh, \quad n = \overline{0, N} \quad - \text{сдвиг с шагом}$$

$$\text{Ранжируется } x = a + nh = x_n, \quad h \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

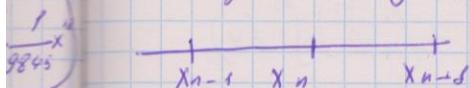
Семейство решений сдвигает к положению б в x, так что $\lim_{h \rightarrow 0} |u(x_n) - y_n|$

Семорное решение содержит и точку на отрезке $[a, b]$, если оно содержит в начале норм это отрезка.

Дискретное (семорное) решение содержит и точку в первом ряду P , если

$$|u(x_n) - y_n| = O(h^p), \text{ при } h \rightarrow 0$$

Введем схему:



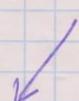
$$u_{n+1} = u(x_{n+1})$$

$$u_{n+1} = u_n + h u'_n + \frac{h^2}{2} u''_n + \frac{h^3}{3!} u'''_n + \dots$$

$$u'_n = u'(x_n) = f(x_n, u_n)$$

$$u''_n = \left. \frac{d f(x, u)}{d x} \right|_{x=x_n} = f'_x(x_n, u_n) + f'_u u'_n = f'_x(x_n, u_n) + f'_u f(x_n, u_n)$$

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial t}$$



Члены 2-го порядка:

$$y_{n+1} = y_n + h u'_n + \frac{h^2}{2} u''_n \quad (1)$$

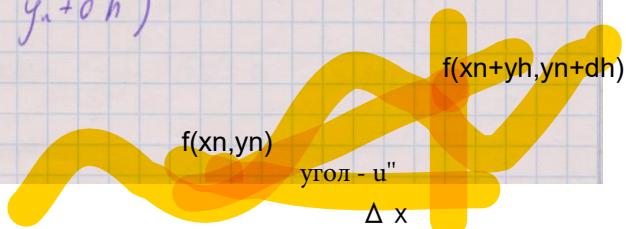
$$y_{n+1} = y_n + h f(x_n, y_n) + \frac{h^2}{2} (f'_x + f'_u f) \Big|_{x_n, y_n} \quad (2)$$

$$u''_n = \frac{f(x_n + \beta h, y_n + \delta h) - f(x_n, y_n)}{\Delta x}$$

$$y_{n+1} = y_n + h f(x_n, y_n) + \frac{h^2}{2 \Delta x} f(x_n + \beta h, y_n + \delta h) - \frac{h^2}{2 \Delta x} f(x_n, y_n) =$$

$$= y_n + \beta h f(x_n, y_n) + \alpha h f(x_n + \beta h, y_n + \delta h)$$

$$\therefore \left\{ \beta = 1 - \frac{h}{2 \Delta x}; \alpha = \frac{h}{2 \Delta x} \right\}$$



$$y_{n+1} = y_n + h [\beta f(x_n, y_n) + \alpha f(x_n + \gamma h, y_n + \delta h)]$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{погл. б пус тенора:} \\ f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} (x - x_0) \end{array} \right\}$$

$$y_{n+1} = y_n + h [\beta f(x_n, y_n) + \alpha (f(x_n, y_n) + f_x' \gamma h + f_u' \delta h)]$$

$$y_{n+1} = y_n + h [(d + \beta) f(x_n, y_n) + \alpha h (f_x' \gamma + f_u' \delta)] \quad (4)$$

Случай (4) имеет нестабильный предел, так как:

$$\begin{cases} d + \beta = 0 \\ d \gamma = \frac{1}{2} \\ \alpha \delta = \frac{1}{2} f(x_n, y_n) \end{cases}$$

тако d - характеристика непр., симметрична на ω та ω'

$$\begin{cases} \beta = 1 - d \\ \gamma = \frac{1}{2d} \\ \delta = \frac{1}{2d} f(x_n, y_n) \end{cases}$$

$$y_{n+1} = y_n + h \left[(1 - d) f(x_n, y_n) + d f \left(x_n + \frac{h}{2d}, y_n + \frac{h}{2d} f(x_n, y_n) \right) \right]$$

Норма погрешности $O(h^2)$

На практике $d = 3$ или $d = \frac{1}{2}$

Геометр. интерпр. при $\sigma = 5$

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} f(x_n, y_n)\right)$$

— через полусеток звук

y_n

$x_n \quad x_{n+\frac{1}{2}} \quad x_{n+1}$

1) $y_{n+\frac{1}{2}} = y_n + \frac{h}{2} f(x_n, y_n)$
 2) $y_{n+\frac{1}{2}} = f(x_{n+\frac{1}{2}}, y_n + \frac{h}{2} f(x_n, y_n))$
 3) $y_{n+1} = y_n + h \cdot y_{n+\frac{1}{2}}$.

7(3)

Задача Коши для ОДУ. Метод Рунге - Кутты 4-го порядка точности.
Оценка точности.

15. Задача Коши для ОДУ. Метод Рунге-Кутты
4-го порядка точности

Метод Рунге-Кутты: см 19.

Оценка точности: см 14

80

3 узла

Метод 4-го порядка:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

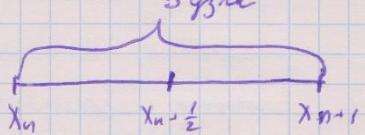
$f(u'(x)) = f(x, u)$ $k_1 = f(x_n, y_n)$

$k_2 = f(x_{n+\frac{1}{2}}, y_n + \frac{h}{2} k_1) + \frac{k_1 h}{2}$

$k_3 = f(x_{n+\frac{1}{2}}, y_n + \frac{k_2 h}{2})$

$k_4 = f(x_{n+1}, y_n + k_3 h)$ Нар. о-ва $O(h^4)$

(5)



$u'(x) = f(x, u)$

$d|u|(x) = f(x) dx$

$u_{n+1} - u_n = \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x) dx = \frac{h}{3 \cdot 2} \left[f(x_n) + 4f(x_{n+\frac{1}{2}}) + f(x_{n+1}) \right]$

Ряд сходимости имеет 4
пер-и члены, поэтому Р.К членов-ширины $O(h^4)$

Погрешность $O(h^4)$

$$u'(v) = \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x) dx$$

$$y_{n+1} = y_n + \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x) dx$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6} [f(x_n) + 4f(x_n + \frac{h}{2}) + f(x_{n+1})] - \text{погреш}$$

Рунге-Куммер 4-го порядка

$$\left\{ y_{n+1} - y_n + \frac{h}{6} f(x_n + \frac{h}{2}) - 2\text{-го порядка} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} & P.K. 2\text{-го порядка} - \text{метод трапеций } O(h^2) \\ & P.K. 4\text{-го порядка} - \text{метод Симпсона } O(h^4) \end{aligned} \right\}$$

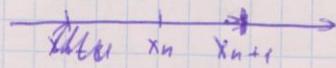
Задача Коши для ОДУ. Метод Адамса.

16. Задача Коши для ОДУ. Метод Адамса.

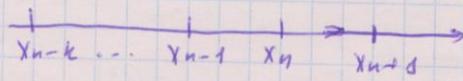
Задача Коши для ОДУ: а) и. б)

Метод Адамса:

Одноступенчатые методы требуют при вычислении следующего значения для каждого шага не предыдущих шагов.



Многоступенчатые методы учитывают ~~текущее~~ предыдущие значения.



Самый распространенный среди многочленовых - метод Ньютона.

Идея:

$$u'(x) = f'(x), u(x_0) = F(x_0)$$

$$u_{n+1} = u_n + \int_{x_n}^{x_{n+1}} F(x) dx \quad (1)$$

$$F(x) = \frac{f(x) - f(x_n)}{x - x_n} + F(x_n, x_{n-1}) + (x - x_n)(x - x_{n-1})F(x_n, x_{n-1}, x_{n-2}) +$$

$$+ (x - x_n)(x - x_{n-1})(x - x_{n-2})F(x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, x_{n-3}) \quad (2)$$

Разделим (2) по (1), получим:

$$y_{n+1} = y_n + h_n F(x_n) + \frac{1}{2} h_n^2 F(x_n, x_{n-1}) + \frac{1}{6} h_n^3 (2h_n - 3h_{n-1}) F(x_n, x_{n-1}, x_{n-2}) + \\ + \frac{1}{12} \left(3h_n^2 + 8h_n h_{n-1} + 4h_n h_{n-2} + 6h_{n-1}^2 + 6h_{n-1} h_{n-2} \right) F(x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, x_n)$$

разложение рациональное

$$\text{где } h_n = x_{n+1} - x_n$$

$$h_{n-1} = x_n - x_{n-1}$$

Задача Коши для ОДУ. Неявные численные методы (Эйлера, трапеций, Гира).

17. Задача Коши для ОДУ. Использование методов (Эйлера, трапеций, Гира)

Задача Коши для ОДУ: ан 11.
Некоторые методы:

Метод Эйлера

$$y_{n+1} = y_n + h f(x_n, y_n) \quad \text{Сложность: } O(1)$$

Как нетрудно понять, геометрическая интерпретация одного шага метода заключается в том, что решение на отрезке $[x_n, x_{n+1}]$ аппроксимируется касательной $y = y_n + y'(x_n)(x - x_n)$, произведенной в точке (x_n, y_n) к интегральной кривой, проходящей через эту точку.

2. Метод Гравицай:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} [f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})]$$

Погрешн.: $O(h^2)$

Метод геном таборі:

Приближене б'юсе, як решато урівнення.

Нам підходить $y_{n+1}^{(1)}$?

$$y_{n+1}^{(1)} = y_n + \frac{h}{2} [f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1}^{(2)})] - \text{так, юзяє } \varphi \text{ та}$$

$$x = \Psi(x)$$

$$x^{(q)} = \Psi(x^{(q-1)})$$

$$|\Psi'(\xi)| < 1 \quad -\text{змінне стиснене}$$

3. Метод Гіпа:

$$\frac{3}{2}y_n - 2y_{n-1} + \frac{1}{2}y_{n-2} = hf(x_n, y_n) \quad O(h^2)$$

$$\frac{11}{6}y_n - 3y_{n-1} + \frac{3}{2}y_{n-2} - \frac{1}{3}y_{n-3} = hf(x_n, y_n) \quad O(h^3)$$

Конструктивний метод.



$$y_n = a_1 y_{n-1} + a_2 y_{n-2} + \dots + a_k y_{n-k} + b h f(x_n, y_n)$$

a_i та b нах. як параметри

$$\begin{array}{c|c|c} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & \cdots & -(k-1) & 1 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & (-1)^n & (-2)^n & \cdots & (-k+1)^n & n \end{pmatrix} & \left| \begin{array}{c} a_1(n) \\ \vdots \\ b(n) \end{array} \right. & = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Краевая задача для ОДУ. Метод коллокаций. Привести пример.

18. Краевая задача для ОДУ. Метод коллокаций.

Привести пример

Краевая задача для ОДУ: см 12.

Метод коллокаций (аппроксимация - приближения)

числ.

$$u''(x) + p(x)u'(x) + q(x)u(x) = f(x)$$

или

$$L[u(x)] = f(x) \quad (1)$$

L - оператор $u''(x) + p(x)u'(x) + q(x)u(x)$; $p(x), q(x), f(x)$ - заданное ф-ии.

Получаем систему уравнений:

краевые условия

$$a \leq x \leq b$$

$$\text{Ra u: } \alpha_0 u(a) + \beta_0 u'(a) = A \int f(x) dx$$

$$\text{Re u: } \alpha_1 u(b) + \beta_1 u'(b) = B \int f(x) dx$$

$u_0(x), u_1(x), \dots, u_n(x)$ - базисные ф-ии лин. нрвнс.)

$$y(x) = u_0(x) + \sum_{k=1}^n c_k u_k(x)$$

$u_0(x)$ подбирается так, чтобы она удовлетворяла краевые условия.

Все ф-ии u_k , $k = 1, n$ подбираются такими образом, чтобы они удовлетворяли ~~и~~ краевые условия.
 $(A = 0, B = 0)$

Погрешность б.т.:

$$R(x, c_1, c_2, \dots, c_n) = L[y] - f(x) =$$
$$= L[u_0(x) + \sum_{k=1}^n c_k u_k(x)] - f(x)$$

Возьмем n членов, б.которых погрешность R .

$$R(x, c_1, \dots, c_n) = 0$$

Затем для этих членов решим систему ур-ий, в.которых включает k -ий c_1, \dots, c_n .

$$\sum_{k=1}^n L[u_k(x)] = -L[u_0(x)] - f(x), \text{ где } x = x_1, \dots, x_n.$$

x_1, \dots, x_n - точки наименьшего

Пример:

$$\begin{cases} u'' + (1+x^2)u + s = 0 \\ u(-1) = 0 \\ u'(1) = 0 \end{cases}$$

$$\text{Возьмем } u_k(x) = x^{2k-2}(1-x^2), \quad k=1, 2, \dots$$

Наше решение: $u_1(x)$ и $u_2(x)$.

$$u_0(x) \equiv 0.$$

$$y = c_1(1-x^2) + c_2(x^2-x^4)$$

$$y' = -c_1 \cdot 2x + 2c_2(x-2x^3)$$

$$y'' = -2c_1 + 2c_2(1-6x^2)$$

$$R(x, c_1, c_2) = -2c_1 + 2c_2(1-6x^2) + (1-x^2)[c_1(1-x^2) + c_2(x^2-x^4)] + s =$$
$$= 1 - c_1(1+x^4) + c_2(2 - 11x^2 - x^6)$$

Водоизрасходы можно количественные

$$x = 0, \quad x = \frac{1}{2}.$$

$$\underline{x=0}: \quad 1 - C_3 + 2C_2 = 0$$

$$\underline{x=\frac{1}{2}}: \quad 1 - \frac{17}{16}C_3 - \frac{49}{64}C_2 = 0$$

$$C_3 = 0,957; \quad C_2 = -0,022$$

таким образом

$$y(x) \approx 0,957(1-x^2) - 0,022(x^2-x^4).$$

Краевая задача для ОДУ. Интегральный метод наименьших квадратов. Привести пример.

