

# Lebensversicherungsmathematik

Michael Koller  
Feldstrasse 14  
CH-8704 Herrliberg  
[mikoller@math.ethz.ch](mailto:mikoller@math.ethz.ch)

**Änderungsnachweis:**

<b>Version</b>	<b>Datum</b>	<b>Verfasser</b>	<b>Änderungen</b>
0.10	Sommer 1997	M. Koller	Handschriftliches Manuskript
0.30	Sommer 1999	M. Koller / V. Gelpke	Erste TeX-Version
0.40	Sommer 2002	M. Koller	Teile hinzugefügt: Inv, Kosten, GV
0.50	Winter 2002	A. Wyler	Teilrevision
0.60	Herbst 2003	G. Baumgartner	Revision
0.70	Sommer 2006	M. Koller	Neue Struktur (FV nun integriert)
0.80	Frühjahr 2007	M. Koller	Risk und Capital integriert
0.90	Sommer 2012	M. Koller	Appendix Euler / iActuary integriert
0.91	Sommer 2013	M. Koller	Fehler korrigiert
0.92	Sommer 2014	M. Koller	Fehler korrigiert

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Finanzmathematik</b>	<b>1</b>
1.1	Barwert eines Kapitals . . . . .	1
1.2	Barwert einer Rente . . . . .	6
1.3	Anleihen . . . . .	11
1.4	Interner Zins . . . . .	12
<b>2</b>	<b>Zeitwert des Geldes</b>	<b>13</b>
2.1	Einleitung . . . . .	13
2.2	Preisstruktur der Zero-Coupon Bonds (ZCB) . . . . .	13
2.3	Struktur der Zinssätze . . . . .	14
<b>3</b>	<b>Die zukünftige Lebensdauer einer <math>x</math>-jährigen Person</b>	<b>21</b>
3.1	Das Modell . . . . .	21
3.2	Sterbetafeln . . . . .	23
3.3	Die Anzahl vollständig gelebter Jahre . . . . .	27
3.4	Sterblichkeit für den Teil eines Jahres . . . . .	27
<b>4</b>	<b>Mehrdimensionale Bewertung</b>	<b>29</b>
4.1	Einleitung . . . . .	29
4.2	Modell . . . . .	29
4.3	Bewertungsprozess . . . . .	31
4.4	Beispiele . . . . .	32
<b>5</b>	<b>Arten von Lebensversicherungen</b>	<b>45</b>
5.1	Kapitalversicherungen . . . . .	45
5.2	Rentenversicherungen . . . . .	54
<b>6</b>	<b>Nettoprämien</b>	<b>63</b>
6.1	Einführung . . . . .	63
6.2	Ein Beispiel . . . . .	63

6.3	Elementare Formen der Versicherung	65
6.4	Unterjährige Prämienzahlung	66
6.5	Allgemeine Lebensversicherung	67
6.6	Lebensversicherungen mit Rückgewähr	67
<b>7</b>	<b>Nettodeckungskapital</b>	<b>69</b>
7.1	Einleitung	69
7.2	Zwei Beispiele	69
7.3	Rekursive Betrachtungen	70
7.4	Das Deckungskapital einer lebenslänglichen Todesfallversicherung	71
7.5	Das Deckungskapital für Teile eines Jahres	72
7.6	Zuordnung des Verlustes zu Policenjahren	73
7.7	Mutationen von Versicherungen	74
7.8	Technischer Gewinn	74
7.9	Stetiges Modell	75
<b>8</b>	<b>Mehrfache Ausscheideordnung</b>	<b>77</b>
8.1	Das Modell	77
8.2	Ausscheidediten	78
8.3	Vollständig erlebte Jahre	78
8.4	Allgemeine Typen von Kapitalversicherungen	79
8.5	Deckungskapital und Rekursion	81
<b>9</b>	<b>Versicherungen auf mehrere Leben</b>	<b>83</b>
9.1	Der Zustand der verbundenen Leben	83
9.2	Vereinfachungen	84
9.3	Zustand des letzten Lebens	84
9.4	Praxis	85
9.5	Barwerte für typische Versicherungen auf zwei Leben	86
<b>10</b>	<b>Markovketten</b>	<b>93</b>
10.1	Traditionelle Tarifierung	93
10.2	Lebensversicherung als zufällige Geldflüsse	94
10.3	Deckungskapital, Rekursion und Prämien	98
10.4	Konkrete Probleme	100
<b>11</b>	<b>Invaliditätsversicherung</b>	<b>107</b>
11.1	Einleitung	107
11.2	Begriff der Invalidität	107

11.3	Andere Unterscheidungen	108
11.4	Einflussfaktoren auf die Invalidität	109
11.5	Gefahren einer Invaliditätsversicherung	111
11.6	Klassische Invaliditätsmodelle	114
11.7	Zusammenfassung	116
11.8	Barwerte für Versicherungen	119
11.9	Berechnung der Einlagesätze für die Invalidenrente nach KT 1995	121
11.10	Berechnung der Einlagesätze für die Invalidenrente	124
<b>12</b>	<b>Kostenzuschläge</b>	<b>127</b>
12.1	Einführung	127
12.2	Das $\alpha, \beta, \gamma$ -System	128
12.3	Beispiele	130
12.4	Weitere Kommentare zur Bruttoprämie	132
<b>13</b>	<b>Bilanz und Erfolgsrechnung einer Versicherungsgesellschaft</b>	<b>135</b>
13.1	Einführung und Bilanzierungsmethoden	135
13.2	Bilanz	135
13.3	Erfolgsrechnung	135
13.4	Technische Analyse	135
<b>14</b>	<b>Gesamtschadenverteilung</b>	<b>139</b>
14.1	Einleitung	139
14.2	Normalverteilungsapproximation	141
14.3	Exakte Berechnung des totalen Schadens	142
14.4	Approximation der Gesamtschadenverteilung durch die zusammengesetzte Poissonverteilung	144
14.5	Rekursive Berechnung der zusammengesetzten Poissonverteilung	146
14.6	Rückversicherung	149
14.7	Numerisches Beispiel	151
<b>15</b>	<b>Zur Berechnung des Embedded Value</b>	<b>155</b>
15.1	Einleitung	155
15.2	Einflussgrößen auf den PVFP und deren Bestimmung	158
15.3	Bestimmung des Adjusted Net Asset Value	167
15.4	Offenlegung	168
15.5	Beispiel	168
<b>16</b>	<b>Return and Capital</b>	<b>173</b>
16.1	Introduction	173

16.2	Role of valuation . . . . .	173
16.3	General Considerations . . . . .	176
16.4	Formulae . . . . .	178
16.5	Examples . . . . .	179
<b>A</b>	<b>Schweizer Volkssterbetafeln</b>	<b>189</b>
A.1	Männer . . . . .	190
A.2	Frauen . . . . .	192
<b>B</b>	<b>Sterbetafel Einzelkapitalversicherung</b>	<b>195</b>
B.1	Männer: EKM 1995 . . . . .	196
B.2	Frauen: EKF 1995 . . . . .	197
<b>C</b>	<b>Performance der Schweizer Aktien in den letzten 70 Jahren</b>	<b>199</b>
<b>D</b>	<b>Zinsstrukturen</b>	<b>201</b>
<b>E</b>	<b>Sterbetafel EKM95</b>	<b>203</b>
<b>F</b>	<b>Bewertungsprinzipien für Finanzinstrumente</b>	<b>207</b>
F.1	Einleitung . . . . .	207
F.2	Prinzip 1 . . . . .	209
F.3	Prinzip 2 . . . . .	209
F.4	Prinzip 3 . . . . .	211
F.5	Bemerkungen . . . . .	211
<b>G</b>	<b>Technischer Zinssatz</b>	<b>213</b>
<b>H</b>	<b>Euler Text über Lebensversicherung</b>	<b>217</b>

# Abbildungsverzeichnis

1.1	Beispiel mit Zuzahlungen. . . . .	2
1.2	Beispiel mit Zuzahlungen. . . . .	4
1.3	Der konforme Zins $i^{[m]}$ in Abhängigkeit der Anzahl unterjährigen Verzinsungen bei einem Jahreszins von $i = 4\%$ . . . . .	5
1.4	Der effektive Zins in Abhängigkeit der Anzahl unterjährigen Verzinsungen bei einem nominellen Zinssatz von $i^{(m)} = 4\%$ . . . . .	5
1.5	Linear steigende Zeitrente . . . . .	8
1.6	Schematische Darstellung der Endwerte: Einerseits Zahlungen einer vorschüssigen $n - 1$ temporären Rente, andererseits Zahlungen einer nachschüssigen $n$ temporären Rente . . . . .	9
2.1	ZCB-Preise $P(2002, 2002+T)$ . . . . .	18
2.2	Zinsstrukturen. . . . .	18
3.1	Die Verteilung der Lebensdauer und die Sterbedichte ist dargestellt . . . . .	22
3.2	Moivre . . . . .	24
3.3	Dormoy . . . . .	24
3.4	Gomperts . . . . .	25
3.5	Makeham . . . . .	25
3.6	Perks . . . . .	25
3.7	Selektionstafel . . . . .	27
4.1	DK und $V_{t 50}$ einer Police (gemischte Versicherung). . . . .	44
5.1	Einmaleinlage für eine lebenslängliche Todesfallversicherung. . . . .	47
5.2	Einmaleinlage für temporäre Todesfallversicherung. . . . .	48
5.3	Allgemeine Todesfallversicherung. . . . .	52
5.4	Linear steigende Todesfallversicherung. . . . .	52
5.5	Linear fallende temporäre Todesfallversicherung für die Dauer $n=8$ . . . . .	53
5.6	Einmaleinlage für eine Rentenversicherung. . . . .	55
5.7	Linear wachsende sofort beginnende Altersrenten. . . . .	59

7.1	Deckungskapital für eine gemischte Versicherung. . . . .	70
7.2	Deckungskapital für eine Erlebensfallversicherung. . . . .	70
7.3	Spar- und Risikoprämien: Gemischte Versicherung. . . . .	72
7.4	Spar- und Risikoprämien: Erlebensfallversicherung. . . . .	72
8.1	Einlagesätze für einjährige Todesfallversicherungen mit Ausscheideursachen Krankheit und Unfall. . . . .	79
8.2	Ausscheidewahrscheinlichkeiten aus dem Bestand der Aktiven für VZ 2000. . . . .	80
9.1	Einmaleinlage für Hinterbliebenenrenten. . . . .	88
9.2	Wahrscheinlichkeit $h_u$ beim Tod im Alter zwischen $u$ und $u + 1$ verheiratet zu sein. Modell aus KT 95 ( $h_x$ ). . . . .	90
9.3	Wahrscheinlichkeit $h_u$ beim Tod im Alter zwischen $u$ und $u + 1$ verheiratet zu sein. Modell aus KT 95 ( $h_y$ ). . . . .	90
9.4	Durchschnittsalter $y_u$ des überlebenden Ehegatten beim Tod der versicherten Person im Alter zwischen $u$ und $u + 1$ (Frau: $y_x$ ). . . . .	90
9.5	Durchschnittsalter $x_u$ des überlebenden Ehegatten beim Tod der versicherten Person im Alter zwischen $u$ und $u + 1$ (Mann: $x_y$ ). . . . .	90
10.1	Übergangswahrscheinlichkeiten . . . . .	94
10.2	Übergangswahrscheinlichkeiten und Verpflichtungsfunktionen . . . . .	95
10.3	Interpretation der Chapman-Kolmogorov-Gleichungen . . . . .	96
10.4	Markovmodell für eine sofort beginnende Altersrente . . . . .	97
10.5	Leistungsverlauf einer gemischten Versicherung . . . . .	97
10.6	Markovmodell für mehrere Ausscheideursachen . . . . .	98
10.7	Markovmodell für Witwenrente . . . . .	98
10.8	Steigende Altersrente. . . . .	99
10.9	Beispiel bei unterjähriger Rentenzahlung . . . . .	101
10.10	Zustandsraum bei garantierten Renten . . . . .	102
10.11	Garantierte, temporäre Altersrente . . . . .	103
10.12	Rückgewähr bei regulärer Prämienzahlung. . . . .	105
11.1	Zustände und Übertrittsmöglichkeiten . . . . .	108
11.2	Invalidierungswahrscheinlichkeiten nach Arbeitstyp . . . . .	110
11.3	Bedeutung des Replacement Ratio für $i_x$ . . . . .	112
11.4	Wirtschaftliche Lage in Deutschland im Vergleich mit $i_x$ . . . . .	113
11.5	Leistungsverlauf bei Invaliditätskapitalien . . . . .	114
11.6	Standardmodell für Invalidität . . . . .	115
11.7	Invaliditätsmodell der Tafeln EVK und VZ . . . . .	115
11.8	Invaliditätsmodell der Schweizer Privatversicherer (zB KT 1995) . . . . .	116
11.9	Invaliditätsmodell nach KT 1995. . . . .	122



11.10	Prämie für eine Invalidenrente nach KT 1995.	122
11.11	Barwert für eine laufende Invalidenrente nach KT 1995.	123
11.12	Markovmodell für Invaliditätsversicherungen	125
11.13	Barwert einer sofort beginnenden Invalidenrente.	126
12.1	Kostenmodelle im Vergleich	128
14.1	Einzel Schadenverteilung.	152
14.2	Gesamt Schadenverteilung.	153
14.3	Kumulative Schadenverteilung.	153
14.4	Stop Loss Prämie.	154
15.1	Profit/Loss Profil einer Gemischten Versicherung.	170
16.1	Replicating Portfolio	180
16.2	Required capital over time	181
16.3	Development of Mortality over Time	183
16.4	Comparison of different years	184
16.5	Excess Mortality 1918	185
16.6	Average Mortality for Sweden 1751 - 2005	186
16.7	Mortality by Ages for Sweden 1751 - 2005	187
C.1	Performance des SMI 1925 - 2000	199
C.2	Verlauf der Börsenindices	200
D.1	DK und $V_{t 35}$ einer Police (gemischte Versicherung).	202
D.2	DK und $V_{t 35}$ einer Police (gemischte Versicherung).	202
G.1	Schematische Darstellungsweise der Vorgehensweise in der Lebensversicherungsmathematik.	213
G.2	Barwerte der vorschüssigen temporären Zeitrente	214
G.3	Anlagerendite und technische Zinsfüsse in der Kollektivversicherung.	215



# Kapitel 1

## Finanzmathematik

### 1.1 Barwert eines Kapitals

#### 1.1.1 Definitionen und Bezeichnungen

**Darlehen und Zins:** Die zur Verfügungstellung einer Summe. z.B. Obligation, Hypothek, Schuld, ... Die Leihgebühr für die Dienstleistung und das Risiko ist der Zins.

**Zinssatz  $i$ :** Der Zins für ein Kapital 1 während einer Einheitsperiode. Er wird am Ende der Periode ausbezahlt und deshalb **nachschüssig** genannt.

**Barwert:** Der Wert des Kapitals in einem bestimmten Moment.

**Anfangs- und Endkapital,  $K_0, K_n$ :** Barwert zu Beginn und am Ende einer Periode mit  $n$  Zeiteinheiten.

**Einfache Verzinsung:** Man rechnet mit einem konstanten Zinsbetrag, also

$$K_n = K_0(1 + ni). \quad (1.1)$$

Für eine kurze Zeitspanne ist dies angebracht, z.B. Zinsberechnung innerhalb eines Jahres,  $K_t = K_0(1 + \frac{t}{360}i)$ . Also z.B. CHF 10'000.-,  $i = 5\%$ ,  $t = 3$  Monate, dann beträgt der Zins für die drei Monate CHF 125.-

**Zinseszins:** Der Zins trägt wieder Zins in nächster Periode, d.h. Zinsbetrag steigt,

$$K_n = K_0(1 + i)^n. \quad (1.2)$$

$r := 1 + i$  wird **Aufzinsfaktor** genannt. Der Aufzinsfaktor  $r$  entspricht somit dem Endwert des Kapitals 1 nach einer Periode.

Um den Zusammenhang zum einfachen Zins zu sehen kann man eine Reihenentwicklung machen:  $K_n = K_0 \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} i^k = K_0(1 + in) + o(i)$ .

**Diskontierung:** Die Berechnung des Anfangswertes aus dem Endwert, also das inverse Vorgehen zur Aufzinsung:

$$K_0 = \frac{1}{1 + in} K_n \text{ bei einfacher Verzinsung} \quad (1.3)$$

$$K_0 = (1 + i)^{-n} K_n \text{ bei Zinseszins} \quad (1.4)$$

Der Koeffizient  $v := \frac{1}{1+i} = \frac{1}{r}$  wird **Diskontierungsfaktor** genannt.

**Vorschüssiger Zins  $d$ :** Man kann sich auch vorstellen den Zins zu Beginn einer Periode auszuzahlen. Allerdings möchte man dann, dass der Endwert des vorschüssigen Zinses gleich dem nachschüssigen Zins ist, also muss  $d(1 + i) = i$ , d.h.

$$d = iv = 1 - v \quad (1.5)$$

Umgekehrt muss der nachschüssig ausbezahlte Zins diskontiert gleich dem vorschüssigen Zins sein.

### 1.1.2 Allgemeiner Fall mit Zuzahlungen

$K_t$  ist wiederum der Barwert zur Zeit  $t$ . Die Zuzahlungen seien mit  $r_t$  bezeichnet, d.h. es ist

$$K_t = (1+i)K_{t-1} + r_t \quad (1.6)$$

beziehungsweise  $K_t - (1+i)K_{t-1} = r_t$ . Wendet man die Formel (1.6) rekursiv an, so erhält man für den Endwert

$$K_n = (1+i)^n K_0 + \sum_{k=1}^n (1+i)^{n-k} r_k$$

und für den Anfangswert

$$\begin{aligned} K_0 &= (1+i)^{-n} K_n - \sum_{k=1}^n (1+i)^{-k} r_k \\ &= v^n K_n - \sum_{k=1}^n v^k r_k \end{aligned}$$

Man kann sich nun überlegen, woraus die Differenz  $K_n - K_0$  zusammengesetzt ist. Aus (1.6) folgt nämlich

$$K_t - K_{t-1} = iK_{t-1} + r_t,$$

somit ist

$$\begin{aligned} K_n - K_0 &= (K_n - K_{n-1}) + (K_{n-1} - K_{n-2}) + \dots + (K_1 - K_0) \\ &= (iK_{n-1} + r_n) + (iK_{n-2} + r_{n-1}) + \dots + (iK_0 + r_1) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} iK_k + \sum_{k=1}^n r_k. \end{aligned}$$

Daraus sieht man, dass die Differenz von Anfangs- und Endkapital aus den Zinsen auf das Kapital und aus den Zuzahlungen besteht.

**Beispiel:** Sei  $K_0 = 12'000$ , die Zuzahlungen  $r_t = t \cdot 500$ , der Zins  $i = 9\%$ . Dann entwickelt sich das Kapital über 15 Perioden gemäss Abbildung 1.1.  $\diamond$

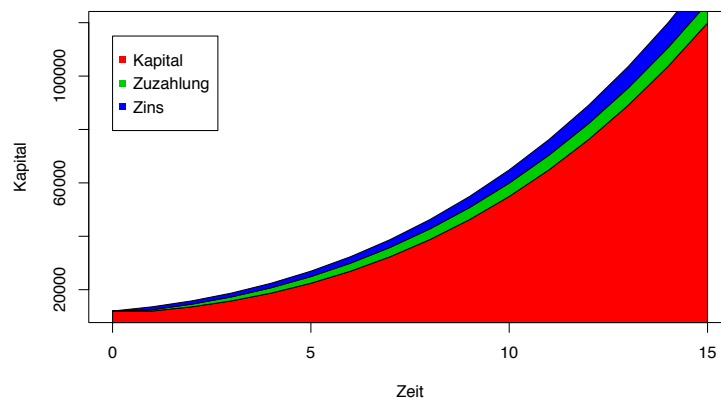


Abbildung 1.1: Beispiel mit Zuzahlungen.

**Beispiel:** Eine 30-jährige Person bringe eine Einlage von CHF 25'000.- mit für die Pensionskasse. Das Jahressalär betrage CHF 50'000.- (das sei der Einfachheit wegen konstant bis zur Pensionierung). Der Zinssatz betrage 4%. Die nach BVG obligatorischen Beiträge sind in Tabelle 1.1 ersichtlich. Dann entwickelt sich das Kapital gemäss der Tabelle 1.1 und Abbildung 1.2. Man beachte, dass sich die Beiträge mit dem Alter erhöhen, von 7% auf 18%.  $\diamond$

Alter	$K_t$	Zins	Beitrag relativ	Beitrag absolut	$K_{t+1}$
30	25000	1000	7%	3500	29500
31	29500	1180	7%	3500	34180
32	34180	1367	7%	3500	39047
33	39047	1562	7%	3500	44109
34	44109	1764	7%	3500	49373
35	49373	1975	10%	5000	56348
36	56348	2254	10%	5000	63602
37	63602	2544	10%	5000	71146
38	71146	2846	10%	5000	78992
39	78992	3160	10%	5000	87152
40	87152	3486	10%	5000	95638
41	95638	3826	10%	5000	104464
42	104464	4179	10%	5000	113642
43	113642	4546	10%	5000	123188
44	123188	4928	10%	5000	133115
45	133115	5325	15%	7500	145940
46	145940	5838	15%	7500	159278
47	159278	6371	15%	7500	173149
48	173149	6926	15%	7500	187575
49	187575	7503	15%	7500	202578
50	202578	8103	15%	7500	218181
51	218181	8727	15%	7500	234408
52	234408	9376	15%	7500	251284
53	251284	10051	15%	7500	268836
54	268836	10753	15%	7500	287089
55	287089	11484	18%	9000	307573
56	307573	12303	18%	9000	328875
57	328875	13155	18%	9000	351030
58	351030	14041	18%	9000	374072
59	374072	14963	18%	9000	398035
60	398035	15921	18%	9000	422956
61	422956	16918	18%	9000	448874
62	448874	17955	18%	9000	475829
63	475829	19033	18%	9000	503862
64	503862	20154	18%	9000	533017
65	533017				

Tabelle 1.1: Beispiel Pensionskasse: Die Entwicklung des für die berufliche Vorsorge bestimmten Geldes.

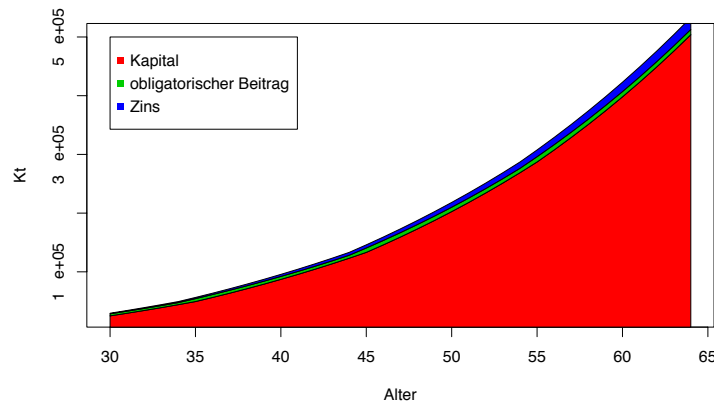


Abbildung 1.2: Beispiel mit Zuzahlungen.

### 1.1.3 Unterjährige Verzinsung

Meist betrachtet man ein Zinssystem, bei dem man einmal pro Jahr Zinsen auszahlt wird. Möglich ist natürlich auch eine *unterjährige* Verzinsung. Die Bedingung dabei ist, dass diese Zinsart zum gleichen Endwert führt.

(a) **Einfacher Zins:** Kapital wird  $m$ -mal pro Jahr verzinst. Sei nun

$i^{(m)}$  die Zinsrate für  $\frac{1}{m}$  des Jahres bei einfacher Verzinsung.

Damit die Gleichgewichtsbedingung erfüllt ist, erhält man die Bedingung

$$1 + ni = 1 + m \cdot n \cdot i^{(m)}$$

und deshalb  $i = m i^{(m)}$ . In diesem Fall heissen  $i$  und  $i^{(m)}$  **proportional**.

**Beispiel:** Hypotheken:  $K = 1'000'000.-$ ,  $i = 5\%$ ,  $i^{(2)} = 2.5\%$ , wenn 2 mal pro Jahr Zinszahlungen stattfinden.  $\diamond$

(b) **Zinseszins:** Sei nun

$i^{[m]}$  die Zinsrate für  $\frac{1}{m}$  des Jahres (mit Zinseszins).

Dann muss gemäss Gleichgewichtsbedingung wiederum gelten

$$1 + i = (1 + i^{[m]})^m, \text{ also } i^{[m]} = \sqrt[m]{1 + i} - 1. \quad (1.7)$$

Ist dieses Gleichgewicht erfüllt, so heissen  $i$  und  $i^{[m]}$  **konform**.

**Beispiel:** Sei  $i = 4\%$  und  $m = 4$ . Dann ist  $i^{(4)} = 1\%$  und  $i^{[4]} = 0.985\%$ ;  $i = 4\%$  und  $i^{(4)} = 1\%$  heissen proportional,  $i = 4\%$  und  $i^{[4]} = 0.985\%$  heissen konform.  $\diamond$

In Abbildung 1.3 ist der konforme Zins  $i^{[m]}$  dargestellt, wenn der Jahreszins  $i = 4\%$  beträgt. Da  $i^{[m]} = \frac{i}{m} + O(i^2)$  wird üblicherweise der Jahreszins  $i^{(m)}$  fixiert und eine Zinszahlung  $m$  mal pro Jahr vorgesehen mit

$$i^{[m]} = \frac{i^{(m)}}{m}. \quad (1.8)$$

Falls  $m \neq 1$ , so heisst  $i^{(m)}$  **nomineller Zinssatz**. Die zugehörige wirkliche Zinsrate  $i$  wird **effektiver Zinssatz** genannt. Der effektive und der nominelle Zinssatz hängen folgendermassen zusammen:

$$\left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^m = 1 + i, \text{ also } i^{(m)} = (\sqrt[m]{1 + i} - 1) \cdot m \quad (1.9)$$

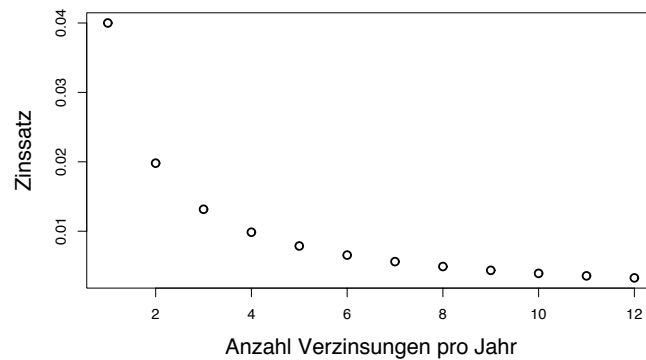


Abbildung 1.3: Der konforme Zins  $i^{[m]}$  in Abhängigkeit der Anzahl unterjährig Verzinsungen bei einem Jahreszins von  $i = 4\%$

Dieser Zusammenhang ist auch dargestellt in Abbildung 1.4 (es gilt immer  $i > i^{(m)}$ , da  $(1 + \frac{i^{(m)}}{m})^m = 1 + i^{(m)} + \frac{(m-1)}{2m} i^{(m)2} + \dots > 1 + i^{(m)}$ ).

**Beispiel:** Sei  $i^{(m)} = 4\%$ . Folgende Tabelle zeigt die Werte von  $i$  für eine Auswahl von häufig verwendeten  $m$ :

$m = 2$	$i = 4.0400\%$
$m = 4$	$i = 4.0604\%$
$m = 12$	$i = 4.0742\%$
$m = \infty$	$i = 4.0811\%$

◇

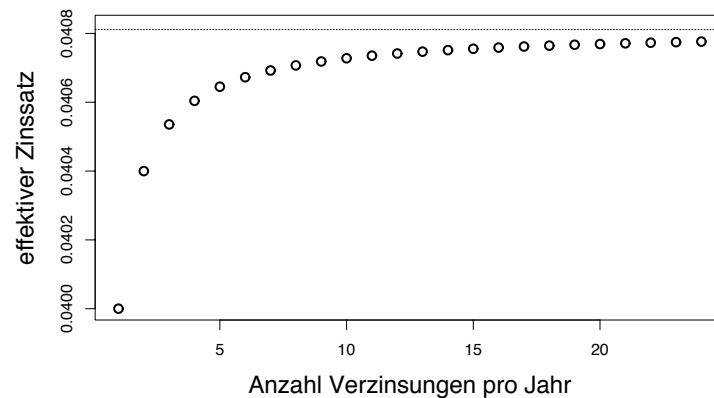


Abbildung 1.4: Der effektive Zins in Abhängigkeit der Anzahl unterjährig Verzinsungen bei einem nominellen Zinssatz von  $i^{(m)} = 4\%$

### 1.1.4 Kontinuierliche Verzinsung

Zu welchem effektiven Zinssatz verzinst man, wenn  $m$  immer grösser wird? Dieser Zinssatz entspricht dem Zinssatz einer kontinuierlichen Verzinsung. Die **kontinuierliche Zinsrate oder Zinsintensität** wird  $\delta$  genannt und lässt sich berechnen als

$$1 + i = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^m = e^{i^{(\infty)}} = e^{\delta}.$$

Somit ist  $\delta = \ln(1 + i)$  oder anders ausgedrückt  $e^{\delta} = 1 + i$ .

**Beispiel:**

$$\begin{aligned}\delta &= 3\% & i &= 3.045 \\ \delta &= 4\% & i &= 4.081\end{aligned}$$

◇

**Beispiel:** Kapital=100'000.-, Jahreszins=5.5%

Anzahlungen pro Jahr	$i^{(m)}$	$i^{[m]}$	$i$	Verhältnis
1	5.50%	5.50%	5.50%	100%
2	2.75%	2.71%	5.58%	101%
4	1.38%	1.35%	5.61%	102%
6	0.92%	0.90%	5.63%	102%
12	0.46%	0.45%	5.64%	103%
360	0.02%	0.01%	5.65%	103%

Die Zinsintensität beträgt  $\delta = 0.05354$ .

◇

Wie sieht die ganzjährige Verzinsung und Diskontierung nun aus? Es gelten

$$\begin{aligned}K_n &= (1+i)^n K_0 = e^{n\delta} K_0 = e^{(\int_0^n \delta(s) ds)} K_0, \text{ also} \\ K_0 &= (1+i)^{-n} K_n = e^{-n\delta} K_n.\end{aligned}$$

Bezeichnen wir mit  $r_n$  zusätzliche Zahlungen zum Zins. Dann bekommt man in diskreter Zeit folgende Gleichung für die Entwicklung des Kapitals  $K_n = (1+i)K_{n-1} + r_n$ , d.h.

$$K_n - K_{n-1} = iK_{n-1} + r_n. \quad (1.10)$$

Betrachten wir nun die stetige Zeit mit  $K(t)$  dem Wert des Kapitals zur Zeit  $t$  und betrachten eine kleine Zeiteinheit  $(t, t + \Delta t)$ , so lässt sich aus (1.10) schliessen, dass

$$dK(t) = K(t)(\delta(t)dt) + r(t)dt$$

gilt, woraus sich die folgende Differentialgleichung

$$K'(t) = K(t)\delta(t) + r(t) \quad (1.11)$$

ergibt. Die Lösung davon ist dann

$$K(h) = e^{\int_0^h \delta(s) ds} K(0) + \int_0^h e^{\int_t^h \delta(s) ds} r(t) dt. \quad (1.12)$$

## 1.2 Barwert einer Rente

**Zeitrente:** In gleichmässigen Abständen wiederkehrende Zahlungen.

**Rentenraten:** Diese

- werden vorschüssig (zu Beginn des Jahres) oder nachschüssig (am Ende eines Jahres) ausbezahlt,
- können auch unterjährig ausbezahlt werden,
- werden temporär oder ewig ausbezahlt,
- sind konstant oder variabel,
- werden sofort beginnend oder erst später (aufgeschoben) ausbezahlt.

**Barwert einer Rente:** Der Wert der zukünftigen Rentenzahlungen in einem bestimmten Moment (bei vorgegebenem Zinssatz). Meist ist der Barwert der Wert zu Beginn der Periode und der Endwert am Ende der Periode.



### 1.2.1 Bezeichnungen

Grundsätzlich werden Barwerte mit  $a$  und Endwerte mit  $s$  bezeichnet. In folgender Tabelle sind die Bezeichnungen für den Barwert notiert. Analoges gilt für den Endwert. Unter dem Haken  $\neg$  steht jeweils die Laufdauer. Hier wurde jeweils nur einfach ein Punkt  $\cdot$  hingeschrieben anstelle einer festen Zahl.

nachschüssig	$a_{\neg}$	vorschüssig	$\ddot{a}_{\neg}$
ganzjährig (1/1)	$a_{\neg}$	unterjährig (1/m)	$a_{\neg}^{(m)}$
temporär $n$ Jahre	$a_{\overline{n} }$	ewig	$a_{\infty }$
sofort	$a_{\neg}$	aufgeschoben $k$ Jahre	${}_k a_{\neg}$
konstant	$a_{\neg}$	linear steigend mit Parameter $q$	$(I^{(q)}a)_{\neg}$
		linear fallend mit Parameter $q$	$(D^{(q)}a)_{\neg}$
diskrete Zeit	$a_{\neg}$	stetige Zeit	$\bar{a}_{\neg}$

Natürlich können auch Kombinationen vorkommen, z.B. eine aufgeschobene ( $k$  Perioden), temporäre ( $n$  Perioden) unterjährige vorschüssige Rente bezeichnet man mit  ${}_k|\ddot{a}_{\overline{n}|}^{(m)}$ .

### 1.2.2 Ewige Rente

#### (a) vorschüssige Renten:

(1/1)-vorschüssig

$$\ddot{a}_{\infty|} = 1 + v + v^2 + v^3 + \dots = \frac{1}{1-v} = \frac{1}{d}.$$

(1/m)-vorschüssig

$$\ddot{a}_{\infty|}^{(m)} = \frac{1}{m} + \frac{1}{m}v^{\frac{1}{m}} + \frac{1}{m}v^{\frac{2}{m}} + \frac{1}{m}v^{\frac{3}{m}} + \dots = \frac{1}{m} \frac{1}{1-v^{\frac{1}{m}}} = \frac{1}{d^{(m)}}, \quad (1.13)$$

wobei  $d^{(m)}$  der nominelle vorschüssige Zins ist.

#### (b) Nachschüssige Renten:

(1/1)-nachschüssig

$$a_{\infty|} = v + v^2 + v^3 + \dots = \frac{v}{1-v} = \frac{1}{i}.$$

(1/m)-nachschüssig

$$a_{\infty|}^{(m)} = \frac{1}{m}v^{\frac{1}{m}} + \frac{1}{m}v^{\frac{2}{m}} + \frac{1}{m}v^{\frac{3}{m}} + \dots = \frac{1}{m} \frac{v^{\frac{1}{m}}}{1-v^{\frac{1}{m}}} = \frac{1}{m[(1+i)^{\frac{1}{m}} - 1]} = \frac{1}{i^{(m)}}.$$

#### (c) Kontinuierliche Renten:

$$\bar{a}_{\infty|} = \int_0^{\infty} e^{-\delta t} dt = \left[-\frac{1}{\delta} e^{-\delta t}\right]_0^{\infty} = \frac{1}{\delta}$$

#### Bemerkungen:

1.  $\ddot{a}_{\infty|}^{(m)} > \bar{a}_{\infty|} > a_{\infty|}^{(m)}$
2.  $\lim_{m \rightarrow \infty} \ddot{a}_{\infty|}^{(m)} = \lim_{m \rightarrow \infty} a_{\infty|}^{(m)}$

◇

#### (d) Steigende Renten:

Linear steigende Rentenraten sind durch zwei Parameter bestimmt, nämlich

- $m$  = Anzahl Zahlungen pro Jahr,
- $q$  = Anzahl Erhöhungen pro Jahr.

Sei nun  $q$  ein Faktor von  $m$ , z.B.  $q = 4, m = 12$  (siehe auch Abbildung 1.5)

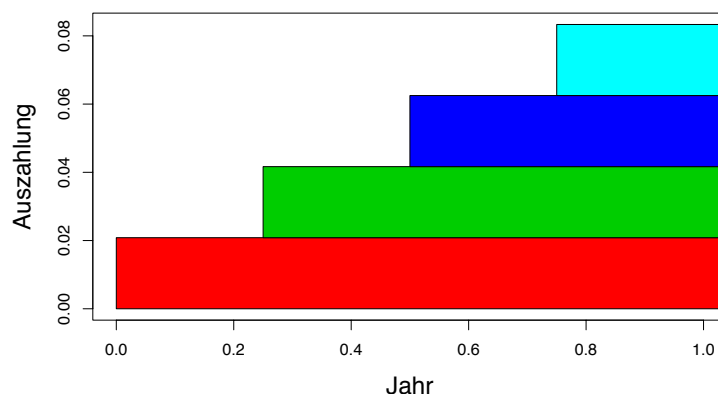


Abbildung 1.5: Linear steigende Zeitrente

Zeit				Zahlung
0	$\frac{1}{m}$	$\dots$	$\frac{1}{q} - \frac{1}{m}$	$\frac{1}{mq}$
$\frac{1}{q}$	$\frac{1}{q} + \frac{1}{m}$	$\dots$	$\frac{2}{q} - \frac{1}{m}$	$\frac{2}{mq}$
$\frac{2}{q}$	$\frac{2}{q} + \frac{1}{m}$	$\dots$	$\frac{3}{q} - \frac{1}{m}$	$\frac{3}{mq}$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$

Für die Berechnung des *vorschüssigen* Barwertes ist aus Abbildung 1.5 gut ersichtlich, dass folgendes gilt:

$$\begin{aligned}
 (I^q \ddot{a})_{\infty}^{(m)} &= \frac{1}{q} \ddot{a}_{\infty}^{(m)} + \frac{1}{q} v^{\frac{1}{q}} \ddot{a}_{\infty}^{(m)} + \frac{1}{q} v^{\frac{2}{q}} \ddot{a}_{\infty}^{(m)} \dots \\
 &= \ddot{a}_{\infty}^{(m)} \left( \frac{1}{q} [1 + v^{\frac{1}{q}} + v^{\frac{2}{q}} \dots] \right) \\
 &= \ddot{a}_{\infty}^{(m)} \cdot \ddot{a}_{\infty}^{(q)} = \frac{1}{d^{(m)}} \frac{1}{d^{(q)}}.
 \end{aligned} \tag{1.14}$$

Insbesondere gilt nun  $(I\ddot{a})_{\infty} = \frac{1}{d^2}$  ( $q = m = 1$ ).

Analog *nachschüssiger* Barwert:

$$(I^q a)_{\infty}^{(m)} = a_{\infty}^{(m)} \cdot \ddot{a}_{\infty}^{(q)} = \frac{1}{i^{(m)}} \frac{1}{d^{(q)}}. \tag{1.15}$$

Eine stetige ewige steigende Rente lässt sich berechnen, indem man den Grenzwert  $m \rightarrow \infty$  bildet in (1.14) und (1.15)

$$\begin{aligned}
 (\bar{I}\bar{a})_{\infty} &= \int_0^{\infty} t e^{-\delta t} dt = \frac{1}{\delta^2} \\
 (I\bar{a})_{\infty} &= \int_0^{\infty} [t+1] e^{-\delta t} dt = \frac{1}{\delta} \frac{1}{d}
 \end{aligned}$$

Man kann nun eine beliebige Rente mit Rentenraten  $r_0, r_1, r_2, \dots$  berechnen via

$$\begin{aligned}
 \ddot{a}_{\infty} &= r_0 + v r_1 + v^2 r_2 + \dots \\
 &= r_0 \frac{1}{d} + (r_1 - r_0) v \frac{1}{d} + (r_2 - r_1) v^2 \frac{1}{d} + \dots \\
 &= \frac{1}{d} (r_0 + (r_1 - r_0) v + (r_2 - r_1) v^2 + \dots).
 \end{aligned}$$

Üblich sind lineare oder exponentiell wachsende Raten, z.B.  $r_t = e^{\tau t}$ , dann erhält man mit  $v = e^{-\delta}$

$$\ddot{a}_{\infty} = 1 + e^{-(\delta-\tau)} + e^{-2(\delta-\tau)} + \dots = \frac{1}{1 - e^{-(\delta-\tau)}}$$

### 1.2.3 Temporäre, sofort beginnende Renten

Barwerte und Endwerte von temporären Renten lassen sich analog zu den ewigen Renten berechnen, nur dass man es jeweils mit endlichen statt unendlichen Reihen zu tun hat.

#### 1. Barwerte

*Vorschüssiger* Barwert einer Rente mit Dauer über  $n$  Perioden:

$$\ddot{a}_{\overline{n}|} = 1 + v + v^2 + \dots + v^{n-1} = \frac{1 - v^n}{1 - v} = \frac{1 - v^n}{d} = \ddot{a}_{\infty} - v^n \ddot{a}_{\infty}$$

Man sieht also, dass sich der Barwert einer temporären Rente aus der Differenz eines Barwertes einer ewigen Rente und des Barwertes einer  $n$ -mal aufgezinsten ewigen Rente berechnen lässt. Solchen Differenzen von Barwerten werden wir noch öfters begegnen.

Analog erhält man den Barwert einer *nachschüssig* temporären Rente

$$a_{\overline{n}|} = \frac{1 - v^n}{i} = a_{\infty} - v^n a_{\infty} \quad (1.16)$$

Vor- und nachschüssige Barwerte stehen in folgendem Zusammenhang

$$\ddot{a}_{\overline{n}|} = a_{\overline{n-1}|} + 1$$

#### 2. Endwerte

Endwerte lassen sich aus den Barwerten leicht berechnen, indem man sie einfach  $n$  Jahre aufzinst, also

$$s_{\overline{n}|} = r^n a_{\overline{n}|} = \frac{r^n - 1}{i}$$

$$\ddot{s}_{\overline{n}|} = r^n \ddot{a}_{\overline{n}|} = \frac{r^n - 1}{d}$$

Vor- und nachschüssige Endwerte stehen in folgendem Zusammenhang (siehe auch Abbildung 1.2.3)

$$s_{\overline{n}|} = \ddot{s}_{\overline{n-1}|} + 1$$

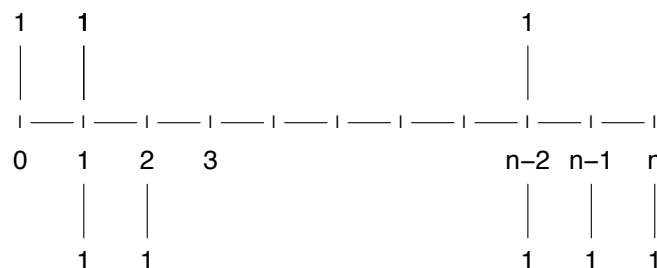


Abbildung 1.6: Schematische Darstellung der Endwerte: Einerseits Zahlungen einer vorschüssigen  $n-1$  temporären Rente, andererseits Zahlungen einer nachschüssigen  $n$  temporären Rente

### 3. Unterjährige temporäre Rentenraten

Zur Berechnung einer unterjährig temporären Rente benutzen wir den unterjährigen Zins von Formel (1.8) und die Tatsache, dass aus der Gleichgewichtsbedingung (1.7) folgt, dass  $v = v^{[m]m}$ . Die Rente 1 wird nun also in  $m$  gleichen unterjährigen Raten  $\frac{1}{m}$  ausbezahlt (während  $n$  Jahren) mit Zinsrate  $i^{[m]}$

$$a_{\overline{n}|}^{(m)} = \frac{1}{m} a_{\overline{nm}|} = \frac{1}{m} \frac{1 - (v^{[m]})^{mn}}{i^{[m]}} = \frac{1 - v^n}{i^{(m)}}$$

Dieser Barwert steht in engem Zusammenhang mit dem ganzjährigen Barwert, es gilt nämlich

$$a_{\overline{n}|}^{(m)} = \frac{i}{i^{(m)}} a_{\overline{n}|}$$

Je mehr der effektive Zins vom nominellen Zins abweicht, desto mehr unterscheiden sich die beiden Barwerte.

Für den vorschüssigen unterjährigen Barwert gilt

$$\ddot{a}_{\overline{n}|}^{(m)} = a_{\overline{n}|}^{(m)} + \frac{1}{m}(1 - v^n) = \frac{1 - v^n}{d^{(m)}} \quad (1.17)$$

Im Unterschied zum nachschüssigen Barwert kommt am Anfang eine Rentenzahlung von  $\frac{1}{m}$  dazu, am Schluss fällt eine weg (diskontiert  $\frac{1}{m}v^n$ ).

### 4. Steigende Rentenraten

Seien wieder  $m$  die Anzahl Zahlungen pro Jahr und  $q$  die Anzahl Steigerungen (linear) pro Jahr. Dann lässt sich der temporäre ( $n$  Perioden) steigende Barwert als Linearkombination ewiger Barwerte schreiben, nämlich

$$\begin{aligned} (I^{(q)}\ddot{a})_{\overline{n}|}^{(m)} &= (I^{(q)}\ddot{a})_{\infty|}^{(m)} - v^n (I^{(q)}\ddot{a})_{\infty|}^{(m)} - nv^n \ddot{a}_{\infty|}^{(m)} \\ &= \frac{\ddot{a}_{\overline{n}|}^{(q)} - nv^n}{d^{(m)}} \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung erhält man durch Einsetzen der Formeln (1.13) und (1.14) und durch Gebrauch der Gleichung (1.17).

Analog für nachschüssige Barwerte

$$\begin{aligned} (I^{(q)}a)_{\overline{n}|}^{(m)} &= (I^{(q)}a)_{\infty|}^{(m)} - v^n (I^{(q)}a)_{\infty|}^{(m)} - nv^n a_{\infty|}^{(m)} \\ &= \frac{\ddot{a}_{\overline{n}|}^{(q)} - nv^n}{i^{(m)}} \end{aligned}$$

### 5. Aufgeschobene Renten

Die Barwerte von  $k$  Perioden aufgeschobenen Renten sind einfach die  $k$ -mal diskontierten Barwerte der nichtaufgeschobenen Barwerte.

$$\begin{aligned} {}_k|a_{\overline{n}|} &= v^k a_{\overline{n}|} \\ {}_k|\ddot{a}_{\overline{n}|} &= v^k \ddot{a}_{\overline{n}|} \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

Man kann sie auch als Differenz zweier temporärer Barwerte schreiben

$$\begin{aligned} {}_k|a_{\overline{n}|} &= a_{\overline{n+k}|} - a_{\overline{k}|} \\ {}_k|\ddot{a}_{\overline{n}|} &= \ddot{a}_{\overline{n+k}|} - \ddot{a}_{\overline{k}|} \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

### 6. Sparversicherung

Die in der Einzelversicherung häufigste Versicherung ist die Auszahlung eines Kapitals am Ende der Versicherungsdauer bzw. vorher im Todesfall. Dies ist die sogenannte **gemischte Versicherung**. Diese Versicherung umfasst das Spar- wie auch das Risikoelement.

Man kann den Sparprozess auch für sich alleine betrachten (BVG-Altersgutschriften, reiner Sparprozess).

Frage: Nach  $n$  Jahren soll Kapital 1 vorhanden sein. Wie gross muss der jährliche Sparbeitrag sein?

Der Sparbeitrag wird vorschüssig bezahlt und mit  $P_{\overline{n}}$  bezeichnet. Also

$$P_{\overline{n}}(r^n + r^{n-1} + \dots + r) = P_{\overline{n}} \cdot \ddot{s}_{\overline{n}} = 1.$$

Somit muss der Sparbeitrag den Wert

$$P_{\overline{n}} = \frac{1}{\ddot{s}_{\overline{n}}}$$

annehmen. Nach  $t$  Jahren hat das Sparkapital den Wert

$$P_{\overline{n}} \ddot{s}_{\overline{t}} = \frac{\ddot{s}_{\overline{t}}}{\ddot{s}_{\overline{n}}}$$

**Bemerkung:** Wenn die Gesellschaft auf jeden Fall den Betrag 1 ausbezahlt, so muss sie den Betrag  $1 - \frac{\ddot{s}_{\overline{t}}}{\ddot{s}_{\overline{n}}}$  versichern.  $\diamond$

## 1.3 Anleihen

Sei  $S$  der Wert einer Schuld zur Zeit 0, welche durch die Zahlungen  $r_1, \dots, r_n$  zurückbezahlt wird, jeweils am Ende des Jahres  $k = 1, 2, \dots, n$ .  $S$  ist also der Wert der Zahlungen zur Zeit 0:

$$S = vr_1 + v^2 r_2 + \dots + v^n r_n \quad (1.18)$$

Sei  $S_k$  die verbleibende Schuld, nachdem  $r_k$  bezahlt worden ist. Sie besteht aus der Schuld des letzten Jahres abzüglich der letzten Zahlung

$$S_k = (1+i)S_{k-1} - r_k \quad (1.19)$$

Diese Gleichung lässt umformen zu

$$r_k = iS_{k-1} + (S_{k-1} - S_k) \quad (1.20)$$

Daraus kann man sehen, dass die Abzahlung in der Periode  $k$ , die sogenannte **Annuität**, aus zwei Komponenten besteht, dem Zins auf die Restschuld und einer **Amortisation**. Multipliziert man die Gleichung (1.19) auf beiden Seiten mit  $(1+i)^{h-k}$  und summiert über alle Werte von  $k$ , dann fallen fast alle Terme in  $S$  weg und es bleibt

$$S_h = (1+i)^h S - \sum_{k=1}^h (1+i)^{h-k} r_h$$

Dies ist eine **retrospektive** Sichtweise der Restschuld. Andererseits kann die Restschuld natürlich auch als der Barwert der noch ausstehenden Annuitäten angesehen werden:

$$S_k = vr_{k+1} + v^2 r_{k+2} + \dots + v^{n-k} r_n$$

Dies ist dann eine **prospektive** Betrachtung.

Es gibt verschiedene Rückzahlungsmöglichkeiten:

1. Kein festgelegter Endtermin der Abzahlung, d.h. ewige Rente:

Hier wird in Gleichung 1.20 der Term  $(S_{k-1} - S_k)$  Null gesetzt, man zahlt also nur den Zins auf die Anleihe.

2. Anleihe auf festen Verfall, d.h. auf bestimmtes Datum (Periode  $n$ ) fixiert.  
 Hat man z.B eine Anleihe von CHF 50.– gemacht bei einem fixen Zins von 5%, so bestehen die ersten  $n - 1$  Annuitäten nur aus dem Zins von CHF 2.5 auf die Anleihe, bei der letzten ( $n$ -ten) Annuität amortisiert man nebst dem Zins von CHF 2.5 alles plus die 50.–.
3. periodisch durch Amortisation:  
 Falls die Annuitäten konstant sind, d.h.  $r_k = r$ , so kann man Formel (1.18) auch als Barwert ausdrücken.  
 $r \cdot a_{\overline{n}|} = S$  und somit

$$r = \frac{S}{a_{\overline{n}|}}$$

## 1.4 Interner Zins

Ein Investor tätigt eine Investition zum Preis  $P$  und erhält Zahlungen  $r_1, \dots, r_n$  zu den Zeiten  $\tau_1, \dots, \tau_n$ . Der momentane Wert des Zahlungsflusses, welcher der Investor erhält, ist eine Funktion der Zinsintensität  $\delta$ .

$$a(\delta) := \sum_{k=1}^n e^{-\delta \tau_k} r_k \quad (= \sum_{k=1}^n (1+i)^{-\tau_k} r_k)$$

Sei  $t$  die Lösung von  $a(t) = P$ . Dann nennt man  $t$  **interner Zinssatz** (englisch: internal rate of return). Mit seiner Hilfe ist es möglich verschiedene Geldströme zu vergleichen.

**Beispiel:** Lebensversicherungspolice aus der Sicht des Versicherungsunternehmens. ◇

# Kapitel 2

## Zeitwert des Geldes

### 2.1 Einleitung

Die Kursentwicklung festverzinslicher Wertpapiere hängt von der Terminstruktur der Zinssätze ab. Diese kann durch Zinsstrukturkurven zum Ausdruck gebracht werden. Beispiele von Zinsstrukturkurven sind:

- Preisstruktur der Zero-Coupon Bonds;
- Ertragskurven (Yield Curves);
- Kurve der Forward-Kurz-Zinssätze (Curve of Forward Short Rates).

Wir werden sehen, wie diese Kurven zu Stande kommen und wie wir die eine aus der anderen ableiten können (siehe auch [\[Panjer\]](#) und [\[Betsch\]](#)). Wir werden dann die Theorie mit einem numerischen Beispiel illustrieren.

### 2.2 Preisstruktur der Zero-Coupon Bonds (ZCB)

Weil die Kursentwicklung von Finanzinstrumenten zufällig ist, müssen wir immer klar festhalten, in welchem Zeitpunkt wir die Finanzinstrumente betrachten:

**Vorstellung:** Wir befinden uns gedanklich im Zeitpunkt  $t$ .

Ein *Zero-Coupon Bond*  $Z^{(t+T)}$  ist ein Finanzinstrument, das zum Zeitpunkt  $t + T$  eine Geldeinheit ausbezahlt:

$$Z^{t+T} = (\underbrace{0}_{t+1}, 0, \dots, 0, \underbrace{1}_{t+T}, 0, \dots).$$

Wir werden diesen Zero-Coupon Bond kurz mit  $Z^{(T)}$  bezeichnen.

**Frage:** Wieviel müssen wir zum Zeitpunkt  $t + \tau$  für  $Z^{(T)}$  bezahlen?

**Notation:** Wir bezeichnen diesen Preis mit  $P(t, t + \tau, t + T)$ . ◇

**Definitionen:** Falls  $\tau = 0$ , heisst  $P(t, t, t + T) := P(t, t + T)$  *Spot Preis* (Spot Price).  
Falls  $\tau > 0$ , heisst  $P(t, t + \tau, t + T)$  *Forward Preis* (Forward Price).

**Behauptung:**

$$P(t, t + \tau, t + T) = \frac{P(t, t + T)}{P(t, t + \tau)}. \quad (2.1)$$

**Bedeutung:** Wenn wir die Spot Preise kennen, können wir die Forward Preise berechnen.

**Beweis:** Wir betrachten zwei Strategien, die zum Zeitpunkt  $t + T$  eine Geldeinheit auszahlen.

- Strategie 1: Wir kaufen zum Zeitpunkt  $t$  einen ZCB  $Z^{(T)}$  zum Preis  $P(t, t + T)$ .
- Strategie 2: Wir kaufen  $P(t, t + \tau, t + T)$  Einheiten von  $Z^{(\tau)}$  zum Preis  $P(t, t + \tau)$  zur Zeit  $t$ . Wir müssen also den Betrag  $P(t, t + \tau, t + T) \cdot P(t, t + \tau)$  aufwenden.  $\diamond$

Betrachten wir nun diese Strategien genauer:

Zeit	Aktion		Strategie 1	Strategie 2
$t$	Kauf von ZCB	Laufzeit Anzahl Einheiten Kosten	$T$ 1 $P(t, t + T)$	$\tau$ $P(t, t + \tau, t + T)$ $P(t, t + \tau, t + T) \cdot P(t, t + \tau)$
$t + \tau$	Kauf von ZCB	Ertrag Laufzeit Anzahl Einheiten Kosten		$P(t, t + \tau, t + T)$ $T - \tau$ 1 $P(t, t + \tau, t + T)$
$t + T$		Ertrag	1	1

Weil beide Strategien risikolos sind, zur Zeit  $t$  festgesetzt werden und den selben Ertrag erzielen, muss der investierte Betrag bei beiden Strategien identisch sein, d.h.:

$$P(t, t + T) = P(t, t + \tau, t + T) \cdot P(t, t + \tau).$$

□

Die Kurve  $\gamma_t : s \mapsto P(t, t + s)$  heisst *Preisstruktur der ZCB zur Zeit  $t$*  (Time- $t$  Curve of Zero Coupon Prices).

**Bemerkung:** Die Preisstruktur  $\gamma_t$  der ZCB ist für alle  $t$  verschieden.  $\diamond$

## 2.3 Struktur der Zinssätze

Wir betrachten Zinssätze im diskreten und im stetigen Modell. Die Zinssätze im stetigen Modell bezeichnen wir mit einer Tilde.

### 2.3.1 Diskretes Modell

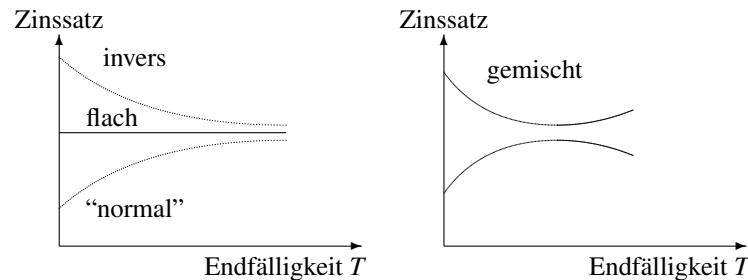
#### Yield Curves

Die Yield Curve zeigt den Zusammenhang zwischen den internen Zinssätzen und Laufzeiten von Zero-Coupon Bonds ohne Ausfallrisiko. Sie ist eine Momentaufnahme der Zinsverhältnisse. Die Kurven können verschieden verlaufen:

- “normal”: Kurzfristige Zinssätze sind niedriger als langfristige, denn für eine langfristige Bereitstellung von Kapital wird eine höhere Prämie bezahlt.
- flach: Die Marktrendite ist unabhängig von der Restlaufzeit der Papiere.



- **invers:** In Hochzinsphasen sind die Kreditnehmer nicht mehr bereit, sich langfristig zu hohen Zinssätzen zu verschulden. Sie verschulden sich kurzfristig und warten sinkende Zinsen ab. Zu einem günstigen Zeitpunkt tauschen sie dann die kurzfristigen Verbindlichkeiten gegen langfristige. Die Nachfrage nach kurzfristigen Krediten ist grösser als diejenige nach der langfristigen. Deshalb liegen die Zinssätze für kurze Laufzeiten über denen der langen Laufzeiten.
- **gemischt:** Häufig treten Mischformen auf.



### Bezeichnungen:

- $Y(t, t+T)$  ist der interne Zinssatz von  $Z^{(T)}$  zur Zeit  $t$ . Dieser Zinssatz wird *Spot Zinssatz* (Spot Rate) genannt.
- Spezialfall  $T = 1$ :  $Y(t, t+1)$  bezeichnet den *Short Zinssatz* (Short Rate).
- $Y(t, t+\tau, t+T)$  mit  $\tau > 0$  heisst *Forward Zinssatz* (Forward Rate).
- Spezialfall  $T = \tau + 1$ :  $f(t, t+\tau) = Y(t, t+\tau, t+\tau+1)$  bezeichnet den *Forward-Kurz-Zinssatz* (Forward Short Rate).
- Die Kurve  $v_t : s \mapsto Y(t, t+s)$  heisst *diskrete Struktur der Zinssätze im Zeitpunkt  $t$*  (Discrete Internal Rate Structure at Time  $t$ ).

**Beispiel:** Wir betrachten einen Bond mit Couponzahlungen  $C$  zu den Zeiten  $t = 1, \dots, T$  und einem Nennwert von  $F$  zur Zeit  $T$ .

**Gesucht:** Wert des Bond  $B$  zur Zeit  $t = 0$ .

**Lösung:** Die Berechnung des Wertes erfolgt mittels den Spot Zinssätzen von Zero-Coupon Bonds mit unterschiedlicher Laufzeit. Wir diskontieren die Couponzahlungen mit den entsprechenden Zinssätzen aus der Yield Curve und erhalten den Wert der  $s$ -ten Couponzahlung zur Zeit  $t = 0$ :

$$\frac{C}{[1 + Y(0, s)]^s}.$$

Wenn wir die Werte aller Couponzahlungen und den Nennwert addieren, ergibt sich der Wert des Bond:

$$B = \sum_{s=1}^{T-1} \frac{C}{[1 + Y(0, s)]^s} + \frac{C + F}{[1 + Y(0, T)]^T}. \quad (2.2)$$

◇

### Achtung:

- Die Spot Zinssätze sind im Allgemeinen verschieden von der *Yield-to-Maturity* eines Bond. Die *Yield-to-Maturity* ist die Zahl  $y$ , welche die folgende Gleichung löst:

$$B = \sum_{s=1}^{T-1} \frac{C}{(1+y)^s} + \frac{C+F}{(1+y)^T}.$$

- Die Zinsstruktur beeinflusst die Bewertung von Finanzinstrumenten. Wir müssen die entsprechenden Diskontierungssätze der jeweiligen Restlaufzeit der entsprechenden Papiere anpassen. Bei der "normalen" Zinsstruktur sind die weiter in der Zukunft liegenden Zinszahlungen mit höherer Rate zu diskontieren.

### Beziehung zwischen der Preisstruktur der ZCB und der Struktur der Zinssätze

Wir können den Preis eines ZCB  $Z^{(T)}$  zur Zeit  $t$  als Barwert einer Geldeinheit auffassen. Dazu müssen wir  $Y(t, t+T)$  als Zinssatz verwenden:

$$P(t, t+T) = \frac{1}{[1 + Y(t, t+T)]^T}. \quad (2.3)$$

$\Leftrightarrow$

$$Y(t, t+T) = \left[ \frac{1}{P(t, t+T)} \right]^{\frac{1}{T}} - 1.$$

#### Bemerkungen:

- (2.3) entspricht der Formel (2.2) im Fall  $C = 0$  und  $F = 1$ .
- Für einen ZCB sind  $Y(t, t+T)$  und die Yield-to-Maturity dieselben.  $\diamond$

**Folgerung:** Wenn wir die Struktur der Zinssätze im Zeitpunkt  $t$  kennen, ist auch die Preisstruktur der ZCB zur Zeit  $t$  bekannt, und umgekehrt.

### Beziehung zwischen Forward Zinssatz und Preisstruktur der ZCB

*Situation:* Wir investieren risikofrei 1 CHF zur Zeit  $t$  bis zur Zeit  $t+T$ .

Damit wir die gesuchte Beziehung finden, sehen wir zwei Strategien an:

- Strategie 1: Wir investieren 1 CHF in ZCB mit Laufzeit  $T$ .
- Strategie 2: Wir investieren 1 CHF in ZCB mit Laufzeit  $\tau$ . Beim Ablauf der ZCB legen wir den erhaltenen Betrag während  $T - \tau$  Jahren zu einem Zins von  $Y(t, t+\tau, t+T)$  an.

Betrachten wir nun diese Strategien genauer:

Zeit	Aktion		Strategie 1	Strategie 2
$t$	Kauf von ZCB	Kosten Laufzeit Anzahl Einheiten	1 CHF $T$ $P(t, t+T)^{-1}$	1 CHF $\tau$ $P(t, t+\tau)^{-1}$
$t+\tau$	Anleihe	Ertrag  Betrag Laufzeit		$P(t, t+\tau)^{-1}$  $P(t, t+\tau)^{-1}$ für $Y(t, t+\tau, t+T)$ $T - \tau$
$t+T$		Ertrag	$P(t, t+T)^{-1}$	$[1 + Y(t, t+\tau, t+T)]^{T-\tau} P(t, t+\tau)^{-1}$

Weil beide Strategien risikolos sind und eine Investition von 1 CHF zur Zeit  $t$  erfordern, erreichen sie zur Zeit  $t+T$  den selben Ertrag:

$$P(t, t+T)^{-1} = P(t, t+\tau)^{-1} [1 + Y(t, t+\tau, t+T)]^{T-\tau}. \quad (2.4)$$

Wenn wir die Beziehung (2.1) verwenden, erhalten wir:

$$Y(t, t+\tau, t+T) = P(t, t+\tau, t+T)^{-\frac{1}{T-\tau}} - 1.$$

**Folgerung:** Wenn wir die Preisstruktur der ZCB kennen, sind auch alle Forward Zinssätze bekannt und umgekehrt.

### Beziehung zwischen Forward Zinssatz und Spot Zinssatz

Folgt aus (2.3) und (2.4):

$$[1 + Y(t, t + T)]^T = [1 + Y(t, t + \tau)]^\tau [1 + Y(t, t + \tau, t + T)]^{T-\tau}. \quad (2.5)$$

### Beziehung zwischen Spot Zinssatz und Forward-Kurz-Zinssatz

Wenn wir den Spot Zinssatz aus dem Forward Zinssatz ableiten wollen, genügt es, den Forward-Kurz-Zinssatz zu betrachten:

Wir nehmen (2.5) mit  $\tau = T - 1$ :

$$[1 + Y(t, t + T)]^T = [1 + Y(t, t + T - 1)]^{T-1} [1 + f(t, t + T - 1)] \quad (2.6)$$

und (2.6) mit  $T = 1$ :

$$1 + Y(t, t + 1) = 1 + f(t, t).$$

Mit einem Induktionsargument erhalten wir aus (2.6)

$$[1 + Y(t, t + T)]^T = [1 + f(t, t)][1 + f(t, t + 1)] \dots [1 + f(t, t + T - 1)]. \quad (2.7)$$

**Folgerung:** Wenn wir den Forward-Kurz-Zinssatz kennen, dann sind auch der Spot Zinssatz (vgl. (2.7)) und die Preisstruktur der ZCB (vgl. (2.3)) bekannt:

$$P(t, t + T) = \frac{1}{[1 + f(t, t)][1 + f(t, t + 1)] \dots [1 + f(t, t + T - 1)]}. \quad (2.8)$$

### 2.3.2 Beispiel

Wir haben die Beziehungen zwischen den einzelnen Kurven gesehen. Jetzt wollen wir diese anwenden und ein Beispiel berechnen. Dazu verwenden wir (2.3), (2.6) und (2.8).

Laufzeit $T$	Spot Rates $Y(t, t+T)$	ZCB-Preise $P(t, t+T)$	Forward Short Rates $f(t, t+T)$
0			0.93%
1	0.93%	0.99075	1.77%
2	1.35%	0.97355	2.39%
3	1.69%	0.95084	2.76%
4	1.96%	0.92532	3.04%
5	2.17%	0.89806	3.24%
6	2.35%	0.86984	3.41%
7	2.50%	0.84112	3.64%
8	2.64%	0.81157	3.77%
9	2.77%	0.78209	3.86%
10	2.88%	0.75305	4.04%
11	2.98%	0.72380	4.14%
12	3.08%	0.69501	4.14%
13	3.16%	0.66736	4.14%
14	3.23%	0.64082	4.13%
15	3.29%	0.61539	4.11%
16	3.34%	0.59109	4.09%
17	3.38%	0.56787	4.06%
18	3.42%	0.54571	4.03%
19	3.45%	0.52460	3.99%
20	3.48%	0.50446	3.96%
21	3.50%	0.48527	3.90%
22	3.52%	0.46704	3.83%
23	3.53%	0.44980	3.75%
24	3.54%	0.43355	3.64%
25	3.55%	0.41833	3.50%
26	3.55%	0.40420	3.37%
27	3.54%	0.39101	3.28%
28	3.53%	0.37860	3.19%
29	3.52%	0.36691	3.11%
30	3.50%	0.35585	

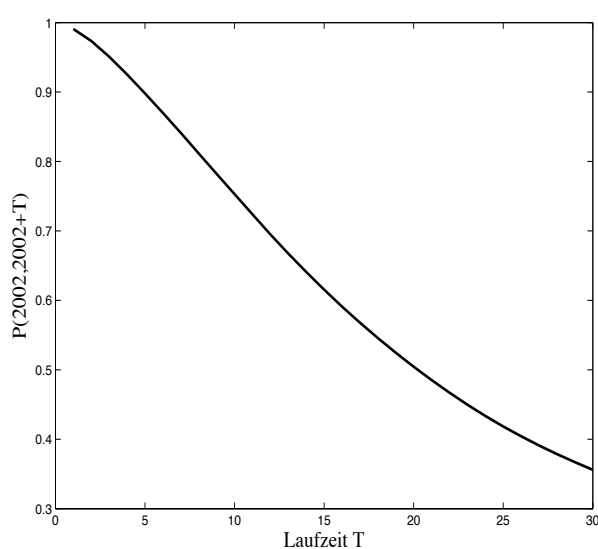
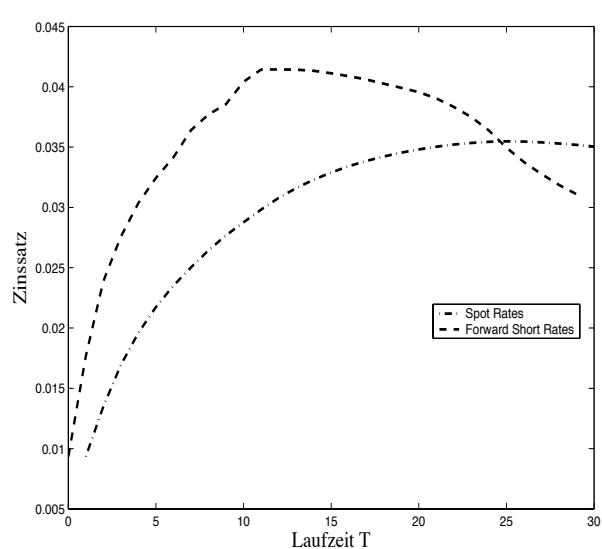
Abbildung 2.1: ZCB-Preise  $P(2002, 2002+T)$ .

Abbildung 2.2: Zinsstrukturen.

### 2.3.3 Kontinuierliches Modell

Wir suchen nun die entsprechenden Grössen im stetigen Modell. Wir nehmen an, dass die Verzinsung kontinuierlich stattfindet mit der Zinsintensität  $\tilde{Y}(t, t+T)$ :

$$P(t, t+T) = e^{-T \cdot \tilde{Y}(t, t+T)},$$

$$\Rightarrow \tilde{Y}(t, t+T) = \frac{1}{T} |\log[P(t, t+T)]|.$$

Analog wie im diskreten Modell definieren wir den stetigen Forward Zinssatz:

$$\tilde{Y}(t, t+\tau, t+T) = \frac{1}{T} |\log[P(t, t+\tau, t+T)]|. \quad (2.9)$$

Aus der Beziehung (2.9) erhalten wir mit dem Grenzübergang  $T \downarrow \tau$  den kontinuierlichen Forward-Kurz-Zinssatz:

$$\tilde{f}(t, t+\tau) = \lim_{T \downarrow \tau} \tilde{Y}(t, t+\tau, t+T) = \lim_{T \downarrow \tau} \left\{ \frac{1}{T} |\log[P(t, t+\tau, t+T)]| \right\}$$

und daraus den Preis eines ZCB  $Z^{(T)}$ :

$$P(t, t+T) = e^{-\int_0^T \tilde{f}(t, t+\tau) d\tau}.$$

### 2.3.4 Zusammenfassung

In diesem Kapitel haben wir verschiedene Zinssätze kennengelernt:

- *Spot Zinssatz*: Aktuelle Verzinsung von ZCB mit unterschiedlicher Laufzeiten.
- *Short Zinssatz*: Spezialfall des Spot Zinssatzes, Zins ist nur für eine Periode.
- *Yield-to-Maturity*: Durchschnittliche Rendite.
- *Forward Zinssatz*: Im Voraus festgelegter Zinssatz.
- *Forward-Kurz-Zinssatz*: Spezialfall des Forward Zinssatzes, Zins für eine Periode.

Diese Zinssätze beschreiben verschiedene Zinsstrukturkurven:

- *Ertragskurve*: Momentaufnahme der aktuellen Zinsverhältnisse.
- *Kurve der Preisstruktur der ZCB*: ZCB-Preise in Abhängigkeit der Laufzeit.
- *Kurve der Forward-Kurz-Zinssätze*: Forward Short Rates in Abhängigkeit des Investitionszeitpunktes.

Wir haben gesehen, dass alle drei Kurven äquivalent sind. Es genügt, wenn wir eine Kurve kennen, um den Barwert eines Cash Flow zu berechnen.



## Kapitel 3

# Die zukünftige Lebensdauer einer $x$ -jährigen Person

Da die Prämien einer Lebensversicherung stark davon abhängen, welche Lebensdauer die versicherte Person noch zu erwarten hat, beschäftigen wir uns in diesem Kapitel mit den Überlebens- und Sterbewahrscheinlichkeiten von Versicherungsnehmern.

### 3.1 Das Modell

#### 3.1.1 Definitionen und Bezeichnungen

Betrachtet wird eine Person mit Alter  $x$ . Ihre **zukünftige Lebensdauer** wird mit  $T$  bezeichnet. Eigentlich ist es  $T(x)$ , aber der Index  $x$  wird weggelassen. Die **Verteilungsfunktion** von  $T$  werde mit

$$G(t) = P[T \leq t]$$

bezeichnet. (Auch hier müsste es eigentlich  $G_x(t)$  heissen). Man geht davon aus, dass die Verteilungsfunktion von  $T$  absolut stetig ist und somit eine **Dichte**

$$g(t)dt = P[t < T < t + dt] \quad (3.1)$$

hat. Dies ist die infinitesimale Wahrscheinlichkeit zwischen  $t$  und  $t + dt$  zu sterben. Im Prinzip könnte man nun mit  $G(t)$  und  $g(t)$  alle Grössen beschreiben, die für uns von Interesse sind. Aber es gibt eine internationale Schreibweise, die auch hier benutzt werden soll. (Diese hat auch den Vorteil, dass das  $x$  nicht „unterschlagen“ wird). Die wichtigsten Definitionen sind dabei:

$$\begin{aligned} {}_tq_x &:= G(t) \\ {}_tp_x &:= 1 - G(t) \\ {}_{s|t}q_x &:= P[s < T < s + t] \\ &= G(t + s) - G(s) = {}_{s+t}q_x - {}_sq_x \\ {}^\circ e_x &:= E[T(x)] = \int_0^\infty {}_tg(t)dt = \int_0^\infty (1 - G(t))dt = \int_0^\infty {}_tp_x dt \end{aligned} \quad (3.2)$$

${}^\circ e_x$  ist der Erwartungswert der noch zu verbleibenden Lebensdauer einer  $x$ -jährigen Person.

**Bemerkung:** Bei einjährigen Sterbe- und Überlebenswahrscheinlichkeiten lässt man üblicherweise den Index 1 weg, also  $q_x := {}_1q_x$  und  $p_x := {}_1p_x$ . ◇

Aus obigen Definitionen kann man folgende offensichtlichen Grössen und Identitäten herleiten

$${}_tq_{x+s} = G_{x+s}(t) = P[T(x+s) < t] = P[T(x) \leq s+t | T(x) > s] = \frac{G(s+t) - G(s)}{1 - G(s)} \quad (3.3)$$

$${}_tp_{x+s} = P[T \geq s+t | T > s] = \frac{1 - G(s+t)}{1 - G(s)}$$

$${}_{s+t}p_x = 1 - G(s+t) = (1 - G(s)) \frac{1 - G(s+t)}{1 - G(s)} = {}_sp_x {}_tp_{x+s} \quad (3.4)$$

$${}_{s|t}q_x = G(s+t) - G(s) = (1 - G(s)) \frac{G(s+t) - G(s)}{1 - G(s)} = {}_sp_x {}_tq_{x+s}$$

### 3.1.2 Sterbedichte

Man betrachtet wieder eine  $x$ -jährige Person. Die **Sterbedichte** (oder in der Überlebenszeit- und Zuverlässigkeitsanalyse auch als **Hazardrate** bekannt) ist definiert als die momentane Sterberate im Alter  $x+t$ , gegeben, dass die Person die  $t$  Jahre schon überlebt hat. Also

$$\begin{aligned} \mu_{x+t} &:= \lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \frac{P[t \leq T < t + \Delta t | T \geq t]}{\Delta t} \\ &= \frac{g(t)}{1 - G(t)} = -\frac{d}{dt} \ln(1 - G(t)) \end{aligned} \quad (3.5)$$

Aus (3.5) und (3.3) folgt somit dass  $\mu_{x+t} \Delta t$  approximativ  ${}_tq_{x+t}$  ist.

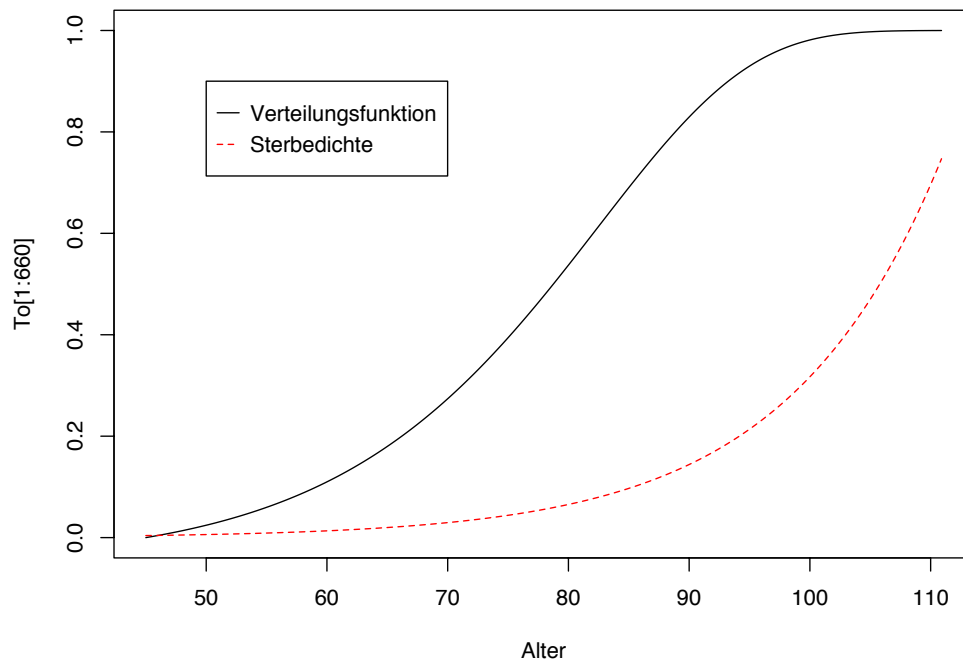


Abbildung 3.1: Die Verteilung der Lebensdauer und die Sterbedichte ist dargestellt



## 3.2 Sterbetafeln

Im letzten Abschnitt hat man die Sterbe- und Überlebenswahrscheinlichkeiten einer  $x$ -jährigen Person betrachtet. Aus Gleichung (3.4) folgt, dass

$${}_t p_x = \prod_{k=0}^{t-1} p_{x+k} = \prod_{k=0}^{t-1} (1 - q_{x+k}) \text{ für } t \in \mathbb{N}$$

Somit kann man aus den einjährigen Wahrscheinlichkeiten auf die mehrjährigen Überlebenswahrscheinlichkeiten schliessen.

### 3.2.1 Konstruktion einer Sterbetafel

Bei der Konstruktion einer Sterbetafel betrachtet man eine feste **Personengesamtheit**, d.h. eine eindeutig definierte Menge von gleichaltrigen Personen. Man nennt so eine Gesamtheit **geschlossen**, wenn ein Abgang nur infolge Tod stattfindet (kein Ersatz des Abganges), und man nennt sie **offen**, falls sich die Gemeinschaft durch Zu- und Abgänge verändert. Wir betrachten der Einfachheit wegen eine geschlossene Personengemeinschaft. Die Sterbewahrscheinlichkeiten (und damit auch die Überlebenswahrscheinlichkeiten) sind abhängig von Geschlecht, Rasse, Generation und natürlich vielem mehr. Das **Alter eines Mannes** sei in Zukunft mit  $x$  und das **Alter einer Frau** mit  $y$  bezeichnet. (Ohne jemanden diskriminieren zu wollen, werden in der Folge meist nur die Formeln für  $x$  angegeben, analoges gilt natürlich für  $y$ ).  $l_x$  sei die Anzahl lebender Männer im Alter  $x$  in der betrachteten Gemeinschaft.  $d_x$  sind die Anzahl Männer, die das Alter  $x$  erreichen, aber nicht mehr  $x+1$  werden und damit gilt natürlich  $d_x = l_x - l_{x+1}$ .

Man kann mit diesen Grössen nun die Überlebens- und Sterbewahrscheinlichkeiten schätzen, via

$$\hat{q}_x = \frac{d_x}{l_x} \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} \hat{p}_x &= \frac{l_{x+1}}{l_x} \\ {}_n \hat{p}_x &= \frac{l_{x+n}}{l_x} \\ {}_n \hat{q}_x &= \frac{l_x - l_{x+n}}{l_x} \\ {}_{n|1} \hat{q}_x &= {}_n \hat{p}_x \hat{q}_{x+n} = \frac{l_{x+n}}{l_x} \frac{d_{x+n}}{l_{x+n}} \end{aligned} \quad (3.7)$$

Diese Wahrscheinlichkeiten nennt man auch „rohe Wahrscheinlichkeiten“.

