Аппроксимация

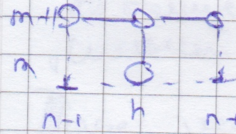
Разностная схема (1) аппроксимирует исходную дифф. задачу, если $\|\psi\| \to 0$, $\|\rho\| \to 0$ $\Big\}$ при $h \to 0$ и $\tau \to 0$

— " — с p-м и q-м порядками по своим переменным, если $\|\psi\| = O(h^p + \tau^q)$, $\|\rho\| = O(h^p + \tau^q)$ при $h \to 0$, $\tau \to 0$

Это не означает, что решения схемы обладают свойством аппроксимации

Пример.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t)$$



$$\frac{\hat{y}_n - y_n}{\tau} = a\,\frac{\hat{y}_{n-1} - 2\hat{y}_n + \hat{y}_{n+1}}{h^2} + \varphi(x_n, t_{m+1})$$

$$\psi = \left.\left(\frac{\partial u}{\partial t} - a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - f(x_n, t_{m+1})\right)\right|_{n,m+1} - \frac{\hat{u}_n - u_n}{\tau} + a\,\frac{\hat{u}_{n-1} - 2\hat{u}_n + \hat{u}_{n+1}}{h^2} +$$

$$+ \varphi(x_n, t_{m+1})$$

$$\hat{u}_n = u_n + \tau u'_t + \frac{\tau^2}{2}u''_t(\theta), \quad \theta \in [t, t+\tau]$$

$$\hat{u}_{n\pm1} = u_n \pm h u'_n + \frac{h^2}{2}u''_n \pm \frac{h^3}{6}u'''_n + \frac{h^4}{4!}u^{IV}_n(\xi_{n\pm1})$$

Вот это всё надо подставить в уравнение.

Итак:

$$\psi = \left.\left(\cancel{\frac{\partial u}{\partial t}} - \cancel{a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}} - f(x_n, t_{m+1})\right)\right|_{x_n, t_{m+1}} - \cancel{u'_t} - \frac{\tau}{2}u_{tt}(\theta) + \cancel{a u''_n} -$$

$$\frac{h^2}{4}u^{IV}_n(\xi) = \frac{h^2}{4}u^{IV}(\xi) - \frac{\tau}{2}u_{tt}(\theta) = O(h^2 + \tau)$$

(какая-то ξ)

$$\|f\|_C = \max_{a \le x \le b}|f| \to \max_{0 \le n \le N}|y_n|$$

$$\|f\|_{L_2} = \left[\int_a^b \rho f^2(x)\,dx\right]^{1/2} \to \left[\sum_{n=0}^{N} \rho_n y_n^2 h\right]^{1/2}$$