19. Краевая задача для ОДУ. Интегральный метод наименьших квадратов. Привести пример.

Краевая задача для ОДУ: аи 12.

Метод наименьших квадратов (интегральный):

Ищем

$$u''(x) + p(x)u'(x) + g(x)u(x) = f(x) \quad (1)$$

$$L[u(x)] = f(x) \quad L - \text{оператор } u''(x) + p(x)u'(x) + g(x)u(x).$$

$p(x), g(x), f(x)$ - заданные

Краевые условия:

$$a \leq x \leq b$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{1a} \ u: \quad u(a) + \beta_0 u'(a) = A \\ \text{1b} \ u: \quad \alpha_0 u(b) + \beta_1 u'(b) = B \end{array} \right\} (2)$$

$$\left. \begin{array}{l} u_0(x), u_1(x), \dots, u_n(x) \end{array} \right. \text{ - базисные ф-ии (н. н. н.)}$$

Водоизрасходы базисные ф-ии, удовлетворяющие условиям (2).

$$g = u_0(x) + \sum_{k=1}^n c_k u_k(x)$$

Справедливое выражение, но есть неравенство $y \leq M$.

$$R(x, c_1, \dots, c_n) = L[y] - f(x) = L[u_0(x)] + \sum_{k=1}^n c_k L[u_k(x)] -$$

$$+ \sum_{k=1}^n L[u_k(x)] - f(x)$$

Нужно, чтобы выражение для R было меньше нуля

$$\int_a^b R^2 dx \rightarrow \min \quad \left. \begin{array}{l} \text{дифференцируем относительно} \\ c_k, k=1, n; \text{ решаем систему} \end{array} \right\}$$

$$\int_a^b R \frac{\partial R}{\partial c_k} dx = 0, \quad k = 1, n$$

Пример:

$$0 \leq x \leq 1$$

$$u^4 + (1+x^2) u + 1 = 0$$

$$u_1 = 1-x^2$$

$$u_2 = x^2 - x^4$$

$$y = c_1(1-x^2) + c_2(x^2 - x^4)$$

$$y' = -2x c_1 + 2x c_2 - 4x^3 c_2$$

$$y'' = -2c_1 + 2c_2(1-6x^2)$$

Найдем R :

$$R(x, c_1, c_2) = 1 - c_1(1+x^4) + c_2(2-11x^2-x^6)$$

$$\frac{\partial}{\partial c_1} \int_0^1 R^2 dx = 2 \int_0^1 R \frac{\partial R}{\partial c_1} dx = 0 \quad \frac{\partial}{\partial c_2} \int_0^1 R^2 dx = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial c_1} \cdot \int_0^1 \left[1 - c_1(1+x^4) + c_2(2-11x^2-x^6) \right] \cdot \left[-1/(1+x^4) \right] dx = 0$$

$$\int_0^1 \left[1 - C_1 (1+x^4) + C_2 (2 - 11x^2 - x^6) \right] \cdot [2 - 11x^2 - x^6] dx = 0$$

$$\frac{68}{45} C_1 + \frac{3548}{1155} C_2 = \frac{5}{4}$$

$$\frac{3548}{1155} C_1 + \frac{63404}{4055} C_2 = \frac{38}{25}$$

$$C_1 = 0,985$$

$$C_2 = -0,098$$

$$y(x) = 0,985 (1-x^2) - 0,098 (x^2-x^4)$$

Краевая задача для ОДУ. Дискретный метод наименьших квадратов.
Привести пример.

20. Краевая задача для ОДУ. Дискретный метод наименьших квадратов. Привести пример.

Краевая задача для ОДУ: см 12

Лекционные задачи : см 19.

Дискретный метод наименьших квадратов:

В интегральном смысле $\int_0^6 R^2(x, \vec{c}) dx \rightarrow \min$

Интеграл заменяется суммой

Подыщем N точек на $[a, b]$ x_i : $i = \overline{1, N}$

$$\Phi(\vec{c}) = \sum_{i=1}^N R^2(x_i, \vec{c}) \rightarrow \min$$

т. е.

$$\frac{\partial \Phi}{\partial c_i} = 0$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial c_n} = 0$$

Вариант № 16.

В примере из 19:

$$\sum_{i=1}^N \left[1 - (1 + x_i^4) c_1 + (2 - 10x_i^2 - x_i^6) c_2 \right]^2 \rightarrow \text{мин}$$

Если $N = n$, то метод превращает в метод коллокаций (для фундамент.)
помимо брачно $N >> n$.

Дио примера из 19 иллюст.

$$y(x) = 0,9317 (1-x^2) - 0,0474 (x^2-x^4)$$

Краевая задача для ОДУ. Метод Галеркина. Привести пример.

25. Краевая задача для ОДУ. Метод Галеркина.
Бесстий пример.

Краевая задача для ОДУ : сс 12.

Или иллюст.

$$u''(x) + p(x) u'(x) + g(x) u(x) = f(x)$$

$$L[u(x)] = f(x) \quad (1)$$

L-оператор $(u''(x) + p(x) u'(x) + g(x) u(x))$, $p(x), g(x), f(x) -$ фундамент.

Краевые условия:

$$a \leq x \leq b$$

$$\begin{aligned} \Gamma_a u &= \alpha_0 u(a) + \beta_0 u'(a) = A \\ \Gamma_b u &= \alpha_1 u(b) + \beta_1 u'(b) = B \end{aligned} \quad \left\{ \begin{array}{l} u(x) = u_0(x) + \sum_{k=1}^n c_k u_k(x) \\ \text{допущение } \end{array} \right.$$

Найдем неизвестные, используя свойство:

$$\text{если } \int_a^b f(x) u_k(x) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, \infty, \text{ то } f(x) = 0$$

$$\int_0^b R(x, c_1, \dots, c_n) u_k(x) dx = 0, \quad k = 1, n.$$

$$\int_0^b \left(L[u_0(x)] + \sum_{k=1}^n c_k L[u_k(x)] - f(x) \right) u_k(x) dx = 0, \quad k = 1, n$$

$$\sum_{k=1}^n c_k \int_0^b L[u_k(x)] u_k(x) dx = \int_0^b u_k(x) [f(x) - L[u_0(x)]] dx, \quad k = 1, n$$

$\left\{ \begin{array}{l} u_k \text{ - нуль } u_0 \text{ с } u_k. \\ u_k - \text{ функция, ее кото. \text{дополнение} \text{ не} \text{лежат} \text{ в} \text{ точке} \\ \text{членами} \quad u_i - \text{базисные ф-ии в} \text{ нуль.} \end{array} \right.$

Пример:

$$\begin{cases} u'' + x u' + u = 2x \\ u(0) = 3 \\ u'(1) = 0 \end{cases}$$

$$u_0(x) = 1-x$$

$$u_1(x) = x(1-x)$$

$$u_2(x) = x^2(1-x)$$

$$u_3(x) = x^3(1-x)$$

$$y(x) = (1-x) + C_1 x(1-x) + C_2 x^2(1-x) + C_3 x^3(1-x)$$

Небезпека

$$\begin{aligned} R(x, C_1, C_2, C_3) &= (1-4x) + C_1(-2+2x-3x^2) + C_2(2-6x+3x^2-4x^3) \\ &+ C_3(6x-12x^2+4x^3-5x^4) \end{aligned}$$

Задача:

$$\int_0^1 (1-x^2) R(x, \bar{C}) dx = 0 \quad \bar{C} = \{C_1, C_2, C_3\}$$

$$\int_0^1 (x^2-x^3) R(x, \bar{C}) dx = 0$$

$$\int_0^1 |x^3 - x^4| f(x, \bar{c}) dx = 0$$

Вычислим величина каждого интеграла, подставив
известные коэффициенты для \bar{c} :

$$\begin{cases} 183 C_1 + 63 C_2 + 36 C_3 = -70 \\ 140 C_1 + 106 C_2 + 79 C_3 = -98 \\ 264 C_1 + 252 C_2 + 211 C_3 = -210 \end{cases}$$

Решение:

$$C_1 = -0,209$$

$$C_2 = -0,7894$$

$$C_3 = 0,2090$$

$$y(x) = (1-x) (1 - 0,209x - 0,7894x^2 + 0,209x^3)$$

Краевая задача для ОДУ. Сходимость разностного решения к точному на примере линейного уравнения 2-го порядка.

22. Краевая задача для ОДУ. Сходимость разностного решения к точному на примере линейного уравнения 2-го порядка.

Краевая задача для ОДУ: см 12

Лин. уравнение 2-го порядка:

$$\begin{cases} u''(x) - p(x) u'(x) = f(x) \\ u(a) = d \\ u(b) = \beta \\ a \leq x \leq b \end{cases}$$

Разностного метода: нах. для каждого промежуточн. из уравнения заменяется разностным выражением. Получается СЛАУ для систем коэффициентов ~~и~~ от уравнений.

Погрешн. в схеме первого порядка не доказ.

Задача: u'' разностно.

$$u''(x) = \frac{u_{n-1} - 2u_n + u_{n+1}}{h^2} - \frac{h^2}{12} u''(\xi)$$

$x_{n-1} \leq \xi \leq x_{n+1}$

~~Возьмем~~ $\frac{h^2}{12} u''(\xi)$

Наглядность

$$\frac{u_{n-1} - 2u_n + u_{n+1}}{h^2} - \frac{h^2}{12} u''(\xi) - p_n u_n = f_n \quad | \cdot h^2$$

$$u_{n-1} - (2 + p_n h^2) u_n + u_{n+1} = h^2 f_n + \frac{h^4}{12} u''(\xi) \quad (1)$$

Если отбросить $\frac{h^4}{12} u''(\xi)$, то ошибка получится h^2

поправ.

$$\begin{cases} u_{n-1} - 2u_n + u_{n+1} \\ u_{n-1} - (2 + p_n h^2) u_n + u_{n+1} = h^2 f_n \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} y_0 = d \\ y_N = \beta \end{cases}$$

Решаем методом прогонки.

Решение однородным и не однородное

Соединение в норму?

$$Z_n = Y_n - U_n \quad - \text{погрешность}$$

Если $|Z_n| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, то решение соединение в норму
искусственное ибо это неизвестно погрешность решения

Если разностное решение аппроксимировано гладко и
составна гладкостью, то решение соединение в норму

Возьмем из (2) (1)

$$Z_{n-1} - (2 + p_n h^2) Z_n + Z_{n+1} = - \frac{h^4}{12} u''(\xi)$$

$$(2 + p_n h^2) Z_n \leq Z_{n-1} + Z_{n+1} + \frac{h^4}{12} u''(\xi)$$

Можно считать члены ~~нормы~~ сумма погрешности

$$(2 + p_n h^2) |Z_n| \leq |Z_{n-1}| + |Z_{n+1}| + \left| \frac{h^4}{12} u''(\xi) \right|$$

Возьмем норму X_m с максимумом погрешности

$$(2 + p_m h^2) |Z_m| \leq |Z_{m-1}| + |Z_{m+1}| + \left| \frac{h^4}{12} u''(\xi) \right|$$

и т.к. $|Z_m| = \max$.

$$(2 + p_m h^2) |Z_m| \leq 2 |Z_m| + \left| \frac{h^4}{12} u''(\xi) \right|$$

$$|Z_m| \leq \left| \frac{h^2}{12 p_m} u''(\xi) \right| \quad \text{При } h \rightarrow 0 \quad |Z_m| \rightarrow 0.$$

Число несущих коэффициентов, т.к.

погрешность $\rightarrow 0$ со скоростью h^2

Метод прогонки:

$$A_i x_{i-1} + B_i x_i + C_i x_{i+1} = F_i \quad (1)$$

Задаем универсальное: $x_i = \eta_{i+s} x_{i+s} + \xi_{i+s}$ (2)

Тогда $x_{i-1} = \eta_i x_i + \xi_i$, т.е. $x_{i-1} = \eta_i \eta_{i+s} x_{i+s} + \eta_i \xi_{i+s} + \xi_i$ (3)

Подставляем (2) и (3) в (1)

$$x_{i+s} \cdot (A_i \eta_{i+s} \eta_i + B_i \eta_{i+s} + C_i) + A_i \eta_i \xi_{i+s} + A_i \xi_i + B_i \xi_{i+s} - F_i = 0$$

тогда (9) = 0 независимо от x_{i+s} , предполагая: (4)

$$A_i \eta_{i+s} \eta_i + B_i \eta_{i+s} + C_i = 0 \quad (5)$$

$$A_i \eta_i \xi_{i+s} + A_i \xi_i + B_i \xi_{i+s} - F_i = 0 \quad (6)$$

Из (5):

Из (6):

$$\eta_{i+s} = -\frac{C_i}{A_i \eta_i + B_i} \quad (7) \quad \xi_{i+s} = \frac{F_i - A_i \xi_i}{A_i \eta_i + B_i} \quad (8)$$

Как находим η_2 и ξ_2 ?