**Bemerkung:** Wenn man eine offene Personengesamtheit hat (was eigentlich meistens der Fall ist), dann ist eine einfache Methode zur Schätzung der rohen Sterbewahrscheinlichkeiten folgende: Sei  $l_x$  der Bestand unter Risiko stehender  $x$ -jähriger zu Beginn der Beobachtungsperiode,  $d_x$  die Anzahl beobachteter Sterbefälle innerhalb dieser Periode,  $Z_x$  die Anzahl Zugänge, die neu zur Personengesamtheit stossen und  $A_x$  die Abgänge (ohne Todesfälle). Dann schätzt man die Sterbewahrscheinlichkeit via

$$\hat{q}_x = \frac{d_x}{l_x + \frac{Z_x - A_x}{2}}$$

◇

Trägt man diese rohen Wahrscheinlichkeiten gegen  $x$  auf, wird es oft so sein, dass es starke Schwankungen gibt. Man hat also noch nicht die Werte, mit denen man rechnen will. Zwei Dinge müssen vorab getan werden:

- **Ausgleichen (Glätten) der rohen Wahrscheinlichkeiten.**

Hier hat man wie immer beim Glätten einen Trade-off zwischen **Varianz** und **Bias**, d.h. der Bias wächst mit zunehmender Glattheit, während die Varianz sinkt und umgekehrt.

– **Nichtparametrisches Glätten:**

z.B. mit einem gewichteten Mittel:

$$\hat{q}_x^{neu} = \frac{\sum_y w_y \hat{q}_y}{\sum_y w_y}$$

wobei die Gewichte  $w_y$  klein sein sollen für diejenigen  $y$ , die weit von  $x$  entfernt sind, z.B.  $w_y = k(\frac{|x-y|}{b})$ , dabei ist  $k(\cdot)$  proportional zu einer Dichte und  $b$  (die Bandbreite) gibt an, wie schnell das Gewicht auf 0 abfällt.

– **Parametrischer Ansatz:**

Anpassen einer Funktion mit  $p$  Parametern an die rohen Daten: z.B.

$$q_x = e^{a+bx+cx^2}$$

Solche Ansätze wurden schon sehr früh gemacht.

\* Moivre(1724):  $q_x = \frac{1}{a-x}$ . Dies ist aber definitiv eine zu simple Vorstellung

\* Dormoy:  $q_x = a \cdot b^x$

\* Gomperts:  $q_x = a \cdot b^{c^x}$

\* Makeham:  $q_x = a \cdot b^x \cdot c^{d^x}$

\* Perks:  $q_x = \frac{a+b \cdot c^x}{d \cdot c^{-x} + 1 + e^x}$

In den Figuren 3.2-3.2.1, in welchen Messungen von 1991/1995 über Männer berücksichtigt sind, wurden obige Methoden angepasst. Die Anpassung kann man mit der Kleinsten-Quadrate-Methode oder mittels Minimierung der  $\chi^2$ -Grösse

$$\sum_x \frac{(\hat{d}_x - d_x)^2}{\hat{t}_x}$$

vornehmen, wobei  $\hat{d}_x$  die geschätzten erwarteten Anzahl Tote und  $d_x$  die tatsächlich beobachtete Anzahl Tote darstellt.

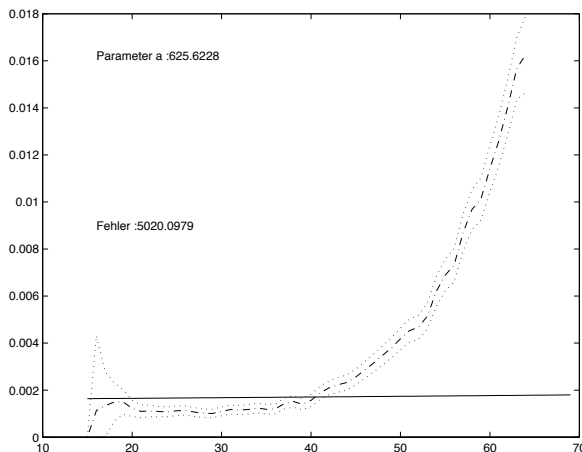


Abbildung 3.2: Moivre

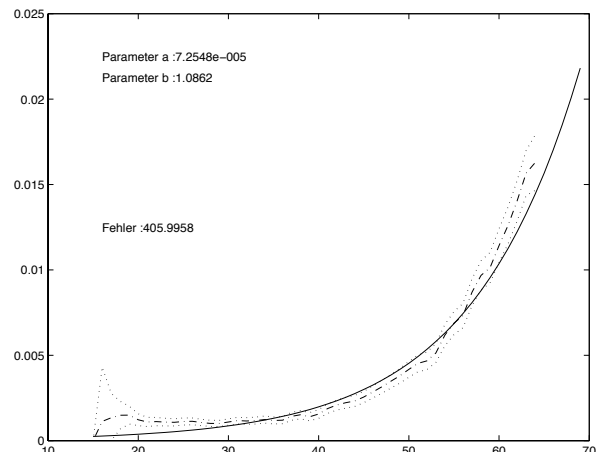


Abbildung 3.3: Dormoy

• **Trend- und Sicherheitsüberlegungen machen.**

Versicherungsgesellschaften geben Garantien über lange Zeitspannen und verpflichten sich, Prämien und Leistungen über die Versicherungsdauer fix zu halten. Da sich die Sterblichkeit in der Bevölkerung im Laufe der Zeit ändert (global gesehen nimmt die Sterblichkeit eher ab), müssen die Versicherungen darauf reagieren und Trends möglichst früh und gut abschätzen können, damit sich Fehlkalkulationen in Grenzen halten. Sie müssen also in den Sterbetafeln gewisse Sicherheitszuschläge machen. Je nach Versicherungsart ist ein

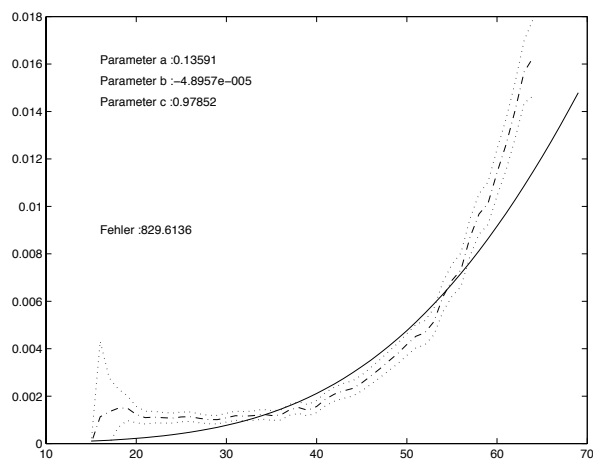


Abbildung 3.4: Gompertz

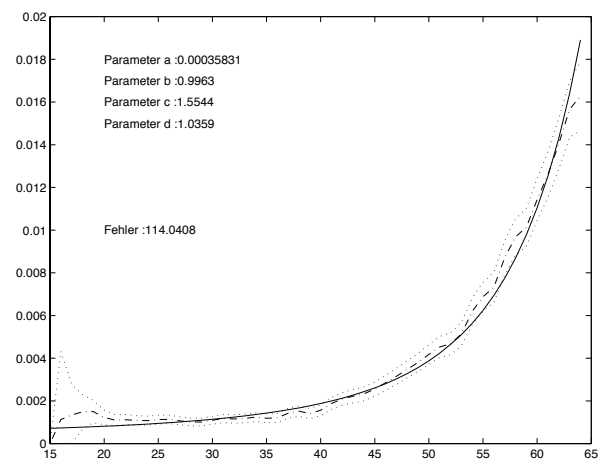


Abbildung 3.5: Makeham

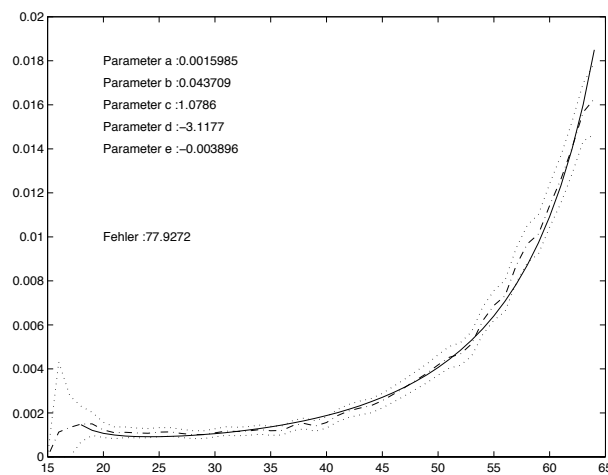


Abbildung 3.6: Perks

solcher Trend von Vorteil (Todesfallversicherungen werden billiger) oder von Nachteil (Rentenversicherungen werden teurer). Ein mögliches Modell zur Abnahme der Sterblichkeit ist z.B.

$$q_{x,t} = q_{x,t_0} e^{-\lambda_x(t-t_0)}$$

$e^{-\lambda_x}$  ist der Faktor der Abnahme pro Jahr.

### 3.2.2 Arten von Sterbetafeln

Im letzten Abschnitt wurde der Begriff der Personengemeinschaft von Gleichaltrigen eingeführt. Natürlich kann man die Personengemeinschaft von noch homogenen Individuen betrachten, indem man z.B. noch weiter nach Geschlecht oder Beruf unterteilt und daraus noch detailliertere Sterbetafeln generiert. Man unterscheidet zwischen **einfach** und **doppelt abgestuften** Sterbetafeln.

#### Einfach abgestufte Tafeln: Aggregattafeln

Diese sind (in der Regel) nach dem Alter abgestuft. Tafeln lassen sich aber in verschiedenster Art je nach Herkunft des Beobachtungsmaterials bilden, da die Sterblichkeit von den verschiedensten Einflüssen abhängt:

**Beobachtungszeit:** wichtig wegen dem Sterblichkeitstrend.

**Geschlecht:** Früher waren hauptsächlich Männer versichert. Zur Vereinfachung der Verwaltung wurde damals nur eine Sterbetafel verwendet für beide Geschlechter. Seit 1970 ist das in der Schweiz nicht mehr so, da zum einen die Unterschiede in der Sterblichkeit zwischen Männer und Frauen immer grösser werden, zum anderen, weil auch immer mehr Frauen Risikoversicherungen (d.h. Versicherungen mit geringem Sparelement) abschliessen.

**Volk versus Versicherte:** Die Volkssterblichkeit ist höher. Man hat hier einen Selektionseffekt: Bei der Einzelversicherung werden Personen erst nach einem ärztlichen Zeugnis aufgenommen, im Kollektiv ist der Effekt etwas geringer (Gesetz würde Gleichheit fordern), aber immerhin bedeutet die Tatsache, dass die versicherten Personen fähig sind zu arbeiten, dass sie in relativ gutem gesundheitlichen Zustand sind.

**Einzel- versus Kollektivversicherung:** Separate Grundlagen für die beiden Versicherungsarten.

**Kapital- und Rentenversicherung:** Nur wer gesund ist, kauft sich eine Rente.

**Berufe:** Nicht jeder Beruf belastet oder fördert die Gesundheit gleichermassen. Zudem sagt ein Beruf oft auch viel über den Lebensstandard einer Person aus, welcher wiederum einen Einfluss auf den Gesundheitszustand hat.

**Zivilstand:** Es gibt einige Untersuchungen, dass ledige, geschiedene oder verwitwete Personen nicht die gleiche Lebenserwartung haben. Zudem gibt es Studien, die behaupten, dass diese Unterschiede bei Männern und Frauen wiederum ganz unterschiedlich sind.

**Ort/Land:** Hier gibt es die grössten Unterschiede. Schweizerische Sterbetafeln sind nicht übertragbar auf ein anderes Land.

### Doppelt abgestufte Tafeln/ Selektionstafeln

Diese Tafeln berücksichtigen die oben erwähnte Selektionswirkung beim Underwriting:

- Kapitalversicherung: Versicherte mit ärztlicher Untersuchung haben in den ersten Jahren wesentlich geringere Mortalität als andere.
- Rentenversicherung: Eigene Wahl.
- Die Sterblichkeit von Invaliden ist von der Dauer der Invalidität abhängig. In den ersten Jahren ist die Sterblichkeit stark überhöht, später langsam wieder der Normalsterblichkeit angleichend.

Falls Selektionstafeln verwendet werden, benutzt man eine spezielle Notation:

$q_{[x]+t}$  : Sterblichkeit im Alter  $x+t$  bei Eintritt in die Versicherung mit Alter  $x$

$$q_{[x]+t} \leq q_{[x-1]+t+1} \leq q_{[x-2]+t+2} \leq \dots$$

Wenn man annimmt, dass die Selektionswirkung  $r$  Jahre dauert, so geht  $q_{[x]+t}$  nach  $r$  Jahren über in  $q_{x+t}$ .

### Generationentafeln

Diese Tafeln berücksichtigen die säkuläre Sterblichkeitsentwicklung. Dabei wird das Absterben einer ganzen Generation verfolgt. Das heisst diese Tafeln sind im Prinzip nach Alter und Kalenderjahr abgestuft. Gemessen werden snap-shots für Zeiträume. Man macht ein Modell und extrapoliert (was natürlich immer etwas heikel ist).

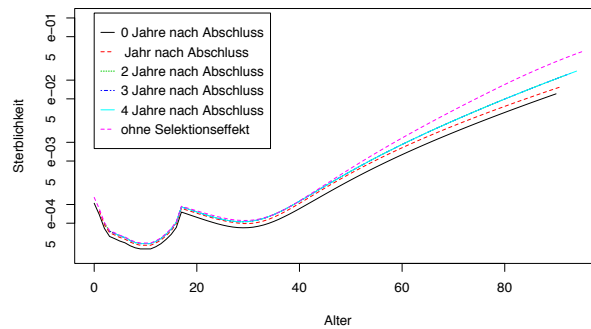


Abbildung 3.7: Selektionstafel

### 3.3 Die Anzahl vollständig gelebter Jahre

Wir haben in Abschnitt 3.1.1 mit  $T(x)$  die zukünftige Lebensdauer einer  $x$ -jährigen Person bezeichnet.  $T(x)$  nimmt Werte in  $\mathbb{R}^+$  an.

Nun wird die **Anzahl vollständig erlebter Jahre** mit

$$K := [T] \quad (3.8)$$

bezeichnet.

**Beispiel:**  $T = 12.75 \implies K = 12$

◇

$K$  ist somit eine ganzzahlige Zufallsvariable. Das übliche Tarifierungssystem stützt sich auf diese Zufallsvariable, da die Formeln etwas einfacher werden. Dafür geht man einen kleinen Fehler ein.

$$\begin{aligned} P[K = k] &= P[k \leq T < k + 1] \\ &= {}_k p_x \cdot q_{x+k} \end{aligned}$$

Mit  $e_x$  bezeichnen wir den Erwartungswert  $E[K]$ ,

$$e_x = \sum_k k P[K = k] = \sum_k k {}_k p_x \cdot q_{x+k}$$

Der Vorteil beim Arbeiten mit  $K$  statt  $T$  liegt darin, dass die Formeln viel einfacher werden. Der Preis ist, dass man einen kleinen Fehler macht. In Abschnitt 5.1.5 wird dieser Fehler für zwei Versicherungen betrachtet.

Die „restliche“ Überlebenszeit wird mit  $S$  bezeichnet, d.h.

$$T = K + S \quad (3.9)$$

wobei  $S \in [0, 1[$ . Falls man zudem annimmt, dass  $S$  gleichverteilt ist auf  $[0, 1[$ , dann ist der Erwartungswert von  $T$ ,  $\overset{\circ}{e}_x = E[T] = E[K] + E[S] = e_x + \frac{1}{2}$ .

### 3.4 Sterblichkeit für den Teil eines Jahres

Normalerweise sind  $q_x$ , d.h.  ${}_1 q_x$  bekannt durch eine Schätzung. Wenn man den Einfluss des unterjährigen Sterbens betrachten will, so sollte man  ${}_s q_x$  für  $s < 1$  kennen.

**1. Möglichkeit:**  ${}_s q_x$  ist linear für  $s < 1$

$$\begin{aligned} {}_0 q_x &= 0 \\ {}_1 q_x &= q_x \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass

$$\begin{aligned} {}_s q_x &= s \cdot q_x \\ {}_s p_x &= 1 - s \cdot q_x \end{aligned}$$

und somit

$$\mu_{x+s} = -\frac{d}{dt} \ln({}_t p_x) \big|_{t=s} = \frac{q_x}{1 - s \cdot q_x}$$

**Bemerkung:** Wenn  $K$  und  $S$  unabhängig sind und  $S$  gleichverteilt auf  $[0, 1]$ , so ergibt sich die obige Situation.  $\diamond$

**2. Möglichkeit:**  $\mu_{x+s}$  ist konstant für  $0 < s < 1$ .

Wir bezeichnen den konstanten Wert mit

$$\mu_{x+\frac{1}{2}} := \mu_{x+s} = -\frac{d}{dt} \ln({}_t p_x) \big|_{t=s}$$

Dann gilt

$${}_1 p_x = e^{-\int_0^1 \mu_{x+t} dt} = e^{-\mu_{x+\frac{1}{2}}}$$

und auch

$${}_s p_x = e^{-\int_0^s \mu_{x+t} dt} = e^{-s \cdot \mu_{x+\frac{1}{2}}} = (p_x)^s$$

Weiter

$$P[S \leq s | K = k] = \frac{1 - p_{x+k}^s}{1 - p_{x+k}}$$

Daraus folgt, dass die bedingte Verteilung von  $S$  gegeben  $K = k$  eine abgeschnittene Exponentialverteilung ist. Das bedeutet, dass  $S$  und  $K$  nicht unabhängig sind.

**3. Möglichkeit:** Linearität von  ${}_{1-s} q_{x+s}$ .

Diese Annahme, die sogenannte Balducci Annahme, ist in den USA sehr bekannt:

$${}_{1-s} q_{x+s} = (1-s) \cdot q_x$$

somit gilt

$${}_s p_x = \frac{p_x}{1-s p_{x+s}} = \frac{1 - q_x}{1 - (1-s) q_x}$$

weiter ist

$$\mu_{x+s} = \frac{q_x}{1 - (1-s) \cdot q_x}$$

und

$$P[S \leq s | K = k] = \frac{s}{1 - (1-s) \cdot q_{x+k}}$$

# Kapitel 4

## Mehrdimensionale Bewertung

### 4.1 Einleitung

Es gibt viele Methoden, die Verpflichtungen einer Versicherungsgesellschaft zu bewerten. Die *traditionelle aktuarische Bewertung* wird in einer Dimension durchgeführt, nämlich in einer bestimmten Währung, z.B. in CHF. Die erhaltenen Beträge werden dann in die Bilanz übertragen.

In diesem Kapitel betrachten wir ein anderes Vorgehen:

A) Wir messen Verpflichtungen nicht in *Währungen* sondern in *Einheiten*. Das heisst, wir stellen die Verpflichtungen in einer Basis von Finanzinstrumenten dar.

B) Wir definieren eine Abbildung von der Menge der Einheiten in die Menge der Währungen (z.B. CHF).

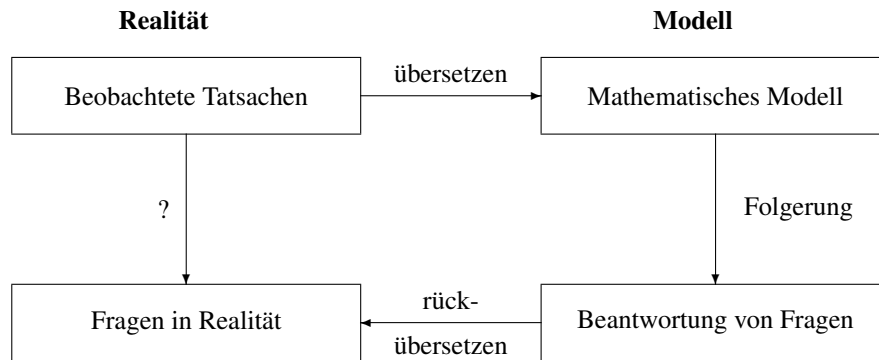
C) Wir müssen A) klar erfassen und zeigen, wie wir von A) nach B) gelangen.

Im folgenden Kapitel werden wir Begriffe einführen, damit wir dieses Vorgehen formal darstellen können. Wir werden das Verfahren in drei Schritte aufteilen und mit Beispielen illustrieren.

### 4.2 Modell

Wir können die Mathematik der Lebensversicherung auf unterschiedlichen Niveaus betrachten. Auf der einen Seite haben wir die Realität, in der wir Beobachtungen machen, auf der anderen Seite ein mathematisches Modell. In der Realität ist es oft schwierig, Probleme direkt zu lösen. Wir konstruieren deshalb ein mathematisches Modell, welches die Beobachtungen möglichst gut widerspiegeln und einfach sein soll.

Wir lösen die Probleme im Modell und übersetzen die Ergebnisse in die Realität. Schematisch sieht das wie folgt aus:



Im Weiteren werden wir zwei Modelle verwenden:

- Das Markovmodell: Zur Beschreibung der Versicherungsverträge;
- Ein Modell mit Finanzinstrumenten zur Berechnung des Wertes einer Versicherungspolice.

*Markovmodell:*

Das Markovmodell wird in [Koller] ausführlich beschrieben. Wir werden hier nur die wichtigsten Begriffe einführen.

Das Markovmodell geht von einer endlichen Anzahl Zuständen  $S$  aus. Für jeden Zustand  $i \in S$  definieren wir die Vertragsfunktionen

- $a_i^{Pre}(t)$ : Rentenzahlung zur Zeit  $t$ , falls sich die Person zur Zeit  $t$  im Zustand  $i$  befindet;
- $a_{ij}^{Post}(t)$ : Kapitalleistung zur Zeit  $t+1$ , falls die Person zwischen  $[t, t+1)$  vom Zustand  $i$  in den Zustand  $j$  wechselt.

Weiter brauchen wir auch die Übergangswahrscheinlichkeiten  $p_{ij}(t)$ .  $p_{ij}(t)$  ist die Wahrscheinlichkeit, dass die versicherte Person im Zeitintervall  $[t, t+1)$  vom Zustand  $i$  in den Zustand  $j$  gelangt.

Wir können praktisch jeden Versicherungsvertrag  $g_x$  mit Hilfe der Vertragsfunktionen und den Übergangswahrscheinlichkeiten darstellen:

$$g_x = \{a_i^{Pre}, a_{ij}^{Post}; i, j \in S\},$$

wobei  $x$  das Anfangsalter der versicherten Person ist. Wir bezeichnen mit  $\mathcal{G}$  die Menge aller Versicherungsverträge und mit  $\omega$  das Schlussalter.

*Modell mit Finanzinstrumenten:*

Das Modell wird beschrieben durch eine endliche Anzahl von Finanzinstrumenten. Diese Finanzinstrumente bilden einen Vektorraum  $\mathcal{F}$ , und wir wählen eine Basis  $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_m\}$  aus Einheiten von Finanzinstrumenten von  $\mathcal{F}$ :

$$\mathcal{F} = \langle e_1, \dots, e_m \rangle.$$

Wir können jedes Finanzinstrument in dieser Basis darstellen. Dies hat den Vorteil, dass wir nur Aussagen über  $e_i, i = 1, \dots, m$  machen müssen und nicht über jedes Finanzinstrument.

In der Realität haben wir einen Versicherungsvertrag, den wir bewerten wollen. Wir stellen diesen Vertrag im Modell mit den Finanzinstrumenten dar, bewerten ihn im Modell und übersetzen den Wert wieder in die Realität. Wir präzisieren dieses Vorgehen:

- Wir definieren eine Abbildung  $\varphi$  von der Menge der Versicherungsprodukte  $\mathcal{G}$  in den Vektorraum  $\mathcal{F}$  aufgespannt von den Einheiten  $e_i, i = 1, \dots, m$ :

$$\begin{aligned} \varphi: \mathcal{G} &\rightarrow \mathcal{F} \\ g &\mapsto \sum_{i=1}^m \lambda_i(g) e_i, \end{aligned} \tag{4.1}$$

mit  $\lambda_i(g) = \langle \varphi(g), e_i \rangle$ , wobei  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  das Skalarprodukt bezeichnet.



- Wir transformieren die Bewertung in Einheiten mit der Abbildung  $\psi$  in Geldbeträge, wobei

$$\psi: \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i(g) e_i \mapsto \psi\left(\sum_{i=1}^m \lambda_i(g) e_i\right). \quad (4.2)$$

Wir definieren  $\psi$  als lineare Abbildung, d.h.

$$\psi\left(\sum_{i=1}^m \lambda_i(g) e_i\right) = \sum_{i=1}^m \lambda_i(g) \psi(e_i).$$

Wir müssen folglich nur  $\psi(e_i), i = 1, \dots, m$ , kennen, um den Wert eines Versicherungsvertrages bestimmen zu können.

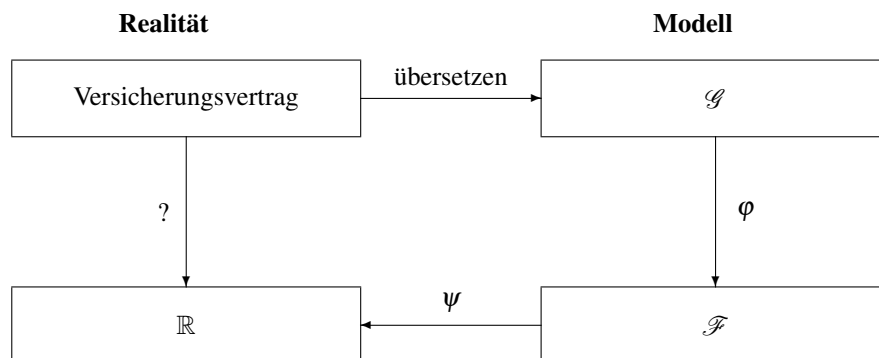
Wir können verschiedene Bewertungsprinzipien anwenden, deshalb gibt es auch mehrere Abbildungen  $\psi$ . Wir werden zwei Bewertungsprinzipien  $\psi_1$  und  $\psi_2$  betrachten:

$$\left. \begin{matrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{matrix} \right\} \text{ ordnet den Einheiten ihren } \left\{ \begin{matrix} \text{Marktwert} \\ \text{Buchwert} \end{matrix} \right\} \text{ zu.} \quad (4.3)$$

#### Bemerkungen:

- Mit der Abbildung  $\psi_2$  berechnen wir genau das klassische Deckungskapital. Das Deckungskapital ist die Reserve für eine Versicherung. Dieser Betrag muss vorhanden sein, um die erwarteten Verpflichtungen erfüllen zu können.

Schematisch sieht dies wie folgt aus:



◇

Wir haben alle nötigen Begriffe eingeführt, um den Bewertungsprozess zu beschreiben.

## 4.3 Bewertungsprozess

Wir werden den Bewertungsprozess in drei Schritte unterteilen:

**Schritt 1:** Wir definieren angemessene *Einheiten*  $e_i, i = 1, \dots, m$ , wobei  $m$  die Anzahl benötigter Einheiten bezeichnet. Diese Einheiten sind Finanzinstrumente mit Payoff, die der Versicherungsleistung entsprechen. Wir wählen die Einheiten so, dass sie eine Basis für die Bewertungen bilden und somit den Vektorraum  $\mathcal{F} = \langle e_1, \dots, e_m \rangle$  aufspannen.

**Schritt 2:** Wir führen eine mehrdimensionale Bewertung in Einheiten durch mit einem *Valuationsportfolio* (VaPo). Dazu verwenden wir die Abbildung  $\varphi$  in (4.1).

**Schritt 3:** Wir transformieren mit  $\psi$  in (4.2) die *Bewertung in Einheiten* in *Geldbeträge*.

## 4.4 Beispiele

### 4.4.1 Einleitung

Wir haben im Abschnitt 4.3 die drei Schritte des Bewertungsprozesses kennengelernt. Jetzt führen wir diese Schritte an Hand von Beispielen aus.

Das erste Beispiel ist eine gemischte Versicherung mit einer kurzen Laufzeit. Wir schreiben jeden Schritt exakt auf. Die weiteren Beispiele haben eine längere Laufzeit, und wir betrachten nur noch die Schritte zu Beginn der Versicherungsdauer. Aber das Vorgehen wird natürlich gleich sein wie beim ersten Beispiel.

Wir werden die Prämien auf zwei verschiedene Arten berechnen:

- *Klassische Methode:* Wir bestimmen die Prämie mit Hilfe der Kommutationszahlen der Sterbetafel EKM95 mit einem technischen Zins von 2.5%.
- *Valuationsportfolio-Methode:* Wir haben zwei verschiedene Zinsstrukturen zur Verfügung (siehe Anhang D):
  - 10. Mai 2000: 1-10 Jahre,
  - 26. November 2002: 1-30 Jahre.

Das *Prämienberechnungsprinzip* bleibt bei beiden Methoden dasselbe:

$$\text{Barwert der Prämien} = \text{Barwert der Leistungen.}$$

Für die weiteren Berechnungen verwenden wir die Prämie, die wir mit den Kommutationszahlen berechnet haben. Denn in der Praxis wird dies auch so durchgeführt.

Die Prämie, die wir aus der Zinsstruktur ermittelt haben, ist die zum Tarifierungszeitpunkt faire Prämie. Sie ist in der Regel tiefer als die traditionell berechnete Prämie, weil diese auf konservativen Annahmen beruht.

**Beispiel:** In der EU ist der technische Zins maximal 60% der Bundesobligationenrendite. ◇

Wir werden zwei Situationen betrachten:

- Eine einzelne Police: Wir untersuchen, wie sich die Police während der Versicherungsdauer verhält. Wir nehmen dabei an, dass sich die Yield-Curve nicht verändert.
- Ein Portefeuille bestehend aus gleichen Policen mit unterschiedlicher Restlaufzeit: Wir berechnen den Wert des *VaPo* der verschiedenen Policen im Portefeuille zur Zeit 2000 bzw. 2002.

### 4.4.2 Gemischte Versicherung

#### Situation

Wir betrachten eine gemischte Versicherung gegen Prämienzahlung eines 50-jährigen Mannes mit folgenden Daten:

Todesfall- und Erlebensfallleistung	$C = 50'000 \text{ CHF}$
Eintrittsalter	$x = 50 \text{ Jahre}$
Laufzeit	$n = 5 \text{ Jahre}$

#### Bemerkungen:

1. Die Zeitskala ist in Jahren. Wir verschieben den Zeiteursprung, d.h. wir stellen uns vor, dass wir uns im Jahr 50 befinden. Wir verwenden deshalb das Alter an Stelle der Zeit.
2. Die Leistungen werden *am Ende* des Todesfalljahres ausbezahlt.
3. Prämien  $\Pi$  sind *zu Beginn* des Jahres fällig. ◇

**Konvention:** Zahlungen, die der Versicherer *erhält*, haben ein *negatives* Vorzeichen, Zahlungen, die er *tätigt*, ein *positives*. ◇

#### Beschreibung des Versicherungsvertrages:

Zustandsraum  $S = \{*, \dagger\}$

Vertragsfunktionen:

$$a_*^{Pre}(t) = \begin{cases} -\Pi, & t = 50, \dots, 54 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$a_{*\dagger}^{Post}(t) = \begin{cases} C, & t = 50, \dots, 54 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad a_{**}^{Post}(t) = \begin{cases} C, & t = 54 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Übergangswahrscheinlichkeiten:

$$\begin{aligned} p_{**}(t) &= p_t \\ p_{*\dagger}(t) &= q_t \\ p_{\dagger*}(t) &= 0 \\ p_{\dagger\dagger}(t) &= 1 \end{aligned}$$

Versicherungsvertrag:  $g_{50} = \{a_*^{Pre}, a_{*\dagger}^{Post}, a_{**}^{Post}, p_{**}, p_{*\dagger}, p_{\dagger*}, p_{\dagger\dagger}\}$ .

**Unsere Aufgabe:** Welches ist der Wert dieser Versicherungspolice

$$\left. \begin{array}{l} \text{im Alter 50} \\ \text{im Alter 51} \\ \text{im Alter 52} \\ \text{im Alter 53} \\ \text{im Alter 54} \end{array} \right\} \text{ jeweils vor der Prämienzahlung } \Pi?$$

Wir führen die einzelnen Schritte des Bewertungsprozesses durch:

**Schritt 1: Wir definieren die Einheiten**

- Prämien: Die Prämien  $\Pi$  werden im Alter  $t$  bezahlt,  $t = 50, \dots, 54$ . Wir können die Prämienzahlung im Alter  $t$  auffassen als Zero-Coupon Anleihe in der Höhe  $\Pi$  mit negativem Vorzeichen und Laufzeit  $t - 50$ . Wir nehmen deshalb als Einheit einen Zero-Coupon Bond mit Laufzeit  $t - 50$ , der im Alter  $t$  1 CHF bezahlt. Wir bezeichnen ihn mit  $Z^{(t)}$ .
- Todesfallleistung: Die Todesfallleistungen können wir auch als ZCB  $Z^{(t)}$  mit  $t = 51, \dots, 55$  betrachten.
- Erlebensfallleistung: Die Erlebensfallleistung im Alter  $t = 55$  ist  $Z^{(55)}$ .

Wir haben die folgenden sechs Einheiten definiert:

$$Z^{(t)}, t = 50, 51, 52, 53, 54, 55.$$

Sie bilden eine Basis  $\mathcal{B} = \{Z^{(50)}, Z^{(51)}, Z^{(52)}, Z^{(53)}, Z^{(54)}, Z^{(55)}\}$  für unsere Bewertung. In dieser Basis können wir das *VaPo* ausdrücken.

**Bewertung im Alter  $t = 50$ :****Schritt 2: Bewertung in Einheiten**

Wir betrachten zwei Valuationsschemen:

- **Schema A** beschreibt
  - wann die Prämien erhalten und die Leistungen gezahlt werden.
  - wie hoch diese Verpflichtungen sind.

Diese Informationen erhalten wir aus den Vertragsfunktionen und den Übergangswahrscheinlichkeiten.

- **Schema B** zeigt
  - welche Einheiten im Portfolio enthalten sind:  $e_1, \dots, e_m$ .
  - die Anzahl der verschiedenen Einheiten:  $\lambda_1(g_{50}), \dots, \lambda_m(g_{50})$ .

Wir stellen jetzt diese Schemen für die gemischte Versicherung zusammen.

Wir werden zuerst eine Bewertung für  $l_{50}$  Personen durchführen. Dazu brauchen wir die Sterbetafel. Danach machen wir die Bewertung abstrakt. Diese Darstellung hat den Vorteil, dass sie für alle Versicherungsverträge dieselbe Form hat. Wir brauchen nur die Vertragsfunktionen und die Übergangswahrscheinlichkeiten zu kennen.

**Bewertung im Alter 50 für  $l_{50}$  Personen:****Valuationsschema A:**

Zahlungen im Alter	Prämien	Todesfallleistung	Erlebensfallleistung
50	$-l_{50} \cdot \Pi \cdot Z^{(50)}$		
51	$-l_{51} \cdot \Pi \cdot Z^{(51)}$	$d_{50} \cdot C \cdot Z^{(51)}$	
52	$-l_{52} \cdot \Pi \cdot Z^{(52)}$	$d_{51} \cdot C \cdot Z^{(52)}$	
53	$-l_{53} \cdot \Pi \cdot Z^{(53)}$	$d_{52} \cdot C \cdot Z^{(53)}$	
54	$-l_{54} \cdot \Pi \cdot Z^{(54)}$	$d_{53} \cdot C \cdot Z^{(54)}$	
55		$d_{54} \cdot C \cdot Z^{(55)}$	$l_{55} \cdot C \cdot Z^{(55)}$

**Prämienberechnung:**

Damit wir die Bewertung vollständig durchführen können, müssen wir zuerst die Prämie via Äquivalenzprinzip berechnen:

- Klassischer Ansatz:

$$\text{Barwert der Prämien} = \text{Barwert der Leistungen}$$

$$\overset{||}{\Pi \cdot \ddot{a}_{50:\overline{5}|}} \quad \overset{||}{A_{50:\overline{5}|} \cdot C}$$

Mit Hilfe der Kommutationszahlen der Sterbetafel EKM95 mit einem technischen Zins von 2.5% erhalten wir:

$$\begin{aligned} \text{Prämie } \Pi &= \frac{M_{50} - M_{55} + D_{55}}{N_{50} - N_{55}} \cdot C \\ &= \frac{13'245 - 12'613 + 23'237.84}{562'903 - 435'605} \cdot 50'000 \text{ CHF} = 9'375.21 \text{ CHF} \end{aligned}$$

- Valuationsportfolio: Damit wir die Prämie mit dem *VaPo* berechnen können, müssen wir den Wert von  $Z^{(T)}$  kennen. Diesen Wert entnehmen wir der Tabelle im Anhang D. Er entspricht dem Wert  $P(50, T)$ .

$$\begin{aligned} \text{Barwert der Prämien} &= l_{50} \cdot \Pi + l_{51} \cdot \Pi \cdot P(50, 51) + l_{52} \cdot \Pi \cdot P(50, 52) \\ &\quad + l_{53} \cdot \Pi \cdot P(50, 53) + l_{54} \cdot \Pi \cdot P(50, 54) \\ \text{Barwert der Leistungen} &= [d_{50} \cdot P(50, 51) + d_{51} \cdot P(50, 52) + d_{52} \cdot P(50, 53) \\ &\quad + d_{53} \cdot P(50, 54) + d_{54} \cdot P(50, 55) + l_{55} \cdot P(50, 55)] \cdot C \\ \Rightarrow \Pi &= \frac{d_{50} \cdot P(50, 51) + d_{51} \cdot P(50, 52) + d_{52} \cdot P(50, 53) + d_{53} \cdot P(50, 54) + d_{54} \cdot P(50, 55) + l_{55} \cdot P(50, 55)}{l_{50} + l_{51} \cdot P(50, 51) + l_{52} \cdot P(50, 52) + l_{53} \cdot P(50, 53) + l_{54} \cdot P(50, 54)} \cdot C \\ &= \begin{cases} 8'869.03 \text{ CHF, Zinsstruktur 2000} \\ 9'372.78 \text{ CHF, Zinsstruktur 2002} \end{cases} \end{aligned}$$

#### Valuationsschema B:

Einheit $e_t$	Anzahl Einheiten für $l_{50}$ Personen		
	Prämie	Leistungen	Total
$Z^{(50)}$	$-l_{50} \cdot \Pi$		$-l_{50} \cdot \Pi$
$Z^{(51)}$	$-l_{51} \cdot \Pi$	$d_{50} \cdot C$	$-l_{51} \cdot \Pi + d_{50} \cdot C$
$Z^{(52)}$	$-l_{52} \cdot \Pi$	$d_{51} \cdot C$	$-l_{52} \cdot \Pi + d_{51} \cdot C$
$Z^{(53)}$	$-l_{53} \cdot \Pi$	$d_{52} \cdot C$	$-l_{53} \cdot \Pi + d_{52} \cdot C$
$Z^{(54)}$	$-l_{54} \cdot \Pi$	$d_{53} \cdot C$	$-l_{54} \cdot \Pi + d_{53} \cdot C$
$Z^{(55)}$		$d_{54} \cdot C$	$l_{55} \cdot C + d_{54} \cdot C$

Wie in der Einleitung erwähnt, setzen wir für  $\Pi$  die klassisch berechnete Prämie ein. Denn dies ist die Prämie, die der Kunde heute für die Versicherung bezahlen müsste. In diesem Beispiel ist dies 9'375.21 CHF.

Einheit $e_t$	Anzahl Einheiten pro Person		
	Prämie	Leistungen	Total
$Z^{(50)}$	-9'375		-9'375
$Z^{(51)}$	-9'336	208	-9'128
$Z^{(52)}$	-9'293	229	-9'064
$Z^{(53)}$	-9'246	251	-8'995
$Z^{(54)}$	-9'194	275	-8'919
$Z^{(55)}$		302	48'734
			49'036

#### Zusammenhang mit den Vertragsfunktionen und den Übergangswahrscheinlichkeiten:

Bevor wir uns Schritt 3 zuwenden, stellen wir diese zwei Schemen in einer abstrakten Weise dar:

#### Bewertung im Alter 50 für eine Person:

Wir betrachten die  $t$ -te Zeile des Valuationsportfolio A und dividieren sie durch  $l_{50}$ .

**Valuationsschema A:**

Zahlungen im Alter	Prämien	Todesfallleistung	Erlebensfallleistung
$t$	$\frac{l_t}{l_{50}} a_*^{Pre}(t) Z^{(t)}$	$\frac{d_{t-1}}{l_{50}} a_{*+}^{Post}(t-1) Z^{(t)}$	$\frac{l_t}{l_{50}} a_{**}^{Post}(t-1) Z^{(t)}$

Wir verwenden die Beziehungen:

$$\begin{aligned} \frac{l_t}{l_x} &= {}_{t-x}p_x = \prod_{k=x}^t p_k = \prod_{k=x}^t p_{**}(k) = p_{**}(x, t), \\ \frac{d_{t-1}}{l_x} &= \frac{d_{t-1}}{l_{t-1}} \frac{l_{t-1}}{l_x} = {}_{t-x-1}p_x q_{t-1} = q_{t-1} \prod_{k=x}^{t-2} p_k = p_{*+}(t-1) \prod_{k=x}^{t-2} p_{**}(k) \\ &= p_{**}(x, t-1) p_{*+}(t-1) \end{aligned}$$

und erhalten die Zahlungen im Alter  $t$ :

$$\begin{aligned} \text{Prämien:} \quad & p_{**}(50, t) a_*^{Pre}(t) Z^{(t)} \\ \text{Todesfallleistung:} \quad & p_{**}(50, t-1) p_{*+}(t-1) a_{*+}^{Post}(t-1) Z^{(t)} \\ \text{Erlebensfallleistung:} \quad & p_{**}(50, t) a_{**}^{Post}(t-1) Z^{(t)} \end{aligned}$$

**Valuationsschema B:**

$e_t$	Anzahl der Einheiten $\lambda_t$
$Z^{(t)}$	$p_{**}(50, t) a_*^{Pre}(t) + p_{**}(50, t-1) p_{*+}(t-1) a_{*+}^{Post}(t-1) + p_{**}(50, t) a_{**}^{Post}(t-1)$

*Vorteil dieser Darstellung:* Wir haben die Vertragsfunktionen so definiert, dass die Valuationsschemen für alle  $t$  gültig sind.

Mit der Abbildung  $\varphi$  in (4.1) können wir dies kompakt schreiben:

$$\begin{aligned} \varphi(g_{50}) &= \sum_{t=1}^{\omega} \left[ p_{**}(50, t) a_*^{Pre}(t) + p_{**}(50, t-1) p_{*+}(t-1) a_{*+}^{Post}(t-1) + p_{**}(50, t) a_{**}^{Post}(t-1) \right] Z^{(t)} \\ &= \sum_{t=1}^{\omega} p_{**}(50, t-1) \left[ p_{**}(t) a_*^{Pre}(t) + p_{*+}(t-1) a_{*+}^{Post}(t-1) + p_{**}(t) a_{**}^{Post}(t-1) \right] Z^{(t)} \end{aligned}$$

**Schritt 3: Bewertung in Geld (CHF)**

Wir betrachten

- die Abbildung  $\psi_1$  in (4.3), die den Einheiten ihren Marktwert zuordnet, d.h.

$$\psi_1(Z^{(t)}) = P(50, t).$$

**Beispiel:**  $\psi_1(Z^{(51)}) = P(50, 51)$  entspricht dem Wert eines Bond mit einjähriger Laufzeit (Siehe Tabelle Anhang D).  $\diamond$

- die Abbildung  $\psi_2$ , die den Einheiten ihren Buchwert zuordnet, d.h.

$$\psi_2(Z^{(t)}) = v^{t-50},$$

wobei:  $v = \frac{1}{1+i}$ ,  $i$  der technische Zinssatz.

Aus dem Valuationsschema B erhalten wir den Wert des *VaPo*. Wir multiplizieren die Anzahl der Einheiten von  $Z^{(51)}$  mit dem Wert von  $Z^{(51)}$ . Analog gehen wir vor für  $Z^{(52)}, \dots, Z^{(55)}$ . Am Schluss addieren wir diese Werte und erhalten den Wert des *VaPo* im Alter 50.

**Bezeichnungen:** Den Wert des *VaPo* im Alter  $t$  unter der Abbildung  $\psi_1$  bezeichnen wir mit  $V_t$ , unter  $\psi_2$  mit  $DK_t$ .

Zahlungen im Alter	$V_{50}$ mit Zins- struktur 2000	$V_{50}$ mit Zins- struktur 2002	$DK_{50}$
50	-9'375.21	-9'375.21	-9'375.21
51	-8'784.52	-9'043.42	-8'905.20
52	-8'365.82	-8'824.58	-8'627.53
53	-7'946.17	-8'552.66	-8'352.58
54	-7'543.31	-8'252.87	-8'080.14
55	39'689.57	44'037.07	43'340.67
Total	-2'325.45	-11.67	0

## Bewertung im Alter $t=51$

### Schritt 2: Bewertung in Einheiten

Wir betrachten wieder zuerst die Bewertung für  $l_{51}$  und dann für eine Person.

#### Bewertung im Alter 51 für $l_{51}$ Personen:

##### Valuationsschema A:

Unser Valuationsschema A im Alter 51 entspricht dem Schema A im Alter 50, indem wir die Prämienzahlungen und die Leistungen im Alter 50 weglassen.

Zahlungen im Alter	Prämien	Todesfallleistung	Erlebensfallleistung
51	$-l_{51} \cdot \Pi \cdot Z^{(51)}$		
52	$-l_{52} \cdot \Pi \cdot Z^{(52)}$	$d_{51} \cdot C \cdot Z^{(52)}$	
53	$-l_{53} \cdot \Pi \cdot Z^{(53)}$	$d_{52} \cdot C \cdot Z^{(53)}$	
54	$-l_{54} \cdot \Pi \cdot Z^{(54)}$	$d_{53} \cdot C \cdot Z^{(54)}$	
55		$d_{54} \cdot C \cdot Z^{(55)}$	$l_{55} \cdot C \cdot Z^{(55)}$

##### Valuationsschema B:

Einheit $e_t$	Anzahl Einheiten für $l_{51}$ Personen		
	Prämie	Leistungen	Total
$Z^{(51)}$	$-l_{51} \cdot \Pi$		$-l_{51} \cdot \Pi$
$Z^{(52)}$	$-l_{52} \cdot \Pi$	$d_{51} \cdot C$	$-l_{52} \cdot \Pi + d_{51} \cdot C$
$Z^{(53)}$	$-l_{53} \cdot \Pi$	$d_{52} \cdot C$	$-l_{53} \cdot \Pi + d_{52} \cdot C$
$Z^{(54)}$	$-l_{54} \cdot \Pi$	$d_{53} \cdot C$	$-l_{54} \cdot \Pi + d_{53} \cdot C$
$Z^{(55)}$		$d_{54} \cdot C$	$l_{55} \cdot C + d_{54} \cdot C$

Einheit $e_t$	Anzahl Einheiten pro Person		
	Prämie	Leistungen	Total
$Z^{(51)}$	-9'375		-9'375
$Z^{(52)}$	-9'332	230	-9'102
$Z^{(53)}$	-9'285	252	-9'033
$Z^{(54)}$	-9'233	277	-8'956
$Z^{(55)}$		303	48'938
			49'241

**Bewertung im Alter 51 für eine Person:**

Wir betrachten die  $t$ -te Zeile des Valuationsportfolio A und dividieren sie durch  $l_{51}$ .

**Valuationsschema A:**

Zahlungen im Alter	Prämien	Todesfallleistung	Erlebensfallleistung
51	$a_*^{Pre}(51)Z^{(51)}$		
$t > 51$	$\frac{l_t}{l_{51}} a_*^{Pre}(t)Z^{(t)}$	$\frac{d_{t-1}}{l_{51}} a_{*+}^{Post}(t-1)Z^{(t)}$	$\frac{l_t}{l_{51}} a_{**}^{Post}(t-1)Z^{(t)}$

**Bemerkung:** Weil die Leistungen kurz *vor* Jahresende und die Prämien *zu Beginn* des Jahres bezahlt werden, können wir denselben ZCB verwenden. Wir stellen aber die Valuationsschemen genau am Jahresanfang auf, d.h. die Leistungen sind bezahlt, aber die Prämien haben wir noch nicht erhalten. Deshalb stehen im Alter 51 nur noch die Prämien aus.  $\diamond$

Wie vorher erhalten wir die Zahlungen im Alter  $t$ :

$$\text{Prämien:} \quad p_{**}(51, t) a_*^{Pre}(t) Z^{(t)}$$

$$\text{Todesfallleistung:} \quad p_{**}(51, t-1) p_{*+}(t-1) a_{*+}^{Post}(t-1) Z^{(t)}$$

$$\text{Erlebensfallleistung:} \quad p_{**}(51, t) a_{**}^{Post}(t-1) Z^{(t)}$$

**Bemerkung:** Hier ist keine Unterscheidung mehr nötig. Denn für  $t = 51$ , ist

$$p_{**}(51, 50) = 0.$$

$\diamond$

**Valuationsschema B:**

$e_t$	Anzahl der Einheiten $\lambda_t$
$Z^{(t)}$	$p_{**}(51, t) a_*^{Pre}(t) + p_{**}(51, t-1) p_{*+}(t-1) a_{*+}^{Post}(t-1) + p_{**}(51, t) a_{**}^{Post}(t-1)$

Mit der Abbildung  $\varphi$  in (4.1) können wir dies kompakt schreiben:

$$\begin{aligned} \varphi(g_{50}) &= \sum_{t=1}^{\omega} \left[ p_{**}(51, t) a_*^{Pre}(t) + p_{**}(51, t-1) p_{*+}(t-1) a_{*+}^{Post}(t-1) + p_{**}(51, t) a_{**}^{Post}(t-1) \right] Z^{(t)} \\ &= \sum_{t=1}^{\omega} p_{**}(51, t-1) \left[ p_{**}(t) a_*^{Pre}(t) + p_{*+}(t-1) a_{*+}^{Post}(t-1) + p_{**}(t) a_{**}^{Post}(t-1) \right] Z^{(t)} \end{aligned}$$



**Schritt 3: Bewertung in Geld (CHF)**

Wenn wir annehmen, dass sich die Zinsstruktur nicht verändert, können wir den Wert von  $Z^{(52)}$  unter der Abbildung  $\psi_1$  im Alter 51 mit der Formel (2.1) berechnen:

$$P(50, 51, 52) = \frac{P(50, 52)}{P(50, 51)},$$

wobei wir die Notation von Kapitel 2.2 übernommen haben. Wir bestimmen heute (im Alter 50) den Wert des *VaPo* in einem Jahr. Wir bezeichnen diesen Wert mit  $V_{51|50}$  und nennen ihn *Forward Marktwert*.

Unter  $\psi_2$  hat  $Z^{(52)}$  im Alter 51 den Wert  $v$ .

Der Wert der anderen Einheiten im *VaPo* wird auf dieselbe Weise berechnet.

Wenn wir zusätzlich annehmen, dass die Leute gemäss Sterbetafel sterben, können wir  $V_{51|50}$  und  $DK_{51}$  im Alter 51 ermitteln.

Zahlungen im Alter	$V_{51 50}$ mit Zins- struktur 2000	$V_{51 50}$ mit Zins- struktur 2002	$DK_{51}$
51	-9'375.21	-9'375.21	-9'375.21
52	-8'729.14	-8'944.22	-8'880.22
53	-8'291.26	-8'668.61	-8'597.22
54	-7'870.91	-8'364.76	-8'316.80
55	41'413.25	44'634.08	44'610.04
Total	7'146.74	9'281.30	9'440.61

**Bewertung im Alter  $t=52$** 

**Bewertung im Alter 52 für  $l_{52}$  Personen:**

**Valuationsschema A:**

Zahlungen im Alter	Prämien	Todesfallleistung	Erlebensfallleistung
52	$-l_{52} \cdot \Pi \cdot Z^{(52)}$		
53	$-l_{53} \cdot \Pi \cdot Z^{(53)}$	$d_{52} \cdot C \cdot Z^{(53)}$	
54	$-l_{54} \cdot \Pi \cdot Z^{(54)}$	$d_{53} \cdot C \cdot Z^{(54)}$	
55		$d_{54} \cdot C \cdot Z^{(55)}$	$l_{55} \cdot C \cdot Z^{(55)}$

**Valuationsschema B:**

Einheit $e_t$	Anzahl Einheiten für $l_{52}$ Personen		
	Prämie	Leistungen	Total
$Z^{(52)}$	$-l_{52} \cdot \Pi$		$-l_{52} \cdot \Pi$
$Z^{(53)}$	$-l_{53} \cdot \Pi$	$d_{52} \cdot C$	$-l_{53} \cdot \Pi + d_{52} \cdot C$
$Z^{(54)}$	$-l_{54} \cdot \Pi$	$d_{53} \cdot C$	$-l_{54} \cdot \Pi + d_{53} \cdot C$
$Z^{(55)}$		$d_{54} \cdot C$	$l_{55} \cdot C + d_{54} \cdot C$

Einheit $e_t$	Anzahl Einheiten pro Person		
	Prämie	Leistungen	Total
$Z^{(52)}$	-9'375		-9'375
$Z^{(53)}$	-9'328	254	-9'074
$Z^{(54)}$	-9'276	278	-8'998
$Z^{(55)}$		304	49'164
			49'469

**Bewertung im Alter 52 für eine Person:**

Wir betrachten die  $t$ -te Zeile des Valuationsportfolio A und dividieren sie durch  $l_{52}$ .

**Valuationsschema A:**

Zahlungen im Alter	Prämien	Todesfallleistung	Erlebensfallleistung
52	$a_*^{Pre}(52)Z^{(52)}$		
$t > 52$	$\frac{l_t}{l_{52}} a_*^{Pre}(t) Z^{(t)}$	$\frac{d_{t-1}}{l_{52}} a_{*+}^{Post}(t-1) Z^{(t)}$	$\frac{l_t}{l_{52}} a_{**}^{Post}(t-1) Z^{(t)}$

Zahlungen im Alter  $t$ :

Prämien:  $p_{**}(52, t) a_*^{Pre}(t) Z^{(t)}$

Todesfallleistung:  $p_{**}(52, t-1) p_{*+}(t-1) a_{*+}^{Post}(t-1) Z^{(t)}$

Erlebensfallleistung:  $p_{**}(52, t) a_{**}^{Post}(t-1) Z^{(t)}$

**Valuationsschema B:**

$e_t$	Anzahl der Einheiten $\lambda_t$
$Z^{(t)}$	$p_{**}(52, t) a_*^{Pre}(t) + p_{**}(52, t-1) p_{*+}(t-1) a_{*+}^{Post}(t-1) + p_{**}(52, t) a_{**}^{Post}(t-1)$

Mit der Abbildung  $\varphi$  in (4.1) können wir dies kompakt schreiben:

$$\begin{aligned} \varphi(g_{50}) &= \sum_{t=1}^{\omega} \left[ p_{**}(52, t) a_*^{Pre}(t) + p_{**}(52, t-1) p_{*+}(t-1) a_{*+}^{Post}(t-1) + p_{**}(52, t) a_{**}^{Post}(t-1) \right] Z^{(t)} \\ &= \sum_{t=1}^{\omega} p_{**}(52, t-1) \left[ p_{**}(t) a_*^{Pre}(t) + p_{*+}(t-1) a_{*+}^{Post}(t-1) + p_{**}(t) a_{**}^{Post}(t-1) \right] Z^{(t)} \end{aligned}$$

**Schritt 3: Bewertung in Geld (CHF)**

Diese Bewertung geht analog wie in der Bewertung in Geld im Alter 51.

Zahlungen im Alter	$V_{52 50}$ mit Zins- struktur 2000	$V_{52 50}$ mit Zins- struktur 2002	$DK_{52}$
52	-9'375.21	-9'375.21	-9'375.21
53	-8'685.57	-8'862.49	-8'852.85
54	-8'245.22	-8'551.84	-8'564.09
55	43'382.72	45'632.37	45'936.49
Total	17'076.73	18'842.83	19'144.35

**Bewertung im Alter  $t=53$** **Bewertung im Alter 53 für  $l_{53}$  Personen:**

**Valuationsschema A:**

Zahlungen im Alter	Prämien	Todesfallleistung	Erlebensfallleistung
53	$-l_{53} \cdot \Pi \cdot Z^{(53)}$		
54	$-l_{54} \cdot \Pi \cdot Z^{(54)}$	$d_{53} \cdot C \cdot Z^{(54)}$	
55		$d_{54} \cdot C \cdot Z^{(55)}$	$l_{55} \cdot C \cdot Z^{(55)}$

**Valuationsschema B:**

Einheit $e_t$	Anzahl Einheiten für $l_{53}$ Personen		
	Prämie	Leistungen	Total
$Z^{(53)}$	$-l_{53} \cdot \Pi$		$-l_{53} \cdot \Pi$
$Z^{(54)}$	$-l_{54} \cdot \Pi$	$d_{53} \cdot C$	$-l_{54} \cdot \Pi + d_{53} \cdot C$
$Z^{(55)}$		$d_{54} \cdot C$	$l_{55} \cdot C + d_{54} \cdot C$

Einheit $e_t$	Anzahl Einheiten pro Person		
	Prämie	Leistungen	Total
$Z^{(53)}$	-9'375		-9'375
$Z^{(54)}$	-9'323	279	-9'044
$Z^{(55)}$		306	49'415
			49'721

**Bewertung im Alter 53 für eine Person:**

Wir betrachten die  $t$ -te Zeile des Valuationsportfolio A und dividieren sie durch  $l_{53}$ .

**Valuationsschema A:**

Zahlungen im Alter	Prämien	Todesfallleistung	Erlebensfallleistung
53	$a_*^{Pre}(53) Z^{(53)}$		
$t > 53$	$\frac{l_t}{l_{53}} a_*^{Pre}(t) Z^{(t)}$	$\frac{d_{t-1}}{l_{53}} a_{*+}^{Post}(t-1) Z^{(t)}$	$\frac{l_t}{l_{53}} a_{**}^{Post}(t-1) Z^{(t)}$

Zahlungen im Alter  $t$ :

Prämien:  $p_{**}(53, t) a_*^{Pre}(t) Z^{(t)}$

Todesfallleistung:  $p_{**}(53, t-1) p_{*+}(t-1) a_{*+}^{Post}(t-1) Z^{(t)}$

Erlebensfallleistung:  $p_{**}(53, t) a_{**}^{Post}(t-1) Z^{(t)}$

**Valuationsschema B:**

$e_t$	Anzahl der Einheiten $\lambda_t$
$Z^{(t)}$	$p_{**}(53, t) a_*^{Pre}(t) + p_{**}(53, t-1) p_{*+}(t-1) a_{*+}^{Post}(t-1) + p_{**}(53, t) a_{**}^{Post}(t-1)$

Mit der Abbildung  $\varphi$  in (4.1) können wir dies kompakt schreiben:

$$\begin{aligned}
 \varphi(g_{50}) &= \sum_{t=1}^{\omega} \left[ p_{**}(53, t) a_*^{Pre}(t) + p_{**}(53, t-1) p_{*+}(t-1) a_{*+}^{Post}(t-1) + p_{**}(53, t) a_{**}^{Post}(t-1) \right] Z^{(t)} \\
 &= \sum_{t=1}^{\omega} p_{**}(53, t-1) \left[ p_{**}(t) a_*^{Pre}(t) + p_{*+}(t-1) a_{*+}^{Post}(t-1) + p_{**}(t) a_{**}^{Post}(t-1) \right] Z^{(t)}
 \end{aligned}$$

**Schritt 3: Bewertung in Geld (CHF)**

Zahlungen im Alter	$V_{53 50}$ mit Zins- struktur 2000	$V_{53 50}$ mit Zins- struktur 2002	$DK_{53}$
53	−9'375.21	−9'375.21	−9'375.21
54	−8'658.02	−8'800.73	−8'822.93
55	45'554.69	46'960.40	47'324.85
Total	27'521.46	28'784.46	29'126.71

**Bewertung im Alter  $t=54$** **Bewertung im Alter 54 für  $l_{54}$  Personen:****Valuationsschema A:**

Zahlungen im Alter	Prämien	Todesfallleistung	Erlebensfallleistung
54	$-l_{54} \cdot \Pi \cdot Z^{(54)}$		
55		$d_{54} \cdot C \cdot Z^{(55)}$	$l_{55} \cdot C \cdot Z^{(55)}$

**Valuationsschema B:**

Einheit $e_t$	Anzahl Einheiten für $l_{54}$ Personen		
	Prämie	Leistungen	Total
$Z^{(54)}$	$-l_{54} \cdot \Pi$		$-l_{54} \cdot \Pi$
$Z^{(55)}$		$d_{54} \cdot C$   $l_{55} \cdot C$	$l_{55} \cdot C + d_{54} \cdot C$

Einheit $e_t$	Anzahl Einheiten pro Person		
	Prämie	Leistungen	Total
$Z^{(54)}$	−9'375		−9'375
$Z^{(55)}$		308   49'692	50'000

**Bewertung im Alter 54 für eine Person:**Wir betrachten die  $t$ -te Zeile des Valuationsportfolio A und dividieren sie durch  $l_{54}$ .**Valuationsschema A:**

Zahlungen im Alter	Prämien	Todesfallleistung	Erlebensfallleistung
54	$a_*^{Pre}(54)Z^{(54)}$		
$t > 54$	$\frac{l_t}{l_{54}} a_*^{Pre}(t) Z^{(t)}$	$\frac{d_{t-1}}{l_{54}} a_{*+}^{Post}(t-1) Z^{(t)}$	$\frac{l_t}{l_{54}} a_{**}^{Post}(t-1) Z^{(t)}$

Zahlungen im Alter  $t$ :

Prämien:  $p_{**}(54, t) a_*^{Pre}(t) Z^{(t)}$

Todesfallleistung:  $p_{**}(54, t-1) p_{*+}(t-1) a_{*+}^{Post}(t-1) Z^{(t)}$

Erlebensfallleistung:  $p_{**}(54, t) a_{**}^{Post}(t-1) Z^{(t)}$

**Valuationsschema B:**

$e_t$	Anzahl der Einheiten $\lambda_t$
$Z^{(t)}$	$p_{**}(54, t) a_*^{Pre}(t) + p_{**}(54, t-1) p_{*+}(t-1) a_{*+}^{Post}(t-1) + p_{**}(54, t) a_{**}^{Post}(t-1)$

Mit der Abbildung  $\varphi$  in (4.1) können wir dies kompakt schreiben:

$$\begin{aligned} \varphi(g_{50}) &= \sum_{t=1}^{\omega} \left[ p_{**}(54, t) a_*^{Pre}(t) + p_{**}(54, t-1) p_{*+}(t-1) a_{*+}^{Post}(t-1) + p_{**}(54, t) a_{**}^{Post}(t-1) \right] Z^{(t)} \\ &= \sum_{t=1}^{\omega} p_{**}(54, t-1) \left[ p_{**}(t) a_*^{Pre}(t) + p_{*+}(t-1) a_{*+}^{Post}(t-1) + p_{**}(t) a_{**}^{Post}(t-1) \right] Z^{(t)} \end{aligned}$$

**Schritt 3: Bewertung in Geld (CHF)**

Zahlungen im Alter	$V_{54 50}$ mit Zins- struktur 2000	$V_{54 50}$ mit Zins- struktur 2002	$DK_{54}$
54	-9'375.21	-9'375.21	-9'375.21
55	47'850.24	48'526.93	48'780.49
Total	38'475.03	39'151.72	39'405.28

**Bewertung im Alter  $t=55$** 

Unser Valuationsschemen im Alter 55 sind leer, dafür werden 50'000 CHF ausbezahlt.

**Deckungskapital und Wert des  $VaPo$  für alle Alter**

Wir stellen die Resultate dieses Kapitels in einer Tabelle zusammen:

$t$	$DK_t$	$V_{t 50}$ mit Zins- struktur 2000	$V_{t 50}$ mit Zins- struktur 2002
50	0	-2'325.45	-11.67
51	9'440.61	7'146.74	9'281.30
52	19'144.35	17'076.73	18'842.83
53	29'126.71	27'521.46	28'784.46
54	39'405.28	38'475.03	39'151.72
55	50'000.00	50'000.00	50'000.00

**Bemerkung:** Das Deckungskapital ist stets grösser oder gleich dem Wert des  $VaPo$ . Denn der technische Zinssatz ist kleiner als die Forward Short Rate, mit Ausnahme der ersten drei Werte der Zinsstruktur 2002. Deshalb ist die Differenz mit Zins 2002 nur sehr klein.  $\diamond$

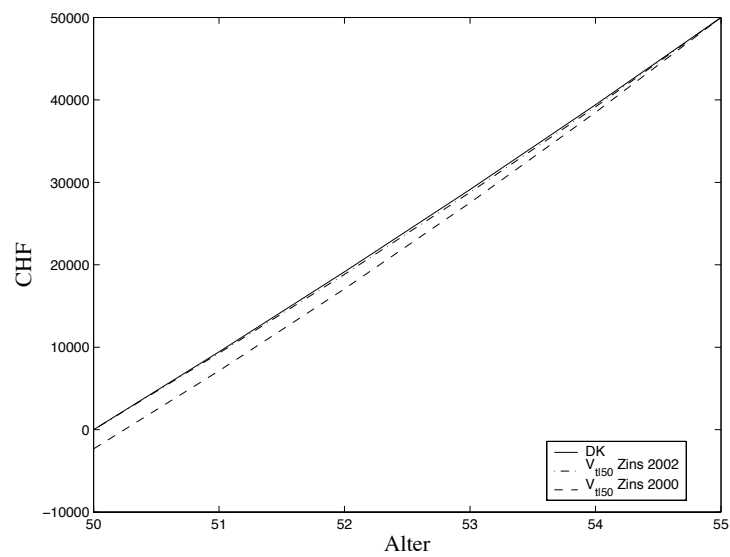


Abbildung 4.1: DK und  $V_{t|50}$  einer Police (gemischte Versicherung).

# Kapitel 5

## Arten von Lebensversicherungen

### 5.1 Kapitalversicherungen

Im folgenden wollen wir gleichzeitig die traditionelle, sowie auch die marktnahe Bewertung von Versicherungsprodukten betrachten. Hierzu bezeichnen wir mit  $Z^{(t)}$  den Zero Coupon Bond mit Maturität  $t$ . Zur Vereinfachung bezeichnen wir mit  $\pi$ , den Preis von  $Z^{(t)}$ , anstatt die Bezeichnung  $\pi(Z^{(k)}) = P(t, t, k)$  usw. zu benutzen.

Eine Kapitalversicherung ist dadurch charakterisiert, dass die Versicherung üblicherweise nur *eine Zahlung* leisten muss. In diesem Kapitel werden die 3 Grundtypen von solchen Kapitalversicherungen betrachtet:

**Todesfallversicherung:** Beim Tode der versicherten Person wird eine Kapitalleistung fällig.

**Erlebensfall:** Beim Erleben eines gewissen Alters wird ein Kapital fällig.

**Gemischte Versicherung:** Mischung der beiden obigen Typen: Es wird beim Tod oder beim Erleben eines gewissen Alters ein Kapital fällig.

In diesem Kapitel werden vorerst einmal die Kosten weggelassen, d.h. man betrachtet alles einmal „Netto“. Die Leistung die der Versicherungsnehmer auf Beginn der Versicherung zahlt, nennt man (**Netto**)**Einmalprämie**. Wie gross muss diese Zahlung sein?

Der **Barwert** des auszubezahlenden Kapitals bezeichnen wir hier mit  $Z$ . Dieser Barwert hängt nun je nach Versicherungstyp davon ab, wann jemand stirbt, resp. ob er ein bestimmtes Erlebensfalldatum erreicht und ist somit eine *Zufallsvariable*. Das *Grundprinzip* soll nun sein, dass die Leistung des Versicherten gleich gross wie die des Versicherers sein soll. Dies kann natürlich nicht für jeden einzelnen Versicherungstrakt gelten, sondern für die gesamte Versicherungsgemeinschaft. Das heisst also, dass der Erwartungswert des Barwertes,  $E[Z]$ , (das, was die Versicherung im Schnitt an einen Versicherungsnehmer ausbezahlen muss) gleich der Einmalprämie sein soll.

#### 5.1.1 Kommutationszahlen

Da der Barwert  $E[Z]$  einerseits von der *Sterblichkeit*, andererseits vom *Zins* abhängt, ist es nützlich folgende Hilfsgrössen zu definieren, die die Formeln für die Barwerte wesentlich vereinfachen. Früher hatte man all diese Grössen auch tabelliert, damit man die Barwerte so schnell berechnen konnte, heute ist das eigentlich nicht mehr notwendig,

da der Computer diese Arbeit macht. Zuerst nun die sogenannten **diskontierten Zahlen der Lebenden**:

$$\begin{aligned} D_x &:= v^x l_x \\ N_x &:= \sum_{j=x}^{\infty} D_j \\ S_x &:= \sum_{j=x}^{\infty} N_j. \end{aligned}$$

Weiter die **diskontierten Zahlen der Toten**

$$\begin{aligned} C_x &:= v^{x+1} d_x \\ M_x &:= \sum_{j=x}^{\infty} C_j \\ R_x &:= \sum_{j=x}^{\infty} M_j. \end{aligned}$$

Dabei gelten folgende Beziehungen:

$$\begin{aligned} C_x &= v^{x+1}(l_x - l_{x+1}) = vD_x - D_{x+1} \\ M_x &= \sum_{j=x}^{\infty} (vD_j - D_{j+1}) = \dots = D_x - dN_x \\ R_x &= \dots = N_x - dS_x \end{aligned}$$

### 5.1.2 Todesfallversicherungen

Man geht davon aus, dass ein Tod immer am Ende des Jahres eintritt. **Einmaleinlagen** (=Erwartete Barwerte) von Todesfallversicherungen werden allgemein mit  $A_x$  bezeichnet, wobei  $x$  das Alter des Versicherungsnehmers bei Versicherungsabschluss bezeichnet.

#### Lebenslängliche Todesfallversicherung

Beim Tod wird eine Zahlung vom Betrag 1 fällig. Dann ist

$$Z := v^{K+1}, \quad (5.1)$$

wobei  $K = 0, 1, 2, \dots$  sein kann. (Vergleiche Definition 3.8). Im Falle einer marktnahen Bewertung lautet  $Z$  wie folgt:

$$Z := \pi(Z^{(K+1)}), \quad (5.2)$$

**Beispiel:**  $x = 50$ , Tod mit 77 Jahren und 9 Monaten. Also ist  $K = 27$  Jahre. Bei einer Versicherungsleistung von CHF 100'000.– und einem Zinssatz von 4% ergibt sich ein Barwert von  $Z(\omega) = (1 + 0.04)^{-28} \cdot 100'000 = 33347.74$   $\diamond$

$Z$  nimmt also die Werte  $v, v^2, v^3, \dots$  an und  $P[Z = v^{k+1}] = P[K = k] = {}_k p_x q_{x+k}$ . Somit ist also

$$A_x = E[Z] = E[v^{K+1}] = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} {}_k p_x q_{x+k} \quad (5.3)$$

beziehungsweise für die marktnahe Bewertung:

$$A_x = E[Z] = E[\pi(Z^{(K+1)})] = \sum_{k=0}^{\infty} \pi(Z^{(k)}) {}_k p_x q_{x+k} \quad (5.4)$$



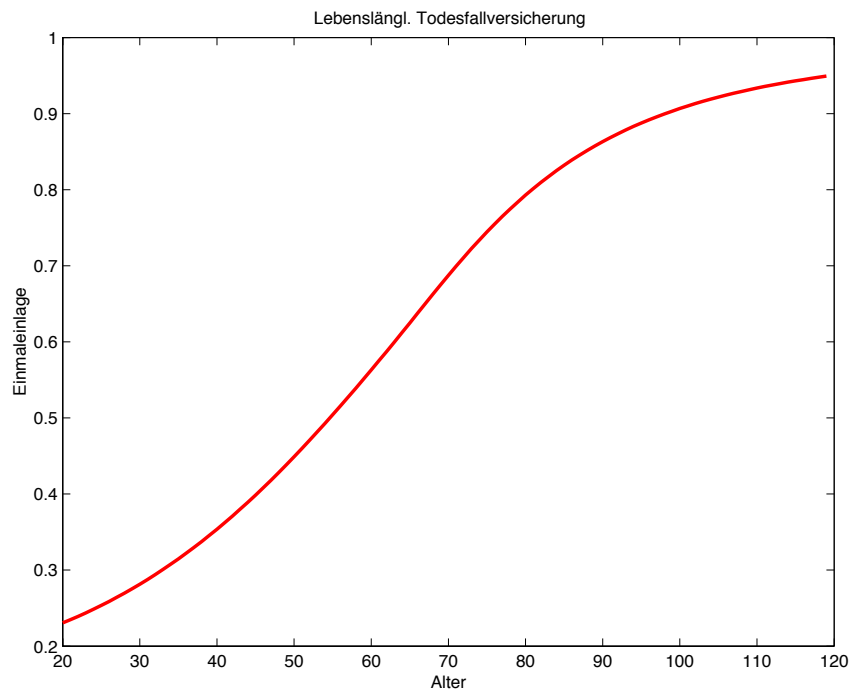


Abbildung 5.1: Einmaleinlage für eine lebenslängliche Todesfallversicherung.

Setzt man für die Wahrscheinlichkeiten in (5.3) nun Schätzungen ein gemäss Formeln (3.7) und (3.6), dann erhält man

$$\begin{aligned}
 A_x &= \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} \frac{l_{x+k}}{l_x} \frac{d_{x+k}}{l_{x+k}} \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{v^{x+k+1} d_{x+k}}{v^x l_x} = \frac{1}{v^x l_x} \sum_{k=0}^{\infty} v^{x+k+1} d_{x+k} = \frac{1}{D_x} \sum_{k=0}^{\infty} C_{x+k} = \frac{M_x}{D_x}
 \end{aligned} \tag{5.5}$$

Die Varianz von  $Z$  ist

$$\text{Var}[Z] = E[Z^2] - E[Z]^2$$

und  $E[Z^2] = \sum_{k=0}^{\infty} v^{2(k+1)} \cdot P[K = k] = E[v^{2(K+1)}]$ . Man kann die Varianz also dadurch berechnen, dass man  $A_x$  (mit  $v \rightsquigarrow v^2$ ) berechnet.

$$\text{Var}[Z] = A_x(\text{Diskont } v^2) - A_x(\text{Diskont } v)^2$$

### Temporäre Todesfallversicherung

Bis zum Ablauf der Versicherung nach  $n$  Jahren wird beim Tod eine Todesfallsumme fällig. Die Bezeichnung für die Einmaleinlage ist  $A_{x:\overline{n}|}$ . Der Barwert der Zahlung ist

$$Z = \begin{cases} v^{K+1}, & \text{falls } K = 0, \dots, n-1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \tag{5.6}$$

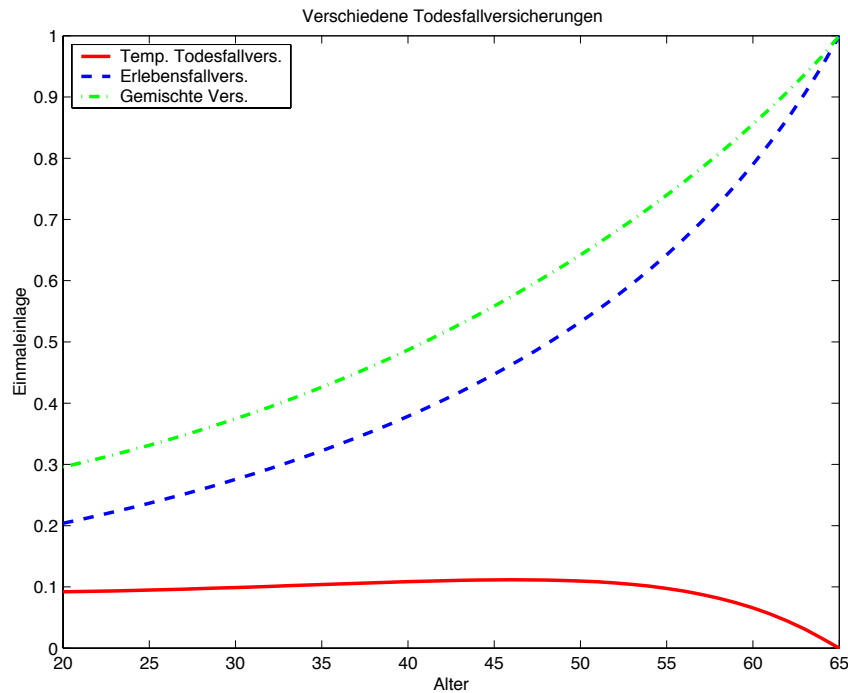


Abbildung 5.2: Einmaleinlage für temporäre Todesfallversicherung.

und somit ist

$$\begin{aligned}
 A_{x:\overline{n}|}^1 &= \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} {}_k p_x q_{x+k} \\
 &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{v^{x+k+1}}{v^x} \frac{l_{x+k}}{l_x} \frac{d_{x+k}}{l_{x+k}} \\
 &= \frac{1}{v^x l_x} \sum_{k=0}^{n-1} v^{x+k+1} d_{x+k} = \frac{1}{D_x} \sum_{k=0}^{n-1} C_{x+k} = \frac{1}{D_x} (M_x - M_{x+n})
 \end{aligned} \tag{5.7}$$

Bei der marktnahen Bewertung gelten entsprechend:

$$Z = \begin{cases} \pi(Z^{(K+1)}), & \text{falls } K = 0, \dots, n-1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \tag{5.8}$$

und somit ist

$$A_{x:\overline{n}|}^1 = \sum_{k=0}^{n-1} \pi(Z^{(k+1)}) {}_k p_x q_{x+k} \tag{5.9}$$

Aus der obigen Darstellung wird ersichtlich, dass die Übersetzung von der traditionellen Versicherungsmathematik in die marktnahe Bewertung darin besteht, dass  $v^k$  ersetzt wird durch den Preis des entsprechenden Zero Coupon Bonds mit einer Maturität in  $k$  Jahren, also durch  $\pi(Z^{(k+1)})$ . Da dieses Prinzip Gültigkeit hat, verzichten im Folgenden darauf die entsprechenden Formeln zu duplizieren.

In (5.7) wurden die Wahrscheinlichkeiten wiederum via  $l_x$  und  $d_x$  geschätzt.

