$\frac{4a\tau(1-\sigma)}{h^2} \le 2$, или $\sigma \ge \frac{1}{2} - \frac{h^2}{4a\tau}$ — условие устойчивости $\sigma \in [0,1]$

Рассмотрим случай $\sigma = 0$ — явная схема $\Rightarrow \frac{h^2}{4a\tau} \le \frac{1}{2}$ (или это условие получили)

$\sigma = 1$ — неявная схема $\Rightarrow \frac{h^2}{4a\tau} \ge -\frac{1}{2}$ — всегда выполняется

$\sigma = \frac{1}{2}$ — устойчивость обеспечена

Т.о. $O(\tau^2 + h^2)$ и при этом устойчивость обеспечена

Если коэф ур-я (в данном случае a) зависят от координаты x или t нелинейны, то получаем след. обобщение: для каждого значения n считаем, что коэф не зависят от координаты, смотрят на гармоники и они для каждого θ интерпретируются. Если для каждого θ — устойчива. Этот подход называется приём „замороженных" коэффициентов.

Сходимость.

Разностное решение сходится к точному если в некоторой норме $\|y - u\| \to 0$, при $h \to 0, \tau \to 0$.

Разностные решения имеют порядок точности p по h и q по τ

$\|y - u\| = O(h^p + \tau^q)$, $h \to 0, \tau \to 0$

Теорема:

Из аппроксимации и устойчивости следует сходимость.

Диф ур частных производ — разностная схема

$A_h u = f$ (1) — $A_h y = \varphi_h$ (2)

$B_h u = \mu$ — $B_h y = \beta_h$

Теорема о сходимости (реш):

Пусть решение диф ур задачи (1) существует и оно единственно, устойчиво по начальному.

Если разностная схема (2) корректна (решение существует (реш. ед) единственно и устойчиво по входным данным) и аппроксимирует задачу (1) тогда разностное решение сходится к точному.

Решение это:

$\chi_h = \varphi_h - A_h u$ или $A_h u = \varphi_h - \chi_h$

$\rho_h = \beta_h - B_h u$ $B_h u = \beta_h - \rho_h$ (3)