Используем второе прямое уравнение:

$$B_3 x_3 + C_3 x_2 = F_3 \quad (A_3 = 0)$$

$$\eta_2 = -\frac{C_3}{B_3} \quad (9) \quad \xi_2 = \frac{F_3}{B_3} \quad (10)$$

Задаем использование (7), (8) и решаем (9), (10) находит

$$\eta_i, \xi_i, i = \overline{3, n} \quad (11)$$

Число $x_{n-1} = \eta_n x_n + \xi_n$: x_n - неизвестно.

Используем первое прямое уравнение:

$$A_n x_{n-1} + B_n x_n = F_n \quad (12)$$

Подставляем (11) в (12): $A_n (\eta_n x_n + \xi_n) + B_n x_n = F_n$

$$x_n = \frac{F_n - A_n \xi_n}{B_n + A_n \eta_n} \quad (13).$$

Используем (13) в (12), находит все решения.

Краевая задача для ОДУ. Получение интегро-интерполяционным методом разностной схемы для уравнения 2-го порядка с краевыми условиями 3-го рода.

23. Краевая задача для ОДУ. Получение интегро-интерполяционного методом разностной схемы для уравнений 2-го порядка с краевыми условиями 3-го рода.

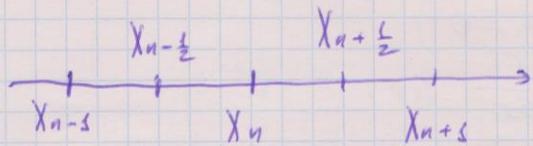
Краевая задача для ОДУ: см. 12.

Используем

$$\frac{d}{dx} \left(k(x) \frac{dy}{dx} \right) - p(x) u(x) + f(x) = 0 : k, p, f - \text{заг. гр.}$$

Введем схему и на неё интегрируем
Удобно, так как к моментам отыскания разрывов

При получении разностной схемы применение интегро-интерполяционного метода - интегрируем схеме.



Введен "полублок" F :
и "помок" F' :

$$\begin{cases} F = -k(x) \frac{du}{dx} \\ -\frac{dF}{dx} - p(x)u(x) + f(x) = 0 \end{cases} \quad (1) \quad (2)$$

$$\int_{x_{n-\frac{1}{2}}}^{x_{n+\frac{1}{2}}} -\frac{dF}{dx} dx - \int_{x_{n-\frac{1}{2}}}^{x_{n+\frac{1}{2}}} p u dx + \int_{x_{n-\frac{1}{2}}}^{x_{n+\frac{1}{2}}} f dx = 0 \quad - \text{для средних узлов.}$$

Две задачи:

$$\int_0^{x_{\frac{1}{2}}} -\frac{dF}{dx} dx - \int_0^{x_{\frac{1}{2}}} p u dx + \int_0^{x_{\frac{1}{2}}} f dx = 0 \quad - \text{reb.}$$

$$\int_{x_{\frac{1}{2}}}^{x_N} -\frac{dF}{dx} dx - \int_{x_{\frac{1}{2}}}^{x_N} p u dx + \int_{x_{\frac{1}{2}}}^{x_N} f dx = 0 \quad - \text{раб.}$$

\leftarrow некорректные граничные условия.

Две сист.: $\begin{cases} \int_{x_{\frac{1}{2}}}^{x_{n+\frac{1}{2}}} p u dx \approx p \left(\frac{x_{n+\frac{1}{2}} + x_{n-\frac{1}{2}}}{2} \right) h / \left(\frac{x_{n+\frac{1}{2}} + x_{n-\frac{1}{2}}}{2} \right) \cdot (x_{n+\frac{1}{2}} - x_{n-\frac{1}{2}}) \\ x_{n-\frac{1}{2}} = p_n y_n h \end{cases}$

$$-F_{n+\frac{1}{2}} + F_{n-\frac{1}{2}} - p_n y_n h + f_n h = 0 \quad ; \quad p_n = p(x_n), \quad f_n = f(x_n)$$

\leftarrow неподвижные граничные условия. в б. x_n . (3)

Температурный (1):

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} F dx = \int_{x_n}^{x_{n+1}} -k(x) \frac{du}{dx} dx$$

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} \frac{F dx}{k(x)} = - \int_{x_n}^{x_{n+1}} \frac{du}{dx} dx \Rightarrow F_{n+\frac{1}{2}} \int_{x_n}^{x_{n+1}} \frac{dx}{k(x)} = \cancel{k(x)} \cancel{u_n - u_{n+1}}$$

$$F_{n+\frac{1}{2}} = \frac{u_n - u_{n+1}}{\int_{x_n}^{x_{n+1}} \frac{dx}{k(x)}} = \mathcal{X}_{n+\frac{1}{2}} \frac{y_n - y_{n+1}}{h}, \quad \text{где } \mathcal{X}_{n+\frac{1}{2}} = \int_{x_n}^{x_{n+1}} \frac{h}{k(x)}$$

Коэффициент $\mathcal{X}_{n+\frac{1}{2}}$:

Система:

$$\mathcal{X}_{n+\frac{1}{2}} = k_{n+\frac{1}{2}} = \frac{k_n + k_{n+1}}{2} \quad \left| \begin{array}{l} \text{трансп.} \\ \mathcal{X}_{n+\frac{1}{2}} = \frac{h}{\frac{h}{2} \left(\frac{1}{k_n} + \frac{1}{k_{n+1}} \right)} = \frac{2k_n k_{n+1}}{k_n + k_{n+1}} \end{array} \right.$$

$$F_{n-\frac{1}{2}} = \mathcal{X}_{n-\frac{1}{2}} \frac{y_{n-s} - y_n}{h} \quad (\text{также называемое}).$$

Возьмем для поправок неравенство 6 (3):

$$\mathcal{X}_{n-\frac{1}{2}} \frac{y_{n-s} - y_n}{h} - \mathcal{X}_{n+\frac{1}{2}} \frac{y_n - y_{n+s}}{h} - p_n y_n h + f_n h = 0$$

Получаем разностное соотношение

$$\underbrace{\mathcal{X}_{n-\frac{1}{2}} y_{n-s}}_{A_n} - \underbrace{(\mathcal{X}_{n+\frac{1}{2}} + \mathcal{X}_{n-\frac{1}{2}} + p_n h^2)}_{B_n} y_n + \underbrace{\mathcal{X}_{n+\frac{1}{2}} y_{n+s}}_{C_n} =$$

Т.к. $|B_n| > |A_n| + |C_n|$, то в матрице генератора предложенное (для погрешности сущесвтующего) существует единственное решение

~~Коэффициенты~~ Поправки кимпто-интервалов метода разностного аналог краевого условия есть

$$-k(x) \frac{du}{dx} = F_0 \quad ; \quad x=0$$



$$\int_0^{x_{\frac{1}{2}}} \frac{df}{dx} dx + \int_0^{x_{\frac{1}{2}}} p u dx = \int_0^{x_{\frac{1}{2}}} f u dx$$

$$F_2 - F_0 + \frac{p_2 y_1 + p_0 y_0}{2} \cdot \frac{h}{2} = \frac{f_{\frac{1}{2}} + f_0}{2} \cdot \frac{h}{2}$$

$$\mathcal{D}_{\frac{1}{2}} \frac{y_0 - y_1}{h} - F_0 + \frac{h}{4} (p_0 y_0 + p_{\frac{1}{2}} \frac{y_0 + y_1}{2}) = \frac{h}{4} (f_0 + f_{\frac{1}{2}}) / h$$

$$\left(\mathcal{D}_{\frac{1}{2}} + \frac{p_0 h^2}{4} + \frac{p_{\frac{1}{2}} h^2}{8} \right) y_0 = \left(\mathcal{D}_{\frac{1}{2}} - \frac{h^2}{8} p_{\frac{1}{2}} \right) y_1 + h F_0 + \frac{h^2}{4} (f_0 + f_{\frac{1}{2}})$$

~~$y_0 =$~~ Решение:

$$\left. \begin{array}{l} F(a) = d - 1 \cdot 20 \text{ кг} \\ \frac{\partial F}{\partial x}(a) = d - 2 \cdot 20 \text{ кг} \\ \alpha F(a) + \beta \frac{\partial F}{\partial x}(a) = y - 3 \cdot 20 \text{ кг} \end{array} \right\}$$

ищем корни нормального уравнения, включив погрешность:

$$\Rightarrow 0 = \left(\mathcal{D}_{\frac{1}{2}} + \frac{p_0 h^2}{4} + \frac{p_{\frac{1}{2}} h^2}{8} \right) (y_0 - u_0) + \left(\frac{h^2}{8} p_{\frac{1}{2}} - \mathcal{D}_{\frac{1}{2}} \right) (y_1 - u_1).$$

Помимо $O(h^2)$ - ошибки решения метода.

Краевая задача для ОДУ. Наилучшая разностная схема для уравнения 2-го порядка с краевыми условиями 3-го рода в цилиндрических координатах. СМОТРИ ДРУГОЙ ФАЙЛ, ТАМ ТОЛЬКО ЭТОТ ВОПРОС

24. Краевая задача для ОДУ. Наилучшая разностная схема для уравнения 2-го порядка с краевыми условиями 3-го рода в цилиндрических координатах.

Краевая задача для ОДУ: см 12

Рассмотрим по примеру изображение деревьев, записанное в виде, удобном для обработки процедурой симметрического метода

$$\vec{F}_V = -\frac{C}{3k_V} \nabla U_V$$

$$\text{div } \vec{F}_V = C k_V (U_{Vp} - U_V)$$

F - норма, C - скорость света $3 \cdot 10^{10} \frac{\text{см}}{\text{с}}$

k_V - коэффициент поглощения [см^{-1}]

$$k_{Vp} = \frac{8\pi h V^3}{C^3 (e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1)} - \text{функция Планка.}$$

h -исп. Планка $16,63 \cdot 10^{-34}$

V - геометрия изображения (см^{-1})

R - исп. Болцмана ($1,38 \cdot 10^{-23}$)

U - объёмная спектральная интенсивность излучения.

Построим разностную схему:

Введём сетку W_n - $x_n : x_n = n \cdot h$, $n = \overline{0, N}$, $h = \frac{1}{N}$

$$\int F = -\frac{1}{R} \cdot \frac{C}{3k_{Vp}} \frac{du}{dx} \Big|_P \quad (1)$$

$$\frac{1}{R} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{d}{dx} (2F) \Big|_P = C k_{Vp} / (U_{Vp}(x) - U) \quad (2)$$

$$x=0 = 0 \quad \frac{du}{dx} = 0$$

$$x = z = 1 \quad F = \frac{mcu}{z}$$

$$z = \frac{1}{a} \operatorname{arctg}(y_{\max})$$

$$a = \frac{\pi}{2} - \delta$$

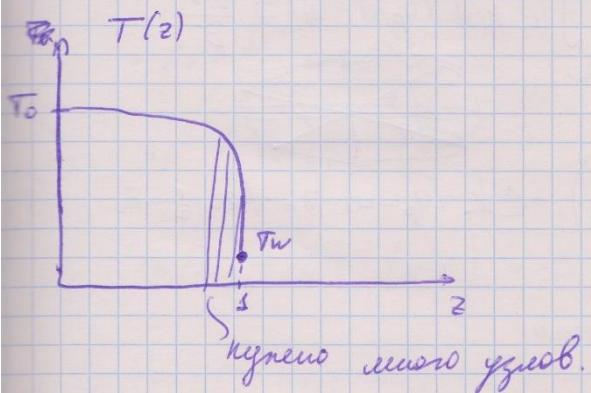
$$y_{\max} = f(a)$$

$$m = 0,786$$

$$C = 3 \cdot 10^{10}$$

$$\tilde{P} = \frac{q}{y_{\max}} / (1 + x^2 y_{\max}^2)$$

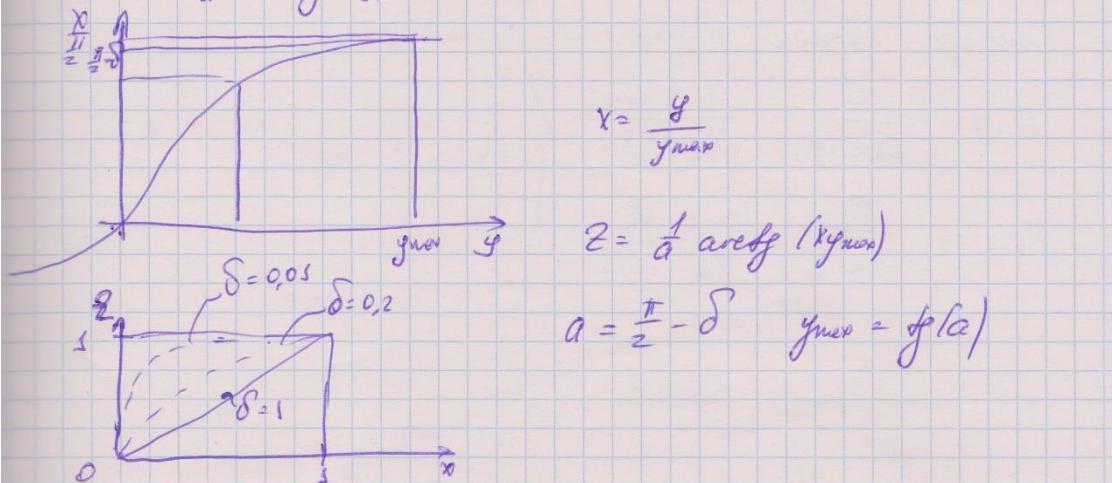
$$2dz = z \frac{d^2}{dx^2} dx = z \frac{dx}{\tilde{P}}$$



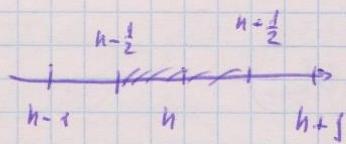
$$T(z) = T_0 + (T_w - T_0) z^\rho \quad \rho = 0.5 - 0.7$$

Число одномерного давления не бо знат б конце

$$z = \frac{1}{a} \operatorname{arctg}(y)$$



УЧМ.