Die Varianz der temporären Todesfallversicherung berechnet sich analog zur lebenslänglichen Todesfallversicherung:

$$\text{Var}[Z] = E[Z^2] - E[Z]^2 = E[Z^2] - (A_{x:\overline{n}|}^1)^2$$

wobei

$$Z^2 = \begin{cases} e^{-2\delta(K+1)} = v^{2(K+1)}, & \text{falls } K = 0, \dots, n-1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

### Um $m$ Jahre aufgeschobene Todesfallversicherung

Bei dieser Versicherung wird die Todesfallversicherung erst in  $m$  Jahren „aktiv“. Die Einmalprämie wird mit  ${}_m|A_x$  bezeichnet. Der Barwert beträgt

$$Z = \begin{cases} 0, & \text{falls } K = 0, 1, \dots, m-1 \\ v^{K+1}, & \text{falls } K = m, m+1, \dots \end{cases}$$

und der Erwartungswert ist

$$\begin{aligned} E[Z] &= \sum_{k=m}^{\infty} v^{k+1} P[K=k] = \sum_{k=m}^{\infty} {}_k p_x q_{x+k} v^{k+1} \\ &= \sum_{k=m}^{\infty} v^{k+1} \frac{l_{x+k}}{l_x} \frac{d_{x+k}}{l_{x+k}} = v^m \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} \frac{l_{x+m+k}}{l_x} \frac{d_{x+m+k}}{l_{x+m+k}} \\ &= v^m \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} \frac{l_{x+m+k}}{l_{x+m}} \frac{l_{x+m}}{l_x} \frac{d_{x+m+k}}{l_{x+m+k}} \\ &= v^m {}_m p_x A_{x+m} = \frac{D_{x+m}}{D_x} \frac{M_{x+m}}{D_{x+m}} = \frac{M_{x+m}}{\underline{D}_x} \end{aligned}$$

### 5.1.3 Reine Erlebensfallversicherung

Bei einer Erlebensfallversicherung der Dauer  $n$  wird die versicherte Summe fällig, falls der Versicherungsnehmer am Ende der Versicherungsdauer noch am Leben ist. Die Einmaleinlage wird mit  $A_{x:\overline{n}|}^1$  bezeichnet und der Barwert der Zahlung beträgt

$$Z = \begin{cases} 0, & \text{falls } K = 0, 1, \dots, n-1 \\ v^n, & \text{falls } K = n, n+1, \dots \end{cases}$$

Somit ist

$$\begin{aligned} A_{x:\overline{n}|}^1 &= \sum_{k=0}^{\infty} Z(k) P[K=k] \\ &= \sum_{k=n}^{\infty} v^n P[K=k] = v^n P[K \geq n] = v^n (1 - P[K < n]) = v^n (1 - {}_n q_x) = v^n {}_n p_x \\ &= \frac{v^{x+n}}{v^x} \frac{l_{x+n}}{l_x} = \frac{D_{x+n}}{D_x} \end{aligned}$$

Die Varianz der reinen Erlebensfallversicherung kann man entweder direkt oder mit Hilfe einer Bernoulli-Variable herleiten. Es gilt  $E[Z^2] = v^{2n} {}_n p_x$  (wie oben) und damit ist

$$\begin{aligned} \text{Var}[Z] &= E[Z^2] - E[Z]^2 = v^{2n} ({}_n p_x - {}_n p_x^2) \\ &= v^{2n} {}_n p_x \cdot {}_n q_x \end{aligned}$$

### 5.1.4 Gemischte Versicherung

Dies ist die Kombination einer Todesfall- und einer Erlebensfallversicherung. Bei einer gemischten Versicherung der Dauer  $n$  ist die versicherte Summe entweder zahlbar beim Tode des Versicherungsnehmers, falls dieser vor

Ablauf der Versicherung stirbt, oder anderenfalls bei Ablauf der Versicherungsdauer. Die Bezeichnung für die Einmaleinlage ist  $A_{x:\overline{n}|}$ . Der Barwert der Zahlung beträgt

$$Z = \begin{cases} v^{K+1}, & \text{falls } K = 0, 1, \dots, n-1 \\ v^n, & \text{falls } K = n, n+1, \dots \end{cases} \quad (5.10)$$

Falls wir mit  $Z_1$  den Wert der temporären Todesfallsumme und mit  $Z_2$  den Wert des Zahlungsstroms der reinen Erlebensfallversicherung, immer jeweils mit Dauer  $n$ , bezeichnen, so gilt

$$Z = Z_1 + Z_2$$

also

$$\begin{aligned} A_{x:\overline{n}|} &= E[Z] = E[Z_1] + E[Z_2] = A_{x:\overline{n}|}^1 + A_{x:\overline{n}|}^1 \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} {}_k p_x q_{x+k} + v^n {}_n p_x \\ &= \frac{1}{D_x} (M_x - M_{x+n} + D_{x+n}) \end{aligned}$$

Es gilt ebenfalls

$$\text{Var}[Z] = \text{Var}[Z_1 + Z_2] = \text{Var}[Z_1] + \text{Var}[Z_2] + 2\text{Cov}[Z_1, Z_2]$$

Da  $\text{Cov}[Z_1, Z_2] = E[Z_1 Z_2] - E[Z_1] E[Z_2]$  ist, und  $Z_1 \cdot Z_2 = 0$  ist  $\text{Cov}[Z_1, Z_2] = -E[Z_1] E[Z_2] = -A_{x:\overline{n}|}^1 \cdot A_{x:\overline{n}|}^1$ . Dies wiederum bedeutet, dass

$$\begin{aligned} \text{Var}[Z] &= \text{Var}[Z_1] + \text{Var}[Z_2] - 2 \cdot A_{x:\overline{n}|}^1 \cdot A_{x:\overline{n}|}^1 \\ &\leq \text{Var}[Z_1] + \text{Var}[Z_2] \end{aligned}$$

Dies kann man nun folgendermassen interpretieren: Das Risiko einer Person eine gemischte Versicherung zu verkaufen ist kleiner als zwei einzelnen Personen die einzelnen Teilversicherungen (i.e.  $A_{x:\overline{n}|}^1$  und  $A_{x:\overline{n}|}^1$ ).

### 5.1.5 Versicherungen zahlbar im Moment des Todes

Bisher wurde angenommen, dass sich die Todesfälle am Ende des Jahres ereignen. Wenn man den realistischen Fall betrachtet, bei dem Personen auf das ganze Jahr verteilt sterben, so muss man die Verzinsung und die Sterblichkeit in kontinuierlicher Zeit behandeln.

#### Lebenslängliche Todesfallversicherung

Die Einmaleinlage wird mit  $\bar{A}_x$  bezeichnet. Der Barwert beträgt  $Z = v^T$ . Somit ist

$$\bar{A}_x = \int_0^\infty v^t {}_t p_x \mu_{x+t} dt$$

Gerne würde man nun wissen, in welchem Zusammenhang  $\bar{A}_x$  und  $A_x$  stehen, respektive welchen Fehler man begeht, wenn man die Annahme macht, dass die Todesfälle alle Ende Jahr stattfinden. Aus diesem Grund teilen wir  $T$  wieder auf in den ganzzahligen Teil  $K$  und den Rest  $S$ . Weiter gilt ja  $T = K + S = (K+1) - (1-S)$ . Geht man davon aus, dass die Sterblichkeit nicht saisonabhängig ist und nimmt an, dass  $S$  gleichverteilt ist auf  $[0, 1[$ , dann gilt

$$E[(1+i)^{1-S}] = \int_0^1 (1+i)^u du = \bar{s}_{\overline{1}|} = \frac{i}{\delta}$$

und falls wir wie in Abschnitt 3.4 die 1. Möglichkeit in Betracht ziehen und voraussetzen, dass  $K$  und  $S$  unabhängig sind, dann erhalten wir

$$\bar{A}_x = E[v^{K+1}] \cdot E[(1+i)^{1-S}] = \frac{i}{\delta} A_x$$

**Beispiel:**  $i = 4\%$ . Da  $\delta = \ln(1+i)$  gilt  $\frac{i}{\delta} \simeq 1.0198$ . Der Fehler ist also ca. 2%. ◇

**Unterjährig (k/m-tes Teiljahr) zahlbare Todesfallversicherung**

Die Zahlungen sind jeweils am Ende des nächsten  $m$ -ten Teiljahres nach dem Eintreten des Todesfalles zu leisten. Der Barwert ist also  $Z = v^{K+S(m)}$  und die Einmalprämie beträgt wieder unter der Annahme der Unabhängigkeit von  $K$  und  $S(m)$

$$A_x^{(m)} = E[v^{K+S(m)}] = E[v^{K+1} \cdot v^{-(1-S(m))}] = E[v^{K+1}] \cdot E[(1+i)^{1-S(m)}]$$

$$\begin{aligned} E[(1+i)^{1-S(m)}] &= \sum_{k=0}^{m-1} (1+i)^{\frac{k}{m}} P[(1-S(m)) = \frac{k}{m}] \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} (1+i)^{\frac{k}{m}} \frac{1}{m} = \frac{i}{i^{(m)}} \end{aligned}$$

und somit

$$A_x^{(m)} = A_x \frac{i}{i^{(m)}} \quad (5.11)$$

Falls  $m \rightarrow \infty$  folgt  $\bar{A}_x = \frac{i}{\delta} A_x$ .

**Gemischte Versicherungen**

Bei der gemischten Versicherung kann man auf ähnliche Weise zu einem Resultat kommen. Die Modifikation der Einmaleinlage findet jedoch nur auf dem Teil der temporären Todesfallversicherung statt.

$$\begin{aligned} \bar{A}_{x:\overline{n}|} &= \bar{A}_{x:\overline{n}|}^1 + A_{x:\overline{n}|}^1 = \frac{i}{\delta} A_{x:\overline{n}|}^1 + A_{x:\overline{n}|}^1 \\ &= A_{x:\overline{n}|} + \left(\frac{i}{\delta} - 1\right) A_{x:\overline{n}|}^1 \end{aligned}$$

**5.1.6 Allgemeinere Typen von Lebensversicherungen**

Es ist gut möglich, dass jemand, der eine Todesfallversicherung abschliesst, nicht einen fixen Betrag bei seinem Tod ausbezahlt haben möchte, sondern je nach Policenjahr mehr oder weniger bekommen möchte. (Soll das Geld zum Beispiel für die Ausbildung der Kinder eingesetzt werden, so braucht es jedes Jahr, das er überlebt, weniger Geld, da die Kinder dem Ausbildungsende immer näher kommen).

Man bezeichnet nun die Zahlung im Policenjahr  $j$  mit  $c_j$  bei diskreter Zeit, resp. mit  $c(t)$  bei stetiger Zeit. In diskreter Zeit ist der Barwert

$$Z = c_K v^{K+1}$$

und das  $h$ -te Moment des Barwertes beträgt

$$E[Z^h] = \sum_{k=0}^{\infty} c_k^h v^{h(k+1)} {}_k p_x q_{x+k}$$

Die Einmaleinlage lässt sich berechnen aus einer Summe von aufgeschobenen Todesfallversicherungen

$$E[Z] = c_0 A_x + (c_1 - c_0) {}_1|A_x + (c_2 - c_1) {}_2|A_x + \dots$$

Dies kann man sich an Graphik 5.1.6 gut konstruieren. Für die stetige Zeit gilt ganz analog

$$Z = c(T) v^T$$

und somit

$$E[Z] = \int_0^{\infty} c(t) v^t {}_t p_x \mu_{x+t} dt$$

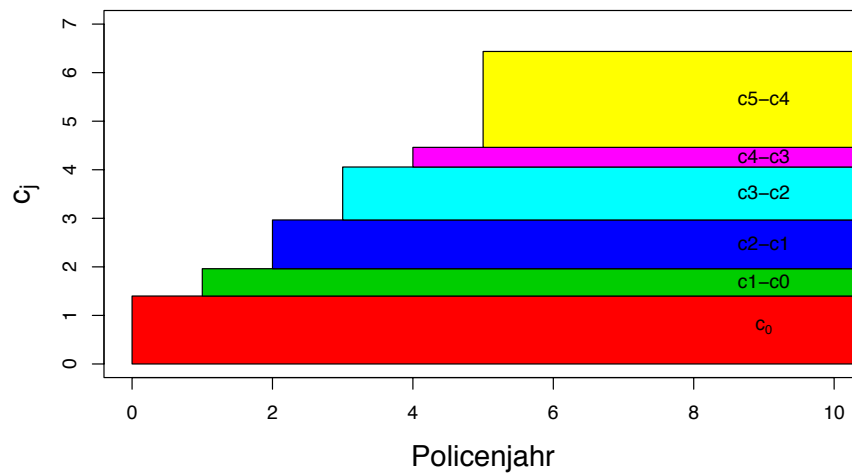


Abbildung 5.3: Allgemeine Todesfallversicherung.

### 5.1.7 Standardtypen von Todesfallversicherungen

#### Linear wachsende Todesfallsumme

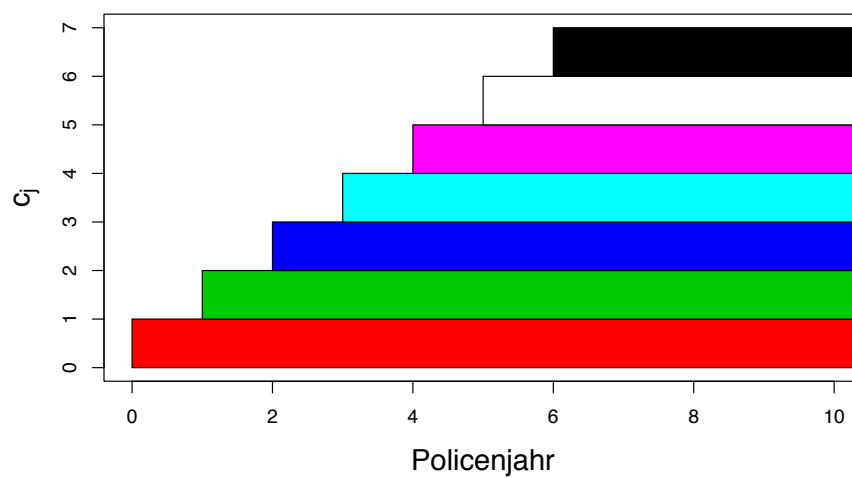


Abbildung 5.4: Linear steigende Todesfallversicherung.

#### Lebenslänglich

$$\begin{aligned}
 (IA)_x &= A_{x+1}|A_{x+2}|A_{x+3}|A_{x+4}|\dots \\
 &= \frac{M_x}{D_x} + \frac{M_{x+1}}{D_x} + \frac{M_{x+2}}{D_x} + \dots \\
 &= \frac{R_x}{D_x}
 \end{aligned}$$

**Temporär** Auch diese Versicherung lässt sich zusammensetzen, wie man aus Figur 5.1.7 erkennen kann.

$$\begin{aligned}(IA)_{x:\overline{n}|}^1 &= nA_{x:\overline{n}|}^1 - A_{x:\overline{n-1}|}^1 - A_{x:\overline{n-2}|}^1 - \dots - A_{x:\overline{1}|}^1 \\ &= \frac{R_x - R_{x+n} - nM_{x+n}}{D_x}\end{aligned}$$

### Linear fallende Todesfallsumme

Die Einmalprämie lässt sich aufgrund analoger Ideen wie bei den linear steigenden Todesfallversicherungen berechnen.

$$\begin{aligned}(DA)_{x:\overline{n}|}^1 &= \sum_{k=0}^{n-1} (n-k)v^{k+1} {}_k p_x q_{x+k} \\ &= A_{x:\overline{n}|}^1 + A_{x:\overline{n-1}|}^1 + \dots + A_{x:\overline{2}|}^1 + A_{x:\overline{1}|}^1 \\ &= \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x} + \frac{M_x - M_{x+n-1}}{D_x} + \dots + \frac{M_x - M_{x+1}}{D_x} \\ &= \frac{1}{D_x} (R_{x+1} - R_{x+n+1} + nM_x)\end{aligned}$$

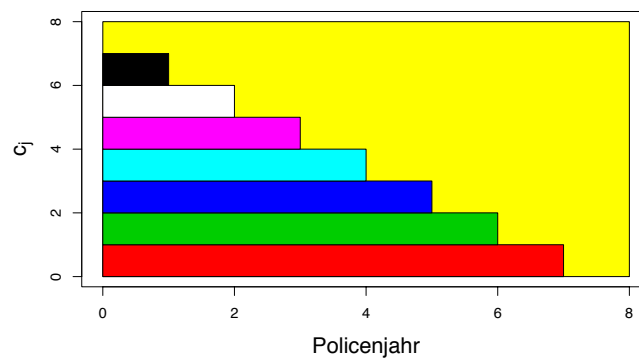


Abbildung 5.5: Linear fallende temporäre Todesfallversicherung für die Dauer  $n=8$ .

### 5.1.8 Rekursionsformeln

Für eine beliebige Todesfallversicherung mit Todesfallleistung  $c_j = 1$  gilt wegen der Rekursion

$${}_k p_x = p_x \cdot {}_{k-1} p_{x+1}$$

$$\begin{aligned}A_x &= \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} {}_k p_x q_{x+k} \\ &= vq_x + \sum_{k=1}^{\infty} v^{k+1} p_x {}_{k-1} p_{x+1} q_{x+k} \\ &= vq_x + vp_x \sum_{k=1}^{\infty} v^k {}_{k-1} p_{x+1} q_{x+k} \\ &= vq_x + vp_x \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} {}_k p_{x+1} q_{x+k+1} \\ &= vq_x + vp_x A_{x+1}\end{aligned}\tag{5.12}$$

Das heisst also, dass die Einmaleinlage der Todesfallversicherung für das Alter  $x$  sich zusammensetzt aus der diskontierten Zahlung im Todesfall plus der diskontierten Einmaleinlage für das Alter  $x + 1$  im Erlebensfall. Die Rekursionsformel (5.12) lässt sich auch anders interpretieren, wenn man sie folgendermassen umschreibt

$$A_x = vA_{x+1} + v(1 - A_{x+1})q_x \quad (5.13)$$

Der Betrag  $A_{x+1}$  ist im Todes- wie im Erlebensfall reserviert, zusätzlich wird noch der Betrag  $1 - A_{x+1}$  bereitgestellt für den Todesfall. Für eine allgemeine Todesfallversicherung mit Todesfallleistung  $C_x$  lautet die Rekursion (5.12) wie folgt

$$A_x^{allg} = C_x \cdot v \cdot q_x + v \cdot p_x A_{x+1}^{allg}$$

beziehungsweise

$$A_x^{allg} = vA_{x+1}^{allg} + v(C_x - A_{x+1}^{allg})q_x$$

An dieser Stelle soll nochmals auf die marktnahe Bewertung eingegangen werden. Wie sehen die oben stehenden Rekursionsformeln bei einer marktnahen Bewertung aus? Hierzu muss man sich vor Augen halten um was es sich bei  $v$  handelt. Es handelt sich um den einjährigen Diskontierungsfaktor in der Zukunft. Nehmen wir an dass wir uns heute zur Zeit  $t$  befinden im Alter  $x_0$ , und dass wir die Rekursion für das Alter  $x = x_0 + k$  benützen wollen. In diesem Fall müssen wir für  $v$  den entsprechenden Foreward discount benützen, also:

$$v = \frac{P(t, t, k+1)}{P(t, t, k)}$$

Dies bedeutet, dass die Rekursion für die allgemeine Todesfallversicherung in Falle einer marktnahen Bewertung wie folgt lautet:

$$A_{x+k}^{allg} = C_{x+k} \cdot \frac{P(t, t, k+1)}{P(t, t, k)} \cdot q_{x+k} + \frac{P(t, t, k+1)}{P(t, t, k)} \cdot p_{x+k} A_{x+k+1}^{allg}$$

beziehungsweise

$$A_{x+k}^{allg} = \frac{P(t, t, k+1)}{P(t, t, k)} A_{x+k+1}^{allg} + \frac{P(t, t, k+1)}{P(t, t, k)} (C_{x+k} - A_{x+k+1}^{allg}) q_{x+k}$$

## 5.2 Rentenversicherungen

### 5.2.1 Einführung

Im Gegensatz zu einer Kapitalversicherung, welche aus einer einzigen Zahlung besteht, finden bei einer Rentenversicherung *mehrere Zahlungen* statt. Im Normalfall enden die Zahlungen der Renten mit dem Tod. Man spricht auch häufig von **Leibrenten**, da die Zahlungen abhängig sind vom Leben eines Menschen, im Gegensatz zu den Zeitrenten, bei denen die Sterblichkeit eines Menschen keinen Einfluss hat. Man kann sich eine Rente auch als eine Folge von Erlebensfallsummen vorstellen und die entsprechenden Resultate verwenden. Vereinbart man eine Prämienzahlung, so kann man diese als Rente mit umgekehrtem Vorzeichen verstehen. Der Versicherte zahlt der Versicherung also eine Rente.

### 5.2.2 Elementare Rentenversicherung

#### Lebenslängliche Rente

Eine sofortbeginnende (1/1) vorschüssig zahlbare Rente bezahlt pro Jahr eine Rente der Höhe 1. Die Einmaleinlage dieser Leibrente wird mit  $\ddot{a}_x$  bezeichnet. (Nicht zu verwechseln mit den Zeitrenten  $\ddot{a}_{\overline{n}|}$ ). Die Zahlungen erfolgen zu den Zeiten  $0, 1, 2, \dots, K(\omega)$ . Der Barwert beträgt somit

$$Y = 1 + v + v^2 + \dots + v^K = \ddot{a}_{\overline{K+1}|} \quad (5.14)$$



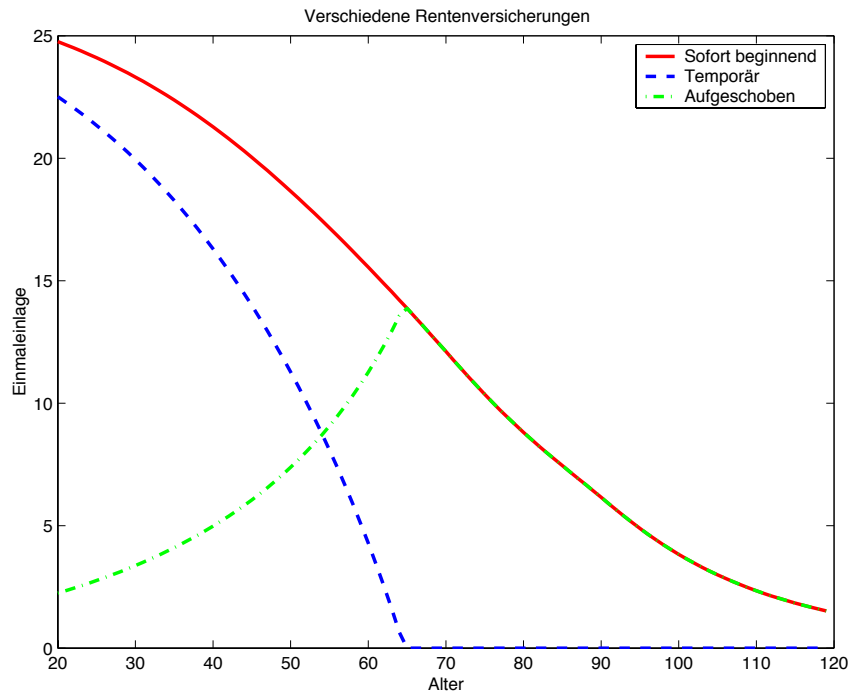


Abbildung 5.6: Einmaleinlage für eine Rentenversicherung.

und  $P[Y = \ddot{a}_{\overline{k+1}|}] = P[K = k] = {}_k p_x q_{x+k}$ . Somit berechnet sich die notwendige Einmaleinlage durch

$$\ddot{a}_x = E[Y] = \sum_{k=0}^{\infty} \ddot{a}_{\overline{k+1}|} {}_k p_x q_{x+k} \quad (5.15)$$

Man kann  $Y$  auch wie folgt darstellen:

$$Y = \sum_{k=0}^{\infty} v^k \mathbb{I}_{\{K \geq k\}} \quad (5.16)$$

und somit ist

$$\begin{aligned} \ddot{a}_x &= E[Y] = \sum_{k=0}^{\infty} v^k P[K \geq k] = \sum_{k=0}^{\infty} v^k {}_k p_x = \sum_{k=0}^{\infty} v^k \frac{l_{x+k}}{l_x} \\ &= \frac{1}{v^x l_x} \sum_{k=0}^{\infty} v^{x+k} l_{x+k} = \frac{1}{D_x} \sum_{k=0}^{\infty} D_{x+k} = \frac{N_x}{D_x} \end{aligned} \quad (5.17)$$

Der Unterschied zwischen den beiden Berechnungsarten besteht darin, dass man bei (5.15) die Rente als Ganzes, bei (5.17) als Summe von Erlebensfallkapitalien betrachtet. Als nächstes wird der Zusammenhang mit den Todesfallsummen betrachtet.

Der Barwert der Rente beträgt ja

$$Y = 1 + v + v^2 + \dots + v^K = \frac{1 - v^{K+1}}{1 - v} = \frac{1 - v^{K+1}}{d}$$

Auf der rechten Seite steht eine abgeleitete Grösse einer Todesfallsumme. (Vergleiche mit (5.1)  $Z = v^{K+1}$ ). Also

$$\begin{aligned} \ddot{a}_x &= E[Y] = E\left[\frac{1 - Z}{d}\right] = \frac{1}{d} - \frac{E[Z]}{d} \\ &= \frac{1 - A_x}{d} \end{aligned}$$

oder

$$1 = d\ddot{a}_x + A_x \quad (5.18)$$

Diese Gleichung ist vorallem zur Berechnung der Varianz von  $Y$  interessant

$$\text{Var}[Y] = \text{Var}\left[\frac{1-Z}{d}\right] = \frac{1}{d^2} \text{Var}[Z]$$

### Temporäre Rentenversicherung

Eine sofort beginnende (1/1) vorschüssig zahlbare, für  $n$  Jahre temporäre Rente berechtigt zum Bezug einer jährlichen Rente bis zum Tode, maximal aber  $n$  Jahre. Die Einmaleinlage wird mit  $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$  bezeichnet. Der Barwert beträgt

$$Y = \begin{cases} \ddot{a}_{\overline{K+1}|}, & \text{falls } K = 0, 1, \dots, n-1 \\ \ddot{a}_{\overline{n}|}, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Und die Einmaleinlage beträgt dann

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} \ddot{a}_{\overline{k+1}|} p_x q_{x+k} + \ddot{a}_{\overline{n}|} p_x$$

Beziehungsweise

$$\begin{aligned} \ddot{a}_{x:\overline{n}|} &= \sum_{k=0}^{n-1} v^k p_x = \frac{\sum_{k=0}^{n-1} D_{x+k}}{D_x} \\ &= \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x} \end{aligned}$$

Die Gleichung  $Y = \frac{1-Z}{d}$  gilt auch hier, wobei  $Z$  die Zufallsvariable einer gemischten Versicherung bezeichnet (vergleiche (5.10)). Somit gilt nun

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \frac{1}{d} (1 - A_{x:\overline{n}|}) \quad (5.19)$$

respektive

$$1 = d\ddot{a}_{x:\overline{n}|} + A_{x:\overline{n}|}$$

Für die Varianz gilt wieder analog zur lebenslänglichen Todesfallversicherung

$$\text{Var}[Y] = \frac{1}{d^2} \text{Var}[Z]$$

Neben den vorschüssig bezahlbaren Altersrenten kann man auch unterjährige und nachschüssige Renten vereinbaren.

### Lebenslänglich nachschüssige Leibrente

Die Einmaleinlage der lebenslänglich nachschüssigen Leibrente wird mit  $a_x$  bezeichnet. Der Barwert beträgt  $Y = v + v^2 + \dots + v^K = a_{\overline{K}|}$ . Vergleicht man dies mit (5.14), so stellt man fest, dass der Barwert der vorschüssigen Rente gleich dem um 1 erhöhten Barwert der nachschüssigen Rente ist und für die Einmaleinlage gilt somit

$$a_x = \ddot{a}_x - 1$$

Es gelten also die folgenden Identitäten:

$$a_x = \sum_{k=0}^{\infty} v^k p_x - 1 = \frac{N_x - D_x}{D_x}$$

Auch hier gibt es einen Zusammenhang mit der entsprechenden Todesfallsumme. Gemäss (1.16) gilt  $1 = ia_{\overline{n}|} + v^n$  somit gilt auch

$$1 = ia_{\overline{K}|} + (1+i)v^{K+1}$$

und wenn man den Erwartungswert davon nimmt, dann erhält man

$$1 = ia_x + (1+i)A_x$$

### Aufgeschobene Leibrenten

Hier beginnt die Rente erst nach einer Aufschubszeit von  $m$  Jahren zu laufen. Die vorschüssig zahlbare, um  $m$  Jahre aufgeschobene Leibrente wird mit  ${}_m|\ddot{a}_x$  bezeichnet. Der Barwert beträgt

$$Y = \begin{cases} 0, & \text{falls } K = 0, 1, \dots, m-1 \\ v^m + v^{m+1} + \dots + v^K, & \text{sonst} \end{cases}$$

und die Einmaleinlage lässt sich folgendermassen berechnen:

$$\begin{aligned} {}_m|\ddot{a}_x &= \sum_{k=0}^{\infty} P[K=k]Y(K=k) \\ &= v^m \sum_{k=m}^{\infty} {}_k p_x q_{x+k} v^{k-m} \\ &= v^m \sum_{k=0}^{\infty} {}_{k+m} p_x q_{x+m+k} v^k \\ &= v^m \sum_{k=0}^{\infty} v^k {}_k p_{x+m} {}_k p_x q_{x+m+k} \\ &= v^m {}_m p_x \ddot{a}_{x+m} \end{aligned}$$

Ein anderer Weg führt auf die intuitive Formel

$${}_m|\ddot{a}_x = \ddot{a}_x - \ddot{a}_{x:\overline{m}|}$$

Dies bedeutet, dass man den Barwert einer aufgeschobenen Leibrente als Differenz einer sofort beginnenden Leibrente und einer temporären Leibrente betrachten kann.

### 5.2.3 Unterjährige Renten

#### Ewige Renten

Man betrachtet eine Rente bei der ein Betrag von  $\frac{1}{m}$   $m$ -mal pro Jahr vorschüssig bezahlt wird zu den Zeitpunkten  $0, \frac{1}{m}, \dots, \frac{m-1}{m}$ . Die Bezeichnung für die Einmaleinlage sei  $\ddot{a}_x^{(m)}$ . In Analogie zu Formel (5.18) gilt

$$1 = d^{(m)} \ddot{a}_x^{(m)} + A_x^{(m)} \quad (5.20)$$

oder anders ausgedrückt

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \frac{1}{d^{(m)}} - \frac{1}{d^{(m)}} A_x^{(m)} \quad (5.21)$$

wobei  $d^{(m)}$  der nominelle vorschüssige Zinssatz ist, vergleiche (1.13). Die Identität (5.20) kann angesehen werden als eine Schuld der Höhe 1 mit unterjähriger vorschüssiger Verzinsung und einer Endabzahlung vom Betrag 1 beim Tod.

Zum Schluss soll noch der Zusammenhang zwischen  $\ddot{a}_x^{(m)}$  und  $\ddot{a}_x$  hergeleitet werden. Zu diesem Zweck ersetzt man in Gleichung (5.21) gemäss (5.11)  $A_x^{(m)}$  durch  $A_x \frac{i}{i^{(m)}}$ , (damit hat man auch wieder die 1. Möglichkeit in Abschnitt 3.4 vorausgesetzt). Weiter ersetzt man  $A_x$  durch  $1 - d\ddot{a}_x$  gemäss (5.18). Daraus folgt dann

$$\begin{aligned} \ddot{a}_x^{(m)} &= \frac{1}{d^{(m)}} - \frac{1}{d^{(m)}} A_x^{(m)} \\ &= \frac{1}{d^{(m)}} - \frac{1}{d^{(m)}} \frac{i}{i^{(m)}} (1 - d\ddot{a}_x) \\ &= \frac{d \cdot i}{d^{(m)} i^{(m)}} \ddot{a}_x - \frac{i - i^{(m)}}{d^{(m)} i^{(m)}} \\ &=: \alpha(m) \ddot{a}_x - \beta(m) \end{aligned}$$

mit  $\alpha(m) = \frac{d \cdot i}{d^{(m)} i^{(m)}}$  und  $\beta(m) = \frac{i - i^{(m)}}{d^{(m)} i^{(m)}}$ .

<b>Beispiel:</b> Für einen Zins von $i = 5\%$ ergibt sich	$m$	$\alpha$	$\beta$	$\diamond$
	12	1.000197	0.46651	
	$\infty$	1.000198	0.50823	

**Bemerkung:** In der Praxis wird oft  $\alpha \simeq 1$  und  $\beta \simeq \frac{m-1}{2m}$  verwendet. Dies kann mit Hilfe der Taylorreihe um  $\delta$  begründet werden:

$$\begin{aligned}\alpha(m) &= 1 + \frac{m^2 - 1}{12m^2} \delta^2 + \dots \\ \beta(m) &= \frac{m-1}{2m} + \frac{m^2 - 1}{6m^2} \delta + \dots\end{aligned}$$

Aus diesen Betrachtungen wird deutlich, dass die Approximation für ein kleines  $\delta$  gut ist. Somit arbeitet man für die Praxis mit

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \ddot{a}_x - \frac{m-1}{2m} = \frac{N_x}{D_x} - \frac{m-1}{2m} \quad \diamond$$

### Temporäre Renten

Ein Rentenbeitrag vom Betrag  $\frac{1}{m}$  wird  $m$ -Mal pro Jahr ausbezahlt während  $n$  Jahren, also zu den Zeitpunkten  $0, \frac{1}{m}, \dots, \frac{m-1}{m}, \dots, \frac{nm-1}{m}$ . Die Einmalprämie wird mit  $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{(m)}$  bezeichnet und berechnet sich folgendermassen:

$$\begin{aligned}\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{(m)} &= \ddot{a}_x^{(m)} - {}_n p_x v^n \ddot{a}_{x+n}^{(m)} \\ &= \alpha(m) \ddot{a}_{x:\overline{n}|} - \beta(m) (1 - {}_n p_x v^n)\end{aligned} \quad (5.22)$$

In der Praxis macht man wieder eine Vereinfachung

$$\begin{aligned}\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{(m)} &= \ddot{a}_{x:\overline{n}|} - \frac{m-1}{2m} (1 - {}_n p_x v^n) \\ &= \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x} - \frac{m-1}{2m} \left(1 - \frac{D_{x+n}}{D_x}\right)\end{aligned} \quad (5.23)$$

### Temporäre nachschüssige Renten

Hier wird zu den Zeitpunkten  $\frac{1}{m}, \frac{2}{m}, \dots, \frac{nm}{m}$  eine Rentenzahlung der Höhe  $\frac{1}{m}$  vorgenommen. Die Einmalprämie wird mit  $a_{x:\overline{n}|}^{(m)}$  bezeichnet.  $a_{x:\overline{n}|}^{(m)}$  ist fast dasselbe wie  $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{(m)}$ , nur, dass zur Zeit 0 keine Zahlung stattfindet, dafür am Ende der Versicherungsperiode. Somit gilt

$$\begin{aligned}a_{x:\overline{n}|}^{(m)} &= \ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{(m)} - \frac{1}{m} + \frac{1}{m} v^n {}_n p_x \\ &= \ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{(m)} - \frac{1}{m} (1 - v^n {}_n p_x) \\ &\simeq \ddot{a}_{x:\overline{n}|} - \frac{m-1}{2m} (1 - {}_n p_x v^n) - \frac{1}{m} (1 - {}_n p_x v^n)\end{aligned}$$

wobei die letzte Zeile aufgrund von (5.23) eine Approximation für die Praxis darstellt. Dies ergibt nun

$$\begin{aligned}a_{x:\overline{n}|}^{(m)} &\simeq \ddot{a}_{x:\overline{n}|} - \frac{m+1}{2m} (1 - {}_n p_x v^n) \\ &= \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x} - \frac{m+1}{2m} \left(1 - \frac{D_{x+n}}{D_x}\right)\end{aligned}$$

### 5.2.4 Variable Renten

Die Zahlungen bei einer Rente müssen ja nicht unbedingt konstant sein, sondern können z.B die Werte  $r_0, r_1, r_2, \dots$  zu den Zeiten  $k = 0, 1, 2, \dots$  betragen. Der Barwert beträgt dann

$$Y = \sum_{k=0}^{\infty} v^k r_k \mathbb{I}_{\{K \geq k\}}$$

und der Erwartungswert ist dann

$$E[Y] = \sum_{k=0}^{\infty} v^k r_k p_x$$

### 5.2.5 Standardtypen von Renten

#### Garantierte Renten

Die Rente ist für  $g$  Jahre garantiert. Der Barwert besteht aus einem garantierten Teil plus dem Barwert einer aufgeschobenen Leibrente. Also

$$E[Y] = \ddot{a}_{\overline{g}|} + {}_g| \ddot{a}_x = \frac{v^g - 1}{v - 1} + \frac{N_{x+g}}{D_x}$$

#### Linear wachsende Rente

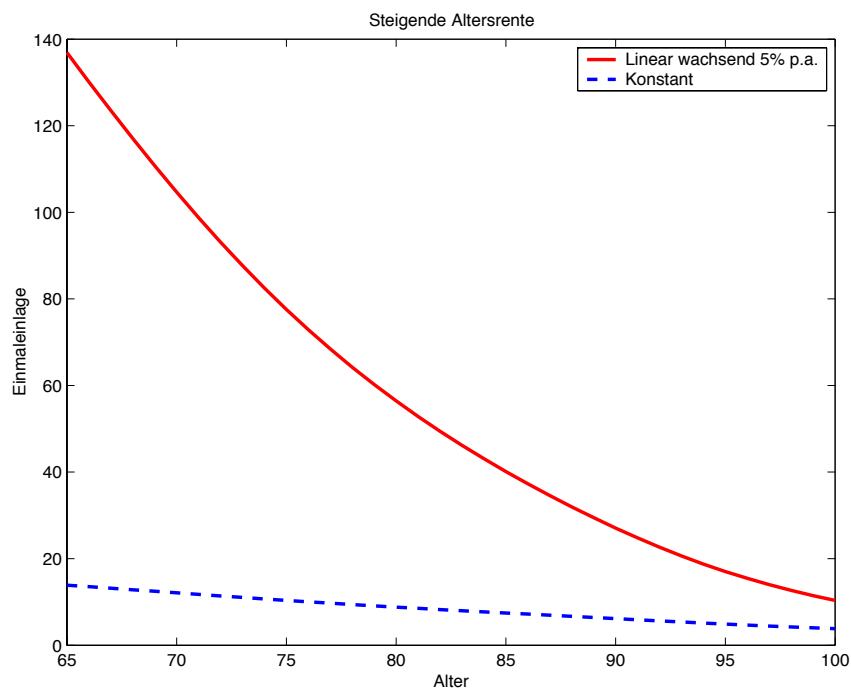


Abbildung 5.7: Linear wachsende sofort beginnende Altersrenten.

Die Rentenzahlungen wachsen linear. Die Bezeichnung für diese Rentenart ist

$$\begin{aligned} (I\ddot{a})_x &= \ddot{a}_x + v {}_1p_x \ddot{a}_{x+1} + v^2 {}_2p_x \ddot{a}_{x+2} + \dots \\ &= \frac{N_x}{D_x} + \frac{D_{x+1}}{D_x} \frac{N_{x+1}}{D_{x+1}} + \frac{D_{x+2}}{D_x} \frac{N_{x+2}}{D_{x+2}} + \dots \\ &= \frac{S_x}{D_x} \end{aligned}$$

### Unterjährige steigende Rente

$$\begin{aligned}
 (I\ddot{a})_x^{(m)} &= \sum_{k=0}^{\infty} {}_k p_x v^k \ddot{a}_{x+k}^{(m)} \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} {}_k p_x v^k (\alpha(m) \ddot{a}_{x+k} - \beta(m)) \\
 &= \alpha(m) \sum_{k=0}^{\infty} {}_k p_x v^k \ddot{a}_{x+k} - \beta(m) \sum_{k=0}^{\infty} {}_k p_x v^k \\
 &= \alpha(m) (I\ddot{a})_x - \beta(m) \ddot{a}_x
 \end{aligned}$$

In der Praxis wird aber wieder eine Vereinfachung vorgenommen

$$\begin{aligned}
 (I\ddot{a})_x^{(m)} &= (I\ddot{a})_x - \frac{m-1}{2m} \ddot{a}_x \\
 &= \frac{S_x}{D_x} - \frac{m-1}{2m} \frac{N_x}{D_x}
 \end{aligned}$$

### Stetig linear wachsende Renten

Die stetige Rente kann wiederum als Grenzfall der unterjährigen Rente angesehen werden, d.h.  $(I\ddot{a})_x^{(m)}$  wenn  $m \rightarrow \infty$ . Die Bezeichnung für den erwarteten Barwert ist  $(I\bar{a})_x$  und lässt sich berechnen als

$$\begin{aligned}
 (I\bar{a})_x &= \int_0^{\infty} [t+1] v^t {}_t p_x dt \\
 &= \alpha(\infty) (I\ddot{a})_x - \beta(\infty) \ddot{a}_x
 \end{aligned}$$

wobei  $[t+1]$  den ganzzahligen Teil von  $t+1$  bezeichnet.

Wenn die Rente nun auch noch stetig ansteigt, also nicht stufenweise jedes Jahr, dann bezeichnet man den erwarteten Barwert mit  $(\bar{I}\bar{a})_x$  und erhält für den Barwert

$$Y = \int_0^T t v^t dt = (\bar{I}\bar{a})_{\overline{T}|} = \frac{\bar{a}_T - T v^T}{\delta}$$

und somit ist

$$(\bar{I}\bar{a})_x = \frac{\bar{a}_x - (\bar{I}\bar{A})_x}{\delta}$$

### Exponentiell wachsende Renten

Sei  $r_k = (1 + \alpha)^k$ . Um den erwarteten Barwert zu berechnen, schreibt man den Barwert so um, dass sich eine ewige Leibrente ergibt, mit dem Diskont  $\frac{1+\alpha}{r}$  statt  $v$ . Konkret heisst das

$$Y = \sum_{k=0}^{\infty} v^k r_k \mathbb{I}_{\{K \geq k\}}$$

und der Barwert beträgt

$$\begin{aligned}
 E[Y] &= \sum_{k=0}^{\infty} v^k (1 + \alpha)^k {}_k p_x \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{1 + \alpha}{r} \right)^k {}_k p_x \\
 &= \ddot{a}_x \left( v \rightsquigarrow \frac{1 + \alpha}{r} \right)
 \end{aligned}$$

### 5.2.6 Rekursionsformeln

#### Einfacher Fall

$$\begin{aligned}
 \ddot{a}_x &= \sum_{k=0}^{\infty} v^k {}_k p_x \\
 &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} v^k {}_k p_x \\
 &= 1 + v \sum_{k=0}^{\infty} v^k {}_1 p_x {}_k p_{x+1} \\
 &= 1 + v p_x \sum_{k=0}^{\infty} v^k {}_k p_{x+1} \\
 &= 1 + v p_x \ddot{a}_{x+1}
 \end{aligned} \tag{5.24}$$

#### Allgemeiner Fall

Falls ungleiche Rentenzahlungen  $r_x$  im Alter  $x$  ausgemacht sind. Dabei gilt analog zu (5.24)

$$\ddot{a}_x^{\text{allg.}} = r_x + v p_x \ddot{a}_{x+1}^{\text{allg.}}$$

Diese Rekursionsformeln sind nützlich bei der Berechnung von Einmalprämien. Sie gelten auch in allgemeineren Modellen. Im stetigen Fall werden sie durch Differentialgleichungen ersetzt.

An dieser Stelle soll nochmals auf die marktnahe Bewertung eingegangen werden. Wie sehen die oben stehenden Rekursionsformeln bei einer marktnahen Bewertung aus? Hierzu muss man sich vor Augen halten um was es sich bei  $v$  handelt. Es handelt sich um den einjährigen Diskontierungsfaktor in der Zukunft. Nehmen wir an dass wir uns heute zur Zeit  $t$  befinden im Alter  $x_0$ , und dass wir die Rekursion für das Alter  $x = x_0 + k$  benützen wollen. In diesem Fall müssen wir für  $v$  den entsprechenden Forward discount benützen, also:

$$v = \frac{P(t, t, k+1)}{P(t, t, k)}$$

Dies bedeutet, dass die Rekursion für die allgemeine Todesfallversicherung in Falle einer marktnahen Bewertung wie folgt lautet:

$$\ddot{a}_{x+k}^{\text{allg.}} = r_{x+k} + \frac{P(t, t, k+1)}{P(t, t, k)} p_{x+k} \ddot{a}_{x+k+1}^{\text{allg.}}$$

### 5.2.7 Renten, welche nicht bei ganzzahligen Altern beginnen

In den Sterbetafeln gibt man jeweils die Sterbewahrscheinlichkeiten für ganzzahlige Alter  $x$  an und berechnet Barwerte und Einmaleinlagen dann auch immer für ganzzahlige Alter. Dies führt natürlich zu einem kleinen Fehler. Will man nun einmal den Barwert von  $\ddot{a}_{x+u}$  berechnen, wobei  $x$  wiederum ganzzahlig ist und  $u \in [0, 1[$ , dann kann man die Gleichheit (3.4) benutzen

$${}_u p_x \cdot {}_k p_{x+u} = {}_{k+u} p_x = {}_k p_x \cdot {}_u p_{x+k}$$

Wählt man zur Interpolation der unterjährigen Sterblichkeit wieder die 1. Variante in Abschnitt 3.4, (d.h.  ${}_u q_x = u \cdot q_x$ ) dann gilt

$$(1 - u \cdot q_x) \cdot {}_k p_{x+u} = {}_k p_x (1 - u \cdot q_{x+k})$$

und somit erhält man durch Multiplizieren mit  $v^k$  und Addieren über alle Werte von  $k$

$$(1 - u \cdot q_x) \cdot \ddot{a}_{x+u} = \ddot{a}_x - u(1+i)A_x$$

Wegen (5.18) folgt

$$\begin{aligned} \ddot{a}_{x+u} &= \frac{1}{1 - u \cdot q_x} (\ddot{a}_x - u(1+i)A_x) \\ &= \frac{1}{1 - u \cdot q_x} (\ddot{a}_x - u(1+i)(1 - d\ddot{a}_x)) \\ &= \frac{(1+ui)\ddot{a}_x - u(1+i)}{1 - uq_x} \\ &= \frac{(1-u)\ddot{a}_x}{1 - uq_x} + \frac{u(1+i)}{1 - uq_x} (\ddot{a}_x - 1) \end{aligned}$$

Wegen der Rekursion (5.24) gilt dann

$$\ddot{a}_{x+u} = \frac{1-u}{1-uq_x} \ddot{a}_x + \frac{u(1-q_x)}{1-uq_x} \ddot{a}_{x+1}$$

Das bedeutet, dass der Barwert durch *lineare Interpolation* berechnet werden kann. In der Praxis ist folgende *Approximation* gebräuchlich

$$\ddot{a}_{x+u} = (1-u)\ddot{a}_x + u\ddot{a}_{x+1}$$

Diese Approximation ist gut, falls  $q_x$  klein ist. Analog kann man auch für unterjährige Zahlungen und stetige Alter eine Approximation machen:

$$\ddot{a}_{x+u}^{(m)} = \frac{1-u}{1-uq_x} \ddot{a}_x^{(m)} + \frac{u(1-q_x)}{1-uq_x} \ddot{a}_{x+1}^{(m)}$$

In der Praxis werden unterjährige Barwerte oft mittels linearer Interpolation berechnet. Die gefundene Interpolationsformel hat natürlich auch Gültigkeit für Todesfallversicherungen, da diese via (5.18) miteinander verbunden sind.



# Kapitel 6

## Nettoprämien

### 6.1 Einführung

Nachdem wir den Wert der Verpflichtungen der Versicherungsgesellschaft gesehen haben, müssen wir uns nun fragen, wie diese Versicherungen finanziert werden. Im Vordergrund stehen die folgenden drei Arten

- Finanzierung mit Einmaleinlage.
- Finanzierung mit Prämien von konstanter Höhe.
- Finanzierung mit Prämien variabler Höhe.

Normalerweise werden die Prämien in einer definierten Form und vorschüssig bezahlt.

Um die Prämien berechnen zu können, verwendet man üblicherweise das **Äquivalenzprinzip**, welches besagt, dass der Barwert der Prämien dem Barwert der Verpflichtungen entsprechen müsse.

Definiert man die Einmaleinlage als den Barwert der Verpflichtungen, so ist das obige Prinzip erfüllt.

Man kann das Äquivalenzprinzip auch dadurch definieren, dass der **Verlust**  $L$  im Erwartungswert 0 ist. Man spricht von einer **Nettoprämie**, falls

$$E[L] = 0$$

### 6.2 Ein Beispiel

Wir betrachten eine temporäre Todesfallversicherung mit  $x = 40$  und  $n = 10$ . Die versicherte Summe betrage  $C$  und sei am Ende des Todesjahres fällig. Die jährliche Prämie entspreche  $\Pi$ .

Der **Verlust**  $L$  (für den Versicherer) kann nun wie folgt berechnet werden:

$$L = \begin{cases} C v^{K+1} - \Pi \ddot{a}_{\overline{K+1}|}, & \text{falls } K = 0, \dots, 9 \\ -\Pi \ddot{a}_{\overline{10}|}, & \text{sonst} \end{cases}$$

Wir berechnen zuerst die jährliche Nettoprämie. Um nun den Erwartungswert von  $L$  berechnen zu können, müssen wir in einem ersten Schritt die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten berechnen:

$$\begin{aligned} P[L = C v^{k+1} - \Pi \cdot \ddot{a}_{\overline{k+1}|}] &= P[K = k] = {}_k p_{40} q_{40+k} \\ P[L = -\Pi \cdot \ddot{a}_{\overline{10}|}] &= P[K \geq 10] = {}_{10} p_{40} \end{aligned}$$

und wir erhalten durch  $E[L] = 0$  die folgende Identität:

$$C \cdot A_{40:\overline{10}|}^1 - \Pi \ddot{a}_{40:\overline{10}|} = 0$$

oder

$$\Pi = C \frac{A_{40:\overline{10}|}^1}{\ddot{a}_{40:\overline{10}|}} = \frac{\text{Leistungsbarwert}}{\text{Prämienbarwert}} \cdot \text{Leistung}$$

Um das Beispiel gut rechnen zu können gehen wir vom Sterbegesetz von de Moivre in Abschnitt 3 aus mit  $a = 100$  und  $i = 4\%$ . Man erhält dann

$$A_{40:\overline{10}|}^1 = \frac{1}{60}(v + v^2 + \dots + v^{10}) = \frac{1}{60}a_{\overline{10}|} = 0.1352$$

Weiter ist  $A_{40:\overline{10}|}^{\frac{1}{60}} = \frac{5}{6}v^{10} = 0.5630$ . Und somit ist  $A_{40:\overline{10}|} = A_{40:\overline{10}|}^1 + A_{40:\overline{10}|}^{\frac{1}{60}} = 0.6981$  und  $\ddot{a}_{40:\overline{10}|} = \frac{1 - A_{40:\overline{10}|}}{d} = 7.848$ . Somit beträgt die jährliche Nettoprämie  $\Pi = 0.0172 \cdot C$ .

Das obige Prämienprinzip heisst **Erwartungswertprinzip**. Die Frage ist, ob dieses Prinzip gerechtfertigt ist. Niemand kann vom Versicherer verlangen, dass er seine Leistungen gegen Nettoprämien erbringt. Ein für das Risiko angemessener Sicherheitszuschlag ist nötig. Im folgenden wird eine Möglichkeit aufgezeigt, wie man Prämien bestimmen kann, die dem Risiko Rechnung tragen.

Die Prämien sollen anhand einer **Nutzenfunktion**  $u(\cdot)$  bestimmt werden. Solche Nutzenfunktionen können von verschiedenen Orten stammen:

- Fehlende Kapazität
- Economy of scale
- Nicht lineare Steuern

Eine Nutzenfunktion (engl: utility-function) besitzt die folgenden Eigenschaften:

- sie ist wachsend, d.h.  $u' \geq 0$
- sie ist konkav, d.h.  $u'' < 0$

Ein Beispiel einer solchen Funktion wäre  $u(x) = \frac{1}{\alpha}(1 - e^{-\alpha x})$ , wobei  $\alpha > 0$  die Risikoaversion der Versicherungsgesellschaft misst.

Das Prämienprinzip (Exponentialprinzip) heisst nun

$$E[u(-L)] = u(0)$$

d.h. die Prämien sollen bezüglich des Nutzens gerecht sein. Man erhält somit  $E[e^{\alpha L}] = 1$  und somit auch  ${}_k p_{40} q_{40+k} = \frac{1}{60}$ ,  ${}_k p_{40} = \frac{5}{6}$  und das Prämienprinzip für obiges Beispiel bedeutet

$$\frac{1}{60} \sum_{k=0}^9 e^{\alpha \cdot C \cdot v^{k+1} - \alpha \Pi \ddot{a}_{k+1}|} + \frac{5}{6} e^{-\alpha \Pi \ddot{a}_{\overline{10}|}} = 1$$

Für  $\alpha = 10^{-6}$  ergibt sich nun folgendes Bild:

C	jährliche $\Pi$	Prämie in Prozent der Nettoprämie
100'000	1'790	104%
500'000	10'600	123%
1'000'000	26'400	153%
5'000'000	1'073'600	1248 %

**Bemerkungen:** Offensichtlich ist die Prämie nun nicht mehr wie im Falle der Nettoprämie proportional zum versicherten Kapital, sondern steigt progressiv mit  $C$ .

Der Zuschlag, welcher bei 100'000 bescheiden ausfällt, steigert sich auf satte 1100% bei einer Versicherungssumme von 5 Millionen. An dieser Stelle braucht es eine Rückversicherung. Nach diesem Exkurs in die Risikotheorie wollen wir wieder zum Erwartungswertprinzip zurückkehren.  $\diamond$

## 6.3 Elementare Formen der Versicherung

### 6.3.1 Lebenslängliche und temporäre Todesfallversicherungen

#### Lebenslängliche Todesfallversicherung

Das Vorgehen beruht nun immer auf demselben Prinzip. Zuerst muss die Verlustfunktion berechnet, dann der erwartete Verlust gleich Null gesetzt werden. Die Prämie wird mit  $P_x$  bezeichnet. Der Verlust beträgt

$$L = v^{K+1} - P_x \cdot \ddot{a}_{\overline{K+1}|}$$

Nimmt man auf beiden Seiten den Erwartungswert, so ergibt sich

$$A_x = P_x \cdot \ddot{a}_x$$

und die Prämie berechnet sich als

$$P_x = \frac{A_x}{\ddot{a}_x}$$

Aus (5.5) und (5.17) ergibt sich sofort  $P_x = \frac{M_x}{N_x}$ . Wenn wir die Prämien als Differenz zweier ewiger Renten (eine Start bei 0 und einer Start bei  $K+1$ ) betrachten, erhalten wir

$$L = \left(1 + \frac{P_x}{d}\right)v^{K+1} - \frac{P_x}{d}$$

und so können wir nun die Varianz des Verlustes berechnen:

$$\text{Var}[L] = \left(1 + \frac{P_x}{d}\right)^2 \text{Var}[v^{K+1}]$$

(Bei Versicherungen gegen die Einmaleinlage beträgt  $\text{Var}[L] = \text{Var}[v^{K+1}]$ ). Dies bedeutet, dass das Prämiengeschäft ein grösseres Risiko birgt, als der Verkauf von Einmaleinlagen.

#### Temporäre Todesfallversicherungen der Dauer $n$

Die Bezeichnung für die Prämie sei  $P_{x:\overline{n}}^1$ . Der Verlust beträgt dann

$$L = \begin{cases} v^{K+1} - P_{x:\overline{n}}^1 \ddot{a}_{\overline{K+1}|}, & \text{falls } K = 0, \dots, n-1 \\ -P_{x:\overline{n}}^1 \ddot{a}_{\overline{n}|}, & \text{falls } K \geq n \end{cases}$$

beziehungsweise  $L = -P_{x:\overline{n}}^1 \ddot{a}_{\overline{n}|} + (1 + P_{x:\overline{n}}^1 \ddot{a}_{\overline{n-K+1}|})v^{K+1} \mathbb{I}_{\{K < n\}}$ . Daraus ergibt sich

$$P_{x:\overline{n}}^1 = \frac{A_{x:\overline{n}}^1}{\ddot{a}_{x:\overline{n}}} = \frac{M_x - M_{x+n}}{N_x - N_{x+n}}$$

### 6.3.2 Reine Erlebensfallversicherung und gemischte Versicherung

#### Erlebensfall

Die Prämie wird mit  $P_{x:\overline{n}|}^1$  bezeichnet. Der Verlust beträgt

$$L = \begin{cases} -P_{x:\overline{n}|}^1 \ddot{a}_{\overline{K+1}|}, & \text{falls } K = 0, \dots, n-1 \\ v^n - P_{x:\overline{n}|}^1 \ddot{a}_{\overline{n}|}, & \text{falls } K \geq n \end{cases}$$

und wir erhalten

$$P_{x:\overline{n}|}^1 = \frac{A_{x:\overline{n}|}^1}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} = \frac{D_{x+n}}{N_x - N_{x+n}}$$

#### Gemischte Versicherung

Die Prämie wird mit  $P_{x:\overline{n}|}$  bezeichnet und berechnet sich aus

$$P_{x:\overline{n}|} = \frac{A_{x:\overline{n}|}^1}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} + \frac{A_{x:\overline{n}|}^1}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} = \frac{A_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{N_x - N_{x+n}}$$

## 6.4 Unterjährige Prämienzahlung

Analog zu den bisherigen Bezeichnungen bedeutet der Übergang von  $P \rightsquigarrow P^{(m)}$  der Übergang von jährlichen Prämienzahlungen zu unterjährigen Prämienzahlungen. Man kann die analogen Rechnungen durchführen wie bei den Renten und erhält z.B.

$$P_{x:\overline{n}|}^{(m)} = \frac{P_{x:\overline{n}|}}{\frac{d}{d^{(m)}} - \beta(m)P_{x:\overline{n}|}^1} \quad (6.1)$$

Um dies zu sehen benutzt man die beiden folgenden Gleichungen

$$\begin{aligned} A_{x:\overline{n}|} &= P_{x:\overline{n}|} \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}|} \\ \ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{(m)} &= \frac{d}{d^{(m)}} \ddot{a}_{x:\overline{n}|} - \beta(m) A_{x:\overline{n}|}^1 \end{aligned}$$

Die zweite Gleichung kommt mit Hilfe der Gleichung (5.22) und (5.19) zustande:

$$\begin{aligned} \ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{(m)} &= \frac{di}{d^{(m)}i^{(m)}} \ddot{a}_{x:\overline{n}|} - \frac{i - i^{(m)}}{d^{(m)}i^{(m)}} (1 - {}_np_x v^n) \\ &= -\frac{i}{d^{(m)}i^{(m)}} A_{x:\overline{n}|}^1 + \frac{d}{d^{(m)}} \frac{1 - A_{x:\overline{n}|}^1}{d} - \frac{d}{d^{(m)}} \frac{A_{x:\overline{n}|}^1}{d} + \frac{A_{x:\overline{n}|}^1}{d^{(m)}} \\ &= \frac{d}{d^{(m)}} \ddot{a}_{x:\overline{n}|} - \beta(m) A_{x:\overline{n}|}^1 \end{aligned}$$

Formt man (6.1) etwas um, indem man Gleichung 1.17 verwendet, so erhält man

$$P_{x:\overline{n}|} = \ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{(m)} P_{x:\overline{n}|}^{(m)} - \beta(m) P_{x:\overline{n}|}^{(m)} P_{x:\overline{n}|}^1$$

Weil  $i > i^{(m)}$ , wird daraus ersichtlich, dass

$$P_{x:\overline{n}|} \leq P_{x:\overline{n}|}^{(m)}$$

Für die anderen Typen gelten die folgenden Formeln, welche hier nicht hergeleitet werden:

$$\begin{aligned} P_x &= \ddot{a}_{x:\overline{1}|}^{(m)} \cdot P_x^{(m)} - \beta(m) P_x^{(m)} P_x \\ P_{x:\overline{n}|}^1 &= \ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{(m)} P_{x:\overline{n}|}^{1(m)} - \beta(m) P_{x:\overline{n}|}^{1(m)} P_{x:\overline{n}|}^1 \\ P_{x:\overline{n}|}^1 &= \ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{(m)} P_{x:\overline{n}|}^{1(m)} - \beta(m) P_{x:\overline{n}|}^{1(m)} P_{x:\overline{n}|}^1 \end{aligned}$$

## 6.5 Allgemeine Lebensversicherung

Für eine allgemeine Lebensversicherung mit Prämien  $\Pi_0, \Pi_1, \dots, \Pi_K$  und Todesfallleistung  $C_1, C_2, \dots$  berechnet sich der totale Verlust durch

$$L = C_{K+1}v^{K+1} - \sum_{k=0}^K \Pi_k v^k$$

Somit gilt für die faire Prämie

$$\sum_{k=0}^{\infty} C_{k+1}v^{k+1} {}_k p_x q_{x+k} = \sum_{k=0}^{\infty} \Pi_k v^k {}_k p_x$$

Mit dieser Formel können alle allgemeinen Lebensversicherungen berechnet werden.

## 6.6 Lebensversicherungen mit Rückgewähr

Bei den Lebensversicherungen mit Rückgewähr handelt es sich um Produkte, bei welchen die Todesfallleistung von den bezahlten Prämien abhängt. Grundsätzlich finden solche Versicherungen Anwendung bei den Erlebensfallversicherungen und den Renten. Bei den Erlebensfallversicherungen, wie wir sie bisher kennen, sind ja alle Prämien “verloren”, wenn man vor dem Erlebensfalldatum stirbt. Bei den Erlebensfallversicherungen mit Rückgewähr erhält man (oder eher die Hinterbliebenen) im Todesfall die bis zu jenem Zeitpunkt einbezahlten Prämien zurück (mit/ohne) Zins.

Bei den Renten gibt es ebenfalls den obigen Typ vor dem Schlussalter oder aber die vollständige Rückgewähr, bei welcher nach Rentenzahlung die Rückgewährsumme um die Rente vermindert wird.

Im folgenden wird nun die normale Rückgewähr berechnet. Die Todesfallleistung zur Zeit  $t$  beträgt  $t \cdot P_x$ . Also gilt

$$P_x \ddot{a}_{x:\overline{n}|} = P_x (IA)_{x:\overline{n}|}^1 + A_{x:\overline{n}|}^1$$

und somit ist

$$P_x = \frac{A_{x:\overline{n}|}^1}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - (IA)_{x:\overline{n}|}^1}$$

Das Vorgehen bei den anderen Typen der Rückgewähr ist sehr ähnlich. Das einzige Problem der vollständigen Rückgewähr liegt in der speziellen Form der Todesfallversicherung. Für den normalen Typ der Rückgewähr bei Altersrenten gilt

$$P_x = \frac{n|\ddot{a}_x^{(m)}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - (IA)_{x:\overline{n}|}^1}$$



# Kapitel 7

## Nettodeckungskapital

### 7.1 Einleitung

Im letzten Kapitel wurden die Nettoprämien so bestimmt, dass zum Zeitpunkt des Versicherungsabschlusses (im Erwartungswert) eine Äquivalenz zwischen Prämien und Leistungen besteht. Zu einem späteren Zeitpunkt besteht im allgemeinen keine Äquivalenz mehr zwischen den zukünftigen Prämien und Leistungen. Betrachten wir für den Moment eine gemischte Versicherung gegen Einmaleinlage, welche z.B. CHF 10'000.– beträgt und bei welcher im Schlussalter 100'000 fällig würden. Es stellt sich nun die Frage nach dem Wert dieser Versicherung in 2 Jahren. Dieser Wert, das **Deckungskapital**, ist aus zwei Sichtweisen heraus interessant. Einerseits ist es wichtig, wenn man die Versicherung zurückkaufen will. Andererseits benötigt man diese Werte zur Reservierung. Das heisst, der Gesetzgeber verlangt, dass die Versicherung durch Wertschriften sichergestellt ist.

Das Deckungskapital zur Zeit  $t$  (der Zeitzprung liegt bei Versicherungsabschluss) wird üblicherweise mit  ${}_tV$  bezeichnet und berechnet sich als Erwartungswert des zukünftigen Verlustes. Dies entspricht der Regel

$$\text{Barwert(Leistungen des Versicherers)} - \text{Barwert(Leistungen des Versicherungsnehmers)}$$

### 7.2 Zwei Beispiele

Es soll das Deckungskapital im  $k$ -ten Jahr einer gemischten Versicherung (Dauer  $n$  Jahre, Leistung 1, jährliche Prämien) berechnet werden.

$${}_kV_{x:\overline{n}|} = A_{x+k:\overline{n-k}|} - P_{x:\overline{n}|} \cdot \ddot{a}_{x+k:\overline{n-k}|}$$

Natürlich ist  ${}_0V_{x:\overline{n}|} = 0$ , gemäss dem Äquivalenzprinzip.

#### Beispiel: Gemischte Versicherung

Das Alter  $x$  sei 30 Jahre, die Laufzeit  $n$  Jahre und der Zinssatz sei  $i = 3.5\%$ . Das Ergebnis ist in Abbildung 7.2 abgebildet. ◇

#### Beispiel: Reine Erlebensfallversicherung

Das Alter  $x$  sei wiederum 30 Jahre, die Laufzeit  $n$  Jahre und der Zinssatz sei  $i = 3.5\%$ . Das Resultat ist in Abbildung 7.2 dargestellt. ◇

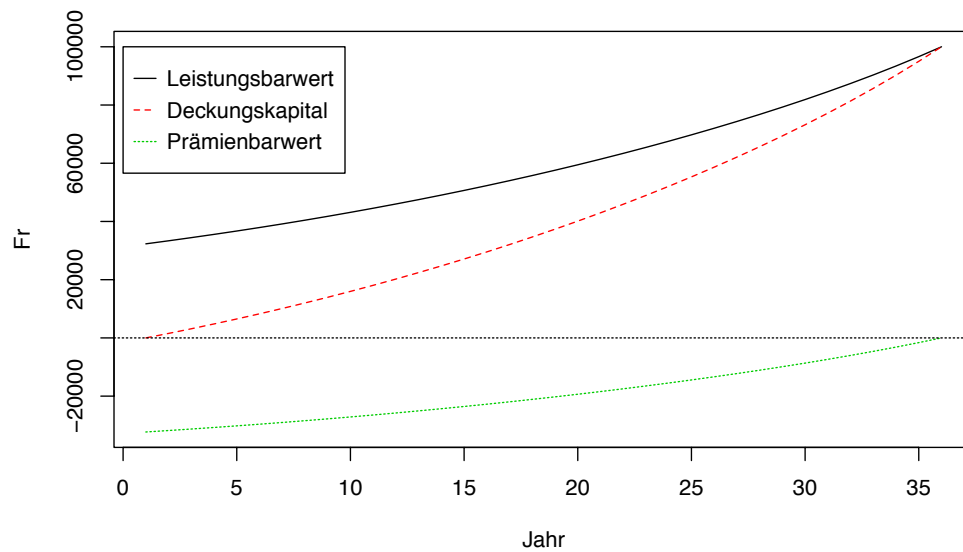


Abbildung 7.1: Deckungskapital für eine gemischte Versicherung.

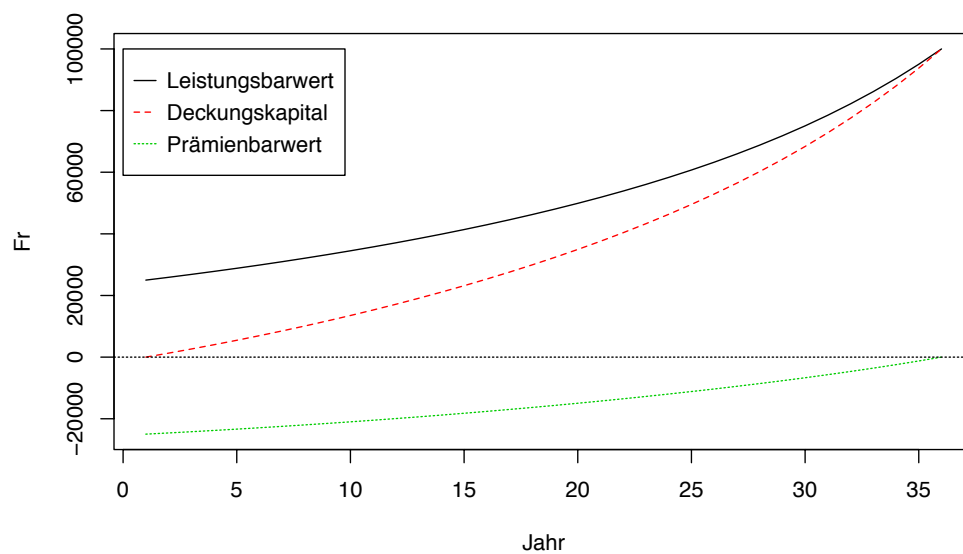


Abbildung 7.2: Deckungskapital für eine Erlebensfallversicherung.

### 7.3 Rekursive Betrachtungen

Nachdem wir die beiden Beispiele betrachtet haben, können wir nun versuchen das Deckungskapital rekursiv zu berechnen. Für eine allgemeine Versicherung gilt

$${}_kV = \sum_{j=0}^{\infty} C_{k+j+1} v^{j+1} {}_jP_{x+k} q_{x+k+j} - \sum_{j=0}^{\infty} \Pi_{j+k} v^j {}_jP_{x+k}$$

Wir wollen nun einen Zusammenhang zwischen  ${}_kV$  und  ${}_{k+h}V$  herstellen. Dazu bemerken wir, dass

$${}_jP_{x+k} = {}_hP_{x+k} \cdot {}_{j-h}P_{x+k+h}$$



Um einen funktionalen Zusammenhang zwischen  ${}_kV$  und  ${}_{k+h}V$  herzustellen ist es zweckmässig die Summe  $\sum_{k=0}^{\infty}$  aufzuteilen in  $\sum_{k=0}^{h-1}$  und  $\sum_{k=h}^{\infty}$ . Somit erhält man

$$\underbrace{{}_kV}_A + \underbrace{\sum_{j=0}^{h-1} \Pi_{k+j} v^j {}_j p_{x+k}}_B = \underbrace{\sum_{j=0}^{h-1} C_{j+k+1} v^{j+1} {}_j p_{x+k} q_{x+k+j}}_C + \underbrace{{}_h p_{x+k} v^h {}_{k+h}V}_D$$

Nachdem wir diese Formel gefunden haben, ist es sinnvoll, diese zu interpretieren. Das Deckungskapital zur Zeit  $k$  erfüllt:

$$\begin{aligned} A + B &= \text{Deckungskapital zur Zeit } k + \text{fällige Prämien bis zum Zeitpunkt } k+h \\ &= \\ C + D &= \text{Todesfalldeckung in } [k, k+h-1[ + \text{Deckungskapital zur Zeit } k+h. \end{aligned}$$

Dabei werden beide Seiten je mit der Wahrscheinlichkeit dies zu erreichen gewichtet.

Aus der obigen Rekursion über  $h$  Perioden kann durch  $h = 1$  eine einfache Rekursion hergeleitet werden:

$${}_kV + \Pi_k = v \cdot C_{k+1} q_{x+k} + v p_{x+k} \cdot {}_{k+1}V$$

Das bedeutet, dass man das Deckungskapital einerseits in positiver wie auch in negativer Richtung rekursiv berechnen kann. Diese Formeln sind auch zur Lösung gewisser Fragestellungen interessant. Man kann die obige Formel nämlich auch noch umformen zu

$${}_kV + \Pi_k = v[{}_{k+1}V + (C_{k+1} - {}_{k+1}V)q_{x+k}]$$

Daraus kann man sich folgende Grössen definieren:

- $\Pi_k^s = {}_{k+1}V \cdot v - {}_kV$  heisst **Sparprämie**
- $\Pi_k^r = (C_{k+1} - {}_{k+1}V)v \cdot q_{x+k}$  heisst **Risikoprämie**

Daraus sieht man, dass

$${}_jV = \sum_{k=0}^{j-1} (1+i)^{j-k} \Pi_k^s$$

In den Abbildungen 7.3 sind Spar- und Risikoprämien für eine gemischte und eine Erlebensfallversicherung dargestellt.

Aus dem obigen Beispiel wird deutlich, dass die Risikoprämie sowohl positiv (Risiko für den Versicherer) wie auch negativ sein kann. Die Rekursion für das Deckungskapital lässt sich nun wie folgt reinterpretieren:

$$\Pi_k + d \cdot {}_{k+1}V = ({}_{k+1}V - {}_kV) + \Pi_k^r$$

## 7.4 Das Deckungskapital einer lebenslänglichen Todesfallversicherung

Betrachten wir die lebenslängliche Todesfallversicherung. Dort gilt

$${}_kV_x = A_{x+k} - P_x \cdot \ddot{a}_{x+k}$$

Da  $A_{x+k} = 1 - d\ddot{a}_{x+k}$  gilt, folgt somit, dass  ${}_kV_x = 1 - (P_x + d)\ddot{a}_{x+k}$ . Andererseits ist  $\frac{1}{\ddot{a}_x} = P_x + d$ . Also gilt

$${}_kV_x = 1 - \frac{\ddot{a}_{x+k}}{\ddot{a}_x}$$

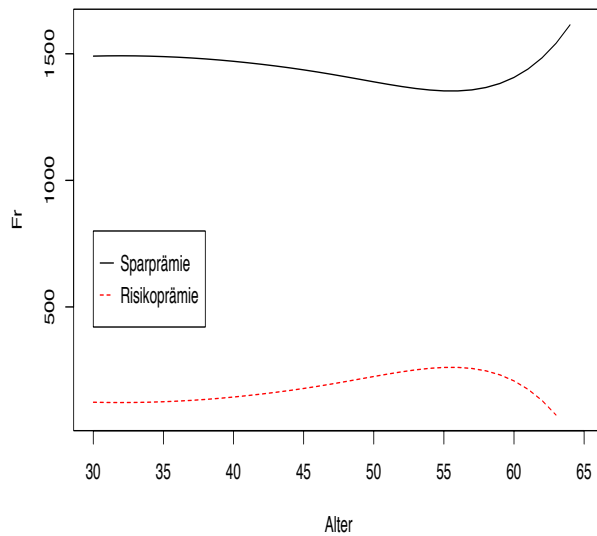


Abbildung 7.3: Spar- und Risikoprämien: Gemischte Versicherung.

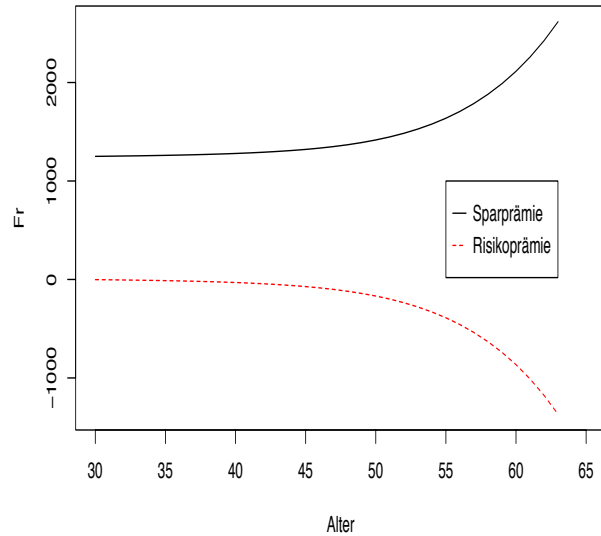


Abbildung 7.4: Spar- und Risikoprämien: Erlebensfallversicherung.

Nun kann man versuchen das Deckungskapital wie folgt zu berechnen

$${}_kV_x = \frac{A_{x+k} - A_x}{1 - A_x}$$

indem man  $\ddot{a}_x = \frac{1}{d}(1 - A_x)$  und  $\ddot{a}_{x+k} = \frac{1}{d}(1 - A_{x+k})$  ersetzt. Da  $P_{x+k}\ddot{a}_{x+k} = A_{x+k}$  gilt nun

$${}_kV_x = \left(1 - \frac{P_x}{P_{x+k}}\right)A_{x+k}$$

und somit

$${}_kV_x = (P_{x+k} - P_x)\ddot{a}_{x+k}$$

## 7.5 Das Deckungskapital für Teile eines Jahres

Nachdem wir das Deckungskapital für ganze Jahre berechnen können, soll es in diesem Abschnitt um die unterjährige Berechnung des Deckungskapitals gehen. Es soll  ${}_{k+u}V$  berechnet werden wobei  $k \in \mathbb{N}, u \in [0, 1]$ . Analog zu vorher gilt

$${}_{k+u}V = \underbrace{{}_{k+1}V v^{1-u}}_{\text{Pro Rata Sparprämie}} + \underbrace{(C_{k+1} - {}_{k+1}V) v^{1-u} {}_{1-u}q_{x+k+u}}_{\text{Pro Rata Risikoprämie}}$$

Falls die unterjährige Sterblichkeit gemäss der 1. Möglichkeit in Abschnitt 3.4 modelliert wird, erhält man

$${}_{1-u}q_{x+k+u} = \frac{(1-u)q_{x+k}}{1-u \cdot q_{x+k}}$$

und somit gilt

$${}_{k+u}V = ({}_kV + \Pi_k^s)(1+i)^u + \frac{1-u}{1-u \cdot q_{x+k}} \Pi_k^r (1+i)^u$$

Analog kann man die folgende Formel zeigen:

$${}_{k+u}V = \frac{1-u}{1-u \cdot q_{x+k}} ({}_kV + \Pi_k)(1+i)^u + \left\{1 - \frac{1-u}{1-u \cdot q_{x+k}}\right\} {}_{k+1}V v^{1-u}$$

Das Deckungskapital ist also ein gewichtetes Mittel zwischen  ${}_kV$  und  ${}_{k+1}V$ . In der Praxis verwendet man häufig

$${}_{k+u}V = (1-u)({}_kV + \Pi_k) + u {}_{k+1}V$$

## 7.6 Zuordnung des Verlustes zu Policenjahren

Betrachten wir eine Todesfallversicherung und bezeichnen mit  $\Lambda_k$  den Verlust des Versicherers im Jahre  $k+1$ . Dann gibt es 3 Möglichkeiten

$$\Lambda_k = \begin{cases} 0, & \text{falls } K \leq k-1 \\ C_{k+1}v - ({}_kV + \Pi_k), & \text{falls } K = k \\ {}_{k+1}Vv - ({}_kV + \Pi_k), & \text{falls } K \geq k+1 \end{cases}$$

Man kann den Verlust auch mit Hilfe der Spar- und Risikoprämie berechnen.  $\Pi_k^r + \Pi_k^s$ . Dann gilt

$$\Lambda_k = \begin{cases} 0, & \text{falls } K \leq k-1 \\ -\Pi_k^r + (C_{k+1} - {}_{k+1}V)v, & \text{falls } K = k \\ -\Pi_k^r, & \text{falls } K \geq k+1 \end{cases} \quad (7.1)$$

Der totale Verlust der Versicherers werde mit  $L$  bezeichnet:

$$L = \sum_{k=0}^{\infty} \Lambda_k v^k \quad (7.2)$$

Man kann nun folgenden Satz beweisen:

**Satz 7.6.1:**  $E[\Lambda_k] = 0$  ◇

**Beweis:** Man kann zuerst zeigen, dass  $E[\Lambda_k | K \geq k] = 0$ . Daraus folgt dann mit dem Satz des iterierten Erwartungswertes und (7.1), dass

$$E[\Lambda_k] = E[\Lambda_k | K \geq k] \cdot P[K \geq k] + E[\Lambda_k | K < k] \cdot P[K < k] = 0$$

Zum Beweis von  $E[\Lambda_k | K \geq k] = 0$ :

$$\begin{aligned} E[\Lambda_k | K \geq k] &= q_{x+k}(-\Pi_k^r + (C_{k+1} - {}_{k+1}V)v) + (1 - q_{x+k})(-\Pi_k^r) \\ &= -\Pi_k^r + \underbrace{(C_{k+1} - {}_{k+1}V)v q_{x+k}}_{\Pi_k^r} = 0 \end{aligned}$$

◇

Während (7.2) allgemein gilt, ist für dieses Jahr wesentlich, dass der totale Verlust anhand der Nettodeckungskapitalien auf die einzelnen Versicherungsjahre aufgeteilt wird. Ein klassisches Resultat, das Theorem von Hattendorf, besagt, dass

**Theorem 7.6.2:** *Hattendorf*

$$\text{Cov}[\Lambda_k, \Lambda_j] = 0 \text{ für } k \neq j \quad (7.3)$$

$$\text{Var}[L] = \sum_{k=0}^{\infty} v^{2k} \text{Var}[\Lambda_k] \quad (7.4)$$

◇

Die zweite Formel zeigt, dass die Varianz des Verlustes auf die einzelnen Versicherungsjahre aufgeteilt werden kann. Dies ist eine direkte Konsequenz aus (7.2) und der ersten Formel, welche insofern erstaunt, als die Zufallsvariablen  $\Lambda_0, \Lambda_1, \dots$  nicht unabhängig sind.

**Beweis:** O.B.d.A.  $k < j$ .

$$\begin{aligned} \text{Cov}[\Lambda_k, \Lambda_j] &= E[\Lambda_k \cdot \Lambda_j] - E[\Lambda_k]E[\Lambda_j] \\ &= E[\Lambda_k \cdot \Lambda_j | K \geq j] P[K \geq j] \\ &= -\Pi_k^r E[\Lambda_j | K \geq j] P[K \geq j] \\ &= 0 \end{aligned}$$

und unter Verwendung der Tatsache, dass  $\Pi_k^r = (C_{k+1} - {}_{k+1}V)v \cdot q_{x+k}$  gilt

$$\begin{aligned}
 \text{Var}[\Lambda_k] &= E[\Lambda_k^2] - E[\Lambda_k]^2 \\
 &= E[\Lambda_k^2 | K \geq k] \cdot P[K \geq k] \\
 &= \text{Var}[\Lambda_k | K \geq k] P[K \geq k] \\
 &= (q_{x+k}(-\Pi_k^r + (C_{k+1} - {}_{k+1}V)v)^2 + (1 - q_{x+k})(-\Pi_k^r)^2) P[K \geq k] \\
 &= (C_{k+1} - {}_{k+1}V)^2 v^2 p_{x+k} q_{x+k} P[K \geq k] \\
 &= (C_{k+1} - {}_{k+1}V)^2 v^2 {}_{k+1}p_x q_{x+k}
 \end{aligned}$$

Somit ist

$$\begin{aligned}
 \text{Var}[L] &= \text{Var}\left[\sum_k v^k \Lambda_k\right] = \sum_k v^{2k} \text{Var}[\Lambda_k] + \sum_{j \neq k} v^{j+k} \text{Cov}[\Lambda_j, \Lambda_k] \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} v^{2k+2} (C_{k+1} - {}_{k+1}V)^2 {}_{k+1}p_x q_{x+k}
 \end{aligned}$$

◇

In Analogie zum Deckungskapital kann man auch den zukünftigen Verlust  ${}_hL$  definieren und

$$\text{Var}[_hL] = \sum_{k=0}^{\infty} v^{2k+2} (C_{k+h+1} - {}_{k+h+1}V)^2 {}_{k+1}p_{x+h} q_{x+k+h}$$

## 7.7 Mutationen von Versicherungen

Im Prinzip kann man sagen, dass das Deckungskapital dem Versicherten „gehört“. Es kann somit bei einer Mutation einer Versicherung als Einmaleinlage aufgefasst werden. Typisch ist zum Beispiel eine Umwandlung einer Versicherung in eine prämienfreie Versicherung. Nehmen wir als Beispiel eine lebenslängliche Todesfallsumme der Höhe 1 abgeschlossen im Alter  $x$ . Die Versicherung werde mit jährlichen Prämien  $P_x$  finanziert. Falls nun der Versicherte zum Zeitpunkt  $k$  keine Lust oder keine Möglichkeit mehr hat weitere Prämien zu bezahlen, so kann das Deckungskapital zum Beispiel als Einmaleinlage für eine Todesfallversicherung in reduzierter Höhe von

$$\frac{{}_kV_x}{A_{x+k}} = 1 - \frac{P_x}{P_{x+k}}$$

eingesetzt werden. Ein spezieller Typ einer Versicherungsart, die unter dem Namen, **universal life** bekannt ist, bietet dem Versicherten höchste Freiheit, indem der Versicherte zum Beispiel jedes Jahr wieder neu bestimmte Parameter wählen kann. Der Versicherte bestimmt (bis auf bestimmte Grenzen) dabei zwei der folgenden drei Größen:

- die nächste Prämie  $\Pi_k$ ,
- das im Todesfall versicherte Kapital  $C_{k+1}$
- der neue Wert des Deckungskapitals  ${}_{k+1}V$ .

## 7.8 Technischer Gewinn

In diesem Abschnitt steht anstelle des Verlustes der Gewinn einer Versicherung im Vordergrund.  $G_t$  bezeichnet den Gewinn zur Zeit  $t$  (der Zeitsprung liegt bei Versicherungsabschluss). Somit ist

$$G_{k+1} = \begin{cases} ({}_kV + \Pi_k)(1 + i^*) - C_{k+1}, & \text{falls } K = k \\ ({}_kV + \Pi_k)(1 + i^*) - {}_{k+1}V, & \text{falls } K \geq k + 1 \end{cases}$$

wobei  $i^*$  den effektiven Marktzins bezeichnet.

**Methode 1:**  $1 + i^* = (i^* - i) + (1 + i)$ . Daraus folgt, dass

$$G_{k+1} = ({}_kV + \Pi_k)(i^* - i) - \Lambda_k(1 + i)$$

Man teilt den Gewinn also ein in einen **Kapitalertragsgewinn** und einen **Sterblichkeitsgewinn**.  $\diamond$

**Methode 2:** Da man den Prozess der Versicherung während des Policenjahres in einen Spar- und einen Risiko- prozess aufteilen kann, macht es Sinn wie folgt vorzugehen:

$$G_{k+1} = G_{k+1}^s + G_{k+1}^r$$

wobei

$$G_{k+1}^s = ({}_kV + \Pi_k^s)(i^* - i)$$

und

$$G_{k+1}^r = \begin{cases} \Pi_k^r(1 + i^*) - (C_{k+1} - {}_{k+1}V) & \text{falls } K = k \\ \Pi_k^r(1 + i^*) & \text{falls } K \geq k + 1 \end{cases}$$

und wiederum

$$G_{k+1}^r = \Pi_k^r(i^* - i) - \Lambda_k(1 + i)$$

$\diamond$

**Bemerkung:** In der Praxis wird oft der Schaden mit den Risikoprämien gemessen und verglichen und somit die Methode 1 angewendet. Der gemischte Term (Zinsrechnung und Risikoprämie) wird oft dem Zinsgewinn zugeordnet.  $\diamond$

## 7.9 Stetiges Modell

Bezeichnet man die Prämiedichte mit  $\Pi(\tau)$ , dann berechnet sich das stetige Deckungskapital als

$$V(t) = \int_0^\infty C(t + \tau) v^\tau {}_\tau p_{x+t} \mu_{x+t+\tau} d\tau - \int_0^\infty \Pi(t + \tau) v^\tau {}_\tau p_{x+t} d\tau$$

Auf die Spar- und Risikoprämie kommt man analog zur diskreten Zeit

- Sparprämie  $\Pi^s(t) = V'(t) - \delta V(t)$
- Risikoprämie  $\Pi^r(t) = (C(t) - V(t))\mu_{x+t}$

Anstelle der Differenzengleichung tritt die Differenzialgleichung (Thiele) ein

$$\underbrace{\Pi(t)}_{\text{Prämie}} + \underbrace{\delta V(t)}_{\text{Zinsertrag}} = \underbrace{V'(t)}_{\text{Veränderung des DK}} + \underbrace{\Pi^r(t)}_{\text{Risikoprämie}}$$

Die Gewinnzerlegung erfolgt ebenfalls analog zur diskreten Zeit:

$$G(t, t + dt) = G^s(t, t + dt) + G^r(t, t + dt)$$

wobei

$$G^s(t, t + dt) = (\delta(t) - \delta)V(t)dt$$

und

$$G^r(t, t + dt) = \begin{cases} -(C(t) - V(t)) & \text{falls } t < T < t + dt \\ \Pi^r(t)dt & \text{falls } T > t + dt \end{cases}$$

Zum Schluss das Theorem von Hattendorf in der stetigen Form:

**Theorem 7.9.1:** *Hattendorf, stetige Form*

$$\text{Var}[L] = \int_0^\infty v^{2t} (C(t) - V(t))^2 {}_t p_x \mu_{x+t} dt$$

$\diamond$



# Kapitel 8

## Mehrfache Ausscheideordnung

### 8.1 Das Modell

In diesem Kapitel wird in einem gewissen Sinne eine Erweiterung des Kapitels 3 vorgenommen. Bisher wurde jeweils der Übergang vom Zustand „Leben“ in den Zustand „Tod“ betrachtet, da dieser Übergang die Ausbezahlung (z.B. Todesfallversicherung) oder die Beendigung einer Leistung (z.B. Altersrente) auslöst. Man kann nun aber noch andere Zustände (z.B. die Invalidität), betrachten, die eine Änderung des Geldflusses bewirken.

Man kann dieses Problem ganz allgemein angehen, indem man nebst der Überlebenszeit  $T$  im „normalen“ Zustand noch eine weitere Zufallsvariable  $J$ , den *Ausscheidegrund*, definiert.

#### Beispiele:

- In der Erwerbsunfähigkeitsversicherung ist der Urzustand „Aktiv“ und die möglichen Ausscheideordnungen sind „Invalidität“ oder „Tod“.
- Oder es wird unterschieden zwischen Tod aufgrund von „Unfall“ oder „Krankheit“.

Sei also  $\mathcal{J}$  die Menge der Ausscheidegründe (z.B.  $\mathcal{J} = \{\text{Tod durch Unfall, Tod durch Krankheit}\}$ ).  $J(\omega)$  ist die Zufallsvariable, die Werte aus der Menge der Ausscheideursachen  $\mathcal{J}$  annimmt. Mit  $g_j(t)$   $j = 1, \dots, m$  wird die *Dichtefunktion* bezüglich der gemeinsamen Verteilung von  $T$  und  $J$  bezeichnet.

$$g_j(t)dt = P[t < T < t + dt, J = j]$$

und

$$g(t) = g_1(t) + \dots + g_m(t)$$

Wenn der Abgang zur Zeit  $t$  erfolgt, dann ist die bedingte Wahrscheinlichkeit von  $j$  gegeben  $t$

$$P[J = j | T = t] = \frac{g_j(t)}{g(t)}$$

#### Neue Notation:

$$\begin{aligned} {}_tq_{j,x} &:= P[T < t, J = j] \\ {}_tq_{j,x+s} &:= P[T < s + t, J = j | T \geq s] \end{aligned}$$

Man kann diese letzte Wahrscheinlichkeit wie folgt berechnen:

$${}_tq_{j,x+s} = \int_s^{s+t} \frac{g_j(z)dz}{1 - G(s)}$$

## 8.2 Ausscheidedichten

Zu einem Alter  $x$  kann man wieder analog zu Definition 3.5 eine *Sterbedichte* oder *Hazardrate* definieren:

$$\mu_{j,x+t} = \frac{g_j(t)}{1 - G(t)} = \frac{g_j(t)}{{}_t p_x}$$

Und daraus lässt sich die *totale Ausscheidedichte* berechnen als

$$\mu_{x+t} = \mu_{1,x+t} + \dots + \mu_{m,x+t} \quad (8.1)$$

Es gilt auch

$$P[t < T < t + dt, J = j] = {}_t p_x \mu_{j,x+t} dt$$

beziehungsweise

$$P[J = j | T = t] = \frac{\mu_{j,x+t}}{\mu_{x+t}}$$

## 8.3 Vollständig erlebte Jahre

In Kapitel 3.3 wurde die Überlebenszeit in einen ganzzahligen Teil  $K$  und in einen Rest  $S$  unterteilt gemäss Gleichungen (3.8) und (3.9). Dies um die Berechnungen der Policen einfacher zu machen. Hier verwendet man nun das gleiche Prinzip:

$$q_{j,x+k} = P[T < k + 1, J = j | T \geq k]$$

und

$$q_{x+k} = q_{1,x+k} + \dots + q_{m,x+k}$$

Daraus ergibt sich

$$P[K = k, J = j] = {}_k p_x q_{j,x+k}$$

Um die unterjährige Sterblichkeit zu modellieren gibt es wieder analoges Vorgehen zum Kapitel 3.4. Man geht wiederum häufig davon aus, dass  ${}_u q_{j,x+k}$  *linear* ist in  $u$  für  $0 < u < 1$ , d.h.

$${}_u q_{j,x+k} = u q_{j,x+k}$$

Aus dieser Gleichung folgt

$$\begin{aligned} g_j(k+u) &= u \cdot {}_k p_x q_{j,x+k} \\ {}_{k+u} p_x &= {}_k p_x (1 - u \cdot q_{x+k}) \end{aligned}$$

und

$$\mu_{j,x+k+u} = \frac{u \cdot q_{j,x+k}}{1 - u \cdot q_{x+k}}$$

Aus obiger Gleichung lässt sich insbesondere

$$P[J = j | K = k, S = u] = \frac{q_{j,x+k}}{q_{x+k}}$$

herleiten, da  $P[J = j | T = t] = \frac{\mu_{j,x+t}}{\mu_{x+t}}$



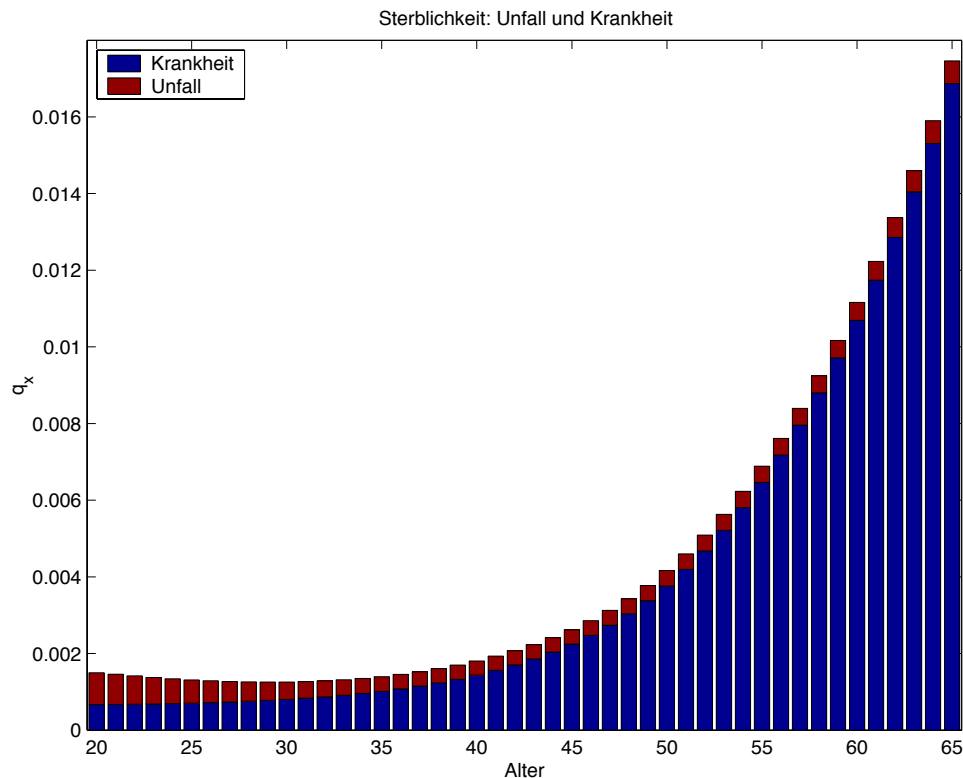


Abbildung 8.1: Einlagesätze für einjährige Todesfallversicherungen mit Ausscheideursachen Krankheit und Unfall.

## 8.4 Allgemeine Typen von Kapitalversicherungen

Bisher war im Todesfall  $C_k$  als Todesfallleistung versichert worden. Nun ist pro Ausscheideursache eine Todesfallsumme  $C_{j,k}$  versichert.

$$Z = C_{J,K+1} v^{K+1}$$

wobei

$J : \Omega \longrightarrow \{1, \dots, m\}$  die *Ausscheideursache* bezeichnet und  $K : \Omega \longrightarrow \mathbb{N}$  den *Ausscheidezeitpunkt*.

Die notwendige Einmaleinlage berechnet sich als Erwartungswert

$$E[Z] = \sum_{j=1}^m \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} C_{j,k+1} p_x q_{j,x+k}$$

Im Falle einer zum exakten Todeszeitpunkt zahlbaren Versicherung ist

$$Z = C_J(T) v^T$$

Die notwendige Einmaleinlage berechnet sich nun nach

$$\begin{aligned} E[Z] &= \sum_{j=1}^m \int_0^{\infty} C_j(t) v^t g_j(t) dt \\ &= \sum_{j=1}^m \int_0^{\infty} C_j(t) v^t {}_t p_x \mu_{j,x+t} dt \end{aligned}$$

Nachdem das diskrete und das stetige Modell definiert sind, kann man wiederum versuchen das eine in das andere überzuführen.

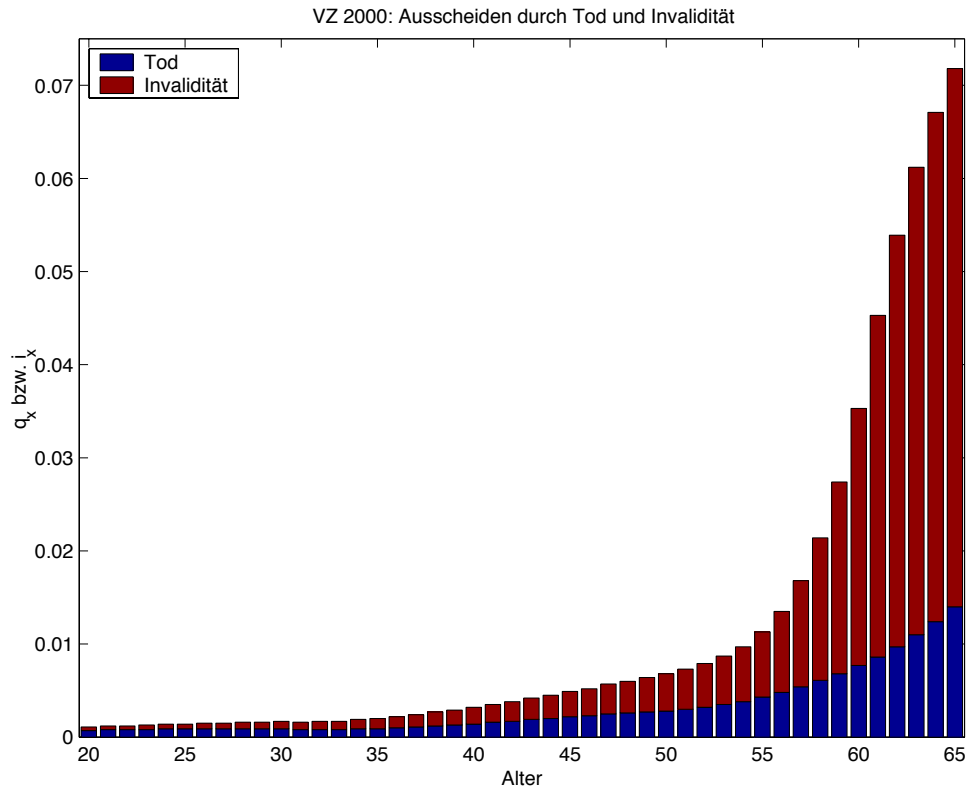


Abbildung 8.2: Ausscheidewahrscheinlichkeiten aus dem Bestand der Aktiven für VZ 2000.

$$\begin{aligned}
 E[Z]^{stetig} &= \sum_{j=1}^m \int_0^{\infty} C_j(t) v_t^j p_x \mu_{j,x+t} dt \\
 &= \sum_{j=1}^m \int_0^{\infty} C_j(t) v_t^j g_{j,x+t} dt \\
 &= \sum_{j=1}^m \sum_{k=0}^{\infty} v_k^j p_x \int_0^1 u p_{x+k} \mu_{j,x+k+u} v^u C_j(k+u) du
 \end{aligned}$$

Nun gilt  $\mu_{j,x+k+u} = \frac{q_{j,x+k}}{1 - u q_{j,x+k}}$  und  $u p_{x+k} = 1 - u q_{j,x+k}$

Also ist Gleichung (8.2) gleich

$$\sum_{j=1}^m \sum_{k=0}^{\infty} v_k^{j+1} p_x q_{j,x+k} \underbrace{\int_0^1 v^{u-1} C_j(k+u) du}_{=: C_{j,k+1}}$$

Für konkrete Fälle ergibt  $C_{j,k+1} \sim C_j(k + \frac{1}{2})(1+i)^{\frac{1}{2}}$  oft eine gute Approximation.

## 8.5 Deckungskapital und Rekursion

Wir nehmen an, dass die vorgängig definierten Versicherungen mit Prämien  $\Pi_0, \Pi_1, \dots$  finanziert worden sind. Dann ist das Deckungskapital definiert durch

$${}_k V_x = \sum_{j=1}^m \sum_{h=0}^{\infty} C_{j,k+h+1} v^{h+1} {}_h p_{x+k} q_{j,x+k+h} - \sum_{h=0}^{\infty} \Pi_{k+h} v^h {}_h p_{x+k}$$

Aus dieser Formel kann man einfach die folgende Rekursion herleiten

$${}_k V_x + \Pi_k = \underbrace{{}_{k+1} V_x v p_{x+k}}_{\text{Reserve für Zukunft}} + \underbrace{\sum_{j=1}^m C_{j,k+1} v q_{j,x+k}}_{\text{Kosten für die einzelnen Deckungen}}$$

Nachdem die Rekursion für das Deckungskapital hergeleitet ist, kann man nun die technische Zerlegung durchführen.

$${}_k V_x + \Pi_k = v \cdot {}_{k+1} V_x + \sum_{j=1}^m (C_{j,k+1} - {}_{k+1} V_x) v q_{j,x+k}$$

Wir definieren die *Sparprämie* als

$$\Pi_k^s = v \cdot {}_{k+1} V_x - {}_k V_x$$

und die *Risikoprämie* für Ausscheideordnung  $j$  als

$$\Pi_k^{j,r} = (C_{j,k+1} - {}_{k+1} V_x) v \cdot q_{j,x+k}$$

Die *totale Risikoprämie* ist definiert durch

$$\Pi_k^r = \sum_j \Pi_k^{j,r}$$

Der *Verlust* des Versicherers kann in analoger Weise zu vorher definiert werden

$$L = \sum_{j \in J} I_{\{J=j\}} C_{j,K+1} v^{K+1} - \sum_{k=0}^K \Pi_k v^k$$

Man kann den *totalen Verlust* wiederum den einzelnen Policenjahren zuordnen indem man die folgende Gleichung betrachtet:

$$L = \sum_{k=0}^{\infty} \Lambda_k v^k$$

wobei

$$\Lambda_k = \begin{cases} 0, & \text{falls } K \leq k-1 \\ -\Pi_k^r + (C_{j,k+1} - {}_{k+1} V_x) v, & \text{falls } K = k \\ -\Pi_k^r, & \text{falls } K \geq k+1 \end{cases}$$

**Bemerkung:** Das Theorem 7.6.2 von Hattendorff bleibt gültig.  $\diamond$

Man kann den Verlust und die technische Analyse auch auf die verschiedenen Ausscheideordnungen anwenden.

$$\Lambda_k = \sum_{j=1}^m \Lambda_{j,k}$$

wobei

$$\Lambda_{j,k} = \begin{cases} 0, & \text{falls } K \leq k-1 \\ -\Pi_k^{j,r} + (C_{j,k+1} - {}_{k+1} V_x) v, & \text{falls } K = k \text{ und } J = j \\ -\Pi_k^{j,r}, & \text{falls } K \geq k+1 \\ & \text{oder } K = k \text{ und } J \neq j \end{cases}$$

Schliesslich ist es mit dieser Methode auch möglich das technische Ergebnis am Ende des Jahres zu berechnen.

$$G_{k+1} = \begin{cases} ({}_kV_x + \Pi_k)(1 + i') - C_{J,k+1}, & \text{falls } K = k \\ ({}_kV_x + \Pi_k)(1 + i') - {}_{k+1}V_x, & \text{falls } K \geq k + 1 \end{cases}$$

wobei  $i'$  der effektiv realisierte Zinssatz ist.

**Bemerkung:** Man kann dieselben Überlegungen auch für das stetige Modell durchführen.

◇

# Kapitel 9

## Versicherungen auf mehrere Leben

Wir betrachten  $m$  versicherte Personen mit Altern  $x_1, \dots, x_m$ . Die zukünftige Lebensdauer der  $k$ -ten Person werde mit  $T_k$  bezeichnet. Ausgehend von diesen  $m$  Individuen werden wir einen Zustand  $u$  definieren und mit  $T(u)$  die zukünftige Lebensdauer des Status  $u$  bezeichnen. Entsprechend bezeichnet  ${}_t p_u$  die Wahrscheinlichkeit, dass  $u$  zum Zeitpunkt  $t$  noch intakt ist. Man kann auch Renten betrachten. So bezeichnet etwa  $\ddot{a}_u$  die Nettoeinmaleinlage für Zahlungen von je 1, die zu den Zeitpunkten  $0, 1, 2, \dots$  erfolgen, solange der Zustand  $u$  intakt ist.  $A_u$  bezeichnet die Nettoeinmaleinlage für eine Todesfallversicherung beim Verlassen des Zustandes  $u$ .

### 9.1 Der Zustand der verbundenen Leben

Der Zustand

$$u = x_1 : x_2 : \dots : x_m$$

wird als *intakt* definiert, solange alle Komponenten am Leben sind, und *erlischt* mit dem ersten Tod:

$$T(u) = \min\{T_i | i = 1, \dots, m\}$$

(Im Englischen heisst dieser Zustand “joint life status”). Im folgenden wird angenommen, dass die Zufallsvariablen *unabhängig* sind.

$$\begin{aligned} {}_t p_{x_1 : \dots : x_m} &= P[T(u) \geq t] \\ &= P[T_1 \geq t, T_2 \geq t, \dots, T_m \geq t] \\ &= \prod_{k=1}^m P[T_k \geq t] = \prod_{k=1}^m {}_t p_{x_k} \end{aligned}$$

Die entsprechende *Sterbeintensität* ergibt sich dann analog zu (3.5) aus:

$$\begin{aligned} \mu_{u+t} &= -\frac{d}{dt} \ln({}_t p_u) \\ &= -\frac{d}{dt} \ln\left(\prod_{k=1}^m {}_t p_{x_k}\right) \\ &= -\frac{d}{dt} \sum_{k=1}^m \ln({}_t p_{x_k}) \\ &= \sum_{k=1}^m \mu_{x_k+t} \end{aligned} \tag{9.1}$$

Dieses Ergebnis gleicht der Ausscheidendichte bei mehreren Ausscheidemöglichkeiten in Formel (8.1). Es ist jedoch anzumerken, dass (8.1) *allgemein gültig* ist, während man bei (9.1) *Unabhängigkeit* von  $T_1, T_2, \dots, T_m$  voraussetzt.

Die *Einmaleinlage* für eine Versicherung auf den ersten Tod lässt sich folgendermassen berechnen:

$$A_{x_1:\dots:x_m} = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} {}_k p_{x_1:\dots:x_m} q_{x_1+k:\dots:x_m+k}$$

und die Einmaleinlage für die sogenannten Verbindungsrenten berechnet sich als

$$\ddot{a}_{x_1:\dots:x_m} = \sum_{k=0}^{\infty} v^k {}_k p_{x_1:\dots:x_m}$$

Sinngemäss gelten auch die Identitäten in Gleichung (5.18), nämlich

$$1 = d\ddot{a}_{x_1:\dots:x_m} + A_{x_1:\dots:x_m}$$

## 9.2 Vereinfachungen

Falls für alle Leben das *Gompertz'sche Sterbengesetz* angenommen wird, also

$$\mu_{x_k+t} = Bc^{x_k+t}$$

so ergibt sich eine erhebliche Vereinfachung. Wir definieren  $w$  so, dass

$$c^{x_1} + c^{x_2} + \dots + c^{x_m} = c^w$$

Dann gilt

$$\mu_{u+t} = \mu_{w+t}$$

und somit

$$\begin{aligned} A_{x_1:x_2:\dots:x_m} &= A_w \\ \ddot{a}_{x_1:x_2:\dots:x_m} &= \ddot{a}_w \end{aligned}$$

Früher waren diese Vereinfachung wichtig, heute nicht mehr so, aber für Überslagsrechnungen immer noch brauchbar.

## 9.3 Zustand des letzten Lebens

$$u := \overline{x_1 : x_2 : \dots : x_m}$$

ist definitionsgemäss *intakt*, solange mindestens eine der  $m$  Personen lebt und *erlischt* mit dem letzten Tod

$$T(u) = \max\{T_1, \dots, T_m\}$$

Um die Wahrscheinlichkeit für  $T(u)$  zu berechnen erinnern wir uns an die Formel

$$P[B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_m] = S_1 - S_2 + S_3 - \dots + (-1)^{m-1} S_m$$

wobei

$$S_k = \sum_{j_1 \neq j_2 \dots} P[B_{j_1} \cap B_{j_2} \dots \cap B_{j_k}]$$

wobei sich die Summation über alle  $\binom{m}{k}$  Möglichkeiten erstreckt.

Wenn wir  $B_k = \{T_{x_k} > t\}$  betrachten, erhalten wir

$${}_t p_{\overline{x_1:x_2:\dots:x_m}} = S_1^t - S_2^t + S_3^t - \dots + (-1)^{m-1} S_m^t$$

wobei

$$S_k^t = \sum_{j_1 \neq j_2 \neq \dots \neq j_m} {}_t p_{x_{j_1}:x_{j_2}:\dots:x_{j_m}}$$

Multipliziert man nun obige Gleichung mit  $v^t$  und summiert über alle  $t$  dann erhält man

$$\ddot{a}_{\overline{x_1:x_2:\dots:x_m}} = S_1^{\ddot{a}} - S_2^{\ddot{a}} + S_3^{\ddot{a}} - \dots + (-1)^{m-1} S_m^{\ddot{a}}$$

wobei

$$S_k^{\ddot{a}} = \sum_{j_1 \neq j_2 \neq \dots \neq j_m} \ddot{a}_{x_{j_1}:x_{j_2}:\dots:x_{j_m}}$$

schliesslich gilt wieder der Zusammenhang

$$A_{\overline{x_1:x_2:\dots:x_n}} = 1 - d\ddot{a}_{\overline{x_1:x_2:\dots:x_n}}$$

*Beispiel:*  $\ddot{a}_{\overline{x:y:z}} = S_1^{\ddot{a}} - S_2^{\ddot{a}} + S_3^{\ddot{a}}$  und

$$\begin{aligned} S_1^{\ddot{a}} &= \ddot{a}_x + \ddot{a}_y + \ddot{a}_z \\ S_2^{\ddot{a}} &= \ddot{a}_{xy} + \ddot{a}_{xz} + \ddot{a}_{yz} \\ S_3^{\ddot{a}} &= \ddot{a}_{xyz} \end{aligned}$$

## 9.4 Praxis

Nachdem wir die allgemeinen Versicherungsformen mehr oder weniger allumfassend behandelt haben, wollen wir uns nun noch einigen Spezialformen zuwenden, welche in der Praxis oft verwendet werden.

### Typische Beispiele:

- Verbindungsrenten: Zahlung so lange Paar lebt
- Überlebensrenten: Zahlung nach Tod des Partners, z.B. Witwenrente
- Todesfallsumme auf das erste und auf das zweite Leben

◇

Das Ziel ist es, die Formeln herzuleiten, damit Formelwerke verstanden werden können.

### Definitionen:

$l_{xy}$  = Anzahl Personen im Alter  $(x/y)$ .

Via Rekursion lässt sich dies berechnen aus

$$l_{x+1,y+1} = (1 - \hat{q}_x)(1 - \hat{q}_y)l_{x,y}$$

Daraus lassen sich wieder die rohen Überlebenswahrscheinlichkeiten schätzen als

$${}_t \hat{p}_{xy} = \frac{l_{x+t,y+t}}{l_{xy}} (= {}_t \hat{p}_x \cdot {}_t \hat{p}_y)$$

Analog gilt

$${}_t \hat{q}_{xy} = 1 - {}_t \hat{p}_{xy}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens noch eine Person am Leben ist beträgt dann gemäss Additionssatz

$${}_t p_{\overline{xy}} = {}_t p_x + {}_t p_y - {}_t p_{xy} \quad (9.2)$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass keine der beiden Personen mehr am Leben ist komplementär zu (9.2):

$$\begin{aligned} {}_t q_{\overline{xy}} &= (1 - {}_t p_x) \cdot (1 - {}_t p_y) \\ &= 1 - {}_t p_x + 1 - {}_t p_y - (1 - {}_t p_{xt} p_y) \\ &= 1 - {}_t p_x + 1 - {}_t p_y - (1 - {}_t p_{xy}) \\ &= {}_t q_x + {}_t q_y - {}_t q_{xy} \end{aligned} \quad (9.3)$$

### Kommutationszahlen

Es sind verschiedene Arten möglich, Kommutationszahlen zu bilden:

$$1. D_{xy} = l_{xy} \cdot v^x \quad (9.4)$$

$$2. D_{xy} = l_{xy} \cdot v^y \quad (9.5)$$

$$3. D_{xy} = l_{xy} \cdot v^{\frac{x+y}{2}} \quad (9.6)$$

Die Formeln (9.4) und (9.5) sind einfacher zum Rechnen, die Formel (9.6) ist dafür symmetrisch.

$$N_{xy} = \sum_{t=0}^{\infty} D_{x+t,y+t}$$

$$S_{xy} = \sum_{t=0}^{\infty} N_{x+t,y+t}$$

Mit  $d_{xy}$  bezeichnet man die Anzahl aufgelöster Paare

$$d_{xy} = l_{xy} - l_{x+1,y+1}$$

Auch hier gibt es wieder 3 Möglichkeiten, wie z.B.

$$C_{xy} = d_{xy} v^{\frac{x+y}{2}+1}$$

$$M_{xy} = \sum_{t=0}^{\infty} C_{x+t,y+t}$$

$$R_{xy} = \sum_{t=0}^{\infty} M_{x+t,y+t}$$

## 9.5 Barwerte für typische Versicherungen auf zwei Leben

### 9.5.1 Kapitalversicherung auf den Erlebensfall

- Die Erlebensfallleistung ist fällig, falls das Paar  $n$  Jahre überlebt. Die Einmaleinlage berechnet sich dann als

$$A_{xy:\overline{n}|}^1 = v^n {}_n p_{xy} = \frac{D_{x+n,y+n}}{D_{x,y}}$$

**Bemerkung:** Manchmal findet man auch eine andere Notation,  ${}_n E_{xy}$  statt  $A_{xy:\overline{n}|}^1$ . ◇

- Die Erlebensfallleistung ist fällig, falls mindestens 1 Person  $n$  Jahre überlebt.

$$A_{\overline{xy}:\overline{n}|}^1 = v^n (1 - {}_n q_{\overline{xy}}) = v^n {}_n p_{\overline{xy}}$$

und  ${}_n p_{\overline{xy}} = {}_n p_x + {}_n p_y - {}_n p_{xy}$ . Somit gilt

$$A_{\overline{xy}:\overline{n}|}^1 = A_{x:\overline{n}|}^1 + A_{y:\overline{n}|}^1 - A_{xy:\overline{n}|}^1 \quad (9.7)$$

**Bemerkung:** Auch hier trifft man hin und wieder auf die Notation  ${}_n E_{\overline{xy}}$  statt  $A_{\overline{xy}:\overline{n}|}^1$ . ◇



### 9.5.2 Verbindungsrenten

- Sofort beginnende Rente, bis zur Auflösung des Paares.

$$\begin{aligned}\ddot{a}_{xy} &= \sum_{k=0}^{\infty} {}_k p_{xy} v^k \\ &= 1 + \frac{D_{x+1,y+1}}{D_{xy}} + \frac{D_{x+2,y+2}}{D_{xy}} + \frac{D_{x+3,y+3}}{D_{xy}} + \dots \\ &= \frac{N_{xy}}{D_{xy}}\end{aligned}$$

- Analog erhält man

$$\begin{aligned}{}_m | \ddot{a}_{xy} &= \frac{N_{x+m,y+m}}{D_{xy}} \\ \ddot{a}_{xy:\overline{m}|} &= \frac{N_{xy} - N_{x+m,y+m}}{D_{xy}}\end{aligned}$$

- Sofort beginnende Rente, zahlbar solange mindestens eine Person am Leben ist.

$$\ddot{a}_{\overline{xy}} = \sum_{t=0}^{\infty} {}_t p_{\overline{xy}} v^t$$

Wieder gilt  ${}_n p_{\overline{xy}} = {}_n p_x + {}_n p_y - {}_n p_{xy}$ , also

$$\ddot{a}_{\overline{xy}} = \ddot{a}_x + \ddot{a}_y - \ddot{a}_{xy}$$

### 9.5.3 Überlebenszeitrenten

- **Einseitig:**

Im Falle eines Todes von  $x$  wird eine Zahlung an  $y$  getätigt. Die Einmaleinlage berechnet sich als

$$\ddot{a}_{x|y} = \ddot{a}_y - \ddot{a}_{xy}$$

und analog für den temporären Fall

$$\ddot{a}_{x|y:\overline{n}|} = \ddot{a}_{y:\overline{n}|} - \ddot{a}_{xy:\overline{n}|}$$

- **Zweiseitig**

Im Falle eines Todes von  $x$  wird eine Zahlung an  $y$  getätigt und umgekehrt.

$$\begin{aligned}\ddot{a}_{xy}^1 &= \ddot{a}_{x|y} + \ddot{a}_{y|x} \\ &= \ddot{a}_x + \ddot{a}_y - 2\ddot{a}_{xy} \\ &= \ddot{a}_{\overline{xy}} - \ddot{a}_{xy}\end{aligned}$$

#### Bemerkungen:

- Individuelle Witwen- und Waisenrenten fallen unter die einseitigen Überlebenszeitrenten.
- Die Sterblichkeit wurde bisher unabhängig vom Zustand angesehen. Aber die Witwen- und Witwersterblichkeit ist grösser.
- Witwenrenten haben eine zweite Ausscheideursache! Wenn sich nämlich eine Witwe wieder verheiratet, so entfällt die Witwenrente. Wiederverheiratung wird nicht exakt berücksichtigt.

- Bei der Waisenrente wird oft die Sterblichkeit der Kinder vernachlässigt, also statt

$$\ddot{a}_{x|z:\overline{g-z}|} = \ddot{a}_{z:\overline{g-z}|} - \ddot{a}_{xz:\overline{g-z}|}$$

verwendet man als Barwert

$$\ddot{a}_{x|\overline{g-z}|} = \ddot{a}_{g-z|} - \ddot{a}_{x:\overline{g-z}|}$$

wobei  $g$  das Schlusssalter bezeichnet.

- Die Waisenrente wird vervielfacht beim Tode von Mutter und Vater.

◇

### 9.5.4 Witwenrente, kollektive Methode

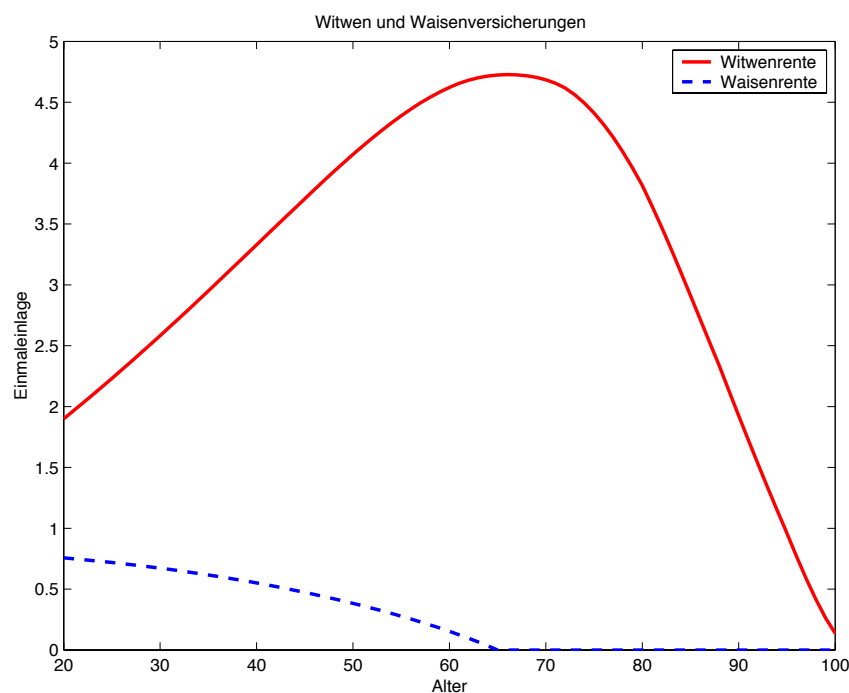


Abbildung 9.1: Einmaleinlage für Hinterbliebenenrenten.

Die Anwartschaft ist nur in Abhängigkeit des Mannes, das Alter der Frau bleibt unberücksichtigt. Zudem wird nicht einmal beachtet, ob ein Mann verheiratet ist oder nicht. Erst im Zeitpunkt des Todes wird geschaut, ob eine Ehefrau vorhanden ist oder nicht. Diese erwirbt einen Anspruch auf eine Witwenrente.

Um den Rentenbarwert für diesen Fall berechnen zu können braucht man zwei weitere Größen:

$h_x$ : Wahrscheinlichkeit, dass ein beim Tod  $x$ -jähriger Mann verheiratet ist.  $h_x$  ist stark von der sozialen Struktur des betrachteten Versicherungsbestandes abhängig.

$y_x$ : das mittlere Alter der beim Tod eines  $x$ -jährigen Mannes hinterlassenen Witwe. Die mittlere Altersdifferenz zwischen Mann und Frau ist vom Alter abhängig. Sie nimmt mit zunehmendem Alter zu wegen Folgeehen in späteren Jahren.

Wie man aus folgender Tabelle ersehen kann, verändern sich die Wahrscheinlichkeiten, verheiratet zu sein relativ rasch.

$x$	$h_{x+\frac{1}{2}}$ Kollektivtarif 80	$h_{x+\frac{1}{2}}$ Kollektivtarif 95	$y_{x+\frac{1}{2}}$ Kollektivtarif 80	$y_{x+\frac{1}{2}}$ Kollektivtarif 95
20	0.498	0.100	20	19
30	0.750	0.435	29	29
40	0.890	0.728	38	38
50	0.93	0.804	47	48
60	0.880	0.838	57	57
70	0.750	0.816	66	67
80	0.552	0.705	74	75
90	0.296	0.472	82	84

Die Einmaleinlage wird berechnet als

$$\begin{aligned}
 \ddot{a}_x^w &= \sum_{t=0}^{\omega-x} {}_t p_x q_{x+t} h_{x+t} v^{t+1} \ddot{a}_{y_{x+t+1}} \\
 &= \sum_{t=0}^{\omega-x} \frac{v^{x+t+1}}{v^x} \frac{l_{x+t}}{l_x} h_{x+t} \frac{d_{x+t}}{l_{x+t}} \ddot{a}_{y_{x+t+1}} \\
 &= \sum_{t=0}^{\omega-x} \frac{C_{x+t}}{D_{x+t}} h_{x+t} \ddot{a}_{y_{x+t+1}} \\
 &=: \sum_{t=0}^{\omega-x} \frac{C_{x+t}^w}{D_{x+t}}
 \end{aligned}$$

wobei  $\omega$  das Schlussalter ist.

### 9.5.5 Demographische Grundlagen gemäss Kollektivtarif 95

#### Wiederverheiratung von Witwen und Witnern

Die Wiederverheiratung wird sowohl für sofort beginnende als auch für anwartschaftliche Renten durch Reduktionsfaktoren bei den sofort beginnenden Leibrenten erfasst. Die Faktoren hängen vom Alter des überlebenden Ehegatten ab.

Witwen

$$H_y^v = \begin{cases} \frac{y+40}{80}, & y < 40 \\ 1, & y \geq 40 \end{cases}$$

Witwer

$$H_x^v = \begin{cases} \frac{x+40}{80}, & x < 40 \\ 1, & x \geq 40 \end{cases}$$

Der Reduktionsfaktor gilt für alle Witwen und Witwer mit oder ohne Kapitalabfindung bei Wiederverheiratung vor dem 45. Altersjahr, indessen darf die Abfindung drei Jahresrenten nicht übersteigen.

#### Wahrscheinlichkeit beim Tod verheiratet zu sein

Wahrscheinlichkeit  $h_u$  beim Tod (d.h. zwischen  $u$  und  $u+1$ ) verheiratet zu sein. Siehe Figuren 9.2 und 9.3.

#### Durchschnittsalter des überlebenden Ehegatten bei Tode der versicherten Person

Durchschnittsalter  $y_u$  bzw.  $x_u$  des überlebenden Ehegatten beim Tod der versicherten Person (d.h. zwischen den Altern  $u$  und  $u+1$ ): Siehe Figuren 9.4 und 9.5.

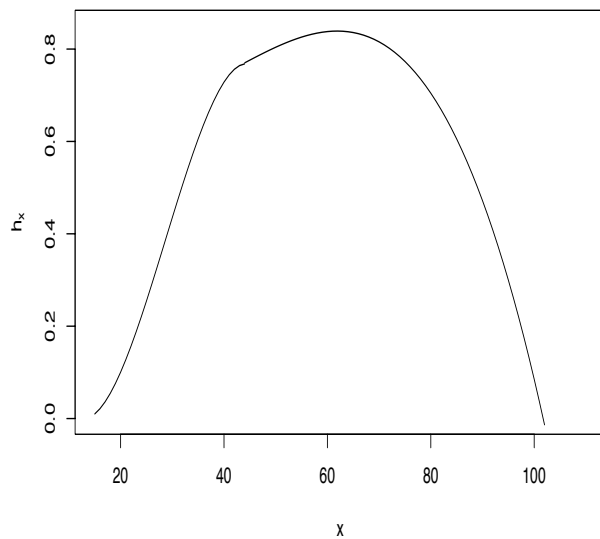


Abbildung 9.2: Wahrscheinlichkeit  $h_u$  beim Tod im Alter zwischen  $u$  und  $u + 1$  verheiratet zu sein. Modell aus KT 95 ( $h_x$ ).

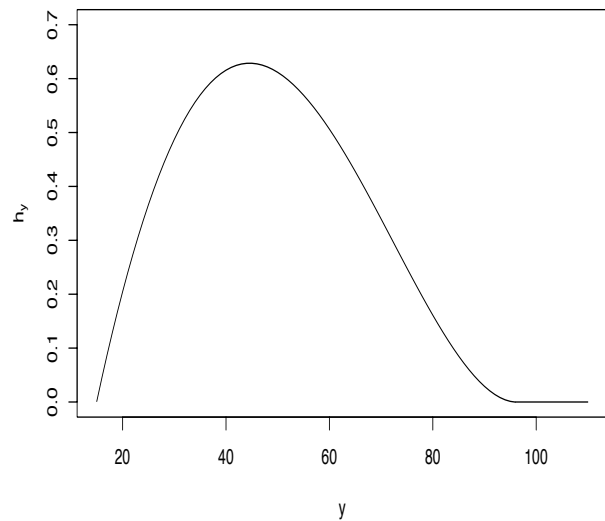


Abbildung 9.3: Wahrscheinlichkeit  $h_u$  beim Tod im Alter zwischen  $u$  und  $u + 1$  verheiratet zu sein. Modell aus KT 95 ( $h_y$ ).

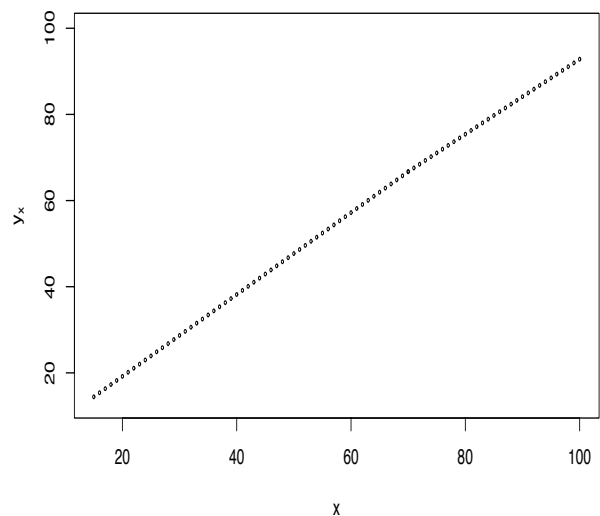


Abbildung 9.4: Durchschnittsalter  $y_u$  des überlebenden Ehegatten beim Tod der versicherten Person im Alter zwischen  $u$  und  $u + 1$  (Frau:  $y_x$ ).

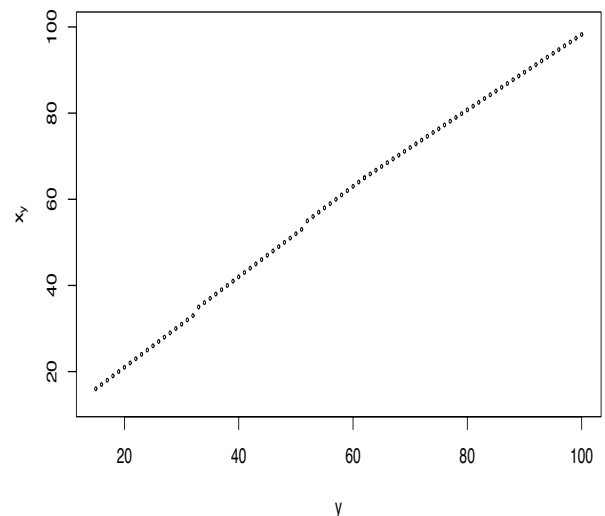


Abbildung 9.5: Durchschnittsalter  $x_u$  des überlebenden Ehegatten beim Tod der versicherten Person im Alter zwischen  $u$  und  $u + 1$  (Mann:  $x_y$ ).

### 9.5.6 Waisenrente, kollektive Methode

Auch hier werden zwei neue Rechnungsgrößen notwendig:

$k_x$ : Die mittlere Anzahl Kinder, welche das Schlussalter  $g$  noch nicht erreicht haben, beim Tod eines  $x$ -jährigen Mannes.

$z_x$ : Das mittlere Alter dieser Kinder.

Beide Größen sind wiederum stark von der sozialen Struktur des betrachteten Versicherungsbestandes abhängig.

$x$	$k_{x+\frac{1}{2}}$ Kollektivtarif 80	$k_{x+\frac{1}{2}}$ Kollektivtarif 90	$z_{x+\frac{1}{2}}$ Kollektivtarif 80	$z_{x+\frac{1}{2}}$ Kollektivtarif 90
20	0.02	0.02	0.5	0.8
30	1.19	0.53	4.0	4.3
40	1.91	1.30	9.5	10.6
50	1.10	0.94	14.5	15.2
60	0.36	0.24	18.0	17.4

Die Einmaleinlage berechnet sich als

$$\begin{aligned}
 \ddot{a}_{x:g}^k &= \sum_{t=0}^{\omega-x} {}_t p_x q_{x+t} k_{x+t+\frac{1}{2}} v^{t+\frac{1}{2}} \ddot{a}_{g-z_{x+t-1/2}} \\
 &= \sum_{t=0}^{\omega-x} \frac{v^{x+t+1}}{v^x} \frac{l_{x+t}}{l_x} k_{x+t+\frac{1}{2}} \frac{d_{x+t}}{l_{x+t}} v^{-\frac{1}{2}} \ddot{a}_{g-z_{x+t-1/2}} \\
 &= \sum_{t=0}^{\omega-x} \frac{C_{x+t}}{D_x} k_{x+t+\frac{1}{2}} \ddot{a}_{g-z_{x+t-1/2}} v^{-\frac{1}{2}} \\
 &=: \sum_{t=0}^{\omega-x} \frac{C_{x+t}^k}{D_x}
 \end{aligned}$$

wobei  $\omega$  das Schlussalter des Vaters ist,  $g$  das Schlussalter der Kinder.

### 9.5.7 Todesfall- und gemischte Versicherungen

Solche Kapitalversicherungen werden im Allgemeinen zweiseitig abgeschlossen, das heisst die Zahlung der Versicherungssumme im Todesfall (erster oder zweiter Tod) ist unabhängig von der zeitlichen Abfolge der Todesfälle von  $x$  und  $y$ . Im nachfolgenden wird nur diese Art betrachtet.

Es ist aber auch möglich, einseitige Todesfallversicherungen zu definieren, wo die Summe beim Tode der einen Person ausbezahlt wird, falls die andere Person noch lebt. (z.B. Witwenkapitalversicherung).

#### Versicherung auf den ersten Tod

Eine *lebenslängliche Todesfallversicherung* wird analog zur Todesfallversicherung auf ein Leben in Gleichung (5.5) hergeleitet.

$$A_{xy} = \frac{M_{xy}}{D_{xy}}$$

oder auch

$$A_{xy} = 1 - d\ddot{a}_{xy}$$

Eine *temporäre Todesfallversicherung*, bei welcher bis zum Ablauf der Versicherung nach  $n$  Jahren eine Todesfallsumme fällig wird, berechnet sich als

$$A_{xy:\overline{n}|}^1 = \frac{M_{xy} - M_{x+n,y+n}}{D_{xy}}$$

Eine *gemischte Versicherung* auf das erste Leben berechnet sich als

$$A_{xy:\overline{n}|} = A_{xy:\overline{n}|}^1 + A_{xy:\overline{n}|}^{\infty} = 1 - d\ddot{a}_{xy:\overline{n}|}$$

### Versicherung auf den zweiten Tod

Die Wahrscheinlichkeit, dass keiner mehr am Leben ist, ist gemäss (9.3) gegeben und für die Einmaleinlage einer lebenslänglichen Todesfallversicherung ergibt sich

$$\begin{aligned} A_{\overline{xy}} &= \sum_t {}_t p_x q_{x+t} v^{t+1} + {}_t p_y q_{y+t} v^{t+1} \\ &\quad - {}_t p_{xy} q_{x+t,y+t} v^{t+1} \\ &= \sum_t \frac{{}_t C_{x+t}}{D_x} + \frac{{}_t C_{y+t}}{D_y} - \frac{{}_t C_{x+t,y+t}}{D_{xy}} \\ &= A_x + A_y - A_{xy} \end{aligned}$$

Ebenfalls gilt wieder die Relation

$$A_{\overline{xy}} = 1 - d\ddot{a}_{\overline{xy}}$$

Bei einer *gemischten Versicherung* auf den zweiten Tod wird zusätzlich zum Todesfallkapital noch eine Erlebensfallleistung fällig, falls noch mindestens eine Person am Leben ist. Die Einmaleinlage dieser Erlebensfallleistung wurde in Gleichung (9.7) berechnet. Somit beträgt die Einmaleinlage der gemischten Versicherung auf das zweite Leben

$$\begin{aligned} A_{\overline{xy}:\overline{n}} &= A_{x:\overline{n}} + A_{y:\overline{n}} - A_{xy:\overline{n}} \\ &= 1 - d(\ddot{a}_{x:\overline{n}} + \ddot{a}_{y:\overline{n}} - \ddot{a}_{xy:\overline{n}}) \end{aligned}$$

und

$$A_{\overline{xy}:\overline{n}} = 1 - d\ddot{a}_{\overline{xy}:\overline{n}}$$

## 9.5.8 Prämienzahlarten

Es existieren verschiedene Varianten:

- Die Prämien werden solange bezahlt, wie das Paar lebt. Dann können wir die Prämienzahlung als temporäre Verbindungsrente auffassen. Das bedeutet, dass der massgebende Barwert durch  $\ddot{a}_{xy:\overline{n}}$  dividiert werden muss.
- Die Prämien werden nur solange bezahlt, wie ein bestimmter Versicherter lebt. Dies ist insbesondere bei Überlebens- und Hinterbliebenenrenten der Fall. Dann dividieren wir wie bisher durch  $\ddot{a}_{x:\overline{n}}$  resp.  $\ddot{a}_{y:\overline{n}}$ .
- Bei Waisenrenten wird die Kollektivierung häufig soweit getrieben, dass ein konstanter Prämienatz verwendet wird, unabhängig vom Alter der Eltern und der Kinder.

# Kapitel 10

## Markovketten

### 10.1 Traditionelle Tarifierung

Der Ablauf einer traditionellen Tarifierung lässt sich folgendermassen beschreiben:

1. Wir starten mit Sterbewahrscheinlichkeiten und berechnen dann eine Sterbetafel beginnend mit z. B. 100'000 Personen im Alter von 20 Jahren.

Bezeichne  $l_x$  die Anzahl lebender Personen im Alter  $x$ .

$$\begin{aligned}l_0 &= 100'000 \\l_{x+1} &= l_x(1 - q_x) \\d_x &= l_x - l_{x+1}\end{aligned}$$

2. Dann werden die verschiedenen Kommutationszahlen berechnet:

$$D_x = l_x v^x, C_x = d_x v^{x+1}, \text{ etc.}$$

Diese Zahlen hängen ab

- von der Anzahl lebender Personen und
- vom technischen Zins.

3. Mit diesem Formalismus können wir nun Barwerte, Prämien, etc. berechnen:

$$\begin{aligned}\ddot{a}_x &= \frac{N_x}{D_x} \\A_x &= \frac{M_x}{D_x}\end{aligned}$$

Fast alle Prämien können durch Addition und Multiplikation von Kommutationszahlen berechnet werden. Dieses Vorgehen ist vor allem dann sinnvoll, wenn kein Computer zur Verfügung steht.

Das *Markovmodell* erlaubt uns die Tarifierung von Lebensversicherungen *ohne Kommutationszahlen*. Es beginnt mit der Berechnung des Deckungskapitals via Rekursion und verwendet direkt die verschiedenen Wahrscheinlichkeiten.

**Beispiel:**  ${}_n p_x$  bezeichnet die Wahrscheinlichkeit, dass eine  $x$ -jährige Person  $n$  Jahre überlebt. Es gelten

$$\ddot{a}_x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{D_{x+k}}{D_x} = \dots = \sum_{k=0}^{\infty} v^k \cdot {}_k p_x$$

und

$${}_{k+1}p_x = {}_kp_x \cdot p_{x+k}.$$

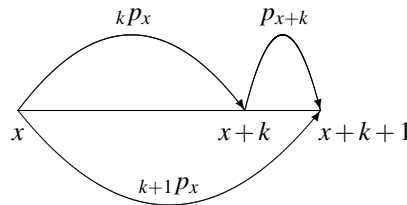


Abbildung 10.1: Übergangswahrscheinlichkeiten

$\ddot{a}_x$  entspricht dem Deckungskapital  $V_x$  für eine Annuität der Höhe 1. Ausserdem gilt

$$V_x = \ddot{a}_x = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} v^k \cdot {}_kp_x = 1 + vp_x \sum_{k=1}^{\infty} v^{k-1} \cdot {}_{k-1}p_{x+1} = 1 + vp_x V_{x+1}.$$

Das Deckungskapital im Alter  $x$  lässt sich also in zwei Komponenten aufteilen, nämlich

1. eine Annuitätenszahlung und
2. das nötige Deckungskapital im Alter  $x+1$ .

Wir haben also eine Rekursion für das Deckungskapital gefunden. Somit können wir die Prämie einfach rekursiv berechnen. Dazu brauchen wir allerdings eine Anfangsbedingung, nämlich  $\ddot{a}_\omega = V_\omega = 0$ .  $\diamond$

**Bemerkung:** Wir brauchen keine Kommutationszahlen, nur die Überlebenswahrscheinlichkeit  $p_x$  und den Diskontierungsfaktor  $v$ .  $\diamond$

## 10.2 Lebensversicherung als zufällige Geldflüsse

Im folgenden sei  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  ein Wahrscheinlichkeitsraum und  $(S, \mathcal{B})$  ein messbarer Raum.

**Definition 10.2.1** (Markovkette): Ein stochastischer Prozess  $X = (X_t)_{t \in \mathbb{N}}$  auf  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  mit Werten in  $(S, \mathcal{B})$  heisst *Markovkette*, falls  $P$ -f.s.

$$P[X_{t+1} \in B \mid X_0, \dots, X_t] = P[X_{t+1} \in B \mid X_t]$$

für jedes  $t \in \mathbb{N}$  und jedes  $B \in \mathcal{B}$  gilt. Der Wertebereich  $(S, \mathcal{B})$  heisst *Zustandsraum* von  $X$ .  $\diamond$

**Bemerkungen:** Für *abzählbare* Zustandsräume, bei denen jede einpunktige Menge  $\{k\}$  ein Elementarereignis ist, ist  $X$  eine Markovkette genau dann, wenn

$$P[X_{t+1} = k \mid X_0 = l_0, \dots, X_t = l_t] = P[X_{t+1} = k \mid X_t = l_t]$$

für jedes  $t \in \mathbb{N}$ , für jede Folge  $(l_0, \dots, l_t)$  in  $S$  und jedes  $k \in S$  gilt, für welche die linke Seite wohldefiniert ist, d.h. für welche  $P[X_0 = l_0, \dots, X_t = l_t] > 0$  gilt. Beachte  $P[X_t = l_t] \geq P[X_0 = l_0, \dots, X_t = l_t]$ , womit dann auch die rechte Seite wohldefiniert ist.

Für allgemeinere Zustandsräume benötigt man eine allgemeinere Definition von bedingten Wahrscheinlichkeiten, auf welche hier nicht eingegangen werden soll.

In der Tat hat man es in der Praxis – insbesondere in der Lebensversicherung – meist sogar mit endlichen Zustandsräumen zu tun.

Die Wahrscheinlichkeit für  $X_{t+1} = k$  hängt nur vom Zustand zur Zeit  $t$ , nicht aber vom Pfad  $X_0, \dots, X_t$  ab; Man sagt auch, dass solche Prozesse kein Gedächtnis haben.  $\diamond$



Um eine Lebensversicherung darzustellen braucht man drei Dinge, nämlich

1. eine Markovkette  $X = (X_t)_{t \in \mathbb{N}}$ ,
2. ein einjähriger Diskontierungsfaktor  $v$  und
3. Vertragsfunktionen.

Der Ausgangspunkt des Markovmodells ist eine Menge  $S$  von Zuständen, dessen Elemente die verschiedenen möglichen Zustände einer versicherten Person darstellen.

**Beispiel:**  $S = \{\text{'lebend'}, \text{'tot'}\}$ . ◇

Im folgenden betrachten wir nur noch endliche Zustandsräume. Da wir nur Modelle in diskreter Zeit betrachten, sind Zahlungen (Leistungen, Prämien etc.) nur zu ganzzahligen Zeiten  $t = 0, 1, \dots$  möglich. Die Zahlungen können entweder am Anfang oder am Ende einer Periode  $[t, t + 1]$  stattfinden. Zahlungen zu Beginn einer Periode  $[t, t + 1]$  hängen nur vom Zustand  $i$  zur Zeit  $t$  ab, während Zahlungen am Ende einer Periode auch vom 'Endzustand'  $j$  zur Zeit  $t + 1$  abhängen mögen (z.B. Todesfallleistung beim Übergang 'lebend'  $\rightarrow$  'tot' von  $t$  nach  $t + 1$ ). Wir verwenden folgende Bezeichnungen:

**Definition 10.2.2** (Verallgemeinerte Renten und Kapitalleistungen):

- *verallgemeinerte Renten  $a_i^{Pre}(t)$* : Fällig zu Beginn des Zeitintervalls  $[t, t + 1]$  falls  $X_t = i$ . Die  $a_i^{Pre}(t)$  heissen *verallgemeinerte Renten welche zur Zeit  $t$  zahlbar sind, gegeben dass sich die Person zur Zeit  $t$  im Zustand  $i$  befindet*.
- *verallgemeinerte Kapitalleistungen  $a_{ij}^{Post}(t)$* : Fällig am Ende des Zeitintervalls  $[t, t + 1]$  beim Übergang  $i \rightarrow j$  von  $t$  nach  $t + 1$ . Die  $a_{ij}^{Post}(t)$  heissen *verallgemeinerte Kapitalleistungen zur Zeit  $t + 1$ , gegeben dass die versicherte Person von  $t$  nach  $t + 1$  vom Zustand  $i$  in den Zustand  $j$  wechselt*.

◇

Die  $a_{ij}^{Post}(t)$  müssen also zuerst mit  $v$  diskontiert werden, um mit den  $a_i^{Pre}(t)$  vergleichbar zu sein.

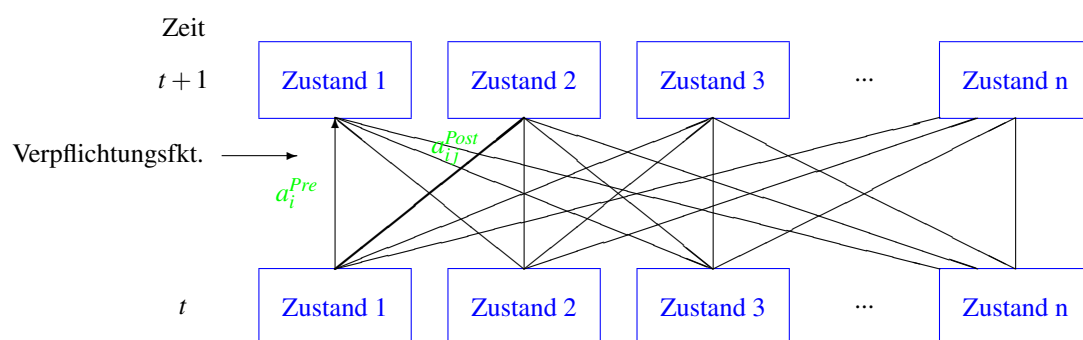


Abbildung 10.2: Übergangswahrscheinlichkeiten und Verpflichtungsfunktionen

Bis jetzt haben wir Summen festgelegt, die beim Eintreten eines gewissen versicherten Ereignisses fällig werden. Nun brauchen wir ein Wahrscheinlichkeitsgesetz, um die verschiedenen Übergänge zu quantifizieren.

**Definition 10.2.3** (Übergangswahrscheinlichkeiten): Für alle Zustände  $i, j \in S$  und Zeiten  $s, t \in \mathbb{N}$  heissen die Wahrscheinlichkeiten

$$p_{ij}(s, t) := P[X_t = j \mid X_s = i]$$

Übergangswahrscheinlichkeiten für den Übergang vom Zustand  $i$  zur Zeit  $s$  in den Zustand  $j$  zur Zeit  $t$ .

Die Matrix  $P(s, t)$  mit Einträgen  $p_{ij}(s, t)$  heisst *Übergangsmatrix von  $s$  nach  $t$* .

Die Übergangswahrscheinlichkeiten für eine Zeitschritt werden mit

$$p_{ij}(t) := p_{ij}(t, t+1)$$

bezeichnet und die entsprechenden Übergangsmatrizen mit

$$P(t) := P(t, t+1).$$

◇

Die wichtigste Eigenschaft dieser Übergangswahrscheinlichkeiten ist charakterisiert durch

**Theorem 10.2.4** (Chapman-Kolmogorov-Gleichung): Für beliebige ganzzahlige  $0 \leq r \leq s \leq t$  gilt

$$P(r, t) = P(r, s) \cdot P(s, t),$$

oder in komponentenschreibweise

$$p_{ik}(r, t) = \sum_{j \in S} p_{jk}(s, t) \cdot p_{ij}(r, s).$$

◇

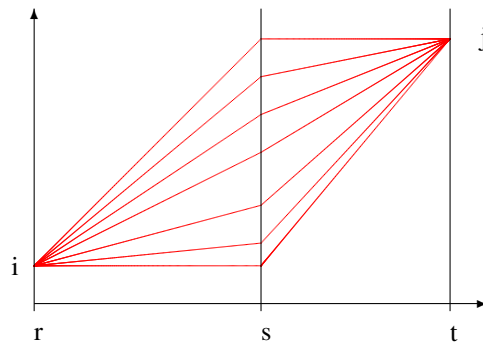


Abbildung 10.3: Interpretation der Chapman-Kolmogorov-Gleichungen

Als nächstes betrachten wir einige Beispiele. Generell werden die Symbole  $*$  ('lebend') und  $\dagger$  ('tot') verwendet.

**Beispiel (Sofort beginnende Altersrente):** Alle Vertragsfunktionen ausser  $a_*^{Pre}(t)$  sind gleich null. In einer Periode wird vorschüssig 1 Geldeinheit ausbezahlt, also ist  $a_*^{Pre}(t) = 1$ . Hat die versicherte Person zur Zeit  $t = 0$  das Alter  $x$ , so gilt für die Übergangswahrscheinlichkeiten

$$\begin{aligned} p_{**}(t) &= 1 - q_{x+t}, \\ p_{*\dagger}(t) &= q_{x+t}, \\ p_{\dagger*}(t) &= 0, \\ p_{\dagger\dagger}(t) &= 1. \end{aligned}$$

Abbildung 10.4 zeigt schematisch das verwendete Modell.

◇

**Beispiel (Versicherungen auf ein Leben):** Mit diesem Markovmodell lassen sich so gut wie alle Versicherungen auf *ein* Leben inklusive beliebiger Leistungsverläufe darstellen, also z.B.  $\ddot{a}_x$ ,  $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$ ,  ${}_m|\ddot{a}_x$ ,  $A_x$  und  $A_{x:\overline{n}|}^1$ .

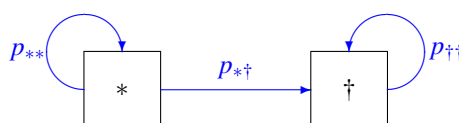


Abbildung 10.4: Markovmodell für eine sofort beginnende Altersrente

Beispielsweise können wir  $\ddot{a}_x$  unter der Annahme

$$a_*^{Pre}(t) = 1, \quad a_{*†}^{Post}(t) = a_{**}^{Post}(t) = 0$$

berechnen (konstante Rente), oder für eine linear steigende Rente mit jährlichem Zuwachs von 5%, also

$$a_*^{Pre}(t) = 1 + 0.05 \cdot t, \quad a_{*†}^{Post}(t) = a_{**}^{Post}(t) = 0.$$

Für eine gemischte Versicherung, d.h. zur Berechnung von  $A_{x:\overline{n}|}^1$ , sieht das Modell wie folgt aus:

$$a_{*†}^{Pre}(t) = \begin{cases} 1 & \text{falls } t < x+n \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

$$a_{**}^{Pre}(t) = \begin{cases} 1 & \text{falls } t = x+n-1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

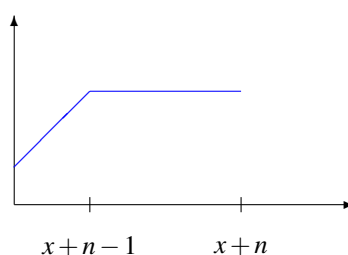


Abbildung 10.5: Leistungsverlauf einer gemischten Versicherung

**Beispiel (Mehrere Ausscheideursachen):** Das Modell für mehrere Ausscheideursachen (z.B. ‘Tod durch Krankheit’, ‘Tod durch Unfall’, ...) wird schematisch in Abbildung 10.6 wiedergegeben. ◇

**Beispiel (Mehrere Leben):** Als Beispiel betrachten wir ein Paar, Mann und Frau. Der Zustand des Paares wird nun durch die geordneten Paare  $(*, *)$  = ‘beide lebend’,  $(*, †)$  = ‘Mann lebend, Frau tot’, etc. wiedergegeben. Die möglichen Übergänge zwischen den Zuständen sind in Abbildung 10.7 dargestellt. ◇

Beispiele sind

- *Verbindungsrente (Barwert  $\ddot{a}_{xy}$ ):* Hier ist

$$\ddot{a}_{(*,*)}^{Pre}(t) = 1$$

für alle  $t$ , alle übrigen Vertragsfunktionen sind null.

- *Rente auf das letzte Leben (Barwert  $\ddot{a}_{\overline{xy}}$ ):* Hier sind

$$\ddot{a}_{(*,*)}^{Pre}(t) = 1,$$

$$\ddot{a}_{(*,†)}^{Pre}(t) = 1 \text{ und}$$

$$\ddot{a}_{(†,*)}^{Pre}(t) = 1$$

für alle  $t$ , alle übrigen Vertragsfunktionen sind null. ◇

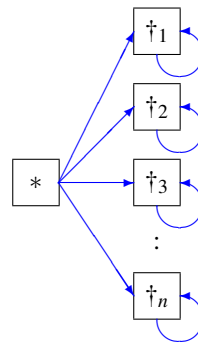


Abbildung 10.6: Markovmodell für mehrere Ausscheideursachen

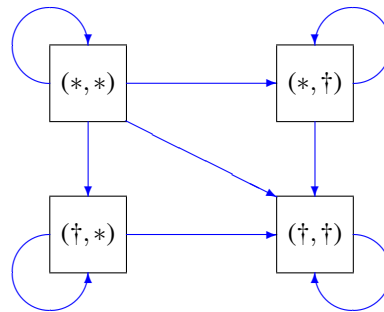


Abbildung 10.7: Markovmodell für Witwenrente

### 10.3 Deckungskapital, Rekursion und Prämien

Eine zentrale Aufgabe in der Lebensversicherung ist die Festsetzung des Deckungskapitals, den Geldbetrag der für jede Police reserviert werden muss, um allen zukünftigen Leistungen gerecht zu werden.

Bezeichnen wir mit  $A_t$  die Zahlungen, die für eine Police (oder einen Bestand) zu einer Zeit  $t$  fällig sind. Dabei ist  $A = (A_t)_{t \in \mathbb{N}}$  ein stochastischer Prozess. Mit der in Definition 10.2.2 eingeführten Notation haben wir zu einer Zeit  $t$  einerseits die verallgemeinerte Rente  $a_i^{Pre}(t)$ , welche durch den Zustand  $X_t = i$  zur Zeit  $t$  bestimmt ist, sowie die verallgemeinerte Kapitalleistung  $a_{ji}^{Post}(t-1)$ , welche durch den Übergang  $j$  nach  $i$  von  $t-1$  nach  $t$  fällig ist. Also definieren wir (punktweise auf  $\Omega$ )

$$A_t := a_{X_t}^{Pre}(t) + a_{X_{t-1}X_t}^{Post}(t-1); \quad t \in \mathbb{N},$$

wobei  $a_{ij}^{Post}(-1) := 0$  für alle  $i, j \in S$  zu setzen ist.

**Bemerkung:** Für analytische Zwecke ist es nützlich, die Darstellungen

$$a_{X_t}^{Pre}(t) = \sum_{i \in S} \chi_{[X_t=i]} \cdot a_i^{Pre}(t)$$

und

$$a_{X_{t-1}X_t}^{Post}(t-1) = \sum_{j, i \in S} \chi_{[X_{t-1}=j, X_t=i]} \cdot a_{ji}^{Post}(t-1)$$

zu verwenden. ◇

**Definition 10.3.1** (prospektives Deckungskapital): Der momentane Wert des zukünftigen Geldflusses  $(A)$ , bestimmt aufgrund der heutigen Information: ◇

**Definition 10.3.2** (Konzept des prospektiven Deckungskapitals): Der momentane Wert des zukünftigen Geldflusses ( $A$ ), bestimmt aufgrund der heutigen Information:

$$V_i(t) = E[A|X_t = i]$$

◇

Diese Notation zeigt die starke Abhängigkeit des Deckungskapitals vom Zustand der Police. (Bild 10.3)

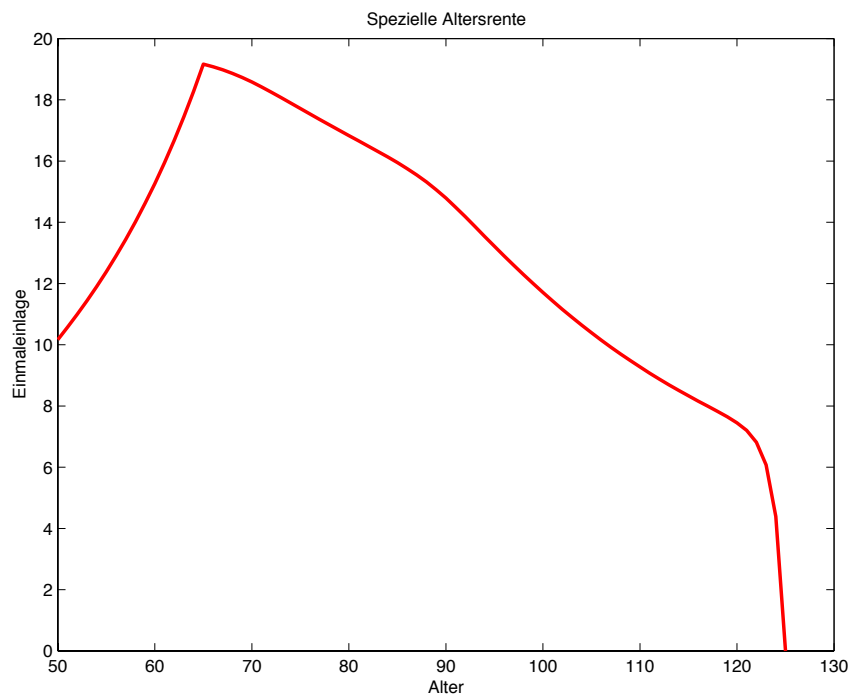


Abbildung 10.8: Steigende Altersrente.

Die direkte Berechnung der nötigen Reserven für die verschiedenen Zustände ist nicht so einfach, wenn wir ein allgemeines stetiges Markovmodell betrachten. Ein Vorteil dieses Modells ist die Existenz einer oft nützlichen Rückwärtsrekursion.

Die folgende Formel erlaubt die rekursive Berechnung der nötigen Reserven und damit der nötigen Einzelprämien (**Thielesche Differenzgleichung**):

$$V_i(t) = a_i^{Pre}(t) + \sum_{j \in J} p_{ij}(t, t+1) \cdot v \cdot (a_{ij}^{Post}(t) + V_j(t+1))$$

Im Falle einer marktnahen Bewertung lautet die Rekursion für das Alter  $x = x_0 + k$  zur Zeit  $t + k$  wie folgt:

$$V_i(t+k) = a_i^{Pre}(t+k) + \sum_{j \in J} p_{ij}(t+k, t+k+1) \cdot \frac{P(t, t+k+1)}{P(t, t+k)} \cdot (a_{ij}^{Post}(t+k) + V_j(t+k+1))$$

Diese Formel benützt ausschliesslich die verschiedenen Leistungen, die Wahrscheinlichkeiten und den Diskontierungsfaktor.

**Interpretation:** Die jetzige Reserve besteht aus:

- Zahlungen aufgrund der verschiedenen möglichen Übergänge.
- den diskontierten Werten der zukünftig nötigen Reserven.  $\diamond$

#### Anwendungen:

- $\ddot{a}_x = 1 + p_x \cdot v \cdot (0 + \ddot{a}_{x+1})$
- $A_x = q_x \cdot v \cdot 1 + p_x \cdot v \cdot A_{x+1}$   $\diamond$

Um die Reserven für ein gewisses Alter zu bestimmen, müssen wir rückwärts rechnen, beginnend beim Ablaufdatum der Police. Für Annuitäten ist dies normalerweise das Alter, wenn alle gestorben sind. Um die Rechnung zu beginnen, brauchen wir Randbedingungen, die vom Zahlungsstrom am Ablaufdatum abhängen. Meistens setzen wir die Grenzbedingungen gleich null für alle Reserven. Dabei müssen wir folgendes beachten: *Wir müssen diese Rechnung für die Reserven für alle Zustände gleichzeitig machen.*

Nach der Berechnung der verschiedenen Reserven können wir die zugehörigen benötigten Prämien mittels Äquivalenzprinzip bestimmen.

Um die faire Jahresprämie festzulegen, müssen wir also ebenfalls das obige Prinzip anwenden. In den meisten Fällen (Ausnahme: Rückgewähr) können wir analog zum traditionellen Vorgehen handeln.

Wir müssen folgende Grössen einführen:

- $V_j^B$ : Reserve, durch Leistungen erzeugt
- $V_j^P$ : Reserve, durch Prämien generiert

Das totale Deckungskapital ist (wie gewöhnlich)  $V_j(t) = V_j^B(t) - V_j^P(t)$ .

Die Prämie kann via Äquivalenzprinzip berechnet werden ( $V_{j_0}(t_0) \equiv 0$ ).

## 10.4 Konkrete Probleme

Bisher haben wir uns mit den Definitionen der verschiedenen benötigten Elemente für das Markovmodell beschäftigt. Nun wenden wir uns konkreten Problemen zu. Die folgenden Beispiele haben ihre eigenen kleinen Schwierigkeiten:

- Annuitätenzahlung während dem Jahr,
- Rente mit garantierter Zahlungsdauer,
- Renten auf ein und zwei Leben mit Rückgewähr des Deckungskapitals.

### 10.4.1 Rentenzahlung unterjährig

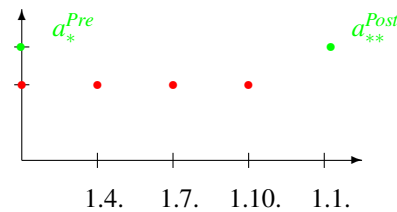


Abbildung 10.9: Beispiel bei unterjähriger Rentenzahlung

In der Schweiz werden die meisten Renten vierteljährlich bezahlt. Somit müssen wir den gegenwärtigen Wert der Renten anpassen. Die einfachste Möglichkeit ist, das betrachtete Zeitintervall als drei Monate festzusetzen.

Die normalerweise benutzte Approximation ist bekannt. Wir kennen beispielsweise folgende Formel:

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{(4)} = \ddot{a}_{x:\overline{n}|} - 0.375(1 - A_{x:\overline{n}|})$$

Nun wollen wir dasselbe in unserem Markovmodell durchführen. Um dieses Problem zu lösen, setzen wir den Anpassungsterm für  $n = 1$ . Die obige Situation kann in diesem Fall mit den zwei folgenden Korrekturen des Zahlungsstroms erzeugt werden, wenn eine solche Rente zur Zeit  $t$  für einen Übergang  $* \rightarrow *$  bezahlt wird:

- $a_*^{Pre} = 1 - \frac{3}{8}$
- $a_{**}^{Post} = 0 + \frac{3}{8}$

Wenn wir die Zahlung zweiteilen, müssen wir  $a_{*t}^{Post} = 0 + \frac{3}{8}$  beibehalten!

**Beispiel:** Geometrisch steigende Rente (3% ), unterjährig ( $\frac{4}{4}$ ), für einen Mann im Alter  $t$ , beginnend im Alter  $x + m$ .

$${}_m|\ddot{a}_x^{(4)} \Rightarrow a_*^{Pre}(t) = \begin{cases} 0, & \text{falls } t < x + m \\ 1.03^{t-(x+m)}(1 - 0.375), & \text{falls } t \geq x + m \end{cases}$$

$$a_{**}^{Post}(t) = \begin{cases} 0, & \text{falls } t < x + m \\ 1.03^{t-(x+m)}(0.375), & \text{falls } t \geq x + m \end{cases}$$

◇

**Bemerkung:** Diese Methode ist nicht so fehleranfällig wie der übliche Ansatz mit Kommutationszahlen. Die Differenz zwischen einer temporären Rente vom obigen Typus und der normalen besteht in den unterschiedlichen Startzeiten der Rückwärtsrekursion.