Интегрируем (2) по нововведенмм зредам:

$$\int_{x_{n-\frac{1}{2}}}^{x_{n+\frac{1}{2}}} \frac{1}{R^2} \frac{d}{dx} (2F) \tilde{P} dz = \int_{x_{n-\frac{1}{2}}}^{x_{n+\frac{1}{2}}} (c k(x) (u_p(x) - u)) z \frac{dx}{\tilde{P}}$$

узун. е.к.

$$\frac{1}{R} (z_{n+\frac{1}{2}} F_{n+\frac{1}{2}} - z_{n-\frac{1}{2}} F_{n-\frac{1}{2}}) = c k_n (u_p - u) z_n \cdot (z_{n+\frac{1}{2}} - z_{n-\frac{1}{2}})$$

УЗ (1): $\int_{x_n}^{x_{n+s}} (1) dx$, получаем

$$\int_{x_n}^{x_{n+s}} \frac{F}{c \tilde{P}} dx = - \int_{x_n}^{x_{n+s}} \frac{du}{dx} dx$$

меняя перемен

$$\frac{3Rk_{n+\frac{1}{2}}}{c} F_{n+\frac{1}{2}} (z_{n+\frac{1}{2}} - z_n) = -u_{n+s} + u_n$$

Очевидно получим:

$$F_{n+\frac{1}{2}} = \frac{c}{3Rk_{n+\frac{1}{2}}} \cdot \frac{u_n - u_{n+s}}{z_{n+1} - z_n} \quad (4)$$

$$F_{n-\frac{1}{2}} = \frac{c}{3Rk_{n-\frac{1}{2}}} \cdot \frac{u_{n-s} - u_n}{z_n - z_{n-s}}$$

Кезембап (4), (5), (6), (7), (8) күткөргөмөл 1 наимен.

b) y:

$A_n u_{n-3} - B_n u_n + C_n u_{n+3} = -F_n$ (5) - орнагың салғынан
назарияда.

$$A_n = \frac{2n - \frac{1}{2}}{k_{n-\frac{1}{2}} (2n - 2n - \frac{1}{2})}, \quad C_n = \frac{2n + \frac{1}{2}}{k_{n+\frac{1}{2}} (2n + \frac{1}{2} - 2n)}$$

$$B_n = A_n + C_n + 3R^2 k_n V_n, \quad V_n = 2n / (2n + \frac{1}{2} - 2n - \frac{1}{2})$$

$$F_n = 3R^2 k_n V_n \text{ Upz}$$

) (3)

$$\frac{1}{R} (2n F_n - 2n - \frac{1}{2} F_{n - \frac{1}{2}}) = c \int (1) 2 \frac{dx}{\tilde{P}}$$

$k_n u_n + m_n u_{n-3} = p_n$ (6) - спектр алғындағы
ағаштың рефлексы (7).

К силеме (5), (6), (7) аркы менен нұсқалы.

Метод прогонки для реализации разностных схем с краевыми условиями 3-го рода.

Метод прогонки:

$$A_i x_{i-3} + B_i x_i + C_i x_{i+3} = F_i \quad (1)$$

Делаем универсальное: $x_i = \eta_{i+3} x_{i+3} + \xi_{i+3} \quad (2)$

Тогда: $x_{i-3} = \eta_i x_i + \xi_i$, т.е. $x_{i-3} = \eta_i \eta_{i+3} x_{i+3} + \eta_i \xi_{i+3} + \xi_i \quad (3)$

Подставляем (2) и (3) в (1)

$$x_{i+3} \cdot (A_i \eta_{i+3} \eta_i + B_i \eta_{i+3} + C_i) + A_i \eta_i \xi_{i+3} + A_i \xi_i + B_i \xi_{i+3} - F_i = 0$$

Умножим (4) на x_{i+3} и вычтем из (4) предыдущее:

$$A_i \eta_{i+3} \eta_i + B_i \eta_{i+3} + C_i = 0 \quad (5)$$

$$A_i \eta_i \xi_{i+3} + A_i \xi_i + B_i \xi_{i+3} - F_i = 0 \quad (6)$$

Из (5):

$$\eta_{i+3} = -\frac{C_i}{A_i \eta_i + B_i} \quad (7) \quad \xi_{i+3} = \frac{F_i - A_i \xi_i}{A_i \eta_i + B_i} \quad (8)$$

Как найти η_2 и ξ_2 ?

Используем левое граничное условие:

$$B_s x_s + C_s x_2 = F_s \quad (A_s = 0)$$

$$\eta_2 = -\frac{C_s}{B_s} \quad (9) \quad \xi_2 = \frac{F_s}{B_s} \quad (10)$$

Затем используем (7), (8) и значения (9), (10) находим

$\eta_i, \xi_i, i = 3, n$

(11)

Имеем $x_{n-3} = \eta_n x_n + \xi_n$; x_n - неизвестно.

Используем правое граничное условие:

$$A_n x_{n-3} + B_n x_n = F_n \quad (12)$$

Подставляем (11) в (12): $A_n (\eta_n x_n + \xi_n) + B_n x_n = F_n$

$$x_n = \frac{F_n - A_n \xi_n}{B_n + A_n \eta_n} \quad (13)$$

Используем (13) в (12), находим все решения.

Краевая задача для ОДУ. Методы решения квазилинейных разностных схем для уравнений 2-го порядка.

26. Краевые задачи для ОДУ. Метод решения квазилинейных разностных схем для уравнений 2-го порядка.

Краевые задачи для ОДУ.

Пример нелинейного уравнения:

$$\frac{d}{dx} \left(\lambda(T) \frac{dy}{dx} \right) + q(T) = 0$$

$$\text{На конце отрезка } \lambda(T) = \lambda_0 \left(\frac{T}{\Theta} \right)^{\alpha} \quad \Theta = 300$$

Нек. значение R задаётся гранич.

L -граница чл.-ре

Т.о.

k_0, \dots, n

d_0, \dots, n

F_0

Найдем $\tau(\lambda)$.

Простое аппроксимационное:

$A_n y_{n-1} - B_n y_n + C_n y_{n+1} = -F_n$ — граничные квазилинейные

$$A = \mathcal{H}_{n-\frac{1}{2}} \quad C_n = \mathcal{X}_{n+\frac{1}{2}} \quad B = A_n + C_n + 3R^2 \lambda_n V_n$$

$$V_n = 2n \left(\mathcal{Z}_{n+\frac{1}{2}} - \mathcal{Z}_{n-\frac{1}{2}} \right) / \text{дл. пр.}$$

$$F_n = 3R^2 \lambda_n V_n \text{ при}$$

$$A_n (y_{n-1}, y_n) y_{n-1} - B_n (y_{n-1}, y_n, y_{n+1}) y_n + C_n (y_n, y_{n+1}) y_{n+1} =$$

1) Метод прогонки симплекса:

$$A_n \left(y_{n-1}^{(s-1)}, y_n^{(s-1)} \right) y_n^{(s)} - B_n \left(y_{n-1}^{(s-1)}, \dots \right) y_n^{(s)} + C_n \left(\dots \right) y_{n+1}^{(s)} = -F_n^{(s-1)}$$

Ограничение симплекса:

$$\max_{n=1, N} \left| \frac{T_n^{(s)} - T_n^{(s-1)}}{T_n^{(s)}} \right| < \epsilon$$

алгоритмическое моделирование: $\frac{d\tilde{f}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\lambda(t) \frac{df}{dt} \right) + g(t)$

2) Метод Ньютона:

Линеаризованная система ~~$f(x_1, x_2, x_3)$~~ $f(x_1, x_2, x_3) = 0$:

$$f(x_1^{(s)}, x_2^{(s)}, x_3^{(s)}) + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial f}{\partial x_k} (x_k^{(s+1)} - x_k^{(s)}) = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \Delta x_k &= x_k^{(s+1)} - x_k^{(s)} \\ &\Rightarrow \sum_{k=1}^3 \frac{df^{(s)}}{dx_k} \Delta x_k = -f(x_1^{(s)}, x_2^{(s)}, x_3^{(s)}) \end{aligned}$$

(зел.) $x_k^{(s+1)} = x_k^{(s)} + \Delta x_k$

Пример:

$$\begin{aligned} F_1 & \left\{ \begin{array}{l} e^{x_1^2+x_2^2} + x_1 x_2 - 5 = 0 \\ x_1^3 + x_2^2 - 7 = 0 \\ (e^{x_1^2+x_2^2} \cdot 2x_1 + x_2)_{S_{12}} \Delta x_3^{(s)} + (e^{x_1^2+x_2^2} \cdot 2x_2 + x_1)_{S_{12}} \Delta x_2^{(s)} = -(e^{x_1^2+x_2^2} \cdot x_1 x_2 - 5)_{S_{12}} \end{array} \right. \\ & \quad \left. \begin{array}{l} f_1(x_1, x_2) = 0 \\ f_2(x_1, x_2) = 0 \end{array} \right. \\ & \quad \left. \begin{array}{l} 3x_1^2 \Big|_{S_{12}} \Delta x_1^{(s)} + 2x_2 \Big|_{S_{12}} \Delta x_2^{(s)} = - (x_1^3 + x_2^2 - 7) \Big|_{S_{12}} \end{array} \right. \end{aligned}$$

в нашем же ур-ии.

$$\left[\frac{\partial A_n}{\partial y_{n-1}} y_{n-1} + A_n + \frac{\partial B_n}{\partial y_{n-1}} y_n \right]^{(S)} \Delta y_{n-1} - \left[\frac{\partial A_n}{\partial y_n} y_{n-1} - \frac{\partial B_n}{\partial y_n} y_n - b_n \right. \\ \left. + \frac{\partial C_n}{\partial y_n} \right]^{(S)} \Delta y_n - \left[\frac{\partial B_n}{\partial y_{n+1}} y_n + \frac{\partial C_n}{\partial y_{n+1}} y_{n+1} + C_n \right]^{(S)} \Delta y_{n+1} = -f$$

Решаем методом прогонки

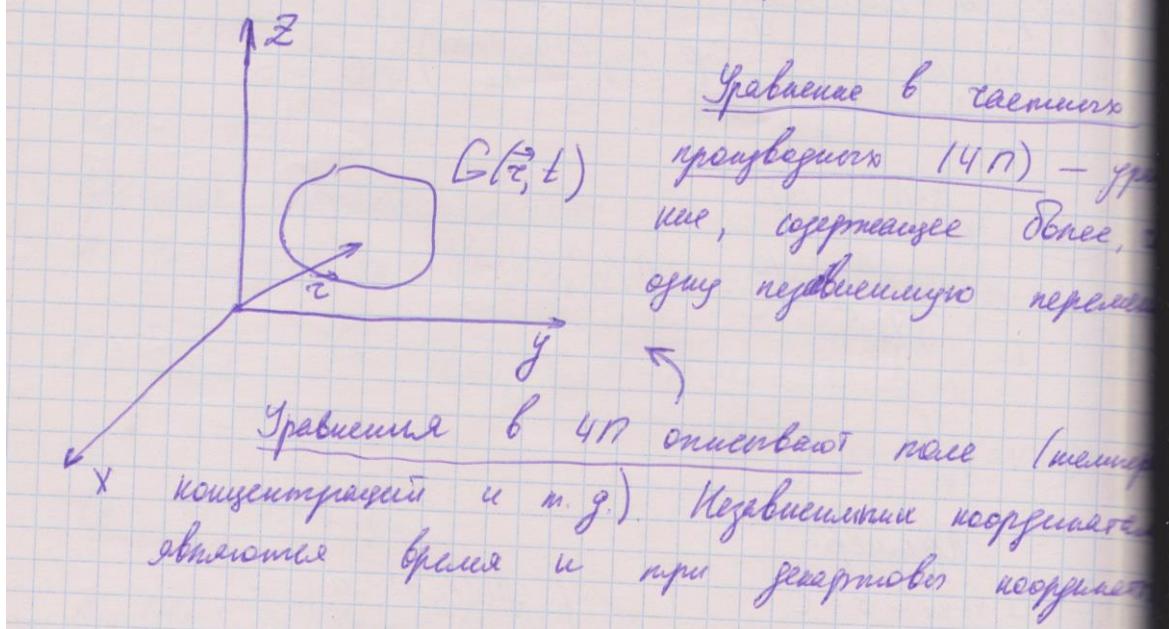
Условие остановки: $\max \left| \frac{\Delta y_n}{\Delta y_n^{(S)}} \right| < \epsilon$ $\max \left| \frac{\Delta y_n}{\Delta y_n} \right|$

(см.зачеркнутое)

Уравнения в частных производных. Области применения.

Классификация уравнений второго порядка. Общие понятия о методах решения.

27. Уравнение в частных производных. Области применения. Классификация уравнений второго порядка. Общие понятия о методах решения.



Классификация уравнений 2-го порядка:

Уравнение, нелинейное относительно старших производных:

$$a_{11} u_{xx} + 2a_{12} u_{xy} + a_{22} u_{yy} + f(x, y, u, u_x, u_y) = 0$$

x, y - независимые переменные

$u(x, y)$ - искомая функция

$$u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad u_{xy} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \quad u_{yy} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad u_y = \frac{\partial u}{\partial y}$$

1.) Если a_{11}, a_{12}, a_{22} зависят от x, y, u, u_x, u_y , то ур-е называется изометрическим.

2.) Если a_{11}, a_{12}, a_{22} не зависят от u, u_x, u_y , то уравнение называется линейным относительно старших производных.

3.) Уравнение линейное:

$$a_{11} u_{xx} + 2a_{12} u_{xy} + a_{22} u_{yy} + b u_x + c u_y + d u + f(x, y) = 0,$$

где $a_{ij} = a_{ij}(x, y)$, b, c, d зависят только от x, y , но само уравнение называется линейным.

4.) Все к-ты в (3) константы - уравнение называется линейным с коэффициентами конст.

Число линий малых уравнений (у однодим решен.),
образующих гиперболы:

$$\mathcal{D} = a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$$

1) $\mathcal{D} > 0$ - гиперболическое ур-е

2) $\mathcal{D} = 0$ - параболическое ур-е

3) $\mathcal{D} < 0$ - эллиптическое ур-е.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t) - \text{гипербол.}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + f(x, y) = 0 - \text{эллиптическое}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t) - \text{парabol.}$$

Метод решения:

- 1) Точное аналитическое (метод разложения первых, метод бегущих волн, метод функций Лапласа (~~функций Фурье~~))
- 2) Приближенное аналитическое (метод будьона-Гантера, метод малого параметра)
- 3) Численное / семиточечный (разностный), преобразование (метод конечных элементов).

Уравнения в частных производных. Постановка задач Коши, краевых и смешанных краевых задач. Привести примеры с краевыми условиями 1-го, 2-го и 3-го родов.

28. Уравнение в частных производных. Постановка задач Коши, краевые и смешанные краевые задач. Привести примеры с краевыми условиями 1-го, 2-го и 3-го родов.

Уравнение в 4н: см 27.

Коши и краев

Задачи нач. условия $\left[t=0 : u(\vec{r}, 0) = u_0(\vec{r}) \right]$ и
краевые (граничные условия) $\left[u(\vec{r}, t) \Big|_{\Gamma} = u_s(\vec{r}, t) \right]$
граница Γ

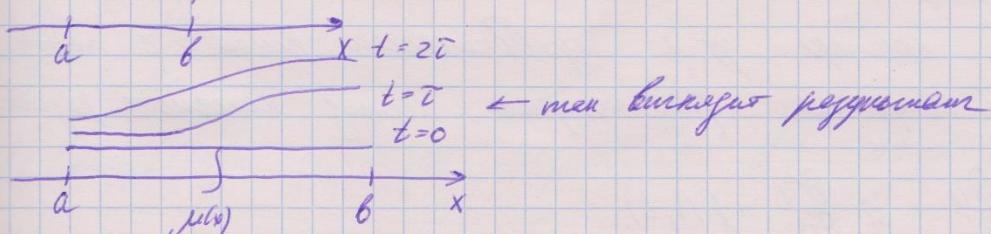
Получаем смешанную краевую задачу.

G - это бесконечное пространство (на бесконечной прямой, на бесконечной плоскости, пространстве).

Мы можем бросить спортивное мяч правое загоря (нем чистою чистой, есть правое чистое), или загоря Кама (есть начальное чистое, есть правильное чистое).

Пример конкретной начальной загоря:

1) Уравнение параболического типа в ограниченном варианте:



Два случая:

1. Начальная с компактным поддерживанием.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t)$$

$$\text{Нач. ус.: } u(x, 0) = \varphi(x)$$

$$\begin{aligned} \text{Гр. ус.: } u(a, t) &= \varphi_1(t) \\ u(b, t) &= \varphi_2(t) \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \text{I раз} \\ \text{или} \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} \text{Несимметрический} \\ \text{иерархия} \quad \left. \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \dots \end{array} \right|_{x=a} = \alpha(t) \\ \text{иерархии} \quad \left. \begin{array}{l} \dots \\ \frac{\partial u}{\partial x} \end{array} \right|_{x=b} = \beta(t) \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \text{II раз} \\ \text{или} \end{array} \right.$$

$$d \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=a} + \beta u(a, t) = \psi(t) \quad \left. \begin{array}{l} \text{III раз} \\ \dots \end{array} \right.$$

2. Квадратичный:

$$c(u) \frac{\partial u}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x} \left(a(u) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + f(u, x, t)$$

Уравнения в частных производных с постоянными коэффициентами.
Основные понятия метода конечных разностей. Понятие о явных и неявных схемах.

29. Уравнение в частных производных с постоянными коэффициентами. Основные понятия метода конечных разностей. Понятие о явных и неявных схемах.

Уравнение в ЧП с постоянными коэффициентами: см 27.

На примере ур-я гармонического типа с постоянными коэффициентами рассмотрим метод конечного раз-

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t)$$

$$И.~у.: u(x, 0) = \mu_1(x)$$

$$Г.~у.: u(0, t) = \mu_1(t)$$

$$u(b, t) = \mu_2(t)$$

В пр-ве будем считать единицей количество узлов (узлов), которые образуются в результате разбиения параллелепипеда t и x пр-в.

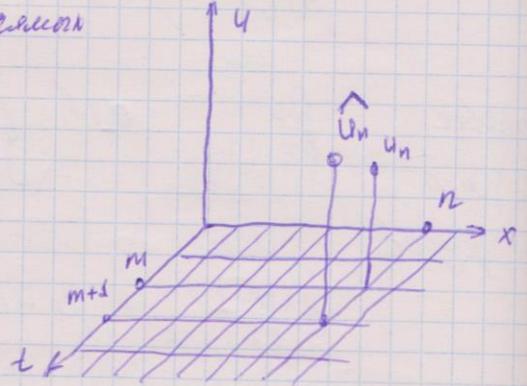
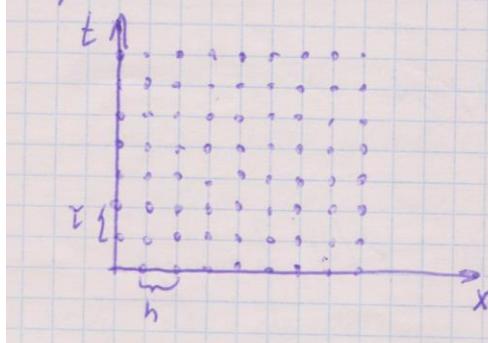


Схема:

$$Wh \tilde{u} = \left\{ x_n = a + nh, t_m = m\tau, n = \overline{0, N}, m = \overline{0, M} \right\}$$

$$u(x_n, t_m) = u_n^m$$

$$u(x_n, t_{m+1}) = u_n^{m+1}$$

Будем обозначать $u_n^m = \hat{u}_n$
 $u_n^{m+1} = \tilde{u}_n$

U - точное решение (не может вычислить)

y - разностное (приближенное) решение.

$$y_n^m = \hat{y}_n$$

$$y_n^{m+1} = \tilde{y}_n$$

Производящее значение разности $\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} = \frac{\tilde{y}_{n+1} - \hat{y}_n}{\tau}$

На схеме соблюдается условие, отвечающее в фиксированном моменту времени, обраузим алб.

Дискретное значение функции в ~~текущих~~ узлах обраузит симметрию функции. Разностное приближенное решение будет обладать $\hat{y}_n \approx \tilde{y}_n$.

Для восстановления преобразованной разности схемы необходимо на схеме выбрать шаги, т.е. конструировать узлы, на которых производящее значение не разбогатит аналог.

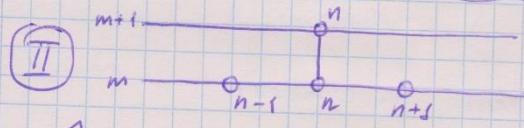
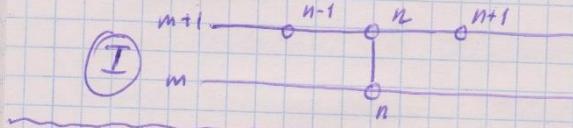
Разностная схема имеет вид:

$$\frac{\tilde{y}_{n+1} - \hat{y}_n}{\tau} = a \frac{\tilde{y}_{n+1} - 2\hat{y}_n + \hat{y}_{n-1}}{h} + f(x_n, t_{m+1})$$

$$t=0, \quad y_2 = \mu_1(x_n)$$

$$x=a, \quad \hat{y}_0 = \mu_1(t_{m+1})$$

$$x=b, \quad \hat{y}_N = \mu_2(t_{m+1})$$



$$\frac{\hat{y}_n - y_n}{\tau} = a \frac{\hat{y}_{n+1} - 2\hat{y}_n + \hat{y}_{n-1}}{h^2} + f(x_n, t_m)$$

$$t=0, \quad y_n = \mu_1(x_n)$$

$$x=a, \quad \hat{y}_0 = \mu_1(t_m)$$

$$x=b, \quad \hat{y}_N = \mu_2(t_m)$$



$$\frac{\hat{y}_n - y_n}{\tau} = a \tilde{\sigma} \frac{\hat{y}_{n+1} - 2\hat{y}_n + \hat{y}_{n-1}}{h^2} + a(\tilde{\sigma} - \sigma) \frac{\hat{y}_{n+s} - 2\hat{y}_n + \hat{y}_{n-1} + \psi}{h^2}$$

$\tilde{\sigma}$ - неявной параметр [например $\frac{1}{2}$]

Схема (I) неявная. Чтобы найти \hat{y} нужно найти решения системы диф. урн.

Схема (II) явная. Обычная формула

Схема (III) при $\tilde{\sigma}=3$ возвращается в (I), а при $\tilde{\sigma}=0$ в (II).

В явной схеме устойчивость зависит от шага.

В явной схеме устойчивость зависит от шага.

Некоторые особенности генерации.

В (III) случае при $\delta = \frac{1}{2}$ получаемое значение опоры не зависит, но несет генерацию. Но δ является ограничением

Реализация разностного схем:

(I):

$$A_n \hat{y}_{n-1} - B_n \hat{y}_n + C_n \hat{y}_{n+1} = -f_n$$

$$A_n = \frac{\Delta a}{h^2}$$

$$C_n = \frac{\Delta a}{h^2}$$

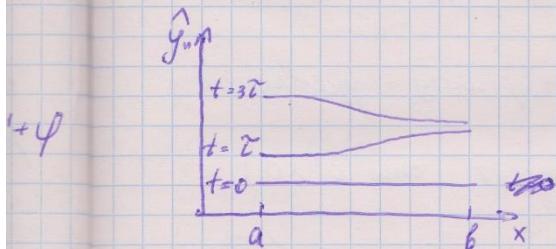
$$B_n = 1 + \frac{2\Delta a}{h^2} = A_n + C_n + 1$$

$$f_n = y_n + \tau f(x_n, t_{m+1})$$

$|B_n| > |A_n| + |C_n|$ - условие генерации краевое
 $1 \leq n \leq N-1$

t_{m+1} — неустойчиво

t_m — устойчиво (устойчиво, если $m=0$)



Случай (II):

$$\hat{y}_n = y_n + \frac{\Delta a}{h^2} (y_{n-1} - 2y_n + y_{n+1}) + \tau f(x_n, t_m) \leftarrow \text{используя}$$

Схема (II).

Схема (II) с неустойчивым неимущим

$$A_n \hat{y}_{n-1} - B_n \hat{y}_n + C_n \hat{y}_{n+1} = -f_n$$

$$A_n = \frac{\Gamma a \delta}{h^2}$$

$$E_n = \frac{\Gamma a \delta}{h^2}$$

$$\beta_n = 1 + \frac{2\gamma a \delta}{h^2}$$

$$f_n = y_n + \Gamma a (1 - \delta) \frac{y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}}{h^2} + \varphi \Delta$$

Квазилинейные уравнения в частных производных. Получение разностной схемы для одномерного параболического уравнения с краевыми условиями 3-го рода интегро-интерполяционным методом.

30. Квазилинейное уравнение в частных производных.

Получение разностной схемы для одномерного параболического уравнения с краевыми условиями 3-го рода интегро-интерполяционным методом.

Квазилинейное ур-е в частных производных - см 27.