◇

## 10.4.2 Garantierte Rente

Eine solche Rente wird auch nach dem Tod der versicherten Person ausbezahlt für maximal  $m$  Jahre. Deshalb führen wir im Markovmodell einen neuen Zustand ein:

- Tod ohne Garantie.
- Tod mit Garantie.

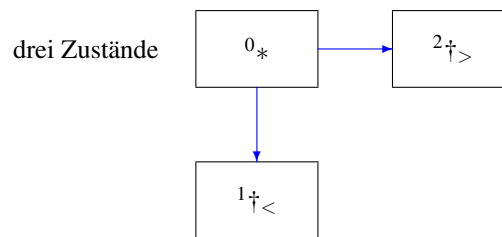


Abbildung 10.10: Zustandsraum bei garantierten Renten

**Beispiel:** Zukünftige Rente, beginnend mit 65, 10 Jahre Garantie.

Annahme: Rente endet im Alter 85.

Rente: Mann  $s = 65$        $g = 10$        $t = 20$   
 Zustand:       $0 = \text{am Leben}$      $1 = \dagger \text{ vor } 65$      $2 = \dagger \text{ nach } 65$

Um die Renten zu berechnen, benützen wir 85 als Startzeit der Rekursion mit Grenzbedingung 0. Wir erhalten die folgenden nichttrivialen Vertragsfunktionen:

$$a_0^{Pre}(t) = \begin{cases} (1 - 0.375), & \text{falls } 65 \leq t < 85 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$a_{00}^{Post}(t) = \begin{cases} 0.375, & \text{falls } 65 \leq t < 85 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$a_{02}^{Post}(t) = \begin{cases} 0.375, & \text{falls } 65 \leq t \leq 85 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$a_2^{Pre}(t) = \begin{cases} (1 - 0.375), & \text{falls } 65 \leq t < 75 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$a_{22}^{Post}(t) = \begin{cases} 0.375, & \text{falls } 65 \leq t < 75 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Zu  $a_{00}^{Post}(t)$ : Wir dürfen den Anpassungsterm aufgrund der unterjährigen Rentenzahlung nicht vergessen.

Bild 10.4.2 zeigt das Verhalten der benötigten Reserven. ◇

**Beispiel:** Zum Schluss schauen wir ein Beispiel mit mehr als drei verschiedenen Zuständen an. Wir interessieren uns für die Prämie der folgenden Versicherung auf zwei Leben:

$(*, *) \rightarrow 1.2$  nach  $x = 65$   
 $(*, t) \rightarrow 0.8$  nach  $x = 65$ , 10 Jahre garantiert  
 $(t, *) \rightarrow 0.6$  nach dem Tod des Mannes  
 Prämie  $(1/1)$

Wir haben fünf verschiedene Zustände zu betrachten:



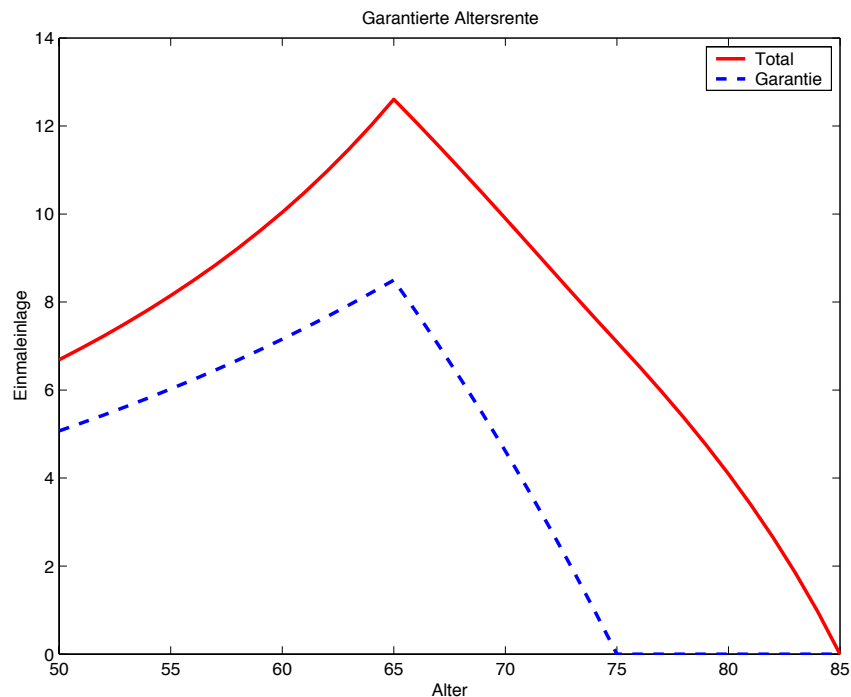


Abbildung 10.11: Garantierte, temporäre Altersrente

- Zustand 0  $(*, *)$   
 Zustand 1  $(*, t)$   
 Zustand 2 Frau stirbt vor Mann, Mann stirbt nach 65  
 Zustand 3  $(t, *)$   
 Zustand 4 Rest

◇

### 10.4.3 Rückgewähr des Deckungskapitals

Eine spezielle Klasse von Versicherungsverträgen sind Verträge mit Rückgewähr im Falle eines frühzeitigen Todes. Die verschiedenen Arten von Rückgewähr beinhalten:

- 1) Rückgewähr der bezahlten Prämien im Falle eines Todes vor der Annuitätenzahlung.
- 2) Rückgewähr der bezahlten Prämien abzüglich der bezahlten Renten.
- 3) Rückgewähr des Deckungskapitals.

Die Fälle 1) und 2) können wir als zusätzliche Todesfallprämien betrachten. Sie werden schon seit langer Zeit verwendet.

Betrachten wir nun den Fall 3). Für diese Art von Rückgewähr existieren ebenfalls viele verschiedene Formen. Wir werden einige davon kennen lernen. Bevor wir damit beginnen, betrachten wir folgende einfache Situation:

Im Todesfall bezahlt man das aktuelle Deckungskapital. Also haben wir die folgende Rekursion:

$$V_0(t) = 1 + p_{00}(t) \cdot v \cdot V_0(t+1) + p_{01}(t)V_0(t)$$

(Bei diesem Beispiel nehmen wir an, dass wir die Rückgewähr am Beginn der Periode vornehmen.)

Durch Umformen erhalten wir:

$$V_0(t) = \frac{1 + p_{00}(t) \cdot v \cdot V_0(t+1)}{1 - p_{01}(t)}$$

Damit haben wir im Prinzip das obige Problem im Fall der Einmaleinlage gelöst. Nun müssen wir noch den Fall der regelmässigen Jahresprämien betrachten. Natürlich können wir jetzt nicht mehr den Ausdruck  $V_j^B(t)/V_j^P(t)$  benutzen.

Die einfachste (aber wahrscheinlich nicht die eleganteste) Lösung ist, eine iterative Näherung für die Jahresprämie zu finden.

**Beispiel:** Betrachten wir ein Beispiel von einer *Annuität mit Rückgewähr des Deckungskapitals* vor dem Beginn der Zahlung ( $s = 65$ ). In diesem Fall haben wir folgende Werte:

Age	Reserve (line)	ATH101 ( $\diamond$ )	ATW ( $\otimes$ )
40	5.869210	5.506800	5.586737
45	6.970781	6.640532	6.786052
50	8.279101	8.011918	8.279320
55	9.832975	9.659149	10.156673
60	11.678489	11.611176	12.551519
65	13.870382	13.870381	15.692769

In der obigen Tabelle sind die Resultate der folgenden Rückgewährstypen aufgelistet:

1. Reserve: Rückgewähr des Deckungskapitals vor  $s$
2. ATH101: Rückgewähr der bezahlten Prämien vor  $s$
3. ATW: Rückgewähr der bezahlten Prämien abzüglich bezahlte Leistungen.

Es ist offensichtlich, dass 3) die teuerste Art von Rückgewähr ist. 1) und 2) sind ungefähr gleich.

Analoge Berechnungen für die verschiedenen Typen können wir auch im Fall von regulären Prämien durchführen (Siehe Bild 10.4.3).  $\diamond$

#### Zum Schluss ein etwas exotisches Beispiel:

Eine Witwenrente ist versichert mit Rückgewähr des Deckungskapitals, falls die Frau vor oder im gleichen Jahr wie der Mann stirbt. In diesem Fall haben wir die folgende Rekursion:

$$V_0(t) = v(p_{00}(t)V_0(t+1) + p_{02}(t)V_2(t+1))/(1 - p_{01}(t) - p_{02}(t)).$$

$\diamond$

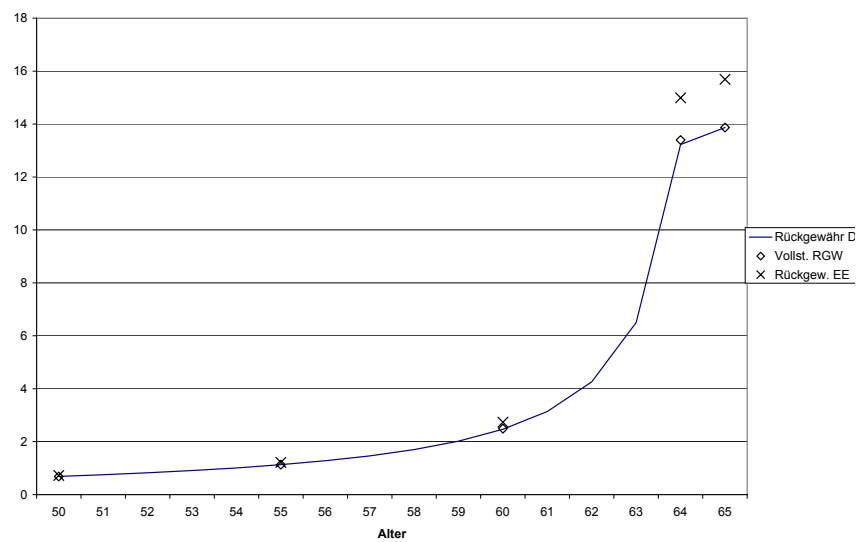


Abbildung 10.12: Rückgewähr bei regulärer Prämienzahlung.



# Kapitel 11

## Invaliditätsversicherung

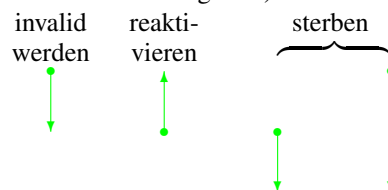
### 11.1 Einleitung

Bisher haben wir Versicherungen mit nur einem Ausscheidgrund (dem Tod) betrachtet. Nun beziehen wir die Invalidität in unser Modell mit ein. Somit haben wir *zwei Ausscheidursachen*:

- Tod
- Invalidität

Wir haben *drei mögliche Zustände* (siehe auch Abbildung 11.1):

- Zustand der Aktivität
- Zustand der Invalidität
- Zustand Tod



Für die Invaliditätsversicherung existieren mehrere Modelle. Sie unterscheiden sich darin, welche Übergänge modelliert werden und welche vernachlässigt werden.

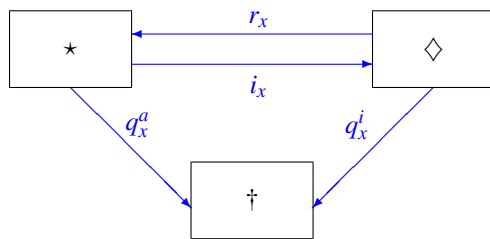
Die Gesamtheit der Personen teilt sich auf in

- Hauptgesamtheit der Aktiven  $l_x^a$
- Nebengesamtheit der Invaliden  $l_x^i$
- Nebengesamtheit der Toten  $d_x$

Eine zusätzliche Grösse ist der *Invaliditätsgrad*. Dieser misst die Schwere der Invalidität; z. B. 50% invalid.

### 11.2 Begriff der Invalidität

Beim Tod ist die Begriffsbildung klar. Bei der Invalidität gibt es mehrere Begriffe. Die Definition kann verschieden ausgelegt werden. Sie ist zudem landesspezifisch und abhängig von der Sozialversicherung, dem Leistungsangebot und den Versicherungsbedingungen der Versicherungsgesellschaften.



$i_x$ : Invalidierungswahrscheinlichkeit  
 $r_x$ : Reaktivierungswahrscheinlichkeit  
 $q_x^a$ : Sterbewahrscheinlichkeit der Aktiven  
 $q_x^i$ : Sterbewahrscheinlichkeit der Invaliden

Abbildung 11.1: Zustände und Übertrittsmöglichkeiten

Die Invaliditätsversicherung entstand vor etwa 130 - 150 Jahren während der Industrialisierung. Es gab immer gefährlichere Berufe wie z. B. Lokomotivführer. Dadurch kam es häufiger zu Unfällen und zu daraus folgender Invalidität. Dies hatte nicht nur Folgen für den einzelnen Betroffenen, es machte oft ganze Familien erwerbslos. So gründeten um 1870 die Eisenbahner eine Invaliditätsversicherung.

### Definition 1.2.1 (Invalidität)

#### 1 Ursprüngliche Definition

Die ursprüngliche Definition stammt aus der Zeit der Industrialisierung. Sie ist eine physische bzw. medizinische Definition und *basiert auf physischen Beeinträchtigungen* (z. B. Hand, Finger fehlt, nicht mehr laufen können...).

Invalidität kann eintreten aufgrund von Krankheit oder Unfall.

#### 2 Heutige Definition

Heute betrachtet man Invalidität *vom ökonomischen Standpunkt aus*: Der Invalide bekommt nicht mehr eine Rente, weil ihm eine Hand fehlt, sondern weil er deshalb sein Erwerbseinkommen verliert. Wir definieren die Invalidität also via Verlust an Erwerbseinkommen.

Deshalb gibt es Begriffe wie z. B. 50% invalid. Der Betroffene kann also nur noch zu 50% arbeiten.

Aufgrund von dieser Definition sprechen wir auch meist von "erwerbsunfähig" und nicht von "invalid". ◇

Innerhalb der Erwerbsunfähigkeit gibt es einen Unterschied zwischen

- erwerbsunfähig → Der Betroffene kann nicht mehr arbeiten.
- berufsunfähig → Der Betroffene kann seinen Beruf nicht mehr ausüben.

Bsp: Pianist, welcher den kleinen Finger verliert.

Berufsunfähige Personen werden in der Regel umgeschult. Allerdings muss der Versicherer auf deren Stand Rücksicht nehmen. Eine neue Arbeit muss zumutbar sein (Ein Angestellter muss nicht Strassen reinigen.).

Die Invaliditätsrate  $i_x$  und die Reaktivierungswahrscheinlichkeit  $r_x$  hängen eng mit der Definition der Invalidität zusammen. Bei einer strengen Definition der Invalidität ist  $i_x$  tiefer als bei einer liberaleren Interpretation.

## 11.3 Andere Unterscheidungen

### 1. voraussichtlich dauernd vs temporär

Bei einer voraussichtlich dauernden Invalidität ist nach ärztlichem Ermessen eine namhafte Besserung nicht mehr zu erwarten (Bsp: Pianist, der den kleinen Finger verlor). Bei einer temporären Invalidität dagegen ist mit einer Wiederherstellung zu rechnen (Bsp: schwere Krankheit. Nach einem Hirnschlag besteht die Möglichkeit, vielleicht wieder gehen zu lernen und wieder arbeiten zu können.).

## 2. total vs partiell

Totale Invalidität meint 100%ige Erwerbsunfähigkeit. Bei einer partiellen Invalidität kann der Betroffene noch teilweise arbeiten. Die Invaliditätsrente hängt vom Invaliditätsgrad ab.

### Illustration:

Invaliditätsgrad	Invaliditätsrente
< 50%	—
50 - $66\frac{2}{3}\%$	50% → kommt auf Sozialwerk an
> $66\frac{2}{3}\%$	100% → abhängig von Gesetz und Tarifen

Es gibt auch Viertelsrenten ( $33\frac{1}{3}\%$  - 50% invalid). In der Schweiz besteht eine Inkongruenz zwischen der AHV und der IV.

## 3. Wartefrist

Die Rente wird nicht sofort, sondern erst nach einer Wartefrist ausbezahlt. Die Kosten der Invaliditätsversicherung hängen massgeblich von der Wartefrist ab (Je länger die Wartefrist, desto billiger ist die Versicherung.). Die Länge der Wartefrist ist abhängig von der Gesetzgebung. In der Schweiz haben wir Wartefristen für

- Versicherungen: 3, 6, 12, 24 Monate
- IV: ca. 12 Monate

# 11.4 Einflussfaktoren auf die Invalidität

## 11.4.1 Objektive Attribute

Bei der Prämienberechnung für eine Invaliditätsversicherung sind Alter, Geschlecht, Beruf und Wartefrist von Bedeutung. Mit diesen Kenntnissen berechnen wir die Invaliditätsrente.

## 11.4.2 Subjektive Kriterien

Es gibt aber auch viele subjektive Kriterien:

- Arbeitsmoral
- Konjunktur → sehr wichtig  
Bei guter Konjunktur können praktisch alle arbeiten. Ein Berufsunfähiger wird umgeschult. Bei einer schlechten Konjunktur steigt der Anteil der Invaliden massiv an.
- Replacement ratio:  
Mit dem Begriff Replacement ratio meinen wir das *Verhältnis Invaliditätsrente : Besoldung*.  
Bei hohem Replacement ratio besteht eher die Gefahr, dass sich die Leute invalid erklären, da ihre ökonomische Situation als Invalide besser ist, als wenn sie arbeiten gehen.

### 11.4.3 Invalidität nach Lohn

#### Illustration:

USA 1970, Männer, in Promille

Lohn	$\phi$	Invaliditätsrate		
		18-44	45-54	55-64
$\phi$	92	65.3	132.2	171
< 3'000\$	140.5	94.1	282.6	358.4
7'000 – 9'900\$	76	53.1	109.8	135.4
> 15'000\$	55.9	35.7	65	96.3

◇

#### Interpretation:

- Die Invalidität nimmt mit zunehmendem Alter zu.
- In der Sparte < 3'000\$ ist die Invaliditätsrate doppelt so hoch wie im Durchschnitt.

◇

### 11.4.4 Unterschied blue color vs white color

Mit “blue color” bezeichnen wir gefährliche Berufe: Bauer, Schienenarbeiter, Sprengmeister, Höhlenforscher, Tiefseetaucher.

Mit “white color” meinen wir weniger gefährliche Berufe: Theologe, Lehrer, Bankangestellter.

#### Illustration:

Alter	Invaliditätsrate in Promille	
	Angestellte	Arbeiter
30	0.68	2.04
50	5.39	13.86
60	70.8	110.1

Qualitativ sehen die Verläufe etwa wie in Abbildung 11.2 aus.

◇

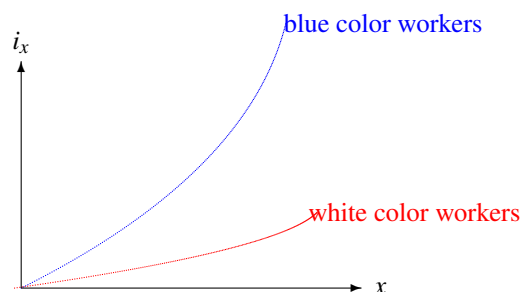


Abbildung 11.2: Invalidierungswahrscheinlichkeiten nach Arbeitstyp



### 11.4.5 Invalidität nach Ausbildung

**Illustration:**

Männer zwischen 45 und 54, in Promille

letzte besuchte Schule	Invaliditätsrate
Elementarschule	212
Mittelschule	135.6
Hochschule	99.4

Diese Ergebnisse sind konsistent mit der Aussage: Wer mehr verdient, wird mit geringerer Wahrscheinlichkeit invalid.

### 11.4.6 Konsequenz

Es gibt verschiedene Arten, Prämien festzulegen. Wir können Unterschiede machen nach

- Arbeitstyp (Berufsklassentarifizierung).
- Einkommen.

## 11.5 Gefahren einer Invaliditätsversicherung

### 11.5.1 Situation

Typischerweise ist eine Invaliditätsversicherung eine Risikoversicherung ohne Erlebensfallkapital. Das heisst, man bezahlt die Versicherung, bekommt aber unter Umständen nichts dafür. Deshalb beobachtet man eine Tendenz der Leute, nicht sehr ehrlich zu sein. Dieser Effekt ist besonders wichtig bei einer Kapitalversicherung, spielt jedoch auch bei der Rente eine gewisse Rolle.

### 11.5.2 Überversicherung

**Illustration:**

ZH, Mann,  $x = 45$ , zwei Kinder

	Aktiver	Invalider
Einkommen	100'000	–
Leistung 1. - 3. Säule	–	75'000
Versicherungsprämie	16'100	–
Steuern	22'600	5'900
verfügbares Einkommen	61'300	69'100

Invalidität bedeutet für den Betroffenen eine Steigerung des verfügbaren Einkommens um 12.7%. Daher ist es interessant, invalid zu werden. ◇

**Bemerkung:** Vor allem in der Kollektivversicherung ist dies ein grosses Problem. Die Versicherungen müssen darauf achten, dass solche Versicherungsdeckungen nicht verkauft werden. ◇

### 11.5.3 Hohes Einkommen im Fall von Invalidität

**Illustration:** Replacement ratio

US 1973-77, Wartefrist 6 Monate

<u>Versicherungsleistung</u> Einkommen	<u>Eingetretene Schäden</u> erwartete Schäden
< 50%	45%
50-59%	94%
60-69%	100%
70-79%	127%
80-89%	137%
≥ 90%	188%
$\phi$	100%

◇

### 11.5.4 Fehltage pro Monat

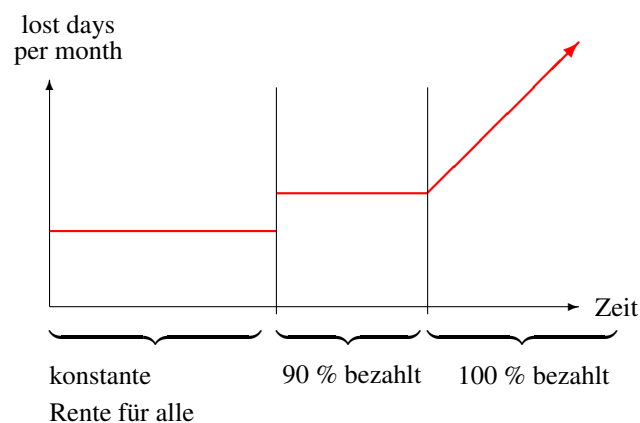
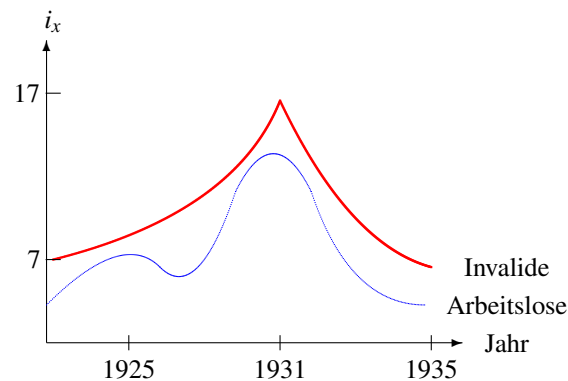


Abbildung 11.3: Bedeutung des Replacement Ratio für  $i_x$

Zwei Gesetzesänderungen haben die Zahl der Fehltage ansteigen lassen. (→ Wenn man 100% seines Lohnes bekommt ohne zu arbeiten, weshalb soll man denn überhaupt noch arbeiten?)

### 11.5.5 Wirtschaftliche Lage

Die Zahl der Invaliden korrelierte in diesem Zeitraum hoch mit der Anzahl Arbeitslosen (Die hohe Arbeitslosigkeit wurde um 1930 ausgelöst durch einen Krieg.). Auch heute noch ist die Invaliditätsrate sehr stark abhängig von der Wirtschaftslage.

Abbildung 11.4: Wirtschaftliche Lage in Deutschland im Vergleich mit  $i_x$ **Illustration:**

USA

Jahr	Invaliditätsrate in Promille	} Rezession
1962-64	2.74	
1965-69	2.76	
1970	3.81	
1971	4.05	
1972	3.47	
1973	3.32	
1974	2.89	

◇

**11.5.6 Verteilung der Invalidität nach Ursache****Illustration:**

Rentenanstalt Statistik

Invaliditätsursache	1989	1993
Stützapparat (Rücken, Schleudertrauma)	27%	31%
Unfälle	25%	24%
Herz	14%	12%
psychische Nervenkrankheiten	11%	9%
Tumore	9%	8%

**Kommentar:** In Zeiten schlechter Wirtschaftslage (1989) steigt die Anzahl der Invaliden aufgrund von relativ volatilen Ursachen wie Stützapparat und Nervenkrankheiten an. ◇

**11.5.7 Problem der Sozialversicherung (in fast allen Ländern)**

Bei einer schlechten Wirtschaftslage gibt es mehr Invalide und die Annahmepaxis der Versicherungen ist grösser. Eine höhere Invaliditätsrate ist auch für den Staat interessant. Denn für die Arbeitslosen muss der Staat bezahlen, für die Invaliden zahlen die Arbeitgeber und Arbeitnehmer über die Sozialversicherung.

### 11.5.8 Massnahmen der Versicherung

Die Versicherung ergreift folgende Massnahmen, um den Missbrauch der Invaliditätsversicherung zu verhindern:

#### 1. Gegenwertsgedanke

Bsp: Ein Einzelunternehmer besitzt einen Lastwagen. Er wird invalid. Er hat den Lastwagen noch, bekommt zusätzlich eine Rente.

Diese Situation bietet einen zu grossen Anreiz, invalid zu werden. Deshalb handelt die Versicherung folgendermassen: Der Versicherte muss zuerst den Lastwagen verkaufen. Die Versicherung zahlt dann einen Anteil an die Amortisation.

#### 2. Senkung des Invaliditätskapitals in den letzten fünf Jahren

Der Anreiz invalid zu werden ist im Alter von knapp 65 Jahren am grössten. Deshalb senkt die Versicherung das Invaliditätskapital in den letzten fünf Jahren linear.

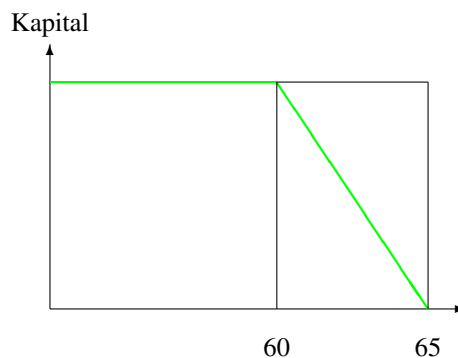


Abbildung 11.5: Leistungsverlauf bei Invaliditätskapitalien

### 11.5.9 Zusammenfassung

Die Invaliditätsversicherung ist sehr komplex, man muss viele Fälle unterscheiden. Die Tarifierung ist demzufolge auch nicht ganz einfach.

## 11.6 Klassische Invaliditätsmodelle

#### 1. Allgemeines Modell

(Diese Zustände kann man durchaus im Sinne der Markovschen Zustände auffassen.)

$$l_x^a : l_{x+1}^a = l_x^a (1 - q_x^a - i_x) + l_x^i \cdot r_x$$

$$l_x^i : l_{x+1}^i = l_x^i (1 - q_x^i - r_x) + l_x^a \cdot i_x$$

$$d_x : d_{x+1} = l_x^a \cdot q_x^a + l_x^i \cdot q_x^i$$

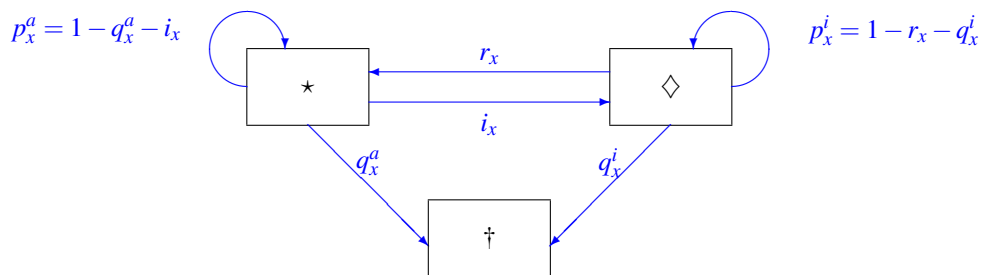


Abbildung 11.6: Standardmodell für Invalidität

## 2. EVK 90

Alter	$q_x^a$	$q_x^i$
20	0.00116	0.00200
40	0.00114	0.00200
60	0.00774	0.02670

**Frage:** Weshalb liegt die Sterblichkeit bei Invaliden höher als bei Aktiven?

**Antwort:** Die Invaliden haben auf Grund der Invalidität (z.B. Tumor) eine höhere Sterblichkeit.

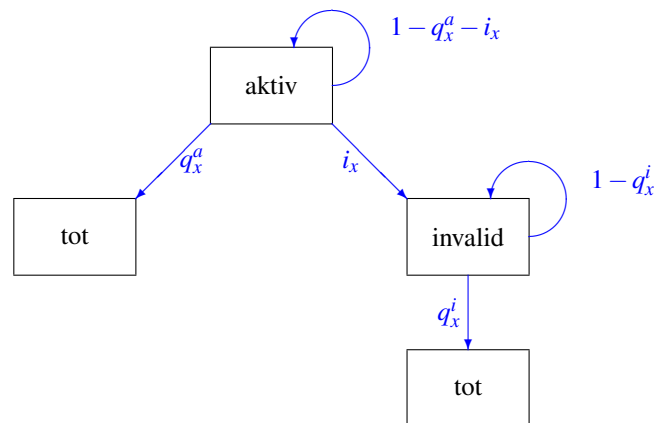


Abbildung 11.7: Invaliditätsmodell der Tafeln EVK und VZ

Das EVK-Modell berücksichtigt keine Reaktivierung.

$$\left. \begin{array}{l} q_{1,x} = q_x^a \\ q_{2,x} = i_x \end{array} \right\} \begin{array}{l} C_{1,x} = \text{Todesfallleistung} \\ C_{2,x} = \text{Invaliditätsleistung} \end{array}$$

**Frage:** Warum kann die Eidg. Versicherungskasse (EVK) ein solches Modell anwenden?

**Antwort:** Die Invalidierungswahrscheinlichkeiten für die EVK sind deutlich kleiner als die Invalidierungswahrscheinlichkeiten bei Versicherungen. Grund: Beim Staat gibt es weniger Invalide, weil den Berufsunfähigen neue Stellen gesucht werden. Dadurch ist die Reaktivierungswahrscheinlichkeit entsprechend klein.

## 3. Modell KT 95 (modelliert nur eine Sterblichkeit)

Eigenheiten dieses Modells:

- Die Reaktivierungswahrscheinlichkeit hängt ab von der Dauer der Invalidität.

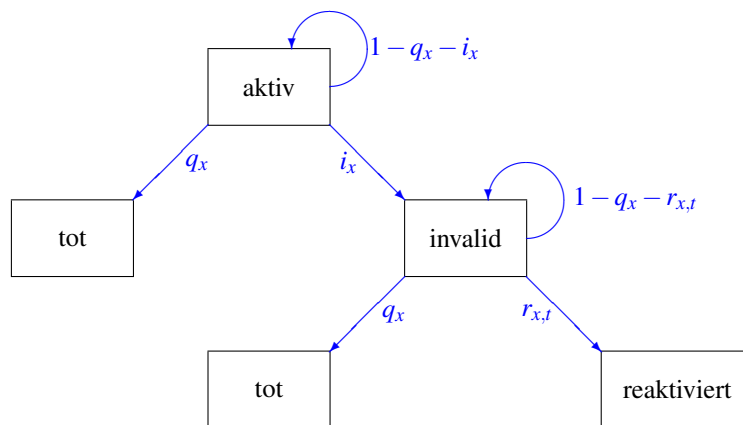
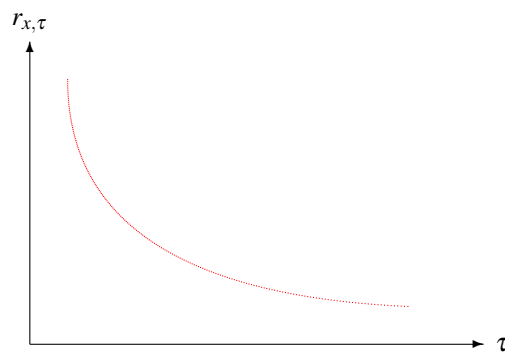


Abbildung 11.8: Invaliditätsmodell der Schweizer Privatversicherer (zB KT 1995)



- Die Reaktivierten werden nicht mehr zu den Aktiven gezählt. Sie fallen aus dem Modell, werden also nicht doppelt berücksichtigt.

## 11.7 Zusammenfassung

### 11.7.1 Herleitung von Invaliditätstafeln

Bei der Herleitung von Invaliditätstafeln gehen wir folgendermassen vor:

1. Wir erheben rohe Wahrscheinlichkeiten und erhalten durch analoges Vorgehen wie früher Tafeln 2. Ordnung.
2. Dabei stellen wir Sicherheitsüberlegungen an: Bei der Tarifierung berücksichtigen wir das Schwankungs- und das Trendrisiko.  $i_x$  können über die Zeit beträchtlich schwanken.

In der Schweiz existieren verschiedene Tafeln:

- VZ 90 / 2000 (Beamtenversicherungskasse Stadt Zürich)
- EVK 90 / 2000 (Eidgenössische Versicherungskasse)
- SVV → KT 95 (Schweizerischer Versicherungsverband)

### 11.7.2 Illustrationen

- Vergleich von verschiedenen Tafeln  
Sterbe- und Invalidierungswahrscheinlichkeit für Männer, in Promille, Wartefrist 3 Monate

	VPL 81/86		VZ 90	KT 95
	$i_x$	$q_x$	$i_x$	$i_x$
30	2.0	0.9	0.65	5.0
40	3.4	1.5	1.56	6.6
50	7.9	4.4	3.7	11.8
	2. Ordnung			1. Ordnung

- In den Jahren 81/86 liegt die Invalidierungswahrscheinlichkeit deutlich über dem Wert der VZ 90 Tafel.
- In der Tafel KT 95 sind Sicherheitsmargen eingerechnet.

- Schwankung von  $i_x$

Invalidierungswahrscheinlichkeit  $i_x$  für Männer, in Promille, VPL

	1981/84	76/80	71/75	66/70	61/65	56/60
15-34	2.0	1.6	1.3	0.9	0.8	1.7
35-49	3.7	3.6	3.1	2.4	1.9	1.8
50-64	14.4	15.0	13.3	11.1	8.9	8.7
alle	5.8	5.8	4.8	4.0	3.4	3.7

Die Schwankungen von  $i_x$  sind enorm. Deshalb wird die Invaliditätsversicherung immer nur für kurze Zeit abgeschlossen, da die Tarifgarantie sehr teuer ist.

Die Werte des EVK 90 - Modells betragen für die Jahre 76/80:

	76/80
15-34	0.17
35-49	0.16
50-64	1.9

**Zusammenfassend:** Bedingt durch die schwankenden  $i_x$  ist der Preis einer Tarifgarantie teuer. ◇

**Beispiel:** KT 95: Zuschlag von 30% für mehrjährige Tarife. ◇

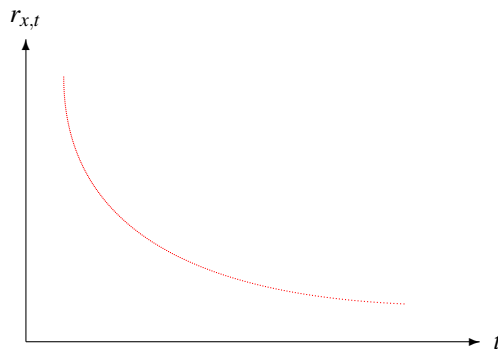
### 11.7.3 Gründe für die Zunahme von $i_x$

- Wirtschaftliche Lage: Bei schlechter Wirtschaftslage steigen die Invalidierungswahrscheinlichkeiten.
- Höhere Leistung (v. a. in 2. Säule): Bei tiefen Leistungen reicht die Invalidenrente nicht.
- Zunahme 81/84 → 86/90: Innerhalb fünf Jahren hat  $i_x$  um 90%,  $i_y$  um 100% zugenommen. Wir sehen: Die Schwankung von einer Tafel zur nächsten kann sehr gross sein. Deshalb verlangt die Versicherung einen Zuschlag für mehrjährige Tarifgarantie.

### 11.7.4 Einfluss der Reaktivierung

Folgendes Aspekt haben wir bisher nicht betrachtet: Die Reaktivierung ist bei kurzer Invaliditätsdauer wahrscheinlicher. Dies hat einen grossen Einfluss auf die Prämie bei kurzer Wartefrist (z. B. 3 Monate, 6 Monate). Für 24 Monate spielt die Reaktivierung keine grosse Rolle mehr.

Die Abhängigkeit von  $r_x$  von der Zeit  $t$  ist ein exponentieller Abfall:



### Illustration:

Reaktivierungswahrscheinlichkeiten in %

		Dauer der Invalidität		
		0 Monate	2 Jahre	8 Jahre
15-34	$q_x^i$	1	3	1
	$r_x$	37	8	1
35-49	$q_x^i$	4	3	3
	$r_x$	27	7	0.5
50-64	$q_x^i$	4	4	4
	$r_x$	12	3	0.5
$\phi$	$q_x^i$	4	4	3
	$r_x$	19	4	0.5

- Die Sterbewahrscheinlichkeit von Invaliden ist in etwa konstant, sie kann also ziemlich global behandelt werden. Sie ist jedoch erhöht im Vergleich zu den Aktiven.
- Die Reaktivierungswahrscheinlichkeit nimmt sowohl mit zunehmendem Alter als auch mit der Dauer der Invalidität ab. Deshalb schreiben wir  $r_{x,t}$  für die Abhängigkeit vom Alter und von der Invaliditätsdauer.
- Weil die Reaktivierung v. a. zu Beginn der Invalidität Einfluss hat, gilt folgende *Faustregel*:  
*Einfluss der Reaktivierung berücksichtigen, falls  $\geq 5\%$ .* Reaktivierung kann also ab dem dritten Jahr vernachlässigt werden.  $\diamond$

## 11.7.5 Modellierung von $r_{x,t}$

Illustration: KT 95

$$\begin{array}{lcl}
 s_{x,t} = & q_{x+t} + 0.008 & + e^{-0.94t} (c_1 - c_2x) \\
 s_{y,t} = & q_{y+t} + 0.007 & + e^{-1.25t} (c_3 - c_4y)
 \end{array}$$

$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{q_x^i \text{ bzw. } q_y^i}$   
 feste Erhöhung der  
 Sterblichkeit  
 um 0.8 bzw. 0.7%

$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{r_{x,t}}$   
 nimmt  
 exponentiell  
 ab

- Für Frauen nimmt die Reaktivierungswahrscheinlichkeit schneller ab als für Männer.
- Die Reaktivierungswahrscheinlichkeit nimmt linear mit dem Alter ab.  $\diamond$

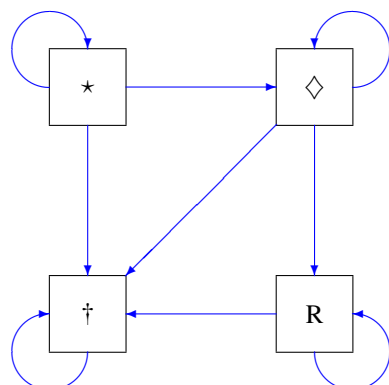


### 11.7.6 Invaliditätsgrad

Der Invaliditätsgrad ist abhängig vom wirtschaftlichen Umfeld, vom Verhältnis der Invalidenrente zum Lohn als Aktiver.  $i_x$  ist in entsprechender Statistik eine ziemlich konstante Grösse. Deshalb verwenden wir konstante Faktoren: 85% oder 75%.

### 11.7.7 Berechnung

- Wir gehen von folgendem Modell aus:



- Wir verwenden Kommutationszahlen

der Aktiven

$$D_x^a = l_x^a \cdot v^x$$

$$N_x^a = \sum_{k=0}^{\infty} D_{x+k}^a$$

der Invaliden

$$D_x^i = l_x^i \cdot v^x$$

$$N_x^i = \sum_{k=0}^{\infty} D_{x+k}^i$$

- Es gilt die Rekursion:

$$l_{x+1}^a = l_x^a (1 - q_x^a - i_x)$$

$$l_{x+1}^i = l_x^i (1 - r_x - q_x^i) + l_x^a \cdot i_x$$

Mit Hilfe der Kommutationszahlen können wir wiederum die wichtigsten Grössen berechnen.

## 11.8 Barwerte für Versicherungen

### 11.8.1 Aktivitätsrenten

Eine Aktivitätsrente ist eine Rente, die bezahlt wird, solange der Versicherte aktiv ist.

**Frage:** Wer braucht eine Rente, solange er gesund ist?

**Antwort:**

- Eine solche Rente könnte eine Altersrente sein.
- Diese Renten sind ganz typisch für Versicherungen: Prämie wird bezahlt. Prämienbarwert nur dann, wenn der Versicherte aktiv ist.  $\Rightarrow$  *Prämienbarwert mit Prämienbefreiung im Invaliditätsfall.*

Wir unterscheiden folgende Aktivitätsrenten:

1. lebenslänglich:  $\ddot{a}_x^a = \frac{N_x^a}{D_x^a}$

2. temporär bis  $x+n$ :  $\ddot{a}_{x+n}^a = \frac{N_x^a - N_{x+n}^a}{D_x^a}$

3. unterjährig bzw. vor- und nachschüssig: analog wie früher

**Beispiel:**  $\ddot{a}_x^{a(4)} = \ddot{a}_x^a - 0.375$

◇

4. **Prämienbefreiung im Invaliditätsfall** am Beispiel der **gemischten Versicherung**:

$A_{x:\overline{n}|}$  sei die Einmaleinlage. Mit  $P_{x:\overline{n}|}^a$  bezeichnen wir die Prämie mit Prämienbefreiung im Invaliditätsfall.

Es gilt nach dem Äquivalenzprinzip:  $P_{x:\overline{n}|}^a \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}|}^a = A_{x:\overline{n}|}$  bzw.  $P_{x:\overline{n}|}^a = \frac{A_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^a}$ .

Bereits früher haben wir  $P_{x:\overline{n}|}$  kennen gelernt.

**Frage:** Welche Beziehung gilt zwischen  $P_{x:\overline{n}|}$  und  $P_{x:\overline{n}|}^a$ ?

**Antwort:**  $P_{x:\overline{n}|} \leq P_{x:\overline{n}|}^a$ , weil  $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^a \leq \ddot{a}_{x:\overline{n}|}$ . Weniger mathematisch kann man dies so formulieren: Der Prämienbarwert  $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^a$  für eine Aktivitätsrente ist kleiner gleich dem Barwert für die gesamte Population. ( $P_{x:\overline{n}|}^a$  muss der Versicherte nur als Aktiver zahlen, deshalb muss diese Prämie höher liegen.)

## 11.8.2 Laufende Invalidenrenten

1. **lebenslänglich:**  $\ddot{a}_x^i = \frac{N_x^i}{D_x^i}$

Dies ist eine typische Leistung für EVK und VZ-Tafeln. Im Gegensatz dazu wird beim Kollektivtarif die Invalidenrente nur temporär bezahlt, dafür bekommen alle eine Altersrente.

2. **temporär bis  $x+n$ :**  $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^i = \frac{N_x^i - N_{x+n}^i}{D_x^i}$

3. **unterjährig:**  $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{i(m)} = \ddot{a}_{x:\overline{n}|}^i - \frac{m-1}{2m} \left(1 - \frac{D_{x+n}^i}{D_x^i}\right)$

## 11.8.3 Formeln im KT 95

### Grundzahlen für den KT 1995

Variable	Bedeutung	Bemerkung
$i$	Technischer Zins	3.5 %
$v$	Einjähriger Diskont	$v = 1/(1+i)$
$q_x$	Einjährige Sterbewahrscheinlichkeit	nach GKM 1995.
$W$	Wartefrist im Monaten	
$l_x^W$	Einjährige Invalidierungswahrscheinlichkeit	nach KT 1995 für Invalidität.
$\tilde{l}_x^W$	Einjährige Invalidierungswahrscheinlichkeit	ev. mit Zuschlag.
$x'$	Invalidierungsalter	d.h. Zeitpunkt der Invalidierung.
$\tilde{g}$	Mittlerer Invaliditätsgrad	85 %.
$t$	Invaliditätsdauer	Abgelaufene Zeit seit der Invalidierung.
$s_{x',t}$	Ausscheidewahrscheinlichkeit für einen Invaliden	Wahrscheinlichkeit für einen Invaliden aus dem Invalidenbestand infolge Tod oder Reaktivierung auszuscheiden in Abhängigkeit vom Invalidierungsalter $x'$ und der Invaliditätsdauer $t$ .
$\tilde{\sigma}$	Sicherheitszuschlag bei mehrjähriger Versicherung	Beim KT 1995: 30 %

Die folgende Tabelle definiert die Werte der obigen Variablen:

Variable	Definition
$i$	Anwendungsvorschriften KT 1995 Absatz 10.1
$q_x$	Anwendungsvorschriften KT 1995 Anhang 3 Tabelle 1.1
$i_x^3, i_x^6, i_x^{12}, i_x^{24}$	Anwendungsvorschriften KT 1995 Absätze 10.3.2.1 und 10.3.2.2
$s_{x',t}$	Anwendungsvorschriften KT 1995 Absatz 10.3.2.4
$\tilde{g}$	= 85 %
$\tilde{\sigma}$	= 30%

Die Zuschläge für nicht im Kollektivtarif 1995 tabellierte Wartefristen entsprechen denjenigen des KT 1980. (Anwendungsvorschriften KT 1980 Abs. 14.2.1)

### Kommutationszahlen und Barwerte für KT 1995

Variable	Definition	Bemerkung
$l_x$	Zahl der Lebenden $l_{15} = 100000$	KT 1995 Abs. 10.5.2.1
$D_x$	$= v^x l_x$	KT 1995 Abs. 10.5.2.2
$l_{x',t}^i$	$= l_{x',t-1}^i \cdot (1 - s_{x',t-1})$	KT 1995 Abs. 10.5.3.1
$D_{x',t}^i$	$= v^{x'+t} \cdot l_{x',t}^i$	KT 1995 Abs. 10.5.3.2.1
$N_{x',t}^i$	$= \sum_{u=t}^{\omega-x'} D_{x',u}^i$	KT 1995 Abs. 10.5.3.2.1
$\ddot{a}_{x',t:s-x'-t}^i$	$= \frac{N_{x',t}^i - N_{x',s-x'-t}^i}{D_{x',t}^i}$	KT 1995 Abs. 10.5.3.2.2
$\ddot{a}_{x',t:s-x'-t}^{i(12)}$	$= \ddot{a}_{x',t:s-x'-t}^i - 11/24 (1 - \frac{D_{x',s-x'}^i}{D_{x',t}^i})$	analog KT 1995 Abs. 10.5.3.2.2
$\ddot{a}_{x',t:s-x'-w/12}^{i,w(12)}$	$= (1 - (w/12 - [w/12])) \ddot{a}_{x',[w/12]:s-x'-[w/12]}^{i(12)} + (w/12 - [w/12]) \ddot{a}_{x',[w/12]+1:s-x'-[w/12]-1}^{i(12)}$	analog KT 1995 Abs. 10.5.3.3.1
$\tilde{D}_{x:s-x}^{ai,w}$	$= \tilde{l}_x^w \cdot \tilde{g} \cdot v^{w/12+1/2} \cdot D_x \cdot 1.04 \cdot \ddot{a}_{x',t:s-x'-w/12}^{i,w(12)}$	analog KT 1995 Abs. 10.5.3.3.1
$\tilde{N}_{x:s-x}^{ai,w}$	$= \sum_{u=x}^{s-1} \tilde{D}_{u:s-u}^{ai,w}$	KT 1995 Abs. 10.5.3.3.1

## 11.9 Berechnung der Einlagesätze für die Invalidenrente nach KT 1995

Der Einlagesatz für diese Versicherung berechnet sich nach der Formel:

$$\text{Einlagesatz} = E_{x:s-x}^{ai,w} = (1 + \tilde{\sigma}) \cdot 1.25 \cdot \frac{\tilde{N}_{x:s-x}^{ai,w}}{D_x}$$

Figur 11.9 zeigt den Barwert für eine einjährige Anwartschaft auf eine Invalidenrente nach KT 1995, welche bis zum Alter 65 ausbezahlt wird. Man beachte hierbei die Abhängigkeit vom Geschlecht und der Wartefrist.

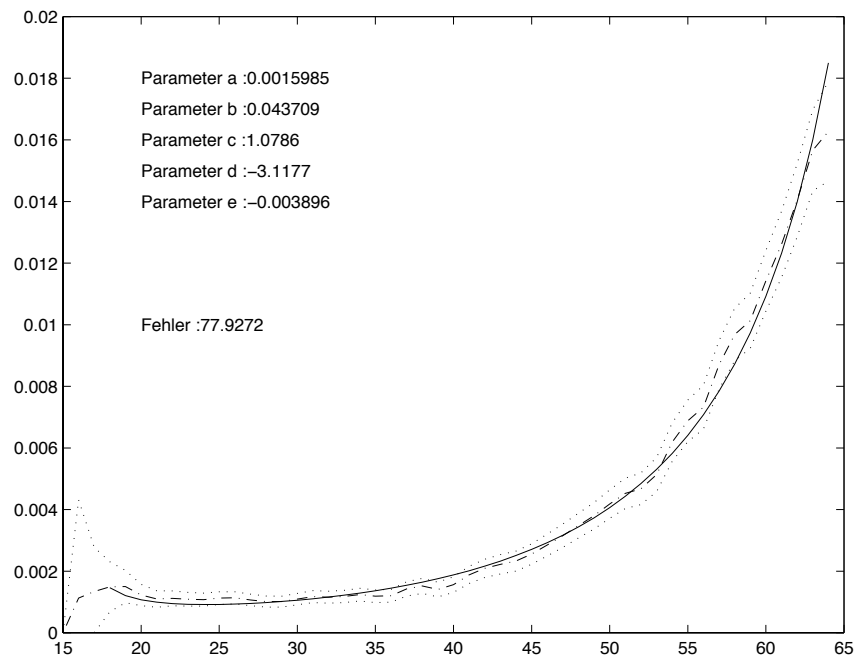


Abbildung 11.9: Invaliditätsmodell nach KT 1995.

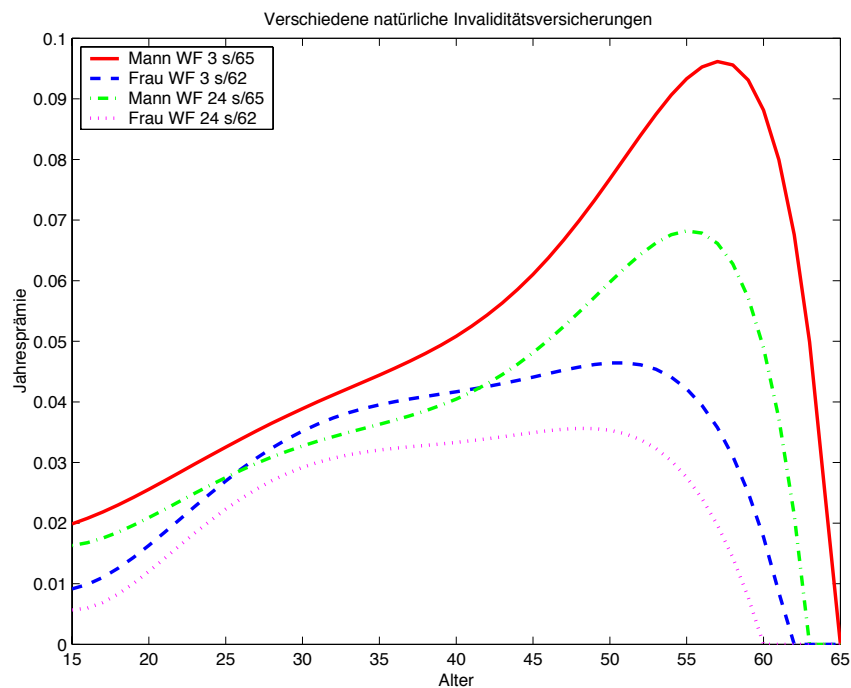


Abbildung 11.10: Prämie für eine Invalidenrente nach KT 1995.

### 11.9.1 Invaliditätskapital

- Die Invaliditätskapitalversicherung ist technisch einfacher zu berechnen als die Invalidenrente.
- Sie ist eine gefährliche Versicherung wegen Antiselektion.

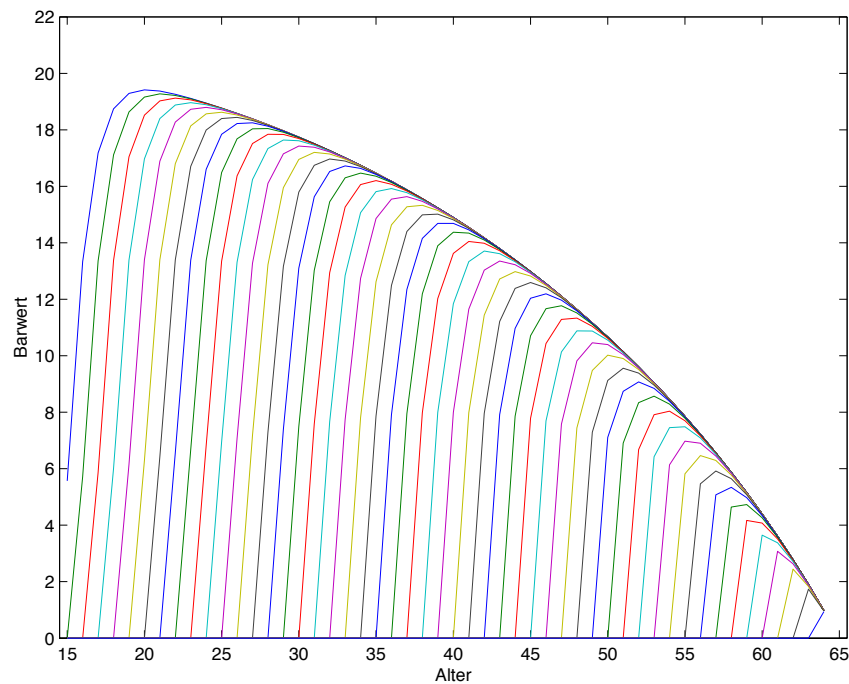
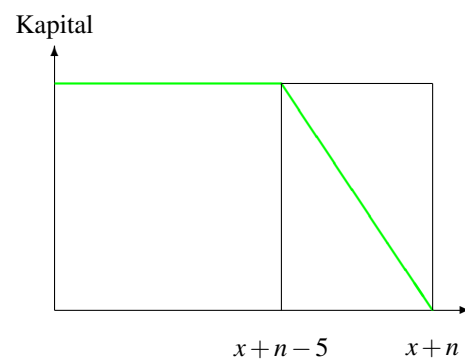


Abbildung 11.11: Barwert für eine laufende Invalidenrente nach KT 1995.

- Die Invaliditätskapitalversicherung unterliegt einer gewissen subjektiven Komponente (besonders im Zusammenhang, dass die Leute gerne von der Versicherung profitieren möchten).
- Die Versicherung senkt das Invaliditätskapital linear in den letzten fünf Jahren.



Wir führen neue Kommutationszahlen ein:

$$C_{x+t}^{ai} = v^{x+t+1} \cdot i_{x+t} \cdot l_{x+t}^a$$

$$M_x^{ai} = \sum_{t=0}^{\infty} C_{x+t}^{ai}$$

$C_{x+t}^{ai}$  bezeichnet die Anzahl derjenigen Leute, die im Alter  $x+t$  invalid werden. Es gilt:

$$A_{x:\overline{n}|}^{ai} = \frac{M_x^{ai} - M_{x+n}^{ai}}{D_x^a}$$

Dies ist eine spezielle Form: Gemischte Versicherung mit vorzeitiger Auszahlung im Falle dauernder Invalidität. Diese Versicherung wird meist mit folgender Formel berechnet:

normale gemischte Versicherung:  $A_{x:\overline{n}|} = 1 - d\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$   
 diese spezielle  $\tilde{A}_{x:\overline{n}|}^{ai} = 1 - d\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^a$

**Frage:** Wieso ist  $i_x$  für Invaliditätskapitalversicherungen anders als für die Invalidenrenten?

**Antwort:** Bei Invaliditätskapitalversicherungen wird eine voraussichtlich dauernde Invalidität gefordert. Bei Invalidenrenten kann die Invalidität auch temporär sein. Wir machen also eine spezielle Ausscheideordnung.

## 11.10 Berechnung der Einlagesätze für die Invalidenrente

Der Einlagesatz für diese Rente berechnet sich nach der Formel

$$E_{x:\overline{s-x}|}^{ai,w} = (1 + \tilde{\sigma}) \cdot 1.25 \cdot \frac{\tilde{N}_{x:\overline{s-x}|}^{ai,w}}{D_x}$$

↓

25% Kosten auf Einlage für anwartschaftlich Versicherte

$\tilde{\sigma} = 30\%$  Risikozuschlag für mehrjährige Tarife (weil  $i_x$  so stark schwanken kann von Jahr zu Jahr.)

Bild 11.3 zeigt den Barwert für eine einjährige Anwartschaft auf eine Invalidenrente nach KT 95, welche bis zum Alter 65 ausbezahlt wird. Zu beachten ist die Abhängigkeit vom Geschlecht und von der Wartezeit.

Dieser Formelapparat ist extrem kompliziert. Mit dem Markovmodell erreichen wir dasselbe Resultat mit weniger Aufwand. (vgl später)

### 11.10.1 Periodische Prämien für die Invaliditätsversicherung

Die periodischen Prämien für die Invaliditätsversicherung bestimmen wir analog wie früher. Wir müssen nur die Prämienbarwerte anpassen.

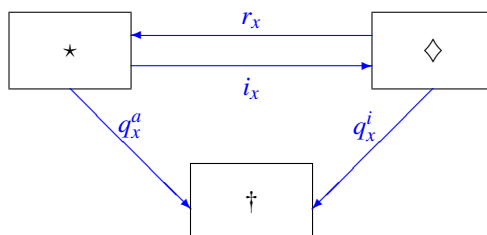
$$P = \frac{\text{Einlagesatz}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} \rightarrow P^{(i)} = \frac{\text{Einlagesatz}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^a}$$

Es gilt:  $P^{(i)} \geq P$ , weil  $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^a \leq \ddot{a}_{x:\overline{n}|}$

Wir können  $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^a$  approximieren:  $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^a = \frac{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}{1 + ps^a}$ , wobei  $ps$ : Prämiensatz einer Invaliditätsversicherung, z. B. 3%.

### 11.10.2 Markovmodell für Invalidität

Wir betrachten die Modellierung einer temporären Invaliditätsversicherung mit dem Markovmodell:



(Modell ohne Berücksichtigung der Reaktivierungsabhängigkeit von der Invaliditätsdauer.)

Somit ist die Reaktivierung nur von einer Variablen, dem Alter, abhängig. Wir wollen die starke Abhängigkeit von  $r_{x,t}$  von  $t$  berücksichtigen. Dazu benutzen wir einen Trick. Wir führen zusätzliche Zustände ein.

**Neues Modell:**

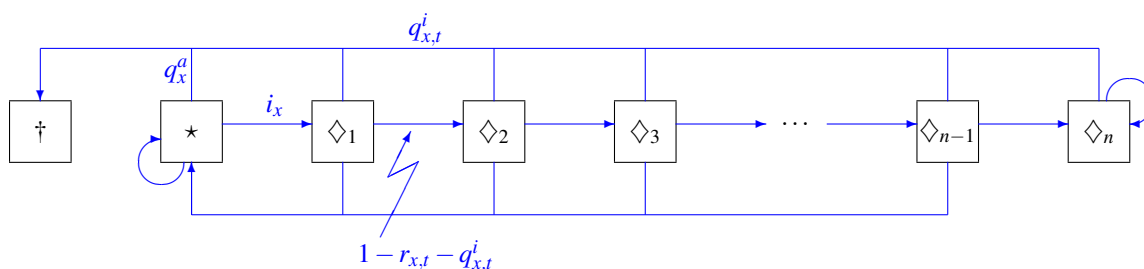


Abbildung 11.12: Markovmodell für Invaliditätsversicherungen

( $\diamond_n$  ist ein absorbierender Zustand.)

- Frage:**
- 1 Wie gross wählen wir  $n$ ?
  - 2 In welche Richtung geht die Sicherheitsmarge?

- Antwort:**
- 1 Je mehr Zustände wir haben, desto billiger wird die Invalidenrente, weil mehr Realisierungen zugelassen sind.  
Abbildung 11.6 zeigt den Barwert einer sofort beginnenden Invaliditätsrente für verschiedene  $n$ . Wir sehen: Der Unterschied zwischen vier und zehn Zuständen ist sehr klein. Wir können also das Modell auf  $n=4$  begrenzen.
  - 2 Einlagesatz geht mit zunehmendem  $n$  zurück. Das heisst, wir benötigen eine zusätzliche Sicherheitsmarge.

Figur 11.10.2 zeigt die Abhängigkeit des Barwertes für eine laufende Invalidenrente von der Anzahl nicht absorbierender Zustände.

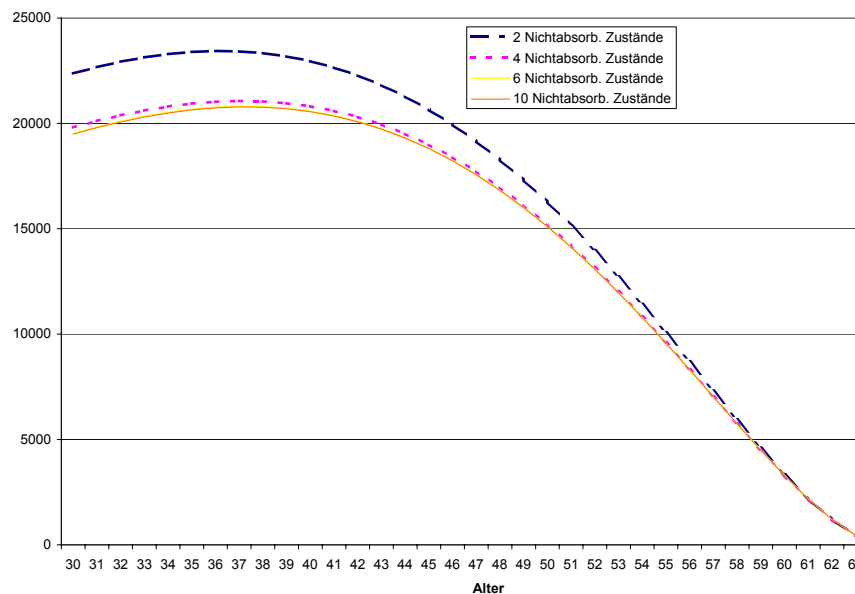


Abbildung 11.13: Barwert einer sofort beginnenden Invalidenrente.

Die Festsetzung der Rente wird durch das Markovmodell viel einfacher. Die Rechnungen werden transparenter, es treten weniger Fehler auf.

#### Rente:

- $\ddot{a}_x^a$  :  $a_\star^{pre}(t) = 1$ , alle anderen 0
- $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^a$  :  $a_\star^{pre}(t) = \begin{cases} 1 & \text{falls } t < x+n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

#### Laufende Invalidenrente:

- $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^i(\diamond_j)$  :  $a_{\diamond_j}^{pre}(t) = \begin{cases} 1 & \text{falls } t < x+n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Damit ist schon alles definiert. Nun können wir beispielsweise den Barwert einer temporären Invalidenrente berechnen:

- $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{ai}$
- $\ddot{a}_{x,t:\overline{s-x-t}|}^i = V_{\diamond_t}(x+t)$



# Kapitel 12

## Kostenzuschläge

### 12.1 Einführung

Bisher haben wir nur Nettoprämien betrachtet, d.h. wir haben den Aufwand für die Versicherungsleistung eingerechnet, jedoch die mit der Führung einer Versicherung verbundenen Kosten nicht berücksichtigt. Diese Kosten müssen allerdings auch gedeckt werden. Wir haben also die folgenden drei Rechnungsgrundlagen für die Prämienberechnung:

- Sterblichkeit
- Zins
- Kosten

#### 12.1.1 Anfallende Kosten

In einer Versicherungsgesellschaft fallen folgende Kosten an:

**1. Verwaltungskosten:**

- Risikoprüfung (beim Abschluss einer Versicherung)
- Prämieninkasso (Einziehen von Geldern), Prämienexkasso
- Bestandesführung
- Rechnungswesen

**2. Kapitalanlagekosten:** Kosten, die durch die Bewirtschaftung der Geldeinlagen entstehen.

**3. Abschlusskosten:** Zu den Abschlusskosten zählen vor allem die Provisionen der Versicherungsvertreter. Ein solcher Vertreter wird zweistufig entlohnt:

- Fixlohn von z.B. 1400.- CHF
- Provision für jeden abgeschlossenen Vertrag.

Der Fixlohn ist tief, dafür sind die Provisionen relativ hoch. In den 80er/90er-Jahren haben die Versicherungsvertreter sehr viel verkauft und daher verdient. Unterdessen ist eine gewisse Sättigung des Marktes spürbar. Um die Vertreter zu motivieren, werden unter anderem auch Wettbewerbe durchgeführt.

### 12.1.2 Bruttoprämien

In der Theorie der Versicherungsmathematik unterscheiden wir vielfach zwischen *ausreichenden Prämien* und *Bruttoprämien*.

**Definition 12.1.1** (Ausreichende Prämien): Als ausreichende Prämien bezeichnen wir Prämien, welche sich aufgrund der Einrechnung aller drei Grundlagen (vgl. 12.1.1) ergeben, wobei Sicherheitsbedürfnisse berücksichtigt sind. ◇

**Definition 12.1.2** (Bruttoprämien): Bruttoprämien sind diejenigen Prämien, welche der Versicherte bezahlen muss. Sie können unter Umständen von den ausreichenden Prämien abweichen, weil gewisse spezielle Zuschläge bzw. Rabatte hinzukommen. ◇

In der Praxis wird auf diese Differenzierung meist verzichtet, wir sprechen nur von Bruttoprämien.

**Notation:** Wir bezeichnen Bruttoeinmaleinlagen und Bruttoprämien, indem wir den Nettowert mit " versehen, also zum Beispiel  $\ddot{a}_x''$ . (Diese Regelung ist allerdings nicht einheitlich!) ◇

### 12.1.3 Modelle

Es gibt sehr viele verschiedene Kostenmodelle.

**Beispiel:**

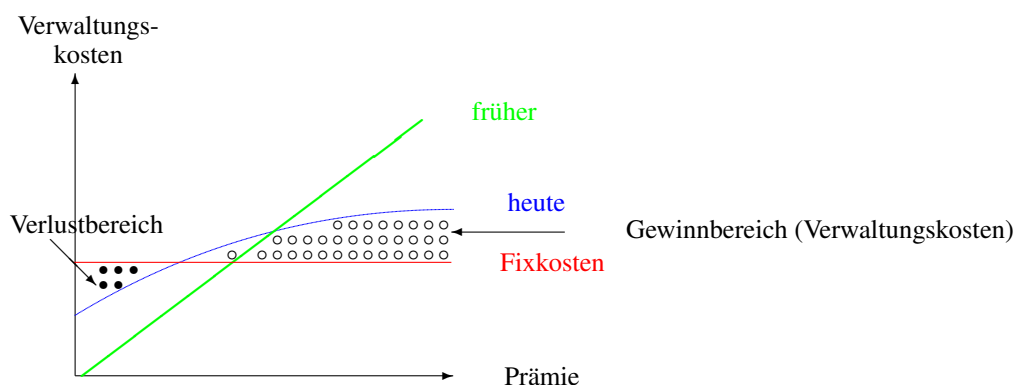


Abbildung 12.1: Kostenmodelle im Vergleich

Im folgenden behandeln wir die klassische Form der Kosteneinrechnung. Diese Tarife gelangen in der privaten Versicherung häufig zum Einsatz. Die Kosten der Pensionskassen sind meist von aussen gedeckt, sodass diese nicht in die Tariffberechnung einfließen.

**Bemerkungen:**

- Die Kosten lassen sich auch implizit ins Modell einbeziehen: Man kann zusätzliche Margen bei Zins und Sterblichkeit einführen. Dieses Vorgehen ist allerdings wenig transparent.
- Die Spartarife BVG sind ohne Kostenzuschläge. Die Kosten werden über die Zinsmarge gedeckt. ◇

## 12.2 Das $\alpha, \beta, \gamma$ -System

Die anfallenden Kosten werden in drei Gruppen aufgeteilt:  $\alpha$ -Kosten,  $\beta$ -Kosten und  $\gamma$ -Kosten.

### 12.2.1 $\alpha$ -Kosten

$\alpha$ -Kosten (auch: *Abschlusskosten*) sind Kosten, die im Zusammenhang mit einem Neuabschluss einer Versicherung entstehen. Dazu gehören:

- äussere Abschlusskosten
  - Entschädigungen an Akquisitionsorgane (Abschlussprovisionen, Spesen)
  - Fixkosten Aussendienstorgane
- innere Abschlusskosten
  - ärztliche Untersuchungen
  - Policenausfertigung

Die Zuteilung bei den inneren Abschlusskosten zu einzelnen Gruppen ist nicht immer einheitlich gehandhabt. Für die Analyse des Geschäftsergebnisses ist Abgrenzung wichtig.

$\alpha$  misst die Kosten, welche beim Abschluss einer Versicherung zu bezahlen sind. Wir geben  $\alpha$  in Prozent der Versicherungssumme oder des massgeblichen Rentenbarwerts an. Bei Versicherungssummen beträgt die Grössenordnung für  $\alpha$  3% bis 5%.

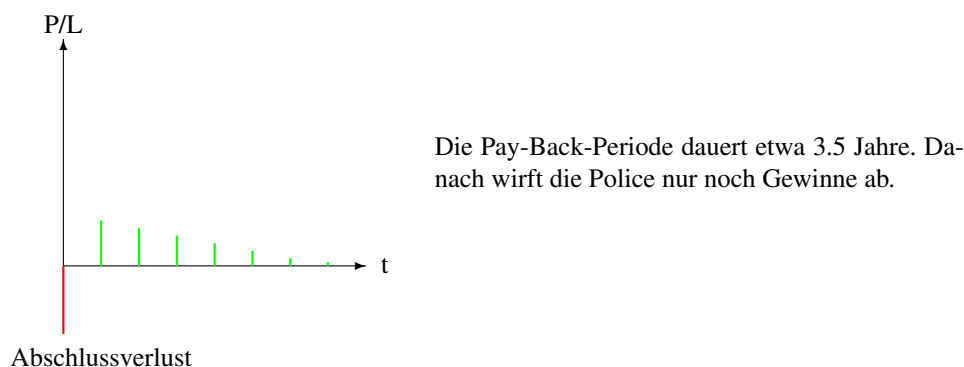
**Beispiel:** Wir betrachten eine gemischte Versicherung  $A_{x:\overline{n}|}$ ,  $x = 35$ ,  $n = 30$ . Die Leistung  $L$  sei 100'000.–CHF, die Einmaleinlage  $EE$  betrage 45'000.–CHF,  $\alpha = 4\%$ ,  $\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = 20$ .

Abschlusskosten:  $\alpha \cdot L = 4'000.$ –CHF

Prämie  $P$ :  $\frac{EE}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} = 2'250.$ –CHF

Wir sehen an diesem Beispiel ein grosses Problem der Versicherung: Die Abschlusskosten sind deutlich grösser als die Prämien, welche die Versicherung im 1. Jahr einnimmt. Sie muss also die Abschlussprovisionen vorfinanzieren. (Dies geschieht über das Eigenkapital der Versicherungsgesellschaft, spätere Gewinne werden einbehalten.) Technisch gesehen entsteht ein Verlust für die Versicherungsgesellschaft im 1. Jahr.  $\diamond$

**Illustration:** Gewinnprofil einer Police



### 12.2.2 $\beta$ -Kosten

$\beta$ -Kosten (auch: *Inkassokosten*) sind die Kosten, die mit dem laufendem Einbezug der Prämien zusammenhängen. Die  $\beta$ -Kosten sind meist proportional zur Prämie, typischerweise beträgt  $\beta$  2% bis 3% der Bruttoprämie.

**Beispiel (Fortsetzung):**

Sei  $\beta = 2\%$ .

Inkassokosten pro Jahr:  $\beta \cdot P'' = 45.-\text{CHF}$

◇

Die  $\beta$ -Kosten waren früher sehr wichtig, weil das Inkasso sehr aufwändig war. Mit den modernen elektronischen Möglichkeiten verlieren die  $\beta$ -Kosten an Bedeutung. Wir können den Unterschied zwischen  $\beta$ - und  $\gamma$ -Kosten vernachlässigen.

### 12.2.3 $\gamma$ -Kosten

Unter  $\gamma$ -Kosten fallen alle *Verwaltungskosten*, welche nicht zu den  $\beta$ -Kosten gehören. Insbesondere:

- Personalkosten
- Anlagekosten
- EDV
- Miete der Geschäftsräumlichkeiten
- Steuern und Abgaben

Typischerweise ist  $\gamma$  proportional zur Versicherungsleistung, und zwar beträgt  $\gamma$  etwa 1 bis 3 Promille.

**BEMERKUNG:** Es gibt auch andere Möglichkeiten: Wir können die Kosten beispielsweise von der Prämieinnahme abhängig machen, zum Teil existieren auch Fixkosten. Die Annahme ist also relativ grob. (Betriebswirtschaftlich existieren genauere Systeme, aber die sind deutlich komplizierter.)

**Beispiel** (Fortsetzung):

$$L = 100'000, \gamma = 0.003$$

Verwaltungskosten:  $\gamma \cdot L = 300.-\text{CHF}$

**Zusammenfassung des Beispiels:**

	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	$\Sigma$
$t = 0$	4'000	47	300	4347
$t = 1$	—	47	300	347
$t = 2$	—	47	300	347

◇

**Bemerkung:** Heute werden  $\beta$ - und  $\gamma$ -Kosten oft zusammengefasst unter dem Oberbegriff *Verwaltungskosten*. ◇

## 12.3 Beispiele

Wir betrachten drei bedeutsame Beispiele:

- sofort beginnende Rente gegen Einmalprämie
- aufgeschobene Rente gegen periodische Prämien
- gemischte Versicherungen gegen periodische Prämien

### 12.3.1 Sofort beginnende Rente gegen Einmalprämie

**Bezeichnungen:** Nettobarwert:  $\ddot{a}_x$   
 Bruttobarwert:  $\ddot{a}_x''$

◇

Nach dem Äquivalenzprinzip folgt mit dem Kostenzuschlags-Ansatz:

$$\ddot{a}_x'' = \ddot{a}_x + \alpha \ddot{a}_x'' + \gamma \ddot{a}_x$$

Wenn wir die Gleichung nach  $\ddot{a}_x''$  auflösen, erhalten wir:

$$\ddot{a}_x'' = \frac{(1+\gamma)\ddot{a}_x}{1-\alpha}$$

**Bemerkung:** Wir haben dabei vorausgesetzt, dass sich  $\alpha$  auf die Bruttoeinmalprämie bezieht. (Eine andere Möglichkeit ist die 10fache Rente: Anstelle von  $\alpha \ddot{a}_x''$  setzen wir  $10\alpha$ .)

Die  $\gamma$ -Kosten sind jährlich auf eine Rente von 1 zu entrichten. Sie entsprechen also dem Barwert einer lebenslänglichen Rente vom Betrag  $\gamma$ .

◇

### 12.3.2 Aufgeschobene Rente gegen periodische Prämien

**Bezeichnungen:** Nettobarwert:  ${}_n|\ddot{a}_x$   
 Nettoprämie:  $P({}_n|\ddot{a}_x)$   
 Bruttoprämie:  $P''({}_n|\ddot{a}_x) = P''$

◇

Nach dem Äquivalenzprinzip gilt:

$${}_n|\ddot{a}_x'' = P'' \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}|} = {}_n|\ddot{a}_x + \alpha P'' \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}|} + \beta P'' \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}|} + \gamma \ddot{a}_x$$

Es folgt also:

$$P'' = \frac{{}_n|\ddot{a}_x + \gamma \ddot{a}_x}{(1-\alpha-\beta)\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}$$

**Bemerkung:** Die  $\alpha$ -Kosten werden auf den Barwert der insgesamt zu zahlenden Bruttoprämien bezogen. (Eine andere Möglichkeit: Die  $\alpha$ -Kosten auf die Bruttoprämie beziehen und dann nur  $\alpha P''$  verwenden.)

Die  $\beta$ -Kosten sind jährlich zu entrichten auf die Prämie bis zum Schlussalter bzw. bis zum Ende der Prämienzahlungen. Wir müssen daher eine temporäre Rente vom Betrag  $\beta P''$  verwenden.

$\gamma$  ist wie zuvor auf eine lebenslängliche Rente bezogen.

◇

**Bemerkung:** Wir können  $\gamma$  unterschiedlich ansetzen während der Prämienzahlungsdauer und der Rentenbezugsdauer. Dazu teilen wir  $\gamma$  auf:

$\gamma_1$  für Anwartschaft

$\gamma_2$  für die Laufzeit mit  $\gamma_2 > \gamma_1$

Wir ersetzen dann  $\gamma \ddot{a}_x$  durch  $\gamma_1 \ddot{a}_{x:\overline{n}|} + \gamma_2 {}_n|\ddot{a}_x$ .

◇

### 12.3.3 Gemischte Versicherung gegen periodische Prämien

**Bezeichnungen:** Nettobarwert:  $A_{x:\overline{n}|}$   
 Nettoprämie:  $P_{x:\overline{n}|}$   
 Bruttoprämie:  $P''_{x:\overline{n}|}$

◇

Nach dem Äquivalenzprinzip gilt:

$$P''_{x:\overline{n}|} \ddot{a}_{x:\overline{n}|} = A_{x:\overline{n}|} + \alpha + \beta P''_{x:\overline{n}|} \ddot{a}_{x:\overline{n}|} + \gamma \ddot{a}_{x:\overline{n}|}$$

Es folgt also:

$$P''_{x:\overline{n}|} = \frac{A_{x:\overline{n}|} + \alpha + \gamma \ddot{a}_{x:\overline{n}|}}{(1-\beta)\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}$$

Wir erinnern uns an die Formel:  $A_{x:\overline{n}|} = 1 - d\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$ . Wir setzen sie ein und erhalten

$$P''_{x:\overline{n}|} = \frac{1+\alpha}{1-\beta} \frac{1}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} + \frac{\gamma-d}{1-\beta}$$

Noch einleuchtender ist die Darstellung:

$$P_{x:\overline{n}|} = \frac{1}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} - d, \quad \text{d.h.} \quad \frac{1}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} = P_{x:\overline{n}|} + d$$

$$P''_{x:\overline{n}|} = \underbrace{\frac{1+\alpha}{1-\beta} P_{x:\overline{n}|}}_{\varkappa} + \underbrace{\frac{d\alpha+\gamma}{1-\beta}}_{\lambda}$$

Also erhalten wir die Formel:

$$P''_{x:\overline{n}|} = \varkappa P_{x:\overline{n}|} + \lambda$$

## 12.4 Weitere Kommentare zur Bruttoprämie

### 12.4.1 Zuschläge und Rabatte

Zu Beginn wurde erläutert, dass die vom Versicherten zu zahlende Prämie unter Umständen noch weitere Bestandteile enthalten kann. Davon wollen wir jetzt die wichtigsten betrachten:

#### 1. Risiko: Zuschläge für gefährdete Risiken, Rabatte für ausgezeichnete Risiken

Bei Todesfallversicherungen sind Zuschläge möglich, falls das abzuschliessende Risiko gegenüber dem Normalfall wesentlich erhöht ist.

BEISPIELE:

- Früher erlittene Krankheiten, die Körperkonstitution und der heutige Gesundheitszustand lassen auf eine wesentlich geringere Lebenserwartung schliessen. Für grosse Summen gibt es ärztliche Untersuchungen zur Festlegung solcher Zuschläge.
- Berufsausübung ist äusserst gefahrvoll (z. B. bei Tiefseetauchern, Artisten, Rennfahrern...)