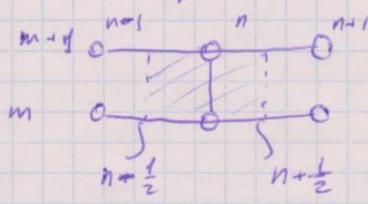
$$c(u) \frac{\partial u}{\partial t} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} (\lambda(u) \frac{\partial u}{\partial x})}_{\text{diff}} + f(u)$$

Если $a = \frac{\lambda}{c}$, то переходим к исходному уравнению.

(тогда a общий a^2 , следовательно, что $a^2 > 0$)

Для этого, чтобы применить ИИМ, нужно выбрать шаги.

Конструим структуру начального состояния. Рассмотрим методом.



$$\left\{ \begin{array}{l} F = -\lambda \frac{\partial u}{\partial x} - \text{бюджет расход} \quad (1) \\ e(u) \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial F}{\partial x} + f(u) \end{array} \right.$$

$$\int_{x_{n-\frac{1}{2}}}^{x_{n+\frac{1}{2}}} dx \int_{t_m}^{t_{m+1}} e(u) \frac{\partial u}{\partial t} dt = - \int_{t_m}^{t_{m+1}} dt \int_{x_{n-\frac{1}{2}}}^{x_{n+\frac{1}{2}}} \frac{\partial F}{\partial x} dx + \iint_{t_m}^{t_{m+1}} \int_{x_{n-\frac{1}{2}}}^{x_{n+\frac{1}{2}}} f(u, t) dx dt \quad (2)$$

$$\left(\int_V dv \operatorname{div} F dv - \int_{\Sigma} \vec{F} \cdot \vec{n} dE - \text{не неприменим} \right)$$

$$\int_{x_{n-\frac{1}{2}}}^{x_{n+\frac{1}{2}}} \cancel{\int_{\mathcal{P}} dx} \cdot \hat{C}(u-u) = \int_{t_m}^{t_{m+1}} (F_{n-\frac{1}{2}} - F_{n+\frac{1}{2}}) + \cancel{\iint_{t_m}^{t_{m+1}} \int_{x_{n-\frac{1}{2}}}^{x_{n+\frac{1}{2}}} f(u, t) dx dt} + f(x_n, t_{m+1}) \tau_h$$

без τ в момент времени t_{m+1}

без τ в момент времени t_{m+1}

Когда берут t_{m+1} , становится неизменной.

$$\hat{C}_n (y_n - y_{n-1}) \cdot h = (\hat{F}_{n-\frac{1}{2}} - \hat{F}_{n+\frac{1}{2}}) \tau + f(x_n, t_{m+1}) \tau h \quad (3)$$

применение метод

средних + метод

императ

Две разные методы для вычисления этого промежуточного

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} \frac{F}{\lambda} dx = - \int_{x_n}^{x_{n+1}} \frac{\partial V}{\partial x} dx - \text{а это}$$

$$F_{n+\frac{1}{2}} \cdot \int_{x_n}^{x_{n+1}} \frac{dx}{\lambda} = y_n - y_{n+1}$$

По аналогии краевое условие

$$F_{n+\frac{1}{2}} = \hat{F}_{n+\frac{1}{2}} = \frac{\lambda_n + \lambda_{n+1}}{2} \text{ или } \frac{2\lambda_n \lambda_{n+1}}{\lambda_{n+1} + \lambda_n}$$

Применяли к решаемой задаче

$$\hat{F}_{n+\frac{1}{2}} = \hat{F}_{n-\frac{1}{2}} \frac{\hat{y}_{n+\frac{1}{2}} - \hat{y}_{n+\frac{1}{2}}}{h}$$

$$\hat{F}_{n-\frac{1}{2}} = \hat{F}_{n-\frac{1}{2}} \frac{\hat{y}_{n-1} - \hat{y}_n}{h}$$

Подставляем в (3) и получаем ради соседей

$$\hat{A}_n \hat{y}_{n-1} - \hat{B}_n \hat{y}_n + \hat{C}_n \hat{y}_{n+1} = -\hat{F}_n$$

где $\hat{A}_n, \hat{B}_n, \hat{C}_n, \hat{F}_n$ какв. из (3).

Решение разностных схем для квазилинейных уравнений в частных производных- метод простых итераций и метод Ньютона.

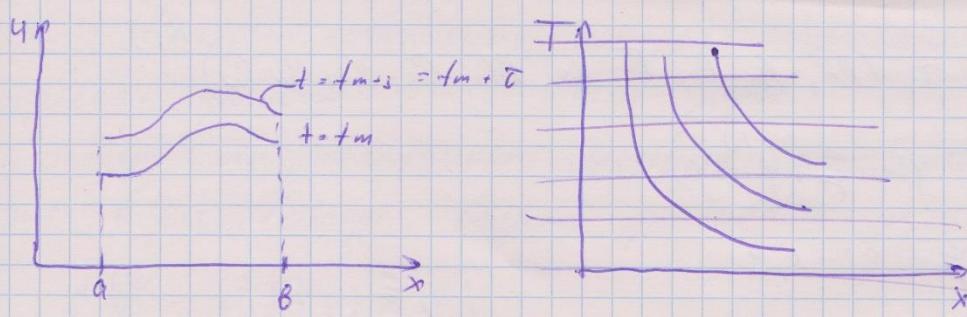
35. Решение разностных схем для квазилинейного уравнения в частных производных при заданных граничных условиях. Метод простых итераций и метод Ньютона.

Решение рх схем с. 27

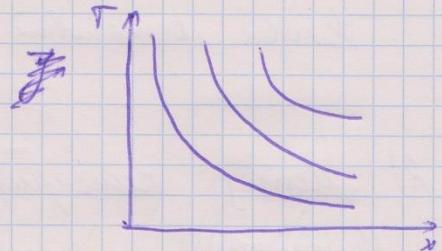
1) Метод краевого итераций:

Если функции сконцентрированы, метод может не сработать.

$$\begin{aligned} A_n^{(s-1)} \hat{y}_{n-1}^{(s)} - B_n^{(s-1)} \hat{y}_n^{(s)} + C_n^{(s-1)} \hat{y}_{n+1}^{(s)} &= -F_n^{(s-1)} \\ K_0^{(s-1)} \hat{y}_0^{(s)} + M_0^{(s-1)} \hat{y}_1^{(s)} &= P_0^{(s-1)} \\ K_N^{(s-1)} \hat{y}_N^{(s)} + M_N^{(s-1)} \hat{y}_{N+1}^{(s)} &= P_N^{(s-1)} \end{aligned}$$



Нестационарный процесс

$$C \frac{\partial T}{\partial t} = Q / \lambda \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) + f(t)$$


Общее решение. Квадратичное выражение с (S-1) степенями
на начальной интервале времени выражено в виде
Соединение между решениями происходит плавно
Больше на это можно, изменяя шаг \delta.

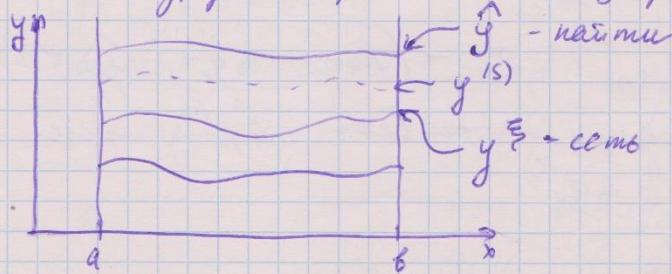
Если требуется решить — метод разложения.

Нестационарный процесс:

$$C \frac{\partial T}{\partial t} = Q / \lambda \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) + f(t)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + f(t)$$

Если требуется решить — метод разложения.



Бескрайні / $A_n, B_n, C_n, E_n, K_n, Mo, Po, Kr, Mn, Pb$ / $^{(S-1)}$

$$\hat{y}^{\frac{\epsilon}{2}} = y + \frac{\epsilon}{2} (y^{(S)} - y)$$

$$\frac{\epsilon}{2} = 0,2 - 0,9$$

Числове доказування: $\max \left| \frac{\hat{y}_n^{\frac{\epsilon}{2}} - y_n^{(S)}}{y_n^{(S)}} \right| \leq \epsilon$

2) Метод підсумуючих разомів (методу
Ньютона)

Конкретний підсумок зростання:

$$\hat{y}_{n-1}, \hat{y}_n, \hat{y}_{n+1}$$

$$\hat{A}_n = \hat{A}_n(\hat{y}_{n+1}, \hat{y}_n)$$

$$\hat{B}_n = \hat{B}_n(\hat{y}_{n-1}, \hat{y}_n, \hat{y}_{n+1})$$

$$\hat{C}_n = \hat{C}_n(\hat{y}_n, \hat{y}_{n+1})$$

$$\hat{F}_n = \hat{F}_n(\hat{y}_n)$$

Підсумуючий (1).

$$\left(\frac{\partial \hat{A}_n}{\partial \hat{y}_{n-1}} \hat{y}_{n-1} + \hat{A}_n - \frac{\partial \hat{B}_n}{\partial \hat{y}_n} \hat{y}_n \right) \left| \Delta \hat{y}_{n-1}^{(S)} + \frac{\partial \hat{A}_n}{\partial \hat{y}_n} \hat{y}_n + \frac{\partial \hat{B}_n}{\partial \hat{y}_n} \hat{y}_n - \hat{B}_n + \right. \\ \left. + \frac{\partial \hat{C}_n}{\partial \hat{y}_n} \hat{y}_n \right|_{(S-1)} + \left. \frac{\partial \hat{F}_n}{\partial \hat{y}_n} \hat{y}_n \right|_{(S-1)} \left| - \frac{\partial \hat{B}_n}{\partial \hat{y}_{n+1}} \hat{y}_{n+1} + \frac{\partial \hat{C}_n}{\partial \hat{y}_{n+1}} \hat{y}_{n+1} + \hat{C}_n \right|_{(S-1)}.$$

$$\circ \Delta \hat{y}_{n+1}^{(S)} = - \frac{\partial \hat{F}_n}{\partial \hat{y}_n} \Big|_{(S-1)} \Delta \hat{y}_n^{(S)} = - (\hat{A}_n \hat{y}_{n-1} + \hat{B}_n \hat{y}_n + \hat{C}_n \hat{y}_{n+1} + \hat{F}_n) \Big|_{(S-1)}$$

Методом прямого сподівання $\hat{A} \hat{y}_n^{(S)}$, тоді
тоді $\hat{y}_n^{(S)} = \hat{y}_n^{(S-1)} + \Delta \hat{y}_n^{(S)}$

Методы повышения порядка аппроксимации краевых условий 2-го и 3-го родов (интегро-интерполяционная процедура, разложение в ряд Тейлора, введение фиктивного узла).

32. Методы повышения порядка аппроксимации краевых условий 2-го и 3-го родов.

(интегро-интерполяционная процедура, разложение в ряд Тейлора, введение фиктивного узла).

$$C \frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t)$$

$$x=0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \mu(t)$$

1) УИЧ.

$$\int_t^{t+\tau} \int_0^{\frac{h}{2}} C \frac{\partial u}{\partial t} dt dx = - \int_t^{t+\tau} dt \int_0^{\frac{h}{2}} \frac{\partial F}{\partial x} dx + \int_t^{t+\tau} \int_0^{\frac{h}{2}} f(x, t) dx dt$$

$$F_{\frac{h}{2}} = R_{\frac{h}{2}} - \frac{y_1 - y_0}{h}$$

$$F_0 = -a \mu(t)$$

2) Разложение в ряд Тейлора:

$$u_i = u_0 + h \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{h^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dots$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \mu(t)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{c}{a} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{f}{a}$$

$$g_1 = \left. g_0 \right|_0 + h \mu(t_{m+1}) + \frac{h^2}{2} \left(\frac{c \partial u}{a \partial t} - \frac{f}{a} \right)$$

$$g_1 = \left. g_0 \right|_0 + h \mu(t_{m+1}) + \frac{h^2}{2} \left(\frac{c}{a} \frac{\hat{y}_0 - y_0}{2} - \frac{f}{a} \right)$$

3) Введение фиктивного узла: кр. условия

$$\text{---} \quad \begin{matrix} & \bullet & \\ -s & 0 & s \end{matrix} \quad (1) \quad \frac{\hat{g}_1 - \hat{g}_{-1}}{2h} = \mu(t_{m+1}) \Rightarrow \hat{g}_{-1} = \hat{g}_1 - 2h \mu(t_{m+1})$$

$$\begin{aligned} A \hat{y}_{-1} + B \hat{y}_0 + C \hat{y}_1 &= -F_0 - \text{чсл. } \hat{y}_{-1} \\ M_0 \hat{y}_0 + D_0 \hat{y}_1 &= F_0 \end{aligned} \quad \text{с иском. } (1)$$

Понятие невязки для разностных схем. Привести пример вычисления невязки для неявной схемы.

33. Понятие невязки для разностного схем. Привести пример вычисления невязки для неявной схемы.

Невязка

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t)$$

Разностная схема

$$\frac{y_n - y_{n-1}}{h} = a \frac{2y_n + y_{n+1} - f(x_n, t_n)}{h^2} \rightarrow A_n y = \varphi_n$$

$$\psi_n = \varphi_n - A_n y = (A_n - f) - (A_n y - \varphi_n)$$

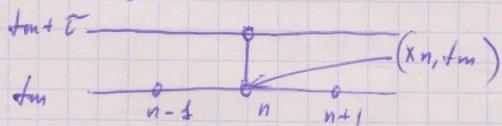
$$\psi_n = \varphi_n - A_n y = (A_n - f) - (A_n y - \varphi_n)$$

Невязка определяет в какой мере разностная схема ^{соответствует} ^{ошибке} дифр. уравнению.

Сходимость означает, что при $h \rightarrow 0$ ψ переходит в 0.

Два свойства разностных схем: аппроксимирующая и устойчивость.

Каждый невязку для $\frac{\partial u}{\partial t}$ и соотвтвие разностному уравнению. Невязка изменяется разнообразием в реде Годона.



$$\psi_n = \frac{\partial u}{\partial t} - a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - f(x, t) - \left[\frac{\widehat{u}_{n-1} - u_n}{h} - \frac{a}{h^2} (\widehat{u}_{n-1} - 2\widehat{u}_n + \widehat{u}_{n+1}) - f(x_n, t_n) \right]$$

$$U_n = \widehat{U}_n + \sum \frac{\partial^k u}{\partial t^k} + \frac{c^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Big|_{x_n, \theta_m, f_m}$$

$$f_m \leq \theta_m \leq f_{m+1}$$

$$U_{n+1} = \widehat{U}_n + h \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{h^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{h^3}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{h^4}{4!} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \Big|_{\xi_{n+1}, f_{m+1}}$$

$x_{n-1} \leq \xi_{n-1} \leq x_n$
 $x_n \leq \xi_{n+1} \leq x_{n+1}$

$\Psi_n = \left(\frac{\partial u}{\partial t} - a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x_n, t) \right) \Big|_{x_n, f_{m+1}} - \left[\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{c}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right]_{x_n, \theta_m} -$
 $- \frac{a}{h^2} \left(h^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{h^4}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \Big|_{x_n, \xi_{n+1}} - f(x_n, f_m) \right) =$
 $= + \frac{c}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Big|_{x_n, \theta_m} + \frac{a h^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = O(h^2)$

Т.е. $|\Psi_n| \rightarrow 0$, если $h \rightarrow 0$ и $c \rightarrow 0$ со спр. а
 (впринципе поп. аппроксимации) и h^2 (впринципе поп. аппрокс.)

пример квадратичного уравнения:
 $\sin \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda |u| \frac{\partial u}{\partial x} \right) + f(x, t)$
 $\widehat{c} \quad \frac{\widehat{y}_{n+1} - \widehat{y}_n}{h} = \widehat{\mathcal{D}}_{n-\frac{1}{2}} \frac{\widehat{y}_{n-1} - \widehat{y}_n}{h} - \widehat{\mathcal{D}}_{n+\frac{1}{2}} \frac{\widehat{y}_n - \widehat{y}_{n+1}}{h} + \varphi$

Если подобрать \widehat{c} и h так, что
 $\frac{ch^2}{2} = \frac{a h^2}{12}$, т.е. $\widehat{c} = \frac{h^2}{6a}$, то можно избежать
 диффузии решения порядка аппроксимации не попадет.
 как это можно?

$\left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial t} \left(a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) = a \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) = a \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) = a^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right]$

Свойство аппроксимации разностных схем для уравнений в частных производных.

34. Свойство аппроксимации разностной схем для уравнений в частных производных.

Аппроксимация:

$$\text{Уравнение: } Au = f \quad (1)$$

$$\text{Доп. ум.: } Bu = \beta$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t) \\ \text{доп. } \begin{cases} x=0, & \frac{\partial u}{\partial x} = \delta(u - \gamma) \\ x=l, & \frac{\partial u}{\partial x} = \eta(u - \xi) \\ t=0, & u(x, 0) = \mu(x) \end{cases} \end{array} \right| \text{пример}$$

Разностная схема:

$$A_n y = f_n \quad (2)$$

$$B_n y = \beta_n$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\hat{y}_n - y_n}{h} = \frac{\alpha}{h^2} (\hat{y}_{n-1} - 2\hat{y}_n + \hat{y}_{n+1}) + f_n \\ \frac{\hat{y}_0 - y_0}{h} = \alpha(\hat{y}_0 - \gamma) \\ \frac{\hat{y}_n - y_{n+1}}{h} = \eta(\hat{y}_n - \xi) \end{array} \right| \text{пример.}$$

$$\text{Небудка: } \psi_n = (A_n u - f_n) + (Au - f)$$

$$\rho_n = (Bu - \beta) + (Bu - \beta_n)$$

Разностная схема (2) аппроксимирует исходную доп. задачу (1), если $\|\psi_n\| \rightarrow 0$, $\|\rho_n\| \rightarrow 0$, при $h \rightarrow 0$, $\Delta \rightarrow 0$

Разностная схема (2) аппроксимирует исходную диф.
задачу (1) с погрешностью ρ , если

$$\left. \begin{array}{l} \|\psi_n\| = O(\tau^k + h^p) \\ \|\rho_n\| = O(\tau^k + h^p) \end{array} \right\} \text{при } h=0, \tau \rightarrow 0.$$

— — — (2) — — — (1) с к-м порядком по времени
и ρ по коэффициенту.

Это безусловная аппроксимация ($\tau \rightarrow 0, h \rightarrow 0$ независимо)

При условной аппроксимации

$$\|\psi_n\| = O(\tau^k + h^p + \frac{\tau^m}{h^2}), \quad \tau \rightarrow 0, h \rightarrow 0 \quad \|\rho_n\| = O(\tau^k + h^p + \frac{\tau^m}{h^2}),$$

Если, например, выбрать $\tau = h^{\frac{q}{m}}$,
то аппроксимации не будут одна и другая аппрокс.
нечетное D_g)

Если $ab \omega \rightarrow 0$, то разд. схема переходит в
неч. D_g . Исследуя получаем "близкость" двух
типов уравнений (неч. и разностн. схем)

Из аппроксимации с учетом гипотезы получим соотв.
ночеств.

Понятие устойчивости разностных схем по начальным данным и
правой части. На основе принципа максимума исследовать
устойчивость явной и неявной схем для уравнения параболического
типа.

35. Понятие устойчивости разностных схем по
начальным данным и правой части. На основе
принципа максимума исследовать устойчивость
явной и неявной схем уравнений передвижного
типа.

Устойчивость — это непрерывная зависимость
решения от входных данных. Это означает, что
малое изменение входных данных должно при-

бесконечн и монотону сходимость резултатом.

Устойчивость по начальным данным означает насколько чувствительна разностная схема к изменениям начальных данных.

Признак максимумов:

Запишем разностную схему в явном виде:

$$\sum_k a_k y_{n+k} = \sum_p b_p y_{n+p} + f_n$$

$$|a_0| = \max(|a_k|)$$

Схема устойчива по начальным данным, если

$$(1 + \alpha) |a_0| \geq \sum_{k \neq 0} |a_k| - \sum_p |b_p| \quad (1)$$

Схема устойчива по начальным данным, если

$$|a_0| - \sum_{k \neq 0} |a_k| \leq \frac{D}{\alpha} \quad 0 < D = \text{const.}, \text{ так как}$$

Приложим к нашей схеме № 34:

$$a_s = \frac{a}{h^2}, \quad a_0 = \frac{2a}{h^2} + \frac{1}{\alpha}, \quad |a_0| = \frac{D}{\alpha}$$

Аналогично работаем с краевыми условиями.

Конечно-разностный анализ показывает, что численное разностное решение устойчива по приводимым выше критериям для всех α .

На основе метода разделения переменных исследовать устойчивость четырехточечных явной и неявной разностных схем для уравнения параболического типа.

Задача методом разделения переменных исследовать устойчивость четырехточечных явной и неявной разностных схем для уравнения параболического типа

Проверим устойчивость по каскадной схеме
 $\hat{z}_n = y_n - u_n$ — погрешность

$$\frac{\partial \hat{y}}{\partial t} = a \frac{\partial^2 \hat{y}}{\partial x^2} + f(x, t)$$

Считаем, что разностная схема аппроксимирует задачу. Невязка стартит на 0. Приведя в вида f имеем начальную погрешность \hat{z}_0 .

$$\frac{\hat{z}_{n+1} - \hat{z}_n}{\tau} = \frac{a}{h^2} (\hat{z}_{n+1} - 2\hat{z}_n + \hat{z}_{n-1}) \text{ явная схема}$$

$$\frac{\hat{z}_n - \hat{z}_{n-1}}{\tau} = \frac{a}{h^2} (\hat{z}_{n-1} - 2\hat{z}_n + \hat{z}_{n+1}) \text{ явная схема}$$

Для явной схемы

$z(x_n, t_n) = z_n = p_q^m e^{i\pi q x_n / h}$, где q — номер гармоники, p — положение роста гармоники. $q = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

$z(x_n, t_{n-1}) = \hat{z}_n = p_q z_n$. Чтобы погрешность не увеличивалась, $|p_q| \leq 1$

Условие устойчивости:

$$|1 - c \tau| / |p_q| < 1, \text{ с } c \text{ общим} = 0$$

При этом неустойчивости

$$|p_q| : |p_q| > 1$$

Чтобы вычислить значение p_{q-1} непосредственно из формулы

$$\frac{Z_n(p_{q-1})}{Z} = \frac{\rho_q^m e^{i\pi q x_n/\ell} (p_{q-1})}{Z} =$$

$$= \frac{a}{h^2} \left(\rho_q^m e^{i\pi q(x_n-h)/\ell} - 2\rho_q^m e^{i\pi q x_n/\ell} + \rho_q^m e^{i\pi q(x_n+h)/\ell} \right)$$

$$(p_{q-1}) = \frac{2\pi a}{h^2} (e^{-i\pi q h/\ell} - 2 + e^{i\pi q h/\ell})$$

$$\left\{ e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi \right.$$

$$e^{-i\pi q h/\ell} + e^{i\pi q h/\ell} = \cos(\pi q h/\ell) - i \sin(\pi q h/\ell) + \cos(\pi q h/\ell) + i \sin(\pi q h/\ell) = 2 \cos(\pi q h/\ell)$$

$$(p_{q-1}) = \frac{2\pi a}{h^2} (\cos(\pi q h/\ell) - 1)$$

Лемма

$$p_{q-1} = \frac{2\pi a}{h^2} \left(-2 \sin^2 \frac{\pi q h}{2\ell} \right),$$

$$p_q = 1 - \frac{4\pi a}{h^2} \sin^2 \frac{\pi q h}{2\ell}$$

$$|p_{q-1}| \leq 1, \text{ т.е. } -1 \leq p_{q-1} \leq 1$$

$$\frac{p_{q-1} \leq 1}{1}$$

$$1 - \frac{4\pi a}{h^2} \sin^2 \frac{\pi q h}{2\ell} \leq 1, \text{ т.е. } \frac{4\pi a}{h^2} \sin^2 \frac{\pi q h}{2\ell} \geq 0$$

$$\rho_q \geq -s$$

$$1 - \frac{4\alpha}{h^2} \rho_m^2 \frac{\pi q b}{2L} \leq -s$$

~~$$\frac{4\alpha}{h^2} \leq 2$$~~

$$\frac{4\alpha}{h^2} \sin^2 \frac{\pi q b}{2L} \leq 2$$

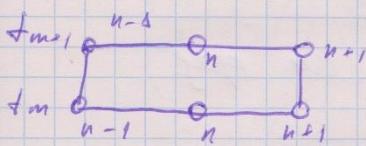
~~$$\frac{4\alpha}{h^2} \leq 2$$~~

$$s \leq \frac{h^2}{2\alpha} \quad (*).$$

Разностные схемы являются устойчивыми.
) решение уравнения корот ()

На основе метода разделения переменных исследовать устойчивость шести-точечной разностной схемы для уравнения параболического типа.

37. На основе метода разделения переменных исследовать устойчивость шеститочечной разностной схемы для решения параболического типа.



Шеститочечная схема:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t)$$

$$\frac{y_{n+2} - y_n}{\Delta t} = \frac{a}{h^2} [6(y_{n-3} - 2y_{n-1} + y_{n+1}) + (1-b)(y_{n-1} - 2y_n + y_{n+1})] + f_n$$

При $b=1$ и $b=0$ бирюз. 6 геногрехтного схему

Погрешность

$$z_n = \rho q e^{i\pi q x_n / L}$$

$$z_n = z_n \rho q$$

Усл. устойчивости

$$b \geq \frac{1}{2} - \frac{h^2}{4at^2}$$

Качество обр. устойчивости, тк $b=3 > \frac{1}{2}$..