**Bemerkung:** Die heutige Tendenz verläuft in die Gegenrichtung: Es werden Rabatte gegeben für "Preferred Lives" (z. B. Nichtraucher). ◇

#### 2. Zins: Zuschläge für unterjährige Prämienzahlung

Diese Zuschläge sind in früheren Kapiteln bereits eingeführt worden.

#### 3. Kosten: Kleinsummenzuschläge und Summenrabatte

Verschiedene Kosten sind fix, d.h. unabhängig davon, ob eine grosse oder eine kleine Summe abgeschlossen wurde. Diese Kosten werden zu wenig berücksichtigt in diesem Kostenschema. Grosse Summen fahren tendenziell schlechter als kleine. Deshalb wird häufig korrigiert durch Zuschläge bzw. Rabatte, die in Promille der Versicherungssumme bestimmt werden. (z.B. werden auf Summen unter 5'000 CHF Zuschläge erhoben, auf solche über 25'000 CHF Rabatte gewährt.)

### 12.4.2 Inventarprämie

$\gamma$  nennen wir einen “inneren” Zuschlag,  $\alpha$  und  $\beta$  hingegen werden als “äussere” Zuschläge bezeichnet.

Nach klassischer Theorie steht der Zuschlag  $\gamma$  dem Innendienst zur Verfügung. Die Prämie ohne “äussere” Kosten führt zur sogenannten *Inventarprämie*. Diese deckt den eigentlichen Aufwand für Versicherungsleistungen und innere Verwaltungskosten. (Diese Aussagen gelten natürlich nur, wenn keine Vermischung vorliegt.)

**Notation:** Die Inventareinlagen und -prämien bezeichnen wir mit  $'$ , also beispielsweise für die gemischte Versicherung:

$$\text{Inventareinlage: } A'_{x:\overline{n}|} = A_{x:\overline{n}|} + \gamma \ddot{a}_{x:\overline{n}|}$$

$$\text{Inventarprämie: } P'_{x:\overline{n}|} = \frac{A'_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} = P_{x:\overline{n}|} + \gamma$$

◇

Die Inventareinlage ist der Betrag, den die Gesellschaft haben muss, um die Versicherung abzuwickeln. Sie findet Verwendung z.B. in Fällen, in denen keine Abschlusskosten auftreten, also beispielsweise bei einer Policenumwandlung.

**Bemerkung:** Die Trennung zwischen  $\alpha, \beta$  und  $\gamma$  ist heute problematisch, da eine strenge Unterscheidung zum Teil unmöglich ist.

◇





# Kapitel 13

## Bilanz und Erfolgsrechnung einer Versicherungsgesellschaft

### 13.1 Einführung und Bilanzierungsmethoden

### 13.2 Bilanz

Hier wird etwas über die Bilanzierung von Lebensversicherungsgesellschaften stehen:

- Wieso Bilanzen erstellt werden müssen
- Die wichtigsten Positionen einer LV Bilanz
- Die technischen Rückstellungen im Speziellen inkl. Zusatzreserven
- Deckungsstock

### 13.3 Erfolgsrechnung

Hier wird etwas über die Erfolgsrechnung einer LV Gesellschaft stehen:

- Die wichtigsten Positionen einer Erfolgsrechnung
- Kapitalerträge
- Prämien
- Schäden
- Kosten

### 13.4 Technische Analyse

Die technische Analyse einer Lebensversicherungsgesellschaft dient dazu festzustellen welche Gewinnquellen welchen Anteil am Ergebnis der Gesellschaften haben. Sie dient dazu die folgende Frage zu beantworten:

### 13.4.1 Wie machen Versicherungen Gewinn, wenn das Äquivalenzprinzip gilt?

Der Gewinn einer Versicherung lässt sich folgendermassen darstellen:

Prämie	P
Leistung	-L
Kosten	-K
Deckungskapital	-ΔDK
Kapitalertrag	+KE
	<hr/>
	> 0 ⇒ Gewinn

Wir können die Prämie P in drei Beträge unterteilen:  $P = \Pi_S + \Pi_R + \Pi_K$

wobei  $\Pi_S$  die *Sparprämie*,  $\Pi_R$  die *Risikoprämie* und  $\Pi_K$  die *Kostenprämie* bezeichnet.

**Beispiel:**

P	=	2250.- CHF
$\Pi_S$	=	2000.- CHF
$\Pi_R$	=	200.- CHF
$\Pi_K$	=	50.- CHF
$V_x$	=	38'000.- CHF
$i_{techn.}$	=	4%
Kapitalrendite	=	5%

Nun betrachten wir die drei Prozesse einzeln:

#### 1. Kapitalergebnis

Ertrag auf (DK + $\Pi_S$ )	5% · 40'000.-	=	2'000.-
- technischer Zins	4% · 40'000.-	=	1'600.-
Kapitalergebnis			<hr/>
			400.- (*)

**Bemerkung:** Typisch sind tiefe technische Zinssätze (z.B. 2.5%). Damit erhöht sich das Kapitalergebnis. ◇

#### 2. Risiko

Risikoprämie	200.-	
- Schaden (L - DK)	-160.-	Schadenquote z.B. 80%
Risikoergebnis	<hr/>	
	40.-	(△)

**Bemerkung:** Risikogewinn  $\ll$  Zinsgewinn ◇

#### 3. Kostenergebnis

Eingerechnete Kosten	50.-
- Effektive Kosten	-100.-
Kostenergebnis	<hr/>
	-50.- (◇)

**Bemerkung:** In Kontinentaleuropa werden typischerweise zu wenig Kosten eingerechnet. ◇

Nun betrachten wir alle drei Prozesse zusammen:

Kapitalergebnis	400.-
Risikoergebnis	40.-
Kostenergebnis	-50.-
Bruttoergebnis	<hr/>
	390.-
Überschuss*	-200.-
Ergebnis vor Steuern	<hr/>
	190.-

\* Versicherungen gewähren oft einen Zinsüberschuss, z.B. 90% des Kapitalertrages.

Eine Versicherungsgesellschaft bezahlt Steuern in der Höhe von ca. 25% des Gewinns. Das heisst auf dieser Police erzielt sie ca. 150.- CHF Gewinn nach Steuern. Dieser Gewinn ergibt sich aus dem Unterschied zwischen eingerechneten und effektiven Einnahmen.

**Frage:** Welche Beträge von (\*), ( $\Delta$ ), ( $\diamond$ ) darf die Versicherungsgesellschaft behalten? Und welche gehören dem Versicherungsnehmer?

**Antwort:** Wenn die Versicherungsgesellschaft einen kleinen technischen Zinsfuss (z.B. 2.5%) hat, darf sie nicht alles behalten. Hier gibt es oft sogenannte legal quotes.

Vor allem beim Risikoergebnis darf die Versicherung einen Gewinn erzielen, weil sie für die eingegangenen Risiken entschädigt werden muss.

Das Kostenergebnis ist meistens negativ. Um ein besseres Kostenergebnis zu erhalten, muss die Effizienz erhöht werden.

### 13.4.2 Ermittlung der effektiven Kosten

Die Kosten können auf verschiedene Arten aufgeteilt werden:

- Nach Typen:  
Die Kosten werden unterteilt und in die verschiedenen Konti übertagen. Die Kosten werden also den Typen zugeordnet, z.B. Löhne, Unterhalt der Liegenschaft, Sozialleistungen, Mieten, Unterhalt für Liegenschaft,...
- Nach Organisation:  
Die Kosten werden direkt den Organisationen und Abteilungen belastet, welche die Kosten verursacht haben. Die Kosten werden also verursachergerecht zugewiesen. Es wird eine Vollkostenrechnung durchgeführt.

### 13.4.3 ILLUSTRATION: Was passierte im Jahr 2001?

Wir betrachten eine mittelgrosse Versicherungsgesellschaft mit einem Anlagevermögen von total 20 Milliarden CHF. Das Deckungskapital betrage 18 Milliarden CHF.

Die Versicherung weist folgendes Profil auf:

	Anteil	Rendite	Ertrag in CHF		
Aktien	20%	7%	$4'000'000 \cdot 7\%$	=	280'000
Obligationen	60%	4%	$12'000'000 \cdot 4\%$	=	480'000
Liegenschaften	10%	5%	$2'000'000 \cdot 5\%$	=	100'000
Hypotheken	10%	4%	$2'000'000 \cdot 4\%$	=	80'000
			Total		940'000
Deckungskapital		3.5%	$-18'000'000 \cdot 3.5\%$	=	-630'000
			Total		310'000

Die Versicherungsgesellschaft erzielte also einen Gewinn von 310'000.-CHF

**Frage:** Im Jahr 2001 sind die Aktienkurse stark gesunken. Was passiert, wenn die Versicherung einen Verlust von 21% auf den Aktien aufweist?

**Antwort:**

	Anteil	Rendite	Ertrag in CHF	
Aktien	20%	-21%	$4'000'000 \cdot (-21\%)$	= -840'000
Obligationen	60%	4%	$12'000'000 \cdot 4\%$	= 480'000
Liegenschaften	10%	5%	$2'000'000 \cdot 5\%$	= 100'000
Hypotheken	10%	4%	$2'000'000 \cdot 4\%$	= 80'000
			Total	-180'000
Deckungskapital		3.5%	$-18'000'000 \cdot 3.5\%$	= -630'000
			Total	-810'000

Der Verlust aus dem Aktiengeschäft beträgt:  $4'000'000 \text{ CHF} \cdot (-21\%) = -840'000 \text{ CHF}$ . Die Versicherung hat also einen totalen Verlust von 810'000 CHF.

Nicht nur die Versicherungsgesellschaften, sondern auch andere Gesellschaften (z.B. autonome Pensionskassen) haben in Aktien investiert und grosse Verluste erlitten.

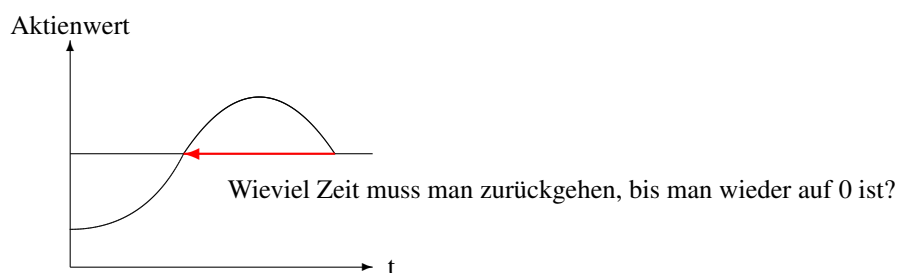
**Wir halten fest:** Die Aktien haben einen grossen Einfluss auf den Gewinn einer Gesellschaft. Je höher der Aktienanteil einer Gesellschaft, desto grösser ist die Gefahr eines Verlustes. Andererseits kann ein hoher Aktienanteil bei guten Aktienkursen enorme Gewinne bringen.

**Frage:** Wie gross sollte der Aktienanteil sein?

**Antwort:** Der Aktienanteil ist abhängig:

- von der Risikobereitschaft der Gesellschaft
- vom wirtschaftlichen Umfeld (Zeitpunkt des Kaufs der Aktien, Aktienkursentwicklung in den letzten Jahren, Rendite von anderen Anlagen...)

Der Verlauf des Aktienmarktes in den letzten Jahren:



**Frage:** Was passiert mit hohen Gewinnen?

**Antwort:** Sie werden als Überschüsse ausbezahlt (legal quote), oder es werden Reserven gebildet.

# Kapitel 14

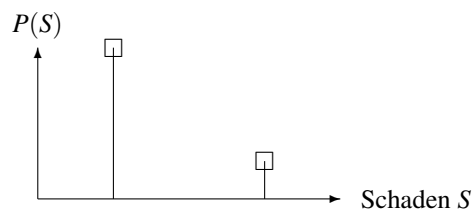
## Gesamtschadenverteilung

### 14.1 Einleitung

In diesem Kapitel werden wir das kollektive Modell der Gesamtschadenverteilung kennen lernen.

#### 14.1.1 Einführungsbeispiel

Wenn wir nur *eine* Police einer einjährigen Todesfallversicherung betrachten, gibt es zwei verschiedene Schäden, die mit unterschiedlicher Wahrscheinlichkeit eintreten: überleben bzw. sterben.

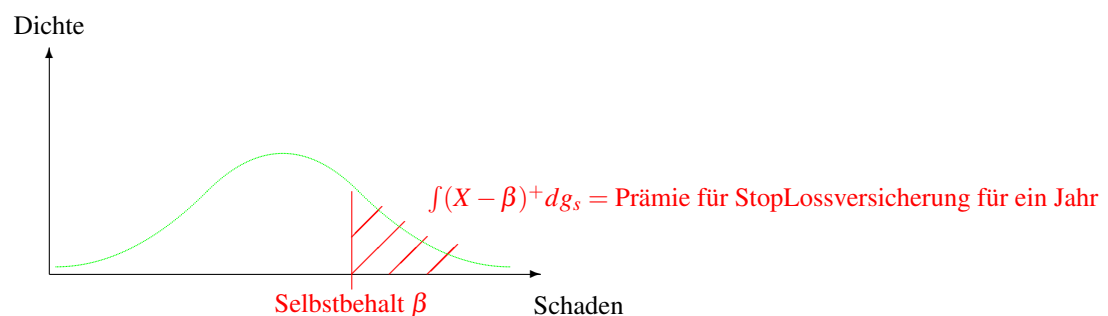


**Frage:** Wie sieht es aus für  $n = 1000$ ?

- Wie gross muss die Schwankungsreserve sein?
- Wie lässt sich die StopLoss-Prämie berechnen?

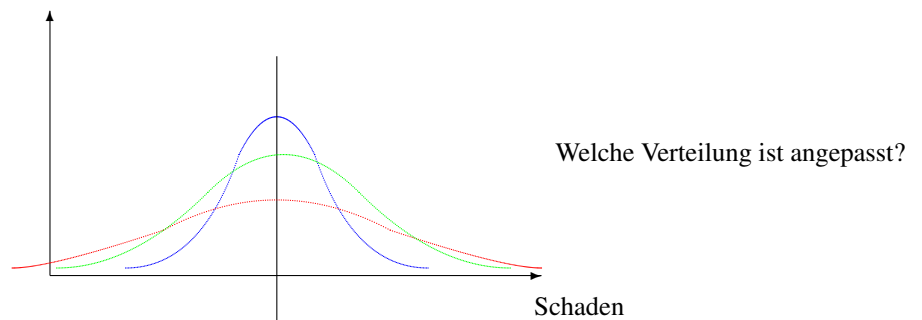
Bei der Einzelschadenverteilung wollen wir wissen, wie gross der Schaden  $S$  für  $n = 1$  ist.

Die Dichte der Gesamtschadenverteilung könnte etwa so aussehen:



### 14.1.2 Fragestellungen aus der Praxis

Wir betrachten ein gegebenes Portefeuille mit Lebensversicherungspolicen für eine gegebene Zeitdauer (z.B. 1 Jahr) und interessieren uns für die Verteilungsfunktion des Gesamtschadens.

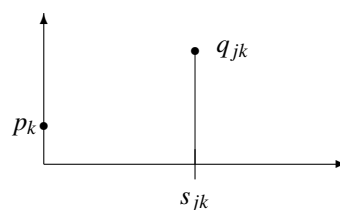


#### Fragen:

- Kann eine Pensionskasse / Versicherung das Risiko selber tragen?
- Wie gross soll die Schwankungsreserve sein?
- Wie gross ist die Rückversicherungsprämie?

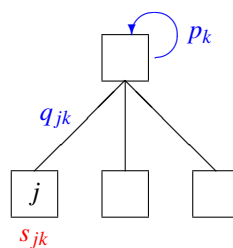
**Ziel:** Rezept zur Berechnung der gesuchten Grössen.

<b>Annahmen:</b>	Portfolio	$n$ Policen
	Schaden aus	$S_k$
	Police $k$	
	Police $k$	$P[S_k = 0] = p_k$
		$P[S_k = s_{jk}] = q_{jk}$

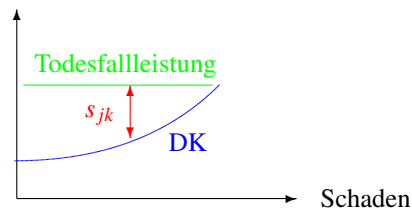


(D.h. die Police  $k$  kann die Schadengrössen  $0, s_{1k}, \dots, s_{mk}$  annehmen.)

$q_{jk}$  kann z.B. die Wahrscheinlichkeit sein, an Ursache  $j$  zu sterben,  $s_{jk}$  ist die entsprechende Risikosumme.



**Beispiel:** Schadenhöhe der Todesfallversicherung



◇

**Definition 14.1.1** (Totaler Schaden): Die Summe  $S = S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_n$  heisst *totaler Schaden*.

◇

**Annahme:**  $(S_k)_{k=1\dots n}$  unabhängig.

**Vorgehen:** Zur Bestimmung der Gesamtschadenverteilung verwenden wir in einem ersten Schritt ein Approximationsverfahren. Es ist ein sehr grobes Modell, und wir werden anschliessend immer feinere Modelle verwenden.

## 14.2 Normalverteilungsapproximation

$$E[S] = \sum_{k=1}^n E[S_k]$$

$$Var[S] \stackrel{unabh.}{=} \sum_{k=1}^n Var[S_k]$$

mit

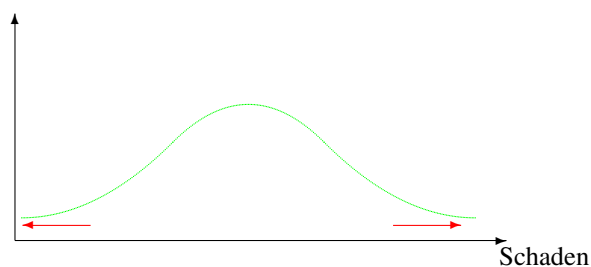
$$E[S_k] = \sum_{j=1}^m s_{jk} \cdot q_{jk}$$

$$Var[S_k] = \sum_{j=1}^m s_{jk}^2 q_{jk} - E[S_k]^2$$

Für grössere Portfolios gilt approximativ der Zentrale Grenzwertsatz (nur exakt, wenn  $(S_k)_k$  iid).

Also  $S \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ ,  $\mu = E[S]$ ,  $\sigma^2 = Var[S]$ .

Diese Methode funktioniert gut in der Nähe des Erwartungswertes. In den Schwänzen ist sie weniger befriedigend (und dies sind genau die interessanten Gebiete in der Lebensversicherung bezüglich StopLoss).



Es gibt bessere Methoden für die Schwänze:

- Esschermethode
- Normal Power Approximation

Mit der Einführung leistungsfähiger Computer haben diese Methoden an Bedeutung verloren.

## 14.3 Exakte Berechnung des totalen Schadens

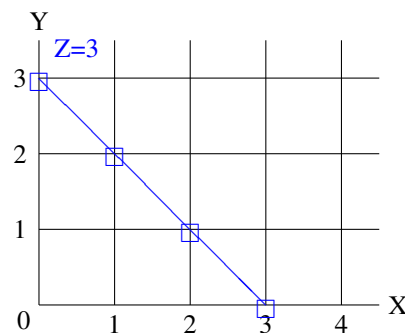
### 14.3.1 Herleitung

Falls  $X$  und  $Y$  unabhängige Zufallsvariablen sind und  $Z = X + Y$ , so kann die Dichte  $f_Z$  via Faltung berechnet werden. Es gilt:

$$f_Z(c) = (f_X * f_Y)(c) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z) \cdot f_Y(c - z) dz$$

Für diskrete Masse ist das Integral durch die entsprechende Summe zu ersetzen.

**Illustration:**



$$\begin{aligned} P[Z = 3] &= P[X = 0, Y = 3] + P[X = 1, Y = 2] + P[X = 2, Y = 1] + P[X = 3, Y = 0] \\ &= P[X = 0]P[Y = 3] + P[X = 1]P[Y = 2] + P[X = 2]P[Y = 1] + P[X = 3]P[Y = 0] \end{aligned} \quad \diamond$$

Es liegt also nahe, die Gesamtschadenverteilung mittels Rekursion zu berechnen:

$$P[S_1 + S_2 + \dots + S_n = x] = \sum_{j=1}^m P[S_1 + \dots + S_{n-1} = x - s_{jn}] \cdot q_{jn} + P[S_1 + \dots + S_{n-1} = x] \cdot p_n \quad (14.1)$$

**Problem:** Dieses Verfahren ist sehr aufwändig für grosse  $n$ .

Meist wird deshalb für  $x$  nur eine gewisse Anzahl von Werten zugelassen. Man muss also die  $s_{jk}$  anpassen.

### 14.3.2 Anpassungsmethoden

#### Methode 1: Runden

Um den Erwartungswert beizubehalten, werden die Wahrscheinlichkeiten angepasst, und zwar wie folgt:

$$s_{jk} \mapsto s_{jk}^*$$



$$q_{jk} \mapsto q_{jk}^* := q_{jk} \frac{s_{jk}}{s_{jk}^*}$$

$$p_k \mapsto 1 - (q_{1k}^* + q_{2k}^* + \dots + q_{mk}^*)$$

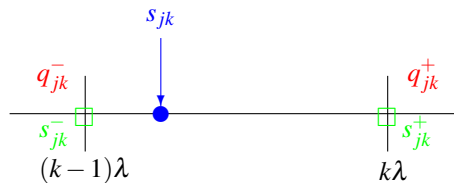
**Methode 2: Dispersion**Skalierung:  $k\lambda$ 

$$s_{jk}^- := (k-1)\lambda$$

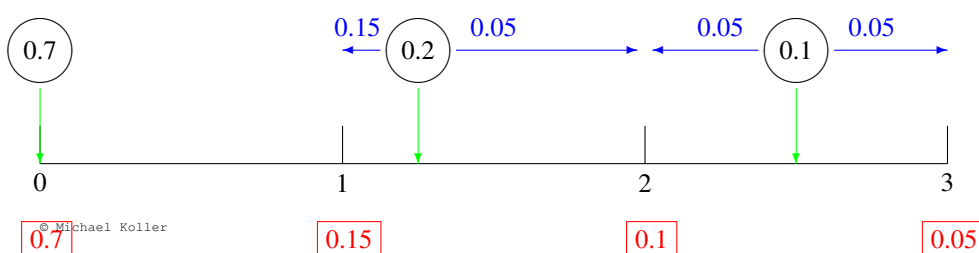
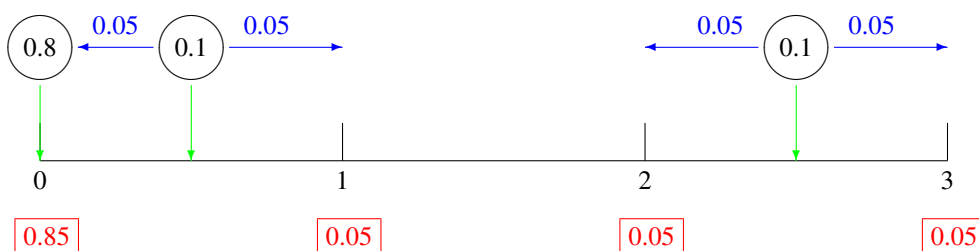
$$s_{jk}^+ := k\lambda$$

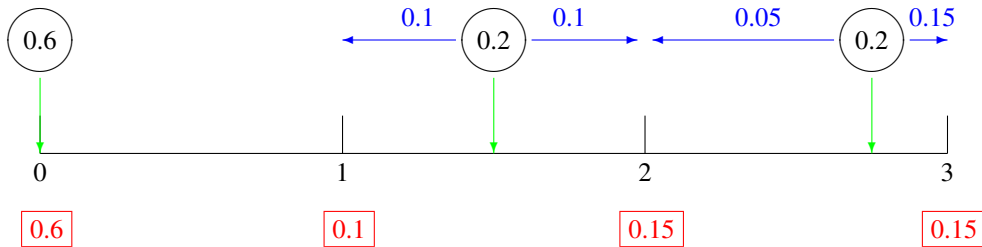
Um wiederum den Erwartungswert beizubehalten, werden auch die Wahrscheinlichkeiten aufgeteilt. Wir erhalten das folgende Gleichungssystem:

$$\left| \begin{array}{l} q_{jk}^- + q_{jk}^+ = q_{jk} \\ s_{jk}^- \cdot q_{jk}^- + s_{jk}^+ \cdot q_{jk}^+ = s_{jk} \cdot q_{jk} \end{array} \right| \Rightarrow \begin{cases} q_{jk}^- = \frac{s_{jk}^+ - s_{jk}}{s_{jk}^+ - s_{jk}^-} q_{jk} = \frac{s_{jk}^+ - s_{jk}}{\lambda} q_{jk} \\ q_{jk}^+ = \frac{s_{jk} - s_{jk}^-}{s_{jk}^+ - s_{jk}^-} q_{jk} = \frac{s_{jk} - s_{jk}^-}{\lambda} q_{jk} \end{cases}$$

**Beispiel: Diskretisierung**  $\lambda = 1$ 

- a)  $P[S_1 = 0] = 0.8$   $P[S_1 = 0.50] = 0.1$   $P[S_1 = 2.50] = 0.1$   
b)  $P[S_2 = 0] = 0.7$   $P[S_2 = 1.25] = 0.2$   $P[S_2 = 2.50] = 0.1$   
c)  $P[S_3 = 0] = 0.6$   $P[S_3 = 1.50] = 0.2$   $P[S_3 = 2.75] = 0.2$





	$x = 0$	$x = 1$	$x = 2$	$x = 3$
$P[S_1 = x]$	0.85	0.05	0.05	0.05
$P[S_2 = x]$	0.70	0.15	0.10	0.05
$P[S_3 = x]$	0.60	0.10	0.15	0.15

Anwendung von (14.1) mit  $k = 2$  und  $k = 3$  liefert die Verteilung von  $S = S_1 + S_2 + S_3$  in zwei Schritten:

$x$	$P[S_1 + S_2 = x]$	$P[S_1 + S_2 + S_3 = x]$	$P[S \leq x]$
0	0.5950	0.357000	0.357000
1	0.1625	0.157000	0.514000
2	0.1275	0.182000	0.696000
3	0.0900	0.180375	0.876375
4	0.0150	0.061500	0.937875
5	0.0075	0.038625	0.976500
6	0.0025	0.018000	0.994500
7		0.003625	0.998125
8		0.001500	0.999625
9		0.000375	1.000000

In einem realen Portfolio (z.B. eine Pensionskasse mit 1000 Mitgliedern) ist der Rechenaufwand sehr gross. Die Originalverteilung der  $S_k$  muss immer zuvor modifiziert werden. Um die Notation einfach zu halten, nehmen wir an, dass die  $s_{jk}$  bereits angepasst und ganze Zahlen sind (Dies lässt sich immer erreichen durch eine geeignete Wahl der monetären Einheit.). Daher nehmen wir der Einfachheit halber an, dass  $s_{jk} = j$ , wobei wir an die Möglichkeit denken, dass einige  $q_{jk}$  verschwinden.

## 14.4 Approximation der Gesamtschadenverteilung durch die zusammengesetzte Poissonverteilung

**Definition 14.4.1** (Erzeugende Funktion): Die *erzeugende Funktion*  $W_X$  einer Zufallsvariablen  $X$  für  $X(\Omega) \subseteq \mathbb{N}_0$  ist gegeben durch

$$W_X : z \mapsto E[z^X]$$

◇

### 14.4.1 Exkurs: Faltung von Massen

$\psi_\mu : \varphi \mapsto E^\mu[e^{i\varphi X}] = \hat{\mu}(\varphi)$  ist die Fouriertransformierte des Masses  $\mu$ . Für die Faltung zweier Masse gilt:

$$\widehat{\mu * \nu} = \hat{\mu} \cdot \hat{\nu}$$

Aus der komplizierten Faltung wird also eine einfache Multiplikation:

$$\underbrace{(\hat{\mu}(\varphi)) \circ (\hat{\nu}(\varphi))}_{\text{als Funktionen}} = \underbrace{\hat{\mu}(\varphi) \cdot \hat{\nu}(\varphi)}_{\text{punktweise Multiplikation}}$$

Die Faltung der Masse können wir dann einfach berechnen mit

$$\mu_1 * \mu_2 \cdots * \mu_n = (\hat{\mu}_1 \cdot \hat{\mu}_2 \cdots \hat{\mu}_n)^\vee$$

### 14.4.2 Herleitung

Wir nehmen an, dass die Verteilung die folgende Form besitzt:

$$P[S_k = 0] = p_k \quad P[S_k = j] = q_{jk} \quad j = 1, 2, \dots, m$$

Die erzeugende Funktion von  $S_k$  unter Berücksichtigung von  $p_k = 1 - \sum_{j=1}^m q_{jk}$  lautet:

$$W_{S_k}(z) = p_k + \sum_{j=1}^m q_{jk} \cdot z^j = \sum_{j=1}^m q_{jk}(z^j - 1) + 1 \quad (14.2)$$

d.h. wir können die momentenerzeugende Funktion einfach berechnen.

Die Verteilung von  $S_k$  wird approximiert durch die entsprechende zusammengesetzte Poissonverteilung mit

$$g_k(z) = \exp\left(\sum_{j=1}^m q_{jk}(z^j - 1)\right) \simeq 1 + \sum_{j=1}^m q_{jk}(z^j - 1) \quad (14.3)$$

Ein Vergleich von (14.2) und (14.3) zeigt, dass die Approximation gut ist, falls die  $q_{jk}$  klein sind.

### 14.4.3 Vorgehen

Wir ersetzen die exakte Schadenverteilung durch das entsprechende Poisson-Pendant und erhalten

$$W_S(z) = g(z) = \prod_{k=1}^n g_k(z) = \exp\left(\sum_{j=1}^m q_j(z^j - 1)\right), \text{ wobei } q_j = \sum_{k=1}^n q_{jk} \quad (14.4)$$

Dies bedeutet aber, dass  $S$  durch die zusammengesetzte Poissonverteilung approximiert wird. Das entspricht der Modellvorstellung

$$S = X_1 + \cdots + X_N$$

wobei  $N$  Anzahl Schäden  
 $X_i$  Höhe des  $i$ -ten Schadens  
 $N \sim \text{Pois}(q)$  mit  $q = q_1 + \cdots + q_m$

Die gemeinsame Verteilung der  $X_j$  (Schadenhöhenverteilung) ist gegeben durch die Formel

$$p(j) = \frac{q_j}{q} \quad j = 1, \dots, m$$

wobei  $p(j)$  = Wahrscheinlichkeit, dass ein Schaden den Betrag  $j$  hat.

$$\Rightarrow P[S = x] = \sum_{k=0}^{\infty} p^{*k}(x) e^{-q} \frac{q^k}{k!}$$

**Beispiel** (Fortsetzung):

$S_3$	—	0.05	—	0.05	—	0.05
$S_2$	—	0.15	—	0.10	—	0.05
$S_1$	—	0.10	—	0.15	—	0.15

$\downarrow \qquad \qquad \downarrow \qquad \qquad \downarrow$   
 $q_1 \qquad \qquad q_2 \qquad \qquad q_3$

$$\Rightarrow p(1) = \frac{30}{85} \quad p(2) = \frac{30}{85} \quad p(3) = \frac{25}{85}$$

Der obige Ansatz heisst *kollektives Modell*.

**Bemerkung zu (14.4):** Die obige Formel für die erzeugende Funktion von  $S$  macht Sinn. Denn die Abbildung

$$\Psi : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$$

$$f \mapsto \hat{f}$$

ist eine Isometrie. Auf Grund des Exkurses wissen wir, dass gilt

$$(f_1 * f_2 * \dots * f_n)^\wedge = \prod_{k=1}^n \hat{f}_k.$$

Der Produktoperator ist stetig mit Norm  $\leq 1$ . Deshalb gilt

$$\|\hat{s}_k - \hat{g}_k\| \leq \varepsilon \Rightarrow \left\| \prod_{k=1}^n (s_k - g_k) \right\| \leq \prod_{k=1}^n \|s_k - g_k\|.$$

◇

## 14.5 Rekursive Berechnung der zusammengesetzten Poissonverteilung

**Bezeichnungen:**

$$f(x) := P[S = x]$$

$$F(x) := P[S \leq x]$$

◇

Es gilt  $F(0) = f(0) = P[S = 0] = P[N = 0] = e^{-q}$

**Panjer Rekursion**

$$f(x) = \frac{1}{x} \sum_{j=1}^m j \cdot q_j \cdot f(x-j), \quad x = 1, 2, 3, \dots$$

Mit dieser Formel können wir  $f(0), f(1), \dots$  in dieser Reihenfolge berechnen.

**Beispiel** (Fortsetzung):

$$f(0) = e^{-0.85}$$

$$f(1) = 0.3 \cdot f(0)$$

$$f(2) = \frac{1}{2}(0.3 \cdot f(1) + 0.6 \cdot f(0))$$

$$f(3) = \frac{1}{3}(0.3 \cdot f(2) + 0.6 \cdot f(1) + 0.75 \cdot f(0))$$

$$f(4) = \frac{1}{4}(0.3 \cdot f(3) + 0.6 \cdot f(2) + 0.75 \cdot f(1))$$

etc.

Die numerischen Resultate sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt, wobei die Partialsummen  $F(x)$  natürlich auch rekursiv berechnet werden können.

$x$	$f(x)$	$F(x)$	$x$	$f(x)$	$F(x)$
0	0.427415	0.427415	10	0.001302	0.998886
1	0.128224	0.555639	11	0.000645	0.999531
2	0.147458	0.703098	12	0.000277	0.999808
3	0.147244	0.850342	13	0.000111	0.999920
4	0.057204	0.907546	14	0.000049	0.999969
5	0.043220	0.950766	15	0.000019	0.999988
6	0.026287	0.977053	16	0.000007	0.999995
7	0.010960	0.988014	17	0.000003	0.999998
8	0.006434	0.994448	18	0.000001	0.999999
9	0.003136	0.997584			

Vergleichen wir für einige  $x$ -Werte:

$x$	$f(x)$	$F(x)$	$P(S_1 + S_2 + S_3 \leq x)$
0	0.427415	0.427415	0.357000
1	0.128224	0.555639	0.514000
2	0.147458	0.703098	0.696000
4	0.057204	0.907546	0.937875
8	0.006434	0.994448	0.999625
16	0.000007	0.999995	1

◇

Nachdem wir dieses Beispiel berechnet haben, wollen wir die Panjer-Formel beweisen.

**Beweis der Panjer-Formel:**

Wir betrachten die erzeugende Funktion von  $S$ . Einerseits ist definitionsgemäss

$$g(z) = \sum_{x=0}^{\infty} f(x)z^x$$

Andererseits gilt

$$\log g(z) = \sum_{j=1}^m q_j(z^j - 1)$$

weil

$$g(z) = \prod_{k=1}^n g_k(z) = \exp\left(\sum_{j=1}^m q_j(z^j - 1)\right)$$

Aus der Identität

$$\frac{d}{dz}g(z) = g(z) \frac{d}{dz} \log g(z)$$

folgt daher, dass

$$\sum_{x=1}^{\infty} x f(x) z^{x-1} = \left( \sum_{y=0}^{\infty} f(y) z^y \right) \left( \sum_{j=1}^m j q_j z^{j-1} \right)$$

Dies bedeutet, dass die beiden Potenzreihen übereinstimmen. Folglich stimmen auch die Koeffizienten überein. Ein Vergleich der Koeffizienten von  $z^{x-1}$  ergibt

$$x f(x) = \sum_{j=1}^m f(x-j) j q_j$$

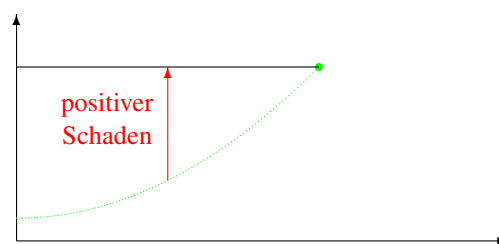
womit die Behauptung bewiesen ist.

Bis jetzt haben wir stillschweigend vorausgesetzt, dass nur positive Schäden auftreten. Falls die Schäden auch negativ sein können, zerlegen wir den Gesamtschaden in  $S = S^+ - S^-$ , wobei  $S^+$  die Summe der positiven Schäden und  $S^-$  die Summe der Absolutbeträge der negativen Schäden ist. Man kann zeigen, dass  $S^+$  und  $S^-$  auch zusammengesetzte Poissonverteilungen haben, und dass  $S^+$  und  $S^-$  unabhängig sind. Nun berechnet man getrennt die Verteilungen von  $S^+$  und  $S^-$ , beispielsweise unter Anwendung der Panjer-Formel, und erhält schliesslich die Verteilung von  $S$  durch Falten der Verteilungen von  $S^+$  und  $S^-$ .  $\diamond$

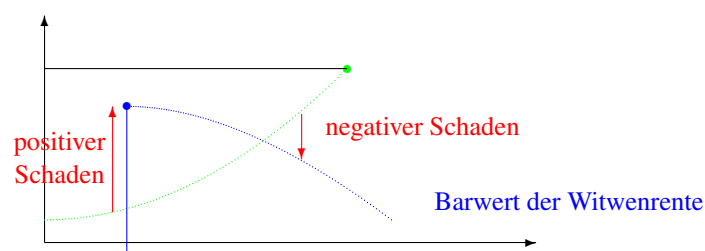
**Frage:** Was bedeutet “positive” und “negative” Schäden?

**Antwort:**

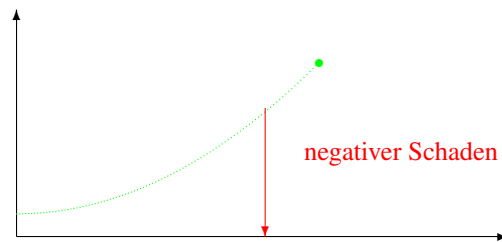
*Gemischte Versicherung:* Der Schaden ist immer positiv:



*Finanzierung einer Altersrente:* Es können positive und negative Schäden auftreten.

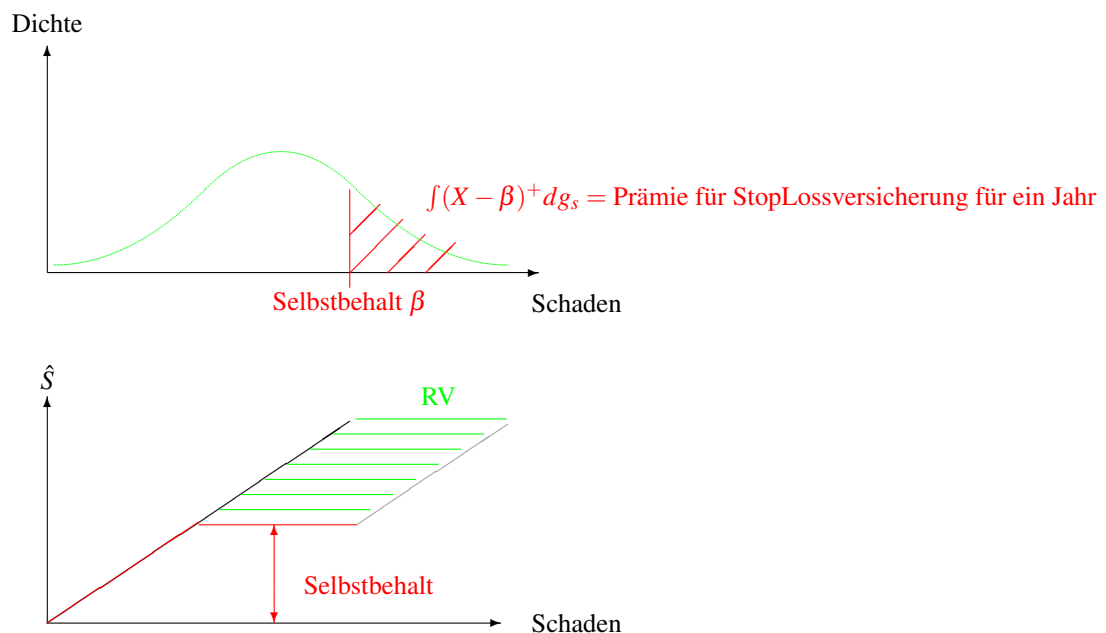


*Erlebensfallversicherung:* Hier treten nur negative Schäden auf.



## 14.6 Rückversicherung

### 14.6.1 Gesamtschaden



Bei einer StopLoss-Dekung mit Selbstbehalt  $\beta$  wird der allfällige Exzess des Gesamtschadens über den Selbstbehalt vergütet, d.h. es ist  $R = (S - \beta)^+$ , und

$$\hat{S} = S + \Pi - (S - \beta)^+ = \begin{cases} S + \Pi & \text{falls } S < \beta \\ \beta + \Pi & \text{falls } S \geq \beta \end{cases}$$

Dabei bezeichnen  $\Pi$  die Rückversicherungsprämie und  $(S - \beta)^+ =: R$  die Rückversicherungsretention (Rückversicherungsdeckung).

**Beispiel** (Fortsetzung): Excess of Loss Versicherung

Prämie  $\Pi = 1.1$   
Selbstbehalt  $\beta = 3$

Falls der ursprüngliche Gesamtschaden grösser als 3 ist, fällt er nur als 3 ins Gewicht. Die Verteilung von  $\hat{S}$  erhält man direkt aus der Verteilung von  $S$ :

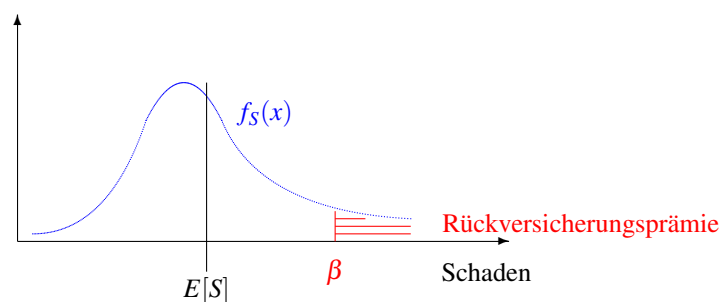
$x$	$f(x)$	$F(x)$
1.1	0.427415	0.427415
2.1	0.128224	0.555639
3.1	0.147458	0.703098
4.1	0.296903	1.000000

Der Erwartungswert von  $\hat{S}$  ist gross,  $E[\hat{S}] = 2.41$ , dafür ist das “Risiko” auf ein Mindestmass reduziert.  $\diamond$

### 14.6.2 Berechnung der Netto-StopLoss-Prämie $\rho(\beta)$

**Frage:** Wie hoch ist die Rückversicherungsprämie?

**Antwort:**



**Herleitung:**

Es ist

$$\rho(\beta) = E[(S - \beta)^+] = \int_{\beta}^{\infty} (x - \beta) dF(x).$$

Partielle Integration führt auf die Formel

$$\rho(\beta) = \int_{\beta}^{\infty} [1 - F(x)] dx.$$

Für ganzzahlige Werte von  $\beta$  ist also

$$\rho(\beta) = \sum_{x=\beta}^{\infty} [1 - F(x)],$$

woraus sich die Rekursionsformel

$$\rho(\beta + 1) = \rho(\beta) - [1 - F(\beta)]$$

ergibt. Indem wir mit  $\rho(0) = E[S]$  beginnen, können wir sukzessive  $\rho(1), \rho(2), \rho(3), \dots$  berechnen. Natürlich kann dieser Prozess mit der rekursiven Berechnung von  $F(x)$  kombiniert werden.

**Beispiel** (Fortsetzung): Wir erhalten die folgenden Werte:



$\beta$	$\rho(\beta)$
0	1.650000
1	1.077415
2	0.633054
3	0.336152
4	0.186494
5	0.094040
6	0.044807
7	0.021860
8	0.009874
9	0.004322
10	0.001906

◇

**Bemerkungen:**

- Wir haben hier das *Erwartungswertprinzip* verwendet. Dies ist jedoch nicht üblich in der Rückversicherung, weil der Erwartungswert zu klein ist, um die Schwankungen zu berücksichtigen. Man verwendet daher typischerweise das *Varianzprinzip*:

$$\Pi = E[(S - \beta)^+] + \gamma \text{Var}((S - \beta)^+)$$

- Die tatsächliche Prämie  $\Pi$  ist bedeutend grösser als die Nettoprämie.

◇

**Beispiel (Fortsetzung):**

$$\left. \begin{array}{l} \Pi = 1.1 \\ \rho(3) = 0.336152 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Zuschlag} = 227\%$$

◇

**Bemerkung:** Die Kenntnis der Nettoprämie ermöglicht uns eine schnelle Bestimmung des erwarteten Gesamtschadens im Selbstbehalt. Es ist

$$E[\hat{S}] = E[S] + \Pi - \rho(\beta).$$

◇

**Beispiel (Fortsetzung):**  $E[\hat{S}] = 1.65 + 1.1 - 0.34 = 2.41.$

◇

## 14.7 Numerisches Beispiel

Das folgende Beispiel stammt von einer realen Pensionskasse mit 656 anwartschaftlich versicherten Personen unter Risiko, mit einem erwarteten Schaden von 2'119'206 CHF. Die Verteilungsfunktion und die Stoplossprämie entsprechen in diesem Fall:

beta = 0.20 x E[S]	Index	425	Wkeit	0.982971	E((S-beta)+)	2'115'047.86
beta = 0.40 x E[S]	Index	849	Wkeit	0.922806	E((S-beta)+)	2'075'156.27
beta = 0.60 x E[S]	Index	1273	Wkeit	0.803705	E((S-beta)+)	1'947'054.03
beta = 0.80 x E[S]	Index	1696	Wkeit	0.639189	E((S-beta)+)	1'701'993.42
beta = 1.00 x E[S]	Index	2120	Wkeit	0.461675	E((S-beta)+)	1'363'746.50
beta = 1.20 x E[S]	Index	2544	Wkeit	0.304049	E((S-beta)+)	997'525.12
beta = 1.40 x E[S]	Index	2968	Wkeit	0.183917	E((S-beta)+)	668'061.26
beta = 1.60 x E[S]	Index	3392	Wkeit	0.103042	E((S-beta)+)	412'293.13
beta = 1.80 x E[S]	Index	3816	Wkeit	0.053911	E((S-beta)+)	236'239.61
beta = 2.00 x E[S]	Index	4239	Wkeit	0.026579	E((S-beta)+)	126'801.03
beta = 2.20 x E[S]	Index	4663	Wkeit	0.012386	E((S-beta)+)	63'995.51

$\text{beta} = 2.40 \times E[S]$	Index 5087	Wkeit 0.005495	$E((S-\text{beta})^+)$	30'592.61
$\text{beta} = 2.60 \times E[S]$	Index 5511	Wkeit 0.002332	$E((S-\text{beta})^+)$	13'924.20
$\text{beta} = 2.80 \times E[S]$	Index 5935	Wkeit 0.000950	$E((S-\text{beta})^+)$	6'061.21
$\text{beta} = 3.00 \times E[S]$	Index 6359	Wkeit 0.000373	$E((S-\text{beta})^+)$	2'533.21
$\text{beta} = 3.50 \times E[S]$	Index 7418	Wkeit 0.000031	$E((S-\text{beta})^+)$	245.07
$\text{beta} = 4.00 \times E[S]$	Index 8478	Wkeit 0.000002	$E((S-\text{beta})^+)$	19.52

- Einzelschadenverteilung (Figur D)
- Gesamtschadenverteilung (Figur 14.7)
- Kumulative Schadenverteilung (Figur 14.7)
- Stop-Loss-Prämie (Figur 14.7)

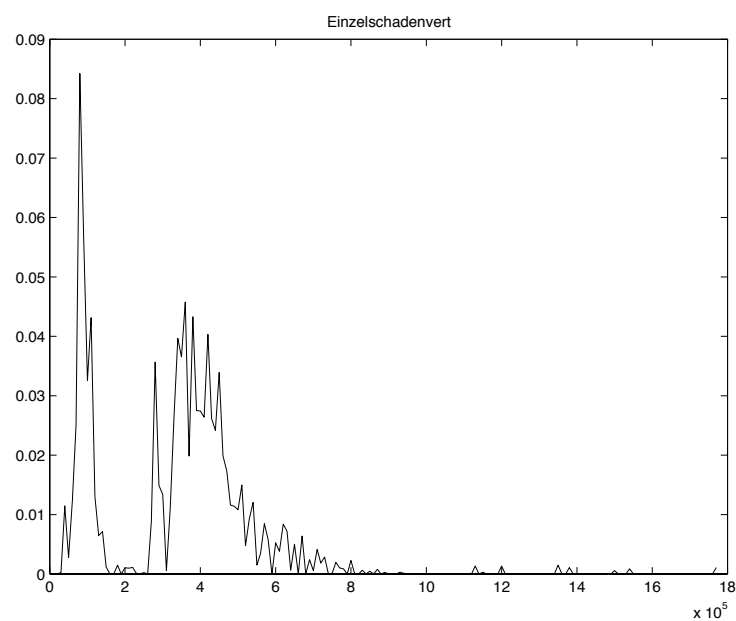


Abbildung 14.1: Einzelschadenverteilung.

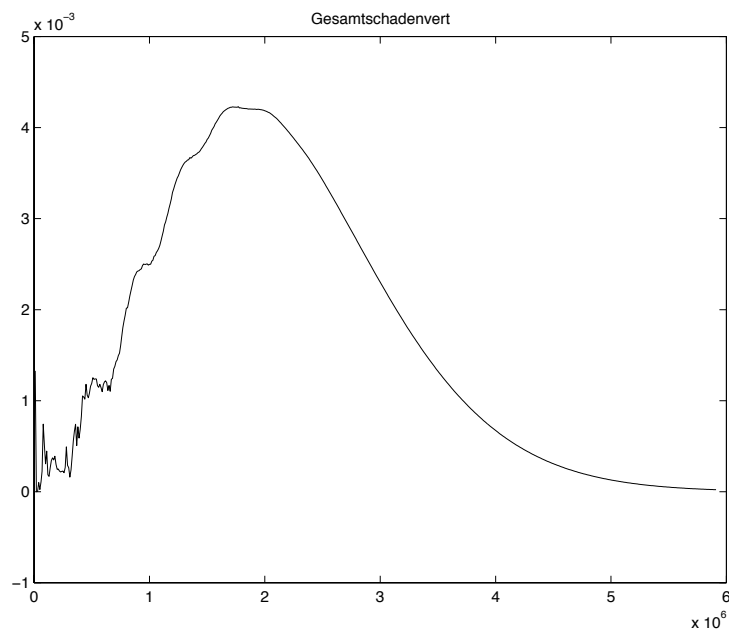


Abbildung 14.2: Gesamtschadenverteilung.

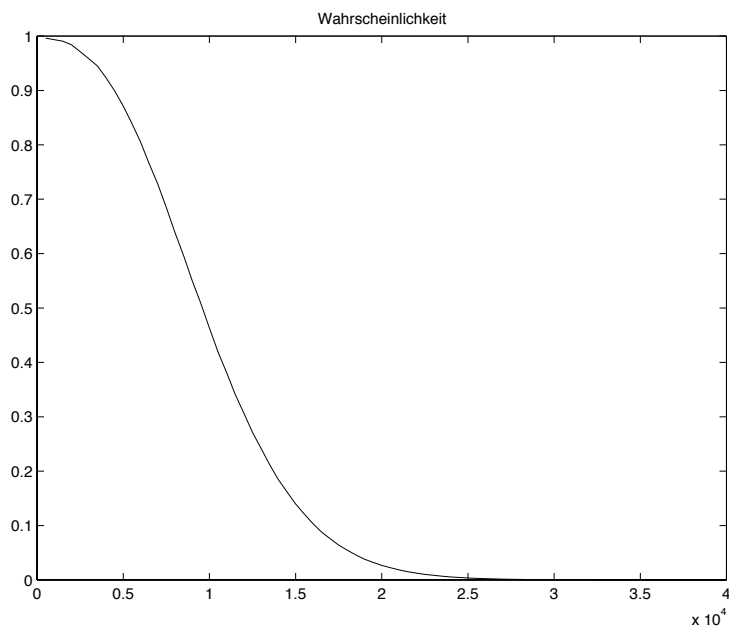


Abbildung 14.3: Kumulative Schadenverteilung.

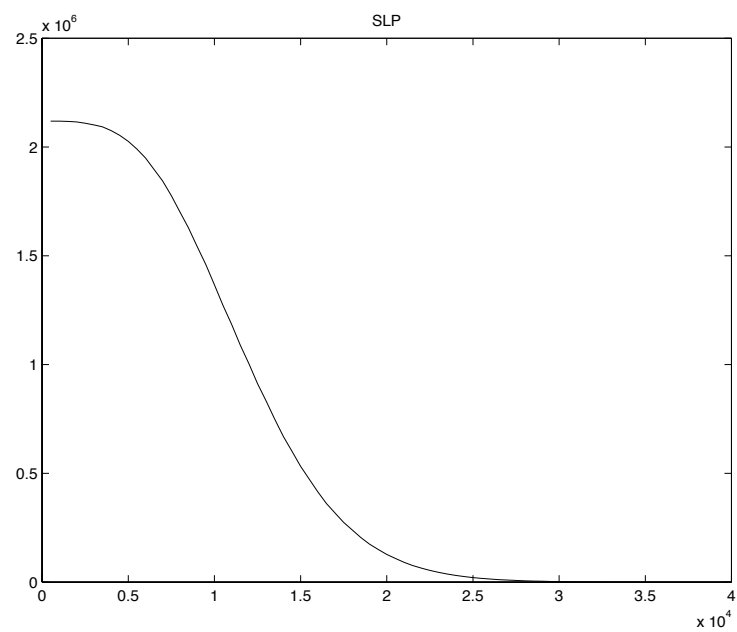


Abbildung 14.4: Stop Loss Prämie.

# Kapitel 15

## Zur Berechnung des Embedded Value

### 15.1 Einleitung

Der Embedded Value (EV) und seine Entwicklung über mehrere Jahre dient zur Beurteilung der Leistung (Performance) einer Lebensversicherungsgesellschaft und kann in zwei Teile aufgespalten werden. Dies ist auf der einen Seite der Barwert der künftigen Gewinne, welcher durch das eigentliche, auslaufende Versicherungsgeschäft induziert wird. Um diese Grösse zu bestimmen, welche in angelsächsischen Ländern mit PVFP (present value of future profits) bezeichnet wird, sind Modellrechnungen nötig. Neben dem PVFP setzt sich der Embedded Value auch aus den dem Aktionär gehörenden Mitteln zusammen, welche in der Vergangenheit durch die Eigenmittel und nicht ausgeschüttete Betriebsgewinne geäuft wurden, sowie aus demjenigen Teil der stillen Reserven (d.h. Differenz zwischen den Marktwerten und den Buchwerten der Kapitalanlagen), welcher dem Aktionär zugeordnet werden kann. Dieses Aktionärskapital wird in der angelsächsischen Welt auch mit “Adjusted Net Asset Value” (ANAV) bezeichnet und es gilt:

$$EV = PVFP + ANAV$$

Das ANAV kann aus freiem (ungebundenem) oder für die Abwicklung des Bestandes gebundenem Kapital bestehen, nach Berücksichtigung der durch die Gesellschaft zu entrichtenden Steuern. Das freie Kapital könnte die Gesellschaft dem Aktionär unmittelbar zurückzahlen; es steht ihr aber bei Nichtrückzahlung auch für die Finanzierung ihrer langfristigen Geschäftstätigkeit frei zur Verfügung. (Nur muss sie darauf eine entsprechende, risikoadjustierte Kapitalanlagerendite erwirtschaften.)

Beim Embedded Value geht es um die Darstellung des wirtschaftlichen Wertes des *bestehenden* Portefeuilles; es werden also keine zukünftigen Neugeschäftsabschlüsse berücksichtigt. Es handelt sich somit nicht um die Marktbewertung der gesamten Unternehmung (resp. Appraisal Value = EV + Goodwill).

Der Berechnung des Embedded Values liegt ein auslaufender Bestand zugrunde (Run-off-Annahme). Als Basis für die Festlegung der Annahmen für die Projektionen der zukünftigen Ergebnisse (nach statutarischen Grundsätzen) wird hingegen das “going concern” Prinzip angewendet; d.h. es wird eine Fortsetzung der Geschäftstätigkeit stipuliert. So werden insbesondere die Kostenannahmen aufgrund der heutigen Infrastruktur festgelegt. Der Embedded Value wird stark durch die getroffenen Berechnungsannahmen beeinflusst. Annahmen und insbesondere deren Änderungen von Jahr zu Jahr sind jedenfalls bei gesellschaftsinternen Präsentationen des Embedded Values offenzulegen, und ggf. auch bei einer allfälligen Publikation nach aussen.

Die mit dem Diskontierungszinssatz oder Risk Discount Rate ausgeführte Berechnung des Barwertes der zukünftigen Ergebnisse entspricht dem Barwert der zukünftigen Erträge abzüglich dem Barwert der zukünftigen Aufwände, wobei alle Projektionsannahmen so realistisch wie möglich zu treffen sind. D.h. die Annahmen sollten weder über- noch unterbewertet werden. Die Annahmen beinhalten in der Regel keine Sicherheitsmargen und werden im angelsächsischen Raum als “best estimate” bezeichnet.

Grundsätzlich sollten bei einer Berechnung des Embedded Value folgende Punkte - soweit sie von Bedeutung sind und die zukünftigen, projizierten Ergebnisse beeinflussen - mitberücksichtigt werden:

- explizit formulierte aufsichtsrechtliche Rahmenbedingungen wie z.B. Gesetzestexte, Verordnungen, Erlasse, etc.,
- implizit angewendete Aufsichtsregeln (Usancen der Behörden),
- Statuten der Lebensversicherungsgesellschaft,
- angewendete Bilanzierungsrichtlinien,
- Geschäftspläne und Geschäftspraxis,
- Marktregeln, Usancen.

Unter die oben aufgeführten Punkte fallen auch die angemessenen Erwartungen der Versicherungsnehmer (versprochene oder in Aussicht gestellte Endleistungen resp. Policyholder Reasonable Expectations (PRE)) sowie die angewendete Praxis bei der Festlegung der jährlichen Überschussanteile und Überschussgutschriften (Geschäftsplan). All diese Aspekte, welche durch das bestehende Portefeuille generiert werden, sind im Embedded-Value-Modell zu berücksichtigen.

Ebenso gehen die Aktuarien bei der Reservierung am Jahresabschluss nach einer gewissen Systematik vor und bilden Verstärkungen (wie Langlebigkeitsreserven, Pauschalreserven, Schwankungsreserven, etc.)

Sie binden ein gewisses Kapital in der Zukunft, welches erst später in den Projektionen freigegeben wird und erst dann dem Ergebnis wieder zufließt, und somit heute nicht zum Nominalwert zur Verfügung steht. Das gebundene Kapital erzielt als Kapitalanlagerendite den durch die Gesellschaft erwirtschafteten Marktzinssatz. Weil der Diskontierungszinssatz in der Regel grösser ist als der Marktzinssatz, kann man auch sagen, dass das heutige Kapital um diejenigen Opportunitätskosten reduziert wird, welche durch den sogenannten "lock-in" Effekt verursacht wird.

Ziel dieses Modells ist es also, die Geschäftspolitik zu modellieren und transparent zu machen.

### 15.1.1 Unterteilung des Embedded Value

Der Embedded Value wird unterteilt in den PVFP und in das ANAV. Unter dem PVFP verstehen wir den Barwert der künftigen Erträge. Das ANAV berechnet sich ausgehend von den folgenden zwei Werten:

- "equity" (ausgewiesenes Eigenkapital)
- "adjustments" (Anpassungen zum Eigenkapital)

durch

$$\text{ANAV} = \text{equity} + \text{adjustments}$$

Die Adjustments beinhalten unter anderem:

- Stille Reserven, insbesondere den Aktionären zugeordnete Bewertungsreserven auf den Kapitalanlagen,
- Rückstellungen, welche an die Abwicklung des Bestandes gebunden sind, aber dem Aktionär zugeordnet sind, usw.

Zeit	$t$	$t + \Delta t$	
$t$	$V_i(t) + P$		Ertrag: DK und Prämie
$t$	$-a_i^{Pre}(t)$		Aufwand: Rente
$t$	-Kosten		Aufwand: Kosten
$t$	$\pm \dots$		Andere
$t + \Delta t$		$-V_j(t + \Delta t)$	Aufwand: DK
$t + \Delta t$		+ Kapitalertrag	Ertrag: aus Kapitalanlagen
$t + \Delta t$		$-a_{ij}^{Post}(t)$	Aufwand: Versicherungsleistungen
$t + \Delta t$		- Überschüsse	Aufwand: Überschüsse
$t + \Delta t$		$\pm \dots$	Andere

Tabelle 15.1: Zahlungsströme zur Berechnung des Gewinns in einem Policenjahr

### 15.1.2 Present Value of Future Profits

In diesem Abschnitt geht es darum, eine Einführung in diese Thematik zu geben. Hierzu ist es notwendig, die beiden prinzipiell verschiedenen Teile des Embedded Value zu unterscheiden. Beim PVFP handelt es sich um eine Zahl, welche aus langfristigen Modellrechnungen stammt. Dem gegenüber ist das ANAV eine Momentaufnahme im Berechnungszeitpunkt des EV.

Die Idee hinter der Berechnung des PVFP besteht darin, sich auf den Standpunkt der Aktionäre zu stellen und für jedes Policenjahr den erwarteten statutarischen Gewinn oder Verlust zu berechnen. Hierzu sollten Effekte berücksichtigt werden, welche den Gewinn oder Verlust beeinflussen. Aus dieser Aussage wird deutlich, dass zur Berechnung des PVFP ein der Problemstellung angepasstes Modell anzuwenden ist. Dieses Modell ist in erster Linie von den betrachteten Produkten abhängig. Ferner sollte es das Managementverhalten sowie die Aufteilung der Kapitalgewinne zwischen dem Aktionär und dem Versicherungsnehmer widerspiegeln.

Zur Herleitung eines Modells für den PVFP stellt man sich auf den Standpunkt der Versicherungsgesellschaft und schaut, was sich im Laufe eines Policenjahres ereignet. Zu Beginn des Jahres (oder des betrachteten Zeitintervalls) erhält die Versicherungsgesellschaft das Deckungskapital und die Prämie. Aus diesem Geld muss sie den Aufwand für den Versicherungsbetrieb und die Versicherungsleistungen finanzieren, welcher dem Zeitintervall zugeordnet ist. Am Ende des Jahres kann sie den Ertrag auf den Kapitalanlagen hinzuzählen, muss aber das Deckungskapital zurückgeben. Tabelle 15.1 zeigt diesen Sachverhalt auf.

Hierbei ist zu beachten, dass Tabelle 15.1 den Sachverhalt in diskreter Zeit darstellt und die Granularität in der Zeitachse mit einem Jahr sehr gross ist. Die entsprechenden Formeln gelten natürlich auch für kleinere Zeitintervalle. Viele Projektionswerkzeuge verwenden als Intervall einen Monat. Zudem ist an dieser Stelle darauf hinzuweisen, dass die Leistungen, Prämien und Deckungskapitalien die in der Vergangenheit gewährten Überschüsse berücksichtigen.

Nun muss der Gewinn, respektive Verlust pro Jahr berechnet werden. Wir bezeichnen ihn mit  $PL_t(i, j)$ , wobei er von zusätzlichen Attributen  $i, j$  abhängig sein kann (Zustandswechsel von  $i$  nach  $j$ ). Da der PVFP den Barwert dieser Zahlungsströme darstellt, ist es in einem nächsten Schritt notwendig, den Diskontierungsfaktor  $v_t = 1/(1 + rdr_t)$  für das Policenjahr  $[t, t + 1]$  zu definieren. Der Diskontierungsfaktor wird mit Hilfe der Risk Discount Rate ( $rdr_t$ ) berechnet. Nun ist es möglich, den Barwert der zukünftigen Gewinne wie folgt zu berechnen:

$$PVFP = \sum_{t=t_0}^{\omega} \prod_{\tau=t_0}^{\tau < t} v_{\tau} \sum_i p_{i_0, i}(t_0, t) \sum_j p_{i, j}(t, t + 1) PL_t(i, j)$$

Für normale Kapitalversicherungen genügt es, die drei Zustände lebend, Storno und tot zu betrachten. Für den

PVFP ergibt sich hier:

$$PVFP = \sum_{t=t_0}^{\omega} \prod_{\tau=t_0}^{\tau < t} v_{\tau} (1 - {}_tq_{x_0} - {}_ts_{x_0}) \times \left( \begin{aligned} &(1 - q_{x_0+t} - s_{x_0+t}) PL_t(\text{Überleben}) \\ &+ q_{x_0+t} PL_t(\text{Tod}) \\ &+ s_{x_0+t} PL_t(\text{Rückkauf}) \end{aligned} \right),$$

wobei  $q_x$  die Sterblichkeit und  $s_x$  die Stornowahrscheinlichkeit bezeichnet. (Vergl. Abschnitt 15.5)

## 15.2 Einflussgrößen auf den PVFP und deren Bestimmung

### 15.2.1 Einleitung

In diesem Abschnitt werden Hinweise zur Bestimmung der Parameter und Effekte gegeben, welche den PVFP beeinflussen. Hierbei werden die folgenden Größen betrachtet:

- Risk Discount Rate ( $rdr$ ),
- Kapitalanlagerendite,
- Überschusszuweisung,
- Inflation,
- Besoldungsentwicklung,
- Biometrische Grundlagen II. Ordnung,
- Steuern,
- Storno (Rückkauf, Kündigung oder Prämienfreistellung für Verträge, Dienstaustritte in der Kollektivversicherung),
- Kosten II. Ordnung,
- Neueintritte in der Kollektivversicherung,
- Rückversicherung,
- Reserveverstärkungen auf der Passivseite,
- Freie Überschussreserve resp. Überschussfonds.

Generell ist festzuhalten, dass die Parameter weder im Widerspruch zur Praxis der Gesellschaft noch zu den allgemeinen wirtschaftlichen Rahmenbedingungen stehen sollten. Insbesondere sollte das bisherige resp. zukünftige Verhalten des Managements modelliert werden. Zudem ist die Konsistenz der verschiedenen Parameter untereinander wesentlich. Dies bedeutet, dass die Kapitalanlagerendite nicht von den Ertragsannahmen für die Überschussgewährung abweichen sollte. Da der PVFP auf gewisse Parameter sehr sensitiv reagiert, sollten diese mit der nötigen Umsicht bestimmt werden. Dies bedeutet insbesondere, dass der Einfluss der verschiedenen Parameter auf das Modell geprüft werden muss und dass diejenigen Parameter mit besonderer Sorgfalt festzulegen sind, welche den PVFP besonders beeinflussen. (Siehe auch Abschnitt 15.5.2)

Bei vielen der obigen Festlegungen wird Bezug auf die Planung der Gesellschaft genommen. Da solche Planungen normalerweise einen Zeithorizont von vielleicht 5 Jahren haben, ist es notwendig, die Parameter nach Ablauf dieser



Zeitperiode anders zu bestimmen. Hierbei sollen die Durchschnittswerte der Vergangenheit für die entsprechenden Größen angewendet werden. Dies bedeutet, dass für Zeiträume ausserhalb des Planungshorizonts die Modelle konsistent weitergeführt werden.

Die Regeln für die Bestimmung des Embedded Value müssen im Falle eines international operierenden Konzerns zentral und konsistent vorgegeben werden (z.B. Herleitung der  $rdr$ , Kapitalanlagerendite, Solvamarge, Kosten). Die Überdeckung der Solvamarge ist von der Gesellschaft festzulegen.

Da die Parameter zur Berechnung des Embedded Value mit der Zeit ändern, sollte der neu berechnete Embedded Value zusätzlich mit dem alten Parametersatz berechnet werden. So wird der Sprung des Embedded Value, welcher durch den Parameterwechsel induziert wird, quantifiziert und analysiert (Value Added Analysis).

Bei Verwendung einer Verdichtung (z.B. Model Office) sollten die Modelpoints dergestalt gewählt werden, dass der durch die Vergröberung der Realität eingegangene Fehler für die zu veröffentlichenden Resultate relativ klein bleibt.

Bei den folgenden Betrachtungen gehen wir vom Embedded Value nach Steuern aus.

### 15.2.2 Risk Discount Rate

Die Risk Discount Rate definiert den Ertrag, welcher seitens der Investoren für die Anlage in die Lebensversicherungsgesellschaft erwartet wird. Sie richtet sich nach der risikofreien Kapitalanlagerendite (z.B. 10 Jahres Swap), zuzüglich einer Risikoprämie für die Investition in die betrachtete Versicherungsgesellschaft. (Die Idee zur Bestimmung der Risk Discount Rate liegt im Capital Asset Pricing Modell begründet: Der Investor erwartet einen Anlageertrag, welcher einer ähnlich risikoreichen Direktanlage entspricht.)

Die Risikoprämie bestimmt sich aufgrund der Gesellschaftsstruktur und den von der Gesellschaft eingegangenen Risiken. (Beispiel: Eine risikofreie Kapitalanlagerendite von 3.5% und eine Risikoprämie von ebenfalls 3.5% ergeben eine Risk Discount Rate von 7%). Da der Embedded Value massgebend von der Risk Discount Rate abhängt, ist es für diesen Parameter sinnvoll, verschiedene Szenarien zu berechnen wie z.B.  $rdr \pm D$ , wobei  $D = 0.5\%$  bis  $1.0\%$ .

Eine Gesellschaft, welche risikoreichere und volatilere Aktivitäten eingeht (z.B. viel Invaliditäts- oder Krankengeschäft oder ein hoher Aktienanteil), sollte eine höhere  $rdr$  anwenden als diejenige Gesellschaft, welche ausschliesslich sicherer zu bewertende Todesfallrisikoversicherungen verkauft.

### 15.2.3 Kapitalerträge

#### Grundlagen

1. Bei der Bestimmung der Kapitalerträge zur Berechnung des PVFP gehen wir davon aus, dass sich die Lebensversicherungsunternehmung als strategischer Kapitalanleger verhält. Dies impliziert die Definition einer langfristig anzustrebenden Asset Allocation. Die effektive Aufteilung der Kapitalanlagen auf die relevanten Anlagekategorien wird aufgrund spezieller Vorkommnisse selbstverständlich um die langfristig vorgesehenen Werte schwanken. Ziel der Anlagestrategie ist eine für die Lebensversicherungsunternehmung optimale Kombination von Ertrag, Sicherheit, Risiko und Liquidität der Kapitalanlagen.

2. Folgende Kapitalanlagekategorien werden in dieser Unterlage berücksichtigt

- Obligationen,
- Hypotheken,
- Policendarlehen,
- Aktien,
- Immobilien.

Meistens werden zusätzlich Mittel in Geldmarktanlagen gehalten und durch konsolidierte Beteiligungen gebunden. Auf diese Anlagekategorien gehen wir im folgenden nicht näher ein. Diese Einschränkung ist in einer ersten Näherung vertretbar, da hierin meist nur ein geringer Anteil der Mittel angelegt ist. Allerdings gewinnt die Bewertung von Beteiligungen eine grundlegende Relevanz, falls für Konzerne konsolidierte Embedded Values berechnet werden sollen.

Kapitalanlagen in fremder Währung werden nicht gesondert behandelt, da diese Diversifikation langfristig lediglich der Risikominderung dienen kann.

Festhypotheken werden wie Obligationen zum Nominalwert behandelt.

3. Die Erträge bzw. Renditen der Kapitalanlagen setzen sich im allgemeinen aus direkten Erträgen (z.B. Dividendenzahlungen) und aus indirekten Erträgen (z.B. Umbewertungen) zusammen.

Zur Bestimmung der Umbewertungen ist vorgängig die Bewertungsmethode festzulegen. Hierbei ist zwischen Marktbewertung einerseits und modellmässigen Bewertungen andererseits zu unterscheiden.

Für gängig handelbare Obligationen und Aktien liegen für jeden Zeitpunkt Marktbewertungen vor.

Als modellmässige Bewertungen sind in der Schweiz für Obligationen die Amortized-Cost-Methode relevant und für Aktien das Niederstwert-Prinzip. Beiden Methoden gemeinsam ist, dass jederzeit eine modellmässige Bewertung möglich ist.

Mit der Amortized-Cost-Methode liegt eine modellmässige Bewertungsmethode vor, die gleichzeitig eine Systematik festlegt, mit der die Differenz zwischen Rückzahlungswert und Anschaffungswert gleichmässig auf die Restlaufzeit des Wertpapiers verteilt wird. Unabdingbare Voraussetzung für diese Methode ist der vertraglich festgelegte Rückzahlungswert und das vertraglich festgelegte Rückzahlungsdatum.

Bei Aktien sind diese Voraussetzungen nicht erfüllt. Falls als modellmässige Bewertung das Niederstwert-Prinzip gewählt und der Marktwert über dem Anschaffungswert liegt, so besteht die ausgewiesene Rendite zunächst allein aus der direkten Rendite. Die indirekte Rendite kann lediglich durch den Verkauf der Aktie realisiert werden. Hierdurch ergibt sich, dass die Rendite eines Aktienportfolios abhängig wird von diskretionären Kapitalanlageentscheiden. Eine gewisse Willkür ist bei Anwendung dieser Bewertungsmethode unvermeidbar. In gewissem Umfang können ähnliche Probleme auch bei sehr langfristigen (z.B. 50-jährigen) Obligationen auftreten.

4. Zur Zeit weisen die meisten Schweizer Lebensversicherungen wachsende Kapitalanlagebestände aus; das grundsätzliche Anlageverhalten ist also durch Liquiditätsüberschüsse geprägt.

Bei Obligationen führt das tendenziell zu einer buy-and-hold-Strategie. Dank der Amortized-Cost-Methode ist die ausgewiesene Rendite eine Kombination aus direkter und indirekter Rendite.

Da die Dividendenrendite von Schweizer Aktien meist recht tief ist, sind bei Anwendung des Niederstwert-Prinzips ständige Realisierungen der Differenz von Markt- und Buchwert im Prinzip unvermeidbar, um eine angemessene Gesamtrendite auf dem Buchwert eines Aktienportfolios auszuweisen. Dies kann dazu führen, dass der gleiche Titel zunächst verkauft wird und gleich wieder gekauft wird, nur um die modellmässige Bewertung zu erhöhen.

Da bei Immobilien die direkten Renditen bezogen auf den Buchwert bisher vermutlich hinreichend gross waren, sind Aufwertungen oder Realisierungen durch Verkauf eher selten gewesen. Hier kann sich jedoch das Problem stellen, dass die Rendite bezogen auf den Buchwert und die Rendite bezogen auf den Marktwert sich im Laufe der Zeit immer weiter entfernen. Es erscheint so, als ob die Differenz zwischen Marktwert und Buchwert bei Immobilien eine Art "letzte Reserve" oder "Notgroschen" ist.

Bei Hypotheken und Policendarlehen kann man davon ausgehen, dass Markt- und Buchwert übereinstimmen. Die Problematik der Umbewertungen entfällt also, d.h. es gibt nur die direkte Rendite. Bezüglich der Höhe dieser Rendite erscheint es sinnvoll, von der Rendite für Obligationen auszugehen und eine angemessene Risikoprämie hinzuzufügen.

Zur Bestimmung des PVFP sind die Kapitalerträge für die nächsten 30 bis 50 Jahre zu spezifizieren. Im folgenden werden Varianten vorgestellt, wie dieses Problem durch drastische Vereinfachungen "für Modellberechnungen gelöst" werden kann.

Die in der Schweiz zur Zeit diskutierten Varianten gehen von folgender Struktur aus:

- Es ist eine Rendite für das erste Jahr der Berechnungen (den Startpunkt) zu definieren.
- Es ist eine langfristig erwartete Rendite zu bestimmen, die (z.B. ab dem 10-ten Jahr der Berechnungen) erwartungsgemäss für alle nachfolgenden Jahre gelten soll.
- Es ist ein Übergang von der Rendite im Startjahr zur langfristig erwarteten Rendite z.B. zu der ab dem 10-ten Jahr zu definieren.

Für die langfristig erwartete Rendite erscheint lediglich eine Renditeberechnung unter Berücksichtigung von Marktwerten angemessen. Die Verwendung einer modellmässigen Bewertung kann in der langen Frist weder zu einer Verschlechterung noch zu einer Verbesserung der realen Situation führen.

Im Gegensatz dazu liegen für die vergangenen Jahre vor dem Startpunkt vermutlich lediglich Renditen aufgrund von Buchwerten, d.h. aufgrund von modellmässigen Bewertungen, vor. Für den Startpunkt selbst kann somit ein spezifisches Problem aus der Konfrontation von Buchwertrenditen mit Marktwertrenditen entstehen.

Zur Erleichterung des Verständnisses betrachten wir zuerst die langfristig erwarteten Renditen:

### Langfristig erwartete Rendite

1. Zur Bestimmung der langfristig erwarteten Rendite ist einerseits eine langfristig angestrebte Asset Allocation zu definieren. Dabei wird der langfristig erwünschte prozentuale Anteil der einzelnen Anlagekategorien festgelegt. Da bei diesen langfristigen Erwartungen ausschliesslich Marktbewertungen adäquat erscheinen, beziehen sich diese Prozentsätze auf die Anteile der Kapitalanlagekategorien zu Marktwerten.

Die gewählte Asset Allocation ist bei der Bestimmung der Risk Discount Rate zu berücksichtigen.

Zusätzlich sind für die Portfolios der verschiedenen Anlagekategorien langfristig erwartete Renditen zu bestimmen.

2. Für ein Obligationenportfolio bieten sich folgende Varianten zur Bestimmung der langfristig erwarteten Rendite an:

- (a) *statische Erwartungen*: Die im Betrachtungszeitpunkt gültige Rendite für 10-jährige Staatsobligationen. Für die Schweiz bedeutet das 2.5 % für das Betrachtungsjahr 1999 bzw. 7.0 % für das Betrachtungsjahr 1992.
- (b) *Adaptive Erwartungen*: Die langfristige Durchschnittsperformance der letzten 70 Jahre (ab 1925) gemäss der Pictet-Studie. Für die Schweiz bedeutet das 4.6 %.
- (c) *Modifizierte adaptive Erwartungen (mean reversion)*: Die langfristige Durchschnittsperformance der letzten 70 Jahre (ab 1925) gemäss der Pictet-Studie modifiziert in Abhängigkeit der Rendite gemäss a) im Betrachtungsjahr. Für die Schweiz kann das z.B. implizieren
 
$$2.5\% + 0.5 \times (4.6\% - 2.5\%) = 3.6\% \text{ für das Betrachtungsjahr 1999}$$
 bzw.
 
$$7.0\% + 0.5 \times (4.6\% - 7.0\%) = 5.8\% \text{ für das Betrachtungsjahr 1992}$$

Die Grössenordnung des Korrekturterms hängt von der subjektiven Einschätzung der Zinssatzentwicklung ab. Aus Sicherheitsgründen könnte man die positiven Korrekturen eher kleiner wählen als die negativen, bei gleich grosser absoluter Differenz zwischen langfristigem Durchschnittswert (4.6%) und jeweiliger momentaner Rendite (2.5% bzw. 7.0%). Im obigen Beispiel haben wir davon abgesehen und die Korrekturen jeweils gleich der Hälfte der Differenz gesetzt.

Die Methode der modifizierten adaptiven Erwartungen benutzt die Vereinigungsmenge der Information aus den beiden anderen Methoden. Die langfristig erwartete Rendite der Obligationen kann aber auch gesellschaftsindividuell gemäss deren subjektiven Einschätzung der momentanen und zukünftigen Zinslage oder durch Anwendung der in der Zinskurve implizit vorhandenen Information ermittelt werden.

3. Für ein Aktienportfolio bieten sich folgende Varianten zur Bestimmung der langfristig erwarteten Rendite an:

- (a) *Langfristige Durchschnittsrendite* der letzten 70 Jahre (ab 1925). Für die Schweiz ergibt das 8.2 %.
- (b) *Modifizierte langfristige Durchschnittsrendite* der letzten 70 Jahre (ab 1925) reduziert um eine Sicherheitsmarge, die gegebenenfalls zum Aufbau einer Schwankungsreserve genutzt werden sollte. Für die Schweiz kann das z.B. 7.2 % implizieren. Die Senkung um 100 Basispunkte kann als Sicherheitsmarge interpretiert werden, die zum Aufbau einer Schwankungsreserve verwendet wird. Bei der konkreten Berechnung des Embedded Value wirkt das lediglich als Marge, da wegen der Run-off-Annahme der Wert einer zukünftig aufzubauenden Schwankungsreserve nicht berücksichtigt wird.
- (c) *Addition einer Risikoprämie zur festgelegten Obligationen-Rendite*. Für den langfristigen Durchschnitt ergibt sich aus den obigen Daten eine Risikoprämie für die Schweiz von 3.6% (= 8.2% – 4.6%). Es stellt sich die Frage, ob diese Differenz als Risikoprämie geeignet ist. Ferner stellt sich auch die Frage, ob die Risikoprämie im Zeitverlauf konstant ist.

Die Addition einer konstanten Risikoprämie zur Rendite von Obligationen führt zum Phänomen, dass in Hochzinsphasen auch die Aktienrenditen hoch sind. In Tiefzinsphasen dagegen rentieren Aktien hiernach ebenfalls schlecht. Eine Modellimplikation, die recht fragwürdig erscheint. Relativ gut belegt ist die Korrelation, dass bei sinkenden Zinsen die Aktienkurse steigen und umgekehrt. Dieses Phänomen ist wohl schwer mit der obigen Modellimplikation in Einklang zu bringen.

Für die Schweiz würde die Annahme einer konstanten Risikoprämie von 3.6 % für Aktien beispielsweise zu folgenden langfristig erwarteten Renditen von Aktienportfolios führen:

Bewertungsmethode für Obligationen	1999 festgelegte Obligationen- rendite	2009 resultierende Aktien- rendite	1992 festgelegte Obligationen- rendite	2002 resultierende Aktien- rendite
a) Statische Erwartungen für Obligationenrendite	2.5	6.1	7.0	10.6
b) adaptive Erwartung für für Obligationenrendite	4.6	8.2	4.6	8.2
c) modifizierte adaptive Erwartung für Obligationenrendite	3.6	7.2	5.8	9.4

Die Modellimplikationen der Addition der konstanten Risikoprämie erscheint nicht immer sehr plausibel. Die Methode der modifizierten langfristigen Durchschnittsrendite für Aktien eliminiert gewisse Nachteile der konstanten Risikoprämie. Die langfristig erwartete Rendite kann eine Gesellschaft auch subjektiv, aufgrund der Einschätzung der Kapitalanleger festlegen. Wichtig ist, dass diese Festlegungen konsistent zur Festlegung der Obligationenrendite erfolgt.

4. Für ein Immobilienportfolio bieten sich - in Analogie zu Aktienportfolios - folgende Varianten zur Bestimmung der langfristig erwarteten Rendite an:
- (a) Langfristige Durchschnittsrendite
  - (b) Modifizierte langfristige Durchschnittsrendite
  - (c) Addition einer Risikoprämie zur entsprechenden Obligationenrendite.

Aus Praktikabilitätsgründen schlagen wir Variante c) vor mit einer konstanten Risikoprämie von 100 Basispunkten.

5. Für Portfolios von Hypotheken und Policendarlehen bietet sich die Addition einer Risikoprämie (z.B. 100 Basispunkte) zur entsprechenden Rendite von Obligationenportfolios an. Andererseits hängt die Rendite von Hypotheken und Policendarlehen auch sehr stark von geschäftsinternen Vorgaben beim Festlegen dieser Sätze ab. Diese Renditen müssen auf jeden Fall möglichst realitätsnah festgelegt werden.
6. Zusammenfassend ergibt sich die langfristig erwartete Rendite für das Gesamtportfolio aus den nachstehenden Tabellen. Für die einzelnen Anlagekategorien wurden die Renditen nach der von uns bevorzugten Methode bestimmt. Für die langfristig angestrebte Asset Allocation haben wir willkürlich eine Auswahl getroffen.

**Beispiel 1999 für 2009:**

Kapitalanlagekategorien	langfristig erw. Rendite (%)	Asset Allocation (%)
Obligationen	3.6	60
Hypotheken	4.6	10
Policendarlehen	4.6	8
Aktien	7.2	10
Immobilien	4.6	10
Geldmarkt	1.0	2
<b>Total</b>	<b>4.2</b>	<b>100</b>

**Beispiel 1992 für 2002:**

Kapitalanlagekategorien	langfristig erw. Rendite (%)	Asset Allocation (%)
Obligationen	5.8	60
Hypotheken	6.8	10
Policendarlehen	6.8	8
Aktien	7.2	10
Immobilien	6.8	10
Geldmarkt	2.0	2
<b>Total</b>	<b>6.1</b>	<b>100</b>

**Rendite im ersten Berechnungsjahr**

1. Bei der Bestimmung der Rendite für das erste Berechnungsjahr stellen sich spezifische Fragen dadurch, dass für die vorangegangenen Jahre sogenannte “realisierte Renditen” vorliegen, die stark durch modellmässige Bewertungen und diskretionäre Realisierungen beeinflusst sind. Am ausgeprägtesten gilt das vermutlich für die ausgewiesene Aktienrendite. Auf der anderen Seite ist der Übergang zu langfristig erwarteten Renditen nach Marktbewertung zu vollziehen.
2. Die einfachste Lösung dieses Problems wird vermutlich durch die folgende Variante geliefert:

Als Ausgangspunkt der Überlegungen nimmt man die “realisierte Rendite” des gesamten Kapitalbestandes des Jahres vor dem ersten Berechnungsjahr und bestimmt die im Modell zu verwendenden Renditen der Folgejahre durch lineare Interpolation von diesem Startpunkt mit der langfristig erwarteten Rendite des Gesamtportfolios gemäss Abschnitt 15.2.3.

Man betrachtet hier also stets Renditen des Gesamtportfolios.

Ein unbestreitbarer Vorteil dieser Variante besteht in ihrer Einfachheit.

Ein gravierender Nachteil besteht darin, dass der Startpunkt und damit natürlich auch alle folgenden Punkte, die aufgrund der linearen Interpolation bestimmt werden, vom Realisierungsverhalten insbesondere beim Aktienportfolio im letzten Jahr vor der ersten Berechnung abhängen.

3. Dieser Nachteil lässt sich dadurch beheben, dass man die “realisierte Rendite” des Gesamtportfolios dadurch modifiziert, dass bei der Bestimmung einer “modifizierten effektiven Rendite” nicht die “effektive” Rendite des Aktienportfolios vom Vorjahr berücksichtigt wird, sondern diejenige, die gemäss Abschnitt 15.2.3. langfristig erwartet wird.

Falls man weiterhin an der linearen Interpolation der Gesamtrendite festhält, bedeutet diese Modifikation, dass allein für das Aktienportfolio und allein für das Jahr vor der ersten Berechnung eine spezielle Bestimmung der Rendite vorgenommen wird.

4. Eine weitergehende Modifikation besteht darin, für die nächsten 2 bis 3 Jahre von den geplanten Renditen und der geplanten Asset Allocation der verschiedenen Anlagekategorien auszugehen.

Ab einem gewissen Zeitpunkt liegen keine Plandaten mehr vor und man muss auch hier zu geeignet erscheinenden Interpolationsmethoden greifen.

### Übergang zur langfristig erwarteten Rendite

1. Gewisse Hinweise zur Bestimmung der Renditen in der Übergangsphase vom Startpunkt zur langfristig erwarteten Rendite sind im vorangegangenen Abschnitt 15.2.3. schon gemacht worden.
2. Grundsätzlich stellt sich die Frage, ob man für die Übergangsphase lediglich die Gesamtrendite bestimmen will oder ob man die Renditen der einzelnen Kapitalanlagekategorien separat bestimmen will und zusätzlich die Asset Allocation, die sich ja vielleicht erst im Laufe der Zeit an die langfristig angestrebte annähert. Bei der Definition der Asset Allocation während der Übergangsphase ist man vermutlich mit der Frage konfrontiert, ob sich die prozentualen Anteile auf Marktwerte oder Buchwerte beziehen.

Für den Anfang der Übergangsphase kann man vermutlich für Obligationenportfolios aufgrund vorhandener Informationen im Bestand recht gute Angaben über die zu erwartenden Renditen ableiten.

Für die Renditen der übrigen Kapitalanlagekategorien kann man dies als Basis nehmen, falls man mit additiven Risikoprämien arbeiten will. Falls man statt dessen langfristige Durchschnittswerte benutzen will, erübrigt sich der Rückgriff auf eine derartige “Basisrendite”.

Zusammenfassend können wir festhalten, dass vermutlich mit einigem Arbeitsaufwand für die Übergangsphase bessere Lösungen ableitbar sind als die simple lineare Interpolation für die Gesamtrendite.

### Mögliche Verfeinerung bei der Obligationenrendite

Falls man sich bei der Bestimmung der langfristig erwarteten Obligationenrendite für die Methode der modifizierten adaptiven Erwartungen entschieden hat, kann man noch die nachstehende Verfeinerung einbauen.

Die Änderung besteht in der Annahme, dass in der “ganz langen Frist” - z.B. nach 20 Jahren - die langfristige Durchschnittsrendite gilt. D.h. man unterstellt nicht schon nach 10 Jahren eine konstante Rendite, sondern erst nach 20 Jahren.

Für den Übergang im zweiten Jahrzehnt erscheint uns lediglich die lineare Interpolation für die Gesamtrendite adäquat.

## 15.2.4 Überschusszuweisung

Die Überschussbeteiligung sollte gemäss der Planung der Gesellschaft erfolgen; sie sollte das bisherige Managementverhalten (resp. zukünftig geändertes Verhalten des Managements) widerspiegeln, sowie konsistent zu den Zinsannahmen sein. Ferner sollte - sofern geschäftspolitisch sinnvoll - für die Bestimmung der Überschussätze auch eine Neuproduktion angenommen werden. Grundsätzlich müssten angemessenen Erwartungen der Versicherungsnehmer befriedigt werden (Policyholder Reasonable Expectation, PRE). Dies bedeutet:

1. Bei der Bestimmung der Zinsüberschussätze zur Berechnung des PVFP ist selbstverständlich auf Konsistenz mit den verwendeten Kapitalertragssätzen und Technischen Zinssätzen zu achten.  
Des weiteren sind die Charakteristika der Überschussysteme zu berücksichtigen (z.B. Abhängigkeit der Zinsbonussätze von der Grösse des Zinsträgers).
2. Sofern Zinsbonussätze für das erste Jahr oder die ersten Jahre der Berechnungsperiode festgelegt sind, sind selbstverständlich diese Werte zu verwenden.
3. Für die Zeiträume, für die im Zeitpunkt der Berechnung keine festgelegten Zinsbonussätze vorliegen, ist es vermutlich das beste, mit adäquaten Zinsmargen zu arbeiten, wie sie die Gesellschaft in der Vergangenheit angewendet hat.
4. Falls die Technischen Zinssätze über den erwarteten Kapitalerträgen liegen sollten, sind die Verluste aus dem Sparprozess in den Projektionsberechnungen zu berücksichtigen.

### 15.2.5 Inflation

Die Inflation wird in der Regel zur Projektion der Verwaltungskosten verwendet. Die Annahmen sollten gemäss der Planung der Gesellschaft erfolgen und sollten konsistent zu den Zinsszenarien sein.

### 15.2.6 Besoldungsentwicklung

Annahmen über die Besoldungsentwicklung werden für die Projektion von Kollektivversicherungsverträgen benötigt. Sie richten sich nach der Planung der Gesellschaft. Auch hier müssen die Annahmen insbesondere konsistent zu den unter [15.2.3](#) und [15.2.5](#) erwähnten ökonomischen Szenarien sein.

### 15.2.7 Ertragssteuern

Zur Berechnung des Embedded Value werden Annahmen über die Ertragssteuern benötigt. Sie richten sich nach der realistischen Planung und den Erfahrungswerten der Gesellschaft. Grundsätzlich können die Steuern pro Police modelliert werden, wobei sich auch negative Steuern (bei Verlusten) ergeben können. Zudem können auf Unternehmensebene noch Korrekturen vorgenommen werden.

### 15.2.8 Sterblichkeit, Invalidierung II. Ordnung

Diese Grössen entsprechen den effektiv erwarteten Wahrscheinlichkeiten für das entsprechende Ereignis und richten sich, wenn möglich, nach firmeneigenen Beobachtungen. Sie sind, sofern möglich, konsistent zu den entsprechenden Annahmen für die Überschussgewährung zu wählen. Zudem können die folgenden Effekte berücksichtigt werden:

- Selektionswirkung in Abhängigkeit der Policendauer,
- Art des Risikos,
- Rückgang der Sterblichkeit bei Altersrenten.

### 15.2.9 Storno

Zur Berechnung des Barwertes der zukünftigen Gewinne werden Annahmen über die Stornorate benötigt. Diese richtet sich nach den firmeneigenen Beobachtungen. Die Unterschiede zwischen den verschiedenen Produkten der Gesellschaft werden hier berücksichtigt. Diese Grössen sind somit tarifspezifisch.

An dieser Stelle ist festzuhalten, dass die Erfahrung in England und in den USA zeigt, dass die Aktuare bezüglich den Stornoraten oft zu optimistische Annahmen treffen. Da diese Werte einen nicht unwesentlichen Einfluss auf den Embedded Value haben, ist es angezeigt, diese Annahmen in vorsichtiger Weise zu treffen, im Sinne eines best estimate.

### 15.2.10 Kosten II. Ordnung

Die effektiven Kosten richten sich nach der Kostenstruktur der Gesellschaft. Hierbei ist anzumerken, dass die Abschlusskosten durch die Veränderung der Eigenmittel berücksichtigt werden und der Barwert der zukünftigen Gewinne diese somit nicht berücksichtigt. (Im Gegenzug hierfür erhält der Investor den PVFP als Entschädigung.)

Die Modellierung der Kosten und deren Aufteilung in Abschluss- und Verwaltungskosten sollte so realitätsnah wie möglich sein. Im Modell sollten nicht geringere als die effektiven aktuellen Kosten berücksichtigt werden (keine Expense-overrun). Dies bedeutet, dass in der Regel für die Zukunft nicht mit kleineren Kosten als den aktuellen projiziert werden sollte.

### 15.2.11 Neugeschäft

Der Embedded Value berücksichtigt, im Gegensatz zum Appraisal Value, kein künftiges Neugeschäft. Automatische Anpassungen von Policen (z.B. Erhöhung der versicherten Leistungen) werden in diesem Zusammenhang nicht als Neugeschäft betrachtet, auch wenn sie Provisionen auslösen. Ebenso werden Neueintritte in die Kollektivversicherung nicht als Neugeschäft interpretiert.

### 15.2.12 Rückversicherung

Die Modellierung der Rückversicherung kann summarisch geschehen. Hierbei ist jedoch anzumerken, dass diese Effekte genauer modelliert werden müssen, sofern sie einen wesentlichen Einfluss auf den Barwert der künftigen Gewinne haben. (Z.B. im Falle von Finanzrückversicherungen.)

### 15.2.13 Reserveverstärkungen auf der Passivseite

Solche Reserven sind - sofern eine objektive Regel besteht - so realitätsnah wie möglich zu modellieren. Der Aufbau und das Freiwerden dieser Reserven fließt, entweder auf Policen- oder Unternehmensebene, durch die Erfolgsrechnung ein. Das Kapital ist gebunden und wird erst zu einem späteren Zeitpunkt dem Aktionär wieder freigegeben. (lock-in Effekt: die  $rdr$  ist grösser als die Kapitalanlagerendite).

### 15.2.14 Überschussfonds resp. freie Überschussreserve

Der Überschussfonds kann analog den Reserveverstärkungen gemäss der Usance der Gesellschaft modelliert werden. Durch ein solches Vorgehen auf Policenebene entstehen wegen dem lock-in Effekt für den Aktionär Kosten, welche den Wert des Überschussfonds resp. der freien Überschussreserve reduzieren.

### 15.2.15 Berechnung des PVFP für die Kollektivversicherung

Bei der Behandlung der Kollektivversicherung ist an einer genauen Modellierung von Vertragsrückkäufen festzuhalten. Mutationen innerhalb von Kollektivversicherungsverträgen können eher summarisch abgehandelt werden. Dies kann z.B. durch Annahmen über die Lohnentwicklung und Perennität geschehen, welche das Volumen in globo berücksichtigen.

Weitere Problemkreise in der Kollektivversicherung sind:



- Zweistufiges Konzept: Kollektivvertrag mit Storno und Versicherte mit Dienst- und -austritten.
- Offener Bestand auf Stufe der Destinatäre.
- Storno abhängig von der Vertragsgrösse und der Branche.
- Gesetzliche Rahmenbedingungen wie Umwandlungssatz- und Zinsgarantie. Dies führt zu einer zusätzlichen Solidarität (d.h. Querfinanzierung) zwischen Aktiven und Rentnern.
- Dynamik im Bestand gegeben durch Gesetz (Lohnentwicklung, Freizügigkeitsleistungen, WEF, usw.)
- Optionsmöglichkeit im Schlussalter.

## 15.3 Bestimmung des Adjusted Net Asset Value

### 15.3.1 Equity (Statutarisch ausgewiesenes Eigenkapital)

Bei der Equity handelt es sich um das ausgewiesene Eigenkapital. Die Berechnung hat konsistent mit den Bewertungsvorschriften unter local Statutory (z.B. lokale Bewertungsgrundsätze) zu erfolgen.

### 15.3.2 Adjustierungen zum Eigenkapital (“Adjustments”) und Aufteilung der stillen Reserven

Die Kapitalanlagen werden normalerweise<sup>1</sup> zunächst auf Marktwerte (Mark to Market) bewertet. Die Differenz zwischen den zu Marktwerten bewerteten Kapitalanlagen abzüglich den zu lokal Statutory bewerteten Kapitalanlagen ergibt eine Bewertungsreserve (Revaluation Reserve). Die Bewertungsreserve muss zudem um die latenten Steuern reduziert werden. Eine weitere Einschränkung ergibt sich durch allfällige Annahmen bei der Kapitalanlagerendite resp. bei der Projektion für die Überschussbeteiligung. Falls hier Anteile der Bewertungsreserve einfließen, muss dies bei der Zuordnung der Bewertungsreserve zum Aktionär korrigiert werden.

Je nachdem wie die Geschäftspolitik der Gesellschaft ist, möchte man Realisierungen der Bewertungsreserve (z.B. bei Aktien und Liegenschaften) über einen längeren Zeitraum modellieren (z.B. proportional zum Auslauf des Deckungskapitals). In diesem Fall möchte das Management einen Teil der stillen Reserven behalten bis zum Ablauf des Portefeuilles. Dadurch kann aber die Bewertungsreserve nicht nominal als “Adjustments” genommen werden, sondern der Wert der Bewertungsreserve wird im Berechnungszeitpunkt durch den lock-in Effekt reduziert.

Freie Mittel sind notwendig, um die Solvabilität der Gesellschaft sicherzustellen. Es handelt sich in diesem Sinne um Betriebskapital, welches gebunden ist. Die Ansprüche des Versicherungsnehmers bestehen somit aus den garantierten Versicherungsleistungen und der Überschussbeteiligung.

Analog zu den Stressmodellen in Grossbritannien könnte man in der Schweiz bei Aktien von Schwankungen in der Höhe von 25 % des Marktwertes ausgehen. Um nun sicher zu gehen, dass die entsprechenden Schwankungen nicht zur Insolvenz führen, wäre dann eine Reserve in der Höhe von 25 % des Marktwertes der Aktien zu stellen.

### 15.3.3 Kosten für gebundenes Kapital

Die gesetzliche Solvamarge (z.B. 4 % DK, 0.3 % Risikokapital, 1 % ALV-DK) ist zu bedecken, verbleibt aber in den Eigenmitteln. Allerdings werden die Eigenmittel nicht mit der Risk Discount Rate verzinst, sondern mit der Kapitalanlagerendite. Dies hat zur Folge, dass die Kosten, welche durch die Differenz von Risk Discount Rate und Verzinsung der Eigenmittel entstehen, zu Lasten der Eigenmittel gehen (lock-in Effekt).

<sup>1</sup>Es gibt auch Versicherungsgesellschaften, welche Obligationen für die Embedded Value Berechnung nach der Amortized-Cost-Methode bewerten.

Will die Gesellschaft mehr als nur die minimal erforderliche Solvamarge stellen, (z.B. um bei Ratingagenturen ein hohes Rating zu erlangen), so sollte sich das dadurch gebundene Kapital nach diesen Grundsätzen richten. Beim lock-in Effekt sind auch die Steuern (auf dem Zinsteil) zu berücksichtigen.

Hinweis: Investitionen für das Neugeschäft werden dem ANAV belastet (Abschlusskosten). D.h. die Neuproduktion wird durch den Aktionär finanziert, welcher somit in den nachfolgenden Jahren eine entsprechende Kapitalanlagenrendite erwirtschaften will!

## 15.4 Offenlegung

Der folgende Abschnitt legt diejenigen Annahmen und Parameter fest, welche bei einer Veröffentlichung des Embedded Value sinnvollerweise offengelegt werden sollten. Werden Annahmen und Berechnungsweise nicht offengelegt, so besteht die grosse Gefahr, dass die Berichte nicht konsistent mit den Berechnungsweisen interpretiert werden. Wichtig bei der ganzen Embedded Value Methode ist insbesondere die zeitliche Entwicklung des Embedded Values und nicht der eigentliche, absolute Wert. Deshalb sollte man historisch vergleichbare Embedded Value Werte publizieren.

Zusätzlich zur Veröffentlichung des Embedded Value für das aktuelle Jahr ist es empfehlenswert, gleichzeitig die Vorjahreszahlen zusammen mit Angaben zur Analyse des Value Added (z.B. Wert des Neugeschäfts, Änderung der Annahmen, usw.) zu veröffentlichen.

Je nach Art der Publikation des Embedded-Value-Berichtes kann es nötig sein, diesen von einer externen Firma (Aktuar) revidieren zu lassen.

## 15.5 Beispiel

### 15.5.1 Berechnung des PVFP

Wir betrachten einen 40jährigen Mann und eine Gemischte Versicherung mit Laufzeit 10 Jahre. Da diese Versicherung gegen Einmaleinlage von CHF 100'000 abgeschlossen wurde, gehen wir davon aus, dass es beim Rückkauf keinen Abzug gibt, so dass dort für die Versicherungsgesellschaft kein zusätzlicher Gewinn entsteht. Zudem gehen wir von den folgenden Prämissen aus:

- Die tarifarischen Verwaltungskosten betragen pro Jahr 0.6 % des Deckungskapitals zuzüglich einem Fixbetrag von 150 Fr.
- Die tarifarischen Abschlusskosten betragen 5 % der Einmaleinlage zuzüglich einem Fixbetrag von 200 Fr.
- Die effektiven jährlichen Verwaltungskosten betragen 600 Fr., wobei sie wegen der Inflation um 3.25 % pro Jahr erhöht werden.
- Die effektiven Abschlusskosten (Provision) betragen 5.75 % der Einmaleinlage.
- Wir gehen von einem technischen Zins von 4 % und einer Kapitalanlagenrendite von 5 % aus. Der Zinsüberschuss werde zu 85 % dem Versicherungsnehmer gut geschrieben. Die verbleibenden 15 % stellen einen Gewinn für die Versicherungsgesellschaft dar. Dies entspricht einer Zinsmarge für die Versicherungsgesellschaft von 15 Basispunkten.
- Die Risikomarge beträgt 10 %, wobei wir davon ausgehen, dass davon 90 % dem Versicherungsnehmer gut geschrieben werden.
- Wir gehen von einer Risk Discount Rate von 7 % aus und bezeichnen mit  $s_x$  die jährliche Rückkaufswahrscheinlichkeit (Stornorate).

Alter	$q_x$	$p_x$	Leistung bei Tod	DK	Kosten- prämie	Risiko- prämie
40	0.0011	0.9989	130'064	100'000	5'950.00	35.04
41	0.0012	0.9988	130'064	97'812	736.87	34.46
42	0.0013	0.9987	130'064	100'927	755.56	33.39
43	0.0015	0.9985	130'064	104'149	774.89	31.92
44	0.0016	0.9984	130'064	107'480	794.88	29.81
45	0.0018	0.9982	130'064	110'927	815.56	27.10
46	0.0020	0.9980	130'064	114'492	836.95	23.08
47	0.0023	0.9977	130'064	118'183	859.10	17.44
48	0.0025	0.9975	130'064	122'004	882.02	9.82
49	0.0028	0.9972	130'064	125'962	905.77	-

Tabelle 15.2: Technische Daten Gemischte Versicherung

Alter	Ertrag	$s_x$	${}_t p_x$	P/L Kosten	P/L Risiko	P/L Anlage	P/L Total
40	5 %	0.2000	1.0000	-680.53	0.17	149.61	-530.75
41	5 %	0.1400	0.7999	90.36	0.13	117.36	207.85
42	5 %	0.0800	0.6878	76.63	0.11	104.13	180.87
43	5 %	0.0800	0.6327	69.50	0.10	98.84	168.45
44	5 %	0.0800	0.5820	63.00	0.09	93.83	156.91
45	5 %	0.0800	0.5353	57.09	0.07	89.07	146.24
46	5 %	0.0800	0.4924	51.72	0.06	84.57	136.34
47	5 %	0.0800	0.4529	46.84	0.04	80.29	127.17
48	5 %	0.0800	0.4166	42.41	0.02	76.24	118.67
49	5 %	0.0800	0.3832	38.41	0.00	72.39	110.80
50	5 %	0.0800	0.3524	0.00	0.00	0.00	0.00
<b>Total</b>			<b>Barwert</b>				<b>482.35</b>

Tabelle 15.3: Profit/Loss Profil einer Gemischten Versicherung gegen Einmaleinlage

Unter den oben genannten Voraussetzungen ergibt sich eine Todes- und Erlebensfallsumme in der Höhe von 130'064 Fr. Die technischen Grössen sind in Tabelle 15.2 dargestellt. In Tabelle 15.3 finden sich die hieraus resultierenden jährlichen Gewinne und Verluste. Die Analyse dieser Zahlen zeigt einerseits die Abhängigkeit des Ergebnisses vom Policenjahr. Hierbei fällt der Verlust im ersten Jahr auf, welcher durch die Provision bedingt ist. Abbildung 15.5.1 zeigt diesen Sachverhalt in grafischer Weise. Hierbei ist zu bemerken, dass der Gewinn aus Risiko so klein ist, dass er in der Grafik nicht mehr sichtbar ist.

### 15.5.2 Sensitivitätsanalyse

Um den Einfluss der Parameter auf den PVFP besser abschätzen zu können, ist es nötig, die einzelnen Parameter zu variieren. Tabelle 15.4 zeigt die Resultate dieser Untersuchung, wobei vom oben dargestellten Beispiel ausgegangen wurde mit der Ausnahme, dass zusätzlich ein Rückkaufsabzug in % des Deckungskapitals modelliert wurde. Es wurden die folgenden Parameter separat variiert:

- Fixkosten zwischen -20 % und 20 % von 600 Fr. pro Jahr,
- Inflation zwischen 1 % und 5 % pro Jahr,
- Abschlusskosten zwischen 5 % und 9 % der Einmaleinlage,

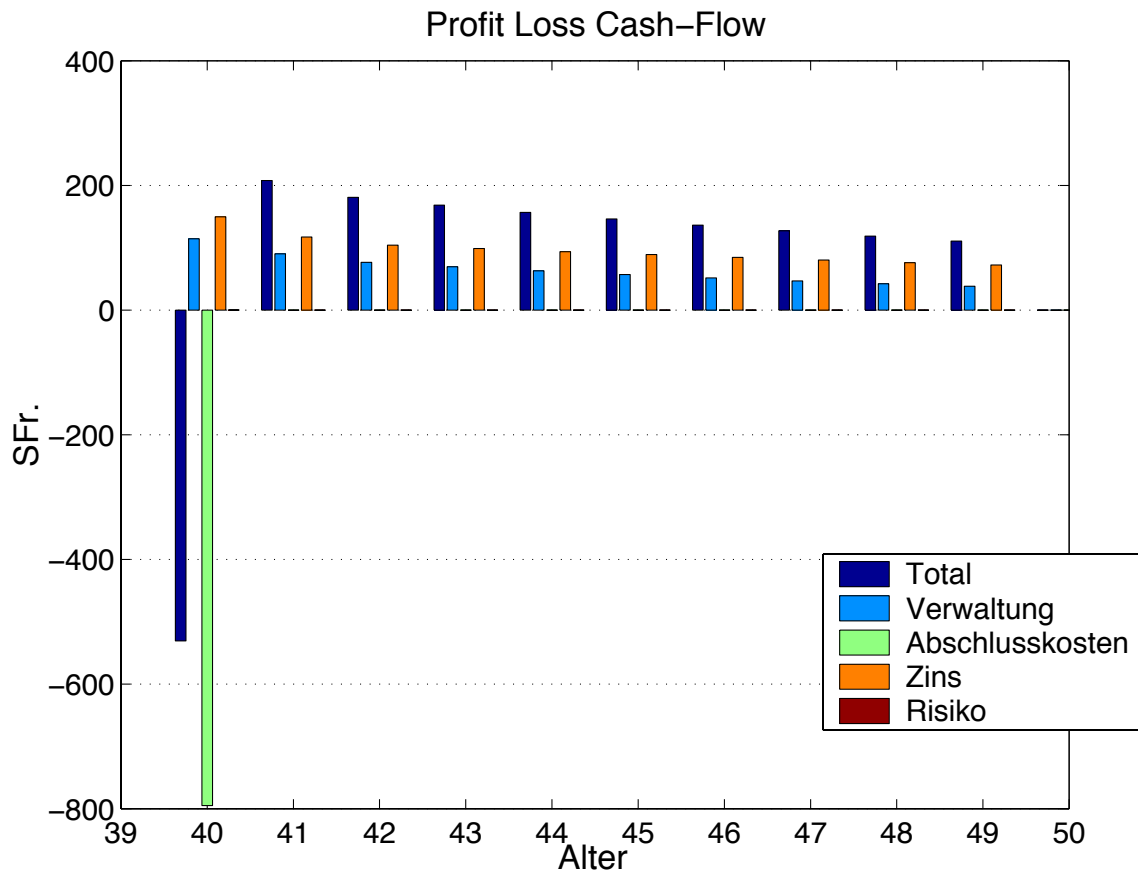


Abbildung 15.1: Profit/Loss Profil einer Gemischten Versicherung.

- Zinsüberschuss zwischen 75 % und 95 % des Überzinses,
- Risikomarge zwischen 0 % und 40 %,
- Risikoüberschuss zwischen 75 % und 95 %,
- $rdr$  zwischen 5 % und 9 %,
- Rückkaufsabzug zwischen 0 % und 4 % des Deckungskapitals
- Stornohäufigkeit zwischen -20 % und 20 % bezüglich der Referenz.

Aus der Tabelle 15.4 ist ersichtlich, dass der PVFP besonders empfindlich auf die Abschlusskosten, den gewährten Zinsüberschuss und den Rückkaufsabzug reagiert.

<b>Fixkosten Verwaltung</b>	-20 %	-10 %	0 %	10 %	20 %
<i>PVFP</i>	1025	711	397	84	-230
in <i>PVFP<sub>Ref</sub></i>	257.9 %	179.0 %	100.0 %	21.0 %	-57.9 %
<b>Inflation</b>	1 %	2 %	3 %	4 %	5 %
<i>PVFP</i>	593	498	397	292	182
in <i>PVFP<sub>Ref</sub></i>	149.4 %	125.2 %	100.0 %	73.6 %	45.9 %
<b>Eff. Abschlusskosten</b>	5 %	6 %	7 %	8 %	9 %
<i>PVFP</i>	2392	1395	397	-600	-1597
in <i>PVFP<sub>Ref</sub></i>	602.1 %	351.0 %	100.0 %	-151.0 %	-402.1 %
<b>Zinsüberschuss</b>	75 %	80 %	85 %	90 %	95 %
<i>PVFP</i>	901	649	397	145	-106
in <i>PVFP<sub>Ref</sub></i>	226.8 %	163.4 %	100.0 %	36.6 %	-26.8 %
<b>Risikomarge</b>	0 %	10 %	20 %	30 %	40 %
<i>PVFP</i>	396	396	397	398	399
in <i>PVFP<sub>Ref</sub></i>	99.6 %	99.8 %	100.0 %	100.2 %	100.4 %
<b>Risikoiüberschuss</b>	75 %	80 %	85 %	90 %	95 %
<i>PVFP</i>	400	399	397	396	395
in <i>PVFP<sub>Ref</sub></i>	100.7 %	100.3 %	100.0 %	99.7 %	99.3 %
<b>RDR</b>	5 %	6 %	7 %	8 %	9 %
<i>PVFP</i>	538	465	397	333	273
in <i>PVFP<sub>Ref</sub></i>	135.4 %	117.1 %	100.0 %	83.9 %	68.7 %
<b>Rückkaufabzug</b>	0 %	1 %	2 %	3 %	4 %
<i>PVFP</i>	-736	-169	397	964	1530
in <i>PVFP<sub>Ref</sub></i>	-185.2 %	-42.6 %	100.0 %	242.6 %	385.2 %
<b>Stornohäufigkeit</b>	-20 %	-10 %	0 %	10 %	20 %
<i>PVFP</i>	366	383	397	408	417
in <i>PVFP<sub>Ref</sub></i>	92.0 %	96.4 %	100.0 %	102.8 %	104.9 %

Tabelle 15.4: Sensitivität des PVFP



# Kapitel 16

## Return and Capital

### 16.1 Introduction

The general concept of a RoRAC methods consists of the following steps:

1. Definition of the Risk Measure to be considered.
2. Definition of the Risk governing the product and modelling them.
3. Definition of the present value

### 16.2 Role of valuation

In order to do physics it is essential to measure the different quantities accurately. Independently of the actual length of 1 meter the different laws and formulae are valid and correct. Therefore the meter serves mainly as an objective yardstick for comparison. In the world of economics the common measure is the face amount of the money, for example 1 Euro. Here the situation is however more difficult, in the sense that it is a priori not clear how to value complex financial instruments such as options, illiquid stocks, insurance policies etc. In order to be able to publish reliable financial statements and to do sensible risk management it is never the less imperative to base on reliable valuation principles and methods. Without these methods neither financial accounting nor risk management make sense. The aim of the following sections is to give an introduction into economic valuation methods.

#### 16.2.1 Valuation methods

For a given financial instrument or liability valuation can in principle be done based on market or book values. In case of book values the implicit aim is to prudently value the assets based on the purchase price. In case of a stock the corresponding principle results in the so called lower cost or market valuation, which means that the stock is in the books at the purchase price as long as the market price is not lower. Assume that a stock has been bought at Euro 100'000 and has doubled its market price. In this case the book value would still be Euro 100'000 and its market value Euro 200'000. Correspondingly there is a revaluation reserve of Euro 100'000 which is not accounted for in this type of balance sheet. In order to show these hidden values more transparently the so called market value accounting principles were introduced.

The market value of financial instrument can usually be determined looking at deep and liquid markets where these instruments are traded. In case of most stocks this is the case. There are however instruments, which are not regularly traded and here it is necessary to base the valuation on models. Typical instruments where models are required are for example:

Instrument	Method for valuation
Illiquid Stocks	Usually last paid price
Synthetic Zero Coupon Bonds	By recursion based on bonds with coupons
Properties	By discounted cash flow method or expert judgement
Options and other derivatives	By mathematical methods such as Black-Scholes-Formula
Insurance Liabilities	Based on synthetic replicating portfolios

The above table clearly shows the need for mathematical methods to approximate market values where such are not directly observable. One of the most useful theories is the arbitrage free pricing theory which will be explained in the next section.

## 16.2.2 Principle of no arbitrage

In economics, arbitrage is the practice of taking advantage of a state of imbalance between two or more markets: a combination of matching deals are struck that capitalize upon the imbalance, the profit being the difference between the market prices. When used by academics, an arbitrage is a transaction that involves no negative value at any probabilistic or temporal state and a positive value in at least one state. A person who engages in arbitrage is called an arbitrageur. The term is mainly applied to trading in financial instruments, such as bonds, stocks, derivatives and currencies.

If the market prices do not allow for profitable arbitrage, the prices are said to constitute an arbitrage equilibrium or arbitrage free market. An arbitrage equilibrium is a precondition for a general economic equilibrium. The following example shows an arbitrage opportunity:

Suppose that the exchange rates (after taking out the fees for making the exchange) in London are £5 = \$10 = ¥1000 and the exchange rates in Tokyo are ¥1000 = £6 = \$10. Converting \$10 to £6 in Tokyo and converting that £6 into \$12 in London, for a profit of \$2, would be arbitrage. In reality, this triangle arbitrage is so simple that it almost never occurs.

The most important elements of the Arbitrage Free Pricing Theory are:

- Pricing systems
- Arbitrage and
- Self-financing strategies.

We denote by  $S_k(t)$  the price of the asset  $k$  at time  $t$ , where  $S_0(t)$  denotes usually the investment in cash. A portfolio at time  $t$  is a vector  $\phi_k(t)$  indicating the number of units of the corresponding asset held at time  $t$ . The value of this portfolio at time  $t$  equals

$$V(t) = \langle S_k(t), \phi_k(t) \rangle = \sum_k S_k(t) \times \phi_k(t)$$

A self-financing trading strategy is a sequence of portfolios, which fulfils besides some additional mathematical requirements the following equation:  $V(t^-) = V(t)$ , which can be interpreted as the absence of injecting or withdrawing money during the changes of the portfolio. The trading strategy is called admissible if its value never falls below 0. The idea of arbitrage free pricing is to replicate a financial instrument such as a stock option by a corresponding self-financing trading strategy, which has exactly the same payout pattern as the financial instrument for (almost) all possible states of the financial market. As the strategy was self-financing the value of the instrument at time 0, needs to equal the value of the portfolio of the strategy at inception.

The arbitrage free pricing theory can today be considered as one of the cornerstones for pricing derivatives of financial instruments such as stock options, swaptions etc. From a mathematical point of view this theory is intrinsically linked to martingales - the prototype of a fair game. It can be shown that the absence of arbitrage implies the existence of a so called equivalent martingale measure  $Q(A)$ . The price of the derivative is then the expected



value of the discounted value of the instrument, not with respect to the original measure  $P(A)$ , but with respect to the equivalent martingale measure  $Q(A)$ . This can be interpreted that the value process under this new measure follows a fair game.

By using all the theoretical tools available for martingales it is possible to show a lot of nice features of these processes. The so called Itô-calculus allows the analytical and numerical treatment of such instruments.

In relation to the valuation it becomes obvious that options and other derivatives which have no deep and liquid market are priced and valued based on these concepts. Furthermore they also play a significant role in the risk management of derivatives, because Itô-calculus allows the quantification of the changes in the price depending on the parameters resulting in the so called greeks. They represent the partial derivatives of the price and can be used to approximate the change in value by using a Taylor-Approximation.

Another aspect of these tools is the possibility to simulate the price of financial instruments by Monte-Carlo-Methods. Arbitrage Free Pricing Theory and the need for equivalent martingale measures for pricing indicate the need to use the equivalent martingale measure for simulations - or equivalently to use so called deflators with respect to the original measure  $P(A)$ . Deflators can be considered as link between the two measures and are closely related to the concept of a Radon-Nikodym density  $\frac{dQ}{dP}(A)$ .

A section about the Arbitrage Free Pricing Theory is certainly incomplete without mentioning the Black-Scholes Formula. The Black-Scholes model is a model of the evolving price of financial instruments, in particular stocks. The Black-Scholes formula is a mathematical formula for the theoretical value of European put and call stock options derived from the assumptions of the model. The formula was derived by Fischer Black and Myron Scholes and published in 1973. They built on earlier research by Edward Thorpe, Paul Samuelson, and Robert C. Merton. The fundamental insight of Black and Scholes is that the option is implicitly priced if the stock is traded. Merton and Scholes received the 1997 Nobel Prize in Economics for this and related work; Black was ineligible, having died in 1995.

### 16.2.3 Reconciliation of balance sheets

One of the main challenges with respect to economic balance sheets is the missing experience in doing so. Companies are much more used to produce their financial reports based on book value based principles where often virtual assets and liabilities and other “difficult animals” occur, such as:

- Deferred acquisition cost assets
- Activated software assets
- Deferred Taxes
- Equalisation Reserves
- Additional technical reserves for all type of things, etc.

In order to produce reliable economic balance sheets it is therefore advisable to start with an audited balance sheet of the company and to reconcile each position from book values to market values. In case of assets the reconciliation between book values and market values usually equals the revaluation reserves. But for some positions a reconciliation is difficult and therefore even more necessary. Just to mention one of the most difficult positions. What is the market value of a 100% consolidated subsidiary?

After having done the reconciliation it is far easier to explain a economic balance sheet to an audience understanding the traditional accounts. The reconciliation furthermore gives deep insights where the company suffers small margins or has a lot of fat.

## 16.3 General Considerations

In principle there are currently two different approaches, which are used in the life insurance industry for the determination of the profitability of a product, both of which are based on a cash flow approach:

- The traditional embedded value approach, or also the european value approach, and the
- Economic Valuation / Market consistent embedded value.

The main difference between these two approaches is the consideration of the underlying risk.

### 16.3.1 Traditional embedded value

In case of a traditional embedded value the value of new business is defined by

$$VnB = \sum_{k=0}^{\infty} (1 + rdr)^{-k} P/L(t) - CoC, \text{ where} \quad (16.1)$$

$$CoC = \sum_{k=1}^{\infty} (1 + rdr)^{-k} \{ \text{Required Capital}(t) \times (rdr - (Return)) \}. \quad (16.2)$$

Note that in general  $CoC > 0$ , as  $rdr > (Return)$ . The idea behind this approach is that a shareholder wants to earn a certain return on the capital he invests. Therefore we have

1. Each profit which we get in  $\tau$  years, has a current value of  $(1 + rdr)^{-\tau} P/L$ .
2. On the other hand the required capital  $C$  coming from the shareholder is locked in. Therefore its value corresponds to  $V(C) = \sum_{k=0}^{\infty} (1 + rdr)^{-k} (C \times Return)$ . It can easily be shown that  $V(C) = C - CoC$ .

The main disadvantages of this approach are:

- Losses in the future are usually heavily discounted and not seen,
- Usually the capital  $C$  equals a statutory capital. Therefore the actual risk can not be assessed via the capital.
- The risk is considered implicitly by setting the risk discount rate  $rdr$ . This makes it very difficult to compare different types of business with different risk characteristics.

### 16.3.2 Economic Valuation / Market consistent embedded value

In contrast to the traditional embedded value the economic valuation or also market consistent embedded value is based on modern valuation techniques such as arbitrage free pricing etc. The idea is here to base discounting on a risk free rate. Risk is considered by setting appropriate capital for the different points in time and by setting an adequate Cost of Capital.

The most important additional insight which will be provided by Solvency II are economic balance sheets in particular with respect to insurance liabilities. This means on the asset side that all unrealised capital gains and losses are taken into account in a transparent way. On the liability side the situation is somewhat different, because there no tradable instruments exist which can be used to perfectly replicate the liabilities in order to determine their economic price. It is however clear that exactly this information is of utmost importance for managing the risks and one uses therefore usually a model approach to get a reasonable approximation of the market values for

the insurance liabilities. In a first step one needs to calculate the expected present value of the future policyholder benefits. On top of this amount one requires a so called market value margin  $MVM$ . In order to calculate the expected present value of the future policyholder benefits, one needs to calculate the corresponding cash flows. The expected present value of the cash flows  $(CF_t)_{t \in \{0,1,2,\dots\}}$  is then calculated by

$$\mathbb{E}[PV] = \sum_{t=0}^{\infty} \pi(ZCB_t) \times \mathbb{E}[CF_t],$$

where  $\pi(ZCB_t)$  denotes the market price of a zero coupon bond with maturity  $t$  at balance sheet date. This calculation being in theory very easy requires some effort from the insurance company. It is however relatively easy to perform, because one can largely rely on existing calculations and approximations if necessary. Whereas this calculation is quite straight forward for P&C insurance, it requires some additional considerations for life portfolios, where it is typically based on a policy-by-policy calculation. In contrast to usual actuarial practise where mathematical reserves are based on the assumption that there are no lapses, it is key within a realistic valuation to also consider this effect. Doing so the duration of liabilities usually reduces considerably. This clearly shows the importance to consider this effect.

On top on the expected present value, it is necessary to calculate the market value margin. To this end there exist two different approaches and advocates for both of them. On the one hand side this is the quantile approach, where the  $MVM = F_{PV}^{-1}(\alpha) - \mathbb{E}[PV]$  for a given probability  $\alpha$ , (say  $\alpha = 75\%$ ). The difficulty with this approach lies in the fact that the determination of the distribution function is one of the most challenging undertakings in actuarial sciences. Whereas there exist some theoretical methods to do so in non-life insurance, there are, at least in view, no reasonable methods available for life insurance. Using standard methods in actuarial life mathematics and a reasonable portfolio size one almost certainly ends up at a neglectable marked value margin due to the law of large numbers.

The other approach is the Cost of Capital approach (CoC) where the required risk capital  $(RC_t)$  is projected into the future. In a second step the  $CoC$  equals the present value of the corresponding costs for the future periods:

$$MVM = CoC = \sum_{t=0}^{\infty} \beta \times RC_t \times \pi(ZCB_t).$$

The parameter  $\beta$  corresponds to the unit cost of capital and is usually in the order between 2% and 6%, for regulatory purposes. In case of a given hurdle rate  $\gamma$  (eg  $\gamma = 7\%$ ),  $\beta$  can be calculated by the formula  $\beta = \gamma - \text{Riskfree}$  for the corresponding period, neglecting for the moment the effect of taxation. Whereas the quantile approach is technically very difficult to implement reasonable simplifications are possible for the CoC approach. Furthermore it leads to much more stable results. Finally it is important to remark that the CoC approach has two additional benefits: on the one hand one can quite easily verify the corresponding results and on the other hand it avoids double counting of capital.

Similarly one can calculate the Internal Rate of Return by this approach. Assume that  $\beta = \gamma - \text{Riskfree}$  is constant (for example by introducing a constant spread over risk free), the calculation becomes still easier:

$$IRR = \frac{\mathbb{E}[PV]}{\sum_{t=0}^{\infty} RC_t \times \pi(ZCB_t)} + \text{Riskfree}.$$

In case of yield-curve which is not flat, the IRR (eg  $\gamma$ ) can be calculated by the following formula:

$$IRR = \frac{\mathbb{E}[PV] + \sum_{t=0}^{\infty} i \times RC_t \times \pi(ZCB_t)}{\sum_{t=0}^{\infty} RC_t \times \pi(ZCB_t)},$$

where  $i$  corresponds to the corresponding forward return on the capital, eg  $i_t = \frac{ZCB(t+1)}{ZCB(t)} - 1$ . It is obvious that in case of a flat yieldcurve the two formulæ have the same result.

Having stated the importance of basing the Solvency regime on a reliable economic balance sheet, there is another important question relating to the market consistent valuation of liabilities. What is the value of the different policyholder options such as the possibility to surrender a policy or to take capital or annuity in a pension scheme? On the one hand it is clear that these implicit options can have a considerable value, but on the other hand there are few reliable methods to value them, which are generally accepted. Therefore also here a pragmatic approach has to be taken. This means that only the most relevant policyholder options should be quantified. The most prominent example is the guaranteed unit linked insurance contract. Here the valuation of the corresponding put option on the fund is relatively easy to quantify based for example on the Black-Scholes formula and the corresponding risk management techniques.

Finally we need to realise that in the real world there are additional constraints, which have an impact on the value of a portfolio or a product sold. The most relevant are listed below:

- Frictional costs and
- Taxes,

Frictional costs stem from the fact, that the company needs to hold at a certain time the corresponding statutory reserves  $V_t$  for an underlying block of business. Given the fact that the best estimates liabilities  $\mathbb{E}[PV]$  may be inferior, the company needs to hold this additional amount, resulting in the above mentioned (pure) frictional capital costs:

$$FCC^* = \sum_{t=0}^{\infty} \beta \{ \max(0, V_t - \mathbb{E}[PV]_t) \} \times \pi(ZCB_t),$$

where  $\mathbb{E}[PV]_t$  denotes the expected present value of liabilities as seen at time  $t$ . Based on the fact that the risk capital also qualifies as capital to fill up missing reserves, the total frictional capital costs amount to:

$$FCC = \max(0, FCC^* - CoC)$$

With respect to taxes, all values need to be considered after tax. Whether a certain tax applies and to which extend depends heavily on the country. In the simplest setting, pre-tax values can simply be multiplied by  $(1 - \text{taxrate})$ .

## 16.4 Formulae

$$\mathbb{E}[PV] = \sum_{t=0}^{\infty} \pi(ZCB_t) \times \mathbb{E}[CF_t] \quad (16.3)$$

$$CoC = \sum_{t=0}^{\infty} \beta \times RC_t \times \pi(ZCB_t) \quad (16.4)$$

$$FCC^* = \sum_{t=0}^{\infty} \beta \{ \max(0, V_t - \mathbb{E}[PV]_t) \} \times \pi(ZCB_t) \quad (16.5)$$

$$FCC = \max(0, FCC^* - CoC) \quad (16.6)$$

$$\text{Profit before Tax} = \mathbb{E}[PV] - CoC - FCC \quad (16.7)$$

$$\text{Profit after Tax} = (1 - \text{taxrate}) \times \{ \mathbb{E}[PV] - CoC - FCC \} \quad (16.8)$$

$$\beta = \gamma - \text{Riskfree for the corresponding period} \quad (16.9)$$

## 16.5 Examples

### 16.5.1 Annuity

We consider here a real life annuity portfolio with a total face amount of about Euro 240 M p.a. In order to determine the expected cash flows and the replicating portfolio it is in a first step necessary to choose a mortality law for the description of the evolution of the mortality:

$$q_{x,t} = q_{x,t_0} \times \exp(-\lambda_x \times (t - t_0)).$$

Considering in an next step one  $x$  year old person the present value of the annuity in payment of 1 Euro is given by

$$\ddot{a}_x = \sum_t {}_t p_x \times v^t$$

This indicates that the expected cash-flow at time  $t$  equals  ${}_t p_x$  and therefore the replicating portfolio corresponds to  $\sum_t {}_t p_x \times ZCB(t)$ , where  $ZCB(t)$  represents an abstract basis for the corresponding zero coupon bonds. This policy has the following value at balance sheet date:

$$\mathbb{E}[PV] = \sum_t {}_t p_x \times \pi(ZCB(t)),$$

where  $\pi[X]$  denotes the market price of the financial instrument  $X$ .

In a next step it is now necessary to calculate the market value margin. In order to do that one needs to determine the relevant risk factors together with their probability functions. In case of the annuity portfolio we assume longevity as main risk factor and assume that the mortality for future years follows the following law:

$$q_{x,t} = q_{x,t_0} \times \exp(-\lambda_x(\omega) \times (t - t_0)).$$

In this case we model the risk by replacing  $\lambda_x$  by  $\lambda_x(\omega) = c(\omega) \times \lambda_x$ .  $c(\omega)$  corresponds to the relative change in mortality improvement in relation to the observed standard trend. In this case the present value of the loss equals the difference of the expected present values based on  $\lambda_x$  and  $\lambda_x(\omega)$  respectively. By integrating over  $d\omega$  one gets the desired result for the present value of the risk capital. Multiplying by the unit CoC results in the desired result.

The analysis is based on a real life annuity portfolio with reserves summing up to Euro 2.7 bn and annuities in payment of ca. Euro 240 M. We use a 99.5% shortfall as risk measure for the calculation of the CoC. At this point in time it is worth to mention the fact that

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta \times RC_t \times \pi(ZCB_t) = \beta \times \sum_{t=0}^{\infty} RC_t \times \pi(ZCB_t).$$

This means that it is possible to model the present value of the risk capital directly, which is done for this example. Furthermore the function:

$$\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, n \mapsto \frac{1}{\pi(ZCB_n)} \sum_{t=n}^{\infty} RC_t \times \pi(ZCB_t)$$

defines the required risk capital for the different periods. Figure 16.1 illustrates the replicating portfolio, on the one hand side with  $c = 100\%$ , and on the other with  $c = 130\%$ , showing the longer duration and hence the higher present value in the latter case.

By using the replicating portfolios as given in Figure 16.1, the development of the required capital corresponds to figure 16.2, using a somewhat simplified version for the capital.

As a next step these calculations have to be done for the different  $c(\omega)$ , and weighted with the corresponding probabilities. The following table illustrates this:

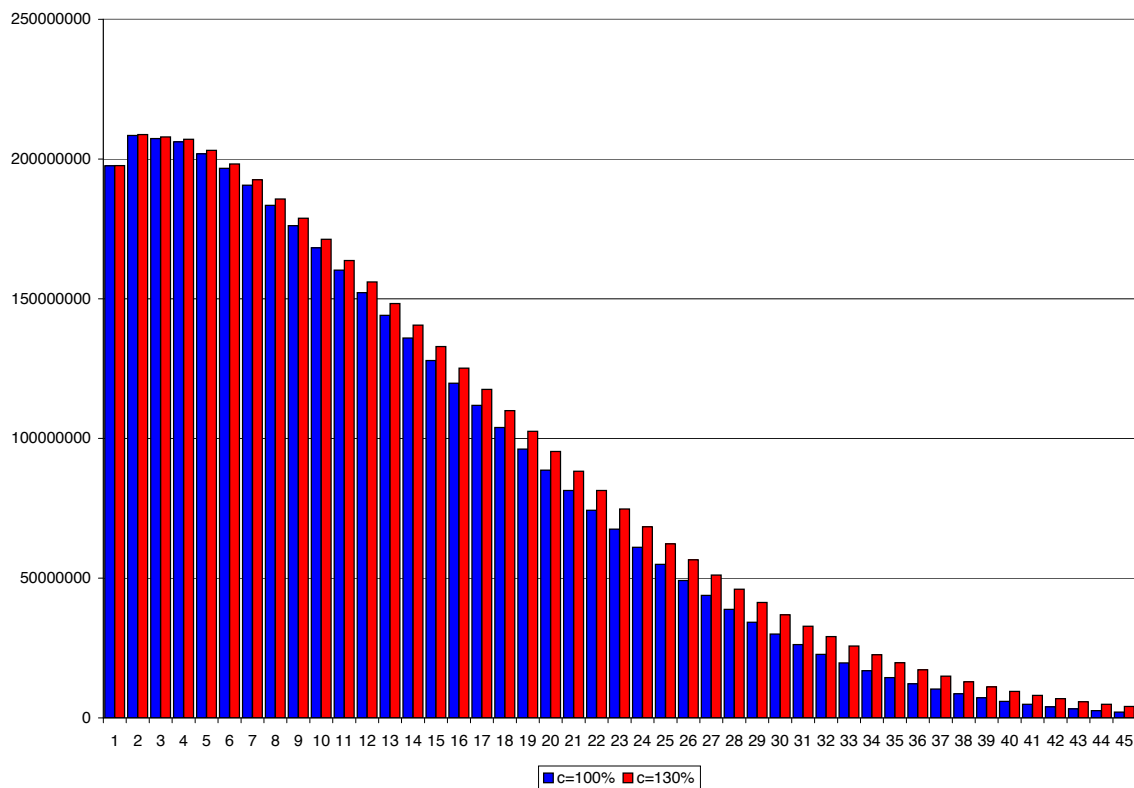


Abbildung 16.1: Replicating Portfolio

$c(\omega)$	$P[c(\omega)]$	Loss( $c(\omega)$ ) bn Euro	Contribution to TailVar bn Euro
1.0		0.000	
1.1		-0.032	
1.2		-0.065	
1.3		-0.099	
1.4		-0.133	
1.5		-0.169	
1.6		-0.205	
1.7		-0.242	
1.8	0.0005	-0.280	-0.028
1.9	0.0005	-0.319	-0.031
2.0	0.0004	-0.359	-0.028
2.5	0.0019	-0.572	-0.217
3.0	0.0017	-0.801	-0.272
<b>Total</b>	<b>0.0050</b>		<b>-0.578</b>

This indicates that the present value of the risk capital, calculated with the 99.5 % TailVar, amounts to 0.578 bn Euro. Assuming that the statutory reserves or the price the company pays corresponds to 2.934 bn Euro we get the following;

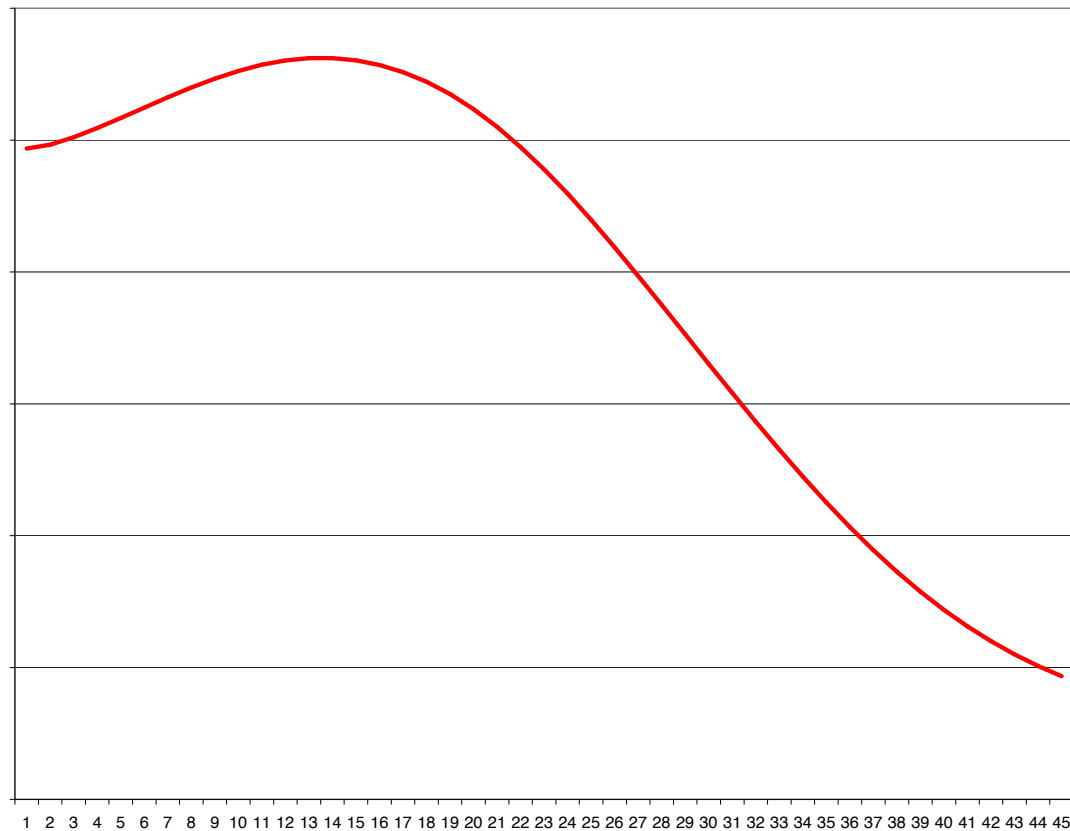


Abbildung 16.2: Required capital over time

		bn Euro	%
+	Statutory reserve	2.934	100.00 %
–	$\mathbb{E}[PV]$	2.750	93.73 %
–	CoC 13 %	0.075	2.56 %
–	Tax 25 %	0.028	0.95 %
=	<b>Profit Tax = 25 %</b>	<b>0.080</b>	<b>2.72 %</b>
<hr/>			
IRR	ca. 30 %		

In this particular case the margins induced by the prudent mortality laws in the statutory reserves are partially offset by a low interest environment. It is however obvious that the statutory reserves carry about 4 % of margin with respect to a market consistent valuation.

### 16.5.2 Capital Protection

Whereas we have considered in the first example an annuity portfolio, we now want to look at a life protection portfolio for consisting of 100  $x = 30$  year old persons with a term of 30 years. The death benefit amounts (per policy) to 100'000 Euro with a  $\mathbb{E}[PV] = 14'507$  Euro. In order to calculate the risk capital, we assume that the exogenous risk factor are types of pandemics, as follows:

$\theta$ = Relative $q_x$ -level	Return period for $\theta$	$F_{q_x\text{-level}}(\theta)$
1.0	0	0.000
1.1	10	0.975
1.2	20	0.976
1.3	30	0.978
1.4	40	0.980
1.5	50	0.981
2.0	100	0.990
2.5	175	0.994
3.0	250	0.996
4.0	500	0.998
10.0	1100	0.999
$20 + \varepsilon$	$\infty$	1.000

Based on this approach it is now possible to do a simulation by replacing the original  $q_x$  by a new random  $q_x(\omega)$  given by  $F_{q_x\text{-level}}(\theta)$ . The following table summarises the main results of this simulation:

		Relative	in % SaR
Expected Value at level 100 %	1'407'500		
Expected Addl Loss	43'100	3.1 %	0.43 %
Sdtdev	97'700	6.9 %	0.97 %
$2.5 \sigma$	244'400	17.4 %	2.44 %
$F^{-1}(99\%)$	568'800	40.4 %	5.68 %
$F^{-1}(99.6\%)$	720'500	51.2 %	7.20 %
TVar(99%)	697'100	49.5 %	6.97 %

This indicates that given a hurdle rate of 13 % and using the VaR with respect to a return period of 250 years, the required single premium for this contract can be calculated as follows, neglecting the impact of taxes:

Item	Amount
$\mathbb{E}[PV]$	1'450'700
CoC @ 13 %	$720'500 \times 13\%$ 93'600
<b>Total</b>	<b>1'544'300</b>

The following figures illustrate the effect of the 1918' influenza pandemy ('Spanish Flu'):



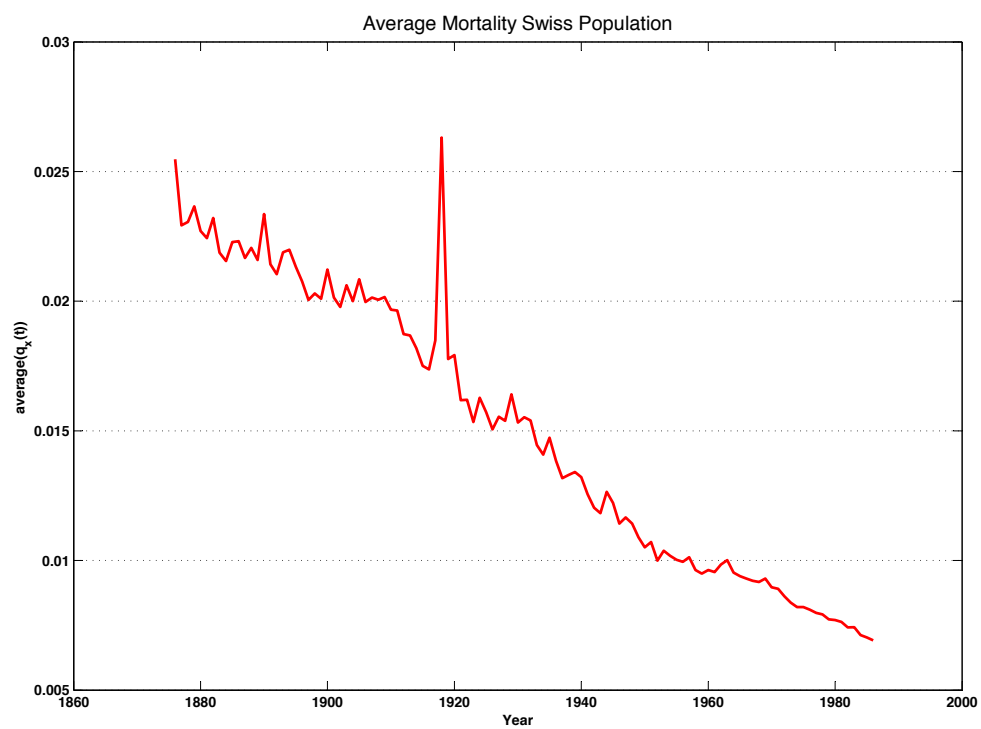


Abbildung 16.3: Development of Mortality over Time

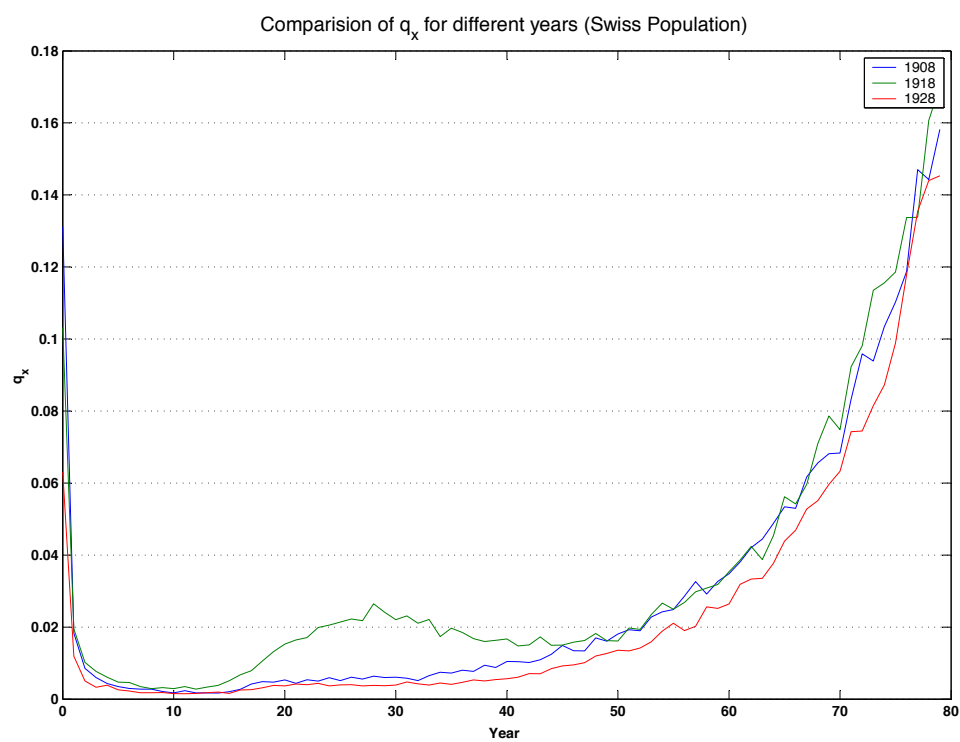


Abbildung 16.4: Comparison of different years

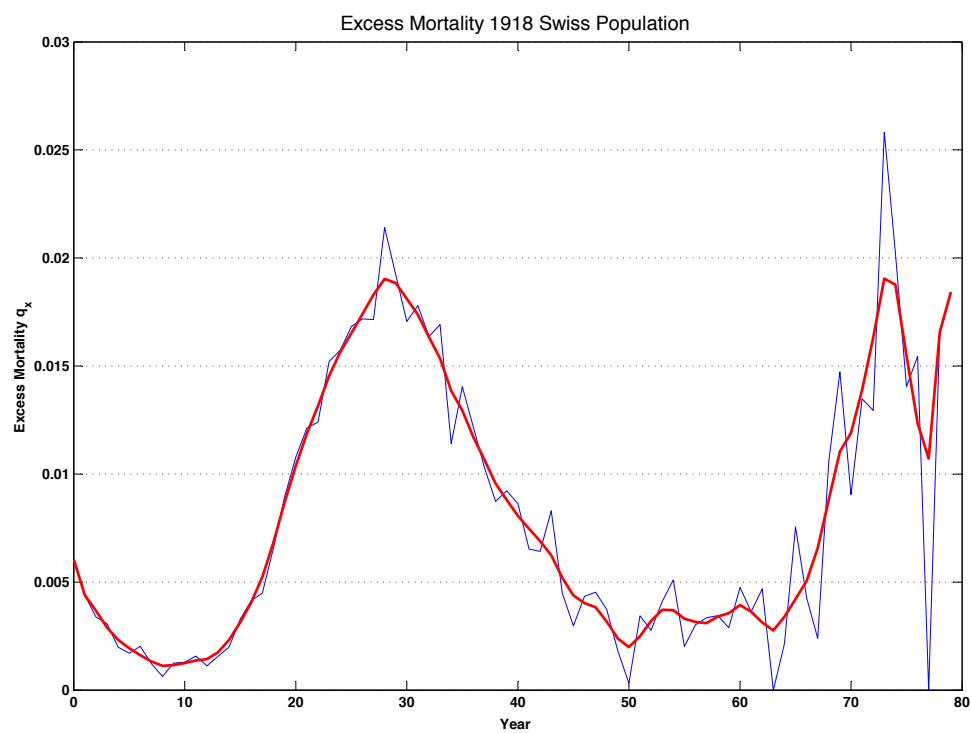


Abbildung 16.5: Excess Mortality 1918

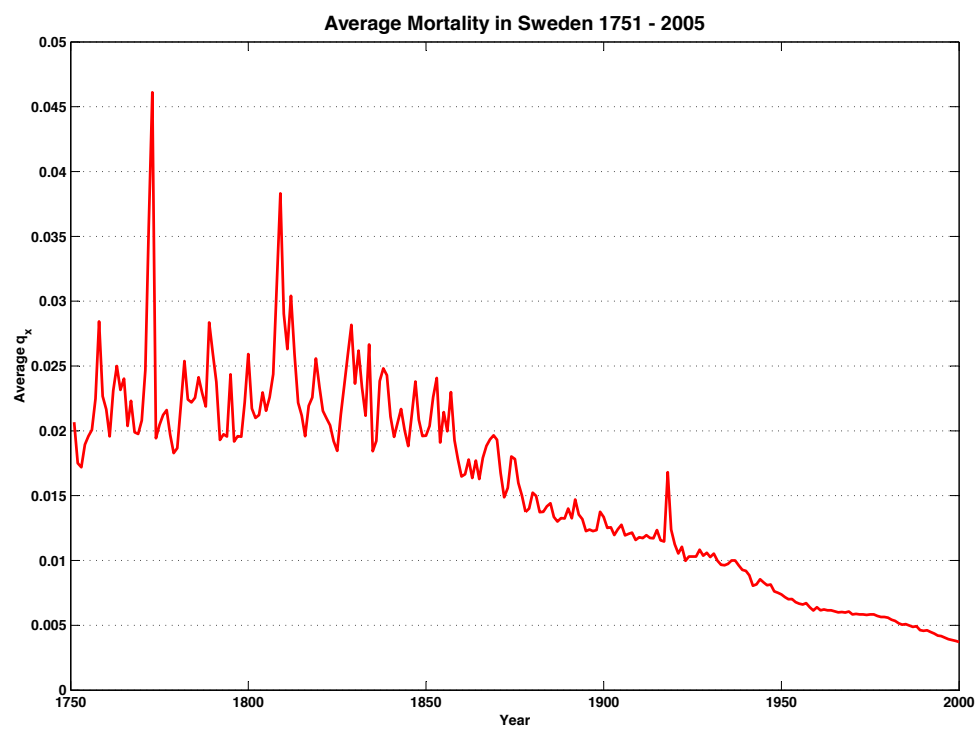


Abbildung 16.6: Average Mortality for Sweden 1751 - 2005

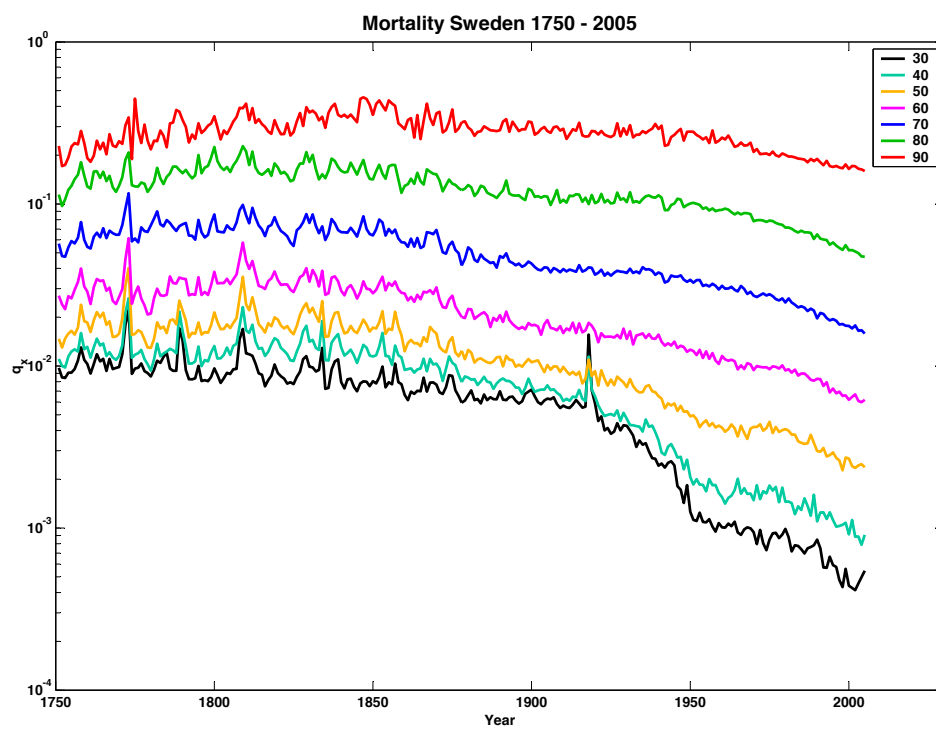


Abbildung 16.7: Mortality by Ages for Sweden 1751 - 2005



## **Anhang A**

# **Schweizer Volkssterbetafel**

Sterbewahrscheinlichkeit gemäss Schweizer Volkssterbetafel 1988/93:

## A.1 Männer

Alter	Ledig	Verheiratet	Verwitwet	Geschieden
1	2	3	4	5
18	0.001 128	0.006 055	-	-
19	0.001 414	0.002 360	-	-
20	0.001 530	0.001 410	0.014 641	0.011 985
21	0.001 575	0.001 138	0.035 403	0.010 034
22	0.001 621	0.001 123	0.053 526	0.008 393
23	0.001 684	0.001 217	0.036 550	0.007 221
24	0.001 764	0.001 298	0.031 296	0.006 315
25	0.001 861	0.001 256	0.026 818	0.005 606
26	0.001 974	0.001 125	0.022 998	0.005 048
27	0.002 102	0.000 977	0.020 349	0.004 607
28	0.002 245	0.000 861	0.018 237	0.004 262
29	0.002 399	0.000 798	0.016 521	0.003 995
30	0.002 563	0.000 777	0.015 095	0.003 793
31	0.002 736	0.000 785	0.013 875	0.003 646
32	0.002 916	0.000 814	0.012 802	0.003 548
33	0.003 102	0.000 855	0.011 827	0.003 493
34	0.003 293	0.000 901	0.010 918	0.003 477
35	0.003 490	0.000 953	0.010 060	0.003 496
36	0.003 695	0.001 010	0.009 243	0.003 546
37	0.003 909	0.001 073	0.008 460	0.003 627
38	0.004 137	0.001 145	0.007 705	0.003 736
39	0.004 379	0.001 225	0.006 947	0.003 873
40	0.004 640	0.001 316	0.006 267	0.004 037
41	0.004 923	0.001 420	0.005 593	0.004 227
42	0.005 231	0.001 539	0.005 009	0.004 448
43	0.005 570	0.001 676	0.004 558	0.004 703
44	0.005 945	0.001 834	0.004 267	0.005 000
45	0.006 359	0.002 017	0.004 159	0.005 345
46	0.006 814	0.002 227	0.004 259	0.005 747
47	0.007 315	0.002 468	0.004 558	0.006 211
48	0.007 864	0.002 742	0.005 053	0.006 743
49	0.008 466	0.003 055	0.005 753	0.007 350
50	0.009 125	0.003 410	0.006 667	0.008 037
51	0.009 844	0.003 811	0.007 796	0.008 811
52	0.010 629	0.004 263	0.009 120	0.009 677
53	0.011 485	0.004 770	0.010 579	0.010 642
54	0.012 415	0.005 336	0.012 087	0.011 711
55	0.013 427	0.005 966	0.013 603	0.012 890
56	0.014 529	0.006 668	0.015 110	0.014 184
57	0.015 729	0.007 447	0.016 598	0.015 599
58	0.017 036	0.008 311	0.018 069	0.017 138
59	0.018 460	0.009 266	0.019 529	0.018 803



Age	Célibataire	Marié	Veuf	Divorcé
1	2	3	4	5
60	0.020 012	0.010 321	0.020 998	0.020 594
61	0.021 705	0.011 483	0.022 506	0.022 508
62	0.023 552	0.012 760	0.024 091	0.024 538
63	0.025 567	0.014 158	0.025 805	0.026 675
64	0.027 765	0.015 688	0.027 704	0.028 910
65	0.030 159	0.017 360	0.029 810	0.031 252
66	0.032 759	0.019 190	0.032 140	0.033 720
67	0.035 574	0.021 193	0.034 710	0.036 340
68	0.038 614	0.023 390	0.037 533	0.039 141
69	0.041 885	0.025 801	0.040 627	0.042 164
70	0.045 392	0.028 454	0.044 004	0.045 453
71	0.049 137	0.031 377	0.047 677	0.049 068
72	0.053 121	0.034 606	0.051 656	0.053 077
73	0.057 337	0.038 182	0.055 948	0.057 568
74	0.061 788	0.042 150	0.060 563	0.062 632
75	0.066 513	0.046 550	0.065 535	0.068 314
76	0.071 573	0.051 423	0.070 915	0.074 645
77	0.077 042	0.056 815	0.076 758	0.081 643
78	0.083 016	0.062 770	0.083 136	0.089 318
79	0.089 609	0.069 337	0.090 129	0.097 658
80	0.096 962	0.076 566	0.097 834	0.106 602
81	0.105 249	0.084 508	0.106 369	0.116 122
82	0.114 685	0.093 214	0.115 873	0.126 131
83	0.125 538	0.102 737	0.126 511	0.136 507
84	0.138 059	0.113 122	0.138 443	0.147 136
85	0.152 175	0.124 391	0.151 677	0.158 087
86	0.167 632	0.136 549	0.166 132	0.169 516
87	0.183 997	0.149 582	0.181 609	0.181 474
88	0.200 642	0.163 451	0.197 969	0.194 544
89	0.216 727	0.178 080	0.214 824	0.208 894
90	0.231 206	0.193 394	0.231 725	0.224 938
91	0.243 232	0.209 086	0.248 263	0.243 194
92	0.253 389	0.224 057	0.264 600	0.264 315
93	0.262 862	0.236 751	0.281 162	0.289 130
94	0.273 068	0.245 392	0.298 513	0.318 708
95	0.285 658	0.248 199	0.317 368	0.354 442
96	0.302 611	0.246 575	0.338 616	0.398 178
97	0.326 447	0.253 864	0.363 367	0.452 388
98	0.360 629	0.309 682	0.393 034	0.520 445
99	0.410 258	0.377 884	0.429 450	0.607 003

## A.2 Frauen

Alter	Ledig	Verheiratet	Verwitwet	Geschieden
1	2	3	4	5
17	0.000 328	0.000 721	-	-
18	0.000 388	0.000 561	-	-
19	0.000 441	0.000 478	-	-
20	0.000 453	0.000 424	0.020 666	0.002 840
21	0.000 451	0.000 382	0.017 142	0.002 252
22	0.000 479	0.000 353	0.014 314	0.001 790
23	0.000 531	0.000 333	0.011 996	0.001 426
24	0.000 603	0.000 322	0.008 481	0.001 138
25	0.000 686	0.000 317	0.006 747	0.001 070
26	0.000 767	0.000 317	0.005 588	0.001 125
27	0.000 841	0.000 323	0.004 632	0.001 258
28	0.000 906	0.000 333	0.003 840	0.001 418
29	0.000 963	0.000 347	0.003 307	0.001 548
30	0.001 015	0.000 366	0.002 901	0.001 630
31	0.001 063	0.000 389	0.002 590	0.001 666
32	0.001 110	0.000 416	0.002 351	0.001 664
33	0.001 160	0.000 446	0.002 170	0.001 635
34	0.001 215	0.000 481	0.002 037	0.001 591
35	0.001 276	0.000 519	0.001 946	0.001 542
36	0.001 345	0.000 562	0.001 893	0.001 500
37	0.001 423	0.000 609	0.001 875	0.001 473
38	0.001 510	0.000 663	0.001 890	0.001 471
39	0.001 606	0.000 722	0.001 939	0.001 502
40	0.001 712	0.000 788	0.002 023	0.001 577
41	0.001 829	0.000 862	0.002 144	0.001 690
42	0.001 958	0.000 944	0.002 297	0.001 836
43	0.002 102	0.001 036	0.002 475	0.002 005
44	0.002 261	0.001 140	0.002 669	0.002 185
45	0.002 437	0.001 255	0.002 866	0.002 376
46	0.002 629	0.001 383	0.003 051	0.002 577
47	0.002 838	0.001 524	0.003 223	0.002 789
48	0.003 061	0.001 680	0.003 386	0.003 015
49	0.003 298	0.001 849	0.003 542	0.003 254
50	0.003 548	0.002 034	0.003 699	0.003 510
51	0.003 809	0.002 233	0.003 863	0.003 785
52	0.004 079	0.002 446	0.004 041	0.004 081
53	0.004 353	0.002 672	0.004 242	0.004 402
54	0.004 630	0.002 910	0.004 477	0.004 752
55	0.004 912	0.003 162	0.004 749	0.005 135
56	0.005 202	0.003 430	0.005 061	0.005 553
57	0.005 507	0.003 716	0.005 416	0.006 011
58	0.005 832	0.004 025	0.005 818	0.006 513
59	0.006 186	0.004 362	0.006 271	0.007 063