При $b=0$ $\theta \geq \frac{1}{2} - \frac{h^2}{4at^2}$ (как. ар. конц.)

$$\frac{\tilde{P}_{pq} e^{i\pi q x_n/\ell} (P_{pq} - 1)}{\tau} = \frac{q}{h^2} \left[\tilde{G} \left(\tilde{P}_{pq} e^{i\pi q (x_n-h)/\ell} - \tilde{P}_{pq} e^{i\pi q (x_n+h)/\ell} + \tilde{P}_{pq} e^{i\pi q (x_n+b)/\ell} \right) + (1-\delta) \left(\tilde{P}_{pq} e^{i\pi q (x_n-h)/\ell} - \tilde{P}_{pq} e^{i\pi q x_n/\ell} + \tilde{P}_{pq} e^{i\pi q (x_n+b)/\ell} \right) \right]$$

$$\frac{e^{i\pi q x_n/\ell} (P_{pq} - 1)}{\tau} = \frac{q}{h^2} \left[\tilde{G} \left(e^{i\pi q (x_n-h)/\ell} - 2e^{i\pi q x_n/\ell} + e^{i\pi q (x_n+b)/\ell} \right) + (1-\delta) \left(e^{i\pi q (x_n-h)/\ell} - 2e^{i\pi q x_n/\ell} + e^{i\pi q (x_n+b)/\ell} \right) \right] \tau$$

$$P_{pq-1} = \frac{2\pi q}{h^2} \left[\tilde{G} \left(e^{-i\pi q h/\ell} - 2 + e^{i\pi q h/\ell} \right) + (1-\delta) \left(e^{-i\pi q h/\ell} - 2 + e^{i\pi q h/\ell} \right) \right]$$

$$= \frac{2\pi q}{h^2} \left[\left(\tilde{G} + (1-\delta) \right) \left(e^{-i\pi q h/\ell} - 2 + e^{i\pi q h/\ell} \right) \right]$$

$$e^{i\pi q h/\ell} + e^{-i\pi q h/\ell} = 2\cos(\pi q h/\ell) \quad (\text{cm. resp.})$$

$$\tilde{P}_{pq-1} = \frac{2\pi q}{h} \left[\left(\tilde{G} + \tilde{P}_{pq} - \tilde{G} \tilde{P}_{pq} \right) 2\cos(\pi q h/\ell) \right]$$

$$P_{pq-1} = \frac{2\pi q}{h^2} \left[\left(\tilde{G} \tilde{P}_{pq} - \tilde{G} + 1 \right) \cdot 2\left(\cos(\pi q h/\ell)\right)^2 - 1 \right]$$

$$\tilde{P}_{pq-1} = -\frac{4\pi q}{h^2} \left[\left(\tilde{G} / P_{pq-1} + 1 \right) \sin^2(\pi q h/\ell) \right]$$

~~\tilde{P}_{pq-1}~~ ~~$\frac{4\pi q}{h^2}$~~

$$(P_{pq-1}) \left(1 + \frac{4\pi q}{h^2} \tilde{G} \sin^2(\pi q h/\ell) \right) = -\frac{4\pi q}{h^2} \sin^2(\pi q h/\ell)$$

$$pq - s = -\frac{4\pi a}{h^2} \sin^2(\pi q h/e) / \left(1 + \frac{4\pi a}{h^2} \tilde{\delta} \sin^2(\pi q h/e)\right)$$

$$\begin{array}{l} pq \leq s \\ pq - s \leq 0 \end{array}$$

$$\frac{\frac{4\pi a}{h^2} \sin^2(\pi q h/e)}{\left(1 + \frac{4\pi a}{h^2} \tilde{\delta} \sin^2(\pi q h/e)\right)} \geq 0$$

$$\begin{array}{l} pq = -s \\ pq - s = -2 \end{array}$$

$$\frac{\frac{4\pi a}{h^2} \sin^2(\pi q h/e)}{1 + \frac{4\pi a}{h^2} \tilde{\delta} \sin^2(\pi q h/e)} \leq 2$$

$$\frac{4\pi a}{h^2} \sin^2(1) \leq 2 + \frac{8\pi a}{h^2} \tilde{\delta} \sin^2(1)$$

$$\tilde{\delta} = \left(\frac{4\pi a}{h^2} \sin^2(1) \right)^{-2} \left(\frac{8\pi a}{h^2} \sin^2(1) \right)$$

$$\tilde{\delta} = \frac{1}{2} - \frac{h^2}{4\pi a \sin^2(1)}$$

$$\tilde{\delta} = \frac{1}{2} - \frac{h^2}{4\pi a} \quad [\text{как и предположено}]$$

Уравнения в частных производных. Сходимость разностных схем.
Теорема о сходимости разностного решения к точному.

38. Уравнение 6 главы производных.

Сходимость разностных схем. Теорема о
сходимости разностной решения к точному.

Имеем точное и разностное решение

$$\text{Диф. ур.: } \begin{cases} Ay = f \\ B = \beta \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{array}{l} \text{Разн.} \\ \text{сх.:} \end{array} \begin{cases} A_n y = \varphi_n \\ B_n y = \beta_n \end{cases} \quad (2)$$

Разностное решение склоннее к точному, если

$$\|u - y\| \rightarrow 0 \text{ при } h \rightarrow 0, \tau \rightarrow 0$$

Разностное решение удачнее приближения точности
по отдельности h и по отдельности τ , если

$$\|u - y\| = O(\tau^q + h^p) \text{ при } h \rightarrow 0, \tau \rightarrow 0$$

Какие имеют нормы:

Чебышевская норма:

$$\|f\| = \max_{0 \leq x \leq b} |f| \rightarrow \|y\| = \max_{0 \leq n \leq N} |y_n|$$

Квадратичная норма:

$$\|f\|_{L_2} = \left[\int_a^b p(x) f^2(x) dx \right]^{\frac{1}{2}} \rightarrow \|y\| = \left[\sum_{n=0}^{N-1} p_n y_n^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

Основные меры по сокращению:

Из аппроксимации и уменьшения неизвестного коэффициента - первоначальной задачи.

Более разберём:

Если алгоритм дифференциального языка (1) поставлен корректно и разностная схема (2) аппроксимируется (1), то единственное решение близится к точному.

Корректность неизвестных вычислений свидетельствует о единственности решения со стабильностью.

Это алгоритм:

$$\begin{aligned} \text{Используя: } & \psi_n = \varphi_n - A_n u \\ & p_n = B_n - B_n u \end{aligned} \quad (3)$$

Получаем (3):

$$A_n u = \varphi_n - \psi_n \quad (4)$$

$$B_n u = \beta_n - p_n$$

Сравнив (2) и (4)

Из устойчивости разностной схемы:

при $\varphi_n \rightarrow 0$, $p_n \rightarrow 0$: $u \rightarrow y$

$$\|y - u\| \rightarrow 0$$

Из аппроксимации разностной схемы:

при $h \rightarrow 0$, $T \rightarrow 0$; $\psi_n \rightarrow 0$, $p_n \rightarrow 0$

Сформулируем это в терминах ε - δ :

А $\varepsilon > 0$, $\exists \delta(\varepsilon)$:

при $\|\psi_n\| < \delta(\varepsilon)$, $\|p_n\| \leq \delta(\varepsilon)$

$$\text{тогда } \|u - y\| < \varepsilon$$

Уз аппроксимация:

$\forall \delta(\varepsilon) \exists h_0$: при $h < h_0$

будет $\|\psi_n\| \leq \delta$, $\|p_n\| \leq \delta$

Для каждого коэффициента ^{дифференциальных} залог нереди
точности разностей состоит из меньше нереди
еи аппроксимации.

Метод продольно-поперечной прогонки для решения многомерных уравнений в частных производных.

39. Метод продольно-поперечной прогонки для
решения многомерных уравнений в частных производных.

Многомерное уравнение в частных производных

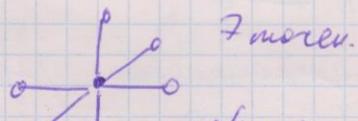
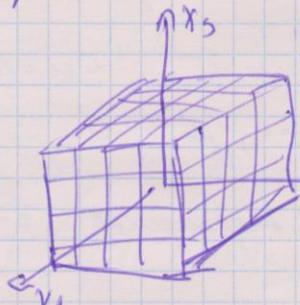
$$\frac{\partial u}{\partial t} = a / \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} \right) + f(x_1, x_2, x_3, t)$$

или

$$\frac{\partial u}{\partial t} = A_1 u + A_2 u + A_3 u + f(x_1, x_2, x_3, t)$$

$$A_i u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$$

В претрансформах

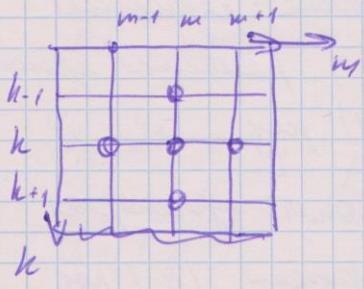


$$y(x_{1k}, x_{2k}, x_{3k}) = y_{k \text{ moren}}$$

Семьи на шубе

Строим куб и производим аппроксимацию на 7 точках.

На основе (документа автора)



Задействовано 5 ~~шести~~ узлов
Приравняем систему с 5-ти
различными матрицами (решетка
нагрузки в ноду).

Способ решения:

1) Прямолинейный элемент

Пришлем, что 2 независимые координаты

$$\frac{\partial u}{\partial t} = A_1 + A_2 - f(x_1, x_2, t)$$

Куплено 5-ти узловой матрицы приведем к системе,
рассматривая прямолинейность.

Убеждаемся приведенном способе в брачии

$$\bar{t}_m = t_m + 0,5 \tau$$

$$\frac{\bar{y}_{k,m} - y_{k,m}}{0,5 \tau} = \bar{A}_1 h + \bar{A}_2 h - f(x_1, x_2, \bar{t})$$

$$\frac{\hat{y}_{k,m} - \bar{y}_{k,m}}{0,5 \tau} = \bar{A}_1 h + \hat{A}_2 h - f(x_1, x_2, \bar{t})$$

применение для операторов:

Заменить A на \bar{A} (метод)

$$\frac{\overline{y_{k,m}} - \overline{y_{k-1,m}}}{0,5\tau} = \bar{A}_1 + \bar{A}_2 + f(x_1, x_2, t) \quad \begin{array}{l} \text{обратное разностное} \\ \text{сравнение, начинаясь с} \\ \text{уравнения } (k-1) \text{ шага} \end{array}$$

$$\frac{\overline{y_{k,m}} - \overline{y_{k-1,m}}}{0,5\tau} = \bar{A}_1 + \bar{A}_2 + f(x_1, x_2, t) \quad \begin{array}{l} \text{один шаг} \\ \text{последнее} \\ \text{уравнение } (M-1) \text{ шага} \end{array}$$

$$\bar{A}_1 = a \frac{\overline{y_{k-1,m}} - 2\overline{y_{k,m}} + \overline{y_{k+1,m}}}{h_1^2}$$

$$\bar{A}_1 = a \frac{\overline{y_{k-1,m}} - 2\overline{y_{k,m}} + \overline{y_{k+1,m}}}{h_1^2}$$

$$\bar{A}_2 = a \frac{\overline{y_{k,m-1}} - 2\overline{y_{k,m}} + \overline{y_{k,m+1}}}{h_2^2}$$

$$\bar{A}_2 = a \frac{\overline{y_{k,m-1}} - 2\overline{y_{k,m}} + \overline{y_{k,m+1}}}{h_2^2}$$

Получаем $(k-1)$ уравнение (K число решений по x_1 :

$x_1, k, k=1, K$) по x_1 и $M-1$ (M - количество x_2 : $x_{2m}, m=1, M$) по x_2

Или же $(k-1) (M-1)$ уравнений

В трехмерной задаче метод применения аналогичен, но к трехмерному случаю не имеет аналога т.к. аналогичные методы не существуют.

Локально-одномерный метод для решения многомерных уравнений в частных производных.

Ч.о. локально-одномерный метод для решения многомерных уравнений в частных производных.

$$\frac{\hat{y}_d - y_d}{\frac{\tau}{P}} = \rho A_d + f \quad \rho - \text{параметр}$$

$$\frac{\hat{y}_d - y_d}{\frac{\tau}{P}} = A_2 + \frac{1}{P} f(x_1, t_1, x_3, t) \quad \text{альфа}$$

$$d = i, p$$

$$y_d = \hat{d}^{-1}, \quad g_i = y_{k, m, n} \rightarrow \text{оператор}$$

Одновременно можно 1 оператор (решить его в зеркале)

Методом проекции решается зеркало с 1 оператором, поменяв со 2-ой. (При этом же y_d берется регуляризация первым проекции, поменяв с 3-м 1 y_d -регуляризацией вторым проекции) и т.д. Применяется для каждого шага квадратичного.

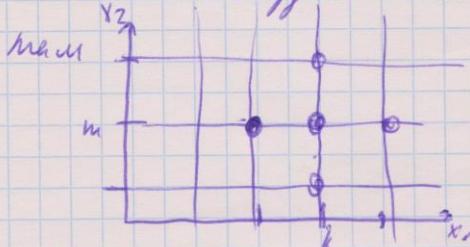
Вероятностный метод для решения многомерных уравнений в частных производных.

Ч.1. Вероятностный метод решения многомерных уравнений в частных производных.

Двумерная задача (демонстрировалась)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right)$$

Схема: в узлах находят гамильтонианы



Процесс: за время τ все газы из ячейки
переходят в соседние ячейки. Понадобится новое
распределение функции.

$$\hat{y}_{n,m} = \frac{1}{4} (y_{k-1,m} + y_{k+1,m} + y_{k,m-1} + y_{k,m+1})$$

$$\hat{y}_{n,m} - y_{nm} = \frac{1}{4} (y_{k-1,m} - 2y_{k,m} + y_{k+1,m}) + \frac{1}{4} (y_{k,m-1} - 2y_{k,m} + y_{k,m+1})$$

Получим 2 разностных оператора:

$$T_{K,m} = \frac{\sum_j T_{j,p} \cdot K}{\Delta t m}$$