Age	Célibataire	Marié	Veuf	Divorcé
1	2	3	4	5
60	0.006 579	0.004 731	0.006 779	0.007 665
61	0.007 022	0.005 141	0.007 346	0.008 326
62	0.007 531	0.005 601	0.007 978	0.009 051
63	0.008 123	0.006 121	0.008 677	0.009 847
64	0.008 820	0.006 716	0.009 451	0.010 722
65	0.009 636	0.007 396	0.010 308	0.011 687
66	0.010 585	0.008 173	0.011 261	0.012 755
67	0.011 685	0.009 061	0.012 326	0.013 942
68	0.012 952	0.010 075	0.013 518	0.015 267
69	0.014 407	0.011 233	0.014 860	0.016 754
70	0.016 072	0.012 554	0.016 375	0.018 430
71	0.017 968	0.014 062	0.018 093	0.020 327
72	0.020 119	0.015 781	0.020 051	0.022 485
73	0.022 546	0.017 740	0.022 289	0.024 952
74	0.025 275	0.019 971	0.024 858	0.027 783
75	0.028 344	0.022 513	0.027 809	0.031 036
76	0.031 803	0.025 413	0.031 198	0.034 772
77	0.035 710	0.028 723	0.035 092	0.039 062
78	0.040 131	0.032 506	0.039 565	0.043 990
79	0.045 148	0.036 835	0.044 702	0.049 647
80	0.050 852	0.041 794	0.050 599	0.056 135
81	0.057 358	0.047 482	0.057 368	0.063 581
82	0.064 796	0.054 016	0.065 130	0.072 117
83	0.073 325	0.061 534	0.074 026	0.081 892
84	0.083 107	0.070 165	0.084 191	0.093 079
85	0.094 215	0.079 881	0.095 685	0.105 899
86	0.106 648	0.090 513	0.108 498	0.120 614
87	0.120 340	0.101 736	0.122 548	0.137 536
88	0.135 130	0.113 035	0.137 660	0.157 030
89	0.150 746	0.124 050	0.153 545	0.179 533
90	0.166 786	0.134 099	0.169 787	0.205 560
91	0.182 852	0.142 395	0.185 995	0.235 727
92	0.199 087	0.148 065	0.202 420	0.270 769
93	0.215 927	0.150 285	0.219 670	0.311 564
94	0.233 995	0.152 549	0.238 596	0.359 168
95	0.254 134	0.154 857	0.260 339	0.414 850
96	0.277 454	0.157 210	0.286 422	0.480 140
97	0.305 427	0.159 611	0.318 917	0.556 893
98	0.340 042	0.162 060	0.360 711	0.647 356
99	0.384 045	0.164 560	0.415 969	0.754 265



## **Anhang B**

# **Sterbetafeln Einzelkapitalversicherung**

Sterbewahrscheinlichkeiten nach Sterbetafeln EKM 1995 und EKF 1995:

## B.1 Männer: EKM 1995

0	0.003096	60	0.010752
1	0.001177	61	0.011746
2	0.000805	62	0.012788
3	0.000719	63	0.013908
4	0.000643	64	0.015062
5	0.000577	65	0.016271
6	0.000522	66	0.017551
7	0.000478	67	0.018905
8	0.000446	68	0.020333
9	0.000427	69	0.021838
10	0.000422	70	0.023423
11	0.000431	71	0.025106
12	0.000453	72	0.026970
13	0.000496	73	0.029115
14	0.000591	74	0.031639
15	0.000772	75	0.034642
16	0.001067	76	0.038220
17	0.001475	77	0.042471
18	0.001888	78	0.047492
19	0.002177	79	0.053380
20	0.002254	80	0.060230
21	0.002174	81	0.067782
22	0.002028	82	0.075670
23	0.001863	83	0.083909
24	0.001714	84	0.092497
25	0.001593	85	0.101436
26	0.001497	86	0.110725
27	0.001421	87	0.120365
28	0.001365	88	0.130355
29	0.001327	89	0.140695
30	0.001305	90	0.151386
31	0.001297	91	0.162427
32	0.001302	92	0.173818
33	0.001318	93	0.185559
34	0.001342	94	0.197651
35	0.001374	95	0.210092
36	0.001411	96	0.222884
37	0.001469	97	0.236025
38	0.001539	98	0.249516
39	0.001623	99	0.263356
40	0.001724	100	0.277546
41	0.001843	101	0.292085
42	0.001984	102	0.306973
43	0.002148	103	0.322211
44	0.002340	104	0.337797
45	0.002561	105	0.353732
46	0.002813	106	0.370015
47	0.003098	107	0.386646
48	0.003417	108	0.403626
49	0.003773	109	0.420953
50	0.004166	110	0.438628
51	0.004598	111	0.456650
52	0.005070	112	0.475019
53	0.005587	113	0.493735
54	0.006154	114	0.512797
55	0.006777	115	0.532205
56	0.007451	116	0.551959
57	0.008177	117	0.572058
58	0.008959	118	0.592501
59	0.009815	119	0.613289

## B.2 Frauen: EKF 1995

0	0.001562	60	0.005415
1	0.001218	61	0.005824
2	0.000933	62	0.006199
3	0.000701	63	0.006593
4	0.000519	64	0.007005
5	0.000385	65	0.007447
6	0.000295	66	0.007970
7	0.000250	67	0.008635
8	0.000246	68	0.009502
9	0.000272	69	0.010631
10	0.000317	70	0.012078
11	0.000367	71	0.013913
12	0.000414	72	0.016100
13	0.000452	73	0.018657
14	0.000530	74	0.021579
15	0.000735	75	0.024866
16	0.000992	76	0.028516
17	0.001112	77	0.032526
18	0.001045	78	0.036896
19	0.000939	79	0.041625
20	0.000853	80	0.046712
21	0.000778	81	0.052156
22	0.000714	82	0.057957
23	0.000668	83	0.064115
24	0.000633	84	0.070629
25	0.000613	85	0.077498
26	0.000605	86	0.084724
27	0.000606	87	0.092304
28	0.000615	88	0.100239
29	0.000631	89	0.108529
30	0.000653	90	0.117173
31	0.000679	91	0.126171
32	0.000709	92	0.135523
33	0.000741	93	0.145229
34	0.000778	94	0.155289
35	0.000818	95	0.165701
36	0.000863	96	0.176467
37	0.000920	97	0.187586
38	0.000984	98	0.199058
39	0.001055	99	0.210882
40	0.001136	100	0.223058
41	0.001225	101	0.235586
42	0.001324	102	0.248467
43	0.001432	103	0.261698
44	0.001553	104	0.275282
45	0.001687	105	0.289216
46	0.001832	106	0.303501
47	0.001988	107	0.318136
48	0.002158	108	0.333123
49	0.002341	109	0.348459
50	0.002537	110	0.364144
51	0.002743	111	0.380180
52	0.002961	112	0.396564
53	0.003196	113	0.413297
54	0.003448	114	0.430378
55	0.003719	115	0.447808
56	0.004008	116	0.465584
57	0.004313	117	0.483708
58	0.004643	118	0.502179
59	0.005007	119	0.520996





## Anhang C

# Performance der Schweizer Aktien in den letzten 70 Jahren

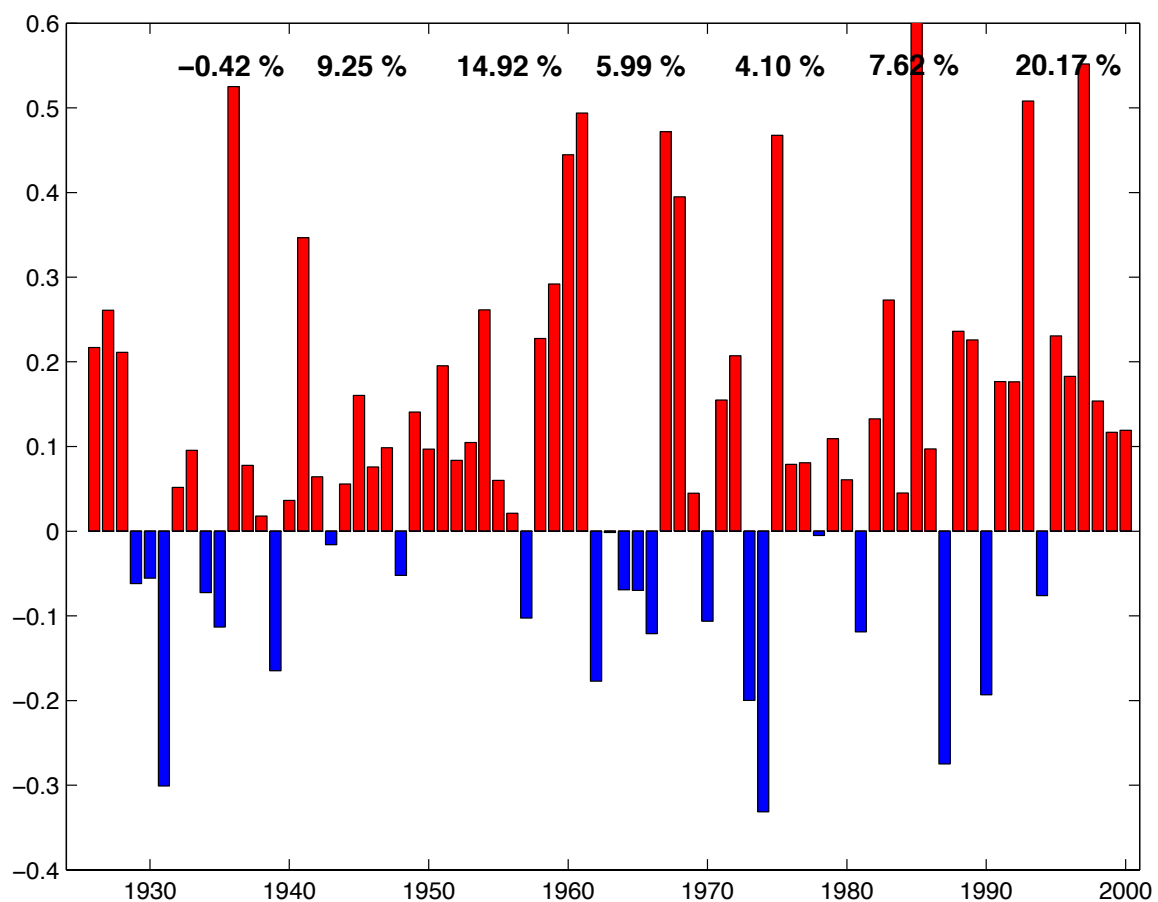


Abbildung C.1: Performance des SMI 1925 - 2000

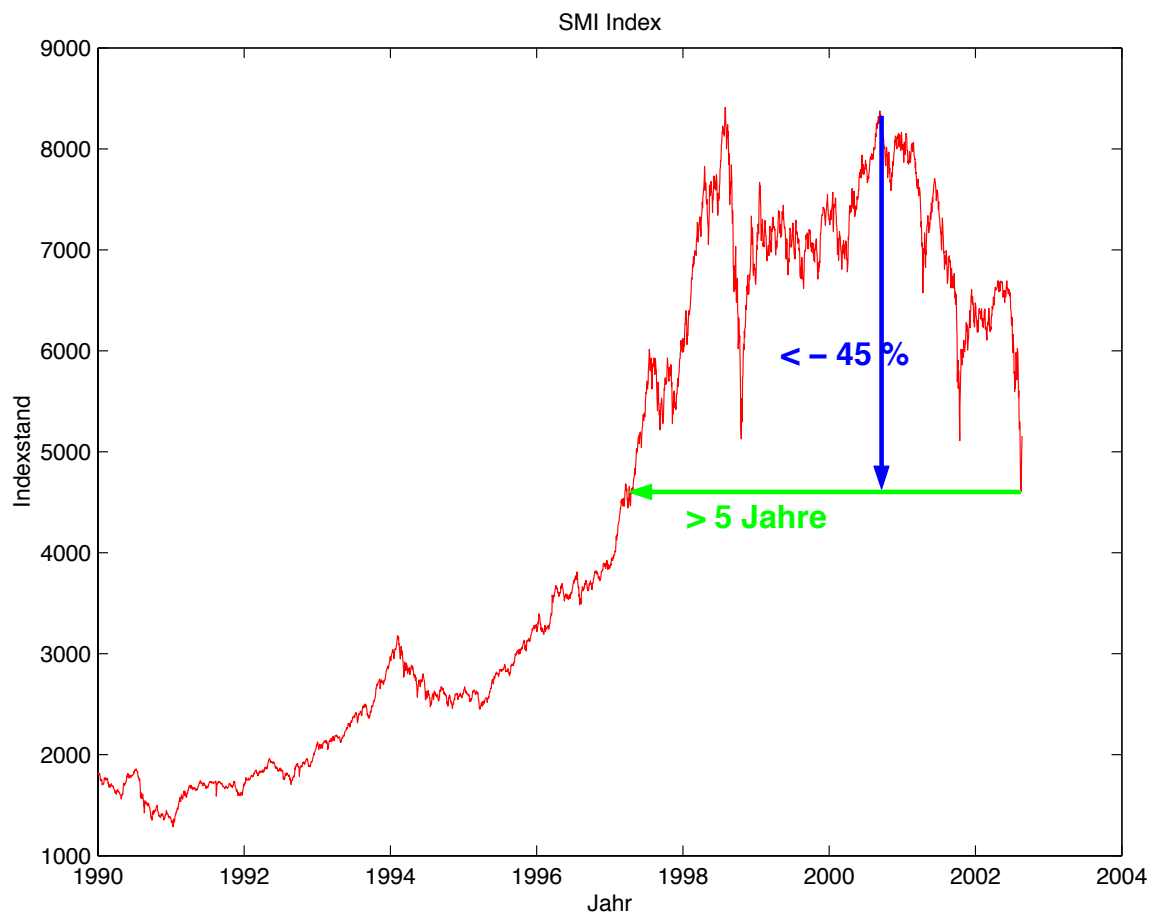


Abbildung C.2: Verlauf der Börsenindices

## Anhang D

# Zinsstrukturen

Zinsstruktur 10.5.2000: Swapsätze,  
Zinsstruktur 26.11.2002: CHF LIBOR Terminraten.  
Beide umgerechnet auf ZCB-Preise.

Laufzeit $s$	Zinsstruktur 10.5.2000		Zinsstruktur 26.11.2002	
	Spot Rates	Wert	Spot Rates	Wert
	$Y(t, t+s)$	$P(t, t+s)$	$Y(t, t+s)$	$P(t, t+s)$
1	3.91%	0.96239	0.93%	0.99075
2	4.09%	0.92294	1.35%	0.97355
3	4.22%	0.88342	1.69%	0.95084
4	4.28%	0.84576	1.96%	0.92532
5	4.32%	0.80940	2.17%	0.89806
6	4.38%	0.77322	2.35%	0.86984
7	4.45%	0.73727	2.50%	0.84112
8	4.52%	0.70210	2.64%	0.81157
9	4.58%	0.66809	2.77%	0.78209
10	4.64%	0.63535	2.88%	0.75305
11			2.98%	0.72380
12			3.08%	0.69501
13			3.16%	0.66736
14			3.23%	0.64082
15			3.29%	0.61539
16			3.34%	0.59109
17			3.38%	0.56787
18			3.42%	0.54571
19			3.45%	0.52460
20			3.48%	0.50446
21			3.50%	0.48527
22			3.52%	0.46704
23			3.53%	0.44980
24			3.54%	0.43355
25			3.55%	0.41833
26			3.55%	0.40420
27			3.54%	0.39101
28			3.53%	0.37860
29			3.52%	0.36691
30			3.50%	0.35585

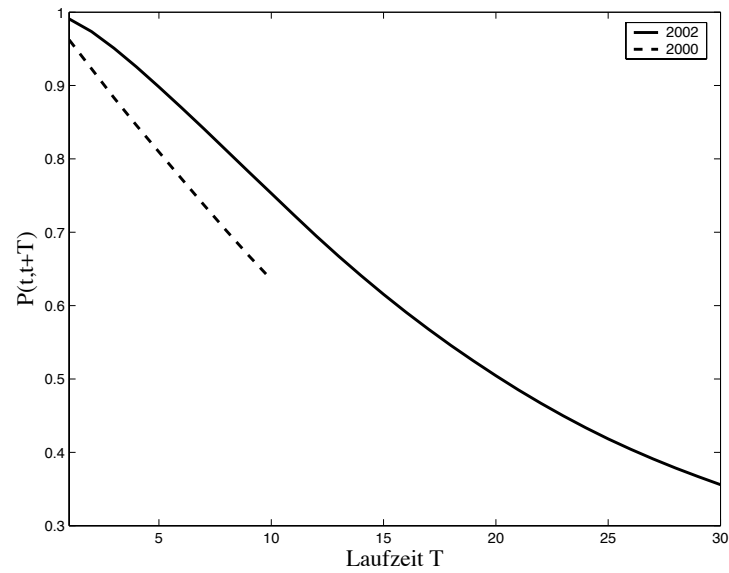


Abbildung D.1: DK und  $V_{t|35}$  einer Police (gemischte Versicherung).

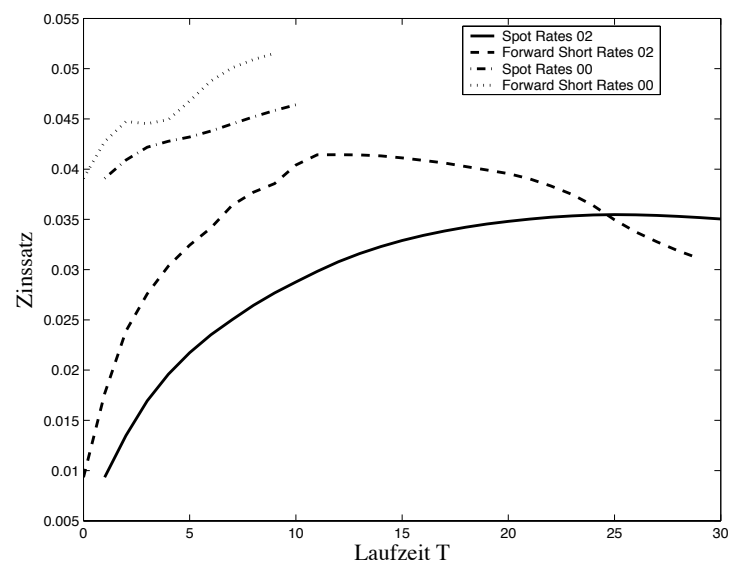


Abbildung D.2: DK und  $V_{t|35}$  einer Police (gemischte Versicherung).

# Anhang E

## Sterbetafel EKM95

Sterbetafel für Männer mit einem technischen Zins von 2.50%.

$x$	$q(x)$	$l(x)$	$d(x)$	$e(x)$	$D(x)$	$N(x)$	$S(x)$	$C(x)$	$M(x)$	$R(x)$
0	0.00309632	100'000	310	76.35	100'000.00	3'405'999	94'053'006	302.08	16'927	1'112'023
1	0.00117703	99'690	117	75.59	97'258.90	3'305'999	90'647'007	111.68	16'625	1'095'096
2	0.00080510	99'573	80	74.67	94'775.04	3'208'740	87'341'008	74.44	16'513	1'078'472
3	0.00071931	99'493	72	73.73	92'389.01	3'113'965	84'132'268	64.84	16'439	1'061'958
4	0.00064308	99'421	64	72.79	90'070.79	3'021'576	81'018'303	56.51	16'374	1'045'520
5	0.00057698	99'357	57	71.83	87'817.43	2'931'505	77'996'727	49.43	16'317	1'029'146
6	0.00052168	99'300	52	70.87	85'626.11	2'843'688	75'065'222	43.58	16'268	1'012'829
7	0.00047790	99'248	47	69.91	83'494.09	2'758'062	72'221'534	38.93	16'224	996'561
8	0.00044623	99'201	44	68.94	81'418.72	2'674'568	69'463'472	35.45	16'185	980'337
9	0.00042741	99'157	42	67.98	79'397.45	2'593'149	66'788'905	33.11	16'150	964'151
10	0.00042205	99'114	42	67.00	77'427.82	2'513'751	64'195'756	31.88	16'117	948'001
11	0.00043075	99'072	43	66.03	75'507.45	2'436'324	61'682'004	31.73	16'085	931'884
12	0.00045319	99'030	45	65.06	73'634.08	2'360'816	59'245'681	32.56	16'053	915'800
13	0.00049621	98'985	49	64.09	71'805.57	2'287'182	56'884'865	34.76	16'021	899'746
14	0.00059111	98'936	58	63.12	70'019.45	2'215'376	54'597'683	40.38	15'986	883'726
15	0.00077145	98'877	76	62.16	68'271.28	2'145'357	52'382'306	51.38	15'945	867'740
16	0.00106657	98'801	105	61.21	66'554.74	2'077'086	50'236'949	69.25	15'894	851'794
17	0.00147493	98'696	146	60.27	64'862.20	2'010'531	48'159'863	93.33	15'825	835'900
18	0.00188763	98'550	186	59.36	63'186.86	1'945'669	46'149'332	116.36	15'732	820'075
19	0.00217699	98'364	214	58.47	61'529.36	1'882'482	44'203'663	130.68	15'615	804'344
20	0.00225392	98'150	221	57.60	59'897.96	1'820'953	42'321'181	131.71	15'484	788'729
21	0.00217437	97'929	213	56.73	58'305.32	1'761'055	40'500'229	123.69	15'353	773'244
22	0.00202806	97'716	198	55.85	56'759.55	1'702'749	38'739'174	112.30	15'229	757'891
23	0.00186320	97'517	182	54.96	55'262.87	1'645'990	37'036'425	100.45	15'117	742'662
24	0.00171386	97'336	167	54.06	53'814.54	1'590'727	35'390'435	89.98	15'016	727'546
25	0.00159336	97'169	155	53.15	52'412.01	1'536'912	33'799'708	81.47	14'926	712'529
26	0.00149656	97'014	145	52.24	51'052.19	1'484'500	32'262'796	74.54	14'845	697'603
27	0.00142104	96'869	138	51.32	49'732.48	1'433'448	30'778'295	68.95	14'770	682'758
28	0.00136506	96'731	132	50.39	48'450.54	1'383'716	29'344'847	64.52	14'701	667'988
29	0.00132696	96'599	128	49.46	47'204.30	1'335'265	27'961'132	61.11	14'637	653'286
30	0.00130497	96'471	126	48.52	45'991.86	1'288'061	26'625'866	58.55	14'576	638'649
31	0.00129738	96'345	125	47.58	44'811.56	1'242'069	25'337'806	56.72	14'517	624'074
32	0.00130242	96'220	125	46.65	43'661.87	1'197'257	24'095'737	55.48	14'460	609'557
33	0.00131780	96'095	127	45.71	42'541.47	1'153'596	22'898'479	54.69	14'405	595'096
34	0.00134211	95'968	129	44.77	41'449.18	1'111'054	21'744'884	54.27	14'350	580'691
35	0.00137348	95'839	132	43.82	40'383.95	1'069'605	20'633'830	54.11	14'296	566'341

$x$	$q(x)$	$l(x)$	$d(x)$	$e(x)$	$D(x)$	$N(x)$	$S(x)$	$C(x)$	$M(x)$	$R(x)$
36	0.00141064	95'708	135	42.88	39'344.86	1'029'221	19'564'225	54.15	14'242	552'045
37	0.00146936	95'573	140	41.94	38'331.08	989'876	18'535'004	54.95	14'188	537'803
38	0.00153936	95'432	147	41.01	37'341.23	951'545	17'545'128	56.08	14'133	523'615
39	0.00162305	95'285	155	40.07	36'374.39	914'204	16'593'583	57.60	14'077	509'482
40	0.00172361	95'131	164	39.13	35'429.61	877'829	15'679'379	59.58	14'019	495'405
41	0.00184302	94'967	175	38.20	34'505.90	842'400	14'801'550	62.04	13'960	481'386
42	0.00198369	94'792	188	37.27	33'602.25	807'894	13'959'150	65.03	13'898	467'427
43	0.00214841	94'604	203	36.34	32'717.65	774'292	13'151'256	68.58	13'832	453'529
44	0.00234001	94'400	221	35.42	31'851.08	741'574	12'376'964	72.71	13'764	439'697
45	0.00256130	94'180	241	34.50	31'001.51	709'723	11'635'390	77.47	13'691	425'933
46	0.00281335	93'938	264	33.59	30'167.91	678'721	10'925'667	82.80	13'614	412'242
47	0.00309750	93'674	290	32.68	29'349.30	648'553	10'246'946	88.69	13'531	398'628
48	0.00341659	93'384	319	31.78	28'544.78	619'204	9'598'393	95.15	13'442	385'097
49	0.00377280	93'065	351	30.89	27'753.41	590'659	8'979'188	102.15	13'347	371'655
50	0.00416629	92'714	386	30.00	26'974.35	562'906	8'388'529	109.64	13'245	358'308
51	0.00459764	92'327	424	29.13	26'206.79	535'932	7'825'623	117.55	13'135	345'063
52	0.00507010	91'903	466	28.26	25'450.05	509'725	7'289'692	125.89	13'018	331'927
53	0.00558665	91'437	511	27.40	24'703.43	484'275	6'779'967	134.64	12'892	318'910
54	0.00615387	90'926	560	26.55	23'966.27	459'571	6'295'692	143.89	12'757	306'018
55	0.00677685	90'367	612	25.71	23'237.84	435'605	5'836'121	153.64	12'613	293'261
56	0.00745134	89'754	669	24.88	22'517.42	412'367	5'400'516	163.69	12'460	280'647
57	0.00817648	89'085	728	24.07	21'804.52	389'850	4'988'148	173.94	12'296	268'188
58	0.00895867	88'357	792	23.26	21'098.77	368'045	4'598'298	184.41	12'122	255'892
59	0.00981477	87'566	859	22.47	20'399.76	346'947	4'230'253	195.34	11'938	243'770
60	0.01075189	86'706	932	21.69	19'706.87	326'547	3'883'307	206.72	11'742	231'832
61	0.01174563	85'774	1'007	20.92	19'019.49	306'840	3'556'760	217.95	11'536	220'090
62	0.01278809	84'766	1'084	20.16	18'337.66	287'820	3'249'920	228.78	11'318	208'554
63	0.01390835	83'682	1'164	19.41	17'661.61	269'483	2'962'100	239.65	11'089	197'236
64	0.01506199	82'518	1'243	18.68	16'991.19	251'821	2'692'617	249.68	10'849	186'148
65	0.01627112	81'276	1'322	17.96	16'327.09	234'830	2'440'796	259.18	10'600	175'298
66	0.01755129	79'953	1'403	17.25	15'669.69	218'503	2'205'966	268.32	10'340	164'699
67	0.01890449	78'550	1'485	16.55	15'019.19	202'833	1'987'463	277.00	10'072	154'358
68	0.02033281	77'065	1'567	15.86	14'375.86	187'814	1'784'630	285.17	9'795	144'286
69	0.02183838	75'498	1'649	15.17	13'740.06	173'438	1'596'816	292.74	9'510	134'491
70	0.02342329	73'849	1'730	14.50	13'112.19	159'698	1'423'378	299.64	9'217	124'982
71	0.02510596	72'119	1'811	13.84	12'492.74	146'586	1'263'680	305.99	8'917	115'764
72	0.02696995	70'309	1'896	13.18	11'882.05	134'093	1'117'094	312.64	8'611	106'847
73	0.02911474	68'413	1'992	12.53	11'279.60	122'211	983'001	320.39	8'299	98'235
74	0.03163910	66'421	2'101	11.89	10'684.10	110'931	860'790	329.79	7'978	89'937
75	0.03464145	64'319	2'228	11.27	10'093.72	100'247	749'858	341.13	7'649	81'958
76	0.03821961	62'091	2'373	10.65	9'506.40	90'154	649'611	354.47	7'308	74'309
77	0.04247087	59'718	2'536	10.06	8'920.06	80'647	559'457	369.60	6'953	67'002
78	0.04749215	57'182	2'716	9.48	8'332.90	71'727	478'810	386.09	6'583	60'049
79	0.05337988	54'466	2'907	8.93	7'743.56	63'394	407'083	403.27	6'197	53'465
80	0.06023015	51'559	3'105	8.40	7'151.43	55'651	343'688	420.23	5'794	47'268
81	0.06778164	48'453	3'284	7.91	6'556.78	48'499	288'038	433.59	5'374	41'474
82	0.07567007	45'169	3'418	7.45	5'963.26	41'943	239'538	440.23	4'940	36'100
83	0.08390857	41'751	3'503	7.02	5'377.58	35'979	197'596	440.22	4'500	31'160
84	0.09249718	38'248	3'538	6.61	4'806.20	30'602	161'617	433.72	4'060	26'660
85	0.10143610	34'710	3'521	6.24	4'255.26	25'795	131'015	421.11	3'626	22'600
86	0.11072529	31'189	3'453	5.88	3'730.37	21'540	105'219	402.97	3'205	18'974
87	0.12036489	27'736	3'338	5.55	3'236.41	17'810	83'679	380.05	2'802	15'769
88	0.13035480	24'397	3'180	5.24	2'777.42	14'573	65'869	353.22	2'422	12'967

$x$	$q(x)$	$l(x)$	$d(x)$	$e(x)$	$D(x)$	$N(x)$	$S(x)$	$C(x)$	$M(x)$	$R(x)$
89	0.14069522	21'217	2'985	4.96	2'356.46	11'796	51'296	323.46	2'069	10'545
90	0.15138581	18'232	2'760	4.69	1'975.53	9'440	39'500	291.77	1'745	8'476
91	0.16242684	15'472	2'513	4.43	1'635.57	7'464	30'060	259.18	1'454	6'731
92	0.17381793	12'959	2'252	4.19	1'336.50	5'828	22'596	226.64	1'194	5'277
93	0.18555935	10'706	1'987	3.97	1'077.26	4'492	16'768	195.02	968	4'083
94	0.19765079	8'720	1'723	3.76	855.97	3'415	12'276	165.06	773	3'115
95	0.21009227	6'996	1'470	3.57	670.03	2'559	8'861	137.34	608	2'343
96	0.22288360	5'526	1'232	3.38	516.36	1'889	6'302	112.28	470	1'735
97	0.23602478	4'295	1'014	3.21	391.48	1'372	4'414	90.15	358	1'265
98	0.24951558	3'281	819	3.05	291.79	981	3'041	71.03	268	907
99	0.26335610	2'462	648	2.89	213.64	689	2'061	54.89	197	639
100	0.27754588	1'814	503	2.75	153.54	475	1'371	41.57	142	442
101	0.29208511	1'310	383	2.61	108.22	322	896	30.84	100	300
102	0.30697332	928	285	2.48	74.74	214	574	22.38	70	200
103	0.32221066	643	207	2.36	50.53	139	360	15.89	47	130
104	0.33779676	436	147	2.25	33.42	88	222	11.01	31	83
105	0.35373155	289	102	2.14	21.59	55	133	7.45	20	52
106	0.37001472	186	69	2.04	13.61	33	78	4.91	13	31
107	0.38664618	117	45	1.94	8.37	20	45	3.16	8	19
108	0.40362561	72	29	1.85	5.01	11	25	1.97	5	11
109	0.42095298	43	18	1.76	2.91	6	14	1.20	3	6
110	0.43862773	24.9	10.9	1.68	1.65	3.5	7.2	0.70	1.6	3.3
111	0.45664991	14.0	6.4	1.60	0.90	1.8	3.7	0.40	0.9	1.8
112	0.47501892	7.6	3.6	1.53	0.48	0.9	1.8	0.22	0.5	0.9
113	0.49373475	4.0	2.0	1.46	0.24	0.5	0.9	0.12	0.2	0.4
114	0.51279687	2.0	1.0	1.39	0.12	0.2	0.4	0.06	0.1	0.2
115	0.53220501	0.98	0.52	1.33	0.06	0.10	0.18	0.03	0.05	0.10
116	0.55195867	0.46	0.25	1.26	0.03	0.05	0.08	0.01	0.03	0.04
117	0.57205752	0.21	0.12	1.21	0.01	0.02	0.03	0.01	0.01	0.02
118	0.59250096	0.09	0.05	1.15	0.00	0.01	0.01	0.00	0.00	0.01
119	0.61328868	0.04	0.02	1.09	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
120	0.63441976	0.014	0.009	1.03	0.00	0.001	0.002	0.00	0.001	0.001
121	0.65589386	0.005	0.003	0.96	0.00	0.000	0.001	0.00	0.000	0.000
122	0.67770989	0.002	0.001	0.82	0.00	0.000	0.000	0.00	0.000	0.000
123	1.00000000	0.001	0.001	0.50	0.00	0.000	0.000	0.00	0.000	0.000





# Anhang F

## Bewertungsprinzipien für Finanzinstrumente

### F.1 Einleitung

Es gibt viele Möglichkeiten, Finanzinstrumente zu bewerten. In diesem Kapitel werden wir die Bewertungsmethoden kennen lernen, die von der JWG (Joint Working Group of Standard Setters) vorgeschlagen werden (siehe [\[AAA\]](#) und [\[Casact\]](#)). Diese Methoden können wir auch auf viele Versicherungsverträge anwenden, weil sie vertragliche Rechte und Verpflichtungen festlegen, die zu Cash Flows oder anderen Finanzinstrumenten führen.

#### F.1.1 JWG Hierarchie von Bewertungsmethoden

Methode 1: Wir verwenden Marktwerte, wenn sie vorhanden sind.

Methode 2: Wenn es keinen Marktwert für dieses Instrument gibt, verwenden wir den Marktwert eines ähnlichen Produktes. Wir führen aber Anpassungen durch auf Grund deren Unterschiede.

Methode 3: Wenn weder ein Marktwert noch ein ähnliches Produkt erhältlich ist, benutzen wir den Barwert geschätzt aus künftigen Cash Flows. Dieser Barwert sollte Risikoanpassungen beinhalten.

#### F.1.2 Methode 1: Wir verwenden Marktwerte, wenn sie vorhanden sind

Immer wenn wir ein Finanzinstrument für Geld veräußern können in einem tiefen, weitreichenden und freien Markt, dann ist der Marktpreis der Fair Value.

In einigen Situationen kann ein Markt existieren, aber der Marktpreis ist nicht der faire Preis. Das ist in folgenden Situationen der Fall:

- Der Markt ist nicht tief, weitreichend und offen. Jeder Handel wird unter speziellen Bedingungen durchgeführt oder ist mit einzigartigen Betrachtungen verbunden.

**Beispiel:** Der Umfang der Handelsaktivität ist klein gegenüber dem Besitz der Hauptspieler auf dem Markt. In diesem Fall kann der Marktpreis stark durch das Angebot und die Nachfrage eines einzelnen Handelstages beeinflusst werden und ist nicht repräsentativ für laufende Marktbedingungen. ◇

- Es kann Einschränkungen auf dem Handelsmarkt geben, die den Abschluss eines fairen Tausches verunmöglichen.

**Beispiel:** Amerikanische Versicherungsgesellschaften können nicht die ganze Haftung an Rückversicherer abtreten, denn der unterzeichnende Versicherer ist haftbar für künftige Schäden, auch wenn der Rückversicherer die Schäden zurückerstattet. Weil der Erstversicherer nicht das ganze Risiko abtreten kann, ist der Preis für das Rückversicherungsgeschäft nicht der faire Preis. Dieser Preis kann aber als Richtlinie dienen.◇

- In seltenen Fällen müssen wir wegen der Grösse des Finanzinstrumentes eine spezielle Betrachtung durchführen.

**Beispiel:** Ein grosses Aktienpaket, welches das Kontrollrecht einer Gesellschaft repräsentiert, kann einen grösseren Fair Value haben als das Produkt mit der gleichen Anzahl Einzelaktien. Ein Kontrollrecht hat einen Wert, der verschieden ist von einer Einzelaktie, die auf dem Markt gehandelt wird. ◇

**Bemerkung:** Wenn ein Marktpreis existiert, darf er nicht vernachlässigt werden. Auch wenn wir diesen Wert nicht direkt als Fair Value verwenden können, dient er als Anhaltspunkt. ◇

### F.1.3 Methode 2: Wir verwenden Marktwerte von ähnlichen Instrumenten und passen sie gegebenenfalls an

Nicht-Versicherungsgesellschaften bieten teilweise Finanzinstrumente an, die denjenigen von Versicherungsgesellschaften gleichen.

**Beispiel:** Rentenzahlungen mit minimalem Versicherungsrisiko.

Mit diesen Produkten können wir ein Portfolio ("measurement portfolio") von öffentlich gehandelten Wertpapieren konstruieren, welches sich wie der Versicherungsvertrag verhält und die selben Risiken enthält. Dann dient der Wert des Portfolios als vernünftige Schätzung des Wertes des Versicherungsvertrages. ◇

**Problem:** Diese Portfolios existieren nicht, wenn Versicherungsrisiken wie Sterblichkeit, Krankheit oder Sachschaden im Spiel sind. Der Wert dieser Portfolios kann dann nur als Richtwert dienen und wir müssen Anpassungen anbringen, die dem Versicherungsrisiko entsprechen.

### F.1.4 Methode 3: Wenn kein Marktwert zugänglich ist, verwenden wir den Barwert zukünftiger Geldflüsse

Diese Methode ist eine vernünftige Schätzung für den Marktwert, wenn sie sauber durchgeführt wird.

Das Barwertmodell ist sehr flexibel. Wir können es so anpassen, dass es den Wert des Risikos und der Unsicherheit reflektiert. Dies ist sehr wichtig, da viele Finanzinstrumente mit unsicheren Geldflüssen verbunden sind.

**Beispiel:** Derivative und Versicherungsverträge. ◇

### F.1.5 Bemerkungen

Methode 3 ist am häufigsten anwendbar. Der Hauptstreitpunkt bei der Verwendung von Barwerten ist die Bestimmung des Diskontierungssatzes.

Es ist klar, dass das Risiko den Zinssatz beeinflusst: Je grösser das Risiko, desto höher ist der Zinssatz. Der Markt bestimmt einen Zinssatz, die mit dem Risiko Null verbunden werden kann, den sogenannten *risikofreien Zinssatz*.

In den folgenden Abschnitten werden wir drei Prinzipien kennen lernen, die wir bei der Berechnung von Barwerten und von Risikoanpassungen beachten müssen.

## F.2 Prinzip 1

**Prinzip 1: Wenn es kein Risiko gibt, diskontieren wir den Cash Flow mit dem risikofreien Zinssatz.**

**Bemerkungen:**

- Der risikofreie Zinssatz bezieht sich auf die “risk-free spot rate”. Denn der risikofreie Zinssatz ist abhängig von der Zeit bis zur Zahlung.
- In der Praxis ist die Bestimmung des risikofreien Zinssatzes schwierig. Ausserdem gibt es wenige Cash Flows, die wirklich risikolos sind. Deshalb ist der auf Grund des risikofreien Zinssatzes berechnete Barwert verschieden vom Marktwert. ◇

## F.3 Prinzip 2

### F.3.1 Einleitung

Bis jetzt haben wir nur Cash Flows betrachtet, die keine Risiken mit sich brachten. Wenn die Cash Flows unsicher sind, müssen wir Prinzip 2 anwenden:

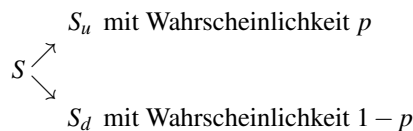
**Prinzip 2: Wenn der Cash Flow risikobehaftet ist, dann sollte der geschätzte Barwert eine Risikoanpassung beinhalten, die den Marktpreis des Risikos reflektiert.**

**Bemerkung:** Risiko für den Zahlenden des Cash Flows erhöht den Fair Value eines Finanzinstrumentes. Umgekehrt reduziert sich der Fair Value, wenn der Empfänger das Risiko trägt. ◇

Wenn für das entsprechende oder ein ähnliches Finanzinstrument kein Marktwert zugänglich ist, verwenden wir eine Barwerttechnik. Es gibt theoretisch drei korrekte Techniken zur Schätzung des Wertes von künftigen Cash Flows. Diese Techniken werden wir in den folgenden Unterabschnitten behandeln. Zur Illustration betrachten wir ein Beispiel:

**Beispiel:** Kursentwicklung der Aktie  $S$ :

Wir nehmen an, dass der Wert der Aktie in einem Jahr nur zwei mögliche Werte  $S_u$  und  $S_d$  annimmt:



◇

Mit  $r$  bezeichnen wir den risikofreien Zinssatz.

### F.3.2 Technik 1

**Wir diskontieren die erwarteten Cash Flows unter der wahren Wahrscheinlichkeit mit einem risikoangepassten Zinssatz.**

**Beispiel:**

Erwarteter Cash Flow:  $p \cdot S_u + (1 - p) \cdot S_d$

Risikoangepasster Zinssatz:  $1 + r + \underbrace{\delta_r}_{\text{Risikozuschlag}}$

Gemäss Methode 1 erhalten wir den Preis  $S$ :

$$S = \frac{p \cdot S_u + (1 - p) \cdot S_d}{1 + r + \delta_r}$$

◇

**Bemerkungen:**

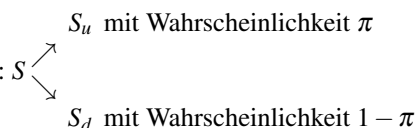
- Ein Diskontierungssatz *über* dem risikofreien Zinssatz führt zu einer *negativen* Risikoanpassung. Der so berechnete Barwert ist kleiner als der Barwert berechnet auf Grund des risikofreien Zinssatzes. Das wird häufig auf dem Anleihenmarkt beobachtet: Anleihen mit grösserem Ausfallrisiko erzielen einen höheren Ertrag und einen tieferen Preis.
- Ein Diskontierungssatz *unter* der risikofreien Rate führt zu einer *positiven* Risikoanpassung. Dies sehen wir am Preis von Versicherungsverträgen: Der Preis kann den Barwert des erwarteten Schadens und der Ausgaben überschreiten, der mit dem risikofreien Zinssatz berechnet wurde.

◇

**F.3.3 Technik 2**

**Wir verändern die Wahrscheinlichkeit des Auftretens künftiger Cash Flows und diskontieren mit dem risikofreien Zinssatz.**

**Beispiel:**

Verändern der Wahrscheinlichkeit:  $S$    $S_u$  mit Wahrscheinlichkeit  $\pi$   
 $S_d$  mit Wahrscheinlichkeit  $1 - \pi$

Gemäss Methode 2 erhalten wir den Preis  $S$ :

$$S = \frac{\pi \cdot S_u + (1 - \pi) \cdot S_d}{1 + r}$$

◇

**Bemerkungen:**

- Diese Technik wird auch Option-Pricing Technik genannt. Sie wird oft verwendet, um eine Risikoanpassung des Zinsratenrisikos zu bestimmen.
- $\pi$  ist die veränderte Wahrscheinlichkeit mit  $\pi = p - \delta_p$ .

◇

**F.3.4 Technik 3**

**Wir verändern die erwarteten Cash Flows und diskontieren mit dem risikofreien Zinssatz.**

**Beispiel:**

Veränderung des erwarteten Cash Flows =  $p \cdot S_u + (1 - p) \cdot S_d - \delta_S$ , wobei  $\delta_S$  die Unsicherheit der erwarteten Geldflüsse quantifiziert.

Gemäss Methode 3 erhalten wir den Preis  $S$ :

$$S = \frac{[p \cdot S_u + (1 - p) \cdot S_d] - \delta_S}{1 + r}$$

◇

**Bemerkungen:**

- Wir können auch eine Risikoanpassung machen, indem wir einen anderen Cash Flow verwenden, also nicht den erwarteten.

**Beispiel:** Ein Versicherungsvertrag ist verknüpft mit ungewissen Zahlungen. Wegen dem grossen Risiko fügen wir dem erwarteten Cash Flow einen bestimmten Betrag hinzu. Dieser Betrag entspricht dann dem Wert des Risikos. ◇

- Diese Technik wird oft bei Versicherungsverträgen verwendet, denn die Sterblichkeit und Krankheit erzeugen Unsicherheit in den Cash Flows. Die Anpassung soll sowohl alle nichtdiversifizierbaren Risiken von versicherungsbezogenen Faktoren wie auch alle diversifizierbaren Risiken umfassen, die wegen ineffizienten Marktbedingungen evaluiert werden müssen. ◇

### F.3.5 Bemerkungen

Wenn ein Finanzinstrument mehrere Risiken birgt, kann jedes Risiko mit einer anderen Technik berechnet werden. Verschiedene Kombinationen von Risiken und Risikoanpassungstechniken führen zu einer grossen Vielfalt von Bewertungsmethoden von Finanzinstrumenten.

## F.4 Prinzip 3

Die zu bewertenden Cash Flows sollten alle Cash Flows beinhalten, die mit dem zu bewertenden Finanzinstrument in Verbindung stehen:

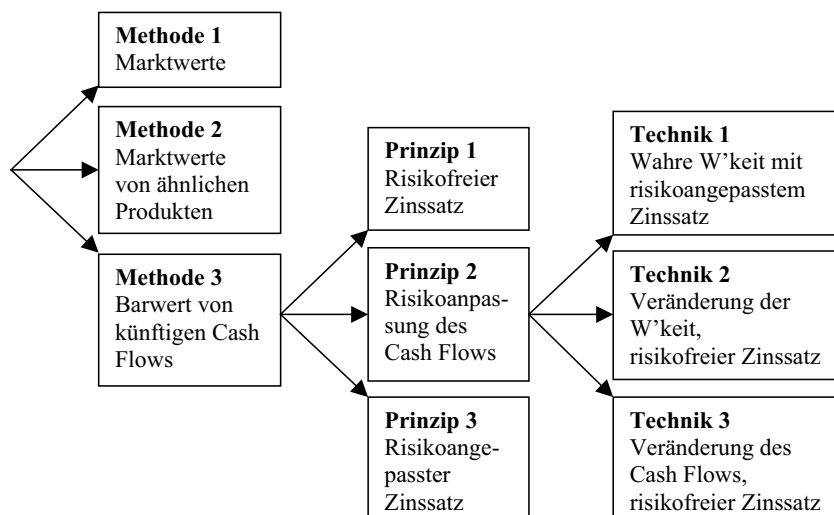
- Künftige Geldflüsse, die unter dem Vertrag auftreten können. Diese beinhalten sowohl vertragliche wie auch hypothetische Verpflichtungen (z.B. Dividenden und nicht garantierte Zinskredite).
- Kosten, die wegen der Ausübung der Verpflichtungen entstehen.

Deshalb müssen wir folgendes Prinzip anwenden:

**Prinzip 3: Wir betrachten alle möglichen Cash Flows.**

### F.5 Bemerkungen

- Wir brauchen diese Prinzipien, wenn für das zu bewertende Finanzinstrument kein Marktwert oder kein ähnliches Finanzinstrument vorhanden ist. Für Verpflichtungen von Versicherungsgesellschaften existiert im Allgemeinen kein tiefer und weiter Markt. In den meisten Fällen finden wir auch kein ähnliches Instrument, das einen Marktwert besitzt. Deshalb müssen wir die angepassten Barwerte für Marktpreisrisiken schätzen.
- Versicherungsverträge bergen per definitionem einige Risiken für den Versicherer. Deshalb ist gemäss Prinzip 2 der Barwert des erwartenden Geldflusses mit der risikofreien Rate normalerweise kein angemessener Schätzer für den Fair Value des Vertrages. Der Fair Value sollte eine Risikoanpassung haben, die den Marktpreis des Versicherungsrisikos reflektiert.
- Wenn wir bei der Rechnung vom risikofreien Zinssatz ausgehen, müssen wir je nach Risiko eine positive (Anwachsen des Wertes) oder eine negative (Fallen des Wertes) Risikoanpassung vornehmen.
- Bei Lebensversicherungen ist es üblich, dass der Vertrag während einer Periode von Jahrzehnten oder auf Lebzeiten läuft. In diesen Fällen müssen die Erneuerungsprämien bei der Bestimmung des Fair Value berücksichtigt werden, weil sie Teil des Vertrages sind.
- Einige Versicherungsverträge bieten den Policenhaltern Optionen an bezüglich Prämienzahlung, Gewinnüberschuss und Policenanleihen. In diesen Fällen wird der Fair Value geschätzt, indem die Barwerte der verschiedenen Muster der Cash Flows mit der Wahrscheinlichkeit des Auftretens gewichtet werden.



## Anhang G

# Technischer Zinssatz

Man kann die Mathematik der Lebensversicherung auf unterschiedlichen Niveaus verstehen. Man geht prinzipiell von einem Modell aus, in welchem man Aussagen herleitet und auf die Realität anwendet.

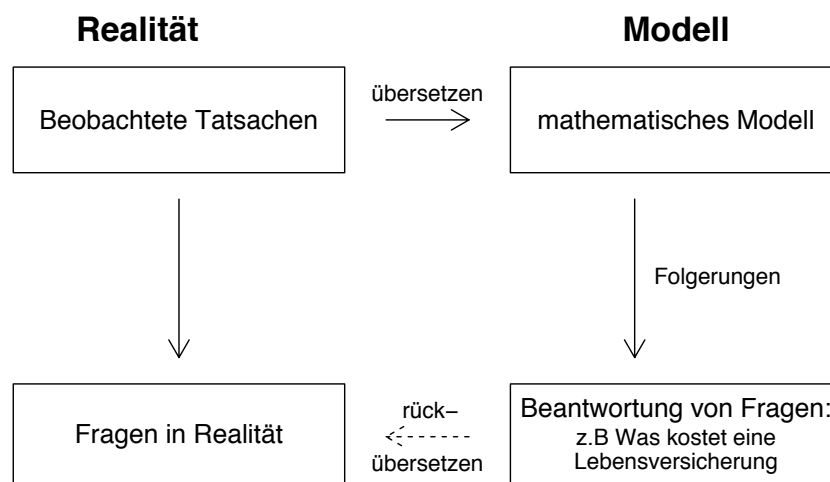


Abbildung G.1: Schematische Darstellungsweise der Vorgehensweise in der Lebensversicherungsmathematik.

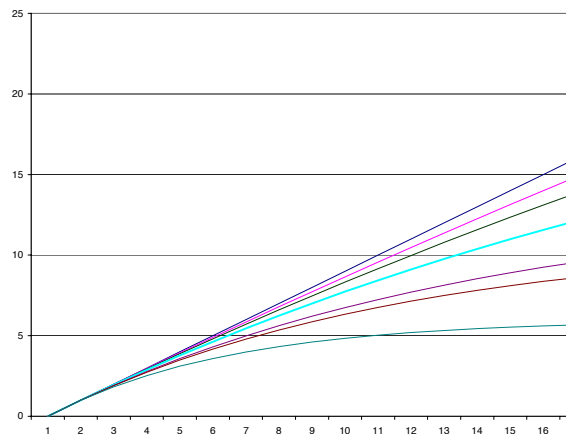
Einflussfaktor bei der Tarifierung einer Lebensversicherung ist zum einen die *versicherte Person* selbst, durch ihre *Sterblichkeit* charakterisiert, sowie der *Zinssatz* (Wertschriften) zum anderen. Betrachtet man ein Modell, so kann man die Sterblichkeit zu diskreten oder zu kontinuierlichen Zeiten (was ja eigentlich der realistischere Fall ist) behandeln. Wie man in Kapitel 3 gesehen hat, wird die Sterblichkeit in der Praxis an diskreten Zeitpunkten und nur für theoretische Behandlungen in stetiger Zeit betrachtet.

Bei der zweiten Einflussgrösse, dem Zins, macht man in der Praxis auch eine Vereinfachung, nämlich diejenige, dass man annimmt, der Zins sei *deterministisch*, was ja nicht wirklich stimmt. Eine Ausnahme bilden dabei die anteilsgebundenen Versicherungen.

Der **technische Zinssatz** ist derjenige Zinssatz, zu dem sich die Versicherung verpflichtet die Gelder zu verzinsen. Der technische Zinssatz hat damit wesentliche Auswirkungen auf den Preis einer Versicherung. In der Figur G und Tabelle G.1 kann man sehen, wie der technische Zins zum Beispiel den Barwert einer Zeitrente beeinflusst.

Aus diesem Beispiel sieht man, dass ein hoher technischer Zinsfuß die Versicherung verbilligt, ein tiefer technischer Zinsfuß diese jedoch erhöht. Ein zu hoher technischer Zinsfuß kann zur Insolvenz der Versicherung führen, da mehr versprochen wird, als gehalten werden kann. Der technische Zinsfuß regelt die *Minimalverzinsung*. Also müssen die Anlagen diesen Zins bis zum Ablauf der Versicherung erbringen können. (Die Dauer einer gemischten

Dauer (n)	0%	1%	2%	4%	8%	10%	20%
0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	1.9901	1.9804	1.9615	1.9259	1.9091	1.8334
3	3	2.9704	2.9416	2.8861	2.7833	2.7356	2.5278
4	4	3.9410	3.8839	3.7751	3.5771	3.4869	3.1065
5	5	4.9020	4.8077	4.6299	4.3121	4.1699	3.5887
6	6	5.8534	5.7135	5.4518	4.9927	4.7908	3.9906
7	7	6.7955	6.6014	6.2421	5.6229	5.3553	4.3255
8	8	7.7282	7.4720	7.0021	6.2064	5.8684	4.6046
9	9	8.6517	8.3255	7.7327	6.7466	6.3349	4.8372
10	10	9.5660	9.1622	8.4353	7.2469	6.7590	5.0310
11	11	10.4713	9.9826	9.1109	7.7101	7.1446	5.1925
12	12	11.3680	10.7868	9.7605	8.1390	7.4951	5.3271
13	13	12.2551	11.5753	10.3851	8.5361	7.8137	5.4392
14	14	13.1337	12.3484	10.9856	8.9038	8.1034	5.5327
15	15	14.0037	13.1063	11.5631	9.2442	8.3667	5.6106
16	16	14.8651	13.8493	12.1184	9.5595	8.6061	5.6755
17	17	15.7179	14.5777	12.6523	9.8514	8.8237	5.7296
18	18	16.5623	15.2919	13.1657	10.1216	9.0216	5.7746
19	19	17.3983	15.9920	13.6593	10.3719	9.2014	5.8122
20	20	18.23	16.68	14.13	10.60	9.36	5.84

Tabelle G.1: Barwert einer vorschüssigen temporären (Dauer  $n$ ) ZeitrenteAbbildung G.2: Barwerte der vorschüssigen temporären (Dauer  $n$ ) Zeitrente aus Tabelle G.1. Auf der x-Achse ist die Dauer und auf der y-Achse die Barwerte in Abhängigkeit des Zinssatzes dargestellt.

Versicherung ist vielleicht 30 Jahre, die einer anwartschaftlichen Altersrente möglicherweise 40-50 Jahre). Das Problem ist also, dass der Zins aussergewöhnlich *langfristig garantiert* werden muss. Damit ist auch klar, dass man eine sehr vorsichtige Wahl dafür treffen muss. In der Literatur findet man nicht viel dazu, aber es gibt einige Richtlinien:

- **Faustregel:**

Die  $\bar{x}$ -Rendite auf den Aktiven sollte mindestens  $\frac{1}{2}\%$  über dem technischen Zins liegen.



- **Gesetz (3.EU-Richtlinie):**

Der technische Zinssatz darf im Wesentlichen 60% des Anleihenzinssatzes für Bundesobligationen nicht überschreiten.

- **Richtlinien für Pensionsversicherungsexperten:**

„Der technische Zinssatz ist vom Pensionsversicherungsexperten so festzulegen, dass er langfristig gesehen mit einer angemessenen Marge unterhalb der effektiven Vermögensrendite liegt und über einen längeren Zeitraum beibehalten werden kann. Für dynamische versicherungstechnische Bilanzen sind solche Margen nicht im gleichen Mass erforderlich, wobei die Zukunftsannahmen die Zinswahl bestimmen.“

**Weitere Bemerkungen:**

- Es gibt einen Unterschied zwischen Pensionskassen und Versicherungen. Bei der Pensionskasse kann der Beitragssatz angepasst werden, bei der Versicherung nicht! Deshalb müssen Versicherungen mehr Sorgfalt auf die Wahl des technischen Zinssatzes legen.
- Auch bei Banken ist der technische Zinssatz nicht für eine so lange Phase garantiert. Sie behalten sich Anpassungen bei verändertem Marktumfeld vor.
- Falls die Neuanlagerendite unter den technischen Zinssatz fällt, so sind (kurzfristig) Quersubventionierungen nicht zu vermeiden. (Dies ist natürlich auch nicht ganz gerecht, da deshalb andere Versicherte „leiden“.)
- Der technische Zinssatz hängt von den Erträgen und somit von den zugrundeliegenden Währungen ab. ◇

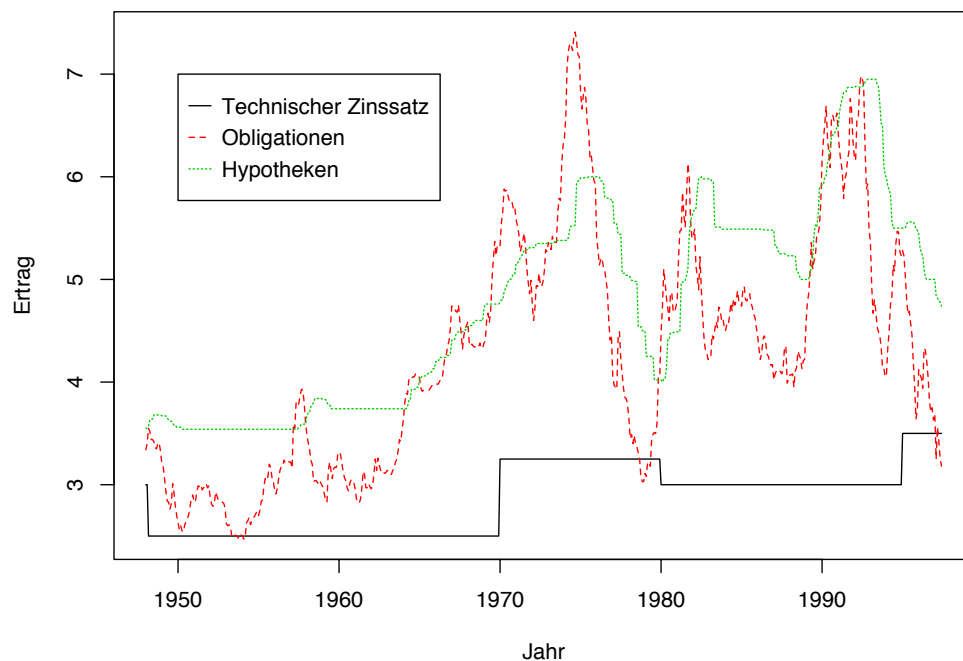


Abbildung G.3: Anlagerendite und technische Zinsfüsse in der Kollektivversicherung.





## Anhang H

# Euler Text über Lebensversicherung

### Concerning life annuities\*

Leonhard Euler<sup>†</sup>

1. Having established the true principle for which one must base the calculation for life annuities, I believe that the development of this calculation will not fail to be very interesting, indeed as much for those who wish to run such an establishment as for those who will wish to profit from it. I worked on this matter in my “Recherches générales sur la mortalité et la multiplication du genre humain”, where I showed the correct method of determining by calculation how much a man of a given age must pay in order to enjoy for his whole life a specific annual income. However, since this calculation seemed to me at the time very cumbersome, I could not convince myself to carry it out. Then, on a given occasion I was forced to undertake this calculation, for which by means of certain tricks to abbreviate the calculation, I was fortunately able to complete it.

2. There are two things on which the calculation of the income from life annuities must be based: one of them is good data on mortality, which tells us for each age how many will probably die during the course of one or many years; the other is the way in which the manager can make the money grow in value that he will have received from the annuitants, or at which interest rates he is able to place it. Together, these two things essentially determine what returns the manager will be able to commit himself to, as much with respect to the amount initially deposited as with respect to the age of the

\*Originally published as *Sur les rentes viagères*, Memoires de l'academie des sciences de Berlin **16** (1767), 165-175. A copy of the original text is available electronically at the Euler Archive, at [www.eulerarchive.org](http://www.eulerarchive.org). This paper is E335 in the Eneström index.

<sup>†</sup>Date of translation: February 17, 2005. Translated from the French by Christian Léger, 3rd year undergraduate in Honours Mathematics, and Jordan Bell, 2nd year undergraduate in Honours Mathematics, School of Mathematics and Statistics, Carleton University, Ottawa, Ontario, Canada. Email: [cleger@connect.carleton.ca](mailto:cleger@connect.carleton.ca) and [jbelle3@connect.carleton.ca](mailto:jbelle3@connect.carleton.ca)

annuitant, because it is evident that the more the profit the manager can obtain from the capital in his hands, the more they will also be able to provide the annuitant strong returns.

3. For the mortality list, the manager would no doubt risk much if they based it on the mortality of men in general which we compile from observations made in a big city or in a whole country, where we keep track equally of all men, vigorous and infirm. Now, when the business is to procure oneself life annuities, it is very natural that necessarily excluded are all those whose constitution does not seem to promise long life, thus there is reason to regard annuitants as a more robust species. It is also with this consideration that I chose in my “*Mémoire allegué la liste de M. Kerseboom*”, which he generated from observations made only on persons who enjoy life annuities: and using also this same list will assist me in the elaboration of the following calculations.

4. If the manager is not well able to place the capital that is given him by the annuitants, he would be able to afford naught very mediocre returns such that no one would want them. Once the city of Amsterdam paid ten percent annuities to all persons under the age of twenty, that is for 1000 florins they are paid 100 per year, which is an annuity so rich that the city would have suffered considerable loss if it had not generated almost 10 percent per year of the fund which this enterprise had provided it. Thus, if we can only count on 5 percent interest, the annuities must become far less considerable; however, it is on this which it seems annuities must be fixed, provided that those who will have occasion to obtain greater profit from it will hardly participate in such an enterprise, which could only be worthwhile after a large number of years.

5. For determining the cost of these annuities, we fix for each age an average lifespan, which one is equally likely to survive as to die before having reached it; that is, this term is chosen such that as many men of the same age die before this term as die after. Thus we presume that all men of this age reach exactly this term, and that they then die; on this we believe we can fix with certainty the price of the annuities, since the value of the annuities must be payable during a given number of consecutive years: and we estimate that the profit that the manager obtains on the side of those who die before their projected term is exactly compensated by the loss caused by those annuitants who survive this term. However, we will easily understand

that this reasoning is flawed, since it does not take into account the reduction in current price of an annuity which will not be paid out before many years. Given this circumstance, it will be necessary to base the calculation on true principles, as I explained in my aforementioned “Mémoire”, without making use of any reasoning which might seem suspect.

6. To achieve this, we consider a number of 1000 children born at the same time, and that the symbols (1), (2), (3), (4), etc. indicate the number of those who still live at the end of 1, 2, 3, 4, etc. years, such that in general  $(m)$  represents the number of those who will obtain the age of  $m$  years. Now let  $r$  be the annual annuity that a man of  $m$  years wishes to receive, and let  $x$  be the price which he must then pay at the present to the manager, which must be a just equivalent of the spending to which the manager engages himself by this agreement. To determine this price  $x$ , many men of the same age  $m$  must be considered, and those who reach this age. Let  $(m)$  be this number of men, and the sum they will presently pay to the manager will be equal to  $(m)x$ , which must be sufficient to provide for all the annuities which he will have to pay afterwards.

7. Of these  $(m)$  men, there will remain alive after one year  $(m+1)$ , after two years  $(m+2)$ , after three years  $(m+3)$ , and so on. Thus the manager will have to pay after one year  $(m+1)r$ , after two years  $(m+2)r$ , after three years  $(m+3)r$ , etc., until all of these annuitants will be extinguished. We thus only have to reduce all of the payments at the present time by the amount of 5 percent, and make the sum equal to  $(m)x$  to determine the value of  $x$ . Now to make the calculation more general, instead of  $\frac{105}{100}$  or  $\frac{21}{20}$ , let us write the letter  $\lambda$ , and the sum of all the annuities which the manager must pay successively will now be:

$$\frac{(m+1)r}{\lambda} + \frac{(m+2)r}{\lambda^2} + \frac{(m+3)r}{\lambda^3} + \frac{(m+4)r}{\lambda^4} + \text{etc.}$$

which being equal to  $(m)x$ , will give:

$$x = \frac{r}{(m)} \left( \frac{(m+1)}{\lambda} + \frac{(m+2)}{\lambda^2} + \frac{(m+3)}{\lambda^3} + \frac{(m+4)}{\lambda^4} + \text{etc.} \right)$$

8. Then the exact price is found which a man of  $m$  years must pay in order to enjoy an annual annuity  $r$  during his whole life, this one having been

initially placed at 5 percent, puts the manager precisely within the means of paying from that point the annuities as long of the number of annuitants is sufficiently large. We understand well, having thus placed initially all the capital which the manager will have received, the following year the interest will not be sufficient to pay the annuities but that it will be needed to employ part of the capital, hence the capital will suffer every year a diminution: however, it will only be entirely extinguished when the annuitants are dead. For this reason the manager will be well obliged to raise the price of the annuities that I have just found, according to the particular circumstances and expenses which such an establishment requires.

9. We clearly see that the determination of this price called  $x$  requires a calculation as tedious as it is unpleasant, especially for low ages, where the number of terms to be added together is very considerable. But it is not hard to notice, that having already done a calculation for a certain age, we will from it be easily able to extract the one which corresponds to a later or earlier year. To better explain this artifice, I will employ this character  $\overline{m}r$  to indicate the price which a man of age  $m$  must pay for the annuity  $r$ : in order that

$$\overline{m} = \frac{1}{(m)} \left( \frac{(m+1)}{\lambda} + \frac{(m+2)}{\lambda^2} + \frac{(m+3)}{\lambda^3} + \frac{(m+4)}{\lambda^4} + \text{etc.} \right),$$

from there, for men aged  $m+1$  years we will have,

$$\overline{m+1} = \frac{1}{(m+1)} \left( \frac{(m+2)}{\lambda} + \frac{(m+3)}{\lambda^2} + \frac{(m+4)}{\lambda^3} + \frac{(m+5)}{\lambda^4} + \text{etc.} \right),$$

from which we conclude:

$$\lambda(m)\overline{m} = (m+1) + (m+1)\overline{m+1},$$

and starting,

$$\overline{m} = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{(m+1)}{(m)} (1 + \overline{m+1}),$$

such that having found the value  $\overline{m+1}$ , we will from it calculate easily enough the value of  $\overline{m}$ .

10. With the aid of this artifice, after having started with the age of 90 years, I calculated the price of an annuity  $r$  successively for all inferior ages,

down to those children newly born; where I obtained the following table, by fixing the annuity  $r$  at 100 crowns, and interest at 5 percent.

Table

*Table which indicates the price of a life annuity of 100 crowns for all ages*

age in years	number of survivors	price of an- nuity	age in years	number of survivors	price of an- nuity
0	1000	1155.50	25	552	1403.60
1	804	1409.04	26	544	1395.45
2	768	1448.84	27	535	1389.87
3	736	1487.43	28	525	1387.16
4	709	1521.27	29	516	1382.54
5	690	1541.32	30	507	1376.82
6	676	1551.90	31	499	1368.84
7	664	1558.94	32	490	1363.68
8	654	1561.92	33	482	1355.63
9	646	1560.33	34	475	1344.38
10	639	1556.29	35	468	1332.71
11	633	1549.59	36	461	1320.60
12	627	1542.64	37	454	1308.01
13	621	1535.42	38	446	1298.04
14	616	1525.28	39	439	1284.67
15	611	1514.65	40	432	1270.76
16	606	1503.50	41	426	1253.09
17	601	1491.81	42	420	1234.54
18	596	1479.54	43	413	1218.24
19	590	1469.31	44	406	1201.21
20	584	1458.63	45	400	1180.19
21	577	1450.18	46	393	1161.27
22	571	1438.68	47	386	1141.44
23	565	1426.66	48	378	1123.88
24	559	1414.07	49	370	1105.59
25	552	1403.60	50	362	1086.52
$m$	$(m)$	$\overline{m}$	$m$	$(m)$	$\overline{m}$



age in years	number of survivors	price of an- nuity	age in years	number of survivors	price of an- nuity
50	362	1086.52	70	175	638.30
51	354	1066.62	71	165	610.83
52	345	1049.17	72	155	582.75
53	336	1031.14	73	145	554.09
54	327	1012.49	74	135	524.89
55	319	989.78	75	125	495.22
56	310	969.44	76	114	470.16
57	301	948.35	77	104	441.13
58	291	929.98	78	93	417.98
59	282	907.64	79	82	397.75
60	273	884.44	80	72	375.64
61	264	860.32	81	63	350.77
62	254	838.90	82	54	329.69
63	245	813.21	83	46	309.38
64	235	790.20	84	39	279.44
65	225	766.59	85	32	257.60
66	215	742.30	86	26	232.90
67	205	717.43	87	20	217.91
68	195	691.93	88	15	205.07
69	185	665.14	89	11	193.62
70	175	638.30	90	8	179.54
$m$	$(m)$	$\overline{m}$	$m$	$(m)$	$\overline{m}$

11. M. Kerseboom only continued the table on mortality up to 95 years, and for this reason I did not judge it convenient to continue this one beyond 90 years, since probably at this age nobody will desire life annuities. At the least, in almost all plans, such ancients find themselves filed into the same class as those of 60 or 70 years, notwithstanding that it would be very unjust if we wanted to demand of a nonagenarian more than a third of the price which a septuagenarian must pay or a quarter of what a sexagenarian must pay. However, if we are curious to see the continuation of my table, here it is:

$m$	90	91	92	93	94
$(m)$	8	6	4	3	2
$\overline{m}$	179.54	151.35	138.38	93.73	47.62

But I would not advise a manager to get involved with such ancients unless their number be sufficiently considerable; which is a general rule for all establishments founded on probabilities.

12. From there we will conclude easily how much the manager should pay in interest for each age for a given sum which we will have initially given. It is not necessary to enter here in as much detail, and it suffices to mark for every five years which the annuitants might expect.

age	percent	age	percent	age	percent
0	$8\frac{2}{3}$	30	$7\frac{1}{4}$	60	$11\frac{1}{3}$
5	$6\frac{1}{2}$	35	$7\frac{1}{2}$	65	13
10	$6\frac{1}{3}$	40	8	70	$15\frac{2}{3}$
15	$6\frac{1}{2}$	45	$8\frac{1}{2}$	75	20
20	$6\frac{3}{4}$	50	9	80	$25\frac{2}{3}$
25	7	55	10	85	$38\frac{1}{3}$
30	$7\frac{1}{4}$	60	$11\frac{1}{3}$	90	$55\frac{1}{2}$

On this basis, the manager will obtain no profit unless he is able to appreciate his money at more than 5 percent.

13. Thus, if a state has need of money and it can find at better than 5 percent interest as much as it needs, then it would be assuredly very bad if it wished to establish such life annuities that I have just determined on this basis of 5 percent, since, with regard to the burden which such an establishment necessarily imposes, it would always be better to borrow the sum which it needs at 5 percent which it would then be able to satisfy according to circumstance, in the place of life annuities which would remain in its charge during a very long period. Or else, the price on the annuities would have to be raised beyond that which I have just described to bring it any benefit, but then it might be difficult to find any more annuitants unless it be ancients over 60 years old, who could be amazed by interests of 10 percent or more.

14. But wanting to establish more advantageous life annuities for annuitants, it would be a project hardly proper for satisfying a state, since this would return to the same, then if one wanted to burden one's self with debts at 6 or more percent: while we could borrow at 5 percent without being subjected to the trouble which life annuities would incur. Indeed, if a state wants to establish the life annuities described here and calculated on the

basis of 5 percent, this charge need only be regarded as a loan taken at 6 percent, because of the number of arrangements which would be required for it. Thus I hardly see a case where the establishment of life annuities can be advantageous to a state, as long as we can borrow money at 5 percent and perhaps less. But we can imagine a different type annuity which may be better tailored, although still based on 5 percent. I want to speak of annuities which must not begin to run before 10 or 20 years; and we easily understand that the price of such annuities will be quite mediocre, capable of attracting the public only poorly.

15. Consider this question also in general, and ask how much a man of age  $m$  years must pay presently to obtain an annual annuity  $r$  which will not begin to be paid to him before  $n$  years, such that after this time he is able to enjoy it regularly until his death. Let  $x$  be the current price of this annuity, and we will find as here below:

$$x = \frac{r}{(m)} \left( \frac{(m+n)}{\lambda^n} + \frac{(m+n+1)}{\lambda^{n+1}} + \frac{(m+n+2)}{\lambda^{n+2}} + \text{etc.} \right).$$

Thus to calculate the previous explained ordinary annuities, we will have:

$$\overline{m+n-1} = \frac{1}{(m+n+1)} \left( \frac{(m+n)}{\lambda} + \frac{(m+n+1)}{\lambda^2} + \frac{(m+n+2)}{\lambda^3} + \text{etc.} \right),$$

from which we conclude,

$$x = \frac{r}{(m)} \cdot \frac{(m+n-1)}{\lambda^{n-1}} \cdot \overline{m+n-1} = \frac{r}{\lambda^{n-1}} \cdot \frac{(m+n-1)}{(m)} \cdot \overline{m+n-1},$$

where  $\overline{m+n-1}$  expresses the current price of the ordinary annuity for a man of age  $m+n-1$  years.

16. Thus if we ask the current price of an annual annuity of 100 crowns which will not begin to be paid for 10 years, for a man of age  $m$  years we will take from the table developed in §10 the price of the ordinary annuity which is suited to the age  $m+9$  years, and we will multiply by  $\left(\frac{20}{21}\right)^9 \frac{(m+9)}{(m)}$  to obtain the value sought for  $x$ . From there I calculated the following tables for every 5 years:

Table

*Prices of life annuities of 100 crowns which will not start to run for 10*

<i>years</i>					
age	price of the	age	price of the	age	price of the
years	annnuity	year	annuity	year	annuity
0	649.75	30	717.05	60	290.55
5	877.77	35	671.73	65	203.11
10	874.50	40	610.40	70	120.14
15	833.95	45	533.55	75	56.20
20	787.43	50	455.78	80	19.07
25	745.72	55	375.25		
30	717.05	60	290.55		

Table

*Price of a life annuity of 100 crowns will not begin to run for 20 years*

age	price of the	age	price of the	age	price of the
year	annuity	year	annuity	year	annuity
0	343.06	30	319.30	60	47.28
5	453.36	35	272.96	65	19.17
10	441.81	40	234.47	70	4.82
15	413.60	45	183.72		
20	382.17	50	134.52		
25	349.63	55	87.91		
30	319.30	60	47.28		

17. Maybe such a project of life annuities will better succeed in spite of being fixed on a basis of 5 percent. It seems that it will always be advantageous for a newborn child to ensure it, assuming a price of 343 or 350 crowns, a fixed annuity of 100 crowns per year, though it will not start to be paid before the child attains the age of 20: and if we wish to use the sum of 3500 crowns, it will always be a nice establishment to be able to enjoy from the age of 20 years a fixed pension of 1000 crowns. However, it is doubtful that there will be many parents who will well be willing to make such a sacrifice for the good of their children. Perhaps there will be more men of 60 years who will not mind paying first 3000 crowns to be assured a fixed pension of 1000 crowns per year once they have passed their 70-th year.

# Literaturverzeichnis

- [AAA] American Academy of Actuaries, 2002: Fair Valuation of Insurance Liabilities: Principles and Methods.
- [Betsch] Betsch O., Groh A.P., Lohmann L.G.E.: Corporate finance: Unternehmensbewertung, M & A und innovative Kapitalmarktfinanzierung. München 1998 (Vahlen).
- [Ber] Behrens, H-G., Ausgleichsverfahren, Schriftenreihe Angewandte Versicherungsmathematik, 15, 92-95.
- [Bowetal] Bowers, Gerber, Hickman, Jones, Nesbitt, Actuarial Mathematics, Society of Actuaries' Textbook, 1986.
- [Braun] Braun, Geschichte der Lebensversicherung und der Lebensversicherungstechnik, Duncker & Humblot, Berlin, 1963.
- [Bühlm1] Bühlmann H.: Life Insurance with Stochastic Interest Rates. In *Financial Risk in Insurance*, Ottaviani G. (Ed.). Berlin 2000 (Springer).
- [Bühlm2] Bühlmann H.: Diffusion Limits of Discrete Models for Stochastic Interest Rates: What can we say about Convergence?
- [Casact] Casualty Actuarial Society Task Force on Fair Value Liabilities, 2002. White Paper on Fair Valuing Property/Casualty Insurance Liabilities. Casualty Actuarial Society, [www.casact.org/research/tffvl/whitepaperfinal.PDF](http://www.casact.org/research/tffvl/whitepaperfinal.PDF).
- [Chuarda] Chuard, Mathématiques financières, Univ. Lausanne, 1983.
- [Chuardb] Chuard, Problèmes de math. financières, Univ. Lausanne, 1985.
- [DAV94a] Mitteilungen DAV 1/94, Bestimmung einer angemessenen Sterbetafel für Lebensversicherungen mit Todesfallcharakter.
- [Dobson] Dobson, A. J., An Introduction to Generalized Linear Models, Statistics Texts from Chapman and Hall, Chapman & Hall London, 1990
- [FMW88] Forfar, D. O., McCutcheon, M. A. und Wilkie, A. D., On Graduation by Mathematical Formula. ,J. Inst. Act., 115 (1988), I, 1–149.
- [Gerber] Gerber, H. U., Life Insurance Mathematics, Springer-Verlag, 3rd Edition, 1997.
- [Girard] Girard L.: Market Value of Insurance Liabilities: Reconciling the Actuarial Appraisal and Option Pricing Methods. North American Actuarial Journal, Vol. 4, 2000.
- [Hagelschuer] Hagelschuer, Lebensversicherung, Gabler, Wiesbaden, 1987.
- [Her87] Herzog B., Die Überlebensordnungen AHV VI und AHV VIbis, MVSVM 1987/2.
- [Isen] Isenbart, Münzner: Lebensversicherungsmathematik für Praxis und Studium, Gabler, Wiesbaden, 1987.

- [Jordan] Jordan, Life Contingencies, Society of Actuaries, Textbook, 1975.
- [Kreyszig] Kreyszig, Statistische Methoden und ihre Anwendungen, Vanderhoeck und Ruprecht, Göttingen, 1979.
- [Koller] Koller, Stochastische Modelle in der Lebensversicherung, Springer-Verlag, 2000
- [Luh86] Lühr, K.-H., Neue Sterbetafeln für die Rentenversicherung, DGVM XVII (1986), 485-513.
- [Nol59] Nolfi, Die Berücksichtigung der Sterblichkeitsverbesserung in der Rentenversicherung nach der Optimalmethode der Spieltheorie. MVSVM 1959
- [McCullagh] McCullagh, P., Nelder, J. A., Generalized Linear Models, Chapman & Hall London, 2nd edn, 1999
- [Ort94] Ort M., Konkretisierung der Anforderungen an den Qualitätsstandard für die Einzelkapitalversicherung. Biometrische Rechnungsgrundlagen, Version vom 28. Juli 1994.
- [Panjer] Panjer H.H. et al.: With applications to investments, insurance and pensions. USA 1998 (The Actuarial Foundation).
- [Ren92] Renshaw, A. E., Joint Modelling for Actuarial Graduation and Duplicate Policies. , J. Inst. Act., 119 (1992), I, 69–85.
- [RHH96] Renshaw, A. E., Haberman, S. und Hatzopoulos, P. , The Modelling of Recent Mortality Trends in United Kingdom Male Assured Lives., Br. Act. J., 2, II (1996), 449–447.
- [Sachs] Sachs, L., Angewandte Statistik, Springer-Verlag, 7. Auflage, 1992.
- [Saxer] Saxer, Versicherungsmathematik 1. Teil, Springer, Berlin, 1955.
- [SS] Schmithals, B. und Schütz, E. U.: Herleitung der DAV-Sterbetafel 1994 R für Rentenversicherungen, DGVM.
- [Stahel] Stahel, W. A., Eine Einführung für Naturwissenschaftler, Vieweg Verlag, 1999.
- [von Wartburg] von Wartburg, Lebensversicherung, Lang und Cie, Bern, 1974.
- [Wolff] Wolff, Versicherungsmathematik, Springer, Wien, 1970.
- [Wolfsdorf] Versicherungsmathematik, Teil 1 Personenversicherungen (inkl. Krankenversicherung), Teubner Studienbücher Stuttgart, 1986.
- [Zwinggi] Zwinggi, Versicherungsmathematik, Birkhäuser, Basel, 1945.